第8章 无穷级数

Outline

任意项级数

- 交错级数
- 绝对收敛与条件收敛

Outline

- 任意项级数
  - 交错级数
  - 绝对收敛与条件收敛

任意项级数

这一节我们来讨论正负项可以任意出现的级数的收敛问题.

交错级数

凡正负相间的级数, 也就是形如

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$$

的级数, 其中 $u_n > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) , 称为**交错级数**.

交错级数判别法

$B_1 = S_2 = u_1 - u_2$

$B_2 = S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4)$

Theorem (莱布尼茨定理)

如果一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \quad (u_n > 0,\ n = 1, 2, 3 \cdots)$ 的一般项满足下列条件

(1) $u_n \geq u_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛，其余项 r_n 的符号与余项第一项 $(-1)^{n+2}u_{n+1}$ 的符号相同，并且 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

S_{2n}

$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

$r_n = (-1)^{n+2}u_{n+1} + (-1)^{n+3}u_{n+2} + \cdots.$

Proof.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 的部分和为 S_n.

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}),$$
$$S_{2m+1} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) + u_{2m+1}.$$

由条件 (1)，即 $u_{n-1} - u_n \geq 0$ 知 $\{S_{2m}\}$ 为单调增加的数列.

$$0 \leq S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \leq u_1.$$

因此 $\{S_{2m}\}$ 是单调有界数列，故 $\{S_{2m}\}$ 极限存在.

设 $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$，而 $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$，

由条件 (2) 知 $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. 因此

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = S.$$

因为 $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛于 S, 并且 $0 \le S \le u_1$.

最后, 余项 r_n 可以写成

$$r_n = (-1)^{n+2}(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots),$$
$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots .$$

上式右端是一个交错级数, 它也满足收敛的两个条件. 根据前面的结论有

$$0 \le u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \le u_{n+1},$$

从而

$$-u_{n+1} \le -(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots) \le 0.$$

即余项 r_n 的符号与余项中第一项的符号相同. 并且 $|r_n| \le u_{n+1}$. □

$$\left|(-1)^{n+2}u_{n+1} + \cdots + (-1)^{n+p+1}u_{n+p}\right| \le u_{n+1} \to 0.$$

Example

判断级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

的敛散性.

$\|$ 收敛. $u_n = \frac{1}{n}$ ↓

$\ln 2$ $\to 0$

Example

判断级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$$

的敛散性.

Proof.

这是一交错级数, 满足条件

(1) $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

所以它是收敛的. 其和 $S<1$. 如果用前 n 项的部分和

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

作为 S 的近似值, 所产生的误差 $|r_n|<\frac{1}{n+1}$. □

Example

设 $x_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $x_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$, $(n = 1, 2, \cdots,)$

$\frac{1}{n} > x_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

$> \frac{1}{n+1}$

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 收敛;

$\{x_n\}$ 单调减少,

且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n = A$, $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$,

证明: $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

$x_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{n+1}{n}$

$(-1) x_{2n} = \ln \frac{n}{n+1}$

$1 + \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \ln \frac{3}{4} + \cdots$

绝对收敛与条件收敛

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项的绝对值所构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称级数为**条件收敛**.

条件收敛的级数是存在的，
例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 就是一个条件收敛级数.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛

$$1,\ \frac{1}{2^1},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2^3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$$

绝对收敛和收敛之间的关系.

Theorem

绝对收敛级数必为收敛级数，但反之不然.

$\sum u_n$

$$v_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} = \begin{cases} u_n, & u_n > 0 \\ 0, & u_n \le 0 \end{cases}$$

$$w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} = \begin{cases} 0, & u_n \ge 0 \\ -u_n, & u_n < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |u_n| = v_n + w_n \\ u_n = v_n - w_n \end{cases}, \quad \sum u_n = \sum (v_n - w_n)$$

$\sum v_n$, $\sum w_n$ 正项级数.

$\sum |u_n|$ 收敛.

$0 \le v_n \le |u_n|$

$\therefore \sum v_n$ 收敛

$0 \le w_n \le |u_n|$

$\sum w_n$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n)$

取部分和.

绝对收敛和收敛之间的关系.

Theorem

绝对收敛级数必为收敛级数，但反之不然.

Proof.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛级数, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛. 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|), \qquad n = 1, 2, \cdots ,$$

显然 $0 \leq v_n \leq |u_n|$, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 也收敛, 而 $u_n = 2v_n - |u_n|$. 由收敛级数的基本性质有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. □

Remark

- 上述证明中引入的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，其一般项

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) = \begin{cases} u_n, & u_n > 0, \\ 0, & u_n \leq 0. \end{cases}$$

$$w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) = \begin{cases} 0, & u_n > 0, \\ -u_n, & u_n \leq 0. \end{cases}$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 均收敛，并且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n$.

