# 微 积 分 II (第三版) 习 题

## 第五章　多元函数微分学

### 习题5.1

1. 求下列函数的定义域, 并指出其是开集还是闭集, 是开区域还是闭区域, 是有界集还是无界集:

(1) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

(2) $f(x,y)=\ln(2-|x|-|y|)$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-4}$;

(4) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$;

(5) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$;

(6) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{z}-x}}+\sqrt{1-z}+\ln(2-|y|)$.

2. 求下列函数:

(1) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}$, 求$f\left(2x,\dfrac{1}{y}\right)$;

(2) $f(x+y,x-y)=3x^2+2xy-y^2+2$, 求$f(x,y)$.

3. 用定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(3x+y)=9$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x+y^2}=0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-y)\sin\dfrac{1}{xy}=0$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{2}{3}$.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{3x+y}{2+xy}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{2x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+2y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{x+y-1}-1}{x+y-2}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{\ln(1+x)}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{\tan(xy)}}$;

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(10) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to +\infty}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{x^2y}$;

(11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1+y)}{x+y}$;

(12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)e^{-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}$;

(13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\Big(1+2\ln(1+x^2+y^2)\Big)^{-\cot(x^2+y^2)}$;

(14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(1+x^2+y^2)}$.

5. 证明下列函数当$(x,y)\to(0,0)$时极限不存在:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^6}{(x^4+y^3)^2}$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy\sin y}{x^2+y^4}$.

6. 试证函数$f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$当点$P(x,y)$沿任意直线方向趋向于点$P_0(0,0)$时, 极限皆存在且相等, 但函数$f(x,y)$在点$P_0(0,0)$处无极限.

7. 求下列函数的累次极限$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 以及$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^6}{(x^4+y^3)^2}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{xy\sin y}{x^2+y^4}$.

8. 设函数$f(x,y)$在平面区域$D$上对$x$连续, 对$y$满足利普希茨(Lipschitz)条件, 即

$$\big|\,f(x,y_1)-f(x,y_2)\big|\leqslant L|\,y_1-y_2\,|,\qquad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in D,$$

这里$L$为常数, 证明: $f(x,y)$在$D$上连续.

### 习题5.2

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^2y^3+\sqrt{x}+2y+6$;

(2) $z=\arctan\dfrac{x}{y}+\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $z=2^x+x^y+y^3$;

(4) $z=\mathrm{e}^{-xy}+x\mathrm{e}^{-y}+y\mathrm{e}^{-x}$;

(5) $u=(1+xy)^z+\sin(xyz)$;

(6) $u=\ln\sqrt{y^2+z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(7) $u=x^{y^z}+(xy)^z+x^{yz}$;

(8) $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\arccos\sqrt{\dfrac{y}{z}}$.

2. 设$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 求$f'_x(0,0)$.

3. 求下列函数的指定的偏导数:

(1) $z=\sin(xy)+\cos(xy)$, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) $u=x\mathrm{e}^{xyz}$, 求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$;

(3) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$;

(4) $u=x^{yz}+y^{xz}$, 求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$;

(5) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(6) $z=\arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. 求下列函数的全微分:

(1) $z=\sin x\cos y$;

(2) $z=\sqrt{x^2y+\dfrac{x}{y}}$;

(3) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(4) $u=xy\mathrm{e}^{-xyz}$;

(5) $z=\arctan\dfrac{x}{y}+\ln\sqrt{x^2+y^2}$在$(1,1)$处的全微分;

(6) $z=x^y$在点$(1,2)$处且$\Delta x=0.1,\Delta y=-0.02$的全微分.

5. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 证明$f(x,y)$在$(0,0)$处连续, 可偏导, 但不可微.

6. 设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 证明$f(x,y)$在$(0,0)$处可微, 但不连续可微.

7. 设$\varphi(x,y)$连续, $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 研究函数$f(x,y)$在$(0,0)$处的可微性.

8. 设$f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性, 可偏导性, 可微性及连续可微性.

9. 设函数$f(x,y)=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}\sin\dfrac{y}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(1) 求$f(x,y)$的偏导数;

(2) 证明函数$f(x,y)$是平面上的可微函数.

10. 求下列函数的二阶微分:

(1) $z=x^2+xy+y^3+5\ln x-6$; (2) $z=x^y$;

(3) $z=\mathrm{e}^x\sin y$; (4) $z=\dfrac{x}{y}$.

11. 设函数$f(x,y)$在$(x,y)$处可偏导, 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h}$; (2) $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x,y+k)-f(x,y-k)}{2k}$.

12. 求下列函数的高阶偏导数(其中$p,q,m,n$都是自然数):

(1) $z=(x-a)^p(y-b)^q$, 求$\dfrac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}$;

(2) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$, 求$\dfrac{\partial^{m+n}z}{\partial x^m\partial y^n}$.

13. 设$z=z(x,y)$定义在全平面上,

(1) 若$\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$, 试证$z=f(y)$;

(2) 若$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv 0$, 试证$z=g(x)+f(y)$.

14. 求近似值:

(1) $\sin 31^\circ\cos 29^\circ$; (2) $(1.02)^3+2^{2.99}$.

**习题5.3**

1. 求下列函数的全导数或偏导数:

(1) $u=x^y, x=\sin t, y=\cos t$;

(2) $y=\dfrac{u}{v}, u=\ln x, v=\mathrm{e}^x$;

(3) $z=\mathrm{e}^u+(u-v)^2, u=xy, v=\dfrac{x}{y}$;

(4) $z=u^2+\ln(uv)+\dfrac{u}{w}, u=x+y^2, v=x^2, w=xy.$

2. 求下列函数的一阶偏导数(其中$f,\varphi$连续可微):

(1) $z=f(x+y,xy)$;

(2) $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$;

(3) $u=f(x,xy,xyz)+\varphi(2x-y)$;

(4) $u=xf(x^2+y^2,\sqrt{x+y})+y^2$.

3. 设$f$具有二阶连续偏导数, 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $z=f\Big(xy,\dfrac{x}{y}\Big)$;

(2) $z=f(x,xy,x-y)$.

4. 求下列函数的指定偏导数:

(1) 设$z=f(xy,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x})$, 其中$f(u,v,w)$二阶连续可微, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) 设$z=f\left(\dfrac{x}{y}\right)+yg\left(x,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中$f,g$二阶连续可微, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(3) 设$z=f(x+y,xy)+\displaystyle\int_{x+y}^{xy}\varphi(t)\mathrm{d}t$, 其中$f,\varphi$二阶连续可微, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(4) 设$u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$, 其中$f(u,v)$二阶连续可微,
求$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

(5) 设$u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, $f$二阶可导, 求$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

(6) 设$F(x,y)=\displaystyle\int_{y/x}^{xy}(xz-y)f(z)\mathrm{d}z$, 其中$f(x)$为可微函数，求$F''_{xx}(x,y)$.

5. 设$y=y(x)$是由下列方程所确定的函数, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $\mathrm{e}^{xy}+2x+y^2=3$;

(2) $\ln\sqrt{x^2+y^2}+\cos^2 x+\cos^2 y=4$.

6. 设$z=z(x,y)$是由下列方程所确定的函数, 求指定的偏导数:

(1) $\ln x+2\ln y+3\ln z+xyz=1$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $x^2+y^2+z^2+xy-yz+3z-9=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(3) $xyz=\mathrm{e}^{-xyz}$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

7. 计算下列各题:

(1) 设$z=z(x,y)$由方程$F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$所确定, $F$可微，求$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2) 设$z=z(x,y)$由$F\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{z}{y}\right)=0$确定, $F$可微，求$\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(3) 设$F(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$, 其中函数$F(u,v,w)$可微且$bF'_u-aF'_v\neq 0$.
求$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(4) 设函数$z=f(x,y)$由方程$x^2(y+z)-4\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$确定, 求$z$在点$P(-2,2,1)$处的全微分$\mathrm{d}z$.

(5) 设$z=z(x,y)$由方程$F(yz,y-x)=0$确定, $F(u,v)$二阶连续可微, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

8. 设$u=f(x,y,z)$, 其中$y=y(x)$是由$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$确定的隐函数, $z=z(x)$是由$\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$确定的隐函数. 求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

9. 求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xyz=1, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$;

(2) $\begin{cases} x+y+u+v=0, \\ x^2+y^2+u^2+v^2=1, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

10. 设$z=f(x,y)$在$(2,2)$处可微, $f(2,2)=2$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,2)}=1$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,2)}=3$, $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$,
求$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^2(x)\right|_{x=2}$.

