习题8.6

1、利用已知的初等函数的幂级数展开式，求函数在$x=0$处的幂级数展开式，并求展开式成立的区间。

(2) e^{x^2}

解：$e^{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$，$-\infty<x<+\infty$

(4) $\cos^2 x$

解：$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2n!}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{2n!}x^{2n}$，$-\infty<x<+\infty$.

(6) $(1+x)\ln(1+x)$

解：$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$，$-1<x\leq 1$

所以$(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1}$

$$=(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots)+(x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+\cdots)$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$$，$-1<x\leq 1$

2、求下列函数在指定点x_0处的幂级数展开式，并求展开式成立的区间

(4) $\frac{1}{x^2+3x+2}$，$x_0=-4$

解：原式$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+4)-3}-\frac{1}{(x+4)-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{x+4}{2})}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(\frac{x+4}{3})}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

其中$-1<\frac{x+4}{2}<1$且$-1<\frac{x+4}{3}<1$

所以展开式成立的区间为$-6<x<-2$

6、求下列幂级数的和函数，

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$

解：原式 $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=e^{2x}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^{2n}=e^{2x}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2}\cdot x^{2(n-1)}}{(n-1)!}=e^{2x}+2x^{2}e^{2x}$

$=(2x^{2}+1)e^{2x}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}$

解：① 当 $x=0$ 时，和函数 $S(x)=0$，当 $x=1$ 时，$S(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

② 当 $-1\leq x<1$ 且 $x\neq0$ 时，由 $\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{3}x^{3}+\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}$ 可得

原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n+1}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+x-x\right)$

$=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1$