# 第 9 章 傅里叶级数

# Outline

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f$$

三角级数、三角函数系的正交性

$$(e^{ix})^n = e^{inx}$$

$$= \cos(nx) + i\sin(nx)$$

函数展开成傅里叶级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

任意周期的周期函数的傅里叶级数

The Fourier series has many applications in electrical engineering, vibration analysis, acoustics, optics, signal processing, image processing, quantum mechanics, econometrics, thin-walled shell theory, etc.

# Outline

- 三角级数、三角函数系的正交性
- 函数展开成傅里叶级数
- 任意周期的周期函数的傅里叶级数

# 周期函数

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x+T) = f(x)$

正弦函数、余弦函数是常见而简单的周期函数.

- 单摆在振幅很小时的摆动可用函数

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

表示，其中 $y$ 表示动点的位置，$t$ 表示时间，$A$ 为振幅，$\omega$ 为角频率，$\varphi$ 为初相.

$x = \omega t$

- 交流电的电流强度 $I$ 随时间的变化关系为

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

设 $x = \frac{\omega t}{k}$

这两个函数都是 $t$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数，它们所描述的周期现象称为简谐振动.

$\omega t =$

# 三角级数

$u_k(x) = A_k \cdot \sin(kx + \varphi_k)$

## Definition (三角级数)

以 $A_k \sin(kx + \varphi_k)$ 为项作成的无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k)$$

称为三角级数.

如果这个级数在一个长度为 $2\pi$ 的闭区间上（一致）收敛，那么和函数 $f(x)$ 就是一个周期函数.

将正弦函数 $A_n\sin(nx+\varphi_n)$ 按三角公式变形得

$$A_n\sin(nx+\varphi_n)=A_n\sin\varphi_n\cos nx+A_n\cos\varphi_n\sin nx,$$

令 $\frac{a_0}{2}=A_0\sin\varphi_0$, $a_n=A_n\sin\varphi_n$, $b_n=A_n\cos\varphi_n$，则三角级数可写为

$$\boxed{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).}$$

$\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \cdots\}$

**余弦级数** 只有余弦项，即 $b_k=0\ (k=1,2,\ldots)$，

则三角级数变为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx.$

**正弦级数** $a_k=0\ (k=0,1,\ldots)$，三角级数变为 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx.$

如果这些级数收敛，那么前者是偶函数，后者是奇函数.

# 三角函数系的正交性

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

称为基本的三角函数系.

基本三角函数系中任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分为 0，即函数系在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是正交的.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 1,2,3,\ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad m,n = 1,2,3,\ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad m,n = 1,2,3,\ldots, \quad m\neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad m,n = 1,2,3,\ldots, \quad m\neq n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} \,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

由三角函数中的积化和差公式有

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\big[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\big].$$

当 $m \neq n$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\big] \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

### Definition (内积)

区间 $[-\pi, \pi]$ 上的全体有界可积函数所组成的集合 $A$ 在函数的加法及实数与函数的乘法运算下构成一个线性空间.
对于这个空间中的任意两个向量 $f$ 和 $g$，我们定义它们的内积为

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

### Definition (范数)

$$\|f\| = \sqrt{(f,\ f)} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}.$$

我们称函数系

$$1/\sqrt{2},\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

为单位正交系.

# Outline

三角级数、三角函数系的正交性

函数展开成傅里叶级数

任意周期的周期函数的傅里叶级数

# 函数展开成傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，且能展开成三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

系数 $a_0$，$a_1$，$b_1$，$a_2$，$b_2$，$\ldots$ 与函数 $f(x)$ 之间的关系?

