第 5 章 多元函数微积分

Outline

Outline

偏导数在几何上的应用

- 空间曲线的切线与法平面
- 空间曲面的切平面与法线

偏导数在几何上的应用

Definition (切线、法平面、切向量)

设有空间曲线 $\overset{\frown}{AB}$，P_0 是曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上一定点，P 是曲线上的动点

- 作割线 P_0P，当 P 沿着曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 无限地接近 P_0 时，若割线 P_0P 的极限位置存在，对应的直线记为 L，我们称直线 L 为曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 P_0 的**切线**.
- 通过点 P_0 且与切线 L 垂直的平面，称为曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 P_0 的**法平面**.
- 切线 L 的方向向量称为曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 P_0 的**切向量**.

下面我们分两种情况来研究曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 P_0 的切线和法平面的方程.

(1) 设空间曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的向量方程为

$$\boldsymbol{r} = (\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)),$$

$\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)$ 在 $t = t_0$ 皆可导，且 $\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0)$ 不全为 0.

若 t 在 t_0 有增量 Δt，曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上与 t_0 和 $t_0 + \Delta t$ 对应的点分别为

$$P_0(\varphi(t_0),\ \psi(t_0),\ \omega(t_0)),\ P(\varphi(t_0 + \Delta t),\ \psi(t_0 + \Delta t),\ \omega(t_0 + \Delta t)),$$

则割线 P_0P 的方向向量为 $\overrightarrow{P_0P}$，即

$$\Delta\boldsymbol{r} = (\Delta\varphi(t_0),\ \Delta\psi(t_0),\ \Delta\omega(t_0)),$$

上式两边除以 Δt，得到的向量仍然是割线 P_0P 的方向向量，即

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta\varphi(t_0)}{\Delta t}, \frac{\Delta\psi(t_0)}{\Delta t}, \frac{\Delta\omega(t_0)}{\Delta t}\right),$$

令 $\Delta t \to 0$，便得曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 P_0 的切向量为

$$\boldsymbol{r}' = (\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0)).$$

因此

- 曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 P_0 的切线方程为

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-\psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z-\omega(t_0)}{\omega'(t_0)}.$$

- 曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 P_0 的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-\varphi(t_0)) + \psi'(t_0)(y-\psi(t_0)) + \omega'(t_0)(z-\omega(t_0)) = 0.$$

(2) 设空间曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的一般式方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ H(x,y,z)=0, \end{cases}$$

假设由这个一般式方程可化为向量方程

$$\boldsymbol{r}=(\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)),$$

则有关于 t 的恒等式

$$\begin{cases} F(\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t))\equiv 0, \\ H(\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t))\equiv 0, \end{cases}$$

两式分别对 t 求全导数得

$$\begin{cases} F'_x\varphi'(t)+F'_y\psi'(t)+F'_z\omega'(t)=0, \\ H'_x\varphi'(t)+H'_y\psi'(t)+H'_z\omega'(t)=0, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{n_1} = (F'_x,\ F'_y,\ F'_z)$，$\boldsymbol{n_2} = (H'_x,\ H'_y,\ H'_z)$，则上式表明曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的切向量 $\boldsymbol{r}' = (\varphi'(t),\ \psi'(t),\ \omega'(t))$ 同时垂直于 $\boldsymbol{n_1}$ 与 $\boldsymbol{n_2}$，因而 $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{n_1}$，$\boldsymbol{n_2}$ 的向量积

$$\boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = \left(\frac{D(F,H)}{D(y,z)},\ \frac{D(F,H)}{D(z,x)},\ \frac{D(F,H)}{D(x,y)}\right)$$

平行，所以曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切向量可取为

$$\left(\left.\frac{D(F,H)}{D(y,z)}\right|_{P_0},\ \left.\frac{D(F,H)}{D(z,x)}\right|_{P_0},\ \left.\frac{D(F,H)}{D(x,y)}\right|_{P_0}\right)$$

因此曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{D(F,H)}{D(y,z)}\right|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\left.\frac{D(F,H)}{D(z,x)}\right|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{\left.\frac{D(F,H)}{D(x,y)}\right|_{P_0}}.$$

曲线 $\widehat{AB}$ 在点 P_0 的法平面方程为

$$\left.\frac{D(F,H)}{D(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{D(F,H)}{D(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{D(F,H)}{D(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

或写为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F'_x(P_0) & F'_y(P_0) & F'_z(P_0) \\ H'_x(P_0) & H'_y(P_0) & H'_z(P_0) \end{vmatrix}=0.$$

Example

求曲线$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=4 \end{array}\right.$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线和法平面.

Example

求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线和法平面.

Proof.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$H(x,y,z)=x+y+z-4$，则

- $\boldsymbol{n_1}=(F'_x,\ F'_y,\ F'_z)\Big|_{(1,1,2)}=(2x,\ 2y,\ 2z)\Big|_{(1,1,2)}=(2,2,4)=2(1,1,2)$,
- $\boldsymbol{n_2}=(H'_x,\ H'_y,\ H'_z)\Big|_{(1,1,2)}=(1,1,1)\Big|_{(1,1,2)}=(1,1,1)$,
- $\boldsymbol{n}=(1,1,2)\times(1,1,1)=(-1,1,0)$，
- 故曲线在 $(1,1,2)$ 的切线方程为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{0},$$

法平面方程为 $x-y=0$.

□

Definition (切平面、法线、法向量)

设有空间曲面 S，P_0 是曲面 S 上一定点，C 是曲面 S 上通过点 P_0 的任意一条光滑曲线.

