第8章 无穷级数

Outline

泰勒级数

Outline

泰勒级数

泰勒级数

前面我们讨论了幂级数的收敛域及其和函数性质.

现在我们研究一个相反的问题:
给定函数 $f(x)$, 要考虑它是否能在某点的附近展成幂级数,
即是否可以找到一个幂级数在这一点的附近收敛, 且其和函数就是给定的函数 $f(x)$.

幂级数展开式的唯一性

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $N_\delta(x_0)$ 内能展成幂级数, 即有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad x \in N_\delta(x_0),$$

那么, 根据和函数的性质, 可知 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内应具有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)! a_{n+1}(x - x_0) + \frac{(n+2)!}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots.$$

由此可得

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n.$$

于是

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

这表明, 如果函数 $f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 有幂级数展开式, 那么该幂级数的系数 a_n 由公式

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

确定, 即该幂级数必为

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

亦即展开式必为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad x \in N_\delta(x_0).$$

幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**泰勒级数**,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\qquad x\in N_\delta(x_0).$$

称为 $f(x)$ 的在点 x_0 的泰勒展开式.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1/\Delta x}{e^{1/\Delta x^2}} = 0.$$

$$0 = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots$$

$f(x)$ 在 $N_\delta(x_0)$ 内能展成幂级数的充要条件是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \qquad x \in N_\delta(x_0).$$

在 $N_\delta(x_0)$ 内成立. 即级数

$$\begin{aligned} & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

在 $N_\delta(x_0)$ 内收敛, 且收敛于 $f(x)$.

Theorem

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $N_\delta(x_0)$ 内具有任意阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展成泰勒级数的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \qquad x \in N_\delta(x_0)\ ,$$

这里 $R_n(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒公式的余项.

Proof.

$f(x)$ 的 n 阶泰勒公式为

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

其中

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \\ R_n(x) &= f(x) - P_n(x), \end{aligned}$$

$R_n(x)$ 就是定理中所指的余项，$P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的泰勒级数前 $n+1$ 项的部分和. 因此, 根据级数收敛的定义有

$$\begin{aligned} & f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in N_\delta(x_0), \\ \Longleftrightarrow & f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x), \quad x \in N_\delta(x_0), \\ \Longleftrightarrow & \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in N_\delta(x_0). \end{aligned}$$

□

特别地, 如果 $x_0=0$, 则泰勒级数变为

$$f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n.$$

这个级数称为 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**.

如果 $f(x)$ 能在 $N_\delta(0)$ 内展开成x 的幂级数, 则有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n, \qquad x\in N_\delta(0).$$

上式称为 $f(x)$ 的麦克劳林展开式.

将函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数

(1) 求出 $f^{(n)}(x_0)$ ($n=0,1,2\cdots$), 如果有一个 n 使得 $f^{(n)}(x_0)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不能展成泰勒级数.

(2) 写出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

并求出收敛半径 R.

(3) 利用余项 $R_n(x)$ 的表达式

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{\,(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}, \quad (0<\theta<1)$$

考察当 $x \in N_\delta(x_0)$ 时, 余项 $R_n(x)$ 的极限是否为零. 如果为零, 则函数 $f(x)$ 在 $N_R(x_0)$ 内的泰勒展开式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in N_R(x_0).$$

Example

将函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

Example

将函数 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

Proof.

显然 e^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有任意阶的导函数, 且

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}|_{x=0} = 1, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

因而其麦克劳林级数为

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

又其余项 $R_n(x)$ 满足

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

对于任意取定的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

因此, e^x 的麦克劳林展开式为

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

$\square$

Example

将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

Example

将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

Proof.