11. 设$z=z(x,y)$二阶连续可微, 证明: 在极坐标变换 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$下,

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

有形式

$$\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

12. 用洛必达法则求下列极限:

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h}$, 其中$f(x,y)$连续可微;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h,y)-2f(x,y)+f(x-h,y)}{h^2}$, 其中$f(x,y)$二阶连续可微.

**习题5.4**

1. 写出函数$f(x,y)=x^2+xy+2y^2-3x+6y+5$在点$(1,2)$处的泰勒公式.
2. 求函数$f(x,y)=\ln(1+x+y)$的带拉格朗日余项的3阶麦克劳林公式.
3. 在点$(1,3)$处把函数$f(x,y)=x^y$展开到包含2次项, 并求$1.04^{2.98}$的近似值.

**习题5.5**

1. 设$\boldsymbol{r}=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,\rho)$, $E=\boldsymbol{r}'_\rho\cdot\boldsymbol{r}'_\rho$, $F=\boldsymbol{r}'_\rho\cdot\boldsymbol{r}'_\theta$, $G=\boldsymbol{r}'_\theta\cdot\boldsymbol{r}'_\theta$, 计算$\sqrt{EG-F^2}$.
2. 设$\boldsymbol{r}=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$, $(A,B,C)=\boldsymbol{r}'_\varphi\times\boldsymbol{r}'_\theta$, 计算$\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

**习题5.6**

1. 求下列曲线在指定点的切线与法平面:

   (1) $x=t,y=t^2,z=t^3$, 在$t=1$对应点处;

   (2) $x=t-\sin t,y=1-\cos t,z=4\sin\dfrac{t}{2}$, 在$t=\dfrac{\pi}{2}$对应点处;

   (3) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在$(1,0,-1)$处;

   (4) $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ x^2+z^2=2\end{cases}$ 在$(1,1,1)$处.

2. 求下列曲面在指定点的切平面与法线:

   (1) $z=x^2+2y^2$在点$(1,1,3)$处;

   (2) $z^2=xy$在$(x_0,y_0,z_0)$处;

   (3) $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=\rho$在$\rho=1,\theta=\dfrac{\pi}{4}$对应点处.

3. 证明螺旋线$x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$的切线与$z$轴的夹角为定值.
4. 证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$的切平面在坐标轴上的截距之和为常数.

5. 求曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程.

6. 在柱面$x^2+y^2=R^2$上求一条曲线, 使它通过点$(R,0,0)$且每点处的切向量与$x$轴及$z$轴的夹角相等.

7. 求椭球面$x^2+2y^2+3z^2=21$的切平面, 使其通过已知直线

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}.$$

8. 若曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $P$ 点的切平面与平面 $x-y-2z=2$ 和 $2x-y-3=0$ 都垂直，求此切平面的方程.

9. 试求一平面$\Pi$, 使它通过空间曲线$\Gamma:\begin{cases} y^2=x, \\ z=3(y-1) \end{cases}$ 在$y=1$处的切线，且与曲面$\Sigma: x^2+y^2=4z$相切.

10. 在椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求点$(x_0,y_0,z_0)$, 使得椭球面在该点处的法向量与三个坐标轴的夹角相等.

11. 设

$$\boldsymbol{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

$$E=\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_u,\qquad F=\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v,\qquad G=\boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_v,$$

$$(A,B,C)=\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v=\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big),$$

证明:

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{EG-F^2}.$$

**习题5.7**

1. 求下列函数的极值:

   (1) $z=x^2+2y^2-xy+6x-3y-2$;

   (2) $z=x^6+y^4-3x^2-2y^2$;

   (3) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$;

   (4) $z=\cos x+\cos y+\cos(x+y)$, 其中$0<x,y<\pi$.

2. 求下列方程确定的隐函数$z=z(x,y)$的极值:

(1) $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$;

(2) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-10=0$.

3. 将周长为$2p$的矩形绕其一边旋转形成一个圆柱体, 问矩形的边长各为多少时, 所得圆柱体的体积最大?

4. 将周长为$2p$的三角形绕其一边旋转形成一个旋转体, 问三角形的边长各为多少时, 所得旋转体的体积最大?

5. 在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内作底边平行于$x$轴的内接三角形, 求此类三角形面积的最大值.

6. 求抛物线$y=x^2+2$与直线$x-y-2=0$之间的最短距离.

7. 求函数 $z=x^2+y^2-2x+6y$ 在闭区域 $D$: $x^2+y^2\leqslant 25$上的最大值与最小值.

8. 求函数$z=x^2+12xy+2y^2$在闭区域 $D$: $4x^2+y^2\leqslant 25$上的最大值与最小值.

9. 求函数$f(x,y)=x^2-\sqrt{5}xy$在区域$x^2+4y^2\leqslant 6$上的最大值与最小值.

10. 求函数$z=\cos x+\cos y+\cos(x+y)$在闭区域

$$G=\{(x,y)|\,0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \pi\,\}$$

上的最大值与最小值.

11. 用拉格朗日乘数法证明

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

其中$a_i\geqslant 0$, $i=1,\cdots,n$.

12. 在第一卦限求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$的切平面, 使该切平面与三个坐标面所围的四面体体积最小.

13. 在空间曲面$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}=1$上作切平面, 使得该切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最大，求切点的坐标，最大体积以及切平面方程.

14. 设$\Sigma$为由$z=x^2+y^2, z=2$所围曲面，求$\Sigma$的内接长方体体积的最大值.

15. 设常数$a>0$, 平面$\Pi$通过点$M(4a,-5a,3a)$, 且在三个坐标轴上的截距相等。在平面$\Pi$位于第一卦限部分求一点$P(x_0,y_0,z_0)$, 使得函数$u(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}\cdot z^2}$在$P$点处取最小值.

16. 旋转抛物面$z=x^2+y^2$ 被平面$x+y+z=1$ 截得一个椭圆，求原点到椭圆的最短与最长距离.

17. 利用拉格朗日乘数法计算椭圆周 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 上的点与坐标原点之间的最近和最远距离.

18. 设有等腰梯形$ABCD$, $AB//CD$, 已知$BC+CD+AD=8p$, 其中$p$为常数，该梯形绕边$AB$旋转一周所得旋转体体积取得最大值, 求$AB,BC,CD$的长度.

**习题5.8**

1. 求函数$z=xy+\cos(x+y)$在点$A\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$处沿方向$\boldsymbol{l}=(3,4)$的方向导数.

2. 求函数$u=xy^2z^3$在点$A(1,1,1)$处沿方向$\boldsymbol{l}=(1,1,2)$的方向导数.

3. 求函数 $u=x+\mathrm{e}^x\sin(y-z)$ 在点 $A(1,1,1)$ 处沿 $\overrightarrow{l}=(1,2,-2)$ 的方向导数.

4. 求函数$u=xy+y^2+\sqrt{x+z}$在点$A(1,0,2)$处沿从$A$到$B(5,3,14)$方向的方向导数.

5. 求函数$u=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$在点$A(1,1,1)$处沿从$A$到$B$ $(-3,1,0)$方向的方向导数.

6. 求$u=x^2+y^2-z^2$在点$P(3,4,5)$处沿曲线$\begin{cases}2x^2+2y^2-z^2=25,\\x^2+y^2=z^2\end{cases}$在该点的切线方向的方向导数.

7. 求函数$u=\arctan(x^2+2y+z)$在点$A(0,1,0)$ 处沿空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-y-4=0\end{cases}$在点$B(2,0,\sqrt{2})$的切向量的方向导数.

8. 求函数$u=x+y+z$在点$P_0\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$处沿球面$x^2+y^2+z^2=1$上该点的外法线方向的方向导数.

9. 求函数$u=3x-2y+5z$ 在球面$x^2+y^2+z^2=1$ 上点$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿该点外法线方向的方向导数.

# 第六章　重积分

**习题6.1**

1. 试用二重积分表示下列空间区域的体积:

   (1) 锥体$\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2-z,\ 0\leqslant z\leqslant 2$;

   (2) 由曲面$z=x^2+y^2, x^2+y^2=1, z=0$所围的立体.

2. 试用二重积分的几何意义计算下列二重积分:

   (1) $\displaystyle\iint_D(1-x-y)\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是以$(0,0),(1,0),(0,1)$为顶点的三角形区域;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$是以原点为圆心, 半径为$a$的圆.

3. 设$D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant r^2\}$, 试求

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma.$$

4. 设函数$f(x,y)$是有界闭区域$D$上非负的连续函数, 且$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$, 证明: 当$(x,y)\in D$时, $f(x,y)\equiv 0$.

