第 5 章 多元函数微积分

Outline

Outline

极值与条件极值

Definition (二元函数的极值)

设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内有定义，P_0 是 G 的内点.

- 若存在 P_0 的某去心邻域 $D = \mathring{N}_\delta(P_0) \subset G$，使得当 $P \in D$ 时，恒有
$$f(P) \le f(P_0) \quad (\text{或 } f(P) \ge f(P_0)),$$
则称 $f(P_0)$ 为函数 f 在 G 上的**极大值** (或**极小值**).
- 称 P_0 为函数 f 的**极大值点** (或**极小值点**).
- 极大值与极小值统称为**极值**.
- 极大值点与极小值点统称为**极值点**.
- 当上述不等号"$\le$"改为"$<$"(或"$\ge$"改为"$>$") 时，则称 $f(P_0)$ 为函数 f 在 G 上的**严格极大值** (或**严格极小值**).

极值的必要条件

由一元函数取得极值的必要条件, 很容易得到下述结论:

Theorem (极值的必要条件)

设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导，且 $f(x_0,y_0)$ 是函数 f 的极值，则 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.

Proof.

- 分别令 $y=y_0$ 与 $x=x_0$，得到两个一元函数 $f(x,y_0)$ 与 $f(x_0,y)$.
- 显然 $f(x,y_0)$ 与 $f(x_0,y)$ 在 x_0 与 y_0 分别取极值.
- 由一元函数极值的必要条件可得

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

□

驻点

Definition (驻点)

若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导，且 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，则称 (x_0,y_0) 为函数 f 的**驻点**(**或静止点**).

驻点

Definition (驻点)

若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导，且 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$，则称 (x_0,y_0) 为函数 f 的**驻点**(**或静止点**).

Remark

- 极值的必要条件表明: 可微函数只可能在驻点处取极值, 但是函数在驻点处却不一定取极值.
- 例如 $z=xy$，$(0,0)$ 是其驻点，但 $z(0,0)=0$ 显然不是极值. 此外，对于一般的二元函数，除驻点处函数可能取极值外，在其不可偏导的点处也可能取得极值.
- 例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，在 $(0,0)$ 处不可偏导，但 $z(0,0)=0$ 显然是极小值.
- 我们把函数的驻点和不可偏导的点称为函数的可疑极值点.

极值判别法

Theorem (极值判别法 I)
设 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $G = N_\delta(P_0)$，函数 f 在 G 内连续，
且在 $U = \overset{\circ}{N}_\delta(P_0)$ 内连续可微，记

$$\mu(x,y) = f'_x(x,y)(x-x_0) + f'_y(x,y)(y-y_0),$$

1) 若 $\forall (x,y) \in U$, $\mu(x,y) > 0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值;
2) 若 $\forall (x,y) \in U$, $\mu(x,y) < 0$, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值.

Proof.

- 据二元函数拉格朗日中值公式有

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(\xi,\eta)(x-x_0) + f'_y(\xi,\eta)(y-y_0),$$

这里 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\eta = y_0 + \theta(y-y_0)$, $(0 < \theta < 1)$.

- 于是

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= (f'_x(\xi,\eta)(\xi-x_0) + f'_y(\xi,\eta)(\eta-y_0))\frac{1}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta}\mu(\xi,\eta), \qquad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

- 若对任意的 $(x,y) \in U$，有 $\mu(x,y) > 0$，则 $f(x,y) - f(x_0,y_0) > 0$，由点 $(x,y) \in U$ 的任意性，即得 $f(x_0,y_0)$ 为极小值. 另一情况的证明是类似的.

$\square$

极值判别法

Theorem (极值判别法 II)

设 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, G = N_\delta(P_0)$，函数 f 在 G 内二阶连续可微，且 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

1) 若 $B^2 - AC < 0$, $A > 0$，则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值；
2) 若 $B^2 - AC < 0$, $A < 0$，则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值；
3) 若 $B^2 - AC > 0$，则 $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

Proof.

