空间曲面与空间曲线

Chun Li (李春)

Department of Mathematics, Nanjing University

March 1, 2021

Outline

1. 空间曲面与空间曲线
   - 空间曲面与空间曲线的方程
   - 柱面
   - 旋转曲面
   - 锥面
   - 空间曲面和空间曲线的参数方程
   - 二次曲面

在上一节中我们研究了平面与直线的方程, 从平面的一般式方程我们知道三元一次方程所表示的就是一个空间中的平面.

本节我们将研究空间中的一般曲面, 主要是研究二次曲面. 同时还要研究空间中的曲线.

Outline

空间曲面

1. 什么是曲面?

在空间直角坐标系下，
如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

1. 曲面 S 上的任一点的坐标都满足 $F(x, y, z) = 0$;
2. 不在 S 上的点的坐标都不满足 $F(x, y, z) = 0$
（或满足 $F(x, y, z) = 0$ 的点 (x, y, z) 都在 S 上）.

则称 $F(x, y, z) = 0$ 是**曲面 S 的方程**,
而称曲面 S 是方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图像**.

方程 ~ 几何对象 (一一对应)

例

求以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心, R 为半径的球面方程.

$$|\overrightarrow{M_0M}| = R$$

公共特征: 几乎所有点都满足 性质!

例

求以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心, R 为半径的球面方程.

Proof.

设 $M(x, y, z)$ 是所求球面上的任意一点, 则 $|M_0M| = R$. 即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

□

特别地, 如果球心就是原点, 则球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

例

求以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心, R 为半径的球面方程.

Proof.

设 $M(x, y, z)$ 是所求球面上的任意一点, 则 $|M_0M| = R$. 即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

□

特别地, 如果球心就是原点, 则球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Remark

球面方程的一般形式为:

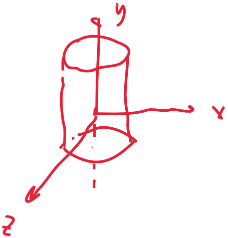
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0. \quad 其中 b_1, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}.$$

对其配方就可把它化为标准形式:

$$(x + b_1)^2 + (y + b_2)^2 + (z + b_3)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - c.$$

例

求以 y 轴为对称轴, 半径为 r 的圆柱面方程.



公共特征：

所有点到y轴的

距离 = r

例

求以 y 轴为对称轴, 半径为 r 的圆柱面方程.

Proof.

设 $M(x, y, z)$ 是所求圆柱面上的任意一点, 则它到 y 轴的距离是 r, 即有

$$\sqrt{x^2 + z^2} = r, \qquad \text{或者 } x^2 + z^2 = r^2.$$

反之, 满足 $x^2 + z^2 = r^2$ 的点必在该圆柱面上,
所以这就是所求的圆柱面方程. $\square$

空间曲线

前面我们把直线看作是两个平面的交线.

一般地, 空间曲线 C 也可以看作是两个空间曲面的交线.

从而空间曲线 C 的方程我们可以用两个空间曲面的方程联立起来表示, 即

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

称为**空间曲线 C 的一般式方程**.

方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ z=a\,(\,a<R\,), \end{cases}$$

表示球心在原点, 半径为 R 的球面与平面 $z=a\,(\,a<R\,)$ 的交线,
它是一个在 $z=a$ 平面上的圆.

圆上的任一点的坐标满足 $z=a$ 和 $x^2+y^2=R^2-a^2$,
故也可看作是圆柱面 $x^2+y^2=R^2-a^2$ 与平面 $z=a$ 的交线, 即可写为

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2-a^2, \\ z=a\,(\,a<R\,). \end{cases}$$

特别地, 曲面 $F(x,\,y,\,z)=0$ 与三个坐标平面 (xOy 平面, yOz 平面, zOx 平面) 的交线 (如果有的话) 方程分别为:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ z=0. \end{cases} \quad \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ x=0. \end{cases} \quad \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

