微积分II（第一层次）期末试卷 (2017.7.4)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值，并讨论是极大还是极小.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n+2}{n+1}\quad(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $(x^2y^3+xy)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$ 的通积分.

5. 求微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\oint_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 取逆时针方向，分别取以下两种路径：

(1) 圆周 $x^2+y^2=2x+2y-1$;　　(2) 闭曲线 $|x|+|y|=1$.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C\frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y=R$ 的交线，从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算第二类曲面积分 $I_3=\displaystyle\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取下侧.

五、(10分)　(1) 证明 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(2) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性。如果收敛，指明其是条件收敛还是绝对收敛，并说明理由.

六、(10分)　求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和。

七、(10分)　将函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内展开成傅里叶级数.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设 $f(x)$ 二阶连续可微，$g(x)$ 一阶连续可微，且满足 $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2e^x-f(x)$, 且 $f(0)=0$, $g(0)=2$, 计算 $I_4=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$.

(2) (商学院学生做) 设 $f(x)=x^3+1-x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.