第10章 常微分方程初步

Outline

Outline

高阶微分方程

- 二阶线性微分方程
- 二阶线性常系数微分方程
- 欧拉方程

下面我们讨论高阶方程的解法, 这里我们主要介绍可降阶的高阶微分方程以及高阶线性微分方程的解法.

n 阶线性微分方程

- n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots p_n(x)y = f(x),$$

- 当方程右端 $f(x) \equiv 0$ 时, 对应的方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots p_n(x)y = 0$$

称为 n 阶齐次线性微分方程. 否则称为 n 阶非齐次线性微分方程.

二阶线性微分方程

- 形如
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$
的方程称为**二阶线性微分方程**.
- 当方程右端 $f(x) \equiv 0$ 时, 对应的方程
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
称为**二阶齐次线性微分方程**. 否则称为**二阶非齐次线性微分方程**.

朗斯基行列式与函数组的线性无关性

设 $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的 $(n-1)$ 阶可微函数, 行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

称为 $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x)$ 的朗斯基 (Wronski) 行列式.

刘维尔公式

Theorem (刘维尔公式)

设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的两个解, 则它们的朗斯基行列式满足

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx},$$

其中 x_0 为 $[a,b]$ 上的任意一点.

刘维尔公式

Theorem (刘维尔公式)

设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的两个解, 则它们的朗斯基行列式满足

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx},$$

其中 x_0 为 $[a,b]$ 上的任意一点.

Proof.

根据朗斯基行列式的定义

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x), \end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathsf{d}x} &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1'(x) - y_2(x)y_1''(x) \\
&= y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) \\
&= y_1(x)[-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)] + y_2(x)[p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] \\
&= p(x)[y_2(x)y_1'(x) - y_1(x)y_2'(x)] \\
&= -p(x)W(x),
\end{aligned}
$$

即

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{W(x)} = -p(x)\mathsf{d}x$$

上式两边从 x_0 到 x 积分, 得

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathsf{d}x}.$$

□

Definition

设函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 为齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots p_n(x)y = 0$$

的解, 它们在区间 $[a, b]$ 上有定义, 若其朗斯基行列式

$$\begin{aligned} W(x) &= W(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)) \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

则称 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $y_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性相关;
否则称它们在 $[a, b]$ 上线性无关.

Remark

由刘维尔公式

$$W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx},$$

可得:

- 对于二阶齐次线性微分方程的两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$, 若存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得其朗斯基行列式 $W(x_0) = 0$, 则对于一切 $x \in [a, b]$, 有 $W(x) = 0$, 于是这两个解在 $[a, b]$ 上线性相关;
- 若存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得其朗斯基行列式 $W(x_0) \neq 0$, 则对于一切 $x \in [a, b]$, 有 $W(x) \neq 0$, 于是这两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上线性无关.

二阶齐次线性微分方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Theorem

设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程的两个解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是二阶齐次线性微分方程的解，其中 C_1, C_2 是任意常数.

Proof.

由于 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程的两个解, 则

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0,$$

并且

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0,$$

将 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 代入二阶齐次线性微分方程的左边, 得

$$\begin{aligned}
& y'' + p(x)y' + q(x)y \\
=& [C_1y_1'' + C_2y_2''] + p(x)[C_1y_1' + C_2y_2'] + q(x)[C_1y_1 + C_2y_2] \\
=& C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\
=& 0.
\end{aligned}$$

这说明 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程的解. □

Theorem

设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是方程的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数.

Theorem

设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

是方程的通解, 其中 C_1, C_2 是任意常数.

Proof.

由微分方程通解的定义, 只需证明 C_1, C_2 是两个独立的任意常数即可.
因为 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的解, 所以

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

又

$$\frac{D(y, y')}{D(C_1, C_2)} = W(x) \neq 0.$$

所以 C_1, C_2 为 y 中两个独立的任意常数,
故 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是方程的通解. $\square$

n 阶齐次线性微分方程通解的结构

定理可以推广到 n 阶齐次线性微分方程通解的结构.

Theorem

设 $y_1(x)$, $y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解, 则此方程的通解为:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是任意常数.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

一般来说，要找到上述二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解是比较困难的，

但如果我们能够设法（例如用观察法）找到一个解，则我们可以用刘维尔公式求出另一个解，从而求得方程的通解.

