线性代数笔记

刘承杰

南京大学软件学院

2021 年 8 月 3 日

目录

1 行列式 **1**

1.1 二阶与三阶行列式 1

1.2 n 阶行列式 2

2 矩阵，向量 **5**

2.1 矩阵和 n 维向量的概念 5

2.2 矩阵运算 6

2.3 分块矩阵 7

2.4 初等变换与初等矩阵 8

2.5 矩阵的秩 11

2.6 可逆矩阵与伴随矩阵 11

2.7 向量组的线性相关与线性无关 13

3 线性方程组解的结构 **15**

3.1 高斯消元法与矩阵的行变换 15

3.2 线性方程组的可解性 15

3.3 线性方程组解的性质与结构 16

4 矩阵的特征值与特征向量 **18**

4.1 相似矩阵 18

4.2 特征值与特征向量 18

4.3 矩阵可对角化的条件 19

4.4 正交矩阵与施密特正交化方法 20

4.5 实对称矩阵的对角化 21

5 实二次型 **22**

5.1 二次型的化简 22

5.2 正定二次型 25

6 线性空间与线性变换 **27**

6.1 线性空间的定义 27

6.2 线性空间的基、维数与坐标 27

6.3 线性空间的子空间 29

6.4 线性变换 30

6.5 线性变换的特征值和特征向量 31

1 行列式

1.1 二阶与三阶行列式

定义 1.1 (二阶行列式) 将 4 个可以进行乘法与加法运算的元素 a, b, c, d 排成两行两列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

并称之为**二阶行列式**。行列式也可简记为 Δ、D 等

定理 1.1 对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ eb_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

有如下结论:

1. 若 $\Delta \neq 0$，则方程组(1) 有唯一解：$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$
2. 若 $\Delta = 0$，但 Δ_1, Δ_2 不全为零则方程组(1) 无解
3. 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$，则方程组(1)有无穷多组解

定义 1.2 (三阶行列式) 设有 9 个可以进行乘法和加法运算的元素排成三行三列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

并称之为**三阶行列式**，其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 为该行列式的元素。

定理 1.2 对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

记

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

有如下结论：

1. 若 $\Delta \neq 0$，则方程组(2)有唯一解 $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$
2. 若 $\Delta = 0$，而 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 不全为 0，则方程组(2)无解
3. 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$，则方程组(2)可能无解也可能有无穷多组解

1.2 n 阶行列式

定义 1.3 (n 阶行列式) 设有 n^2 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 n 行 n 列，引用记号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称它为n **阶行列式**，它是一个算式，有时也用记号 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 表示。

其数值可归纳定义为：当 $n=1$ 时，一阶行列式的值定义为 $D_1 = \det(a_{11}) = a_{11}$；当 $n \geq 2$ 时，

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

而

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。显然 M_{ij} 为一个 $n-1$ 阶的行列式，它是在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后得到的一个行列式。

评论 三角行列式的值为主对角线上元素的乘积。

定义 1.4 (转置行列式) 设

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 A' 为行列式 A 的**转置行列式**（也可以表示为 A^{T}）。显然 A' 是行列式 A 的行和列互换之后得到的行列式。

定理 1.3 n 阶行列式的性质：

- 行列式与它的转置行列式的值相等。
- 对调两行（列）的位置，行列式的值相差一个负号
- 两行（列）相等的行列式的值为 0
- 行列式可以按任意一行（列）展开
- 行列式的任一行（列）元素的公因子可以提到行列式外面
- 若行列式的某两行（列）成比例，则该行列式的值为零
- 若行列式的第 i 行（列）的每一个元素都可以表示为两数的和，则该行列式可以表示为两个行列式之和
- 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）元素的代数余子式对应乘积之和为零

  即，若设 $A=|a_{ij}|_{n\times n}$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} A, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

  或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} A, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

定理 1.4 (克莱姆法则) 对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_3=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{3}$$

若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组(3)有解，且解是唯一的，这个解可以表示为

$$x_j=\frac{D_j}{D} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 换成方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得到的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

考虑方程组(3)的一个特殊情形，方程组(3)右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全部为零，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_3 = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

这样的方程组称为**齐次线性方程组**，而方程组(3)称为**非齐次线性方程组**。

定理 1.5 含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组(4)若有非零解，则它的系数行列式等于零。

2 矩阵，向量

2.1 矩阵和 n 维向量的概念

定义 2.1 (矩阵) 有 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列数表，外加括号，写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 m 行 n 列矩阵，简称$m\times n$ **矩阵**。

定义 2.2 (n 维向量) n 个数 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 组成的有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n) \quad 或 \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为n **维向量**，前者称为**行向量**，后者称为**列向量**。

评论 几个特殊的矩阵：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**。为了书写简洁起见，也经常用 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 表示此对角矩阵 $\boldsymbol{A}$。

如果对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}=k$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**，当 $k=1$ 时，称为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**。类似地，可定义**下三角形矩阵**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果矩阵的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**；如果矩阵的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**。例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -7 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

依次是对称矩阵和反对称矩阵。

定义 2.3 (转置矩阵) 把 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行与列互换后得到一个 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 A^{T} 或 A'。

定义 2.4 (方阵的行列式) 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$。如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**非异矩阵**，如果 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**奇异矩阵**或**退化矩阵**。

2.2 矩阵运算

定义 2.5 (矩阵的加法) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和定义为 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

定理 2.1 矩阵加法的性质：

1. 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

2. 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
3. 零矩阵：对任一矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是同型矩阵）
4. 负矩阵：对任一矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，可定义 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$，称 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵。显然 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

定义 2.6 (矩阵的数乘) 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 相乘的积的定义为 $(ka_{ij})_{m\times n}$，记为 $k\boldsymbol{A}$：

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

定理 2.2 (方阵的数乘与其行列式) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 为任意数，则有 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$

定义 2.7 (矩阵的乘法) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

评论 只有当 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义，且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同，$\boldsymbol{C}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同。

