2017-2018 学年第二学期第一层次微积分 II 试卷 A 参考答案 2018.7.3

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 5 题，计 30 分）

1. 设$u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，其中$f(v)$具有二阶连续导数，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}f'(v)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''(v)-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}f'(v)$.

2. 讨论广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt[n]{1+x}}\ (n>0)$的敛散性.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1+\frac{1}{n}}\dfrac{1}{x\sqrt[n]{x+1}}=1$，$\because 1+\dfrac{1}{n}>1$，由 Cauchy 判别法知，原广义积分收敛.

3. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$的收敛域.

解：令$\dfrac{(x-3)^2}{5}=t$，则原幂级数化为：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$，该幂级数的收敛域为：$[-1,1)$，

所以原幂级数的收敛域为：$(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

4. 求微分方程$(x-\sin y)dy+\tan y dx=0$满足初始条件$y(1)=\pi/6$的特解.

解：当$\tan y=0$时有$y=0$，与初始条件$y(1)=\pi/6$矛盾，故舍去.

当$\tan y\neq 0$时，原方程化为：$\dfrac{dx}{dy}+x\cot y=\cos y$. 所以有

$$x=e^{-\int\cot y dy}(C_1+\int\cos y\cdot e^{\int\cot y dy}dy)=\frac{1}{\sin y}(C_1+\frac{1}{2}\sin^2 y).$$

由$y(1)=\pi/6$，得$C_1=\dfrac{3}{8}$. 所以所求特解为：$8x\sin y=3+4\sin^2 y$.

5. 求微分方程$(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+5)dx+(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{6}{y^3})dy=0$ 的通积分.

解：原方程化为：$\sin\dfrac{x}{y}(\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy)+\cos\dfrac{y}{x}(-\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy)+d(5x)-d\,\dfrac{3}{y^2}=0$，

$$\sin\frac{x}{y}d(\frac{x}{y})+\cos\frac{y}{x}d(\frac{y}{x})+d(5x)-d\frac{3}{y^2}=0,$$

$d(-\cos\frac{x}{y}+\sin\frac{y}{x}+5x-\frac{3}{y^2})=0$，所以所求通积分为：$\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+5x-\frac{3}{y^2}=C.$

二、（本题 10 分）计算 $I_1=\iint_S(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$，其中 S 为曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 上侧，其中 $a>0$.

解：补一个面：$S_1: z=0$，取下侧，对 S,S_1 围成的空间闭区域 V 使用高斯公式，得

$$I_1=3\iiint_V(x^2+y^2+z^2)dV+\iint_{z=0(\text{上侧})}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr+4a\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{29}{20}\pi a^5.$$

三、（本题 10 分）计算 $I_2=\oint_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 C 是立方体 $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的表面与平面 $x+y+z=\frac{3a}{2}$ 的交线，若从 z 轴的正向看去为逆时针方向.

解：使用斯托克斯公式，被 C 围成的那块平面 S 取上侧，则 C 的取向与 S 的取侧相容，

$$I_2=-\frac{4}{\sqrt3}\iint_S(x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac{3a}{2}\iint_S dS=-\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac{3a}{2}\sigma(S).$$

其中 $\sigma(S)$ 是边长为 $a/\sqrt2$ 的正六边形的面积：$6\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{a}{\sqrt2})^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt3}{4}a^2$，

所以，$I_2=-\frac{4}{\sqrt3}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3\sqrt3}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$

四、（本题 10 分）对常数 p，讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛、何时条件收敛、何时发散.

解：令 $a_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}=\frac{2}{n^p(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\sim\frac{1}{n^{p+1/2}}$，

（i）当 $p+1/2>1$，即 $p>1/2$ 时原级数绝对收敛.

（ii）当 $0\le p\le 1/2$ 时，$a_n\downarrow$ 显然，

当 $-1/2<p<0$ 时，$n^p\cdot\sqrt{n}=n^{p+1/2}\uparrow$，

对$n^p\cdot\sqrt{n+2}$，令$\varphi(x)=x^p\cdot\sqrt{x+2}$，

$$\varphi'(x)=px^{p-1}\cdot\sqrt{x+2}+x^p\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{x^{p-1}}{2\sqrt{x+2}}[(2p+1)x+4p],$$

当$x=-\dfrac{4p}{2p+1}$时，$\varphi(x)$取到最小值，所以只要$x>-\dfrac{4p}{2p+1}$，$\varphi(x)\uparrow$

即当$n>-\dfrac{4p}{2p+1}$时，$n^p\cdot\sqrt{n+2}\uparrow$，此时$a_n\downarrow$.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故由莱布尼兹定理得：当$-½<p\le½$时原级数条件收敛.

