微积分II（第一层次）期末试卷 (2014.6.23)

一、简答题(6分 $\times$ 8=48分)

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域.

2. 求积分 $I=\int_C \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 的一段弧.

3. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通积分.

4. 已知 $f(x)$ 为 $[0,2]$ 上的连续函数，证明 $\int_0^1\int_0^1 f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]\,\mathrm{d}u$.

5. 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 关于 x 的幂级数展式.

6. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

7. 求函数项级数 $I(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的和函数.

8. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 外侧在 $z\geq 0$ 的部分.

二、(10分)　求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n n!}$ 的和.

三、(10分)　计算曲线积分 $\int_\Gamma 2y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+e^z\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y=1 \end{cases}$ 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算曲面积分 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得的有限部分.

五、(10分)　设 $f(x)=|x|$,

1. 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上的正弦级数展式的前两项系数 b_1 和 b_2；

2. 证明：对于二元函数 $F(a,b)=\int_0^\pi\Big[f(x)-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x$, (b_1,b_2) 为其在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点.

商学院同学任选下列两题中一题，其他院系同学必须选做第七题.

六、(12分)　(1) 求方程 $y''-5y'+6y=e^x$ 的通解.

(2) 设 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，证明：$y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解的充要条件为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

七、(12分)　(1) 求方程 $y''-5y'+6y=f(x)$ 的通解, 其中 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) 若 $f(x)\geq 0$, 证明上述方程满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解必非负.