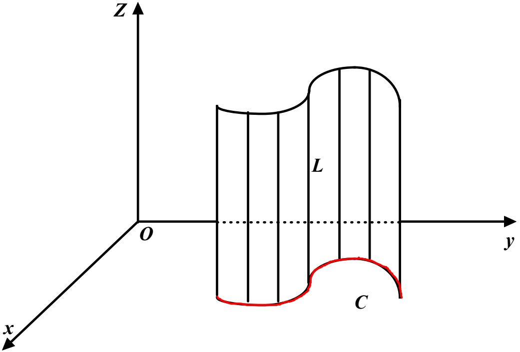
Outline

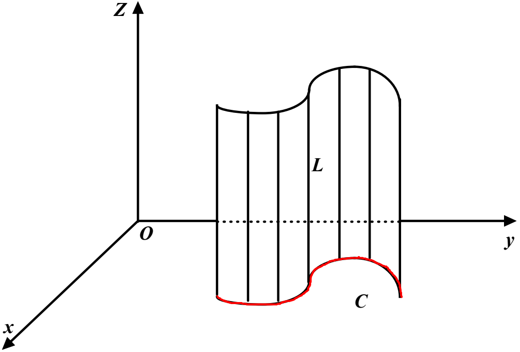
1. 空间曲面与空间曲线
   - 空间曲面与空间曲线的方程
   - 柱面
   - 旋转曲面
   - 锥面
   - 空间曲面和空间曲线的参数方程
   - 二次曲面

柱面

一条动直线 L 保持与一条定直线 l 平行,
沿给定的一条空间曲线 C 平行移动所得的曲面称为**柱面**,
曲线 C 称为柱面的**准线**, 直线 L 称为柱面的**母线**.

如果取准线 C 在 xOy 平面上, 方程为 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$
母线为平行于 z 轴的直线, 则该柱面的方程就是 $f(x,\ y)=0$.





事实上，对柱面上的任意一点 $M(x, y, z)$，过 M 点作直线平行于 z 轴，这条直线就是过点 M 的母线.

母线上的任何点的 x, y 坐标均相同，只有 z 坐标不同，
它与 xOy 平面的交点 $Q(x, y, 0)$ 必在曲线 C 上.

因为 Q 点的坐标满足 $f(x, y) = 0$，也即M点的坐标满足 $f(x, y) = 0$.
反之，满足 $f(x, y) = 0$ 的点 $M(x, y, z)$ 一定在过 $Q(x, y, 0)$ 的母线上，也即在该柱面上.

与“若平面方程中不出现某变量, 则该平面就平行于某轴”的结论一样, 若三元方程中不出现某个变量, 它就表示母线平行于某轴的柱面.

- $g(y, z) = 0$ 是母线平行于 x 轴的柱面.
- $h(z, x) = 0$ 是母线平行于 y 轴的柱面.
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ 表示母线平行于 y 轴的椭圆柱面,
- $y^2 = 4z$ 是母线平行于 x 轴的抛物柱面.
- 平面 $2x + 4z = 7$ 也可以看作母线平行于 y 轴的柱面.

如果我们从空间曲线的方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

中消去 z 后得到的方程为 $h(x,\ y) = 0$. 那么它代表的是什么曲面呢?

首先在 $h(x, y) = 0$ 中不出现 z, 它表示的是母线平行于 z 轴的柱面,

其次 $h(x, y) = 0$ 是由曲线方程消去变量 z 得到的,
因此, 当 $(x,\ y,\ z)$ 满足曲线方程时, $(x,\ y)$ 必满足 $h(x,\ y) = 0$,
这说明曲线 C 上的点都在由 $h(x,\ y) = 0$ 表示的柱面上.

所以, 柱面 $h(x,\ y) = 0$ 可看成是以 C 为准线、母线平行于 z 轴 (即垂直于 xOy 平面) 的柱面, 这个柱面称为曲线 C 到 xOy 平面的**投影柱面**,

而投影柱面与 xOy 平面的交线 $\begin{cases} h(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$
就是空间曲线 C 在 xOy 平面上的**投影曲线**(或称**投影**).

