习题 9.2

1. 将函数 $f(x)=3\ (0<x<\pi)$ 展开成正弦级数，并由此推出 $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$

解：将f(x)进行奇延拓 $f(x)=\begin{cases}3, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ -3, & -\pi<x<0\end{cases}$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}3\sin nx\,dx=\frac{6}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{6}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{-6}{n\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}\frac{12}{n\pi}, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)\pi)=f(x)$

令 $x=\frac{\pi}{2}$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{(2n-1)\pi}\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)=3$ 即 $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ □

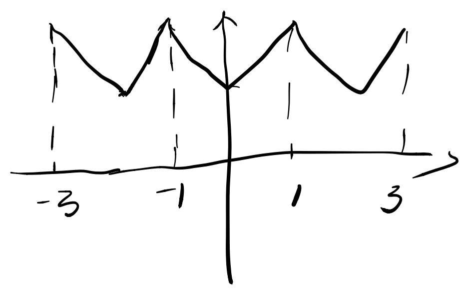
习题 9.3

3. 已知f(x)是周期为2的周期函数，且 $f(x)=2+|x|,\ (-1\le x\le 1)$

(1) 求f(x)的傅里叶级数

(2) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和

(3) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和



解：(1) $l=0$ 且f(x)是偶函数．所以 $b_n=0$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)dx=2\left(2\times1+\frac{1}{2}\right)=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,dx=4\int_0^1\cos n\pi x\,dx+2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$$

令 $I=\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$

所以 $I=\frac{1}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin n\pi x=\frac{1}{n\pi}x\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,dx=\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1=\frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)$

$=\begin{cases}\frac{-2}{n^2\pi^2}, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$ 　　所以 $a_n=\begin{cases}\frac{-4}{n^2\pi^2}, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases}$

所以 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x$

(2) 由(1)可知，令x=0有，$f(0)=2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

7、将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h\\ 0, & h<x<\pi\end{cases}$，分别展开成正弦级数和余弦级数

解：该函数周期为 2π，$l=\pi$

先将该函数做奇延拓，可知 $a_n=0$

所以 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h \sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^h=\frac{2}{n\pi}(1-\cos nh)$

所以将该函数展开成正弦级数为 $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx$

再将该函数做偶延拓，可知 $b_n=0$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^h dx=\frac{2h}{\pi}$

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h \cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin nx\Big|_0^h=\frac{2}{n\pi}\sin nh$

所以将该函数展开成余弦级数为 $\frac{h}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin nh\cos nx$