据函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一阶泰勒展式

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) = & f_x'(x_0,y_0)h + f_y'(x_0,y_0)k \\ & + \frac{1}{2}(f_{xx}''(\xi,\eta)h^2 + 2f_{xy}''(\xi,\eta)hk + f_{yy}''(\xi,\eta)k^2), \end{aligned}$$

这里 $h=x-x_0$, $k=y-y_0$, $\xi=x_0+\theta h$, $\eta=y_0+\theta k$, $0<\theta<1$.
由于 f 二阶连续可微，于是当 $h\to 0$, $k\to 0$ 时，

$$f_{xx}''(\xi,\eta)=A+\alpha, \quad f_{xy}''(\xi,\eta)=B+\beta, \quad f_{yy}''(\xi,\eta)=C+\gamma,$$

其中 α, β, $\gamma\to 0$，令 $h=\rho\cos\theta$, $k=\rho\sin\theta$, $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$，则

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+\frac{1}{2}(\alpha h^2+2\beta hk+\gamma k^2) \\ &= \frac{1}{2}(A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta)\rho^2+o(\rho^2) \end{aligned}$$

当

$$\varphi(\theta) = A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta \neq 0$$

时, 因 $o(\rho^2)$ 比 ρ^2 是高阶无穷小，只要 ρ 充分小，$f(x,y) - f(x_0,y_0)$ 与 $\varphi(\theta)$ 有相同的符号. 下面来讨论 $\varphi(\theta)$ 的符号.

(1) 当 $B^2 - AC < 0$ 时，A, C 皆不为零，且 A 与 C 同号，

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{A}\big((A\cos\theta + B\sin\theta)^2 + (AC - B^2)\sin^2\theta\big),$$

- 因 h, k 不全为 0 时，$\sin\theta$ 与 $A\cos\theta + B\sin\theta$ 不全为 0，$\varphi(\theta)$ 与 A 同号.
- 即当 $A > 0$, ρ 充分小时，$f(x,y) - f(x_0,y_0) > 0$.
- 当 $A < 0$, ρ 充分小时，$f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0$，故结论 1)，2) 得证.

(2)

$$\varphi(\theta)=\frac{1}{A}\left((A\cos\theta+B\sin\theta)^2+(AC-B^2)\sin^2\theta\right),$$

当 $B^2-AC>0$ 时，分别就 A 与 C 不全为 0 与 $A=C=0$ 两种情况讨论如下:

- 当 A 与 C 不全为 0 时，不妨设 $A\neq 0$. 取 $h\neq 0$, $k=0$ 代入 $\varphi(\theta)$ 式得 $\varphi(\theta)=A\cos^2\theta$ 与 A 同号，
- 取 $\dfrac{h}{k}=-\dfrac{B}{A}$ 代入 $\varphi(\theta)$ 得 $\varphi(\theta)=\dfrac{1}{A}(AC-B^2)\sin^2\theta$ 与 A 异号，
- 所以当 ρ 充分小时，$\varphi(\theta)$ 的符号有时为正，有时为负，故结论 3) 成立.
- 当 $A=C=0$ 时，$B\neq 0$, $\varphi(\theta)=2B\cos\theta\sin\theta$，显然 $\varphi(\theta)$ 的符号有时为正，有时为负，故结论 3) 成立.

□

Remark

定理中若 $B^2 - AC = 0$，考察例子

$$z_1 = x^4 + y^4, \qquad z_2 = -(x^4 + y^4), \qquad z_3 = xy^2,$$

- 这三个函数在 $(0,0)$ 处都有 $B^2 - AC = 0$，
- 易于证明 $z_1(0,0)$ 是极小值，$z_2(0,0)$ 是极大值，$z_3(0,0)$ 不是极值.
- 故当 $B^2 - AC = 0$ 时，$f(x_0, y_0)$ 不一定是极值.

Example

求函数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + 8y^3$ 的极值.

Example

求函数 $f(x,y)=x^3-3xy+8y^3$ 的极值.

Proof.

由方程组

$$\begin{cases} f_x' = 3x^2 - 3y = 3(x^2-y) = 0, \\ f_y' = -3x + 24y^2 = -3(x-8y^2) = 0 \end{cases}$$

解得驻点 $P_1(0,0), P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

$$f_{xx}'' = 6x, \qquad f_{xy}'' = -3, \qquad f_{yy}'' = 48y,$$

- 在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 处，$A=3,\ B=-3,\ C=12$，$B^2-AC<0,\ A>0$，所以 $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$ 是极小值.
- 在 $(0,0)$ 处，$A=0,\ B=-3,\ C=0$，$B^2-AC>0$ 所以 $f(0,0)=0$ 不是极值.

