

## 第8章 无穷级数

# Outline

泰勒级数

# Outline

泰勒展开:

$f(x)$  在  $N_\delta(x_0)$  内有  $n+1$  阶(连续)导数.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n.$$

泰勒级数

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

# 泰勒级数

前面我们讨论了幂级数的收敛域及其和函数性质.

现在我们研究一个相反的问题:

给定函数  $f(x)$ , 要考虑它是否能在某点的附近展成幂级数,  
即是否可以找到一个幂级数在这一点附近收敛, 且其和函数就是给定的函数  $f(x)$ .

## 幂级数展开式的唯一性

假设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域  $N_\delta(x_0)$  内能展成幂级数, 即有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x \in N_\delta(x_0),$$

那么, 根据和函数的性质, 可知  $f(x)$  在  $N_\delta(x_0)$  内应具有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-x_0) + \frac{(n+2)!}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots.$$

由此可得

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n.$$

于是

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

这表明, 如果函数  $f(x)$  在  $N_\delta(x_0)$  有幂级数展开式, 那么该幂级数的系数  $a_n$  由公式

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

确定, 即该幂级数必为

$$\begin{aligned} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

亦即展开式必为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in N_\delta(x_0).$$

## 幂级数

$$\begin{aligned} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

称为函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的**泰勒级数**,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in N_{\delta}(x_0).$$

称为  $f(x)$  的在点  $x_0$  的**泰勒展开式**.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1/\Delta x}{e^{1/\Delta x^2}} = 0.$$

$$0 = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots$$

$N_8(0)$  在  $\mathbb{R}$  上 Taylor 级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0$$



$f(x)$  在  $N_\delta(x_0)$  内能展成幂级数的充要条件是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in N_\delta(x_0).$$

在  $N_\delta(x_0)$  内成立. 即级数

$$\begin{aligned} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

在  $N_\delta(x_0)$  内收敛, 且收敛于  $f(x)$ .

## Theorem

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域  $N_\delta(x_0)$  内具有任意阶导数, 则  $f(x)$  在该邻域内能展成泰勒级数的充分必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in N_\delta(x_0),$$

这里  $R_n(x)$  是  $f(x)$  的泰勒公式的余项.

### Proof.

$f(x)$  的  $n$  阶泰勒公式为

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

其中

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

$R_n(x)$  就是定理中所指的余项,  $P_n(x)$  是  $f(x)$  的泰勒级数前  $n+1$  项的部分和. 因此, 根据级数收敛的定义有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \quad x \in N_{\delta}(x_0),$$

$$\iff f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x), \quad x \in N_{\delta}(x_0),$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in N_{\delta}(x_0).$$

□

特别地, 如果  $x_0 = 0$ , 则泰勒级数变为

$$f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n.$$

这个级数称为  $f(x)$  的**麦克劳林级数**.

如果  $f(x)$  能在  $N_\delta(0)$  内展开成  $x$  的幂级数, 则有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n, \quad x \in N_\delta(0).$$

上式称为  $f(x)$  的**麦克劳林展开式**.

## 将函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数

(1) 求出  $f^{(n)}(x_0)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 如果有一个  $n$  使得  $f^{(n)}(x_0)$  不存在, 则  $f(x)$  在点  $x_0$  处不能展成泰勒级数.

(2) 写出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

并求出收敛半径  $R$ .

(3) 利用余项  $R_n(x)$  的表达式

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

考察当  $x \in N_\delta(x_0)$  时, 余项  $R_n(x)$  的极限是否为零. 如果为零, 则函数  $f(x)$  在  $N_R(x_0)$  内的泰勒展开式为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in N_R(x_0).$$

## Example

将函数  $f(x) = e^x$  展开成  $x$  的幂级数.

$$f^{(n)}(x) = e^x,$$

$$f^{(n)}(0) = 1,$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!},$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

## Example

将函数  $f(x) = e^x$  展开成  $x$  的幂级数.

## Proof.

显然  $e^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有任意阶的导函数, 且

$$(e^x)^{(n)}|_{x=0} = 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

因而其麦克劳林级数为

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

又其余项  $R_n(x)$  满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

对于任意取定的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0.$$

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

因此,  $e^x$  的麦克劳林展开式为

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n$$

□



### Example

将函数  $f(x) = \sin x$  展开成  $x$  的幂级数.

$$S_n^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

### Example

将函数  $f(x) = \sin x$  展开成  $x$  的幂级数.

### Proof.

$\sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内也有任意阶的导函数, 且

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n=2k+1. \end{cases}$$

于是得  $\sin x$  的麦克劳林级数为

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots.$$

它的收敛半径为  $R = +\infty$ , 且其余项  $R_n(x)$  满足

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin(\theta x + \frac{n+1}{2}\pi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

因此,  $\sin x$  的麦克劳林展开式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty.$$



同理,  $\cos x$  的麦克劳林展开式为

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

由于

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1.$$

上式两边从 0 到  $x$  积分, 可得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1.$$

$$-1 \leq x < 1, \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

利用  $e^x$  的麦克劳林展开式可得  $a^x (a > 0, a \neq 1)$  的麦克劳林展开式

$$a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x \ln a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \quad -\infty < x < +\infty.$$

由例题

## Example

求幂级数

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots$$

的和函数, 并求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$  的值.