（iii）$p\le-½$时，原级数的通项不趋于0，故原级数发散.

综上可得：原级数在$p>½$时绝对收敛，在$-½<p\le½$时条件收敛，在$p\le-½$时发散.

五、（本题10分）试将函数$f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

解：$f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}+\dfrac{1}{2x+5}=g(x)+h(x)$，

$$\int_0^x g(x)dx=\int_0^x\frac{1}{(x-3)^2}dx=-\frac{1}{x-3}\Big|_0^x=\frac{x}{3(3-x)}=\frac{x}{9(1-\frac{x}{3})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+2}}x^{n+1},|x|<3.$$

两边求导数，得 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^{n+2}}x^n,|x|<3.$

而$h(x)=\dfrac{1}{2x+5}=\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{1+\frac{2x}{5}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{5^{n+1}}x^n,\quad |x|<\dfrac{5}{2}.$

所以，$f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\dfrac{2^n}{5^{n+1}}\right)x^n,\quad |x|<\dfrac{5}{2}.$

六、（本题10分）将函数$f(x)=\dfrac{x}{4}$在$[0,\pi]$上展成正弦级数，并求

$1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$的和.

解：由题意知，$a_n=0,n=0,1,2,\cdots$，而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{4}\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{-1}{2n\pi}[x\cos nx-\frac{1}{n}\sin nx]_0^{\pi}=\frac{1}{2n}(-1)^{n+1}.$$

于是 $f(x)$ 的正弦级数为： $f(x)\sim\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$，由 Dirichlet 收敛定理，有

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases}\frac{x}{4}, x\in(-\pi,\pi),\\ 0,\ x=\pm\pi.\end{cases}$$

取 $x=\frac{\pi}{2}$，得 $I=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=I+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots$$
$$=I+\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)=I+\frac{1}{3}I=\frac{4}{3}I=\frac{\pi}{3}.$$

七、（本题 10 分）求二阶微分方程 $y''-y=2x+e^{2x}\cos x$ 的通解.

解：$y''-y=0$ 的特征方程为：$\lambda^2-1=0$，其特征根为 $\lambda=\pm1$，

$y''-y=0$ 的通解为：$\overline{y}(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$.

对于 $y''-y=2x$ ①，设其特解为：$y_1^*(x)=Ax+B$ 代入①，得 $A=-2,B=0$，

所以 $y_1^*(x)=-2x$.

对于 $y''-y=e^{2x}\cos x$ ②，设其特解为：$y_2^*(x)=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$ 代入②，

得 $A=\frac{1}{10},B=\frac{2}{10}$. 所以 $y_2^*(x)=\frac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x)$.

综上，所求通解为：$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}-2x+\frac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x)$.

八、（本题 10 分）(1)（非商学院学生选做）设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x,y 有等式

$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 且 $f'(0)=a(a\neq0)$，求函数 $f(x)$.

(2)（商学院学生选做）已知 $\int_0^1 f(ax)da=\frac{1}{2}f(x)+1$，求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

解：(1) 等式可写为：$f(x+y)-4f(x+y)f(x)f(y)=f(x)+f(y)$

在上式中令 $y=0$，得 $f(0)=0$.

$$\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y}(1+4f(x+y)f(x))$$

对$\forall x$：

$$\lim_{y\to0}f(x+y)=\lim_{y\to0}\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}=\frac{\lim\limits_{y\to0}(f(x)+f(y))}{\lim\limits_{y\to0}(1-4f(x)f(y))}=\frac{f(x)+0}{1-0}=f(x)$$

所以f在x处连续.（$f'(0)$存在$\Rightarrow\lim\limits_{y\to0}f(y)=f(0)=0$）

故有：$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=f'(0)(1+4f^2(x))$，即得$f'(x)=a(1+4f^2(x))$，

分离变量得$\dfrac{d(f(x))}{1+4f^2(x)}=adx$，即$\dfrac{d(2f(x))}{1+4f^2(x)}=2adx$，

两边积分，得$\arctan(2f(x))=2ax+C$，由$f(0)=0$，得$C=0$.

所以，所求函数$f(x)$为：$f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax)$.

（2）当$x=0$时，$\int_0^1 f(0)da=\dfrac{1}{2}f(0)+1$，$\Rightarrow f(0)=2$.

当$x\neq0$时，令$ax=u$，则$\int_0^1 f(ax)da=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，所以有：$\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du=\dfrac{1}{2}f(x)+1$，

即$2\int_0^x f(u)du=xf(x)+2x$，两边对$x$求导，得$f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{2}{x}$.

综上可得，$f(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}(C-\int\dfrac{2}{x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx)=x(C+\dfrac{2}{x})=2+Cx$.