□

Example

求函数 $f(x,y) = 2(y-x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2$ 的极值.

Example

求函数 $f(x,y)=2(y-x^2)^2-\frac{1}{7}x^7-y^2$ 的极值.

Proof.

由方程组

$$\begin{cases} f_x'=-8x(y-x^2)-x^6=0, \\ f_y'=4(y-x^2)-2y=0 \end{cases}$$

解得驻点 $P_1(0,0), P_2(-2,8)$.

$$f_{xx}''=-8y+24x^2-6x^5, \qquad f_{xy}''=-8x, \qquad f_{yy}''=2,$$

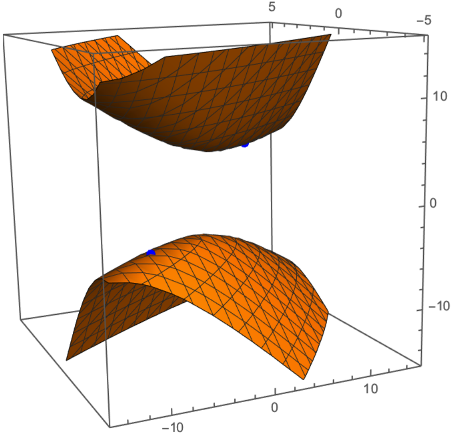
$$f''_{xx} = -8y + 24x^2 - 6x^5, \qquad f''_{xy} = -8x, \qquad f''_{yy} = 2,$$

- 在 $(-2,8)$ 处，$A = 224,\ B = 16,\ C = 2$，$B^2 - AC < 0,\ A > 0$，所以 $f(-2,8) = -\frac{96}{7}$ 是极小值.
- 在 $(0,0)$ 处，$A = 0,\ B = 0,\ C = 2$，$B^2 - AC = 0,\ f(0,0) = 0.$
- 当 $x = 0$ 时，$f(0,y) = y^2$，所以在点 $(0,0)$ 的任意邻域内，存在 $(0,\varepsilon) \neq (0,0)$ (其中 $\varepsilon > 0$)，使 $f(0,\varepsilon) > 0.$
- 当 $y = x^2$ 时，$f(x,x^2) = -\dfrac{1}{7}x^7 - x^4$，所以在点 $(0,0)$ 的任意邻域内，存在 $(\varepsilon,\varepsilon^2) \neq (0,0)$ (其中 $\varepsilon > 0$)，使 $f(\varepsilon,\varepsilon^2) < 0.$
- 所以 $f(0,0)$ 不是极值.

$\square$

Example

求由方程 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 的极值点和极值.



Proof.

方法1:

原方程两端分别关于 x, y 求偏导，得

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2yz'_x - 2zz'_x = 0, \\ -6x + 20y - 2z - 2yz'_y - 2zz'_y = 0 \end{cases}$$

在上式中令 $z'_x = z'_y = 0$，则得方程组

$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0 \end{cases}$$

把它与原方程联立，可求出 x, y, z 有两组解 $(9, 3, 3)$, $(-9, -3, -3)$.
从第一个方程组出发，再继续关于 x, y 求偏导，可得

$$\begin{cases} 2 - 2yz''_{xx} - 2(z'_x)^2 - 2zz''_{xx} = 0, \\ -6 - 2z'_x - 2yz''_{xy} - 2z'_x z'_y - 2zz''_{xy} = 0 \\ 20 - 2z'_y - 2z'_y - 2yz''_{yy} - 2(z'_y)^2 - 2zz''_{yy} = 0 \end{cases}$$

将 $z'_x = z'_y = 0$, $(x, y, z) = (\pm 9, \pm 3, \pm 3)$ 代入前式，可得方程组

$$\begin{cases} 2 \mp 12A = 0, \\ -6 \mp 12B = 0 \\ 20 \mp 12C = 0 \end{cases}$$

解得

$$A = \pm\frac{1}{6}, \qquad B = \mp\frac{1}{2}, \qquad C = \pm\frac{5}{3},$$

- 在 $(9, 3, 3)$ 处，$B^2 - AC < 0, A > 0$，所以 $(9, 3)$ 是极小值点，$z(9, 3) = 3$ 是极小值.
- 在 $(-9, -3, -3)$ 处，$B^2 - AC < 0, A < 0$，所以 $(-9, -3)$ 是极大值点，$z(-9, -3) = -3$ 是极大值.

