微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2014.6.23)

一、 1. 收敛域为 $(\frac{1}{e}, e)$.

2. $I=\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(1+4x^2)=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{17^{\frac{3}{2}}-1}{12}$.

3. 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$, 分离变量得 $\frac{1}{p}\mathrm{d}p=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$,

两边积分得 $p=\frac{C_1}{y}$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{y}$, 分离变量得 $y\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$, 积分得 $y^2=C_1x+C_2$.

4. 设$x+y=u, y-x=v$, $J(u,v)=\frac{1}{2}$,

原式$=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}v+2\int_1^2\mathrm{d}u\int_0^{2-u}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}v=\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u+\int_1^2(2-u)f(u)\mathrm{d}u$

$$(2-u=t)=\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 tf(2-t)\mathrm{d}t=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]\,\mathrm{d}u.$$

5. $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, 所以 $f(x)=f(0)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x\in(-1,1]$.

6. $x=0, x=+\infty$ 是两个奇点，原式$=\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x=I_1+I_2$,

对于 I_1, $x=0$ 是唯一奇点，$\frac{x^p}{1+x^2}\sim x^p=\frac{1}{x^{-p}}$, 所以 I_1 仅当 $-p<1$ 即 $p>-1$ 时收敛；

对于 I_2, $x=+\infty$ 是唯一奇点，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2-p}\cdot\frac{x^p}{1+x^2}=1$, 所以 I_2 仅当 $2-p>1$ 即 $p<1$ 时收敛；

综上，原广义积分仅当 $-1<p<1$ 时收敛.

7. 级数的收敛域为$[-1.1]$; $xI(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=S(x)$,

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n,\qquad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1),\qquad S(0)=S'(0)=0,$$

所以 $S'(x)=S'(0)+\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$,

$S(x)=S(0)-\int_0^x\ln(1-x)\mathrm{d}x=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$, $x\in[-1,1)$,

$I(0)=0,\qquad I(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1.$

$$所以\ I(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

8. 设 $S_1: z=0, x^2+y^2\le R^2$ 取下侧, 由高斯公式 $\iint\limits_{S+S_1}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{2}.$$

所以 $I=\dfrac{\pi R^4}{2}-\displaystyle\iint\limits_{S_1} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\pi R^4}{2}$.

二、 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ x\in\mathbb{R},\quad$ 原式$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})^n}{(n+1)!}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)!}=-2(e^{-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{2})=-2e^{-\frac{1}{2}}+1.$

三、 $P=2y,Q=x,R=e^z,\quad S:x+y=1$ 取左侧，

原式$\displaystyle=\iint\limits_S\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S -1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

四、 曲面 S 关于 $y=0$ 对称，$xy+yz$ 关于 y 是奇函数，所以 $\displaystyle\iint\limits_S(xy+yz)\,\mathrm{d}S=0;$

原式$\displaystyle=\iint\limits_S zx\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\rho=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$

五、 1. $b_1=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2,\qquad b_2=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=-1;$

2. $F(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi}\Big[f(x)-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\Big[x-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x+a^2\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x+b^2\int_0^{\pi}\sin^2 2x\mathrm{d}x-2a\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x-2b\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x+2ab\int_0^{\pi}\sin x\sin 2x\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{\pi}{2}a^2+\dfrac{\pi}{2}b^2-2a\pi+b\pi=\dfrac{\pi}{2}\big[(a-2)^2+(b+1)^2\big]-\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{\pi^3}{3}$, 显然$F(a,b)$在$(2,-1)$处取得最小值.

六、 (1) 特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$. 设原方程有特解 $y^*=Ce^x$, 代入原方程得 $C=\dfrac{1}{2}$, 所以原方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\dfrac{1}{2}e^x$.

(2) 若 $y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解，则由(1)知$f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$, 所以 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

对于三阶方程 $y'''-5y''+6y'=e^x$，其特征方程为 $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$, 解得 $\lambda=0,2,3$, 设此方程有特解 $y^*=Ce^x$, 代入方程得 $C=\dfrac{1}{2}$, 所以此三阶方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3+\frac{1}{2}e^x$.

所以若 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，则 $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3+\frac{1}{2}e^x$, 若 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, 则 $C_3=0$, 所以 $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$, $y=f(x)$ 是 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解.

七、 (1) 特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

所以对应的齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$;

设 $y^*=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)e^{3x}$ 是原方程的解，则 $\begin{cases} C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)e^{3x}=0,\\ 2C_1'(x)e^{2x}+3C_2'(x)e^{3x}=f(x),\end{cases}$

解得$C_1(x)=-\displaystyle\int_0^x e^{-2t}f(t)\mathrm{d}t,\ C_2(x)=\int_0^x e^{-3t}f(t)\mathrm{d}t,$

原方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\displaystyle\int_0^x(e^{3x-3t}-e^{2x-2t})f(t)\mathrm{d}t.$

(2) 证明： 若 $y(0)=y'(0)=0$，则由(1)知 $C_1=C_2=0$, 从而 $y=\displaystyle\int_0^x(e^{3x-3t}-e^{2x-2t})f(t)\mathrm{d}t.$

当 $x>0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}>0,\ t\in(0,x)$; 当 $x<0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}<0,\ t\in(x,0)$; 从而当 $f(x)\ge 0$ 时，$y\ge 0$.