第8章 无穷级数

Outline

Outline

- 常数项级数
  - 常数项级数的概念
  - 收敛级数的基本性质

没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有其它概念能像无穷那样需要加以阐明。

– **David Hilbert** (1862-1943)

无穷级数

给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

形如

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的和式称为（**常数项**）**无穷级数**，简称为（**常数项**）**级数**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中 u_n 称为级数的**通项**.

我们引入部分和的概念.

作级数前 n 项的和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

S_n 称为级数前 n 项的**部分和**. 我们得到一个新的数列 $\{S_n\}$, 这个数列称为级数的**部分和数列**.

Definition (级数的敛散性)

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S, 即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, 极限 S 称为这个级数的**和**, 记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots .$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限. 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

显然, 当级数收敛时, 其部分和 S_n 是级数和 S 的近似值, 它们之间的差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

称为级数的**余项**. 用近似值 S_n 代替和 S 所产生的误差是这个余项的绝对值, 即误差为 $|r_n|$.

Remark

- 给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 我们就可以得到一个部分和数列 $\{S_n\}$, 反之给定数列 $\{S_n\}$, 就有以 $\{S_n\}$ 为部分和数列的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 事实上, 只需取 $u_1 = S_1, u_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$.
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散, 且在收敛时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Example

讨论等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的收敛性. 其中 $a \neq 0$, q 叫做级数的**公比**(这个级数又称为**几何级数**).

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$$

$$S_n \cdot q = aq + aq^2 + \cdots + aq^n$$

$$S_n \cdot q - S_n = (aq + \cdots + aq^n) - (a + aq + \cdots + aq^{n-1})$$

$$= aq^n - a$$

Example

讨论等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

的收敛性. 其中 $a \neq 0$, q 叫做级数的**公比**(这个级数又称为**几何级数**).

Proof.

如果 $|q| \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

- 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$. 因此, 此时级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛到 $\dfrac{a}{1-q}$.
- 当 $|q| > 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. 这时级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.
- 如果 $|q| = 1$,
  - 当 $q = 1$ 时, $S_n = na \to \infty$. 因此级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.
  - 当 $q = -1$ 时, $S_{2k-1} = a$, $S_{2k} = 0$ ($k = 1, 2, \cdots$). 从而 S_n 的极限不存在. 因此, 此时级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散.

$\square$

Example

判断级数

$$(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\cdots$$

的敛散性. 若收敛, 求其和.

Proof.

$$
\begin{aligned}
S_n &= (1+1) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right) \\
&= \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}. \\
\lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

因此, 这个级数收敛, 其和为 $\frac{7}{2}$. □

Example

判断级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的敛散性. 若收敛, 求其和.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+\cdots+100}$$

Proof.

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

因此, 这个级数收敛, 其和为1. □

收敛级数的基本性质

Theorem

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，k 为任一常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 亦收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

$$k\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} k u_n$$

收敛级数的基本性质

Theorem

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，k 为任一常数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 亦收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Proof.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和为 S，并设

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \qquad \sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n.$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} kS_n = k \lim_{n\to\infty} S_n = kS.$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = kS.$ □

Theorem

若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 皆收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Proof.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和分别为 τ_n，s_n，σ_n. 再设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$，则

$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty}(s_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s \pm \sigma.$ □

上述结果的逆命题不成立！为什么?

Theorem

任一收敛数列的子数列仍收敛

Theorem

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对这级数的项任意加括号所成的级数

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2+\cdots+u_{i_1})+(u_{i_1+1}+\cdots+u_{i_2})\\&\quad+\cdots+(u_{i_{n-1}+1}+\cdots+u_{i_n})+\cdots\end{aligned}$$

仍收敛, 且其和不变.

Proof.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$.
加括号后的级数的部分和数列为 $\{A_n\}$, 则有

$$
\begin{aligned}
A_1 &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1}, \\
A_2 &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2}, \\
&\cdots\cdots \\
A_n &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) \\
&\qquad + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n}.
\end{aligned}
$$

可见, $\{A_n\}$ 实际上是 $\{S_n\}$ 的一个子数列, 故由 $\{S_n\}$ 的收敛性立即可得 $\{A_n\}$ 也收敛, 且其极限值相同. □

Remark

- 加括号后的级数收敛，不能断言原来未加括号的级数也是收敛的，例如，级数
$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$
收敛于零，但级数
$$1-1+1-1+\cdots$$
是发散的.
- 由定理可得到下面的结论：如果加括号后所成的级数发散，则原来级数也发散. 事实上，如果原来级数收敛，则根据定理知道，加括号后所成的级数也应收敛.

Theorem (级数收敛的必要条件)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

逆否: $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

Proof.

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 和为 S, 则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

$\square$

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\ln(n+1)}+\cdots$$

Example

证明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

Example

证明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

Proof.

反设调和级数收敛, 设它的部分和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0.$$

但另一方面

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}=\frac{1}{2}.$$

故 $S_{2n}-S_n\not\to 0\ (n\to\infty)$，矛盾! 这个矛盾说明调和级数发散. □

$\{u_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, p\in\mathbb{N}, |u_{n+p}-u_n|<\varepsilon.$

$\{u_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n>N, \exists p\in\mathbb{N}, |u_{n+p}-u_n|\geq \varepsilon_0$

Remark

- 上例中的一般项 $u_n = \frac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$, 但它是发散级数. 这说明一般项 u_n 趋于零只是级数收敛的必要条件, 但不是充分条件. 当我们考察一个级数是否收敛时, 我们首先考察这个级数的一般项 u_n 是否趋于零. 如果 u_n 不趋于零, 那么立即可以断定这个级数是发散的. 例如, 对于级数

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} + \cdots,$$

因为 $u_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ 当 $n \to \infty$ 时, 不趋于零. 所以该级数发散.

Theorem

在级数中去掉, 加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性.

Theorem

在级数中去掉, 加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性.

Proof.

我们只需证明“去掉级数前面部分的有限项或在级数前面加上有限项, 不会改变级数的敛散性”.

因为其他情形(即在级数中任意去掉, 加上或改变有限项的情形)都可以看成去掉级数前面的有限项, 然后在级数前面再加上有限项的结果.

设将级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

的前 k 项去掉, 则得级数

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots ,$$

于是新级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = S_{n+k} - S_k.$$

其中 S_{k+n} 是原级数前 $k+n$ 项的和. 因为 S_k 是常数, 所以 σ_n 与 S_{k+n} 同时收敛或发散. 类似地, 可以证明在级数的前面加上有限项, 不会改变级数的敛散性. $\square$

柯西收敛原理

柯西收敛原理是判断级数是否收敛的基本原理.

Theorem (柯西收敛原理)

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意的正整数 p, 都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

柯西收敛原理

柯西收敛原理是判断级数是否收敛的基本原理.

Theorem (柯西收敛原理)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为：对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意的正整数 p, 都有

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Proof.

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n. 因为

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| = \left|S_{n+p} - S_n\right|,$$

所以由数列的柯西收敛原理立得. □

Example

利用柯西收敛原理判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

Proof.
因为对任何自然数 p,

$$\begin{aligned}
&\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\
&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\
&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\
&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

于是对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时, 对于任何自然数 p, 总有

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$$

由柯西收敛原理知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. □

Example

证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛。

Example

求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的值。