方法2:

设 $F(x,y,z)=x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18$，则

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{x-3y}{y+z},\qquad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{-3x+10y-z}{y+z},$$

$$z''_{xx}=\frac{y+z-(x-3y)z'_x}{(y+z)^2},\qquad z''_{xy}=\frac{-3(y+z)-(x-3y)z'_y}{(y+z)^2},$$

$$z''_{yy}=\frac{(10-z'_y)(y+z)-(-3x+10y-z)z'_y}{(y+z)^2},$$

- 由 $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$ 可得 $x = 3z, y = z$，代入原方程得 $x = \pm 9,\ y = \pm 3,\ z = \pm 3.$
- 将 $x = \pm 9,\ y = \pm 3,\ z = \pm 3,\ z'_x = 0,\ z'_y = 0$ 代入二阶偏导数的表达式中得
$$A = \pm\frac{1}{6}, \qquad B = \mp\frac{1}{2}, \qquad C = \pm\frac{5}{3},$$
- 在 $(9,3,3)$ 处，$B^2 - AC < 0, A > 0$，所以 $(9,3)$ 是极小值点，$z(9,3) = 3$ 是极小值.
- 在 $(-9,-3,-3)$ 处，$B^2 - AC < 0, A < 0$，所以 $(-9,-3)$ 是极大值点，$z(-9,-3) = -3$ 是极大值.

□

进一步的例子

Example

求 $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + 3y + 3$ 的极值.

Example

求 $z = x^2 + y^3 - 2xy - y$ 的极值.

Example

求 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值.

Example

求 $z = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

Example

求由方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

Example

求 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值.

Example

求 $z = (1+e^y)\cos x - ye^y$ 的极值.

解: 关于 z 对 x 和 y 求偏导

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv -(1+e^y)\sin x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \equiv e^y \cos x - (1+y)e^y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

得到驻点为 $x = n\pi$, $y = \cos(n\pi) = (-1)^n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Example

求 $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ 的极值.

解: 关于 z 对 x 和 y 求偏导

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv -(1 + e^y)\sin x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \equiv e^y \cos x - (1 + y)e^y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

得到驻点为 $x = n\pi$, $y = \cos(n\pi) = (-1)^n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$. 因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv (1 + e^y)\cos x, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv e^y \sin x, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv e^y \cos x - (2 + y)e^y, \end{cases} \tag{2}$$

Example

求 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值.

解: 关于 z 对 x 和 y 求偏导

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} \equiv -(1+e^y)\sin x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \equiv e^y\cos x-(1+y)e^y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

得到驻点为 $x=n\pi$, $y=\cos(n\pi)=(-1)^n-1$, $n\in\mathbb{Z}$. 因为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv (1+e^y)\cos x, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \equiv e^y\sin x, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv e^y\cos x-(2+y)e^y, \end{cases} \tag{2}$$

从而

- n 为偶数: $A=-2$, $B=0$, $C=-1$, 取极大值;
- n 为奇数: $A=1+e^{-2}$, $B=0$, $C=-e^{-2}$, 非极值

最大值与最小值

与极值问题联系紧密的是多元函数的最大值与最小值问题.

- 我们已经知道, 如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上一定有最大值与最小值.
- 而使函数取得最大值与最小值的点可能在 D 的内部，也可能在 D 的边界上.
- 如果我们再假定函数 f 在 D 上连续，在 D 内可微且有有限个驻点，这时，如果函数在 D 的内部取得最大(小)值，那么这个最大(小)值也是极大(小)值.