## 习题6.2

1. 画出下列二重积分的积分区域, 并计算二重积分:

(1) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$;

(2) $\iint\limits_D \dfrac{1}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为直线$y=x, y=1, x=2$所围的区域;

(3) $\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为曲线$y=x, y=x^2$所围的区域;

(4) $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为直线$y=x, y=2x, y=2$所围的区域;

(5) $\iint\limits_D (y^2+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为曲线$x=y^2, x=2-y^2$所围的区域;

(6) $\iint\limits_D (x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2\leqslant 4$;

(7) $\iint\limits_D (x+xy^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2\leqslant 2y$;

(8) $\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为直线$y=x, y=1, x=0$所围的区域;

(9) $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 是 $x=1, y^2=4x$ 所围闭区域;

(10) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2=1, y=0, y=x$所围第一象限区域.

2. 改变下列累次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-1}^2 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\ \mathrm{d}y$;

(5) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

3. 计算下列累次积分：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1-x^4}\ \mathrm{d}x$;

(2) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^x \sin\frac{\pi x}{2y}\ \mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} \sin^3 x\mathrm{d}x$.

4. 利用极坐标变换计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+xy+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2 \leqslant 1$;

(2) $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2$;

(3) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2 \leqslant 2y$;

(4) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$以及 $y=x, y=0$所围的第一象限的区域;

(5) $\iint\limits_D \frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a$;

(6) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2 \leqslant 2x, y \geqslant x^2$.

5. 把下列直角坐标下的累次积分化为极坐标下的累次积分:

(1) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^x f(x,y)\mathrm{d}y$.

6. 选择合适的坐标变换计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\ (a>0,b>0)$;

(2) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2\leqslant x+y$;

(3) $\iint\limits_D \dfrac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$是由$x+y=1,x+y=2,y=x,y=2x$所围的区域.

(4) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 为 $y=0,x=0,x+y=1$ 所围区域.

7. 利用二重积分计算下列闭区域的面积:

(1) 设$D: x\leqslant y^2\leqslant 2x, y\leqslant x^2\leqslant 2y$, 求$D$的面积;

(2) 设$D$为双纽线$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$和圆$x^2+y^2=2x$所围的区域, 求$D$的面积.

8. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D |\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi$;

(2) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$;

(3) $\iint\limits_D xy[\,x+y\,]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$, $[\,x+y\,]$表示不超过$x+y$的最大整数;

(4) $\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: -x^2\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1$;

(5) $\iint\limits_D ||x+y|-2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: 0\leqslant x\leqslant 2, -2\leqslant y\leqslant 2$;

(6) $\iint\limits_D |\,y+\sqrt{3}x\,|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: x^2+y^2\leqslant 1$;

(7) $\iint\limits_D |\sin(y-x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x+y=\dfrac{\pi}{2}, x=0, y=0$所围区域.

9. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 0\leqslant y\leqslant x, 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中积分区域$D=\{(x,y)|\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant 2, 0\leqslant x\leqslant 2\}$.

10. 求曲线$(x-y+3)^2+(3x+2y-1)^2=81$所围区域的面积.

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant (b-a)^2,$$

其中积分区域为 $D=\{\,(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$.

## 习题6.3

1. 将三重积分$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$化为直角坐标下适当次序的累次积分, 其中$\Omega$分别为:

(1) 圆柱面$x^2+y^2=1$与平面$x+y+z=10$以及$z=0$所围的立体;

(2) 抛物面$z=1-x^2-y^2$与平面$z=0$所围的立体;

(3) 椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,b>0,c>0)$所围的立体;

(4) 圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与半球面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$所围的立体.

2. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_\Omega xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由平面$x+y+2z=1$与坐标面所围立体;

(2) $\iiint\limits_\Omega y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由$z=xy, x+y=1$与$z=0$所围立体;

(3) $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围立体;

(4) $\iiint\limits_\Omega y\sin(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由$y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$以及$x+z=\dfrac{\pi}{2}$所围立体.

(5) $\iiint\limits_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$ 为$z=0$ 与$y+z=1, y=x^2$ 所围的空间区域.

3. 用适当的方法计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由$z=x^2+y^2$与$z=4$所围立体;

(2) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与$3z=x^2+y^2$ 所围立体;

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围立体;

(4) $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2-\sqrt{x^2+y^2}$;

(5) $\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 2$;

(6) $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$;

(7) $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

(8) $\iiint\limits_{\Omega} z\ln(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$.

(9) $\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$x^2+(y-1)^2+(z-2)^2\leqslant 1$.

(10) $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$z=x^2+y^2$和$z=a\ (a>0)$ 围成的空间区域.

(11) $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x^2+y^2\leqslant Rx$所围成的空间区域(其中 $R>0$).

4. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$是椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\ (a>0,\ b>0,\ c>0)$.

5. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\left|z-\sqrt{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$为$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$所围成的空间区域 $(R>0)$.

6. 设$\Omega$是由$\begin{cases} x^2=z, \\ y=0 \end{cases}$ 绕$z$轴旋转一周生成的曲面与$z=1, z=2$所围成的区域，计算

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V.$$

7. 设$\Omega$是球体$x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2\ (t>0)$, 计算

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$f(u)$连续可微, $f(0)=0$.

8. 设$f(x)$为连续函数, 证明

$$\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}z\int_0^z f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a f(x)(a-x)^2\mathrm{d}x.$$

9. 设函数$f(u)$连续，$\Omega_t: 0\leqslant z\leqslant h, x^2+y^2\leqslant t^2\ (t>0)$, 而

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}(z^2+f(x^2+y^2)+\sin x+\sin y)\mathrm{d}V,$$

求$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$及$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\int_0^1 F(xt)\mathrm{d}x}{t^2}$.

**习题6.4**

1. 求下列立体的体积:

   (1) $\Omega: x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$;

   (2) $\Omega$ : 圆柱体$x^2+y^2\leqslant Rx$被球面$x^2+y^2+z^2=R^2$截下的部分, 其中$R>0$;

   (3) $\Omega: \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}$;

   (4) $\Omega: x^2+y^2\leqslant 1, z^2+x^2\leqslant 1, y^2+z^2\leqslant 1$;

   (5) $\Omega: 0\leqslant 2z\leqslant x^2+y^2, (x^2+y^2)^2\leqslant x^2-y^2$;

   (6) $\Omega: x=0, y=0, x+y=1$所围的三棱柱体被$z=0$及$z=6-x^2-y^2$所截的部分;

   (7) $\Omega$ : 六个平面$x+y+z=\pm1, -x+2y+3z=\pm2, 2x-y+5z=\pm3$所围平行六面体;

   (8) $\Omega$: $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az, x^2+y^2+z^2\leqslant b^2\ (a>b>0)$;

   (9) $\Omega: z=x^2+3y^2$与$z=8-x^2-y^2$所围立体.

2. 求下列曲面的面积:

   (1) 平面$x+2y+3z=1$被圆柱面$x^2+y^2=1$截下的部分;

   (2) 双曲抛物面$z=xy$被$x^2+y^2=1$截下的第一卦限的部分;

   (3) 两个圆柱面$x^2+y^2=1, x^2+z^2=1$所围立体的表面积;

(4) 三个圆柱面$x^2+y^2=1, z^2+x^2=1, y^2+z^2=1$所围立体的表面积;

(5) 球面$x^2+y^2+z^2=R^2$被$z=h$与$z=-h$ $(0\leqslant h\leqslant R)$截下的部分;

(6) 圆锥面$z^2=x^2+y^2$被圆柱面$x^2+y^2=2x$所截下的部分;

(7) 圆柱面$x^2+y^2=2x$被圆锥面$z^2=x^2+y^2$ 截下的部分;

(8) 圆柱面$x^2+y^2=2y$被曲面$z^2=2y$所截下的部分.

3. 求圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面$2z-y=3$ 所围立体的表面积.

4. 求曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$所围立体的体积 $(a>0)$.

5. 求密度均匀圆锥体$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$对位于坐标原点处一单位质点的引力.

6. 设圆盘$x^2+y^2\leqslant a^2, z=0$的密度为$\mu(x,y)=y^2$, 求它对位于$z$轴上点$(0,0,b)$处的单位质点的引力$(a>0)$.

7. 求下列平面薄片$D$的质心:

(1) $D$为$y=x^2$与$y=1$所围区域, 密度$\mu(x,y)=1+x$;

(2) $D$为心脏线$\rho=a(1+\cos\theta)$所围区域, 密度$\mu(x,y)=1$;

(3) $D$为旋轮线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x$轴所围区域, 密度$\mu(x,y)=1$.

8. 求下列立体的质心:

(1) $\Omega$为上半球体$0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$, 密度$\mu=1+x^2+y^2+z^2$;

(2) $\Omega$为$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1$, 密度$\mu=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\Omega$为平面$x+y+z=1$与$x=0, y=0, z=0$所围区域, 密度$\mu=x$.