同理, 由

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

消去变量 x 或 y 后, 可得到曲线 C 在 yOz 平面或 zOx 平面上的投影为

$$\begin{cases} h_1(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} h_2(z, x) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

例

求曲线 C:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1. \end{cases}$
在 xOz 平面上的投影柱面及 xOy 平面上的投影.

例

求曲线 C: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1. \end{cases}$
在 xOz 平面上的投影柱面及 xOy 平面上的投影.

Proof.

曲线 C是一个圆.
由 C 的两个球面方程消去 y, 可得曲线 C 对 xOz 平面的投影柱面为: $x+z=1$ $(0\le x\le 1)$, 它是平面的一部分. 这说明曲线 C 在平面 $x+z=1$ 上. 故曲线 C 的方程也可写为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+z=1. \end{cases}$$

在这个方程组中再消去 z, 得曲线 C 在 xOy 平面上的投影方程为椭圆:

$$\begin{cases} 4(x-\frac{1}{2})^2+2y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

□

定理

以曲线 C :

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

为准线, 母线的方向向量为 $\mathbf{s} = (l,\ m,\ n)$ 的柱面方程为:

$$\begin{cases} F(x - lt, y - mt, z - nt) = 0, \\ G(x - lt, y - mt, z - nt) = 0. \end{cases}$$

其中 t 为参数. 此式是柱面方程的参数形式,
消去 t 可得柱面方程的直角坐标形式.

Proof.

在所求柱面上任取一点 $M(x,\ y,\ z)$, 过该点以 $\mathbf{s}$ 为方向向量作直线 L, 它交准线 C 于 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, 则有

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

又直线 L 的参数方程为:

$$x - x_0 = lt,\ y - y_0 = mt,\ z - z_0 = nt.$$

$$\text{即 } x_0 = x - lt,\ y_0 = y - mt,\ z_0 = z - nt.$$

将其代人得证. □

特别地是, 以 xOy 平面上的曲线 $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ 为准线, 母线的方向向量为 $\mathbf{s} = (l,\ m,\ n)$, $n \neq 0$ 的柱面方程为

$$f(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z) = 0.$$

例

设空间曲面 Γ 是以曲线 $C: \begin{cases} (x-2)^2+2y^2=1 \\ z=2 \end{cases}$ 为准线,
母线平行于向量 $s=(1,0,1)$ 的柱面,
求出空间曲面Γ的方程(用直角坐标表示).

Outline

1. 空间曲面与空间曲线
   - 空间曲面与空间曲线的方程
   - 柱面
   - 旋转曲面
   - 锥面
   - 空间曲面和空间曲线的参数方程
   - 二次曲面

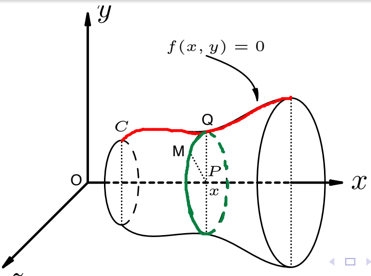
旋转曲面

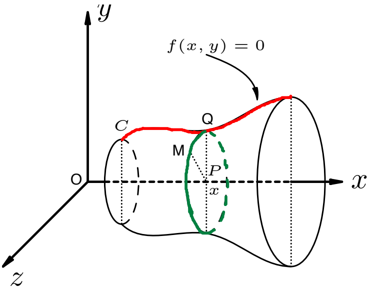
某个平面上的一条连续曲线 C 绕该平面上的一条定直线 L 旋转一周生成的曲面称为**旋转曲面**.
这条定直线 L 称为**旋转轴**, 曲线 C 称为旋转曲面的**生成曲线**.

定理

xOy 平面上的曲线 C : $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0, \end{cases}$
绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面方程为:

$$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0.$$





Proof.