将等式沿区间 $[-\pi, \pi]$ 积分，因为右边的级数可以逐项积分，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi = a_0\pi \implies a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\langle f(x), 1\rangle = \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\cdots), 1\right\rangle$$

$$\langle f(x), \cos(nx)\rangle = \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)), \cos(nx)\right\rangle$$

用 $\cos nx$ 乘以展开式两边并沿区间 $[-\pi,\pi]$ 积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = a_n\pi \iff a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

类似用 $\sin nx$ 乘以展开式两边并沿区间 $[-\pi,\pi]$ 积分可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

$$
a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,
$$
$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots.
$$

$$
f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)
$$

如果上述积分都存在

- 计算出来的系数

$$
a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots
$$

称为函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

- 得到的三角级数

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)
$$

称为函数 $f(x)$ 的傅里叶级数.

一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 $2\pi$ 的周期函数 $f(x)$，
如果它在一个周期上可积, 则一定可以作出 $f(x)$ 的傅里叶级数.

- 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是否收敛?
- 如果它在一点 $x$ 收敛，它是否一定收敛于 $f(x)$?

一般来说，上述两个问题的答案都不是肯定的.

# 狄利克莱 (Dirichlet) 收敛定理

$f(x) = f(x+2\pi)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[-\pi, \pi]$

**Theorem (狄利克莱 (Dirichlet) 收敛定理)**

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，如果它满足

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点. 分段连续.

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上至多只有有限个极值点，
即 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

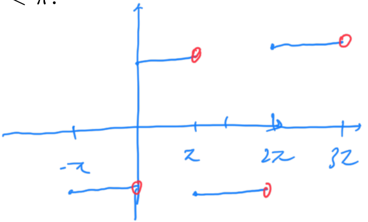
$$= \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点}, \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点}. \end{cases}$$

## Example

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.




$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right]$$

$$=0,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(-\cos(nx)\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

## Example

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

## Proof.

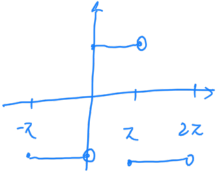
$f(x)$ 在点 $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 处不连续，在其他点连续，满足狄利克莱定理的条件，所以 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

- 当 $x = k\pi$ 时级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2} = 0$，
- 当 $x \neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$.

计算傅里叶系数如下

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$




因此，$f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x \\
&= \begin{cases} f(x), & -\infty < x < +\infty,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\pi < x < 0$ 或 $0 < x < \pi$

, $x=0$ 或 $x=\pm\pi$

□

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right)$$

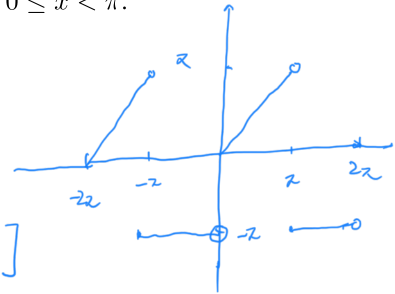
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

## Example

设函数 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数.




$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-\pi)\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_{x=-\pi}^{x=0} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\,d\sin(nx)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

## Example

设函数 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数.

## Proof.

$f(x)$ 满足狄利克莱定理的条件，它在 $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 处不连续，在其它点都连续.

计算傅里叶系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{n}[1 - 2\cos n\pi] = \frac{1}{n}[1 - 2(-1)^n], \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos(nx) + b_n\cdot\sin(nx)\right]$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx) + \frac{1}{n}\left(1-2(-1)^n\right)\cdot\sin(nx)\right]$$

因此，$f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos nx + \frac{1 - 2(-1)^n}{n} \sin nx \right]$$

$$= \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi, \\ 0, & x = (2k+1)\pi, \\ -\pi/2, & x = 2k\pi, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S$$

$$\frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\therefore \quad S = \frac{\pi^2}{6}.$$ $\square$

$x = 0.$

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi}$$

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{(2n-1)^2 \pi} \qquad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

## Remark

如果 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，并且是奇函数，
则 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

这时 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,\mathrm{d}x.$$

即 $f(x)$ 的傅里叶级数为正弦级数.

**Remark**

如果 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，并且是偶函数，
则 $f(x)$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

这时 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

即 $f(x)$ 的傅里叶级数为余弦级数.

