微积分II(第一层次)期末参考答案 (2015.6.22)

一、1. 曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D$, $D:\ x^2+y^2\le a^2-h^2$,
原式$=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D a\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2)$.

2. 原式$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y=\frac{46}{15}$.

3. 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2z-5$, 则 $\boldsymbol{n}=(F'_x(1,1,1),F'_y(1,1,1),F'_z(1,1,1))=(2,2,4)=2(1,1,2)$, 于是曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$, 法线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$.

4. $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{(x-\frac1x)}{\sqrt2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt2}$

5. 原方程可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次微分方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 于是原方程变为 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u+1}$, 分离变量得 $\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分, 得 $u+\ln|u|+C=-\ln|x|$, 所以原方程的通积分为: $\frac{y}{x}+\ln|y|+C=0$. $y=0$ 为奇解. (通积分也可写成 $y=Ce^{-\frac{y}{x}}$.)

6. $\oint_C\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=\int_0^1[2x\arctan x-1]\mathrm{d}x+\int_1^0(\arctan1-1)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-1$.

7. $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac13(1-(\frac13)^n)}{1-\frac13}-\frac{\frac{7}{10}(1-(\frac{1}{10})^n)}{1-\frac{1}{10}}\right)=-\frac{5}{18}$. 所以级数收敛，和为$-\frac{5}{18}$.

8. 记 $P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 l 与单位圆周 $C:x^2+y^2=1$ 所围的区域内成立，故积分与路径无关，所以 $\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$.

9. 记 $P=e^x\sin y-2y\sin x,Q=e^x\cos y+2\cos x$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-2\sin x$, 这是一个全微分方程，$u(x,y)=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=e^x\sin y+2y\cos x$, 所以原方程的通解为 $e^x\sin y+2y\cos x=C$.

10. 令 $u_n(x)=(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}x^2=x^2$, 所以 $|x|<1$ 时级数收敛，$|x|>1$ 时级数发散，而 $x=\pm1$ 时，易知级数收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, 则 $S(0)=0$, $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, 所以 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

11. 在上题中令 $x=1$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\arctan1=\frac{\pi}{4}$.

二、 设 $S_1:z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧, 记 V 是 S 与 S_1 所围立体.

$$I=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$=\iint\limits_{S+S_1}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}-\iint\limits_{S_1}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$=\iiint\limits_{V}\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_1}\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}=\frac{2}{3}\pi a^3+\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{3}\pi a^3.$$

三、 设 $P(x,y)=3x^2y$, 因为积分与路径无关，所以 $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)=3x^2$, 故 $Q(x,y)=x^3+\varphi(y)$.

又因为 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y+\int_0^t 3x^2\mathrm{d}x=\int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y+t^3$,

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y+\int_0^1 3x^2t\mathrm{d}x=\int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y+t,$$

所以 $\displaystyle\int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y+t^3=\int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y+t$, 两边对 t 求导得 $3t^2=Q(0,t)+1$, 即 $Q(0,t)=3t^2-1$, 所以 $\varphi(y)=Q(0,y)=3y^2-1$. 所以 $Q(x,y)=x^3+3y^2-1$.

四、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0\ (n=1,2,3\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}.\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2},(n=1,2,3,\cdots).$$

而 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$, 所以 $\displaystyle f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,\ \ (-\pi\le x\le\pi)$.

(2) 在上式中令 $x=0$, 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

(3) 在(1)中令 $x=\pi$, 得 $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 与(2)式相加得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

五、 (1) $\displaystyle\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}<\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n},\ (n\ge 2)$,

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^2}<\frac{1}{S_1}+\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)=\frac{2}{a_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{2}{a_1},$$

而正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界，所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(2) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 的部分和为 σ_n, 即 $\displaystyle\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_k}}$, $\displaystyle\sigma_n>\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_n}}>\sqrt{S_n}$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛，则 σ_n 有上界，由上式可知 S_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. $\displaystyle\sigma_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_1}}=\frac{S_n}{\sqrt{a_1}}$, 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 S_n 有上界，由上式可知 σ_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛.

六、 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e-(1+\frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}}=\frac{e}{2}$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 敛散性相同，$p>1$ 时收敛，$p\le 1$ 时发散.