第8章 无穷级数

Outline

正项级数

Outline

正项级数

正项级数

每一项都是非负的级数称为**正项级数**, 即若 $u_n \geq 0\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为正项级数.

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\ (u_n \geq 0, n=1,2,\cdots)$ 的部分和为 S_n, 显然

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots,$$

即 $\{S_n\}$ 为单调增加数列. 如果 $\{S_n\}$ 具有上界, 即存在 $M>0$ 使得 $S_n \leq M\ (n=1,2,\cdots)$. 根据单调有界数列必有极限的准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S, 知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 根据收敛数列必为有界数列的性质知, 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

Theorem (基本定理)

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

根据这一基本定理, 我们立即可得到关于正项级数的比较判别法.

Theorem (比较判别法)

如果两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的一般项满足关系

$0 \leq u_n \leq v_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) 则:

(1) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

$V_n = v_1 + \cdots + v_n < M$

$u_1 + \cdots + u_n \leq V_n < M$

(2) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

Proof.

(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于和 σ, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \leq \sigma.$$

由基本定理知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 用反证法, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 由(1)的结论知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 这与(2)的假设矛盾. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

□

Corollary

若存在正整数 N 及常数 $C > 0$ 使得

$$0 \le u_n \le C v_n \qquad (n \ge N)$$

成立，则当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots + \cdots$

Example

讨论 p-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的收敛性, 其中常数 $p>0$.

$p=1$ 时, 发散 (柯西收敛准则).

① $0<p<1$ $\quad \frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$

$\because \sum \frac{1}{n}$ 发散, $\therefore \sum \frac{1}{n^p}$ 发散.

Example

讨论 p-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的收敛性，其中常数 $p>0$.

$f(x)=\frac{1}{x^p}$, $f(n)=\frac{1}{n^p}$

Proof.

当 $p\le 1$ 时，$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$，而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，因此，当 $p\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散. 根据比较判别法知，

当 $p>1$ 时, 因为当 $k-1\le x\le k$ 时, 有 $\dfrac{1}{k^p}\le\dfrac{1}{x^p}$, 所以

$$\frac{1}{k^p}=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^p}\,\mathrm{d}x\le\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x\qquad(k=2,3,\cdots),$$

$U_1=1,\quad U_k=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}dx\,(k\geq 2)$

从而, p-级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\le 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=1+\int_{1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x\\&=1+\frac{1}{p-1}\Big(1-\frac{1}{n^{p-1}}\Big)<1+\frac{1}{p-1},\quad n=2,3,\ldots\end{aligned}$$

这说明数列 $\{S_n\}$ 有界, 因此, 当 $p>1$ 时级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛. □

Example

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$$

Example

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

Proof.

因为 $n(n+1) < (n+1)^2$, 所以 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$. 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

发散, 根据比较判别法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的. □

Theorem (比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \quad 0 \le l < +\infty$

取 $\varepsilon_0 > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时

$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon_0$

(1) 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l < +\infty)$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$\frac{u_n}{v_n} - l < \varepsilon_0$

$u_n < (l+\varepsilon_0) v_n$

(2) 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

取定 ε_0, $l - \varepsilon_0 > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon_0$. $\varepsilon_0 < \frac{u_n}{v_n} - l$

$(l - \varepsilon_0) v_n < u_n$

Proof.

(1) 由极限的定义知，对于 $\varepsilon = 1$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $\dfrac{u_n}{v_n} < l + 1$. 即 $u_n < (l+1)v_n$. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，根据推论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 由已知条件知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{u_n}$ 存在，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则由结论(1)知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛，但已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散.

□

Example

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 的收敛性.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$0 < 1 < +\infty$$

$\sum \sin\frac{1}{n}$ 和 $\sum \frac{1}{n}$ 同敛散,

Example

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的收敛性.

Proof.

因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 由比较判别法知原级数也发散. □

$\ln(1+x) \sim x, \quad x \to 0$

Example

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2})$ 的敛散性.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Example

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2})$ 的敛散性.

Proof.

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, □

Example

讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$ 的敛散性.

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2} = \frac{4}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} \sim n^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}} \sim n^{-\frac{1}{2}-\alpha}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}}{n^{-\frac{1}{2}-\alpha}}$$

Example

讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$ 的敛散性.

Proof.

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = 2.$$

而当 $\alpha+\frac{1}{2}>1$ 即 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 收敛. 所以当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时原级数收敛.

当 $\alpha+\frac{1}{2}\le 1$, 即 $\alpha\le\frac{1}{2}$ 时级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 发散. 故当 $\alpha\le\frac{1}{2}$ 时, 原级数发散. $\square$

利用比较判别法, 将要判定的级数与几何级数比较, 可以得到下面两个很有用的判别法.

Theorem (达兰贝尔 (D′Alembert判别法))

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$\sum_{n=4}^{\infty} u_{n+4}$

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; $\rho > 1$ (或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$) 时级数发散; $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散.