在旋转曲面上任取一点 $M(x, y, z)$, 过 M 点作一个平面垂直于 x 轴, 它与 x 轴交于点 $P(x, 0, 0)$, 与曲线 C 交于点 $Q(x, y_0, 0)$, 显然应有 $|PM| = |PQ|$, 即有 $|y_0| = \sqrt{y^2 + z^2}$, 所以 $y_0 = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$,

将 Q 点的坐标代人 $f(x, y) = 0$ 中就得所求的旋转曲面的方程为:

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

□

同理可得该曲线 C 绕 y 轴旋转一周生成的旋转曲面的方程为:

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0.$$

例如, 将 xOy 平面上的抛物线: $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ z = 0. \end{cases}$
绕 x 轴旋转一周得**旋转抛物面**, 其方程为

$$y^2 + z^2 = 2x.$$

将椭圆: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得**旋转椭球面**:

$$\frac{x^2+z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

同理, 将 yOz 平面上的双曲线:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

分别绕 z 轴和 y 轴旋转一周所得的旋转曲面分别为**旋转单叶双曲面、旋转双叶双曲面**.

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{和} \ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

例

求直线 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面$\pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

例

求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面$\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

Proof.

设以直线 L 为准线, 平面 π 的法向量 $(1,-1,2)$ 为母线的柱面上的一点为 (x,y,z), 则 $(x-t,y+t,z-2t)$ 在直线 L 上，即

$$\frac{(x-t)-1}{1}=\frac{(y+t)}{1}=\frac{(z-2t)-1}{-1},$$

则柱面的方程为 $x-3y-2z+1=0$.

直线 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-1/2}{-1}$$

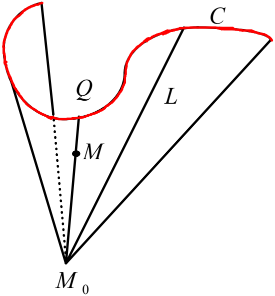
所求曲面方程为 $x^2+z^2=(2y)^2+(-y/2+1/2)^2$.

Outline

锥面

已知一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和一条与其不共线的空间曲线 C,
由点 M_0 与曲线 C上 所有点的连线 L 所生成的曲面称为**锥面**.

点 M_0 称为锥面的**顶点**, 曲线 C 称为锥面的**准线**,
锥面上过顶点的任一条直线 L 称为锥面的**母线**



定理

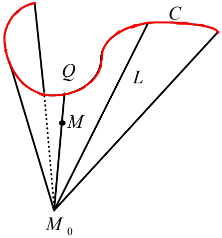
以 M_0 为顶点, 曲线 C

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$$

为准线的锥面方程为:

$$\begin{cases} F\big(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)\big)=0, \\ G\big(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)\big)=0, \end{cases}$$

其中 t 为参数, 此式称为**锥面的参数式方程**.
从中消去参数 t 就得锥面的直角坐标式方程.



Proof.

锥面上任一点 $M(x, y, z)$, 直线 M_0M 与 C 必交于一点 $Q(x_1, y_1, z_1)$, 则 $\overrightarrow{M_0Q} // \overrightarrow{M_0M}$, 因此有

$$\frac{x_1 - x_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{y - y_0} = \frac{z_1 - z_0}{z - z_0} = t, \quad \text{其中 } t \text{ 为参数}$$

即 $x_1 = x_0 + t(x - x_0),\ y_1 = y_0 + t(y - y_0),\ z_1 = z_0 + t(z - z_0)$.
将 Q 点的坐标 (x_1, y_1, z_1) 代入曲线 C 的方程, 得锥面的参数式方程为

$$\begin{cases} F\big(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)\big) = 0, \\ G\big(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)\big) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\big(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)\big)=0, \\ G\big(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0), z_0+t(z-z_0)\big)=0. \end{cases}$$

特别地, 当顶点 M_0 为坐标原点时, 锥面的直角坐标式方程将从

$$\begin{cases} F(tx, ty, tz)=0, \\ G(tx, ty, tz)=0, \end{cases}$$

中消去 t 得到.

而直线 $\begin{cases} y=z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=z \text{ 即 } x^2+y^2=z^2.$$

这是以 z 轴为对称轴, 顶点在原点, 半顶角为 $\frac{\pi}{4}$ 的**圆锥面**方程.

例

试求直线 $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y-\beta}{0} = \dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面的方程,并按 α, β 取值的情况确定该方程表示什么曲面.

