第 5 章 多元函数微积分

Outline

Outline

偏导数的定义

Definition (偏导数)

$P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 的 δ 邻域 $N_\delta(P_0)$ 内有定义，
在 $N_\delta(P_0)$ 中固定$y=y_0$，得到一元函数 $f(x,y_0)$，
若 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$，或

$$f'_1(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地，在 $N_\delta(P_0)$ 中固定 $x = x_0$，得到一元函数 $f(x_0, y)$，
若 $f(x_0, y)$ 在 y_0 处可导，即

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数，记为 $f'_y(x_0, y_0)$，或

$$f'_2(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 及对 y 的两个偏导数都存在，则称 f 在点 (x_0,y_0) 处可偏导.

若二元函数 $f(x,y)$ 在开区域 G 中每一点皆可偏导，则称 f 在 G 上可偏导.

设 $(x,y)\in G$

- 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 的偏导数记为 $f'_x(x,y)$，或

$$f'_x,\quad f'_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$

若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 及对 y 的两个偏导数都存在，则称 f 在点 (x_0,y_0) 处可偏导.

若二元函数 $f(x,y)$ 在开区域 G 中每一点皆可偏导，则称 f 在 G 上可偏导.

设 $(x,y)\in G$

- 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 的偏导数记为 $f'_x(x,y)$，或
$$f'_x,\quad f'_1,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}.$$
- $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 y 的偏导数记为 $f'_y(x,y)$，或
$$f'_y,\quad f'_2,\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Remark

- 关于二元函数偏导数的定义可以推广到 n $(n > 2)$ 元函数的偏导数.

Remark

- 关于二元函数偏导数的定义可以推广到 n $(n > 2)$ 元函数的偏导数.
- 求多元函数的偏导数，实际上是把多元函数看作其中某一个变量的一元函数，对该自变量求导数.

Remark

- 关于二元函数偏导数的定义可以推广到 n $(n > 2)$ 元函数的偏导数.
- 求多元函数的偏导数，实际上是把多元函数看作其中某一个变量的一元函数，对该自变量求导数.
- 在求导过程中，始终把其余变量看作常数.

Example

设 $f(x, y) = x^2y + \sin(xy) + 2e^x + y$，求 $f'_x(0, 0)$，$f'_y(0, 0)$.

Example

设 $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)+2e^x+y$，求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$.

Proof.

方法1：

$$f(x,0)=2e^x,\quad {f_x}'(0,0)=(2e^x)'\Big|_{x=0}=2e^x\Big|_{x=0}=2.$$

$$f(0,y)=2+y,\quad {f_y}'(0,0)=(2+y)'\Big|_{y=0}=1.$$

Example

设 $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)+2e^x+y$，求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$.

Proof.

方法1：

$$f(x,0)=2e^x,\quad {f_x}'(0,0)=(2e^x)'\Big|_{x=0}=2e^x\Big|_{x=0}=2.$$
$$f(0,y)=2+y,\quad {f_y}'(0,0)=(2+y)'\Big|_{y=0}=1.$$

方法2：

$$\begin{aligned} f'_x(x,y)&=2xy+y\cos(xy)+2e^x,\\ f'_y(x,y)&=x^2+x\cos(xy)+1, \end{aligned}$$

所以，$f'_x(0,0)=2$，$f'_y(0,0)=1$.

□

Example

设 $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + \ln(2x+y) + y^4$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$.

Example

设 $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + \ln(2x+y) + y^4$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$.

Proof.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2} + \frac{2}{2x+y} = \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2}{2x+y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(\frac{x}{y})^2} + \frac{1}{2x+y} + 4y^3 = -\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2x+y} + 4y^3.$$

□

Example

设 $f(x,y,z)=x^y+y^z+z^x$，其中 $x>0,\ y>0,\ z>0$，
求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$.

Example

设 $f(x,y,z) = x^y + y^z + z^x$，其中 $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$，
求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial z}$.

Proof.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} + z^x \ln z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x + zy^{z-1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^z \ln y + xz^{x-1}.$$

□

偏导数的几何意义

- $f'_x(x_0, y_0)$ 是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数.

偏导数的几何意义

- $f'_x(x_0, y_0)$ 是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数.
- 在几何上，函数 $z = f(x, y)$ 表示一个曲面，记为 S.