达兰贝尔判别法也称为**比值判别法**.

Proof.

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 取一个充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$. 根据极限定义, 存在正整数 N, 当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r.$$

因此

$$u_{N+1} < ru_N, \ u_{N+2} < r^2 u_N, \ \cdots, \ u_{N+k} < r^k u_N, \ \cdots$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} r^k u_N$ 为公比 $r < 1$ 的几何级数, 从而收敛. 根据推论, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 取一个充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $\rho - \varepsilon > 1$. 根据极限定义, 存在正整数 N, 当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1.$$

从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N > 0.$$

因此, u_n 的极限不可能为零. 根据级数收敛的必要条件知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

类似地, 可以证明当 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 级数可能收敛也可能发散.

例如, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 都有 $\rho = 1$.

但前者收敛, 后者发散.

$\square$

Example

判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s} (s > 0, a > 0)$的敛散性.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)^s} \cdot \frac{n^s}{a^n}$$

$$= a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^s$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$$

① $a > 1$时，发散　② $a < 1$，收敛

$a = 1$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$，$\begin{cases} s > 1\text{时，收敛，} \\ 0 < s \le 1\text{时，发散.} \end{cases}$

Example

判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}(s>0,a>0)$的敛散性.

Proof.

因为 $u_n=\frac{a^n}{n^s}$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)^s}\cdot\frac{n^s}{a^n}=a\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=a.$$

因此, 当 $a<1$ 时, 级数收敛. 当 $a>1$ 时, 级数发散.
而 $a=1$ 时, $s\leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 发散. 当 $s>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 级数收敛. □

Example

证明级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots = e \approx 2.718281828359\ldots$$

是收敛的.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Example

证明级数

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$$

是收敛的.

Proof.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

由达兰贝尔判别法知级数收敛. □

Example

判断级数

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots+\frac{n!}{10^n}+\cdots$$

的敛散性.

$$u_n=\frac{n!}{10^n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$$

$$\sum\frac{1}{10^{n!}}$$

Example

判断级数

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\cdots+\frac{n!}{10^n}+\cdots$$

的敛散性.

Proof.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=+\infty.$$

根据达兰贝尔判别法知级数发散. □

Theorem (柯西判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho,$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; 当 $\rho > 1$ (或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$) 时级数发散; 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散.

柯西判别法也称为**根值判别法**.

Proof. $\forall \varepsilon,\ \rho+\varepsilon = r < 1$

(1) 取正数r, 使得$\rho < r < 1$, 则存在 N 使得当 $n \geq N$ 时

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$$\sqrt[n]{u_n} < r,$$

即 $u_n < r^n$ ($n \geq N$), 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛. 因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) $\rho > 1$, 则存在充分小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $r = \rho - \varepsilon > 1$, 对于这个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n \geq N$ 时

$$\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon = r > 1.$$

即 $u_n > r^n > 1$. 因此, 当 n 趋于无穷时, u_n 的极限不能为零.

由级数收敛的必要条件知此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛, 也可能发散. 例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 这两个级数都有 $\rho = 1$, 但前者收敛, 后者发散.

$\square$

Example

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (x \geq 0)$ 的敛散性.

$$S_n = \frac{\cancel{x} - x^{n+1}}{1-x},$$

$$\sqrt[n]{u_n} = x, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = x.$$

Example

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (x \geq 0)$ 的敛散性.

Proof.

因为 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n} = x$. 根据柯西判别法, 当 $x < 1$ 时级数收敛, 当 $x > 1$ 时级数发散. 当 $x = 1$ 时级数为 $1 + 1 + 1 + \cdots$, 显然是发散的. 所以, 原级数当 $x < 1$ 时收敛, $x \geq 1$ 时发散. $\square$

Example

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^n$ 的敛散性.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{3}{5}$$

Example

考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{n}$ 的敛散性.

Proof.

因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+2}=\frac{3}{5}<1.$

根据柯西判别法, 级数收敛. $\square$

达兰贝尔判别法 v.s. 柯西判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\ (\text{有限或 }\infty)\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2\pi^2}x^2\right),\qquad x=\pm\pi,\ x=\pm2\pi,\ \ldots,\ x=\pm n\pi$$

$$1-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\right)x^2+\cdots\ //\ \qquad \|\ \ \frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\cdots}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}$$

达兰贝尔判别法 v.s. 柯西判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\ (\text{有限或 }\infty)\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho.$$

Proof.

$\forall\epsilon>0$，$\exists N$，使得 $n\geq N$ 时

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\epsilon\quad\Longleftrightarrow\quad a_n(\rho-\epsilon)<a_{n+1}<a_n(\rho+\epsilon)$$

$$\Longrightarrow\quad a_N(\rho-\epsilon)^{n-N}<a_n<a_N(\rho+\epsilon)^{n-N}$$

$$\Longrightarrow\quad a_N(\rho-\epsilon)^{-N}(\rho-\epsilon)^n<a_n<a_N(\rho+\epsilon)^{-N}(\rho+\epsilon)^n$$

$$\Longrightarrow\quad\sqrt[n]{a_N(\rho-\epsilon)^{-N}}(\rho-\epsilon)<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(\rho+\epsilon)^{-N}}(\rho+\epsilon).$$

□

达兰贝尔判别法 v.s. 柯西判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\ (\text{有限或}\ \infty)\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho.$$

Proof.

