微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2017.7.4)

一、1. 由 $\begin{cases} f'_x = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ f'_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $P_1(2k\pi, 0)$, $P_2((2k-1)\pi, -2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$f''_{xx} = -(1+e^y)\cos x$, $f''_{xy} = -e^y \sin x$, $f''_{yy} = e^y(\cos x - y - 2)$,

对于 P_1, $A=-2, B=0, C=-1, B^2-AC<0, A<0$, 所以 $f(P_1)=2$ 是极大值;

对于 P_2, $A=1+e^{-2}, B=0, C=-e^{-2}, B^2-AC>0$, 所以 P_2 不是极值点.

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 1$, 所以原广义积分收敛。

3. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p \ln\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^p} \sim \dfrac{1}{2^p n^{\frac{p}{2}+1}}$, 仅当 $\dfrac{p}{2}+1>1$ 即 $p>0$ 时原级数收敛.

4. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - yx = y^3x^2$, 关于 x 是伯努利方程. 令 $x^{-1}=u$, 则方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + yu = -y^3$, 解得 $u = e^{-\int y\mathrm{d}y}\left(C - \displaystyle\int y^3 e^{\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right) = e^{-\frac{y^2}{2}}\left(C - 2e^{\frac{y^2}{2}}\left(\dfrac{y^2}{2}-1\right)\right)$, 故通积分为 $x\left(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2\right) = 1$.

5. 令 $y'=p(x)$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 1+p^2$, 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = \mathrm{d}x$, 两边积分得 $\arctan p = x + C_1$, 即 $y' = \tan(x+C_1)$, 解得通解为 $y = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2$.

二、 (1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, 由格林公式得 $I_1=0$.

(2) 设曲线 $C_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$, $0<\varepsilon<0.5$, 取顺时针方向, 则

$$I_1 = \oint_{C+C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0 - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = -2\pi.$$

三、 由斯托克斯公式, $I_2 = \displaystyle\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（其中 S 为 $x+y=R$, 取后侧）

$$= -\iint_S \frac{\sqrt{2}R}{2}\mathrm{d}S = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 = -\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$$

四、 设曲面 $S: z=0, (x^2+y^2\le 1)$, 取上侧，则

$$\iint_{\Sigma+S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega (2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$I_3 = \frac{3\pi}{2} - \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

五、证明: (1) 设 $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由不等式 $n^2>(n+1)(n-1)$ 可得,

$$(a_n)^2 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2} < \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{(1\cdot 3)(3\cdot 5)\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}, \text{所以 } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(2) 由于 $0 < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 且 $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} < a_n$,

由莱布尼茨判别法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

又 $a_n=1\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n-2}\cdot\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2n}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散. 故原级数条件收敛.

六、方法一：考虑幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n$, 此幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=xe^x$, $\quad S(x)=\Big(xe^x\Big)'=(x+1)e^x$. 令 $x=2$ 即得 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}=3e^2$.

方法二：注意到 $\quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=2e^2+e^2=3e^2.$$

七、 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0\ \ (n=1,2,\cdots)$;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\big(-x\cos x+\sin x\big)\Big|_0^{\pi}=2,$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\big(-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\big)\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\big(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\big)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big(-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x+\frac{x}{n-1}\cos(n-1)x-\frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x\Big)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1},\ (n=2,3,\cdots).$$

所以 $x\sin x=1-\dfrac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx,\qquad x\in(-\pi,\pi)$.

八、 (1) 由题意可得 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)+f(x)=2e^x, f(0)=0, f'(0)=2$, 解这个微分方程得 $f(x)=-\cos x+\sin x+e^x$.

$$I_4=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}f(x)-\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

(2) $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)+f(x)=6x, f(0)=1, f'(0)=0$, 解得 $f(x)=\cos x-6\sin x+6x$.