偏导数的几何意义

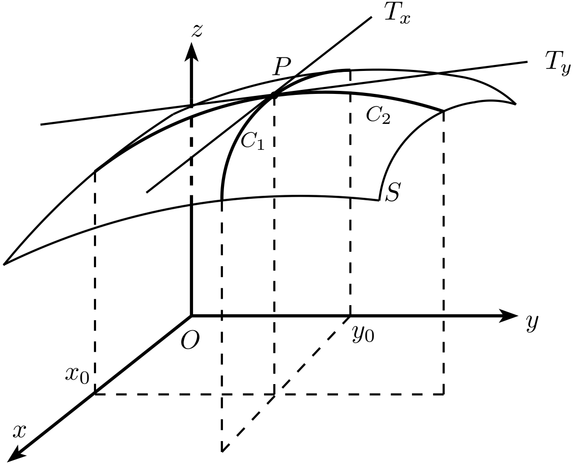
- $f'_x(x_0, y_0)$ 是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数.
- 在几何上，函数 $z = f(x, y)$ 表示一个曲面，记为 S.
- $z = f(x, y_0)$ 是曲面 S 与平面 $y = y_0$ 的交线 C_1.

偏导数的几何意义

- $f'_x(x_0, y_0)$ 是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数.
- 在几何上，函数 $z = f(x, y)$ 表示一个曲面，记为 S.
- $z = f(x, y_0)$ 是曲面 S 与平面 $y = y_0$ 的交线 C_1.
- 运用一元函数导数的几何意义，容易得出偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 表示曲线 C_1 在点 $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率.

偏导数的几何意义

- $f'_x(x_0,y_0)$ 是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数.
- 在几何上，函数 $z=f(x,y)$ 表示一个曲面，记为 S.
- $z=f(x,y_0)$ 是曲面 S 与平面 $y=y_0$ 的交线 C_1.
- 运用一元函数导数的几何意义，容易得出偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲线 C_1 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 T_x 对 x 轴的斜率.
- $f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲线 C_2： $z=f(x_0,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 T_y 对 y 轴的斜率.


T_x
z
P
T_y
C_2
C_1
S
y
O
y_0
x_0
x

可偏导与连续的关系

- 对于一元函数 $y = f(x)$，它在一点 x_0 处可导，则它在该点一定是连续的.

可偏导与连续的关系

- 对于一元函数 $y = f(x)$，它在一点 x_0 处可导，
  则它在该点一定是连续的.
- 对于二元函数 $z = f(x, y)$ 而言，在一点 (x_0, y_0) 处可偏导，
  却不一定在该点连续.

可偏导与连续的关系

- 对于一元函数 $y = f(x)$，它在一点 x_0 处可导，
  则它在该点一定是连续的.
- 对于二元函数 $z = f(x, y)$ 而言，在一点 (x_0, y_0) 处可偏导，
  却不一定在该点连续.

可偏导与连续的关系

- 对于一元函数 $y=f(x)$，它在一点 x_0 处可导，则它在该点一定是连续的.
- 对于二元函数 $z=f(x,y)$ 而言，在一点 (x_0,y_0) 处可偏导，却不一定在该点连续.

Example

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

试求 $f_x'(0,0)$，$f_y'(0,0)$.

可偏导与连续的关系

- 对于一元函数 $y=f(x)$，它在一点 x_0 处可导，
  则它在该点一定是连续的.
- 对于二元函数 $z=f(x,y)$ 而言，在一点 (x_0,y_0) 处可偏导，
  却不一定在该点连续.

Example

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

试求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$.

函数在点 $(0,0)$ 处对 x 和 y 的偏导数都存在且相等，
函数在点 $(0,0)$ 处没有极限，所以在点 $(0,0)$ 处不连续.

Theorem

设函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $N_\delta(P_0)$ 内可偏导，且 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在 $N_\delta(P_0)$ 内有界，则该函数在 P_0 处连续.

Theorem

设函数 $z = f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $N_\delta(P_0)$ 内可偏导，且 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 $N_\delta(P_0)$ 内有界，则该函数在 P_0 处连续.

Proof.