矩阵乘法不满足交换律和消去律，但满足结合律，数乘结合律和分配律。

定义 2.8 (矩阵多项式) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，定义 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots,\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$ 其中 k 为正整数，这也就是说 $\boldsymbol{A}^k$ 是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘，称 $\boldsymbol{A}^k$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 **k 次幂**。再任取 $m+1$ 个实数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$，显然

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$$

仍为 n 阶矩阵。称 $f(\boldsymbol{A})$ 为**矩阵多项式**

定理 2.3 转置矩阵的性质：

1. $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A};\quad|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$
3. $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
4. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，该式还可以推广为 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$

2.3 分块矩阵

定义 2.9 (分块矩阵) 对于一个 $m\times n$ 矩阵，如果在行的方向分成 s 块，在列的方向分成 t 块，就得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $s\times t$ 分块矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}\\\begin{array}{cccc}n_1\text{列}&n_2\text{列}&\cdots&n_t\text{列}\end{array}\end{array}\begin{array}{c}m_1\text{行}\\m_2\text{行}\\\vdots\\m_s\text{行}\\\end{array}$$

其中 $m_1+m_2+\cdots+m_s=m, n_1+n_2+\cdots+n_t=n$，而 $\boldsymbol{A}_{kl}(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,t)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块。

定理 2.4 分块矩阵的运算：

1. 分块矩阵的加法。设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}, \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}$ 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应的子块 $\boldsymbol{A}_{kl}$ 和 $\boldsymbol{B}_{kl}$ 都是同型矩阵，则
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{kl}+\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}$$
2. 分块矩阵的数乘。设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$，$k$ 是数，则
$$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$$
3. 分块矩阵的乘法。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$ 如果把 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别分块为 $r\times s$ 和 $s\times t$ 分块矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的列的分块法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分块法完全相同，则
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{kl})_{r\times t}$$
其中 $\boldsymbol{C}$ 是 $r\times t$ 分块矩阵，且
$$\boldsymbol{C}_{kl}=\boldsymbol{A}_{k1}\boldsymbol{B}_{1l}+\boldsymbol{A}_{k2}\boldsymbol{B}_{2l}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ks}\boldsymbol{B}_{sl}=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{B}_{il}(k=1,2,\cdots,r;l=1,2,\cdots,t)$$
4. 分块矩阵的转置。$s\times t$ 分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $t\times s$ 分块矩阵，如果记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s}$，则
$$\boldsymbol{B}_{lk}=\boldsymbol{A}_{kl}^{\mathrm{T}}(l=1,2,\cdots,t;k=1,2,\cdots,s)$$
5. 分块对角矩阵。设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵，即
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}$$
其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots.s)$ 都是方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵，也称**准对角矩阵**。

2.4 初等变换与初等矩阵

定义 2.10 (初等变换) 下面三种对矩阵的变换，统称为矩阵的初等变换：

1. 对调变换：互换矩阵 i,j 两行（列），记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$
2. 数乘变换：用任意数 $k\neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行（列），记为 $kr_i(kc_i)$

3. 倍加变换：把矩阵的第 i 行（列）的 k 倍加到第 j 行（列），其中 k 为任意数，记为 $r_j + kr_i(c_j + kc_i)$

定义 2.11 (初等矩阵) 将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 做一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

1. 初等对调矩阵

$$\boldsymbol{E}_{(i,j)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列} \end{array} & \end{array}$$

即是将单位矩阵的第 i 行与第 j 行对调后所得的矩阵。

2. 初等倍乘矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{第}i\text{列} \end{array} & \end{array}$$

其中 $k \neq 0$ 是任意数。既是将单位矩阵的第 i 个 1 换成 k 后所得的矩阵。

3. 初等倍加矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第}i\text{列} & \text{第}j\text{列} \end{array} & \end{array}$$

即是将单位矩阵的第 i 行第 j 列的元素换成 k 后所得的矩阵。

定理 2.5 (初等变换与初等矩阵) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以一个相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以一个相应的 n 阶初等矩阵。

评论 定理说法中“相应”的含义，具体来说，就是

- $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行互换；
- $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k；
- $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A}$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行上；
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j)$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列互换；
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i(k))$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k；
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j(k))$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

定义 2.12 (行 (列) 等价矩阵，等价矩阵) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初行等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **行等价**，记作 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **列等价**，记作 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{c}\boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{B}$。

定理 2.6 具有行等价关系的矩阵所对应的线性方程组有相同的解。

定义 2.13 (梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足下面两个条件：

(1) 若有零行，则零行全部在下方；
(2) 从第一行起，每行第一个非零元素前面的零的个数逐行增加。

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**行梯形矩阵**。若 $\boldsymbol{A}$ 还满足：

(3) 非零行的第一个非零元素为 1，且"1" 所在列的其余元素全为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行简化梯形矩阵**。

类似可定义**列梯形矩阵与列简化梯形矩阵**。

定理 2.7 (矩阵的标准型) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是行简化矩阵，又是列简化矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**标准形矩阵**。矩阵的标准型可写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

即左上角为单位矩阵，其余都是零矩阵。

定理 2.8 (矩阵的化简) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则

(1) 存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 使 $\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$（即对 $\boldsymbol{A}$ 施加有限次的初等行变换）成为 $m\times n$ 阶行简化梯形矩阵。
也存在 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t$（即对 $\boldsymbol{A}$ 施加有限次的初等行变换）成为 $m\times n$ 阶列简化梯形矩阵。
(2) 可以经过有限次初等行变换和初等列变换，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为标准型。

2.5 矩阵的秩

定义 2.14 (矩阵的子式) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，任取 $\boldsymbol{A}$ 的 k 行和 k 列 $(0 < k \leq \min\{m, n\})$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原来的顺序排成的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的k **阶子式**。

评论 例如，在 2×3 的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

中，1 阶子式是由其中一个元素所构成，共有 6 个 1 阶子式，它的 3 个 2 阶子式是:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix},$$

一般地，$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $\boldsymbol{C}_m^k \boldsymbol{C}_n^k$ 个。

定义 2.15 (矩阵的秩) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一个非零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为零，则称 D 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记为 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = r$(或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r$)。并规定零矩阵的秩等于 0.

