微积分II(第一层次)期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 设 $u = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[n]{1+x}} \mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.

4. 求微分方程 $(x-\sin y)\mathrm{d}y + \tan y \mathrm{d}x = 0$ 满足初始条件 $y(1) = \dfrac{\pi}{6}$ 的特解.

5. 求微分方程 $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 5\right)\mathrm{d}x + \left(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{6}{y^3}\right)\mathrm{d}y = 0$ 的通积分.

二、(10分)　计算 $I_1 = \displaystyle\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的上侧.

三、(10分)　计算 $I_2 = \displaystyle\oint_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是立方体 $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$ 的表面与平面 $x+y+z = \dfrac{3a}{2}$ 的交线，若从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分)　对常数 p, 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

五、(10分)　试将函数 $f(x) = \dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

六、(10分)　将函数 $f(x) = \dfrac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并求级数 $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$ 的和.

七、(10分)　求二阶微分方程 $y''-y = 2x+e^{2x}\cos x$ 的通解.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x, y 有等式 $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0) = a$ $(a \ne 0)$, 求函数 $f(x)$.

(2) (商学院学生做) 已知 $\displaystyle\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a = \frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.

2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.

3. 讨论广义积分 $\int_0^1 \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $t:0\to 2\pi$ 为旋轮线的一拱，方向由原点到$A(2\pi a,0)$, 计算 $I_1=\int_C((x+y+1)e^x-e^y+y)\mathrm{d}x+(e^x-(x+y+1)e^y-x)\mathrm{d}y$.

四、(10分) 计算 $I_2=\iint\limits_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分）设 $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题（7分×3 = 21分）

1. 求过直线 $L: \begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程.

2. 求旋转抛物面 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 与半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面积.

3. 计算 $I=\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x\geq 1, y\geq x^2$.

三、计算下列各题（7分×3 = 21分）

1. 计算 $I=\displaystyle\int_C 2x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+(x+2y-z)\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=z \end{cases}$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到$B(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I=\displaystyle\oint_C \frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y=R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题（7分×4 = 28分）

1. 考察级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性.（提示：$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$）

3. 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数，并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题（7分×2 = 14分）

1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x+y), y(0)=-1$ 的特解.　2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、1. 解: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2});$$

2. 解: $+\infty$是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\cdot x^{1+\frac{1}{n}}=1$, $1+\frac{1}{n}>1$, 所以原广义积分收敛。

3. 解：令$t=(x-3)^2$, 对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n5^n}$, $a_n=\dfrac{1}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}$, 所以$R=5$. $t=5$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以$0\le(x-3)^2<5$, 解得$3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为$(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

4. 解: 原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\cot y=\cos y$, 关于$x$是一阶线性方程，解得

$$x=e^{-\int\cot y\mathrm{d}y}(C+\int\cos y e^{\int\cot y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=\frac{C}{\sin y}+\frac{\sin y}{2}.$$

$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$代入得$C=\dfrac{3}{8}$, 所以所求特解为$8x\sin y=3+4\sin^2 y$.

5. 这是一个全微分方程，通解为$\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{3}{y^2}=C$.

二、解: 设$S_1: z=0,((x,y)\in D)$ 取下侧, 其中$D: x^2+y^2\le a^2$. Ω是S与S_1所围立体，

$P=x^3+az^2, Q=y^3+ax^2, R=z^3+ay^2$, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint\limits_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4},$$

所以 $I=\dfrac{6\pi a^5}{5}+\dfrac{\pi a^5}{4}=\dfrac{29}{20}\pi a^5$

三、解: 设C所围的正六边形为$S: x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, 取上侧，则S的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式， $I_2=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3a}{2}\iint\limits_S\mathrm{d}S=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3a}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\dfrac{9}{2}a^3$.

四、解: $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{2}{n^p(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{n^{p+1/2}}$，所以 $p>\dfrac{1}{2}$时绝对收敛，$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$时，非绝对收敛. $-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$时，原级数是交错级数，用莱布尼茨判别法可得级数条件收敛；$p\le-\dfrac{1}{2}$时，一般项不趋向于0，级数发散.

五、解：$f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}+\dfrac{1}{9}(1-\dfrac{x}{3})^{-2}$

$$(1+\frac{2}{5}x)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(\frac{2}{5}x)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}x^n,\quad x\in(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}),$$

$$(1-\frac{x}{3})^{-2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-\frac{x}{3})^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^n,\quad x\in(-3,3),$$

所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}\Big)x^n,\quad x\in\Big(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\Big).$

六、$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in[0,\pi).$

在上式中取 $x=\frac{\pi}{2}$, 得 $I=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$, 于是

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=I+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots=I+\frac{1}{3}I=\frac{\pi}{3}.$$

七、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2x+\frac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x).$

八、解：(1) 在 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$.

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

且 $f'(0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(y)}{y}$.

$$\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}(1+4f^2(x))=f'(0)(1+4f^2(x)),$$

即 $f'(x)=a(1+4f^2(x))$, 这是一个可分离变量的方程，解得 $f(x)=\frac{1}{2}\tan(2ax+C)$,

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 所以 $f(x)=\frac{1}{2}\tan(2ax)$.

(2) $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{2}{x},\quad f(x)=2+Cx.$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1. 解：平面方程为 $z=\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{4}$, $(x,y)\in D$, 其中 $D:x^2+(y-3)^2\le9$.

则所求面积 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{9}{8}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\cdot9\pi=\frac{81}{8}\pi.$

2. 解：$a_n=n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\frac{\pi}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$, 所以级数收敛.