求函数的最值的一般方法:

- 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处对应的函数值;

求函数的最值的一般方法:

- 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处对应的函数值;
- 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值及最小值;

求函数的最值的一般方法:

- 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处对应的函数值;
- 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值及最小值;
- 把上述函数值相互比较，最大的就是 f 在 D 上的最大值，最小的就是 f 在 D 上的最小值.

求函数的最值的一般方法:

- 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处对应的函数值;
- 求出函数 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值及最小值;
- 把上述函数值相互比较，最大的就是 f 在 D 上的最大值，最小的就是 f 在 D 上的最小值.
- 但在通常所遇到的实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数的最大值(或最小值)一定存在且必在 D 的内部取得，而在 D 的内部只有一个驻点，则此驻点处的函数值一定是函数 f 在 D 上的最大(小)值.

Example

要造一个容积为 V 的无盖长方体水池, 问如何设计长、宽、高, 才能使它的表面积最小.

Example

要造一个容积为 V 的无盖长方体水池, 问如何设计长、宽、高, 才能使它的表面积最小.

Proof.

设长方体的长宽高分别为 x, y, z，由 $V = xyz$ 可得 $z = \dfrac{V}{xy}$，表面积为

$$S = xy + 2(xz + yz) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \qquad (x > 0,\ y > 0).$$

问题化为求 S 的最小值. 由方程组

$$\begin{cases} S'_x = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ S'_y = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

解得驻点为 $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$.

根据问题的实际意义知 S 一定有最小值, 且最小值在

$$D = \{ (x, y) \,|\, 0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty \}$$

内取得, 而在 D 内函数 S 有唯一的可疑极值点，所以此点必为最小值点. 因此当长方体的长宽高分别为 $\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ 时，表面积最小. □

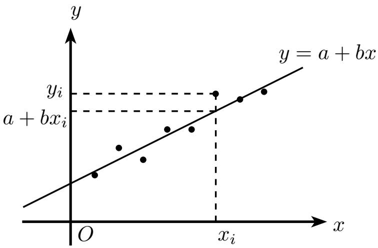
Example (最小二乘法)

设两个变量 x, y 之间的关系近似于线性函数关系，现测得 x, y 的一组实验数据 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$，不妨设 $x_i \neq x_j (i \neq j)$. 试求直线方程 $y = a + bx$ 使得平方和

$$u(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - y_i)^2$$

取最小值.

在统计学中，称所求的直线 $y = a + bx$ 为**回归直线**，称 a, b 为**回归系数**. 量 $u(a, b)$ 刻画了回归直线与散点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的离散程度. 通过求 $u(a, b)$ 的最小值来确定回归系数 a, b 的这种方法称为**最小二乘法**.



Proof.

因为 $u(a,b)$ 在全平面上可微，故其极值点必为驻点. 考虑方程组

$$\begin{cases} u'_a = \sum_{i=1}^{n} 2(a + bx_i - y_i) = 0, \\ u'_b = \sum_{i=1}^{n} 2(a + bx_i - y_i)x_i = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases}$$

这里 a, b 是未知数. 用数学归纳法可证明方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i<j\le n}}^n (x_i - x_j)^2 \neq 0.$$

因而方程组有唯一解 (a_0, b_0), 也就是说函数 $u(a, b)$ 有唯一的驻点. 此驻点必为最小值点. $\square$

条件极值与拉格朗日乘数法

Example

要造一个容积为 V 的无盖长方体水池, 问如何设计长、宽、高, 才能使它的表面积最小.

问题也可以叙述为: 求函数 $S = S(x, y, z) = xy + 2(xz + yz)$ 满足约束

$$\varphi(x, y, z) = V - xyz = 0$$

的极值. 这类极值问题称为**条件极值**.

在此例求解中，

- 我们是从约束方程 $\varphi(x, y, z) = 0$ 中解出 $z = z(x, y)$，代入 $S(x, y, z)$，
- 从而将条件极值问题化为求二元函数 $S(x, y, z(x, y))$ 在无约束条件下的极值.
- 但是这种解法常常行不通, 或者比较困难. 下面介绍处理条件极值问题的一种行之有效的方法.