9. 求下列平面物体对相应直线或点的转动惯量:

(1) $D$为正方形区域$0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$, 密度$\mu(x,y)=x+y$, 求$I_x$;

(2) $D$为$x^2+y^2\leqslant 1$在第一象限的部分, 密度$\mu(x,y)=1$, 求$D$对坐标原点的转动惯量$I_0$及$D$对直线$y=-1$的转动惯量;

(3) $D$为旋轮线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x$轴所围区域, 密度$\mu(x,y)=1$, 求$I_x$;

(4) $D$为心脏线$\rho=a(1+\cos\theta)$所围区域, 密度$\mu(x,y)=1$, 求$I_y$.

10. 设$\Omega$为均匀球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$, 分别求其对三个坐标轴的转动惯量.

11. 设$\Omega$为圆柱体$x^2+y^2\leqslant 1$介于平面$z=0, z=1$之间的部分, 密度分布均匀, 求$\Omega$对$x$轴及$z$轴的转动惯量.

**习题6.5**

1. 计算$\iint\limits_D e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D=\{(x,y)|x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

2. 计算$\iint\limits_D \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2\geqslant 1$.

3. 计算$\iint\limits_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$为$x^2+y^2\leqslant 1$.

## 第七章　曲线积分、曲面积分与场论

**习题7.1**

1. 计算下列第一类曲线积分:

   (1) $\int_C (x+y)\mathrm{d}s$,其中$C$是顶点为$O(0,0)$, $A(1,0)$和$B(0,1)$的三角形的边界;

   (2) $\int_C (x^2+y^2)^n\,\mathrm{d}s$, 其中$C$为圆周$x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 其中$a>0$, $n\in\mathbb{N}$;

   (3) $\int_C y^2\,\mathrm{d}s$,其中$C$为摆线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

   (4) $\oint_C x\,\mathrm{d}s$,其中$C$为由直线$y=x$及抛物线$y=x^2$所围区域的边界;

   (5) $\oint_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, 其中$C$是圆周$x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$与直线$y=x, y=0$所围成的位于第一象限的区域的边界;

   (6) $\int_C y\,\mathrm{d}s$, 其中$C$为$y=2x$上从$O(0,0)$到$A(1,2)$的线段;

   (7) $\int_C xy\,\mathrm{d}s$,其中$C$为椭圆周$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 位于第一象限的一段弧;

   (8) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中$C$为圆周$x^2+y^2=ax$ $(a>0)$;

   (9) $\oint_C y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中$C$为圆周$x^2+y^2=2x$;

   (10) $\int_C \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中$C$为抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到$(2,4)$的一段弧;

   (11) $\int_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s$, 其中$C$是曲线$x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(12) $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中$C$的参数方程为$x=3\cos t, y=3\sin t, z=3t, (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(13) $\int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$,其中$C$为曲线: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ a>0,$ $b>0)$;

(14) $\oint_C (x^2+2y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中$C$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$与平面$z=x$的交线;

(15) $\int_C x^2yz\,\mathrm{d}s$,其中$C$为折线$ABDE$, 这里$A,B,D,E$点分别为$A(0,0,0),\ B(0,0,2), D(1,0,2),\ E(1,3,2)$;

(16) $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, 其中$C$为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0\ (a>0)$.

2. 若曲线在点$(x,y)$处的线密度为$\rho=|y|$,求曲线$x=a\cos t, y=b\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi, a\geqslant b>0)$的质量.

3. 求均匀摆线段$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant \pi)$的质心$(a>0)$.

4. 设螺旋线一段的方程为$x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 它的线密度$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 求

(1) 它关于$z$轴的转动惯量;　　(2) 它的质心.

**习题7.2**

1. 计算下列第二类曲线积分:

(1) $\int_C (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$, 其中$C$为抛物线$y=x^2$上从点$(-1,1)$到$(1,1)$的一段弧;

(2) $\int_C (x^2-y^2)\mathrm{d}x$, 其中$C$为抛物线$y=x^2$上从点$(0,0)$到点$(2,4)$的一段弧;

(3) $\oint_C xy\mathrm{d}x$, 其中$C$为圆周$(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$与$x$轴所围成的第一象限内的区域的边界(按逆时针方向绕行);

(4) $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$, 其中$C$为椭圆周$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(按逆时针方向绕行) $(a>0, b>0)$;

(5) $\oint_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$C$为圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$(按逆时针方向绕行);

(6) $\oint_C y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$, 其中$C$为$y=x^2$与$y=x$所围区域的边界, 取逆时针方向;

(7) $\oint_C x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$, 其中$C$由$C_1, C_2, C_3$连接而成(按参数增加的方向)

$C_1: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$,

$C_2: x=0,\ y=1,\ z=\dfrac{\pi}{2}(1-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$,

$C_3: x=t,\ y=1-t,\ z=0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$;

(8) $\int_C x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x+y-1)\mathrm{d}z$, 其中$C$是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的直线段;

(9) $\oint_C \mathrm{d}x - \mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$,其中$C$为有向闭折线$ABDA$, 这里$A, B, D$分别为点$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;

(10) $\int_C (x^4 - z^2)\mathrm{d}x + 2xy^2\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z$,其中$C$为依参数增加方向的曲线: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3 (0 \leqslant t \leqslant 1)$;

(11) $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x|+|y|}$,其中$C$是以$A(1,0), B(0,1), D(-1,0), E(0,-1)$为顶点的正向正方形闭路$ABDEA$.

(12) $\oint_C (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$, 其中$C$为$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从$z$轴正向看去为顺时针方向;

(13) $\oint_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, 其中$C$为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2az, \\ x+z=a \end{cases}$ $(z \geqslant 0, a > 0)$, 从$z$轴正向看去为逆时针方向;

(14) $\int_C y^2\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + zx\mathrm{d}z$, 其中$C$为从$O(0,0,0)$出发，经过$A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$到$D(1,1,1)$的折线段.

2. 求$\int_C 2xy\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y$的值, 其中$O(0,0), A(1,1)$, $C$为

(1) 从点$O$到点$A$的直线段;

(2) 沿$y=x^2$从点$O$到点$A$的抛物线段;

(3) 折线$OBA$, 其中$B$为点$(1,0)$;

(4) 折线$ODA$, 其中$D$为点$(0,1)$;

(5) 沿上半圆周$x^2+y^2=2x(y>0)$从点$O$到点$A$.

3. 设力$\boldsymbol{F}=(y-x^2, z-y^2, x-z^2)$, 今有一质点沿曲线$x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$,被力$\boldsymbol{F}$从点$A(0,0,0)$移动至$B(1,1,1)$.求$\boldsymbol{F}$所做的功.

**习题7.3**

1. 应用格林公式计算下列曲线积分(闭曲线均为逆时针方向绕行):

(1) $\oint_C xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$,其中$C$为圆周$x^2+y^2=a^2$;

(2) $\oint_C (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y$,其中$C$为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

(3) $\oint_C (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$,其中$C$为三个顶点分别为$(0,0),(3,0)$和$(3,2)$的三角形的正向边界;

(4) $\oint_C (x+\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{d}y$,其中$C$是双纽线$\rho^2=\cos 2\theta$的右半支;

(5) $\oint_C \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$, 其中$C$为区域$D=\{(x,y)|0<x<\pi, 0<y < \sin x\}$的边界;

(6) $\oint_C (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$,其中$C$为正向星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$;

(7) $\oint_C (x\mathrm{e}^{x^2}-3y)\mathrm{d}x+(2x+y^2\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$, 其中$C$是$y=x^2, y=0, x+2y=3$所围区域的边界;

(8) $\int_C -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$, 其中$C$为双纽线$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$的右半分支.

2. 利用曲线积分, 求下列所围区域的面积:

(1) 星形线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(a>0, 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(2) 椭圆$9x^2+16y^2=144$;

(3) 心脏线$\begin{cases} x=a(1-\cos t)\cos t, \\ y=a(1-\cos t)\sin t, \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

3. 证明下列曲线积分与路径无关, 并求积分值:

(1) $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\mathrm{d}x+(x^2-4xy^3)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_{(0,0)}^{(3,4)}\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y$.

4. 可微函数$F(x,y)$满足什么条件使得曲线积分$\int_{\overset{\frown}{AB}} F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$与积分路径无关.

5. 计算$I=\oint_C \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中$C$为不通过坐标原点的简单闭曲线, 取逆时针方向.

6. 验证下列$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$在整个$xOy$平面内是某一个函数$u(x,y)$的全微分, 并求出一个这样的$u(x,y)$:

   (1) $(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$;

   (2) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$;

   (3) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$;

   (4) $(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$;

   (5) $(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$.