Example

求微分方程

$$xy'' - y' + (1-x)y = 0$$

的通解.

Example

求微分方程

$$xy'' - y' + (1-x)y = 0$$

的通解.

Proof.

容易验证 $y_1 = \mathrm{e}^x$ 为原方程的一个解. 下面我们用刘维尔公式来求原方程的另一个特解 $y_2 = y_2(x)$. 先把原方程化为标准形式

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1-x}{x}y = 0,$$

由刘维尔公式, 有

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & y_2(x) \\ \mathrm{e}^x & y_2'(x) \end{vmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x},$$

化简后得到

$$y_2' - y_2 = c_1 x \mathrm{e}^{-x},$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$\begin{aligned} y_2 &= e^x \left[c_2 + c_1 \int x e^{-2x} \mathrm{d}x \right] \\ &= e^x \left[c_2 - c_1 \left(\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} \right) \right]. \end{aligned}$$

由于我们只需要求得一个特解, 因此, 不妨取 $c_1 = -4, c_2 = 0$, 从而得到原方程的另一个特解为

$$y_2 = 2xe^{-x} + e^{-x}.$$

故原方程的通解为$y = C_1 e^x + C_2(2xe^{-x} + e^{-x})$,
其中 C_1, C_2 为任意常数. □

Remark

注意到 y_2 的表达式中含有两个独立的任意常数, 因此它实际上是原方程的通解.

二阶非齐次线性微分方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Theorem

设 $y_1^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的一个特解,
又 $y_2^*(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的解,
则 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是非齐次线性微分方程的解.

二阶非齐次线性微分方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Theorem

设 $y_1^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的一个特解,
又 $y_2^*(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的解,
则 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是非齐次线性微分方程的解.

Proof.

由假设条件可知 $(y_2^*)'' + p(x)(y_2^*)' + q(x)y_2^* = 0$，
并且 $(y_1^*)'' + p(x)(y_1^*)' + q(x)y_1^* = f(x)$，所以

$$\begin{aligned}
&(y^*)'' + p(x)(y^*)' + q(x)y^* \\
&= [y_1^*(x) + y_2^*(x)]'' + p(x)[y_1^*(x) + y_2^*(x)]' + q(x)[y_1^*(x) + y_2^*(x)] \\
&= [(y_1^*)'' + p(x)(y_1^*)' + q(x)y_1^*] + [(y_2^*)'' + p(x)(y_2^*)' + q(x)y_2^*] \\
&= f(x) + 0 = f(x).
\end{aligned}$$

□

Theorem

设 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的两个特解,
则 $y_1^*(x) - y_2^*(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的解.

Theorem

设 $y_1^*(x)$, $y_2^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的两个特解,
则 $y_1^*(x) - y_2^*(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的解.

Proof.

由假设条件可知

$$(y_1^*)'' + p(x)(y_1^*)' + q(x)y_1^* = f(x),$$

并且

$$(y_2^*)'' + p(x)(y_2^*)' + q(x)y_2^* = f(x),$$

上述两式相减, 得

$$(y_1^* - y_2^*)'' + p(x)(y_1^* - y_2^*)' + q(x)(y_1^* - y_2^*) = 0$$

□

Theorem

设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的一个特解,
又 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的通解, 则

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$$

是非齐次线性微分方程的通解.

Theorem

设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性微分方程的一个特解,
又 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的通解, 则

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$$

是非齐次线性微分方程的通解.

Proof.

先证 $y(x)$ 是方程的解. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
&y''+p(x)y'+q(x)y\\
=&[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]''+p(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]'\\
&+q(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]+(y^*)''+p(x)(y^*)'+q(x)y^*\\
=&0+f(x)=f(x).
\end{aligned}$$

另一方面, 由于式中的两个任意常数是独立的, 故它是方程的通解. □

Theorem

设函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 分别是非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \quad \text{以及} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的解, 则函数 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 是非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的解.

Theorem

设函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 分别是非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \quad \text{以及} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的解，则函数 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 是非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的解.

Proof.

$$\begin{aligned}
& y'' + p(x)y' + q(x)y \\
=& [y_1 + y_2]'' + p(x)[y_1 + y_2]' + q(x)[y_1 + y_2] \\
=& [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + [y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] \\
=& f_1(x) + f_2(x).
\end{aligned}$$

□

n 阶线性微分方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots p_n(x)y = f(x),$$

Theorem

设 $y^*(x)$ 是线性非齐次微分方程的一个特解,
又 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$ 是对应的齐次线性微分方程的通解, 则

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x) + y^*(x)$$

是非齐次线性微分方程的通解.