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x,y) - f(x_0,y_0)\\ &= \big(f(x,y) - f(x_0,y)\big) + \big(f(x_0,y) - f(x_0,y_0)\big),\end{aligned}$$

由一元函数的微分中值定理可得

$$\Delta z = f'_x(\xi,y)(x-x_0) + f'_y(x_0,\eta)(y-y_0),$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间，η 介于 y 和 y_0 之间.

已知 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 $N_\delta(P_0)$ 内有界，所以 $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \Delta z = 0$，即 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续. □

高阶偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 仍是二元函数，假设它们可以继续对 x 或 y 求偏导数，从而得到四个新的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}f'_x(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}f'_y(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}f'_y(x,y),$$

称之为二阶偏导数，并分别记为

$$f''_{xx}(x,y),\quad f''_{xy}(x,y),\quad f''_{yx}(x,y),\quad f''_{yy}(x,y),$$

或

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

或

$$f''_{11},\quad f''_{12},\quad f''_{21},\quad f''_{22}.$$

其中 f''_{xy} 与 f''_{yx} 称为二阶混合偏导数.

- 也可将上述二阶偏导数的记法中的 f 写成 z，
  例如 f''_{xx} 可记为 z''_{xx}，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 或 z''_{11}.
- 若二阶偏导数仍是 x, y 的二元函数，
  我们还可以继续对 x 或 y 求偏导数，
  由此可得到三阶以及三阶以上的偏导数.
- 二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数.

Example

求 $z = x^2y^3 + \mathrm{e}^{xy}$ 的二阶偏导数.

Example

求 $z = x^2y^3 + \mathrm{e}^{xy}$ 的二阶偏导数.

Proof.

$$\begin{aligned} z'_x &= 2xy^3 + y\mathrm{e}^{xy}, \\ z''_{xx} &= 2y^3 + y^2\mathrm{e}^{xy} \\ z''_{xy} &= 6xy^2 + (1+xy)\mathrm{e}^{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 3x^2y^2 + x\mathrm{e}^{xy}, \\ z''_{yx} &= 6xy^2 + (1+xy)\mathrm{e}^{xy}, \\ z''_{yy} &= 6x^2y + x^2\mathrm{e}^{xy}. \end{aligned}$$

□

Example

求 $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$

在 $(0,0)$ 点的两个二阶混合偏导数.

Proof.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

$$f'_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=-y,\quad y\neq 0,$$

$$f'_y(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{y}=x,\quad x\neq 0,$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

□

- 有些函数的两个二阶混合偏导数相等，
  即混合偏导数与求导次序无关
- 有些函数的两个二阶混合偏导数不相等

Theorem

若二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x,y) 处皆连续，
则 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$，即混合偏导数与求导的次序无关.

Remark

- 此定理可以推广到三阶以上的混合偏导数的情况，
  在其连续性条件下，与求偏导的次序无关.
- 对于三元以上的多元函数，也有类似的结论.

Proof.
考虑辅助函数

$$F(h,k)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y),$$

其中 $|h|,|k|$ 充分小.

令 $\varphi(X)=f(X,y+k)-f(X,y)$，则

$$F(h,k)=\varphi(x+h)-\varphi(x),$$

应用拉格朗日中值定理可得

$$\begin{aligned}F(h,k)&=\varphi'(x+\theta_1 h)h\\&=\left[f'_x(x+\theta_1 h,y+k)-f'_x(x+\theta_1 h,y)\right]h\\&=f''_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta_2 k)hk,\qquad 0<\theta_1,\ \theta_2<1\end{aligned}$$

又令 $\psi(Y) = f(x+h, Y) - f(x, Y)$，则

$$F(h,k) = \psi(y+k) - \psi(y),$$

同样应用拉格朗日中值定理可得

$$\begin{aligned} F(h,k) &= \psi'(y+\theta_3 k)k \\ &= \big[f'_y(x+h, y+\theta_3 k) - f'_y(x, y+\theta_3 k)\big]k \\ &= f''_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k)hk, \qquad 0 < \theta_3,\ \theta_4 < 1. \end{aligned}$$

于是

$$f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) = f''_{yx}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 k).$$

由于 $f''_{xy}(x,y)$ 与 $f''_{yx}(x,y)$ 在 (x,y) 连续，令 $h \to 0,\ k \to 0$，所以

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

$\square$

全微分的引入

- 偏导数表示多元函数对某单个变量的变化率，
  不能全面刻划函数在某点附近的变化性态.