7. 计算下列曲线积分:

   (1) $\displaystyle\int_C \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, 其中$C$为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$ 上从$A(0,b)$到$B(a,0)$的有向弧段;

   (2) $\displaystyle\int_C \frac{(x-y)\ \mathrm{d}x+(x+y)\ \mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中$C$是沿抛物线$y=2x^2-2$从点$A(-1,0)$ 到$B(1,0)$ 的弧段;

   (3) $\displaystyle\int_C \Big((x+y+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y+y\Big)\mathrm{d}x+\Big(\mathrm{e}^x-(x+y+1)\mathrm{e}^y-x\Big)\mathrm{d}y$, 这里$C$是旋轮线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$ 上从$O(0,0)$到$A(2\pi a,0)$的一拱;

   (4) $\displaystyle\int_C (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$, 其中$C$为从点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax$ $(a>0)$;

   (5) $\displaystyle\int_C \frac{(\mathrm{e}^x\sin y-my)\ \mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\ \mathrm{d}y}{(x-a)^2+y^2}$, 其中$C$为从点$A(2a,0)$至点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$.

8. 设$D$是平面有界区域, 其边界$C$是逐段光滑曲线, 函数$P(x,y),Q(x,y)$在$\overline{D}=D\bigcup C$上有连续的一阶偏导数. 证明:

$$\oint_C [\,P\cos\langle \boldsymbol{n},x\rangle+Q\cos\langle \boldsymbol{n},y\rangle\,]\,\mathrm{d}s=\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   其中$C$是按区域$D$的正向绕行, $\cos\langle \boldsymbol{n},x\rangle,\cos\langle \boldsymbol{n},y\rangle$ 为曲线$C$的外法向量$\boldsymbol{n}$的方向余弦.

9. 设$D$为有界区域, $D$的边界$C$为逐段光滑闭曲线. 函数$u(x,y),v(x,y)$在有界闭区域$\overline{D}=D\bigcup C$上有二阶连续偏导数, 证明：

(1) $\displaystyle\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s-\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$为$u$沿$C$的外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向导数, 算子$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_D(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s.$

10. 设$D$为有界区域,$D$的边界$C$为逐段光滑闭曲线, $u(x,y)$为有界闭区域$\overline{D}$上的调和函数, 即$u(x,y)$有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证明:

(1) $\displaystyle\oint_C u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\boldsymbol{n}$为$C$的外法线方向;

(2) 若$u(x,y)$在$C$上恒为零, 则$u(x,y)$在$D$上也恒为零.

11. 证明下面的不等式

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant lM.$$

其中$l$为曲线$C$的长度, $M=\max\limits_{(x,y)\in C}\sqrt{P^2+Q^2}$.

12. 计算曲线积分

$$\int_{\widehat{AmB}}[\varphi(y)\mathrm{e}^x-my]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-m]\mathrm{d}y.$$

其中$\varphi(y),\varphi'(y)$均连续, $\widehat{AmB}$为连接点$A(x_1,y_1)$与点$B(x_2,y_2)$的路径, 且与直线段$AB$围成的区域$D$的面积为$S$, $\widehat{AmB}$的方向为$D$的边界曲线的正向.

13. 设$C$是平面上的一条光滑闭曲线，逆时针方向为其正方向，其上的单位切向量记为$\vec{s}$, 其方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta)$, $\vec{l}=(A,B)$是任意固定的非零向量，$\vec{n}$ 是$C$ 的单位外法向量，其方向余弦为$(\cos<\vec{n},x>,\cos<\vec{n},y>)$, 证明：$\displaystyle\oint\limits_C\cos<\vec{l},\vec{n}>\ \mathrm{d}s=0.$

14. 计算积分$I=\displaystyle\oint_C\frac{\cos<\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}>}{r}\,\mathrm{d}s$, 其中$\boldsymbol{r}=(x-\xi,y-\eta)$, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, $C$为逐段光滑的简单闭曲线，取逆时针方向, 点$A(\xi,\eta)$不在$C$上, $\boldsymbol{n}$是$C$的单位外法向量.

15. 设函数 $Q(x,y)$ 连续可微，曲线积分 $\int_C 3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，且对一切实数 $t$ 都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求函数 $Q(x,y)$.

16. 函数$f(x)$连续可微且$f(0)=1$. 若积分

$$\int_O^A \left[\frac{1}{2}\big(x-f(x)\big)y^2+\frac{1}{3}f(x)y^3+x\ln(1+x^2)\right]\mathrm{d}x+\left[f(x)y^2-f(x)y+\frac{x^2}{2}y+\frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\right]\mathrm{d}y$$

与路径无关，其中$O(0,0)$以及$A(1,1)$为两个固定点. 求$f(x)$ 以及此积分值.

17. 设曲线$C$为$(x-a)^2+(y-a)^2=1$, 取逆时针方向, 设$\varphi(x)$是连续的正函数. 证明:

$$\int_C \frac{x}{\varphi(y)}\mathrm{d}y-y\varphi(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\pi.$$

**习题7.4**

1. 计算下列第一类曲面积分:

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$,其中$S$为曲面$x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant 0\ (a>0)$;

(2) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中$S$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$ 所围成的区域的边界曲面;

(3) $\iint\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$,其中$S$为四面体$x+y+z\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$的边界曲面;

(4) $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S$,其中$S$为平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分;

(5) $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中$S$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的有限部分;

(6) $\iint\limits_S x^2\ \mathrm{d}S$, 其中$S$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

(7) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\ \mathrm{d}S$, 其中$S$为$x^2+y^2+z^2=2z\ (1\leqslant z\leqslant 2)$.

2. 计算曲面积分$\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\ \mathrm{d}S$, 其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=1$, $0<a<1$.

3. 求抛物面壳$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$的质量, 其面密度$\rho=x+y+z$.

4. 求面密度为$\rho_0$的均匀半球壳$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0,a>0)$对$Oz$轴的转动惯量.

5. 求半球面$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0,a>0)$的质量, 它的面密度$\rho(x,y,z)=\dfrac{z}{a}$.

**习题7.5**

计算下列第二类曲面积分:

1. $\iint\limits_S (x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$, 其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

2. $\iint\limits_S yz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$为平面$x=0,\ y=0,\ z=0$及$x+y+z=a(a>0)$所围四面体的表面外侧.

3. $\iint\limits_S x^2y^2z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上半部的上侧.

4. $\iint\limits_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$为圆锥曲面$x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$的外侧.

5. $\iint\limits_S \left(\dfrac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}\right)$,其中$S$为椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧面.

6. $\iint\limits_S (x+a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+b)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧, $a,\ b,\ c$为常数.

7. $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$是柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=2$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧.

8. $\iint\limits_S -2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\sin(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$是曲面$y=\mathrm{e}^x(1\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant z\leqslant 2)$的前侧.

9. $\iint\limits_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sqrt{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$是曲面 $z=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$, 取上侧.

10. $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ , 其中$S$是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>0)$的上侧.

11. $\iint\limits_S (x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$S$为圆锥面$x^2+y^2=z^2$ 在$0\leqslant z\leqslant 1$的部分, 取下侧.

**习题7.6**

1. 利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$为立方体$0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a,\ 0\leqslant z\leqslant a$全表面的外侧;

(2) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$是圆柱$x^2+y^2\leqslant 4$被$z=0$及$z=3$所截得的立体的表面的外侧;

(3) $\iint\limits_S (xy^2+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (yz^2+xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (zx^2+5x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$S$ 为椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的外侧.

2. 设$S$是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧$(a>0)$, 计算曲面积分

$$\iint\limits_S \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. 设$S$为上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧, 计算

$$\iint\limits_S zx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 6z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 设$D$为空间中的区域, 分片光滑闭曲面$S$为$D$的边界,$u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$是定义在闭区域$\overline{D}=D\bigcup S$上且具有二阶连续偏导数的函数, $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$ 依次表示$u(x,\ y,\ z)$, $v(x,y,z)$沿$S$的外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向导数, 证明第二格林公式

$$\iiint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\,\mathrm{d}S,$$

或记为

$$\iiint\limits_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

其中算子$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

5. 设$S$为一光滑闭曲面, $S$所围区域为$D$, $u(x,y,z)$是闭区域$\overline{D}=D\bigcup S$上的调和函数, 即$u$有连续的二阶偏导数, 且满足
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$
证明:

(1) $\displaystyle\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iiint\limits_D\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$为$u$沿$S$的外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向导数;

(2) 若$u(x,y,z)$在$S$上恒为零, 则$u(x,y,z)$在区域$D$也恒为零.