$v_n - w_n = u_n$

$v_n + w_n = |u_n|$

$\sum(v_n - w_n)$ 收敛

$\sum(v_n + w_n)$ 发散

- 如果级数条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 均发散.
- 对于一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果它绝对收敛，则它收敛.
- 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散时，我们不能断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

Remark

- 如果我们应用达兰贝尔判别法和柯西判别法判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为发散时，我们可以断言级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

  这是因为利用达兰贝尔判别法和柯西判别法来判定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 为发散时，是由于这个级数的一般项 $|u_n|$ 不趋于零，因此对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，它的一般项 u_n 当 $n\to\infty$ 时也不会趋于零，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的.

Example

判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ ($x>0$) 的敛散性.

$u_n = (-1)^n\cdot\frac{x^n}{n}$,

$|u_n| = \frac{x^n}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = x$

(1) $x<1$ 时, $\sum|u_n|$ 收敛, 则 $\sum u_n$ 绝对收敛.

(2) $x>1$ 时, $\sum|u_n|$ 发散, 由于是用 Cauchy 判别法, 则 $\sum u_n$ 发散.

(3) $x=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, 条件收敛.

Example

判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ ($x>0$) 的敛散性.

Proof.

考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{x^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\sqrt[n]{n}}=x,$$

由柯西判别法知当 $x<1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 收敛, 而当 $x>1$ 时级数发散.

因此可以断言:

当 $x<1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ 绝对收敛.

当 $x>1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ 发散.

而当 $x=1$ 时, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|$ 发散, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 故为条件收敛. $\square$

Example

判定级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的敛散性.

$u_n = \dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $\quad |u_n| = \dfrac{|\sin(n\alpha)|}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$

$\therefore \quad \sum |u_n|$ 收敛. 则 $\sum u_n$ 绝对收敛.

$\sin(n)$, $n = 1, 2, \cdots$. $\qquad \underline{\{\sin(n)\}}$

Example

判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的敛散性.

Proof.

因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛.

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 也收敛, 且绝对收敛. $\square$

绝对收敛级数的性质

Theorem

绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**更序级数**(即改变一般项的位置后所构成的级数) $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ 仍为绝对收敛级数, 且其和相同, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n$.

Proof.

(1) 我们先证明当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛的正项级数的情形.

考虑更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 的部分和 S_k'. 因为

$$u_1' = u_{n_1}, u_2' = u_{n_2}, \cdots, u_k' = u_{n_k},$$

取 n 大于所有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$, 显然有

$$S_k' = u_1' + u_2' + \cdots + u_k' \leq u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = S_n.$$

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和为 S, 则 $S_n \leq S$, 于是对一切 k 都有 $S_k' \leq S$. 根据正项级数收敛的基本定理, 更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 也收敛. 设其和为 S'. 故有 $S' \leq S$.

另一方面, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可以看作级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 的更序级数, 由刚才的讨论, 故有 $S \leq S'$, 因此 $S = S'$.

(2) 下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意绝对收敛级数的情形. 令

$$v_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \quad w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然有 $0 \le v_n \le |u_n|$, $0 \le w_n \le |u_n|$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 均收敛. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = V$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = W$. 因为

$$u_n = v_n - w_n, \qquad |u_n| = v_n + w_n.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = V - W, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = V + W.$$

由 (1) 已经证明的结论知, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n'|$ 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| = V + W.$$

这就表明更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ 是绝对收敛的.

再设 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n'$ 分别为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 的相应的更序级数. 由 (1) 的结论知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n' = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = V, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n' = \sum_{n=1}^{\infty} w_n = W.$$

而 $u_n' = v_n' - w_n'$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n' - w_n') = V - W = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

这样就证明了定理.

□

Remark

对于绝对收敛的级数，可以任意交换其各项的次序，不影响它的和，

这与有限项相加之和的性质相同.

但这个定理对条件收敛级数而言，却不一定成立.

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 是条件收敛的，

设其和为 S，考虑该级数的一个更序级数

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots.$$

分别用 S_n 和 σ_n 表示这两个级数的部分和，则

$$\begin{aligned}\sigma_{3m} &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\ &= \frac{1}{2}S_{2m}\to\frac{1}{2}S \quad (m\to+\infty).\end{aligned}$$

又不难得到

$$\begin{aligned}\sigma_{3m+1} &= \sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}\to\frac{1}{2}S \quad (m\to\infty).\\ \sigma_{3m+2} &= \sigma_{3m}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{4m+2}\to\frac{1}{2}S \quad (m\to\infty).\end{aligned}$$

因此，我们有 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{2}S$，即更序级数收敛于 $\frac{S}{2}$.

级数的乘法运算

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 仿照有限项之和相乘的规则, 作出这两个级数的项所有可能的乘积 $u_i v_j (i, j = 1, 2, \cdots)$, 这些乘积是

$$\begin{array}{c}
u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, \cdots, u_1v_j, \cdots, \\
u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, \cdots, u_2v_j, \cdots, \\
u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3, \cdots, u_3v_j, \cdots, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\
u_iv_1, u_iv_2, u_iv_3, \cdots, u_iv_j, \cdots, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots.
\end{array}$$

这些乘积可以用很多的方式将它们排列成一个数列.
例如可以按“对角线法”或按“正方形法”将它们排列成下面形状的数列.

