微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2016.6.20)

一、 1. $0<\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}\le\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}=0$, 由夹逼准则可知，原式=0.

2. 设 $F=u^2-v+xy, H=u+v^2+x-y$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=-\dfrac{2vy+1}{4uv+1}, \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}}=\dfrac{2u+x}{4uv+1}$.

3. 方法1: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{2n-1}=\dfrac{1}{3}<1$, 由达朗贝尔判别法知原级数收敛。

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{3^{k-1}}-\frac{k+1}{3^{k+1}}\Big)=\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{n+1}{3}\Big)=1.$$

方法2：构造幂级数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$, 此幂级数的收敛域为(-1,1).

则 $\displaystyle\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^{n-1}=\frac{x}{1-x^2},\quad S(x)=\Big(\frac{x}{1-x^2}\Big)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},\quad x\in(-1,1).$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{2n-2}=\frac{1}{3}S\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=1.$$

4. 令 $y^{-2}=u$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+2u=-2x$, 通解为

$$u=y^{-2}=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\Big(C+\int(-2x)\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=C\mathrm{e}^{-2x}-x+\frac{1}{2}.$$

5. 令 $y'=P(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p$, 分离变量积分得 $p=cy$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=Cy$, 代入初值条件得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$, 分离变量积分得 $y=C_1\mathrm{e}^x$, 代入初值条件得 $y=\mathrm{e}^x$.

二、 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^3\cos\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\rho^2}=0=f(0,0)$,

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

(2) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1,\quad f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{y}=0$,

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) 令 $f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\omega$, 则 $\omega=\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-x=-2\rho\cos\theta\sin^2\theta$,

$\dfrac{\omega}{\rho}=-2\cos\theta\sin^2\theta\not\to0(\rho\to0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、 $$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x^2y^2\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\frac{Rx^2y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R\frac{\rho^5}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$\overset{(\rho=R\sin t)}{=\!=\!=}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{8}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5t\mathrm{d}t=\frac{2\pi R^6}{15}.$$

四、　设曲面$S_1: z=0, (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad \text{原式}=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

五、　$|u_n|=\dfrac{1}{n+(-1)^n}\sim\dfrac{1}{n},\ (n\to\infty)$, 而调和级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数不绝对收敛；

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}-\dfrac{1}{n^2-1}$, 而级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$是莱布尼兹型的交错级数，收敛； 级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$也收敛，所以原级数收敛且条件收敛.

六、　$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^4}-1=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\ \ (|x|<1)$, 所以 $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\quad |x|<1.$

七、　将$f(x)$进行偶延拓，则$b_n=0\ \ (n=1,2,\cdots)$;　　$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi},\quad (n=2k-1,\quad k=1,2,\cdots)$$

所以 $x=\dfrac{\pi}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad x\in[0,\pi].$　　$x=0$代入上式得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$, 所以$S=\dfrac{\pi^2}{6}$.

八、　(1)　$u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{(3n)!},\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{3n+1}(3n)!}{|x|^{3n}(3n+3)!}=0$, 所以收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},\ S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\ S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, 可得微分方程 $\begin{cases}S''+S'+S=e^x,\\ S(0)=1,\ S'(0)=0.\end{cases}$

特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0,\quad \lambda=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 设特解为$y^*=Ae^x$, 代入原方程得 $y^*=\dfrac{1}{3}e^x$.

方程的通解为 $S=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\dfrac{1}{3}e^x$.

由初始条件$S(0)=1, S'(0)=0$可得$C_1=\dfrac{2}{3}, C_2=0$, 所以$S(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x$.

($S(x)$满足的微分方程也可以是$S'''(x)-S(x)=0, S(0)=1, S'(0)=S''(0)=0.$)