6. 利用斯托克斯公式计算下列曲线积分:

(1) $\displaystyle\oint_C (y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$, 其中$C$为椭圆$x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t(0\leqslant t\leqslant\pi)$,沿参数$t$的递增方向运动;

(2) $\displaystyle\oint_C y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$, 其中$C$是柱面$x^2+y^2=2y$与平面$y=z$的交线, 从$z$轴正向看去是逆时针方向运动;

(3) $\displaystyle\oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,其中$C$为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$,若从$x$轴的正向看去, 此圆周是取逆时针方向;

(4) $\displaystyle\oint_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中$C$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与圆柱面$x^2+y^2=ax(a>0)$的交线位于$xOy$平面上方的部分, 若从$x$轴正向看去为逆时针方向.

(5) $\displaystyle\oint_C 3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$, 其中$C$是圆周$x^2+y^2=2z$, $z=2$,若从$z$轴正向看去,此圆周取逆时针方向;

(6) $\displaystyle\oint_C 2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$,其中$C$是圆周$x^2+y^2+z^2=9$, $z=0$,若从$z$轴正向看去, 此圆周取逆时针方向;

(7) $\displaystyle\oint_C (y^2-z^2+x^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2+z^2)\mathrm{d}z$, 其中$C$是平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}R$与立方体$\{(x,y,z)|\,0\leqslant x\leqslant R, 0\leqslant y\leqslant R, 0\leqslant z\leqslant R\}$的交线, 若从$x$轴正向看去, $C$按逆时针方向绕行;

(8) $\displaystyle\oint_C 2y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{e}^z\mathrm{d}z$, 其中$C$是$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y=1$的交线, 从$y$轴正向看去是顺时针方向..

7. 设$C$为柱面$x^2+2y^2=4y$与上半球面$x^2+y^2+z^2=4\ (z\geqslant 0)$的交线, 且从$y$轴正向看去为逆时针方向. 计算曲线积分

$$\int_C (y+1)\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}y+(x+3)\mathrm{d}z.$$

8. 设$C$是从$A(a,0,0)$到$B(a,0,h)$的螺线$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$. 计算曲线积分

$$\int_C (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z.$$

9. 求$I_1-I_2$, 其中

$$I_1=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S,\quad I_2=\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S,$$

$S_1$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$, $S_2$为内接于$S_1$的八面体的边界: $|x|+|y|+|z|=a$.

10. 求积分$F(a)=\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$, 其中曲面$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$, 被积函数

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

11. 设$C$是平面$2x+2y+z=2$上的一条光滑的简单闭曲线. 证明: 曲线积分

$$\oint_C 2y\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}z$$

只与$C$所围区域的面积有关, 而与$C$的形状及位置无关.

12. 设$S$为球面$x^2+y^2+z^2=2z$, 求

$$\iint\limits_S (x^4+y^4+z^4-z^3)\,\mathrm{d}S.$$

13. 求曲环面$\begin{cases} x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\ z=a\sin\psi,\end{cases}$ $(0<a\leqslant b)$所围立体的体积.

14. 当具有单位质量的物质沿直线段从点$M_1(x_1,y_1,z_1)$移动到点$M_2(x_2,y_2,z_2)$时, 求作用于物质的引力$\boldsymbol{F}=\dfrac{k}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$所做的功.

**习题7.7**

1. 已知场$v(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, 求沿场$v(x,y,z)$的梯度方向的方向导数.

2. 证明:

   (1) $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{A})=u\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}u\times\boldsymbol{A}$; (2) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$.

3. 证明: 向量场$\boldsymbol{A}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$是有势场, 并求势函数.

4. 证明: 场$\boldsymbol{A}=f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{r}$是一有势场, 其$\boldsymbol{r}$表示向量$\overrightarrow{OM}$即$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $f$是连续函数.

5. 已给数量场$u=\ln\dfrac{1}{r}$, 其中$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, 求在空间中有哪些点, 使得等式: $|\mathrm{grad}u|=1$成立.

6. 求向量$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}$沿螺线$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一段所做的功.

7. 求向量$\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$($c$为常数)的环流量:

   (1) 沿圆周$x^2+y^2=1,\ z=0$; (2) 沿圆周$(x-2)^2+y^2=a^2,\ z=0$.

8. 求下列向量场$\boldsymbol{A}$的旋度:

   (1) $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$;

   (2) $\boldsymbol{A}=(z+\sin y)\boldsymbol{i}-(z-x\cos y)\boldsymbol{j}$.

9. 证明: $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}+\mathrm{rot}\boldsymbol{B}$.

10. 设$u=u(x,y,z)$具有二阶连续偏导数, 求$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)$.

# 第八章　　无穷级数

**习题8.1**

1. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散, 问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$是否收敛?

2. 写出下列级数的部分和, 并讨论其收敛性:

   (1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

   (2) $\dfrac{1}{1\cdot 3^2}+\dfrac{2}{3^2\cdot 5^2}+\cdots+\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(4) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

3. 判断下列级数是否收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{7^n}{9^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 9}{2}\right)^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{\frac{1}{n}}, (0<a<1)$.

4. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{7}{10^n}\right)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$, $m\in\mathbb{N}$是常数.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

5. 利用柯西收敛原理判断下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$;

(4) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

**习题8.2**

1. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{4^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^3+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+a^n} \quad (a>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+4n-3}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n^2+3n+1)^{\frac{n+2}{2}}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{4^n}$.

2. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n^2}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^n}$;

(7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(12) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p>0)$;

(13) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$;

(14) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (p>0, q>0)$;

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$, 其中$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0, b > 0$.

3. 证明: 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$也收敛, 反之不一定成立, 试举例说明.

4. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$均收敛, 证明下列级数均收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n b_n \,|$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\, a_n \,|}{n}$.

5. 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都发散, 问下列级数是否发散?

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$.

6. 设有$\alpha>0$使得$\ln\dfrac{1}{a_n}\geqslant(1+\alpha)\ln n(n\geqslant N)$, 其中$a_n>0$, 试证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

7. 讨论实数$p$为何值时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)^p$收敛, 实数$p$为何值时, 级数发散.

8. 讨论实数$p$为何值时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^p$收敛, 实数$p$为何值时, 级数发散.

## 习题8.3

1. 判断下列级数是否收敛? 条件收敛还是绝对收敛?

(1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{3}{10^3}+\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{3}{10^5}+\cdots$; (2) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5!}-\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^3}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{(n+1)^2}$; (6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{x}{n}(x\neq 0)$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1})$; (10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$; (12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{3^{n^2}}$;

(13) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}\sin n}{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}$; (14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+\sin n}$.

2. 判别下列级数的敛散性(绝对收敛、条件收敛或发散).

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-n\sin\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n})$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

3. 设常数$a>0$, 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ 的敛散性(绝对收敛、条件收敛或发散).

4. 设$\theta$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$为一常数, $p>0$. 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n^p}$的敛散性(绝对收敛，条件收敛或发散).

5. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n^p}(p>0)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}u_n$ 均收敛.

6. 证明:将收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$重排后的级数

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}+\cdots$$

发散(提示:先证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$发散, 其中$u_k=\dfrac{1}{\sqrt{4k-3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4k-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$).

7. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛, 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$, 问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是否也收敛? 试说明理由.

8. 设$a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明:

   (1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^2}$收敛;

   (2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{S_n}}$收敛当且仅当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

9. 设$x_{2n-1}=\dfrac{1}{n}, x_{2n}=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $(n=1,2,\dots)$,

   (1) 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$收敛;

   (2) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n=A$, $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$.

**习题8.4**

1. 求下列级数的收敛域:

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$;　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\sin\dfrac{\pi}{4^n}$.

2. 讨论下列函数列在所示区域内的一致收敛性:

   (1) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$, $\quad -\infty<x<+\infty$;

(2) $f_n(x)=x^n-x^{2n},\quad 0\leqslant x\leqslant 1$;

(3) $f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n},\quad \text{(i)}-l<x<l,\ \text{(ii)}-\infty<x<+\infty$;

(4) $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{1+n^2x},\quad 0<x<1$.

3. 讨论下列级数的一致收敛性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+4n^4x^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n^2+x^2}\quad(0\leqslant x<\infty)$.

4. 试证明级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$在任何区间$[1+\alpha,+\infty)$内一致收敛$(\alpha>0)$.

**习题8.5**

1. 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n(k\in\mathbb{N})$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$.

2. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{na^n}(a>0)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)x^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n+5^n)x^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}x^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n^n}$.

3. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\cdot 3^n}$.

4. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{1}{2n+1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$.

5. 设有级数$(A)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $(B)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{4^{n-4}}x^n$. 已知$(A)$的收敛域为$[1,5)$.

(1) 求$x_0$;

(2) 求$(B)$的收敛半径.

6. 设$a_1=a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $(n=2,3,\cdots)$,

(1) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ 的收敛半径;

(2) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ 的和函数.

