微积分 II（第一层次）期末试卷 (2015.6.22)

一、计算下列各题(5分 × 11=55分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $|x|\le 1, 0\le y\le 2$.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

4. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

5. 求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 计算曲线积分 $\oint_C \arctan\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$, 其中 C 为 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围区域的边界，取逆时针方向.

7. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}-\dfrac{7}{10^n}\right)$ 是否收敛，如果收敛，求其和.

8. 计算曲线积分 $\int_l \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为包含单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在内的分段光滑的简单闭曲线，取逆时针方向.

9. 求解微分方程 $(e^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0$.

10. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

11. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ 的值.（提示：可利用上题结果）

二、(12分)　计算曲面积分 $\iint\limits_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,

三、(12分)　设函数 $Q(x,y)$ 连续可微，曲线积分 $\int_C 3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，且对一切实数 t 都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求函数 $Q(x,y)$.

四、(13分)　1. 求函数 $f(x)=x^2, (-\pi\le x\le\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶展开式；

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

五、(8分)（本题非商学院的考生做）　设 $a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n=1,2,\cdots)$,

证明：(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛；　(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

六、(8分)（本题商学院的考生做）　讨论当实数 p 为何值时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.