全微分的引入

- 偏导数表示多元函数对某单个变量的变化率，不能全面刻划函数在某点附近的变化性态.
- 设自变量 x, y 分别有增量 $\Delta x, \Delta y$，函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的全增量定义为

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

全微分的引入

- 偏导数表示多元函数对某单个变量的变化率，不能全面刻划函数在某点附近的变化性态.
- 设自变量 x, y 分别有增量 $\Delta x, \Delta y$，函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的全增量定义为

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

- 全增量是 $\Delta x, \Delta y$ 的函数，可以全面刻划函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 附近的变化情况.

全微分的引入

- 偏导数表示多元函数对某单个变量的变化率，不能全面刻划函数在某点附近的变化性态.
- 设自变量 x, y 分别有增量 $\Delta x, \Delta y$，函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的全增量定义为
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$
- 全增量是 $\Delta x, \Delta y$ 的函数，可以全面刻划函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 附近的变化情况.
- 全增量往往是一个较复杂的函数，求值比较困难，例如
$$z = x^y,\ x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \Delta x = -0.02,\ \Delta y = 0.05,$$
$$\Delta z = (1 + \Delta x)^{1+\Delta y} - 1^2 = (1 - 0.02)^{(2+0.05)} - 1^2$$

全微分的引入

- 偏导数表示多元函数对某单个变量的变化率，不能全面刻划函数在某点附近的变化性态.
- 设自变量 x, y 分别有增量 $\Delta x, \Delta y$，函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的全增量定义为

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

- 全增量是 $\Delta x, \Delta y$ 的函数，可以全面刻划函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 附近的变化情况.
- 全增量往往是一个较复杂的函数，求值比较困难，例如

$$z = x^y,\ x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \Delta x = -0.02,\ \Delta y = 0.05,$$
$$\Delta z = (1 + \Delta x)^{1+\Delta y} - 1^2 = (1 - 0.02)^{(2+0.05)} - 1^2$$

- 引进全微分的概念，并用全微分近似代替全增量来研究函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 附近的变化.

全微分

Definition (全微分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义，若函数在点 P 的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 只与点 (x,y) 有关而与自变量的增量 Δx 和 Δy 无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 是比 ρ 高阶的无穷小（当 $\rho\to 0^+$），则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，其线性部分 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分，记为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y.$$

对于 n 元函数，可以完全类似地定义全微分.

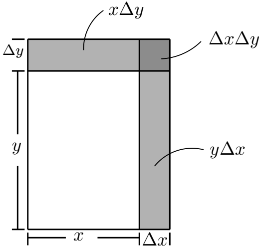
如长方形的面积 $A(x,y)=xy$，长方形的长和宽的增量分别为 Δx 与 Δy，此时面积的增量为

$$\Delta A=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y,$$

$$0\le\frac{|\Delta x\Delta y|}{\rho}\le\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\rho}=\rho\Longleftrightarrow\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta x\Delta y}{\rho}=0,$$

即 $\Delta x\Delta y=o(\rho)$，所以函数 $A(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，且

$$\mathrm{d}A=y\Delta x+x\Delta y.$$



可微一定连续

Theorem

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，则该函数在 (x,y) 处连续.

可微一定连续

Theorem

设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微，则该函数在 (x, y) 处连续.

Proof.

函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微，则

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

在上式中令 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ 可得

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

即函数在 (x, y) 处连续. □

可微一定可偏导

Theorem

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，则该函数在 (x,y) 处可偏导，且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

可微一定可偏导

Theorem

设函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，则该函数在 (x,y) 处可偏导，且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

Proof.

函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，则

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

在上式中令 $\Delta y=0$，两边除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A.$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$，于是全微分的公式可写为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$ □

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

- 取 $f(x, y) = x$ 代入上式可得 $\mathrm{d}x = \Delta x$
- 取 $f(x, y) = y$ 代入上式可得 $\mathrm{d}y = \Delta y$
- 所以全微分的公式又可写为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Examples

(1) 设 $z = x^2 \arctan y$，求 $dz|_{(2,-1)}$.