$\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内也有任意阶的导函数, 且

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

于是得 $\sin x$ 的麦克劳林级数为

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots.$$

它的收敛半径为 $R=+\infty$, 且其余项 $R_n(x)$ 满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\theta x+\frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\quad n\to\infty$$

因此, $\sin x$ 的麦克劳林展开式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty.$$

□

同理, $\cos x$ 的麦克劳林展开式为

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\quad -\infty<x<+\infty.$$

由于

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad -1<x<1.$$

上式两边从 0 到 x 积分, 可得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, \quad -1<x\leq 1.$$

利用 e^x 的麦克劳林展开式可得 $a^x(a>0, a\neq 1)$ 的麦克劳林展开式

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x\ln a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n, \quad -\infty<x<+\infty.$$

由例题

Example

求幂级数

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$$

的和函数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 的值.

及泰勒展开式的唯一性可得

$$\mathrm{arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1.$$

Example

将函数 $f(x) = (1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中 m 为任意实数.

Proof.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, \\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
f^{(n)}(x) &= m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

所以

$$f(0)=1, \quad f'(0)=m, \quad f''(0)=m(m-1), \ \cdots,$$

于是泰勒级数为

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{m-n}{n+1}\right| \to 1, \qquad (n\to\infty).$$

因此, 对于任何实数 m, 这级数在开区间 $(-1,1)$ 内收敛.

要证明 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 需要利用余项的柯西形式：

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))\frac{(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}}{n!}$$

我们这里不给出证明. 令 $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}x^n \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} \\ &= \frac{m(m-1)\cdots(m-n)x^{n+1}}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{n-1}. \end{aligned}$$

这样得到 $(1+x)^m$ 的泰勒展开式

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n, \quad -1 < x < 1.$$

□

Remark

上面的公式称为二项展开式.
特别地, 当 m 为正整数时, 这就是初等代数中的二项式定理.

Example

求函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的泰勒展式.

Proof.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad (-1 < x \leq 1),$$

以 $(-x)$ 代替上式中的 x 得

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots\right), \qquad (-1 \leq x < 1),$$

因此

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots\right), \quad (-1 < x < 1).\end{aligned}$$

□

估算 $\ln 2$?

Example

将函数 $\sin x$ 展开成 $(x - \frac{\pi}{4})$ 的幂级数.

Example

将函数 $\sin x$ 展开成 $(x-\frac{\pi}{4})$ 的幂级数.

Proof.

因为

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right].
\end{aligned}
$$

而

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!}-\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\frac{(x-\frac{\pi}{4})^5}{5!}-\cdots,$$

$x\in(-\infty,+\infty)$, 所以

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\cdots\right]$$

$x\in(-\infty,+\infty)$. □

Example

将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

Proof.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)} \\
&= \frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})} - \frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}.
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})} &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n, \quad -1<x<3, \\
\frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})} &= \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n, \quad -3<x<5,
\end{aligned}
$$

所以

$$
f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2\cdot 4^{n+1}}\right)(x-1)^n, (-1<x<3).
$$

□

Example

将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

Example

将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数. Hint: $\left(\frac{1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}$.

Example

将函数 $f(x) = \dfrac{x-1}{4-x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(1)$.

Example

设$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$.

Example

将函数 $f(x) = \arctan \dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

Example

将 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 展开成 x 的幂级数.

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac12}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac12)\cdots(-\frac12-(n-1))}{n!}(x^2)^n, \quad |x|<1.$$

$$(-\tfrac12)\cdots(-\tfrac12-(n-1)) = (-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

Example

将 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ 展开成 x 的幂级数.

$$=\int_0^x \frac1t\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\,dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

Example

将 $f(x)=\int_0^x (t-1)^2e^{t^2-2t}\,dt$ 在 $x=1$ 处展开幂级数.

$$\frac1e(t-1)^2e^{(t-1)^2}$$

$$=\frac1e(t-1)^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-1)^{2n}}{n!}\right]$$

幂级数在近似计算中的应用

有了函数的幂级数展开式, 我们可以利用它进行近似计算.

Example

计算 $\ln(1.2)$ 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4}.

Proof.

$$\ln(1.2) = \ln(1+0.2) = 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 + \cdots$$

这是一个交错级数, 若取前 n 项, 则误差

$$R_n < \frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1},$$

令

$$\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1} < 10^{-4}.$$

经计算 $n = 4$ 满足要求. 于是前四项, 每项取到小数点后五位, 得

$$\ln(1.2) \approx 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 \approx 0.1823.$$

□

Example

计算 e 的近似值, 精确到 10^{-6}.