3. 解：$x=1$ 是奇点. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 解：这是伯努利方程，令 $y^2=u$, 方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}u=-1$, 通积分为 $y^2=Cx-x\ln|x|$.

5. 解：方程化为 $(x^2-y+5)\mathrm{d}x-(x+y^2+2)\mathrm{d}y=0$, 是全微分方程，通积分为 $\frac{x^3-y^3}{3}-xy+5x-2y=C$.

二、解：直线 L 过点 $M_0(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$, 方向向量为 $(10,2,-2)\times(1,1,-1)=8(0,1,1)$.

设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$, 切平面方程为 $3x_0x+y_0y-z_0z=27$.

所以 $\begin{cases} 3x_0\cdot\frac{27}{8}+y_0\cdot(-\frac{27}{8})=27, \\ (3x_0,y_0,z_0)\cdot(0,1,1)=0, \\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27. \end{cases}$ 解得 $(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$,

所以切平面方程为 $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z=-27$.

三、解: 记 $P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y,\ Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$

$$\int_{C+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{其中 } D \text{ 为旋轮线的一拱与 } x \text{ 轴所围的区域})$$

$$=2\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi a^2,$$

所以 $I_1=6\pi a^2+\displaystyle\int_0^{2\pi a}((x+1)e^x-1)\mathrm{d}x=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1)$.

四、方法一: 设 $S_1: z=0,\ (x^2+y^2\le 1)$, 取下侧, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (\text{柱坐标})$$

$=6\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^3+\rho z)\mathrm{d}z=2\pi$, 所以

$$I_2=2\pi-\iint\limits_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

方法二: $S: z=1-x^2-y^2,\ (x,y)\in D,\quad D: x^2+y^2\le 1$, 则

$$I_2=\iint\limits_D\Big(2x^3(-z_x')+2y^3(-z_y')+3\big((1-x^2-y^2)^2-1\big)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(7x^4+7y^4-6x^2-6y^2+6x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{极坐标})$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\Big(7\rho^5\cos^4\theta+7\rho^5\sin^4\theta-6\rho^3+6\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\Big)\mathrm{d}\rho=-\pi.$$

五、解：$x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, 令 $x=\dfrac{1}{k}$, 则 $\dfrac{1}{k+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, 取 $k=1,2,\cdots,n-1$,

再将各式相加可得 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\ln n+1<2\ln n\ (n\ge 3)$, 所以 $\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{2\ln n}{n^2}$.

而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}}=0$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{2\ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^n a_k\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\Big)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$=1-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{a_n}{n+2}$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}S_n=1$.

六、解：令 $t=x^2$, 对于级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$, $a_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$,

所以 $R=2$. $t=2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2}$ 发散; 所以 $0\le x^2<2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, 则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^{2n-1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{x^2}{2}\Big)^n=\dfrac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}{1-\frac{x^2}{2}}=\dfrac{x}{2-x^2}$,

所以 $S(x)=\Big(\dfrac{x}{2-x^2}\Big)'=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}=S(1)=3$.

七、解：$f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0$, $n=1,2,\cdots$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\pi^2}{3},\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$$

所以 $\pi^2-x^2=\dfrac{2}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$, $\quad x\in[-\pi,\pi]$.

代入 $x=0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$, $\quad$ 代入 $x=\pi$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\pi^2}{12}=\dfrac{\pi^2}{4}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

八、解：$y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解，则 $y_4=y_2-e^{-x}=xe^x$ 是非齐次方程的一个解，$y_1-y_4=e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解。所以 $-1,2$ 是特征根。

二阶线性非齐次微分方程为 $y''-y'-2y=f(x)$, 将 $y_4=xe^x$ 带入方程可得 $f(x)=(1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$, 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、 解：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, $f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$,

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

$\omega=f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)=xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\omega}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时, $f'_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{\rho\to0^+}(\rho\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}-\cos^2\theta\sin\theta\cos\dfrac{1}{r})$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续可微.

二、1. $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.

2. 解：$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le2a^2}\Big(\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}+\dfrac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}+\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\Big)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{16}{3}\pi a^2.$$

3. $I=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{+\infty}\frac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y\to+\infty}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

三、1. 曲线的参数方程为 $x=\cos\theta, y=\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, z=\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}, \theta$ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{1}{2}.$$

2. 记 $S: x+y=R$ 后侧, $I=\iint\limits_S(y+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{R}{\sqrt{2}}\iint\limits_S\mathrm{d}S=-\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$

3. 设 $S_1: z=0,((x,y)\in D)$ 取下侧, 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$. Ω 是 S 与 S_1 所围立体，

$P=x^3+az^2, Q=y^3+ax^2, R=z^3+ay^2$, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint\limits_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4},$$

所以 $I=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29}{20}\pi a^5$

四、1. 解：$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$, $a_n=\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^4})\Big)\sim\frac{1}{3n^3}$, 所以级数收敛.

2. 解：$a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, a_n 单调减，$\frac{1}{2n}<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以由莱布尼茨判别法可知原级数收敛；由 $a_n>\frac{1}{2n}$ 可知原级数非绝对收敛, 故原级数条件收敛.

3. 解：设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$, 两边积分得

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'=x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2},(|x|<1)$$

两边求导 $S(x)=\Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big)'=\frac{x+1}{(1-x)^3},(-1<x<1)$. 令 $x=-\frac{1}{3}$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}=\frac{9}{32}$.

4. $x^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$, 取 $x=0$ 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

五、1. $\tan(1+x+y)-\sec(1+x+y)=x-1$.

2. 原方程可以写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2x}{y}=-2\frac{x^2}{y^3}$, 这是一个关于 x 的伯努利方程，通积分为 $y^2=C\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x}}$.

六、$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$.