评论 与上述概念有关的结论为：

(1) $\mathrm{r}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数；

(2) $0 \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) \leq \min(m, n)$；

(3) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$；

(4) 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$（即 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵）$\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 非异。

定理 2.9 初等行、列变换不改变矩阵的秩。

定理 2.10 行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数。

定理 2.11 任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行变换为单位矩阵，也可以经过若干次初等列变换为单位矩阵。

定理 2.12 (求矩阵的秩的方法) 先用初等行、列变换将矩阵化为梯形矩阵，其非零行的行数就是矩阵的秩。

2.6 可逆矩阵与伴随矩阵

定义 2.16 (逆矩阵) 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在同阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**，并称 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

定理 2.13 可逆矩阵的性质：

(1) 可逆矩阵的逆矩阵是唯一的。
(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；还有 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$
(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$
(5) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

定义 2.17 (方阵的伴随矩阵) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则称矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1n}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2n}\\\ddots&\ddots&&\ddots\\\boldsymbol{A}_{n1}&\boldsymbol{A}_{n2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{21}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n1}\\\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n2}\\\ddots&\ddots&&\ddots\\\boldsymbol{A}_{1n}&\boldsymbol{A}_{2n}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

评论 处理遇到 $\boldsymbol{A}^*$ 的题目时常用 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$

定理 2.14 (矩阵可逆的条件) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

定理 2.15 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

定理 2.16 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$

评论 判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是否是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，只需要验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 中一个等式成立即可。

定理 2.17 (矩阵的分解) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{Q}$，其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$$

定理 2.18 任一 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可以表示成有限个 n 阶初等矩阵的乘积。进一步，任一可逆矩阵可以只经过行的初等变换化为单位阵，也可以只经过列的初等变换化为单位阵。

评论 该定理告诉我们一个求逆矩阵的方法：将 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E})$ 经过一系列行的初等变换化为 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

也可以用列的初等变换来求逆矩阵，即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{仅用初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$$

这种求逆的方法也可用于一类矩阵方程的求解。设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，可通过只做初等行变换将

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

来得到方程的具体解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

类似地，对矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 的解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$，可通过只做初等列变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{BA}^{-1}\end{pmatrix}$$

来得到。

定理 2.19 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 和 n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{PA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AQ})=\mathrm{r}(\boldsymbol{PAQ})$$

2.7 向量组的线性相关与线性无关

定义 2.18 (向量的线性组合，线性表示) 给定 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和同维向量 $\boldsymbol{\beta}$，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 A 的一个线性组合或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示。

定义 2.19 (等价向量组) 设有两个向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 及 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l$，若 A 组中的每一个向量都可以由向量组 B 线性表示，则称向量组 A 可由向量组 B 线性表示。若两个向量组 A,B 可以相互线性表示，则称这两个**向量组等价**。

定义 2.20 (线性相关与线性无关) 给一向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}$$

则称向量组 A 是**线性相关**的。如果只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，上述等式才成立，则称这组向量是**线性无关**的。

定理 2.20 关于线性相关与线性无关的基本结论：

(1) 一个向量线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$；
(2) 包含零向量的向量组必是线性相关的；
(3) 如果一向量组的部分向量组线性相关，则该向量组也线性相关；
(4) 如果一个向量组线性无关，则其中任一个部分向量组也线性无关.

定理 2.21 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是，向量组 A 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示。

定理 2.22 设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而向量组 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由向量组 A 线性表示，并且表示式是唯一的。

定理 2.23 n 维列向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<r$，其中矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_r\end{pmatrix}$。换言之，该向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$

定理 2.24 向量的个数 m 大于其维数 n，则向量组线性相关。

定理 2.25 n 个 n 维向量线性无关的充要条件是其行列式不为零。

定理 2.26 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times m}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r \leq m$，且 $\boldsymbol{A}$ 的某 r 列（行）所组成的矩阵含有不等于零的 r 阶子式，则此 r 个列（行）向量线性无关。

定义 2.21 (极大无关组) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是某一向量组的部分组，满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；
(2) 在原向量组中任取向量 $\boldsymbol{\alpha}$,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}$ 都线性相关,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是原向量组的一个极大线性无关组，简称**极大无关组**。

定理 2.27 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示，且表示法唯一。

定理 2.28 向量组与它的任意一个极大线性无关组等价。

定理 2.29 一个向量组的各个极大无关组之间是等价的。

定理 2.30 两个向量组等价的充要条件是一组的一个极大无关组与另一组的一个极大无关组等价。

定理 2.31 一个向量组的各个极大无关组所含向量的个数相同。

定义 2.22 (向量组的秩) 向量组 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组所含向量的个数定义为该**向量组的秩**，记为 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$。规定仅含零向量的向量组的秩为零。

定义 2.23 设 $A : \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, B : \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是两个同维数的向量组，若向量组 A 可以由向量组 B 线性表示，则必有 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\} \leq \mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n\}$。进一步有：等价的向量组必有相同的秩。

定义 2.24 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**；$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**.