常数变易法

由定理可知，只要找到二阶非齐次线性微分方程的一个特解以及它所对应的齐次线性微分方程的两个线性无关的解，就能得到非齐次线性微分方的通解.

对于一般的线性微分方程来说，要做到这两点也不是一件容易的事情.

但是，如果我们能知道齐次线性微分方程的两个线性无关的解，
那么，在某些情况下，我们可以通过所谓的“常数变易法”求得非齐次线性微分方程的一个特解，进而求出其通解.

假设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解,
则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是方程的通解.

下面我们来寻求二阶非齐次线性微分方程的形如

$$y^* = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

的特解

为了找到函数 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$, 对上式两边求导, 得

$$(y^*)' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x),$$

我们的目的并不是要求出所有满足条件的 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$, 我们只需找到某两个 $C_1(x), C_2(x)$, 使得 y^* 为方程的解即可. 为此, 我们令

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0.$$

加上这个条件的好处是可以避免在 $(y^*)''$ 的表达式中出现 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$ 的二阶导数.

这样一来, 我们就有

$$(y^*)' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

对上式两边再求一次导数, 得

$$(y^*)'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x),$$

将 y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$代入方程并利用

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \quad \text{以及} \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

化简, 得到

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

联立, 我们得到以 $C_1'(x), C_2'(x)$ 为未知函数的方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

上面方程组的系数矩阵行列式恰好是关于 $y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)$. 由于 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程的线性无关的解, 所以 $W(x) \neq 0$.

这意味着由这个方程组能唯一的解出未知函数 $C_1'(x)$ 与 $C_2'(x)$.
积分后, 便可以求出 $C_1(x), C_2(x)$. 于是我们就找到了方程的一个形如 $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ 的特解.

综上所述, 我们有

Theorem

若函数 $C_1(x), C_2(x)$ 满足方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

其中 $y_1(x), y_2(x)$ 为二阶齐次线性微分方程的两个线性无关的解, 则非齐次线性微分方程有特解

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

上述结论也可以推广到 n 阶线性微分方程的情形

Theorem

若函数 $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ 满足方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \qquad \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{cases}$$

其中 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为 n 阶齐次线性微分方程的 n 个线性无关的解, 则 n 阶非齐次线性微分方程有特解

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x).$$

Example

求方程

$$xy'' - y' + (1-x)y = 4x^2\mathrm{e}^x$$

的通解.

Example

求方程

$$xy'' - y' + (1-x)y = 4x^2\mathrm{e}^x$$

的通解.

Proof.

我们已经求得方程 $xy'' - y' + (1-x)y = 0$ 的通解

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2(2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}),$$

下面我们用常数变易法来求得方程 $xy'' - y' + (1-x)y = 4x^2\mathrm{e}^x$ 的通解. 先将原方程化为标准形式:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1-x}{x}y = 4x\mathrm{e}^x,$$

由方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)(2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}) = 0, \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)(\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x}) = 4x\mathrm{e}^x, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1'(x) = 2x + 1, \\ C_2'(x) = -\mathrm{e}^{2x}, \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} C_1(x) = x^2 + x + K_1, \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + K_2, \end{cases}$$

因此原方程的通解为

$$y = (x^2 + x + C_1)\mathrm{e}^x + (-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C_2)(2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}).$$

□

常数变易法的思想还可以用于求解一阶线性微分方程的通解.

Example

用常数变易法求一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的通解.

常数变易法的思想还可以用于求解一阶线性微分方程的通解.

Example

用常数变易法求一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的通解.

Proof.

我们首先来求原方程所对应的齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的通解.
这是一个可分离变量的方程, 容易求得其通解为:

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x},$$

把上式中的 C 换成未知函数 $C(x)$, 得

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x},$$

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x} - C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x},$$

代入原方程, 得

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x} - C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x} + P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x} = Q(x),$$

即

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x} = Q(x),$$

亦即

$$C'(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathsf{d}x},$$

两边积分, 得

$$C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathsf{d}x}\mathsf{d}x + C,$$

所以原方程的通解为:

$$y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathsf{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathsf{d}x}\mathsf{d}x + C\right).$$

□

二阶线性常系数微分方程

我们已经介绍了二阶线性微分方程的解的结构.