例

试求直线 $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y-\beta}{0}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面的方程,
并按 $\alpha,\ \beta$ 取值的情况确定该方程表示什么曲面.

Proof.

所给直线 L 的方程可表为 $\begin{cases} x=\alpha z, \\ y=\beta \end{cases}$, 在所求曲面上任取点 $M(x,\ y,\ z)$, 若点 M 是由直线 L 上的点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z)$ 旋转得到的, 则 $M,\ M_0$ 到 z 轴的距离相等, 所以

$$x^2+y^2={x_0}^2+{y_0}^2.$$

由于 $x_0=\alpha z,\ y_0=\beta$, 于是所求旋转曲面的方程为 $x^2+y^2-\alpha^2 z^2=\beta^2$.

1. 当 $\alpha=0,\ \beta\neq 0$ 时, 此方程表示圆柱面;
2. 当 $\alpha\neq 0,\ \beta=0$ 时, 此方程表示圆锥面;
3. 当 $\alpha\beta\neq 0$ 时, 此方程表示旋转单叶双曲面.

□

例

求顶点在原点, 准线 C 是平面 $x+y+z=3$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 的交线的锥面方程.

例

求顶点在原点, 准线 C 是平面 $x+y+z=3$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 的交线的锥面方程.

Proof.

把准线 C 中的 (x, y, z) 换为 (tx, ty, tz) 得

$$\begin{cases} (tx)^2+(ty)^2=3tz, \\ tx+ty+tz=3. \end{cases} \text{即} \begin{cases} t(x^2+y^2)=3z, \\ t(x+y+z)=3. \end{cases}$$

消去 t 即得所求锥面方程为

$$x^2+y^2-z^2-xz-yz=0.$$

$\square$

Outline

空间曲线的参数方程

类似于直线的参数式方程式,
以及平面曲线的参数方程: $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 表示一样,

一条空间曲线也可用**参数式方程**

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b), \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

表示, 这里 t 是参数.

当 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ 在 $[a, b]$ 上皆连续时, 称此曲线为连续曲线.

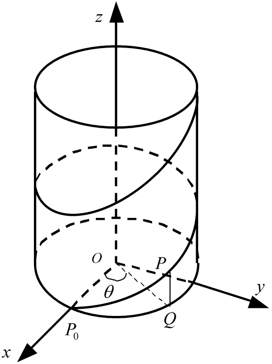
例

参数方程:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = ct, \quad \text{其中} a,\ b,\ c > 0$$

表示一条空间曲线.

$t = 0$ 对应于点 $P_0(a, 0, 0)$,
当 t 从 0 增大时, 对应的点沿着椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 z 轴右旋式上升. 此曲线称为**螺旋线**. 螺距为 $2\pi c$.



空间曲面的参数方程

如果曲面 S 上点的坐标表示为两个参数 $(u,\ v)$ 的函数,

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D_{uv}. \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 D_{uv} 表示 uv 平面上的区域. 则方程组称为**曲面 S 的参数方程**.

若消去参数 u, v, 就可得曲面 S 的隐式方程 $F(x,y,z)=0$.

例如, 参数方程

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\sin\theta, \\ y = b\sin\varphi\cos\theta, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ z = c\cos\varphi, \end{cases}$$

表示的是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Outline

二次曲面

我们把三元二次方程

$$
\begin{aligned}
a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx \\
+ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.
\end{aligned}
$$

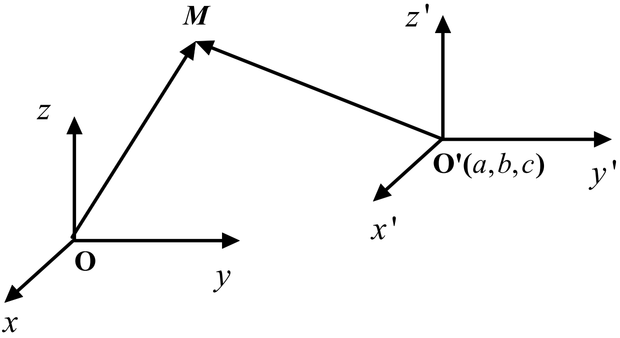
表示的曲面称为**二次曲面**.
其中 a_{11}，a_{22}，a_{33}，a_{12}，a_{23}，a_{31}，b_1，b_2，b_3，$c \in \mathbb{R}$.