定理 2.32 任一矩阵的秩和其行秩、列秩都相等。

定理 2.33 关于矩阵和、矩阵乘积的秩的几个重要结果：

(1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;
(2) $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}), \mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$;
(3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) \geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) - n$

3 线性方程组解的结构

3.1 高斯消元法与矩阵的行变换

定义 3.1 一般的线性方程组表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

由第二章矩阵和向量的知识，线性方程组(3.1)也可表示成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{b} \tag{3.2}$$

其中向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

求解方程组(3.1)即为求解式(3.2)，也就是求 $\boldsymbol{b}$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合。线性方程组(3.1)还可以表示为矩阵的形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.3}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为方程组(3.1)的**系数矩阵**，$\boldsymbol{x}$ 为**未知向量**，$\boldsymbol{b}$ 为**右端向量**。使方程组(3.3)成立的已知向量称为该方程组的**解向量**。将系数矩阵与右端向量合在一起构成的矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b})$，称为该方程组的**增广矩阵**，也可用增广矩阵来表示线性方程组。

定理 3.1 (高斯消元法) 通过一系列的行初等变换将增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 变换成行简化梯形矩阵时，即可得到方程组的解。

3.2 线性方程组的可解性

定理 3.2 线性方程组(3.1)有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩. 且当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) = n$ 时，方程组有唯一解；而当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{B}) < n$ 时，方程组有无穷多组解。

3.3 线性方程组解的性质与结构

定理 3.3 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 的解，则其线性组合 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是该方程组的解。

定义 3.2 (齐次线性方程组、基础解系) 右端为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**；能线性表示出齐次方程组所有解的极大无关向量组称为该齐次线性方程组的**基础解系**。

定义 3.3 (方程组的特解、通解) 方程组的某一个解称为方程组的**特解**，方程组所有解的集合称为方程组的**通解**。

定理 3.4 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$，若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 只有零解；若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 有非零解。

评论 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}| = 0$

评论 若 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$，且 $m < n$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 有非零解。

定理 3.5 $\boldsymbol{A}$ 经过适当的行初等变换可以化为如下形式的行简化梯形矩阵

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}
1 & d_{12} & \cdots & 0 & d_{1i_2+1} & \cdots & 0 & d_{1i_r+1} & \cdots & d_{1n} \\
0 & 0 & \cdots & 1 & d_{2i_2+1} & \cdots & 0 & d_{21i_r+1} & \cdots & d_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{ri_r+1} & \cdots & d_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & i_2 & i_2+1 & \cdots & i_r & i_r+1 & \cdots & n \end{matrix}
\end{array}$$

其中最后一行是矩阵所在列的列标号。对 $n-r$ 个自由变量 $x_2, \cdots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \cdots, x_{i_r-1}, x_{i_r+1}, \cdots, x_n$ 分别取 $n-r$ 组数据 $(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)$，则可得 $n-r$ 组非自由变量 $x_1, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}$ 的值，从而构成 $n-r$ 组方程组的解，设该 $n-r$ 组解的解向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots \boldsymbol{\alpha}_{n-r}$，则它们就是方程组的一个基础解系。方程组的通解为：

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}, \quad \text{其中} k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbf{R} \text{为任意常数}$$

评论 若系数矩阵简化后的行简化梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & d_{1,r+1} & \cdots & d_{1n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & d_{2,r+1} & \cdots & d_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & d_{r,r+1} & \cdots & d_{rn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-d_{1,r+1}\\ \vdots\\ -d_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-d_{1,r+2}\\ \vdots\\ -d_{r,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_{n-r}=\begin{pmatrix}-d_{1n}\\ \vdots\\ -d_{rn}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

是齐次方程组的一个基础解系。

定理 3.6 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(N(\boldsymbol{A}))=n$，其中 $N(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$ 的基础解系为列构成的矩阵。

定理 3.7 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{\theta})$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解可以表示为

$$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\alpha}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$ 的解。若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ ，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为：$\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$，其中 $k_1,\cdots,k_r\in\mathbf{R}$ 为任意实数。

4 矩阵的特征值与特征向量

4.1 相似矩阵

定义 4.1 (相似矩阵) 对于同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ **相似于** $\boldsymbol{B}$，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**相似矩阵**，而称 $\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的**相似变换矩阵**。

定理 4.1 相似矩阵的性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可逆性相同；
(2) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$；
(3) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}^n\sim\boldsymbol{B}^n, k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$，其中 n 为自然数，k 为任意实数；
(4) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$，其中 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为任意多项式。

4.2 特征值与特征向量

定义 4.2 (特征值、特征向量) 设 $\boldsymbol{A}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个方阵，$\lambda\in\mathbf{C}$，若存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，则称 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，$\boldsymbol{\xi}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

定理 4.2 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为属于 λ 的特征向量，则它们的任意不等于零向量的线性组合 $\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_1,k_2\in\mathbf{R})$ 仍是属于 λ 的特征向量。

定义 4.3 (特征多项式、特征方程、特征矩阵) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**；方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**。方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的解也称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征根**. 而 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**。

定理 4.3 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量的计算步骤：

（1）计算行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，并求出 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的全部根，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

（2）对于每个特征值 λ_i，求齐次线性方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$$

的一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s_i}$；

（3）写出 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ_i 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s_i}\boldsymbol{\alpha}_{s_i}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{s_i}$ 为不全为零的任意常数。而所求得的所有特征值的所有特征向量，就是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量。

评论 对于重特征值 λ，虽然有多个属于 λ 的线性无关的特征向量，但其个数不会超过 λ 的重数。对于单特征值，有且只有一个线性无关的特征向量。

定理 4.4 若 $f(x)$ 为 x 的多项式，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，则 $f(\boldsymbol{A})$ 有特征值 $f(\lambda)$。

评论 若该定理中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$（包括相同的特征值），则 $f(\boldsymbol{A})$ 的所有特征值为 $f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$.

评论 若 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$（包括相同的特征值），则 $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$，且矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的所有特征值为 $\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$.

评论 不可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 必有 0 特征值.

定理 4.5 相似矩阵具有相同的特征多项式，从而它们具有相同的特征值。

定义 4.4 (迹) 定义

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的迹。

定理 4.6 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则有

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad |\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

定理 4.7 相似矩阵具有相同的迹和相同的行列式.

定理 4.8 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个块对角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 的特征多项式的乘积，于是 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 的所有特征值就是 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值。

4.3 矩阵可对角化的条件

定义 4.5 (可对角化) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ **可对角化**。

定理 4.9 n 阶矩阵可对角化的充要条件是有 n 个线性无关的特征向量；且对角矩阵的主对角线由特征值（可按任意次序）构成，相似变换矩阵由属于相应特征值的特征向量构成。

定理 4.10 属于不同特征值的特征向量线性无关。

定理 4.11 若 n 阶矩阵有 n 个互不相同的特征值，则矩阵可对角化。

定理 4.12 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值，而 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \boldsymbol{\alpha}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{is_i}(i = 1, 2, \cdots, m)$，则向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{1s_1}, \boldsymbol{\alpha}_{21}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{2s_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{m1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ms_m}$$

线性无关。

定理 4.13 设 λ_0 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量个数不超过 k.