Theorem

设函数 $f(x,y,z)$ 连续可微，曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 光滑，函数 $f(x,y,z)$ 满足约束方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件极值点在 (x_0,y_0,z_0) 取得. 令

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z),$$

则 (x_0,y_0,z_0) 满足下列方程组

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)=0, \\ F'_y=f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)=0, \\ F'_z=f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)=0, \\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Remark

曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 光滑是指 φ 关于 x,y,z 的偏导数连续且不同时为 *0*. 函数 $F(x,y,z,\lambda)$ 称为**拉格朗日函数**，数 λ 称为**拉格朗日乘数**.

Proof.
因 f 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 取得条件极值，首先有

$$\varphi(P_0) = \varphi(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

因曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 光滑，不妨设 $\varphi'_z(P_0) \neq 0$. 据隐函数存在定理，存在 (x_0, y_0) 的邻域 U，使得方程 $\varphi(x, y, z) = 0$ 有唯一的解 $z = z(x, y)$，并且

$$z_0 = z(x_0, y_0), \quad \varphi(x, y, z(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in U;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\varphi'_x(P_0)}{\varphi'_z(P_0)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\varphi'_y(P_0)}{\varphi'_z(P_0)}.$$

由于 $f(x, y, z(x, y))$ 在 (x_0, y_0) 取极值，据极值的必要条件得

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

综合上面两式得

$$\begin{cases} f'_x(P_0) - \frac{1}{\varphi'_z(P_0)} f'_z(P_0)\varphi'_x(P_0) = 0, \\ f'_y(P_0) - \frac{1}{\varphi'_z(P_0)} f'_z(P_0)\varphi'_y(P_0) = 0. \end{cases}$$

记 $\lambda_0 = -\dfrac{1}{\varphi'_z(P_0)} f'_z(P_0)$，得

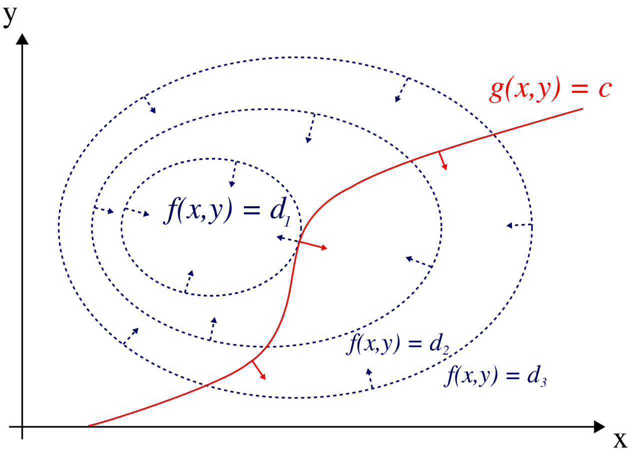
$$\begin{cases} f'_x(P_0) + \lambda_0\varphi'_x(P_0) = 0, \\ f'_y(P_0) + \lambda_0\varphi'_y(P_0) = 0, \\ f'_z(P_0) + \lambda_0\varphi'_z(P_0) = 0, \\ \varphi(P_0) = 0. \end{cases}$$

□

Remark

定理表明，欲求函数 $f(x,y,z)$ 满足约束方程 $\varphi(x,y,z)=0$ 的条件极值：

- 可先建立拉格朗日函数，并求方程组的解 (x_0,y_0,z_0,λ_0)，
- 则 (x_0,y_0,z_0) 是可疑的条件极值点，
- 然后再讨论函数 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 是否取得条件极值.
- 这一方法称为**拉格朗日乘数法**.
- 如果可能的条件极值点 (或条件最大值点与最小值点) 只有一个 (或两个)，又根据实际问题的几何或物理意义，知其条件极值存在，则上述可能的条件极值点必为所求的极值点.


y
$g(x,y) = c$
$f(x,y) = d_1$
$f(x,y) = d_2$
$f(x,y) = d_3$
x

多个约束方程的条件极值问题

求函数 $f(x, y, z)$ 满足两个约束方程

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

的条件极值时，拉格朗日函数为

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z),$$

可能的条件极值点由下列方程组确定:

$$\begin{cases} F_x' = f_x'(x, y, z) + \lambda\varphi_x'(x, y, z) + \mu\psi_x'(x, y, z) = 0, \\ F_y' = f_y'(x, y, z) + \lambda\varphi_y'(x, y, z) + \mu\psi_y'(x, y, z) = 0, \\ F_z' = f_z'(x, y, z) + \lambda\varphi_z'(x, y, z) + \mu\psi_z'(x, y, z) = 0, \\ F_\lambda' = \varphi(x, y, z) = 0. \\ F_\mu' = \psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Example

求函数 $u = x^a y^b z^c$ 满足条件 $x + y + z = m$
$(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0, c > 0, m > 0)$ 的极值.