(2) 设 $u = \frac{z}{x^2+y^2}$，求 $du|_{(1,1,1)}$.

(3) 设 $z = f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x,y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0,$$

求 $dz|_{(0,1)}$.

连续不一定可微，可偏导也不一定可微

Example

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，可偏导，但不可微.

连续不一定可微，可偏导也不一定可微

Example

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

证明函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，可偏导，但不可微.

Proof.

令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ 则

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) &= \lim_{\rho\to0^+} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho}\\ &=0=f(0,0),\end{aligned}$$

即该函数在点 $(0,0)$ 处连续.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

即该函数在点 $(0,0)$ 处可偏导.

$$\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+\omega,$$
$$\omega=f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

如果 ω 是 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，否则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

$$\frac{\omega}{\rho}=\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\cos\theta\sin\theta\not\to 0,\qquad \rho\to 0^+,$$

所以 $\omega\neq o(\rho)$，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微. □

偏导数连续则可微

Theorem

设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的某邻域内可偏导，
且 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在 (x, y) 处连续，
则 $f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微.

偏导数连续则可微

Theorem

设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的某邻域内可偏导，
且 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在 (x, y) 处连续，
则 $f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微.

Proof.

考虑函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 处的全增量

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y)\end{aligned}$$

设 $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ 充分小，运用一元函数的拉格朗日中值定理得

$$\Delta z = f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta_1,\ \theta_2 < 1.$$

由 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 的连续性，可得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y),$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y),$$

所以

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f'_x(x,y)+\alpha,$$
$$f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f'_y(x,y)+\beta,$$

其中 $\alpha\to 0$，$\beta\to 0$，$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$. 于是

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

由于 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y^2)}$,

$$0\le\frac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\rho}\le|\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho}+|\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho}\le|\alpha|+|\beta|\to 0,$$

所以

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho),\qquad \rho\to 0^+,$$

即

$$\Delta z=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y+o(\rho),$$

表明函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微. $\square$

连续可微

Definition (连续可微)

若函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 的某邻域内可偏导，
且 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 (x,y) 处连续，
则称函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续可微.

若 $f(x,y)$ 在开区域 G 上每一点皆连续可微，
则称函数 $f(x,y)$ 在 G 上连续可微.

连续可微

Definition (连续可微)

若函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 的某邻域内可偏导，
且 $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ 在 (x,y) 处连续，
则称函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续可微.

若 $f(x,y)$ 在开区域 G 上每一点皆连续可微，
则称函数 $f(x,y)$ 在 G 上连续可微.

Remark

对于二元函数的结论，可以相应地推广到 n 元函数.

- 若 n 元函数 $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ 在点 $(x_1,\ldots,x_n)$ 处可微，
则函数 u 在 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处连续且可偏导，
且函数 u 的全微分可以表示为

$$\mathrm{d}u = f'_{x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + f'_{x_n}\mathrm{d}x_n.$$

- 如果 u 的 n 个偏导数 $f'_{x_1},\ldots,f'_{x_n}$ 在 $(x_1,\ldots,x_n)$ 处都连续，
则函数 u 在 $(x_1,\ldots,x_n)$ 处可微，此时称函数 u 在 $(x_1,\ldots,x_n)$ 处连续可微.

Examples

(1) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(1+\sqrt{x^2+y^2}), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，可偏导性与可微性.

(2) 设 $f(x,y)=\sqrt{|x\sin y|}$，讨论函数在 $(0,0)$ 处的可偏导性与可微性.

(3) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

试讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，可偏导性与可微性.

Examples

(4) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在 (0,0) 处可微，并求 $df(0,0)$.

(5) 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

在点 (0,0) 处可微.

微分法则

二元函数具有与一元函数完全一样的微分法则.

设函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x,y) 处都可微,
由全微分的计算公式得:

(1) $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v.$

(2) $\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v.$

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2} \ (v \neq 0).$

Example

求函数 $z = x^2y^3 + e^x \sin y$ 的全微分.

Proof.