定理 4.14 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是每个 k_i 重特征值 λ_i 对应的特征矩阵 $\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 的秩为 $n - k_i$.

定理 4.15 在 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值时 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化的判定方法：

对每个重特征值 λ_i，求矩阵 $\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 的秩 r_i，若对每个重特征值 λ_i，$n - r_i$ 都等于 λ_i 的重数，则 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化；否则 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化。

定理 4.16 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化的过程：

（1）解特征方程 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 得特征值 $\lambda = \lambda_1(s_1\text{重}), \cdots, \lambda_m(s_m\text{重})$；

（2）对每个特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, m$，解齐次方程组

$$(\lambda_i \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$$

得到一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$. 若有某个 i 使得 $r_i < s_i$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化；

（3）当所有的 $r_i = s_i, i = 1, 2, \cdots, m$，则令

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{11} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{1s_1} & \boldsymbol{\alpha}_{21} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{2s_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{m1} & \cdots \boldsymbol{\alpha}_{ms_m} \end{pmatrix}$$

即得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{s_1\text{个}}, \underbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}_{s_2\text{个}}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{s_m\text{个}})$.

由于每个齐次线性方程组的基础解系都不是唯一的，因此 $\boldsymbol{P}$ 的取法也不是唯一的，但是，由于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的主对角线上的元素是 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值，因此除了主对角线上元素的次序不同外，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是唯一确定的。

4.4 正交矩阵与施密特正交化方法

定义 4.6 (向量内积) 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量，用列向量表示为 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$. 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为实向量，则称 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 为**实内积**；若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为复向量，则称 $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 为 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的**复内积**. 统称为**向量的内积**，记为 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$，并称 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度**或**模**；称模为 1 的向量为**单位向量**.

定义 4.7 (向量夹角、向量正交) 若 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**或**垂直**. 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均为非零实向量，则称 $\arccos\left(\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|}\right)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角**.

定义 4.8 (正交向量组、法正交组) 若一个不含零向量的向量组中的向量两两正交，则称该向量组为**正交向量组**；若一个正交向量组中的向量均为单位向量，则该向量组称为**标准正交向量组**，简称**法正交组**。

定理 4.17 正交向量组必线性无关。

定理 4.18 (施密特 (Schmidt) 正交化) 由线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可构造出与之等价的正交向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$. 并且 $\boldsymbol{\xi}_i$ 可以表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_i, i = 1, \cdots, n$ 的线性组合.

定义 4.9 (正交矩阵) 若实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**。

定理 4.19 对于方阵 $\boldsymbol{A}$，下列条件互为等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵；
(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$；
(3) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$；
(4) $\boldsymbol{A}$ 的列向量构成标准正交列向量组；
(5) $\boldsymbol{A}$ 的行向量构成标准正交行向量组.

定理 4.20 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵，λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，则有

(1) $|\boldsymbol{A}|^2 = 1$；
(2) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$；
(3) $|\lambda| = 1$.

4.5 实对称矩阵的对角化

定义 4.10 (实对称矩阵) 一个实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有对称性，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，称它为**实对称矩阵**.

定理 4.21 实对称矩阵的特征值均为实数.

定理 4.22 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交.

定理 4.23 设有实 n 维单位列向量 $\boldsymbol{\beta}$，则必能找到 $n-1$ 个向量与 $\boldsymbol{\beta}$ 一起构成由 n 个向量组成的标准正交向量组.

定理 4.24 若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则存在同阶的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是实对角矩阵，从而实对称矩阵可对角化.

5 实二次型

5.1 二次型的化简

定义 5.1 (二次型) 含有 n 个实变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的在某个数域上的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
+a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
+\cdots \\
+ a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

称为二次型：若全部 $a_{ij} \in \mathbf{R}$，则称式(5.1)中的 f 为实二次型；若全部 $a_{ij} \in \mathbf{C}$，则称式(5.1)中的 f 为复二次型.

定义 5.2 若记

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

则二次型(5.1)可简洁地记为

$$
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{5.2}
$$

称之为二次型 f 的矩阵表示，其中 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵。

定义 5.3 (二次型的矩阵) 称(5.2)中的对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为二次型 f 的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 f 的秩.

定义 5.4 (线性变换、非退化线性变换) 称如下的变换

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\
x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\
\cdots\cdots \\
x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n,
\end{cases}
$$

为由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个线性变换.

若线性变换的系数行列式

$$
|\boldsymbol{P}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0
$$

则称该线性变换为非异线性变换或非退化线性变换.

若 $|\boldsymbol{P}| = 0$，则称该线性变换为奇异线性变换或退化线性变换.

若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则称该线性变换为正交变换.

定义 5.5 (合同、合同变换) 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个同阶方阵，若存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，则称 $\boldsymbol{A}$ **合同于** $\boldsymbol{B}$. 称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**合同矩阵**，而称 $\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的**合同变换矩阵**.

定义 5.6 (二次型的标准形) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过非退化线性变换后得到一个只包含变量平方项的二次型 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，称为原二次型的**标准形**.

定理 5.1 存在非退化的线性变换将实二次型化为标准形，且平方项系数可以任意次序排列；存在可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为实对角矩阵，且对角元素可以任意次序排列.

定理 5.2 化实二次型为标准形的方法，即用正交矩阵将实对称矩阵对角化的方法步骤：

设 $\boldsymbol{A}$ 为实二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵。

（1）求解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$$

解得特征值 $\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$；

（2）对每一个特征值 $\lambda=\lambda_i(s_i\text{重})$，求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$$

的基础解系（即特征向量的极大无关组）$\boldsymbol{\xi}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{i_{s_i}}$。并标准正交化为

$$\boldsymbol{\eta}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{i_{s_i}}$$

（3）将标准正交化的特征向量作为列构成正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\eta}_n)$$

则非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将实二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 化为标准形

$$f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\cdots,\lambda_r)$

定理 5.3 对一般二次型采用配方法化为标准形的步骤：

设二次型为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

反复对可能出现的以下两种情况进行处理.