Example

求函数 $u = x^a y^b z^c$ 满足条件 $x + y + z = m$
$(x > 0, y > 0, z > 0, a > 0, b > 0, c > 0, m > 0)$ 的极值.

Proof.

问题转化为求函数 $\ln u = a\ln x + b\ln y + c\ln z$ 的条件极值.

$$F(x, y, z, \lambda) = a\ln x + b\ln y + c\ln z + \lambda(x + y + z - m),$$

由方程组

$$\begin{cases} F_x' = \frac{a}{x} + \lambda = 0, \\ F_y' = \frac{b}{y} + \lambda = 0, \\ F_z' = \frac{c}{z} + \lambda = 0, \\ F_\lambda' = x + y + z - m = 0 \end{cases}$$

解得可疑的极值点为 $\left(\dfrac{am}{a+b+c}, \dfrac{bm}{a+b+c}, \dfrac{cm}{a+b+c}\right)$.

- 函数 $u=x^a y^b z^c$ 在有界闭区域 $D:\ x+y+z=m\ \ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ 上必有最大值和最小值,
- 显然在边界处($x+y+z=m, x=0$ 或 $y=0$ 或 $z=0$)函数取得最小值, 所以最大值必在区域内部 $(x+y+z=m,\ x>0,\ y>0,\ z>0)$ 取得.
- 而在区域内部函数只有一个可疑的极值点，所以这个可疑的极值点必为函数的最大值点.
- 所以函数 $u=x^a y^b z^c$ 满足条件 $x+y+z=m\ (x>0, y>0, z>0)$ 的极大值为

$$u\left(\frac{am}{a+b+c}, \frac{bm}{a+b+c}, \frac{cm}{a+b+c}\right)=\frac{a^a b^b c^c m^{a+b+c}}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

□

Example

用拉格朗日乘数法求点 $P(-1,-1,-1)$ 与曲线 Γ: $\begin{cases} z = xy, \\ x + y = 4 \end{cases}$ 的最短距离.

Example

用拉格朗日乘数法求点 $P(-1,-1,-1)$ 与曲线 Γ: $\begin{cases} z = xy, \\ x + y = 4 \end{cases}$ 的最短距离.

Proof.

曲线上任一点 (x, y, z) 到点 $(-1,-1,-1)$ 的距离为

$$d = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2},$$

问题转化为求函数

$$f(x, y, z) = d^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$$

满足约束方程 $xy - z = 0$ 和 $x + y - 4 = 0$ 的条件极值.

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 + \lambda(xy - z) + \mu(x + y - 4),$$

由方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2(x+1) + \lambda y + \mu = 0, \\ F'_y = 2(y+1) + \lambda x + \mu = 0, \\ F'_z = 2(z+1) - \lambda = 0, \\ F'_\lambda = xy - z = 0, \\ F'_\mu = x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

解得可疑的极值点为 $(2,2,4)$, $(0,4,0)$, $(4,0,0)$.
而 $f(2,2,4) = 43$, $f(0,4,0) = f(4,0,0) = 27$.

