2018-2019 学年第二学期第一层次微积分 II 试卷 A 参考答案 2019.6.17

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 5 题，计 30 分）

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.

解：S 为：$z=\dfrac{x+4y-18}{8}$，$z'_x=1/8, z'_y=1/2, \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}=9/8$，

S 在 xoy 平面上的投影为 $D: x^2+(y-3)^2\le 9$，

故所求面积为：$A=\iint_D \dfrac{9}{8}dxdy=\dfrac{81}{8}\pi.$

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$ 的敛散性 .

解：$u_n=n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}\sim\dfrac{n\pi}{5^n}=b_n$，而 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{(n+1)\pi}{5^{n+1}}\cdot\dfrac{5^n}{n\pi}\to\dfrac{1}{5}<1.$ 所以由比值法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\pi}{5^n}$ 收敛，再由比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$ 收敛.

3. 讨论广义积分 $\int_0^1\dfrac{x^3 d\,x}{\sqrt{1-x^4}}$ 的敛散性.

解：因为 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{1/2}\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}=\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{1/2}\cdot\dfrac{x^3}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=\dfrac{1}{2}.$

所以由 Cauchy 判别法知此广义积分收敛.

4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.

解：原微分方程化为：$\dfrac{d(y^2)}{dx}-\dfrac{y^2}{x}=-1$，此为关于 y^2 的一阶线性微分方程，其解为：

$$y^2=e^{\int\frac{dx}{x}}(C-\int e^{-\int\frac{dx}{x}}dx)=x(C-\ln|x|).$$

5. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

解：原方程化为：$(x+y^2+2)dy-(x^2-y+5)dx=0$，使用分项组合凑微分法，得

$d(\dfrac{y^3}{3}+2y-\dfrac{x^3}{3}-5x+xy)=0$，所求的通积分为：$y^3-x^3+3xy+6y-15x=C.$

二、（本题 10 分）求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，切平面的法向量为 $\vec{n}=(3x_0,y_0,-z_0)$，所以切平面的方程为：

$$3x_0x+y_0y-z_0z=27.$$

直线 L 的方向向量 $\vec{s}=(0,1,1)$，$\because \vec{s}\perp\vec{n},\therefore y_0=z_0$，又 M_0 在 S 上，故 $x_0=\pm3$.

L 上有点 $P(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$，由 $\overrightarrow{PM_0}\perp\vec{n},\ y_0=3x_0-8,$

$$\Rightarrow M_0'(3,1,1),n'=(9,1,-1),\ M_0''(-3,-17,-17),n''=(9,17,-17).$$

故所求切平面方程为：$9x+y-z-27=0$，$9x+17y-17z+27=0$.

三、（本题 10 分）设 $C:x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t),t:0\to2\pi$ 为旋轮线的一拱. 方向由原点到 $A(2\pi a,0)$. 计算 $I_1=\int_C[(x+y+1)e^x-e^y+y]dx+[e^x-(x+y+1)e^y-x]dy.$

解：$P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y,Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$，

补线段 $AO:y=0,x:2\pi a\to0$，则 $I_1=\int_{C+AO}Pdx+Qdy-\int_{AO}Pdx+Qdy$

$I_1=2\iint_D dxdy+\int_0^{2\pi a}[(x+1)e^x-1]dx$，其中 D 为旋轮线的一拱与 x 轴所围的区域.

$I_1=2\int_0^{2\pi a}ydx+\int_0^{2\pi a}[(x+1)e^x-1]dx=2\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt+(xe^x-x)|_0^{2\pi a}$

$=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1).$

四、（本题 10 分）计算：$I_2=\iint_S 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge0)$ 的上侧.

解：补一个 xoy 平面上被 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记为 S_1，记 Ω 为由 S 与 S_1 围成的空间有界闭区域，则

$I_2=\iint_{S+S_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy+\iint_{S_1\text{上侧}}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=I_{21}+I_{22}.$

$I_{21}=6\iiint_\Omega(x^2+y^2+z)dxdydz=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)dz$

$=12\pi\int_0^1r[z^2/2+zr^2]_0^{1-r^2}dr=12\pi\int_0^1r[(1-r^2)^2/2+(1-r^2)r^2]dr=2\pi.$

$I_{22}=\iint_{x^2+y^2\le 1}-3dxdy=-3\pi$，所以 $I_2=2\pi-3\pi=-\pi.$

五、（本题 10 分）记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

解：因为 $x>0,\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，令 $x=1/k(k\in N)$，则有 $\frac{1}{k+1}<\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}$. 取左边半个不等式，令 $k=1,2,\cdots n-1$，再相加，得 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le 1+\ln n(n\ge 1)$，当 n 充分大时，$1+\ln n<\sqrt{n}$, 所以

$$0<\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}\le\frac{1+\ln n}{(n+1)(n+2)}\le\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以由比较判别法的不等式形式以及收敛级数的性质知原级数收敛.

利用级数的敛散性定义来求和.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\frac{a_3-a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{a_n}{n+2}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\to 1.$$ 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=1.$

六、（本题 10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

解：考察幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^n$，此处 $t=x^2/2$, 记 $a_n=2n-1$, $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1.$

$t=\pm 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(-1)^n$ 发散，所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域为：$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 和函数为 $S(x)$，即 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，两边积分，得

$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=\frac{1}{x}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}.$ 两边再求导，得所求幂级数的和

函数为：$S(x)=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\quad(|x|<\sqrt{2})$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\quad(|x|<\sqrt{2})$.

在上式中令$x=1$,得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=3$.

七、（本题 10 分）将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

解：$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\dfrac{2}{\pi}(\pi^2x-x^3/3)_0^{\pi}=\dfrac{4\pi^2}{3}$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}[(\pi^2-x^2)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx]=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=\frac{4}{n\pi}[x(-\frac{1}{n}\cos nx)\,|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\,|_0^{\pi}]=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.\ n=1,2,\cdots$$

所以，$f(x)=\pi^2-x^2=\dfrac{2\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi]$

在上式中令$x=\pi$,得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，$x=0$,得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}$,$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\pi^2}{6}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

八、（本题 10 分）已知$y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.

解：根据二阶线性微分方程解的结构知道，$y_1-y_3=e^{-x},y_1-y_2=e^{2x}-e^{-x}$ 是其对应的二阶齐次微分方程的解，因此可得e^{-x}与e^{2x}是二阶齐次微分方程的两个线性无关的解，故此微分方程是：$y''-y'-2y=f(x)$.

而xe^x是二阶非齐次微分方程的一个特解. 代入上式，得$f(x)=(1-2x)e^x$.

所以所求微分方程为：$y''-y'-2y=(1-2x)e^x$. 其通解为：$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$.