情况 1 式中有非零平方项。例如若非零平方项为 $a_{11}x_1^2$，则将式中所有含 x_1 的项配成一个平方项 $a_{11}\left(x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2$，并令非退化线性变换为

$$\begin{cases}y_1=x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\\ y_2=x_2\\ \cdots\\ y_n=x_n\end{cases}$$

则可将原式化为不含 x_1 也不含 y_1 的交叉项的式子.

情况 2 式中无非零平方项。这时可以用一个线性变换配出平方项。例如，若有非零交叉项为 $2a_{12}x_1x_2$，则可作如下非退化线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \cdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

就可将原式化为含有 y_1, y_2 的平方项的式子. 再按情况 1 进行处理。

每配成一个平方项，就消去一个元素如与 x_1 相关的所有交叉项，直到一系列的变换将所有的交叉项均消去即成标准形。配方法所得的非退化线性变换在实际操作中可在所有配方配成后一次性求出。

定理 5.4 (合同变换法) 可用初等变换为工具将二次型化为标准形：

设二次型矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

做一次列初等变换后接着做一次相应的行初等变换，重复这种做法，直到得到如下形式的矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{P} \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵. 因为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \\ & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{P} \end{pmatrix}$$

所以可用非退化线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型化为标准形：

$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$$

上述变换称之为合同变换法。实际使用时通常是先用若干次列初等变换将某行非对角元化为 0, 再依次做同样次数的相应行初等变换，反复进行.

定义 5.7 (实（复）二次型的规范形) 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过非退化的实线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2, r\leq n$$

称为原二次型的**实规范形**，r 称为该**二次型的秩**；复二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过非退化的复线性变换得到如下形式的二次型

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2, r\leq n$$

称为原二次型的**复规范形**，r 称为该二次型的秩。

定理 5.5 存在非退化的复线性变换将复二次型化为复规范形

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2;$$

存在复可逆矩阵将复对称矩阵合同变换为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_r,\boldsymbol{O}_{n-r})$，其中 r 为二次型矩阵的秩。

定理 5.6 (惯性定理) 存在非退化的实线性变换将实二次型化为实规范形

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2;$$

存在实可逆矩阵将实对称矩阵合同变换为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_p,-\boldsymbol{E}_{r-p},\boldsymbol{O}_{n-r})$，其中 r 为实二次型矩阵的秩，p 是唯一确定的。

定义 5.8 (正惯性指数、负惯性指数) 若实二次型的实规范形为

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2,\quad r\leq n$$

则称 p 为原二次型的**正惯性指数**；称 $r-p$ 为原二次型的**负惯性指数**.

定理 5.7 若实二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(b_{11},\cdots,b_{nn})$，则正对角元个数为实二次型的正惯性指数，负对角元个数为实二次型的负惯性指数，非零对角元个数为二次型的秩。

定理 5.8 实二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值个数为正惯性指数，负特征值个数为负惯性指数，非零特征值个数为二次型的秩.

5.2 正定二次型

定义 5.9 (正定二次型、正定矩阵) 设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为实二次型，若当实向量 $\boldsymbol{x}\neq\theta$ 时都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，则称 f 为**正定二次型**，称 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵**；
当 $\boldsymbol{x}\neq\theta$ 时都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$，则称 f 为**负定二次型**，称 $\boldsymbol{A}$ 为**负定矩阵**；
当 $\boldsymbol{x}\neq\theta$ 时都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq 0$，则称 f 为**半正定二次型**，称 $\boldsymbol{A}$ 为**半正定矩阵**；
当 $\boldsymbol{x}\neq\theta$ 时都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq 0$，则称 f 为**半负定二次型**，称 $\boldsymbol{A}$ 为**半负定矩阵**.

定义 5.10 (矩阵的顺序主子式和主子式) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的左上角 i 行 i 列 $(1\leq i\leq n)$ 构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的i **阶顺序主子式**。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列 $(1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n)$ 的元素构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的k **阶主子式**。

定理 5.9 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶的实对称矩阵，则下列条件互为等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵；
(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为正；
(3) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n；
(4) $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均为正.

定理 5.10 若 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，则下列条件互为等价：

(1) $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵；
(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于等于零；
(3) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$；
(4) $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式非负.

6 线性空间与线性变换

6.1 线性空间的定义

定义 6.1 (数环) 设 $\mathfrak{R}$ 是非空数集，其中任何两个数之和、差与积仍属于 $\mathfrak{R}$（即 $\mathfrak{R}$ 关于加、减、乘法运算是封闭的），则称 $\mathfrak{R}$ 是一个**数环**。

定义 6.2 (数域) 若 K 是至少含有两个互异数的数环，且其中任何两数 a 与 b 之商 $(b \neq 0)$ 仍属于 K，则称 K 是一个**数域**。

定义 6.3 (线性空间) 设 V 是一个非空集合，K 是一个数域，V 满足以下两个条件：

(1) 在 V 中定义一个封闭的加法运算，即当 $x, y \in V$ 时，有唯一的 $z = x + y \in V$，且此加法运算满足下面 4 条性质：
   1) $x + y = y + x$（交换律）
   2) $x + (y + z) = (x + y) + z$（结合律）
   3) 存在**零元素** $\mathbf{0} \in V$：对 V 中任一元素 x 都有 $x + \mathbf{0} = x$
   4) 存在**负元素**：对任一元素 $x \in V$，存在一个元素 $y \in V$，使得 $x + y = \mathbf{0}$，称 y 为 x 的负元素（或相反元素），记为 $-x$，即 $x + (-x) = \mathbf{0}$

(2) 在 V 中定义一个封闭的数乘运算，即当 $x \in V, \lambda \in K$ 时，有唯一的 $\lambda x \in V$，且此数称运算满足下面 4 条性质：
   1) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$（分配律）
   2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$（数因子分配律）
   3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$（结合律）
   4) $1 \cdot x = x$

其中 x, y, z 是 V 中的任意元素，λ, μ 是数域 K 中的任意数，1 是数域 K 中的单位数。

称 V 是数域 K 上的**线性空间**，记为 $V(K)$. 当 K 是实数域 $\mathbf{R}$ 时，称 V 为**实线性空间**；当 K 是复数域 $\mathbf{C}$ 时，称 V 为**复线性空间**.