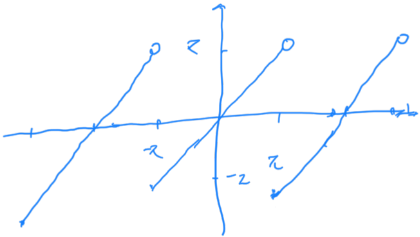
### Example

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为 $f(x) = x$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$



**Proof.**

$f(x)$ 满足狄利克莱定理的条件，
它在点 $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 处不连续.

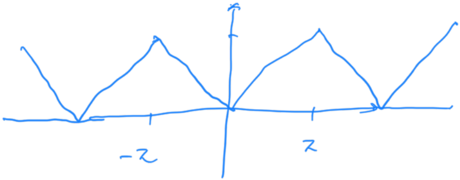
$f(x)$ 为奇函数，因此，$a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \dots$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}\cos n\pi \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}
$$

因此，$f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$
2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx = \begin{cases} f(x), & x \neq \pm\pi,\ \pm 3\pi, \dots, \\ 0, & x = \pm\pi,\ \pm 3\pi, \dots \end{cases}
$$

□




## Example

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

$b_n = 0$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

## Example

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=|x|$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

## Proof.

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，
所以$f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛于 $f(x)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \\
&= \begin{cases} -4/(\pi n^2), & n = 1, 3, 5, \ldots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}
\end{aligned}$$

因此，$f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

$= x,\quad |x| \le \pi$

□

# Outline

# 任意周期的周期函数的傅里叶级数

前面我们讨论了以 $2\pi$ 为周期的周期函数的傅里叶级数.

显然，上述结果很容易推广到一般的周期函数.

本节，我们假设所讨论的周期函数的周期为 $2l$,

应用前面的结果，经过自变量的变量代换，我们有下面的定理.

## Theorem

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足狄利克莱收敛定理的条件，则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$=\begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点}, \\ \big[f(x^+)+f(x^-)\big]/2, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点}. \end{cases}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad n=0,1,2,\ldots,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad n=1,2,\ldots.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，傅里叶展开式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点}, \\ \big[f(x^+) + f(x^-)\big]/2, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点}. \end{cases}$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

当 $f(x)$ 为偶函数时，傅里叶展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点}, \\ \big[f(x^+) + f(x^-)\big]/2, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点}. \end{cases}$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Proof.

作变量代换 $z=\frac{\pi x}{l}$，于是区间 $[-l,l]$ 变为 $[-\pi,\pi]$.

设 $F(z)=f\left(\frac{lz}{\pi}\right)=f(x)$，从而 $F(z)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，并且它满足狄利克莱收敛定理的条件，从而

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)=\begin{cases}F(z), & z\text{ 为连续点},\\ \left[F(z^+)+F(z^-)\right]/2, & z\text{ 为间断点}.\end{cases}$$

$$\text{其中}\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz\mathrm{d}z,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz\mathrm{d}z.$$

在上式中令 $z=\frac{\pi x}{l}$ 得

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$
$$=\begin{cases}f(x), & x\text{ 为 }f(x)\text{ 的连续点},\\ \left[f(x^+)+f(x^-)\right]/2, & x\text{ 为 }f(x)\text{ 的间断点}.\end{cases}$$

□

**Example**

将周期函数 $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ 展开成傅里叶级数，
其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 $x$ 的整数部分.

**Proof.**

因为

$$f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x+1 - \big(\lfloor x \rfloor + 1\big) = x - \lfloor x \rfloor = f(x),$$

于是 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数，即 $l = 1/2$.

计算傅里叶系数

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x - [x])\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1,$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos 2n\pi x \mathrm{d}x = 2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]_0^1 = 0,$$

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{n\pi}.$$

因此

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & x \neq k, \\ 1/2, & x = k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

## Example

已知 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，并且 $f(x)=2+|x|$，$-1\le x\le 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数；

(2) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和；

(3) 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.