**习题8.6**

1. 利用已知的初等函数的幂级数展开式, 求函数在$x=0$处的幂级数展开式, 并求展开式成立的区间:

(1) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　　(2) $e^{x^2}$;

(3) $\dfrac{1}{a+x}(a\neq 0)$;　　(4) $\cos^2 x$;

(5) $\ln(a+x)(a>0)$;　　(6) $(1+x)\ln(1+x)$;

(7) $\ln(1+x-2x^2)$;　　(8) $\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$;

(9) $\arctan x$;　　(10) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(11) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$;　　(12) $\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,dt$.

2. 求下列函数在指定点$x_0$处的幂级数展开式, 并求展开式成立的区间:

(1) $\sqrt{x^3}, x_0=1$;　　(2) $\ln x, x_0=1$;

(3) $\dfrac{1}{x}, x_0=3$;　　(4) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}, x_0=-4$.

3. 将$f(x)=\displaystyle\int_1^x (t-1)^2 e^{t^2-2t}dt$在$x=1$处展开为幂级数, 并指出其收敛域.

4. 利用函数的幂级数展开式, 计算下列各式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{70}$(误差不超过0.001);

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$(误差不超过0.001);

(3) $\ln 3$(误差不超过0.0001).

5. 设$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$, 求出级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$的和.

6. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

**习题8.7**

1. 判别下列广义积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\sin x|}$;

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^p\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x}\,\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\ln^3 x}$;

(15) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$;

(16) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(17) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln^2 x}\mathrm{d}x$;

(18) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$;

(19) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(20) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$;

(21) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}x\cos^{q-1}x\mathrm{d}x\ (0<p<1,0<q<1)$.

2. 设广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}f^2(x)\,\mathrm{d}x$收敛, 证明广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$绝对收敛.

3. 讨论下列广义积分的绝对收敛和条件收敛:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{100+x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sec x)\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\quad(q\geqslant 0)$.

4. 利用$\Gamma$函数、$B$函数计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^7\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}x^2\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{+\infty} 4^{-3x^2}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^3 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,(\alpha > 1)$;

(6) $\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\ (n \in \mathbb{N})$;

(7) $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\mathrm{d}x$;

(8) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x\,(a > 0)$;

(9) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^3}$ ;

(10) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1 - x^n}}\ \ (n > 0)$ .

# 第九章　　傅里叶级数

## 习题9.1

1. 证明:

   (1) $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots$ ;

   (2) $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots, \sin nx, \cdots$

   皆是$[-\pi, \pi]$上的正交系;　但$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$不是$[0, \pi]$上的正交系.

2. 证明本节中定义的内积$(f, g)$满足线性性质, 即

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1(f_1, g) + c_2(f_2, g) \quad (c_1, c_2\text{为常数}).$$

3. 证明$|\,(f, g)\,| \leqslant \|\,f\,\| \cdot \|\,g\,\|$.

## 习题9.2

1. 设函数$y = f(x)$是周期为$2\pi$的周期函数, 它在$[-\pi, \pi)$上的表达式由下列各式给出, 求出$f(x)$的傅里叶级数及其和函数:

   (1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}, -\pi \leqslant x < \pi$;

   (2) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi \leqslant x < 0, \\ bx, & 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$ $(a, b\text{为常数且}b > a > 0)$;

   (3) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 2, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi \leqslant x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

2. 已知函数$f(x)=x^2$.

(1) 将函数$f(x)$ 在$-\pi \leqslant x < \pi$内展开成余弦级数;

(2) 将函数$f(x)$ 在$0 \leqslant x < \pi$内展开成正弦级数;

(3) 将函数$f(x)$在$0 < x < 2\pi$内展开成傅里叶级数;

(4) 利用上面的展开式求下列级数的和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

3. 设$f(x)$是周期为$2\pi$的周期函数, 它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi \leqslant x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

将$f(x)$展开成傅里叶级数.

4. 将函数$f(x)=3(0<x<\pi)$展成正弦级数, 并由此推出$\displaystyle\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

## 习题9.3

1. 已知函数$y=f(x)$为周期函数, 它在一个周期内的表达式由下列各式给出, 将$f(x)$展开成傅里叶级数:

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3-x, & 2 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$

(2) $f(x)=1-x^2, \left(-\dfrac{1}{2} \leqslant x < \dfrac{1}{2}\right)$;

(3) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & -3 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$

2. 求函数$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2} \leqslant x < l \end{cases}$ 的正弦级数, 并求出其和函数.

3. 已知$f(x)$是周期为2的周期函数，且$f(x)=2+|x|,(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(1) 求$f(x)$的傅里叶级数;

(2) 求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和;

(3) 求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

4. 设$f(x)$满足$f(x+\pi)=-f(x)$, 问此函数在区间$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数具有怎样的特性?

5. 设函数$f(x)$满足$f(x+\pi)=f(x)$, 问此函数在区间$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数具有怎样的特性?

6. 如果$\varphi(-x)=\psi(x)$, 问$\varphi(x)$与$\psi(x)$的傅里叶系数$a_n$, $b_n$与$\alpha_n$, $\beta_n$( $n=0,1,2,\cdots$ ) 之间有何关系?

7. 将函数$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h,\\ 0, & h<x<\pi\end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

8. 设有三角级数

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中$|\,a_n\,|\leqslant\dfrac{M}{n^3}$, $|\,b_n\,|\leqslant\dfrac{M}{n^3}(n=1,2,\cdots)$, $M>0$为常数, 证明上述三角级数一致收敛, 且可以逐项求导数.

# 第十章　　常微分方程初步

## 习题10.2

1. 验证下列各函数是其对应微分方程的通解(或通积分)：

(1) $y''-4y'+3y=0,\ y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{3x}$;

(2) $(x-y+1)y'=1,\ y=x+C\mathrm{e}^y$;

(3) $yy''=(y')^2,\ y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$.

2. 求以下列曲线簇为通解(或通积分) 的微分方程：

(1) $y=xC+C^2$;　　(2) $x=C\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$;

(3) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$;　　(4) $y=C_1\ln|x|+C_2$.

3. 解下列微分方程：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln y$;

(2) $\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x+y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y=0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$;

(4) $(1+x)y\mathrm{d}x+(1-y)x\mathrm{d}y=0$.

4. 解下列微分方程：

(1) $xy'-y\ln y=0$;

(2) $xy\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$;

(3) $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$;

(4) $y'=\mathrm{e}^{x+y}$;

(5) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$;

(6) $x^2y^2y'+1=y$.

5. 求下列微分方程的通解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$;

(2) $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$;

(3) $xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x}$;

(4) $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;

(5) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y,(x>0)$;

(6) $y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6. 求下列微分方程的解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\Big(\dfrac{y+2}{x+y-1}\Big)^2$;

(2) $(2x-4y+6)\mathrm{d}x+(x+y-3)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(2x+3y+4)\mathrm{d}x-(4x+6y+5)\mathrm{d}y=0$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$.

7. 求解下列微分方程的初值问题：

(1) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{y}\ln x,\ y(\mathrm{e})=1$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\cos x\cos 2y)^2,\ y(0)=0$;

(4) $y'=\dfrac{y}{x}\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right),y(1)=\mathrm{e}$.

**习题10.3**

1. 求解下列微分方程：

(1) $(1+x^2)y'-xy+1=0$;

(2) $\sin x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(x-y)\cos x=0$;

(3) $y'\sin x-y\cos x=\cot x$;

(4) $y\mathrm{d}x-(x+y^3)\mathrm{d}y=0$;

(5) $y'=\dfrac{y}{y-x}$;

(6) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}$;

(7) $(x^2+1)y'+2xy=4x^2$;

(8) $(x-2xy-y^2)\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$;

(9) $y'+2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$;

(10) $3xy'-y-3xy^4\ln x=0$.

2. 求下列微分方程的通解：

(1) $y'-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x}{2}y^{-1}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=\sin xy^2$;

(3) $y'+\dfrac{1}{x}y=x^2y^6$;

(4) $(x^2y^3+xy)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x)$;

(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=xy^5$.

3. 求下列微分方程的初值问题：

(1) $y=xy'+y'\ln y,\ y(1)=1$;

(2) $xy'-2y=x^3\mathrm{e}^x,\ y(1)=0$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}},\ y(0)=0$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=8,\ y(0)=1$;

(5) $y\cos\dfrac{x}{y}\mathrm{d}x+\left(y-x\cos\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

4. 设 $y_0(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的解, $y_1(x),y_2(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的解, 证明：

(1) $y_0(x)+y_1(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的解;

(2) $y_1(x)-y_2(x)$ 是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的解.