定理 6.1 线性空间的性质：

性质 1　线性空间的零元素是唯一的.

性质 2　线性空间中任一元素的负元是唯一的.

性质 3　设 $0, 1, -1, \lambda \in K, x, -x, \mathbf{0} \in V$ 则有（1）$0x = \mathbf{0}$（2）$(-1)x = -x$（3）$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$（4）若 $\lambda x = \mathbf{0}$，则 $\lambda = 0$ 或 $x = \mathbf{0}$

性质 4　只含一个元素的线性空间称为**零空间**，显见，仅有的那个元素是零元素.

6.2 线性空间的基、维数与坐标

定义 6.4 (线性相关与线性无关) 已知 $V(K)$ 是线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $V(K)$ 的一组向量，如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0}$，则称该向量组**线性相关**，否则称

为线性无关.

定义 6.5 (维数) 设 V 是数域 K 上的线性空间，

(1) 如果在 V 中可以找到任意多各线性无关的向量，则称 V 是**无限维线性空间**；

(2) 如果存在有限多个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n (n \geq 1) \in V$，满足：

  1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

  2) V 中任一向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

则称 V 是**有限维线性空间**，称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组**基**（或**基底**），$\boldsymbol{\alpha}_i$ 叫第 i 个**基向量**，基向量的个数 n 称为线性空间 V 的**维数**，记为 $\dim(V) = n$，并称 V 是 n 维线性空间.

定理 6.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，$\boldsymbol{\alpha}$ 可以唯一地由这一组基线性表出.

定义 6.6 (坐标) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，若有一组有序数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

这组有序数就称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的**坐标**，记为

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

定理 6.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，并且

$$(\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2\cdots\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P} \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

若 V 中任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2. \cdots, y_n)$，则

$$(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{P}$ 称为从基底 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 到基底 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 的**过渡矩阵**，称式(6.1)为**基底变换公式**，称式(6.2)为**坐标变换公式**。其中式(6.2)为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

6.3 线性空间的子空间

定义 6.7 (子空间) 设 W 是数域 K 上的线性空间 V 的一个非空子集，若 W 关于 V 上的加法和数乘也构成数域 K 上的一个线性空间，则称 W 是 V 的一个**线性子空间**，简称**子空间**，记为 $W \subseteq V$，若 $W \neq V$，记为 $W \subset V$.

定理 6.4 线性空间 V 的一个非空子集 W 是 V 的子空间的充要条件是

(1) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W$，有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in W$，即对加法封闭；
(2) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in W, \lambda \in K$，有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} \in W$，即对数乘封闭.

亦可把上面两个条件合并得到

对任意的 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W, \lambda, \mu \in K$，有 $\lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\beta} \in W$。

定义 6.8 每个线性空间至少有两个子空间，一个是仅有零向量构成的，称为**零子空间**；一个是它自身，称为**平凡子空间**，而其他的子空间称为非平凡子空间（或**真子空间**）.

定义 6.9 设 V 是数域 K 上的线性空间，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s \in V$，由这组向量所有可能的线性组合构成的集合

$$W(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = \left\{\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\alpha}_i, \quad k_i \in K, i = 1, 2, \cdots, s\right\}$$

是非空的，容易验证 W 是 V 的子空间，这样的子空间称为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间，记作

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} \quad \text{或} \quad L\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$$

特别地，零子空间是由零向量生成的子空间 $\operatorname{span}\{\mathbf{0}\}$

设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (a_{ij} \in \mathbf{R})$$

是实数域 $\mathbf{R}$ 上的齐次线性方程组，它的全体解向量是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个非空子集 W，显然 W 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子空间，这个子空间称为该齐次方程组的**解空间**. 该齐次方程组的任一组基础解系是 W 的一组基，若方程组的系数矩阵的秩为 r，则 $\dim(W) = n - r$.

定义 6.10 (子空间的交与和) 设 W_1, W_2 是数域 K 上线性空间 V 的两个子空间，定义 W_1 与 W_2 的交为

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} \in W_1, \boldsymbol{\alpha} \in W_2\}$$

W_1 与 W_2 的和为

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, \text{对所有的} \boldsymbol{\alpha} \in W_1, \boldsymbol{\beta} \in W_2\}$$

定理 6.5 数域 K 上线性空间 V 的两个子空间 W_1 与 W_2 的交与和仍是 V 的子空间.

定理 6.6 若 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个有限维子空间，则

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

定义 6.11 (直和) 若 $W_1 + W_2$ 中任一向量都只能唯一地表示为子空间 W_1 的一个向量与子空间 W_2 的一个向量的和，则称 $W_1 + W_2$ 是**直和**（或**直接和**），记为 $W_1 \oplus W_2$ 或 $W_1 \dotplus W_2$。

若 $W = W_1 \oplus W_2$，则称在 W 内 W_1 是 W_2 的**补空间**，或 W_2 是 W_1 的**补空间**.