我们可以利用空间直角坐标系的变换把一般的二次曲面的方程化为标准形式.

通过平移变换消去一次项, 通过旋转变换消去混合项.

平移变换

将空间直角坐标系 $O-xyz$ 的坐标原点 O 移至点 O' 处,
坐标轴的方向和单位长度保持不变,
从而得到一个新的直角坐标系 $O'-x'y'z'$.
这就是坐标系的平移.



设点 O' 在坐标系 $O-xyz$ 中的坐标为 (a, b, c).

对于空间中的任一点 M,
设点 M 在坐标系 $O-xyz$ 中的坐标为 (x, y, z),
在坐标系 $O'-x'y'z'$ 中的坐标为 (x', y', z'). 则有

$$\overrightarrow{OO'} = (a, b, c), \overrightarrow{OM} = (x, y, z), \overrightarrow{O'M} = (x', y', z').$$

因为, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, 所以有

$$(x, y, z) = (a + x', b + y', c + z'),$$

由此即得**平移变换公式**为

$$x = x' + a, \ y = y' + b, \ z = z' + c.$$

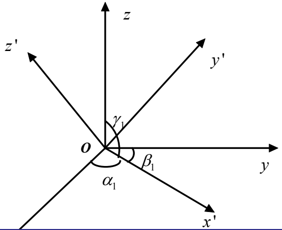
旋转变换

坐标原点 O 保持不动,
将空间直角坐标系 $O-xyz$ 转动到新的空间直角坐标系 $O-x'y'z'$.

对空间中的任一点 M,
设点 M 在坐标系 $O-xyz$ 中的坐标为 (x, y, z),
在坐标系 $O-x'y'z'$ 中的坐标为 (x', y', z').

又已知新旧坐标轴的夹角为

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3



设坐标系 $O-xyz$ 的基向量为 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$,
坐标系 $O-x'y'z'$ 的基向量为 $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, 则有

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}' &= \cos\alpha_1\mathbf{i} + \cos\beta_1\mathbf{j} + \cos\gamma_1\mathbf{k}, \\
\mathbf{j}' &= \cos\alpha_2\mathbf{i} + \cos\beta_2\mathbf{j} + \cos\gamma_2\mathbf{k}, \\
\mathbf{k}' &= \cos\alpha_3\mathbf{i} + \cos\beta_3\mathbf{j} + \cos\gamma_3\mathbf{k},
\end{aligned}$$

向量 $\overrightarrow{OM}$ 在坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分解式为 $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,
在坐标系 $O-x'y'z'$ 中的坐标分解式为 $\overrightarrow{OM} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$,
所以

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{OM} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}',$$

将$\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$的坐标表示式代入并整理得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

或写为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

此两式便是**坐标旋转变换公式**.

最简单的旋转变换是绕某坐标轴(譬如 z 轴)旋转,
则坐标旋转变换公式变化为(旋转角为 θ)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

它的作用将消去方程中含 xy 的项.

例如, 对方程 $z = 2xy$ 可作绕 z 轴旋转 $\frac{\pi}{4}$ 的变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \\ z = z'. \end{cases}$$

将它变为没有含 $x'y'$ 的项, 得方程 $z' = x'^2 - y'^2$.

对二次曲面方程, 当三个混合项 xy, yz, zx 只出现一项时, 用上述方法就可以使其消失;

当混合项出现两项或三项时, 作旋转变换可以使混合项消失,
但情况比较复杂, 我们将在后续课程《线性代数》里加以讨论.

实二次曲面的方程

假设我们选择了合适的旋转变换, 把二次曲面的方程变化为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

其中 a_{11}, a_{22}, a_{33}, b_1, b_2, $b_3, c \in \mathbb{R}$.