Example

计算 e 的近似值, 精确到 10^{-6}.

Proof.

$e = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$. 令取 $1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots m} \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

令 $\dfrac{1}{n!n} < 10^{-6}$ 即 $n!n > 10^6$. 经计算 $n = 9$ 满足要求.

为了使“四舍五入”引起的误差与截断误差之和不超过 10^{-6}, 计算时应取到小数点后七位, 所以

$$e \approx 1 + \sum_{n=1}^{9} \frac{1}{n!} \approx 2.718282.$$

$\square$

Example

求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

Proof.

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, 所以只能用近似计算来求此定积分. 因为

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} + \cdots \\
&\qquad\qquad + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n+1)n!} + \cdots\Big),
\end{aligned}$$

这是一个交错级数, 其误差 R_n 满足

$$|R_n| \leq \frac{1}{2^{2n+3}(2n+3)(n+1)!}.$$

令 $\dfrac{1}{2^{2n+3}(2n+3)(n+1)!} < 10^{-4}$ 即 $2^{2n+3}(2n+3)(n+1)! > 10^4$, 经计算 $n=3$ 满足要求. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)\\ &\approx 0.4613.\end{aligned}$$

□

- Example 1: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1$$

10^{-8}: $N \approx 10^8$

- Example 1: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + ...$
  Noticing that

$$\begin{cases} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + ..., & -1 < x \leq 1 \\ \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) = 2\Big(y + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} + ... + \dfrac{y^{2n+1}}{2n+1} + ...\Big), & |y| < 1 \end{cases}$$

$y = \frac{1}{3}$: $\quad \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \ln 2$

- Example 1: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$
  Noticing that
  $$\begin{cases} \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+...+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+..., & -1<x\leq 1 \\ \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)=2\Big(y+\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{y^5}{5}+...+\dfrac{y^{2n+1}}{2n+1}+...\Big), & |y|<1 \end{cases}$$
  Recalculate via
  $$2\bigg(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}\Big)^3+\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{3}\Big)^5+...+\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2n+1}+...\bigg)$$

- Example 1: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + ...$
  Noticing that
  $$\begin{cases} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + ..., & -1 < x \le 1 \\ \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) = 2\Big(y + \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^5}{5} + ... + \dfrac{y^{2n+1}}{2n+1} + ...\Big), & |y| < 1 \end{cases}$$
  Recalculate via
  $$2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + ... + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} + ...\right)$$
- Example 2: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. About 10^{20} terms are needed to compute $\zeta(1.1)$ accurate to 1 percent!

By using the following asymptotic expansions

$$\zeta(s) \sim \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{1}{(s-1)N^{s-1}} - \frac{1}{2N^s} + \frac{B_2\, s}{N^{s+1}} + \frac{B_4 s(s+1)(s+2)}{2N^{s+1}} + \cdots ,$$

$$N \to \infty$$

we have

N	$\sum_{n=1}^{N} n^{-1.1}$	$\sum_{n=1}^{N} n^{-1.1}$ + [optimal truncation of (8.1.24)]	Number of terms in (8.1.24)
1	1.000	10.581 720 833 333 333 333 333 333 3	5
2	1.467	10.584 451 922 653 952 985 003 529 0	9
3	1.765	10.584 448 469 577 813 110 695 320 3	14
4	1.983	10.584 448 464 943 248 378 747 081 3	18
5	2.153	10.584 448 464 950 822 569 464 200 9	22
6	2.292	10.584 448 464 950 809 804 485 139 7	26
7	2.410	10.584 448 464 950 809 826 424 558 5	30
8	2.512	10.584 448 464 950 809 826 386 333 6	34
9	2.601	10.584 448 464 950 809 826 386 400 9	38
10	2.680	10.584 448 464 950 809 826 386 400 8	43