方法 1： $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + e^x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + e^x \cos y,$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \\ &= (2xy^3 + e^x \sin y)dx + (3x^2y^2 + e^x \cos y)dy. \end{aligned}$$

方法 2：

$$\begin{aligned} dz &= d(x^2y^3 + e^x \sin y) = d(x^2y^3) + d(e^x \sin y) \\ &= y^3 d(x^2) + x^2 d(y^3) + e^x d(\sin y) + \sin y d(e^x) \\ &= 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy + e^x \cos y dy + e^x \sin y dx \\ &= (2xy^3 + e^x \sin y)dx + (3x^2y^2 + e^x \cos y)dy. \end{aligned}$$

□

Example

求函数 $u = \ln(xyz) + \dfrac{1}{x^2+y^2}$

在点 $(2,1,1)$ 处当 $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$, $\Delta z = 0.1$ 时的全微分.

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \\
&= \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)\Delta x + \left(\frac{1}{y} - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\Delta y + \frac{1}{z}\Delta z
\end{aligned}$$

故函数 $u = \ln(xyz) + \frac{1}{x^2+y^2}$ 在点 $(2,1,1)$ 处

当 $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$, $\Delta z = 0.1$ 时的全微分为

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{25}\right)\times 0.1 + \left(1 - \frac{2}{25}\right)\times 0.2 + 0.1 = 0.318.$$

□

全微分在近似计算中的应用

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，
则函数在点 (x_0,y_0) 处的全增量可以表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\ &= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)\\ &= \mathrm{d}f\Big|_{(x_0,y_0)} + o(\rho),\end{aligned}$$

当 $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ 都很小的时候，$o(\rho)$ 也很小，
我们可以用函数在 (x_0,y_0) 的全微分来近似计算全增量，即

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

或

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Example

求 $0.99^{2.02}$ 的近似值.

Example

求 $0.99^{2.02}$ 的近似值.

Proof.

设 $z = x^y$，则

$$z'_x = yx^{y-1}, \qquad z'_y = x^y \ln x,$$

令 $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \Delta x = -0.01,\ \Delta y = 0.02$，则由

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)\Delta x + z'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

可得

$$\begin{aligned} 0.99^{2.02} &\approx x_0^{y_0} + y_0 x_0^{y_0 - 1}\Delta x + x_0^{y_0} \ln x_0 \Delta y \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1^1 \cdot (-0.01) + 1^2 \ln 1 \cdot 0.02 = 0.98. \end{aligned}$$

□

绝对误差、相对误差

设某个量 u 的精确值为 A，近似值为 a，则

- $|A-a|$ 称为 a 的绝对误差，
- $\frac{|A-a|}{|A|}$ 称为 a 的相对误差 (实际应用中常用 a 代替分母中的 A).

在现实生活中，某些量的精确值往往无从知晓，
因而绝对误差也就无法求得.

但是根据测量仪器的精度等条件，
我们有时可以知道误差在某一个范围内.

如果量 u 的精确值为 A，近似值为 a，
我们又知道误差不超过 δ，即 $|A-a| \leq \delta$，则

- 称 δ 为测量 A 的绝对误差界，
- 称 $\frac{\delta}{|a|}$ 为测量 A 的相对误差界.

Example

测得一块梯形土地的两底边长分别为（72 ± 0.1）米，（108 ± 0.2）米，高为（56 ± 0.1）米，问由测量的误差而引起的土地面积的绝对误差和相对误差各为多少?

Example

测得一块梯形土地的两底边长分别为（72 ± 0.1）米，（108 ± 0.2）米，高为（56 ± 0.1）米，问由测量的误差而引起的土地面积的绝对误差和相对误差各为多少?

Proof.

设梯形的两底边为 x, y，高为 z，则面积 $u = \frac{1}{2}(x+y)z$.

$$u'_x = \frac{1}{2}z, \quad u'_y = \frac{1}{2}z, \quad u'_z = \frac{1}{2}(x+y).$$

令 $x_0=72,\ y_0=108,\ z_0=56,\ |\Delta x|\le 0.1,\ |\Delta y|\le 0.2,\ |\Delta z|\le 0.1.$

$$\begin{aligned}|\Delta u| &= |u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)-u(x_0,y_0,z_0)|\\ &\approx |u'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x+u'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y+u'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z|\\ &\le |u'_x(x_0,y_0,z_0)||\Delta x|+|u'_y(x_0,y_0,z_0)||\Delta y|+|u'_z(x_0,y_0,z_0)||\Delta z|,\end{aligned}$$