- 如果曲线 C 在点 P_0 的切线总保持在某一平面 Π 上，则称平面 Π 为曲面 S 在点 P_0 的**切平面**.
- 通过点 P_0 且与切平面 Π 垂直的直线称为曲面 S 在点 P_0 的**法线**.
- 切平面 Π 的法向量称为曲面 S 在点 P_0 的**法向量**.

下面分两种情况来研究空间曲面 S 在点 P_0 的切平面和法线的方程.

曲面方程为显式方程

设空间曲面 S 的一般式方程为 $F(x,y,z)=0$，这里 F 连续可微，且 F'_x, F'_y, F'_z 不全为 0.

在 S 上通过点 P_0 任取一条光滑曲线，设其方程为

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\omega(t),$$

则有关于 t 的恒等式

$$F(\varphi(t),\, \psi(t),\, \omega(t)) \equiv 0,$$

上式对 t 求全导数得

$$F'_x\varphi'(t)+F'_y\psi'(t)+F'_z\omega'(t)=0,$$

此式表明曲面 S 上通过 P_0 的任一光滑曲线 C 的切向量 $\boldsymbol{r}'=(\varphi'(t),\, \psi'(t),\, \omega'(t))$ 总垂直于向量 $\boldsymbol{n}=(F'_x,\, F'_y,\, F'_z)$.

所以该向量 $\boldsymbol{n}$ 是空间曲面 S 在点 P_0 的法向量，因此曲面 S 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

曲面 S 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(P_0)}$$

曲面方程为参数方程

设空间曲面 S 的参数方程为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

其中

- $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 连续可微,
- $\dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $\dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ 不全为 0
  (此时，我们称 (u, v) 为曲面 S 上点的**曲线坐标**).

假设曲面 S 的参数方程可化为一般式方程

$$F(x, y, z) = 0,$$

则有关于 u, v 的恒等式

$$F(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) \equiv 0,$$

此式对 u, v 分别求偏导数得

$$\begin{cases} F'_x x'_u + F'_y y'_u + F'_z z'_u = 0, \\ F'_x x'_v + F'_y y'_v + F'_z z'_v = 0. \end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)),$$

则方程组表明曲面 S 的法向量 $\boldsymbol{n} = (F'_x,\ F'_y,\ F'_z)$ 同时垂直于 $\boldsymbol{r}'_u$ 与 $\boldsymbol{r}'_v$.
因而 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v$ 的向量积
$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = (A, B, C) = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$ 平行，所以曲面 S 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (这里 $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$)的法向量可取为

$$(A(u_0, v_0),\ B(u_0, v_0),\ C(u_0, v_0)).$$

因此曲面 S 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$A(u_0, v_0)(x - x_0) + B(u_0, v_0)(y - y_0) + C(u_0, v_0)(z - z_0) = 0.$$

或写为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

曲面 S 在点 P_0 的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{A(u_0, v_0)} = \frac{y - y_0}{B(u_0, v_0)} = \frac{z - z_0}{C(u_0, v_0)}.$$

Example

求球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

Example

求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

Proof.

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2z-5$，则

$$\boldsymbol{n}=(F_x'(1,1,1),\ F_y'(1,1,1),\ F_z'(1,1,1))=(2,2,4)=2(1,1,2),$$

于是曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面方程为

$$(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

□

Example

试求曲面 $x^2 + y^2 = 4z$ 的切平面，使它通过曲线 $x = t^2, y = t,$ $z = 3t - 3$ 在 $t = 1$ 处的切线.

Example

试求曲面 $x^2+y^2=4z$ 的切平面，使它通过曲线 $x=t^2, y=t,$ $z=3t-3$ 在 $t=1$ 处的切线.

Proof.

- 曲线 $x=t^2$, $y=t$, $z=3t-3$ 在 $t=1$ 处对应点为 $(1,1,0)$，切向量为
$$\boldsymbol{l}=(2t,1,3)\Big|_{t=1}=(2,1,3).$$
- 曲面 $x^2+y^2=4z$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为
$$\boldsymbol{n}=(2x,2y,-4)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,2y_0,-4).$$
- 曲面 $x^2+y^2=4z$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面为
$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-4(z-z_0)=0.$$

- 因为点 (x_0, y_0, z_0) 在曲面 $x^2 + y^2 = 4z$ 上，所以

$$x_0^2 + y_0^2 = 4z_0,$$

化简得切平面的方程为 $x_0x + y_0y - 2z - 2z_0 = 0$.

- 又因为向量 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，切平面过点 $(1, 1, 0)$，所以

$$2 \cdot (2x_0) + 1 \cdot 2y_0 + 3 \times (-4) = 0,$$

$$x_0 + y_0 - 2z_0 = 0.$$

- 综上可得 $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$ 或 $x_0 = \frac{12}{5}$，$y_0 = \frac{6}{5}$，$z_0 = \frac{9}{5}$，所以所求切平面的方程为 $x + y - z - 2 = 0$ 或 $6x + 3y - 5z - 9 = 0$.

$\square$

几个例子

Example

求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$，在点 $(1, -1, 2)$ 处的切线方程.

Example

求曲面 $z = x^2 + y^2$ 的切平面，使其通过直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Example

求平面 π，使其通过曲线 $\begin{cases} y^2 = x \\ z = 3(y-1) \end{cases}$，在 $y = 1$ 处的切线，且与曲面 $\Gamma : x^2 + y^2 = 4z$ 相切.