对角线法

$$
\begin{array}{ccccccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & u_1v_4 & & \cdots, \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
u_2v_1 & & u_2v_2 & & u_2v_3 & & u_2v_4 & & \cdots, \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
u_3v_1 & & u_3v_2 & & u_3v_3 & & u_3v_4 & & \cdots, \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
u_4v_1 & & u_4v_2 & & u_4v_3 & & u_4v_4 & & \cdots, \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots.
\end{array}
$$

对角线法: $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_2, u_3v_1; \cdots.$

正方形法

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & u_1v_4 & \cdots, \\ \cline{1-1}
\multicolumn{1}{c}{u_2v_1} & u_2v_2 & u_2v_3 & u_2v_4 & \cdots, \\ \cline{1-2}
\multicolumn{1}{c}{u_3v_1} & \multicolumn{1}{c}{u_3v_2} & u_3v_3 & u_3v_4 & \cdots, \\ \cline{1-3}
\multicolumn{1}{c}{u_4v_1} & \multicolumn{1}{c}{u_4v_2} & \multicolumn{1}{c}{u_4v_3} & u_4v_4 & \cdots, \\ \cline{1-4}
\multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \cdots.
\end{array}$$

正方形法: $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_3, u_3v_3, u_3v_2, u_3v_1; \cdots$.

对角线法: $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_2, u_3v_1; \cdots$.
正方形法: $u_1v_1; u_1v_2, u_2v_2, u_2v_1; u_1v_3, u_2v_3, u_3v_3, u_3v_2, u_3v_1; \cdots$.
将上面排好的数列用加号相连, 就得到一个无穷级数.

我们称按"对角线法"排列所组成的级数

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \cdots$$

为两级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的柯西乘积.

Theorem (柯西定理)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆绝对收敛，其和分别为 s 和 σ.
则它们各项之积

$$u_i v_j, \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

按照任何方法排列所构成的级数也绝对收敛，且其和为 $s\sigma$.

Proof.

用 $w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots$ 来表示按某一种次序排列 $u_i v_j$ ($i, j = 1, 2, 3, \cdots$) 所成的一个数列. 考虑级数

$$|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| + \cdots .$$

设 s_n^* 是它的部分和

$$s_n^* = \sum_{k=1}^{n} |w_k| = \sum_{k=1}^{n} |u_{n_k} v_{m_k}|.$$

记

$$\mu = \max(n_1, n_2, \cdots, n_n, m_1, m_2, \cdots, m_n).$$

$$U_\mu^* = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_\mu|,$$
$$V_\mu^* = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_\mu|.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆绝对收敛. 设 $U^* = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, $V^* = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$, 则

有 $U_\mu^* \le U^*$, $V_\mu^* \le V^*$, 从而由

$$\begin{aligned} s_n^* &= |u_{n_1} v_{m_1}| + |u_{n_2} v_{m_2}| + \cdots + |u_{n_n} v_{m_n}| \\ &\le (|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_\mu|)(|v_1| + |v_2| + \cdots + |v_\mu|) \\ &= U_\mu^* V_\mu^* \le U^* V^*. \end{aligned}$$

由正项级数收敛的基本定理, 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |w_n|$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 绝对收敛.

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 的更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n'$ 也绝对收敛, 并且它们的和数相同,

也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n'$. 也就是说, 由 $u_i v_j$ ($i, j = 1, 2, \cdots$) 按任何方式排列所构成的级数都绝对收敛, 并且都收敛于同一和数.

下面再证明这个和数就是 $s\sigma$.
考虑由正方形法排列所构成的级数, 并加括号如下

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1) + \cdots .$$

由收敛级数的性质知, 加括号后并不影响和的数值.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 A_n, 则 $A_n = s_n\sigma_n$ 于是

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} (s_n\sigma_n) = s\cdot\sigma.$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s\cdot\sigma$. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = s\cdot\sigma$. □

任意项级数收敛性的判别法

Theorem (狄利克莱判别法)

如果：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界,

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

任意项级数收敛性的判别法

Theorem (狄利克莱判别法)

如果：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界,

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Hint:
$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(B_i - B_{i-1})\right|$$
$$= \left|-\sum_{i=n+1}^{n+p-1} B_i(a_{i+1} - a_i) + a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n\right|$$
$$\leq M \sum_{i=n+1}^{n+p-1} |a_i - a_{i-1}| + M|a_{n+p}| + M|a_{n+1}|.$$

Theorem (阿贝尔判别法)

如果：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调有界,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Theorem (阿贝尔判别法)

如果：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,

(2) 数列 $\{a_n\}$ 单调有界,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Hint: $a_n - a \to 0$

Example

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 收敛.

Example

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 收敛.

Proof.

因为数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调趋于零, 而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \cos k\right| &= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n} 2\cos k \sin\frac{1}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{2} - \sin\frac{2k-1}{2}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{2n+1}{2} - \sin\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ 的部分和有界.
由狄利克莱判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 收敛. □

Example

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$ 发散.

Example

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$ 发散.

Proof.

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}.$$

与上面的证明类似, 可以知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散. 一个发散级数与一个收敛级数逐项相加所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$ 必发散. □