所以绝对误差界为

$$\frac{1}{2}\times 56\times 0.1+\frac{1}{2}\times 56\times 0.2+\frac{1}{2}\times(72+108)\times 0.1=17.4\,(m^2),$$

相对误差界为

$$\frac{17.4}{|f(x_0,y_0,z_0)|}=\frac{17.4}{\frac{1}{2}\times(72+108)\times 56}\approx 0.35\%.$$

□

高阶微分$\star$

函数 $z=f(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}z = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

一般情况下仍是 x, y 的二元函数，注意此式中 $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$ 是与 x, y 无关的量.

- 若二元函数 $\mathrm{d}z$ 可微，我们称函数 $z=f(x,y)$ 二阶可微，称 $\mathrm{d}z$ 的全微分为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶微分，记为 d^2z.
- 如果 d^2z 仍然可微，则称函数 $z=f(x,y)$ 三阶可微，称 d^2z 的全微分为函数 $z=f(x,y)$ 的三阶微分，记为 d^3z.
- 一般地，如果 $\mathrm{d}^{n-1}z$ 可微，则称函数 $z=f(x,y)$ 为 n 阶可微，称 $\mathrm{d}^{n-1}z$ 的全微分为函数 $z=f(x,y)$ 的 n 阶微分，记为 d^nz.

Theorem

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的所有 n 阶偏导数连续，
则该函数在 (x,y) 处 n 阶可微（此时我们称函数 n 阶连续可微），
且有

$$\mathrm{d}^n z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y).$$

Remark

上式为 n 阶微分的算子公式，形式上按二项式定理展开. 展开项

$$C_n^k\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\left(\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-k} f(x,y)$$

表示

$$C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(x,y)\mathrm{d}x^k\mathrm{d}y^{n-k}.$$

特别地，当 $n=2$ 时，有公式

$$\mathrm{d}^2 z=f''_{xx}(x,y)\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}(x,y)\mathrm{d}y^2.$$

Proof.

我们只对 $n = 2$ 的情形给出证明.

因为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的所有二阶偏导数连续，所以该函数在点 (x, y) 处的一阶偏导数连续，从而函数在 (x, y) 处可微，且

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y.$$

下证函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 处二阶可微. 因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}z = f''_{xx}(x, y)\mathrm{d}x + f''_{yx}(x, y)\mathrm{d}y,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}z = f''_{xy}(x, y)\mathrm{d}x + f''_{yy}(x, y)\mathrm{d}y,$$

上式右边的函数在 (x, y) 处皆连续，所以 $\mathrm{d}z$ 的两个偏导数都连续.

从而 $\mathrm{d}z$ 在 (x,y) 处可微，
因此函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处二阶可微，且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\\ &= f''_{xx}\mathrm{d}x^2+f''_{yx}\mathrm{d}y\mathrm{d}x+f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}\mathrm{d}y^2\\ &= f''_{xx}\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}\mathrm{d}y^2.\end{aligned}$$

□

Example

设 $z = x^2 + y^2 + \ln x - 3\ln y + x^2 y$，求 $\mathrm{d}^2 z(1, 2)$.

Example

设 $z = x^2 + y^2 + \ln x - 3\ln y + x^2 y$，求 $\mathrm{d}^2 z(1,2)$.

Proof.

$$z'_x = 2x + \frac{1}{x} + 2xy, \quad z'_y = 2y - \frac{3}{y} + x^2,$$

$$z''_{xx} = 2 - \frac{1}{x^2} + 2y, \quad z''_{xy} = 2x, \quad z''_{yy} = 2 + \frac{3}{y^2},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2 z\,(1,2) \\
&= z''_{xx}(1,2)\mathrm{d}x^2 + 2z''_{xy}(1,2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + z''_{yy}(1,2)\mathrm{d}y^2 \\
&= \left(2 - \frac{1}{x^2} + 2y\right)\bigg|_{(1,2)} \mathrm{d}x^2 + 2\cdot(2x)\bigg|_{(1,2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(2 + \frac{3}{y^2}\right)\bigg|_{(1,2)} \mathrm{d}y^2 \\
&= 5\mathrm{d}x^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{11}{4}\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

□