## 习题10.4

1. 判断下列微分方程是否为全微分方程(其中$f(x)$为连续可微函数)：

(1) $x^2(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2(1-2x^2)xy=f(x)$;

(2) $f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$;

(3) $\dfrac{f\left(\dfrac{y}{x}\right)}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=0$.

2. 解下列微分方程：

(1) $(3x^2+4xy)\mathrm{d}x+(2x^2+2y)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(3y^2+y\sin(2xy))\mathrm{d}x+(6xy+x\sin(2xy))\mathrm{d}y=0$;

(3) $\dfrac{x^2y+1}{y}\mathrm{d}x+\dfrac{y-x}{y^2}\mathrm{d}y=0$;

(4) $y(3x^2-y^3+\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}x+x(x^2-4y^3+\mathrm{e}^{xy})\mathrm{d}y=0$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y^2+3}$;

(6) $(\mathrm{e}^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0$;

(7) $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+1\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$;

(8) $(y\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y=0$.

3. 确定常数 $A$, 使下列微分方程成为全微分方程并求解：

(1) $(x^2+3xy)\mathrm{d}x+(Ax^2+4y)\mathrm{d}y=0$;

(2) $\left(\dfrac{Ay}{x^3}+\dfrac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(Ax^2y+2y^2)\mathrm{d}x+(x^3+4xy)\mathrm{d}y=0$;

(4) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}x+\dfrac{Ax+1}{y^3}\mathrm{d}y=0$.

4. 确定函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$, 使下述微分方程成为全微分方程并求解：

(1) $P(x,y)\mathrm{d}x+(2y\mathrm{e}^x+y^2\mathrm{e}^{3x})\mathrm{d}y=0$;

(2) $(x^{-2}y^{-2}+xy^{-3})\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$;

(3) $P(x,y)\mathrm{d}x+(2x^2y^3+x^4y)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(x^3+xy^2)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.

5. 用积分因子法解下列微分方程：

(1) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+\left(2xy+xy^2+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(3x-2y+2y^2)\mathrm{d}x+(2xy-x)\mathrm{d}y=0$;

(3) $(2xy+y^2)\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=0$;

(4) $(y+xy+\sin y)\mathrm{d}x+(x+\cos y)\mathrm{d}y=0$;

(5) $(y+6xy^3-4y^4)\mathrm{d}x-(2x+4xy^3)\mathrm{d}y=0$;

(6) $3x^2y\ln y\mathrm{d}x+(2x^3+2y^3+3y^3\ln y)\mathrm{d}y=0$;

(7) $(x^4+y^4)\mathrm{d}x-xy^3\mathrm{d}y=0$;

(8) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x-x(2xy+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$;

(9) $x^2y\mathrm{d}x-(x^3+y^3)\mathrm{d}y=0$;

(10) $2xy^3\mathrm{d}x+(x^2y^2-1)\mathrm{d}y=0$.

6. 找出下列微分方程的积分因子并求其通解：

(1) $x\mathrm{d}y+(y+x^2y^4)\mathrm{d}x=0$;　　(2) $y(y-x)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$;

(3) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=(x^2+4y^2)\mathrm{d}x$;　　(4) $(y-xy^2\ln x)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$.

## 习题10.6

1. 解下列微分方程：

(1) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$;　　(2) $x^2y^{(4)}+1=0$;

(3) $y''\tan x-y'+\csc x=0$;　　(4) $xy''=y'+\ln x$;

(5) $y''=\mathrm{e}^x y'^2$;　　(6) $yy''+(y')^2=y'$;

(7) $y''=1+(y')^2$;　　(8) $yy''-(y')^2=y'$.

2. 解下列微分方程的初值问题：

(1) $4\sqrt{y}y''=1, y(0)=y'(0)=1$;　　(2) $y^3y''=-1, y(1)=1, y'(1)=0$;

(3) $xy''-4y'=x^5, y(1)=-1, y'(1)=-4$;

(4) $1+(y')^2=2yy'',\ y(1)=1,\ y'(1)=-1$.

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $yy''+2(y')^2=0$;　　(2) $y^3y''-1=0$;

(3) $y''=1+2(y')^2$;　　(4) $y''=(y')^3+y'$;

(5) $y''=\sqrt{1+(y')^2}$;　　(6) $yy''-(y')^2=0$.

4. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''-2y'+3y=0$;　　(2) $2y''+y'-y=0$;

(3) $y''+8y'+16y=0$;　　(4) $y''+4y=0$;

(5) $3y''+2y'=0$;　　(6) $y''-4y'+3y=0$;

(7) $y''-2y'+y=0$;　　(8) $y''-6y'+11y=0$;

(9) $y'''-8y=0$;　　(10) $y^{(4)}-7y^{(3)}+17y''-17y'+6y=0$.

5. 对于下列非齐次方程, 指出其特解的形式：

(1) $y''-4y=x\mathrm{e}^{2x}$;　　(2) $y''+9y=\sin 2x$;

(3) $y''+2y'+9y=\mathrm{e}^x\sin x$;

(4) $y''-2y'+y=5x\mathrm{e}^x$;

(5) $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x\cos x$;

(6) $y''-y'=x^2-1$;

(7) $y''-5y'+6y=(x^2+1)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{2x}$;

(8) $y''-2y'+5y=x\mathrm{e}^x\cos 2x-x^2\mathrm{e}^x\sin 2x$.

6. 求解下列非齐次线性微分方程的通解：

(1) $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$;

(2) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$;

(3) $y''+3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$;

(4) $y''-4y'+4y=\sin 2x+\mathrm{e}^{2x}$;

(5) $y''-2y=2x(\cos x-\sin x)$;

(6) $y''+y=\csc x$;

(7) $y''-2y'+y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$;

(8) $y''-6y'+10y=5$;

(9) $y''+y'=x^2+1$;

(10) $y''-y'-2y=\mathrm{e}^{2x}$;

(11) $y''-8y'+16y=x+x\mathrm{e}^{4x}$;

(12) $y''-y=4x\mathrm{e}^x$;

(13) $y''-4y'+3y=3\mathrm{e}^x\cos 2x$;

(14) $y''+a^2y=\sin x\ (a>0)$;

(15) $y''+2y'-3y=3x+1+\cos x$;

(16) $y'''-3y''+4y=12x^2+48\cos x+14\sin x$.

7. 求解下列欧拉方程：

(1) $x^2y''+\dfrac{5}{2}xy'-y=0$;

(2) $y''-\dfrac{1}{x}y'+\dfrac{1}{x^2}y=\dfrac{2}{x}$;

(3) $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2 x-2\ln x$;

(4) $x^2y''+xy'-4y=x^3$;

(5) $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$;

(6) $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$.

### 习题10.7

1. 平面曲线过点 $(2,3)$, 其每条切线在两坐标轴之间的部分都被切点平分, 求该曲线的方程.

2. 一平面曲线 $l$ 过原点, 从 $l$ 上任意一点 $(x,y)$ 分别作平行于坐标轴的直线, $l$ 将这两条直线和两坐标轴围成的矩形面积分割成两部分, 其中之一的面积为另一部分面积的3倍, 求 $l$ 的方程.

3. 依牛顿冷却定律, 一高温物体的冷却速度与它周围的温度之差成正比, 设周围温度保持为20℃, 最初此物体温度为 100℃, 在20分钟时其温度降至 60℃, 问需要多少时间此物体温度降至 30℃?

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 若由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=1, x=t(t>0)$ 与 $x$ 轴所围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)].$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y(2)=\dfrac{2}{9}$ 的解.

5. 证明级数 $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ 的和函数 $f(x)$ 满足微分方程 $(1+x)f'(x)-\alpha f(x)=0$,并求 $f(x)$.

6. 某池塘的规模最多只能供1000尾$A$类鱼生存, 因此$A$类鱼尾数的变化率与$k(1000-k)$成正比, 这里 $k$ 表示 $A$ 类鱼尾数. 若开始时有 $A$ 类鱼20尾, 当时的尾数的变化率为9.8, 求 $t$ 时刻 $A$ 类鱼的尾数.

7. 某平面曲线的任一点处的切线垂直于此点与原点的连线, 求此曲线方程.

8. 已知曲线通过点(3,1), 其在切点和 $Ox$ 轴之间的切线段, 被切线与 $Oy$ 轴的交点所平分, 求此曲线的方程.

9. 雪球以正比于它表面积的速度融化, 设开始时体积为 $V_0$, 求 $t$ 时刻雪球的体积 $V$.

10. 一个质量为 $m$ 的质点, 受常力 $F$ 的作用. 设质点由静止开始运动, 求该质点的运动规律. 如果移动一分钟后, 在相反方向用 $F_1$ 作用, 求此质点在一分钟后的运动规律.