若 a_{11}, a_{22}, a_{33} 都不等于零, 则经过平移变换 (即配方法) 消去一次项得

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D.$$

其中 A, B, C, $D \in \mathbb{R}$.

二次锥面

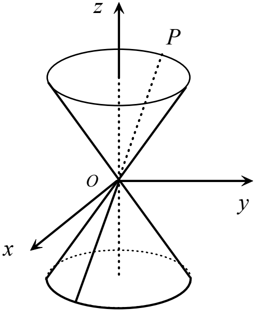
当 $D = 0$, 且 A, B, C 不同号,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D.$$

是二次齐次方程, 其曲面为**二次锥面**. 标准方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

其中a, b, $c \in \mathbb{R}$.

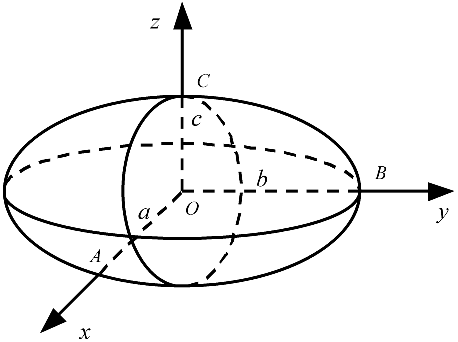


椭球面

当 $D \neq 0$, 且 A, B, C 与 D 同号, 其曲面为**椭球面**.
标准方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

其中 a, b, $c \in \mathbb{R}$.
当 $a = b = c$ 时, 该曲面为半径为 a 的球面.

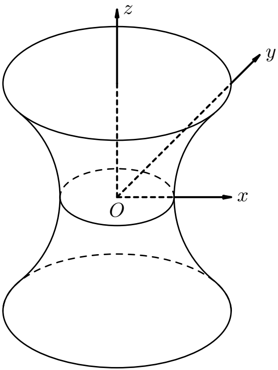


单叶双曲面

当 $D \neq 0$, 且 A, B, C 的符号一个与 D不 同, 两个与 D 相同, 其曲面为**单叶双曲面**. 标准方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

其中 a, b, $c \in \mathbb{R}$.

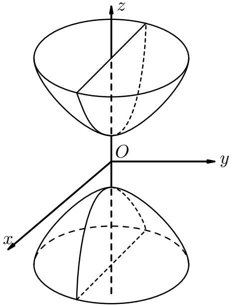


双叶双曲面

当 $D \neq 0$, 且 A, B, C 的符号两个与 D 不同, 一个与 D 相同, 其曲面为**双叶双曲面**. 标准方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

其中 a, b, $c \in \mathbb{R}$.



若 a_{11}，a_{22}，a_{33}中两个不等于零, 一个等于零, 不妨设 $a_{33}=0$,
则经平移变换

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0.$$

变为

$$Ax^2+By^2=2pz+q.$$

其中 A, B, p, $q\in\mathbb{R}$.

$$Ax^2 + By^2 = 2pz + q.$$

当 $p = 0$ 时, 式中不出现 z,

若 $q \neq 0$, 则曲面是母线平行于 z 轴的柱面.
若 A, B 与 q 同号则曲面是椭圆柱面; 若 A 与 B 异号, 曲面是双曲柱面, 方程分别为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{和} \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (\text{或} \ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1).$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

若 $q = 0$ 且 A 与 B 异号时, 曲面退化成两张平面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \ \text{即} \ (\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 0.$$

若 $q = 0$ 且 A, B 同号时, 退化为一条直线 (即 z 轴).

椭圆抛物面

当 $p \neq 0$ 时, 曲面

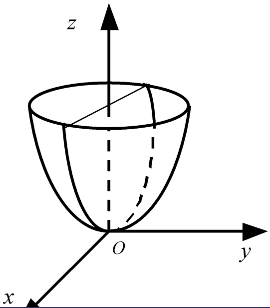
$$Ax^2 + By^2 = 2p(z + \frac{q}{2p})$$

称为抛物面.

