微积分II（第一层次）期末试卷 (2016.6.20)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}$.

2. 设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u^2-v+xy=0, \\ u+v^2+x-y=0 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3. 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^n}$ 收敛，并求其和。

4. 求微分方程 $y'-y=xy^3$ 的通解.

5. 求微分方程 $yy''=(y')^2$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

二、(10分)　设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性，可偏导性与可微性。

三、(10分) 求第一类曲面积分 $I_1=\iint\limits_S x^2y^2\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\le R^2$.

四、(10分) 计算第二类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧. (提示：利用高斯公式)

五、(10分)　讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ 的敛散性。如果收敛，说明其是条件收敛还是绝对收敛.

六、(10分)　求 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 的马克劳林展式。

七、(10分) 将函数 $f(x)=x\ (0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和。

八、(10分)　(1)　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域；

(2)　设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, 建立 $S(x)$ 所满足的微分方程，并求 $S(x)$.