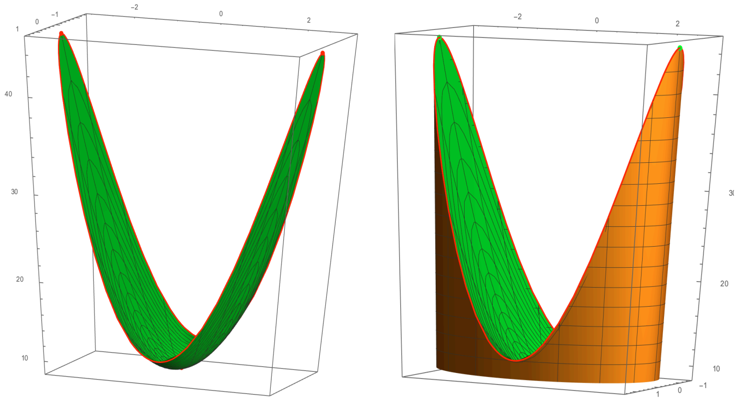
- 由问题的几何意义知，点 $(-1,-1,-1)$ 到曲线的距离的最小值一定存在，因而函数 $f(x,y,z)$ 的条件最小值一定存在，且在可疑极值点处取得.

- 所以 $f(0,4,0) = f(4,0,0) = 27$ 为函数 $f(x,y,z)$ 的条件最小值. 因此所求最短距离为 $\sqrt{27}$.

□

Example

求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在 $D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\le 9\}$ 上的最大值和最小值.



Proof.

- $\begin{cases} f'_x = 2x = 0, \\ f'_y = 8y = 0, \end{cases}$ 解得驻点 $(0,0)$，此点是区域 D 的内点.

- 求 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界 $4x^2+y^2=9$ 上的可疑的条件极值点. 建立拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+4y^2+9+\lambda(4x^2+y^2-9)$,

- 由方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x+8\lambda x = 0, \\ F'_y = 8y+2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = 4x^2+y^2-9 = 0, \end{cases}$$

  解得可疑的极值点为 $(0,\pm 3)$, $\left(\pm\dfrac{3}{2},0\right)$.

  $f(0,0)=9$, $f(0,3)=f(0,-3)=45$. $f\left(\dfrac{3}{2},0\right)=f\left(-\dfrac{3}{2},0\right)=\dfrac{45}{4}$,

- $f(x,y)$ 在 D 上最大值为 $f(0,\pm3)=45$，最小值为 $f(0,0)=9$.

□

Example

设有等腰梯形 $ABCD$，$AB//CD$，已知 $BC+CD+AD=8p$，其中 p 为常数，该梯形绕边 AB 旋转一周所得旋转体体积取最大值，求 AB, BC, CD 的长度.

Example

设有等腰梯形 $ABCD$，$AB//CD$，已知 $BC+CD+AD=8p$，其中 p 为常数，该梯形绕边 AB 旋转一周所得旋转体体积取最大值，求 AB, BC, CD 的长度.

Proof.

- 过 D 作 AB 于 E，设 $x=AD$, $y=CD/2$, $z=AE$，
- 则由题意旋转体体积为：
  $V=2[\frac{1}{3}\pi(x^2-z^2)z+\pi(x^2-z^2)y]=\frac{2}{3}\pi(x^2-z^2)(z+3y)$.
- 问题化为在条件 $x+y=4p$ 下求 $V=\frac{2}{3}\pi(x^2-z^2)(z+3y)$ 取最大值的点 (X,Y,Z).
- 令 $F_X^{'}=0$, $F_y^{'}=0$, $F_z^{'}=0$, $F_\lambda^{'}=0$，可得唯一驻点：$x=3p$, $y=z=p$.
- 由于问题是几何问题，旋转体最大体积一定存在，故此唯一驻点就是该问题的最大值点. 所以

$$AB=4p,\quad BC=AD=x=3p,\quad CD=2y=2p.$$

Example

求曲面 $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{z}=1\ (a,b,c>0)$ 的切平面,
使其在三个坐标轴上截距的乘积最大.

Example

设 Γ 为由 $z=x^2+y^2, z=2$ 所围曲面,
求 Γ 的内接长方体体积的最大值.

Example

求函数 $f(x,y)=x^2-\sqrt{5}xy$ 在区域 $x^2+4y^2\le 6$ 上的最值.

Example

求函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 在区域 $x^2+y^2\le z\le 1$ 上的最值.

Example

设 $a>0$, 平面 π 通过点 $M(4a,-5a,3a)$, 且在三个坐标轴上的截距相等. 在 π 位于第一卦限部分求一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，使得函数 $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}z^2}$ 在 P 点处取最小值.

Example

求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面 $(x,y,z\ge 0)$，
使其与三个坐标面所围立体体积最小.