$\forall\epsilon>0$，$\exists N$，使得 $n\geq N$ 时

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\epsilon\quad\Longleftrightarrow\quad a_n(\rho-\epsilon)<a_{n+1}<a_n(\rho+\epsilon)$$

$$\Longrightarrow\quad a_N(\rho-\epsilon)^{n-N}<a_n<a_N(\rho+\epsilon)^{n-N}$$

$$\Longrightarrow\quad a_N(\rho-\epsilon)^{-N}(\rho-\epsilon)^n<a_n<a_N(\rho+\epsilon)^{-N}(\rho+\epsilon)^n$$

$$\Longrightarrow\quad\sqrt[n]{a_N(\rho-\epsilon)^{-N}}(\rho-\epsilon)<\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(\rho+\epsilon)^{-N}}(\rho+\epsilon).$$

□

Example

$$a_n=\begin{cases}1/2^k, & n=2k,\\ 1/2^{k+1}, & n=2k-1.\end{cases}\qquad\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \cdots$$

Theorem (柯西积分判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若存在一个连续的单调减少的正值函数 $f(x)$, 使得

$$u_n = f(n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geq \int_{n-1}^{n} f(n)\,dx = u_n = f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$$u_n \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} u_n \geq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

Theorem (柯西积分判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 若存在一个连续的单调减少的正值函数 $f(x)$, 使得

$$u_n = f(n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

Proof.

由于

$$u_{k-1} = \int_{k-1}^{k} u_{k-1}\,\mathrm{d}x \geq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{k-1}^{k} u_k\,\mathrm{d}x = u_k,$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n} u_{k-1} \geq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=2}^{n} u_k.$$

由此即得证明. □

Example

证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

$f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x \ln x)^2}$

$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

Example

证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

$$\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln n} = S_N \right.$$

$$S_N - (\ln\ln N - \ln\ln 2) \to C$$

Proof.

因为

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{A\to+\infty} [\ln\ln A - \ln\ln 2] = +\infty.$$

所以，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散. 又

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛. □

$\ln n \ll n^{\varepsilon}$, 只要 $\varepsilon > 0$.

(III) $a=1$, $\begin{cases} b>1, & \text{收敛} \\ b \le 1, & \text{发散}. \end{cases}$

$u_n = \dfrac{1}{n^a \ln^b n}$

(1) $a=1, b=1$ 发散

(2) $a=1$, $b>1$, $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^b x}$

(3) $a>1$, $b \geqslant 0$, 和 $\sum \dfrac{1}{n^a}$

(4), $a>1$, $b<0$,

$u_n = \dfrac{(\ln n)^{|b|}}{n^a} \ll \dfrac{1}{n^{a-\varepsilon}}$

Example

讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln^b n}$ 的收敛与发散性.

Example

证明: 若正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

(I) $a<1$, $b \in \mathbb{R}$, 发散.

(II) $a>1$, $b \in \mathbb{R}$, 收敛.

Example

证明: 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, 则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = a$$

Example

设$a_n > 0$, 且单调减少, 证明: 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Example

证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, 则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Example

设 $a_n > 0$, 且单调减少, 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Hint: $(n-m)a_n < a_{m+1} + \cdots + a_n < r_m \quad \Longrightarrow \quad na_n \le \frac{n}{n-m} r_m$.

补充了解

Theorem (比较判别法的推论)

设$a_n > 0, b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. 则

(1) 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

补充了解

Theorem (比较判别法的推论)

设$a_n > 0, b_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. 则

(1) 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

Hint: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$.

补充了解

Theorem (拉阿贝(Raabe)判别法)

设$a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p$, 则

(1) 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $p < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

补充了解

Theorem (拉阿贝(Raabe)判别法)

设$a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p$, 则

(1) 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 当 $p < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Hint: $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{p_1}{n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p_2} = \frac{1/n^{p_2}}{1/(n+1)^{p_2}}, \quad 1 < p_2 < p_1 < p.$

Example

判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 的敛散性。

Example

判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 的敛散性。

Proof.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+p}} \cdot \frac{(n+1)^{n+1+p}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{(1+1/n)^{n+p}}{e} = e^{(n+p)\ln(1+1/n)-1}.$$

$$\begin{aligned} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) &= n\Big(e^{(n+p)\ln(1+1/n)-1} - 1\Big) \\ &= n\Big(e^{\frac{p-1/2}{n}+O(\frac{1}{n})^2} - 1\Big) = p - \frac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big). \end{aligned}$$

□

Stirling 公式：

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\Big(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51480n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\Big)$$