及泰勒展开式的唯一性可得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

### Example

将函数  $f(x) = (1+x)^m$  展开成  $x$  的幂级数, 其中  $m$  为任意实数.

Proof.

$$\begin{aligned}f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, \\f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\&\dots\dots\dots, \\f^{(n)}(x) &= m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \\&\dots\dots\dots.\end{aligned}$$

所以

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \quad \dots,$$

于是泰勒级数为

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{m-n}{n+1} \right| \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此, 对于任何实数  $m$ , 这级数在开区间  $(-1, 1)$  内收敛.

要证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , 需要利用余项的柯西形式:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \frac{(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}}{n!}$$

我们这里不给出证明. 令  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= m(m-1) \cdots (m-n)(1+\theta x)^{m-n-1} x^n \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} \\ &= \frac{m(m-1) \cdots (m-n)x^{n+1}}{n!} \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{n-1}. \end{aligned}$$

这样得到  $(1+x)^m$  的泰勒展开式

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

□

### Remark

上面的公式称为二项展开式.

特别地, 当  $m$  为正整数时, 这就是初等代数中的二项式定理.



### Example

求函数  $\ln \frac{1+x}{1-x}$  的泰勒展式.

Proof.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad (-1 < x \leq 1),$$

以  $(-x)$  代替上式中的  $x$  得

$$\ln(1-x) = - \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots \right), \quad (-1 \leq x < 1),$$

因此

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2 \left( x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots \right), \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

□

估算  $\ln 2$ ?

### Example

将函数  $\sin x$  展开成  $(x - \frac{\pi}{4})$  的幂级数.

### Example

将函数  $\sin x$  展开成  $(x - \frac{\pi}{4})$  的幂级数.

### Proof.

因为

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin \left[ \frac{\pi}{4} + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right].\end{aligned}$$

而

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} - \cdots,$$

$x \in (-\infty, +\infty)$ , 所以

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \cdots \right]$$

$x \in (-\infty, +\infty)$ .

□

### Example

将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  展开成  $(x - 1)$  的幂级数.

Proof.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(3+x)} \\ &= \frac{1}{4(1 + \frac{x-1}{2})} - \frac{1}{8(1 + \frac{x-1}{4})}. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{4(1 + \frac{x-1}{2})} &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n, \quad -1 < x < 3, \\ \frac{1}{8(1 + \frac{x-1}{4})} &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} (x-1)^n, \quad -3 < x < 5, \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2 \cdot 4^{n+1}} \right) (x-1)^n, \quad (-1 < x < 3).$$

□

### Example

将函数  $\frac{1}{(2-x)^2}$  展开成  $x$  的幂级数.



### Example

将函数  $\frac{1}{(2-x)^2}$  展开成  $x$  的幂级数. Hint:  $\left(\frac{1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}$ .

### Example

将函数  $f(x) = \frac{x-1}{4-x}$  展开成  $x-1$  的幂级数, 并求  $f^{(n)}(1)$ .

### Example

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

将  $f(x)$  展开成  $x$  的幂级数, 并求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ .

### Example

将函数  $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$  展开成  $x$  的幂级数.

# 幂级数在近似计算中的应用

有了函数的幂级数展开式, 我们可以利用它进行近似计算.

## Example

计算  $\ln(1.2)$  的近似值, 要求误差不超过  $10^{-4}$ .

Proof.

$$\ln(1.2) = \ln(1 + 0.2) = 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 + \cdots$$

这是一个交错级数, 若取前  $n$  项, 则误差

$$R_n < \frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1},$$

令

$$\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1} < 10^{-4}.$$

经计算  $n = 4$  满足要求. 于是前四项, 每项取到小数点后五位, 得

$$\ln(1.2) \approx 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 \approx 0.1823.$$



## Example

计算  $e$  的近似值, 精确到  $10^{-6}$ .

## Example

计算  $e$  的近似值, 精确到  $10^{-6}$ .

## Proof.

$e = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$ . 今取  $1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!}$  作为  $e$  的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots m} \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

令  $\frac{1}{n!n} < 10^{-6}$  即  $n!n > 10^6$ . 经计算  $n = 9$  满足要求.

为了使“四舍五入”引起的误差与截断误差之和不大于  $10^{-6}$ , 计算时应取到小数点后七位, 所以

$$e \approx 1 + \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n!} \approx 2.718282.$$



### Example

求定积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$  的近似值, 精确到  $10^{-4}$ .



### Proof.

由于  $e^{-x^2}$  的原函数不是初等函数, 所以只能用近似计算来求此定积分.  
因为

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots,$$

所以

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} + \cdots \right. \\ & \quad \left. + (-1)^n \frac{1}{2^{2n} (2n+1) n!} + \cdots \right), \end{aligned}$$

这是一个交错级数, 其误差  $R_n$  满足

$$|R_n| \leq \frac{1}{2^{2n+3}(2n+3)(n+1)!}.$$

令  $\frac{1}{2^{2n+3}(2n+3)(n+1)!} < 10^{-4}$  即  $2^{2n+3}(2n+3)(n+1)! > 10^4$ , 经计算  $n=3$  满足要求. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} \right) \\ &\approx 0.4613. \end{aligned}$$

□