# 第10章 常微分方程初步

# Outline

代数方程:

$x^2=4$

$ax+by=1$

$\sin(x)=x$

微分方程的基本概念

# 微分方程

- 函数是反映客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系，利用函数关系可以对客观事物的规律进行研究.
- 在大量实际问题中，反映运动规律的量与量之间的关系往往不能直接写出来，却比较容易建立这些变量和它们的导数之间的关系.
- 这种联系着自变量，未知函数以及它们的导数之间的关系，数学上称之为微分方程.
- 微分方程建立后，对它进行研究，找出未知函数或研究其性质，这就是解微分方程以及微分方程的解的定性研究.
- 本章主要介绍微分方程的一些基本概念和一些常用的微分方程的解法.

# Navier–Stokes equations

describe the motion of viscous fluid substances.

- Navier–Stokes equations are useful because they describe the physics of many phenomena of scientific and engineering interest.
- They may be used to model the weather, ocean currents, water flow in a pipe and air flow around a wing.
- The Navier–Stokes equations in their full and simplified forms help with the design of aircraft and cars, the study of blood flow, the design of power stations, the analysis of pollution, and many other things.
- Coupled with Maxwell's equations they can be used to model and study magnetohydrodynamics.

The Navier–Stokes equations are also of great interest in a purely mathematical sense.

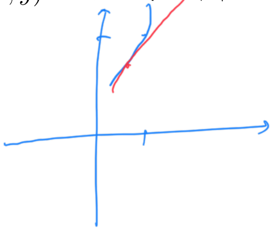
- Despite their wide range of practical uses it has not yet been proven that in three dimensions solutions always exist, or that if they do exist, then they are smooth,
- i.e. they are infinitely differentiable at all points in the domain. These are called the Navier–Stokes existence and smoothness problems.
- The Clay Mathematics Institute has called this one of the seven most important open problems in mathematics and has offered a US $1,000,000 prize for a solution or a counterexample.

# Outline

微分方程的基本概念

## Example

一曲线通过点(1, 4), 且在该曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$, 求这曲线的方程.



$y = y(x)$

$$\begin{cases} y'(x) = 2x \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

$y + C_1 = x^2 + C_2$,

$y = x^2 + C$

$1 + C = 4$, $\therefore C = 3$

$\therefore y = x^2 + 3$

## Example

一曲线通过点$(1, 4)$, 且在该曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$, 求这曲线的方程.

## Proof.

设所求曲线的方程为 $y = y(x)$. 根据导数的几何意义可知，未知函数 $y = y(x)$ 应满足

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

把上式两端积分，得

$$y = \int 2x\mathrm{d}x$$

即

$$y = x^2 + C,$$

其中 $C$ 是任意常数. 此外, 由于未知函数 $y = y(x)$ 经过 $(1, 4)$, 即 $x = 1$ 时, $y = 4$ 代入得$C = 3$. 故所求曲线方程为 $y = x^2 + 3$. □

## Example (生物种群的 Logistic 方程)

设某种生物种群的总数 $y(t)$ 随时间 $t$ 而变化, 其变化率与 $y$ 和 $(m-y)$ 的乘积成正比, 求 $y(t)$ 的表达式.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = y'(t)$$

$$y'(t) = ky(m-y)$$

$$\frac{dy}{dt} = ky(m-y)$$

$$\frac{dy}{ky(m-y)} = dt$$

## Example (生物种群的 Logistic 方程)

设某种生物种群的总数 $y(t)$ 随时间 $t$ 而变化, 其变化率与 $y$ 和 $(m-y)$ 的乘积成正比, 求 $y(t)$ 的表达式.

### Proof.

由题意，所求的 $y(t)$ 满足：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky(m-y)$.

其中 $k>0$ 为比例常数. 把上式改写为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(m-y)}=k\mathrm{d}t,(y>0,y\neq m)$$

两边积分, 得

$$\frac{1}{m}\ln y-\frac{1}{m}\ln|m-y|=kt+\frac{1}{m}\ln|C|,$$

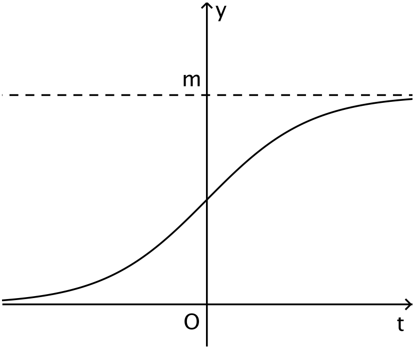
从上式可以求得

$$y=\frac{m}{1+C^{-1}\mathrm{e}^{-mkt}}.$$

□

容易看出,

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = m,$$




从这里我们可以看到一个有趣的结论:
生物总群的数量最终会趋于一个定值.

$y' \geq 2x,\ y' \leq 2x$

- 在上面这两个例子中，方程是含有未知函数导数的等式.
  一般说来, 一个表示未知函数、未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程, 我们称之为**微分方程**, 在本章中, 有时也简称为**方程**.

- 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 称为**微分方程的阶**. 例如上述两个方程均为一阶微分方程. 又如
  $y'' + 2y' + y = x$, $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' = \mathrm{e}^x$ 分别是二阶与三阶微分方程.

- 如果在微分方程中, 自变量的个数只有一个, 我们称这种微分方程为**常微分方程**; 若自变量的个数为两个或两个以上, 我们称之为**偏微分方程**.
  未知函数只一个.
  例如 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ 是一个二阶偏微分方程的例子, 它以 $u = u(x, y, z)$ 为未知函数, 以 $x, y, z$ 为自变量.

$y' = f(x)$

在本章中, 我们只讨论常微分方程及其解法.

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x) \\ y_2'(x) = y_1 + y_2 \end{cases}$$

- 一般说来, 形如

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

的等式, 称作一个以 $x$ 为自变量, 以 $y(x)$ 为未知函数的 $n$ 阶常微分方程.

- 在第一个例子中，我们发现, 如果把 $y = x^2 + 3$ 代入 $\frac{dy}{dx} = 2x$，便变成了恒等式.
此时我们称 $y = x^2 + 3$ 为 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的**解**.

$y(1) = 4.$

$C_1+C_2=1$

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

一般地, 若上述 $n$ 阶微分方程有解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$, 其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 $\varphi$ 中 $n$ 个独立的任意常数, 即 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 满足

$$\frac{D(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{D(C_1,C_2,\cdots,C_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则称 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为方程的**通解**.

容易验证 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的解; 又因为

$$\frac{D(y, y')}{D(C_1, C_2)} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

所以 $C_1, C_2$ 是两个独立的任意常数,
故 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ 是方程 $y'' + y = 0$ 的通解.

为了确定微分方程一个特定的解, 我们通常需要给出这个解所必须满足的条件, 这就是所谓的定解条件.

常见的定解条件是初始条件. 所谓 $n$ 阶微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

的**初始条件**是指如下的 $n$ 个条件:

当 $x = x_0$ 时, $y = y_0$, $\frac{dy}{dx} = y_0^{(1)}$, $\cdots$, $\frac{d^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$.
其中 $y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 都是常数.

求满足上述初始条件的微分方程的解的问题, 称为**初值问题**.

在第一个例子中，$y = x^2 + C$ 式是 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的通解；
$y = x^2 + 3$ 是 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的满足初始条件：$x = 1$ 时，$y = 4$（或者说 $y(1) = 4$）的解.

有时候通解不是用显函数的形式给出，
而是用一种隐函数的形式 $\Phi(x, y; C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$ 给出.
这时我们把 $\Phi(x, y; C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$ 称作微分方程的**隐式通解**或**通积分**.