对于一般的线性微分方程, 我们还是很难把其通解求出来.

但是, 如果所给的方程是二阶线性常系数微分方程,
则我们就比较容易求出其通解.

齐次线性常系数微分方程

我们首先来讨论方程

$$y'' + py' + qy = 0,$$

其中 p, q 为给定的实数.

我们首先来讨论方程

$$y'' + py' + qy = 0,$$

其中 p, q 为给定的实数.

我们只需找到方程的两个线性无关的解.
我们先来寻求方程的形如 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 的解.
把 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 代入方程得,

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + q\mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

注意到 $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, 上式等价于

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

因此我们有

Theorem

$y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ 为方程

$$y'' + py' + qy = 0,$$

的解的充分必要条件是 λ 满足方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

我们把关于 λ 的方程称为微分方程的特征方程.
这是一个二次代数方程, 有两个根,
其每个根 λ 都对应微分方程的一个特解 $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$.

下面我们针对方程的根的情况来分别讨论微分方程的通解.

$$y'' + py' + qy = 0,$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Theorem

若特征方程有两个不等的实根 λ_1, λ_2, 则方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

Proof.

由定理可知, $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 为方程的两个特解. 又因为

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

所以 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 是方程的两个线性无关的解. 方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

$\square$

Theorem

若特征方程有两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2$, 则方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x \mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

Theorem

若特征方程有两个相等的实根 $\lambda_1 = \lambda_2$, 则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

Proof.

此时方程有一个特解 $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, 还需求出另一个特解 y_2.
我们寻求方程的形如 $y_2 = u(x)e^{\lambda_1 x}$ 的特解, 其中 $u(x)$ 为待定函数. 将

$$y_2' = e^{\lambda_1 x}(u' + \lambda_1 u),$$

$$y_2'' = e^{\lambda_1 x}(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u)$$

代入微分方程, 得

$$e^{\lambda_1 x}[u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u) + p(u' + \lambda_1 u) + qu] = 0,$$

即

$$u'' + (2\lambda_1 + p)u' + (\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)u = 0.$$

由于特征方程有两个相等的实根, 所以 $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$, 并且 $2\lambda_1 + p = 0$, 于是我们得到

$$u'' = 0.$$

取 $u(x) = x$, 则 $y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ 是方程的解.

又因为

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & x\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_1 x}(1 + \lambda_1 x) \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2\lambda_1 x} \neq 0,$$

所以 $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ 为方程的两个线性无关的解.
因此方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

□

Theorem

若特征方程有一对复根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, 其中 $\beta \neq 0$, 则方程的通解为 $y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Theorem

若特征方程有一对复根 $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$, 其中 $\beta\neq 0$, 则方程的通解为 $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

Proof.

$y_1=\mathrm{e}^{\lambda_1 x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$, $\quad y_2=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$
是方程的两个复值函数解. 令

$$y_1^*=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2^*=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

则 y_1^*, y_2^* 是方程的两个解. 由于

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1^* & y_2^* \\ (y_1^*)' & (y_2^*)' \end{vmatrix}=\beta\mathrm{e}^{2\alpha x}\neq 0,$$

所以 y_1^*, y_2^* 为方程的两个线性无关的解. 方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

□

n 阶常系数齐次线性微分方程

对于 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_ny=0,$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是实数, 也可以用类似的方法求出其通解.
首先求出特征方程

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_n=0$$

的 n 个特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(允许有重根). 然后根据下表, 可写出每个特征根所对应的线性无关的特解.

特征根	对应的线性无关的特解
单实根 λ	$\mathrm{e}^{\lambda x}$
k 重实根 $\lambda(k>1)$	$\mathrm{e}^{\lambda x},\ x\mathrm{e}^{\lambda x},\cdots,\ x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$
单共轭复根 $\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm i\beta$	$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$
m 重共轭复根 λ_1,λ_2 $=\alpha\pm i\beta\ (m>1)$	$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$ $x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$ $\cdots,\ \cdots$ $x^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$

Example

求微分方程 $y'' - 3y' - 4y = 0$ 的通解.

Example

求微分方程 $y'' - 3y' - 4y = 0$ 的通解.

Proof.

原方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

其特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$, 因此原方程的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}.$$

□

Example

求微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 满足 $y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 1$ 的解.