若 A 与 B 同号, 则称为**椭圆抛物面**, 标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

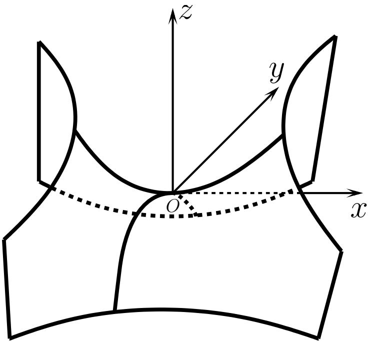


双曲抛物面

若 A 与 B 异号, 则称为**双曲抛物面**, 又称为**马鞍面**, 标准方程为

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z.$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.



若 a_{11}，a_{22}，a_{33} 中两个等于零，不妨设 $a_{11}=a_{22}=0$，则

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0.$$

变为

$$cz^2=px+qy+r.$$

其中 $c, p, q, r\in\mathbb{R}$.

曲面是母线平行于 xOy 平面的抛物柱面或平行于 z 轴的平面.

二次曲面的方程

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0. \end{aligned}$$

经过平移和旋转变换后仍是二次曲面.
而曲面与 xOy 平面 ($z=0$) 的交线是二次曲线

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

其中, $a_{11}, a_{22}, a_{12}, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$.

因此, 任何平面与二次曲面的交线都是该平面上的一条二次曲线.

任何平面与二次曲面的交线都是该平面上的一条二次曲线.

Remark

因为任何平面都可经过坐标变换变为平面 $z' = 0$.
而平面上的直线与二次曲线至多交于两点,
因此, 任何直线如果不全部落在二次曲面上, 它与二次曲面的交点至多只有两个.

特别地, 二次曲面

$$x^2 + y^2 = \lambda z^2$$

是以 z 轴为旋转轴的圆锥面,
它与任何平面的交线均是二次曲线.
如果截平面不过顶点, 交线是椭圆、双曲线或抛物线;
如果截平面过顶点, 交线是两条直线.

故常称二次曲线为**圆锥曲线**.

平面截痕法

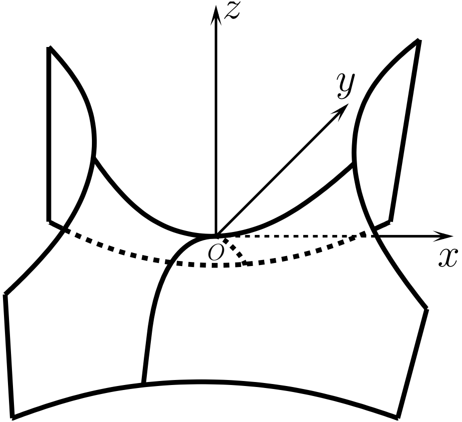
二次曲面的图形,
我们可用坐标平面以及与坐标平面平行的平面去截曲面,
根据截口的形状及其变化可大致描绘出曲面的形状.
这种方法称为“平面截痕法”.

我们以双曲抛物面

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 2z.$$

为例应用平面截痕法来描绘草图.

显然, 它有两个对称平面 $x = 0$ 和 $y = 0$, z 轴是它的对称轴, 曲面无界.



令 $x = c$ 代入方程, 这相当于用平面 $x = c$ 去截该曲面,
截痕是平面 $x = c$ 上开口向上的抛物线

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{c^2}{a^2}, \\ x = c. \end{cases}$$

令 $y = c$ 代入方程, 这相当于用平面 $y = c$ 去截该曲面,
截痕是平面 $y = c$ 上开口向下的抛物线

$$\begin{cases} 2z = \dfrac{c^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}, \\ y = c. \end{cases}$$

令 $z = c$, $c \neq 0$代 入方程, 这相当于用平面 $z = c$ 去截该曲面,
截痕是平面 $z = c$ 上的双曲线

$$\begin{cases} 2c = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}, \\ z = c. \end{cases}$$

当 $c > 0$ 时, y 轴是实轴; $c < 0$ 时, x 轴是实轴.
当 $c = 0$ 时, 截痕是两条相交于原点的直线.