Example

求微分方程 $y''+2y'+y=0$ 满足 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=1$ 的解.

Proof.

所给微分方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+1=0,$$

它有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, 因此原方程的通解为

$$y=(C_1+xC_2)\mathrm{e}^{-x},$$

将条件 $y|_{x=0}=2$ 代入通解, 得 $C_1=2$, 从而

$$y=(2+C_2x)\mathrm{e}^{-x},$$

于是

$$y'=(C_2-2-C_2x)\mathrm{e}^{-x},$$

将条件 $y'|_{x=0}=1$ 代入上式, 得$C_2=3$.
所以原方程满足条件的解为 $y=(2+3x)\mathrm{e}^{-x}$. □

Example

求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

Example

求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

Proof.

原方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

它有一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. 因此所求通解为

$$y = \mathrm{e}^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

□

Example

求微分方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ 的通解.

Example

求微分方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$ 的通解.

Proof.

原方程的特征方程为

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0,$$

即

$$(\lambda^2+1)^2=0,$$

因此 $\lambda=\pm i$ 为特征方程的二重根. 故原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

□

Example

求微分方程 $y^{(3)} - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解.

Example

求微分方程 $y^{(3)} - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解.

Proof.

$C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ $\square$

现在我们来讨论二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的求解问题.

根据前面几节的结果, 这个问题可视为已经解决了,
因为我们可以先求出方程所对应的齐次方程的通解. 然后用常数变易法求得方程的一个特解, 就求出了方程的通解.

但是, 用常数变易法求特解往往比较繁琐, 而且必须经过积分运算.

下面我们来介绍当 $f(x)$ 为某些比较特殊的函数时求特解所采用的另一种方法, 即所谓的待定系数法.

Theorem
设 $f(x)=(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)\mathrm{e}^{\mu x}:=P_m(x)\mathrm{e}^{\mu x}$，其中 μ 以及 a_i $(i=0,1,\cdots,m)$ 为复常数，则方程有形如

$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\mu x}=x^k(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_m)\mathrm{e}^{\mu x}$$

的特解，其中 k 为 μ 是特征方程 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根 $\lambda=\mu$ 的重数（当 $\lambda=\mu$ 不是特征根时, 规定 $k=0$），而 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 为待定常数.

Proof.

将特解 $y^* = Q(x)\mathrm{e}^{\mu x}\left[= x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\mu x} = x^k(A_0 x^m + \cdots + A_m)\mathrm{e}^{\mu x}\right]$
代入原方程，约去 $e^{\mu x}$ 得

$$\begin{aligned} &(Q'' + 2\mu Q' + \mu^2 Q) + p(Q' + \mu Q) + qQ = P_m, \\ \text{即}\quad & Q'' + (2\mu + p)Q' + (\mu^2 + p\mu + q)Q = P_m. \end{aligned}$$

由上式左右两个多项式相等，次数相同得

$$\begin{cases} k = 0, & \mu\ \text{不是特征根}, \\ k = 1, & \mu\ \text{单重特征根}, \\ k = 2, & \mu\ \text{二重特征根}. \end{cases}$$

□

Example

求方程

$$y'' - 2y' - 3y = (8x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

的通解.

Example

求方程

$$y'' - 2y' - 3y = (8x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

的通解.

Proof.

原方程的特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ 有两个不同的实根 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. 因此原方程所对应的齐次方程的通解为: $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x}$.
下面我们来求原方程的形如$y^* = x(ax + b)\mathrm{e}^{-x}$ 的特解. 把 y^* 代入原方程, 化简得

$$[-8ax + (2a - 4b)]\mathrm{e}^{-x} = (8x + 2)\mathrm{e}^{-x},$$

比较两边对应项的系数, 得

$$\begin{cases} -8a = 8 \\ 2a - 4b = 2 \end{cases}$$

由此解得 $a = -1, b = -1$.
于是原方程的通解为: $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} - x(x + 1)\mathrm{e}^{-x}$. □

更一般地, 我们有如下的结果:

Theorem

设 $f(x) = [A_s(x)\cos\beta x + B_t(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$，
其中 α, $\beta \neq 0$ 为实常数，而 $A_s(x), B_t(x)$ 分别为 x 的 s, t 次实多项式.
令 $m = \max\{s, t\}$, 则方程有形如

$$y^* = x^k[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$$

的特解，这里 k 是 $\alpha + i\beta$ 为特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的根的重数,
$P_m(x)$, $Q_m(x)$ 为关于 x 的 m 次实多项式.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \big[A_s(x)\cos\beta x + B_t(x)\sin\beta x\big]\mathrm{e}^{\alpha x} \\
&= \Big[A_s\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2} + B_t\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\Big]\mathrm{e}^{\alpha x} \\
&= \Big(\frac{A_s}{2}+\frac{B_t}{2i}\Big)e^{(\alpha+i\beta)x} + \Big(\frac{A_s}{2}-\frac{B_t}{2i}\Big)e^{(\alpha-i\beta)x} \\
&= \frac{1}{2}(A_s - iB_t)e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}(A_s + iB_t)e^{(\alpha-i\beta)x} \\
&= \frac{1}{2}(A_s - iB_t)e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2}\overline{(A_s - iB_t)e^{(\alpha+i\beta)x}}.
\end{aligned}
$$

利用前面一个定理，我们有

$$
y'' + py' + qy = \frac{1}{2}(A_s - iB_t)e^{(\alpha+i\beta)x}
$$

的一个特解为

$$
y_1^* = x^k R_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x} \quad \Longrightarrow \quad y_2^* = x^k\overline{R_m(x)}e^{(\alpha-i\beta)x},
$$

$$
y^* = y_1^* + y_2^* = x^k\big[R_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{R_m(x)}e^{(\alpha-i\beta)x}\big] = \cdots .
$$

Example

求方程 $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ 的通解.

Example

求方程 $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ 的通解.

Proof.

原方程对应的特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 有特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, 因此对应的齐次方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

下面来求原方程的一个特解. 因为 $\pm 2i$ 不是特征根, 原方程有形如 $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ 的特解, 将它代入原方程并化简, 得

$$8B\cos 2x - 8A\sin 2x = \cos 2x,$$

比较两边同类项系数, 得 $A = 0, B = \dfrac{1}{8}$. 于是 $y = \dfrac{1}{8}\sin 2x$, 故原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{8}\sin 2x.$$

□

欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的 n 阶线性微分方程, 称为 n 阶欧拉方程, 其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数, $f(x)$ 为连续函数.

我们主要讨论二阶欧拉方程:

$$x^2y'' + p_1xy' + p_2y = f(x).$$

我们主要讨论二阶欧拉方程:

$$x^2y'' + p_1xy' + p_2y = f(x).$$

我们可以通过适当的变量替换把上述方程化为常系数线性微分方程,
事实上, 我们令 $x = \mathrm{e}^t$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y + \frac{1}{x^2}\frac{d^2}{\mathrm{d}t^2}y = \frac{1}{x^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\right]y,$$

代入方程, 得

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\right]y + p_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y + p_2y = f(\mathrm{e}^t),$$

这是一个二阶常系数线性微分方程, 可以用前面提到的方法求解.
注: 当 $x < 0$ 时, 可令 $t = \ln|x|$, 其结论同上面一样, 在此不再赘述.

Example

求解微分方程: $x^3y'' - x^2y' + xy = x^2 + 1.$

Example

求解微分方程: $x^3y'' - x^2y' + xy = x^2 + 1$.

Proof.

原方程化为

$$x^2y'' - xy' + y = x + \frac{1}{x},$$

这是一个二阶欧拉方程, 令 $x = \mathrm{e}^t$, 原方程化为

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 1\right)\right] y - \frac{d}{\mathrm{d}t}y + y = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}.$$

上述方程所对应的特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ 有重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

下面来求这个方程的特解. 我们首先来求

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^t$$

的一个特解. 由于 $\lambda=1$ 是二重特征根, 上述方程有形如 $y_1=at^2\mathrm{e}^t$ 的特解, 代入后比较两边同类项系数, 可得 $a=\dfrac{1}{2}$.

其次, 我们再来求

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^{-t}$$

的特解. 由于 $\lambda=-1$ 不是特征根, 上述方程有特解 $y_2=b\mathrm{e}^{-t}$, 代入后比较两边同类项系数, 可得 $b=\dfrac{1}{4}$. 于是方程的通解为

$$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t},$$

故原方程的通解为:

$$y=(C_1+C_2\ln|x|)x+\frac{1}{2}x\ln^2|x|+\frac{1}{4x}.$$

□