定理 6.7 $W_1 + W_2$ 是直和的充要条件是 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$。

定理 6.8 $W_1 + W_2$ 是直和的充要条件是 $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$。

定义 6.12 设 $W_1, W_2. \cdots, W_m$ 是线性空间 V 的子空间，若

(1) $W_1 + W_2 + \cdots + W_m = V$;
(2) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}, (W_1 + W_2) \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}, \cdots, (W_1 + W_2 + \cdots + W_{m-1}) \cap W_m = \{\mathbf{0}\}$

则称 V 是 $W_1, W_2, \cdots, W_m$ 的直和，记作

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$$

6.4 线性变换

定义 6.13 (线性变换) 设 V_1, V_2 都是数域 K 上线性空间，根据某一规则 T，对 V_1 中的任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$，有 V_2 中的唯一元素 $\boldsymbol{\alpha}'$ 与之对应，即 $T\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'$，则称 T 为 V_1 到 V_2 的**映射**。

如果 V_1 到 V_2 的映射 T 还满足

$$T(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = T\boldsymbol{\alpha} + T\boldsymbol{\beta}, \quad T(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \lambda T\boldsymbol{\alpha}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V_1, \lambda \in K$，则称 T 为 V_1 到 V_2 的**线性映射**。在 $V_1 = V_2 = V$ 时，称这个 T 为 V 上的**线性变换**.

定义 6.14 几个特殊的线性变换：

(1) **数乘变换**：设 k 是数域 K 内的一个常数，对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，令 $T_k\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha}$，容易验证 T_k 是 V 上的线性变换.
(2) **恒等变换**：设 $T\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$，即 T 把 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 变成自身，则称 T 为**恒等变换**或**单位变换**，可记为 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{I}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$.
(3) **零变换**：设 $T\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，即 T 把 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 变成零元素，则称 T 为零变换，记为 T_0，即 $T_0\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

定义 6.15 (像空间与核空间) （1）若 V_1, V_2 都是数域 K 上线性空间，设线性映射 $T: V_1 \to V_2$，则称 V_1 中所有元素的像的集合为**像空间**记作 $\mathcal{R}(T)$ 或 $\mathrm{Im}(T)$，简记为 $\mathcal{R}$.

（2）对于 V_1 到 V_2 的线性映射 T，称集合

$$N = N(T) = \{\boldsymbol{\alpha} : T\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}', \boldsymbol{\alpha} \in V_1\}$$

为 T 的**核空间**，也记作 $\ker(T)$，其中 $\mathbf{0}'$ 是 V_2 的零元。

定理 6.9 线性映射的像空间与核空间是线性子空间.

定理 6.10 设对 V 的两个线性变换 T_1 和 T_2，有

$$T_i\varepsilon_i = T_2\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则 $T_1 = T_2$（这里两个线性变换相等是指它们对 V 的任一向量的像相等）.

定理 6.11 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，任给 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n \in V$，则一定存在唯一的线性变换 T，使得

$$T\varepsilon_i = \boldsymbol{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

定理 6.12 在线性空间 V 的一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下，V 上的线性变换 T 与 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 一一对应，且它们的对应关系是 $(T\varepsilon_1 T\varepsilon_2 \cdots T\varepsilon_n) = (\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)\boldsymbol{A}$. 即 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个列向量是 $T\varepsilon_i$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标。

定理 6.13 在 n 维线性空间 V 中取定两组基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 与 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \cdots, \boldsymbol{\omega}_n$，设由基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \cdots, \boldsymbol{\omega}_n$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{P}\text{可逆})$$

即 $(\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2\cdots\boldsymbol{\omega}_n) = (\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)\boldsymbol{P}$. 并设 V 上的线性变换 T 在这两组基底下的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$）

定理 6.14 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 的充要条件是：它们是 n 维的线性空间 V 上的某个线性变换 T 在不同基底下的矩阵.

6.5 线性变换的特征值和特征向量

定义 6.16 (线性变换的特征值与特征向量) 设 V 是数域 K 上线性空间，T 是 V 上的一个线性变换，若对 K 中的一个数 λ，存在 V 的一个非零向量 ξ，使得

$$T\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$$

则称 λ 是线性变换 T 的一个**特征值**，$\boldsymbol{\xi}$ 是 T 的属于 λ 的**特征向量**.

定理 6.15 设 V 是数域 K 上线性空间，T 是 V 上的一个线性变换，则 T 的属于特征值 λ 的所有特征向量和零向量一起构成了 V 的一个子空间，该子空间记为

$$V_\lambda = \{\boldsymbol{\xi} \in V : T\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}\}$$

定义 6.17 (特征子空间) 称 V_λ 为线性变换 T 对应于特征值 λ 的**特征子空间**.

定理 6.16 计算线性变换 T 的特征值和特征向量的步骤：

(1) 给定 V 的一组基，求出 T 在这组基下的矩阵 A；
(2) 计算特征多项式 $p(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$
(3) 求 $p(\lambda) = 0$ 的含于 K 的根（T 的特征值）

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

(4) 对每个 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，求齐次线性方程组

$$(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$$

的一个基础解系；

(5) 以求出的基础解系为坐标写出 V 的一个向量组，它就是 $V_{\lambda_i} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的一组基.

若计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，只需直接进行第（2）、（3）、（4）步，且第（3）步须求出 $p(\lambda) = 0$ 的全部复根（即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值）.

定义 6.18 将线性变换 T 在任一组基下的矩阵的特征多项式称为 T 的**特征多项式**，而将 T 在任一组基下的矩阵的特征矩阵称为 T 的**特征矩阵**.

定理 6.17 有限维线性空间上的线性变换的特征值和特征多项式与所选基底无关。

定理 6.18 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是线性变换 T（或矩阵 $\boldsymbol{A}$）的 s 个互异的特征值，$\boldsymbol{\xi}_i$ 是属于特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关.

定义 6.19 设 T 是 n 维线性空间 V 上的一个线性变换，若 T 在某组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为对角矩阵，则称 T 有**最简表示**.

定理 6.19 n 维线性空间 V 上的一个线性变换 T 有最简表示的充要条件是 T 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 6.20 若线性变换 T 有 n 个互异的特征值，则 T 有最简表示.

定理 6.21 若 λ_1, λ_2 是线性变换 T 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 是 T 的属于 λ_1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_t$ 是 T 的属于 λ_2 的线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s; \boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \cdots, \boldsymbol{\nu}_t$ 线性无关.

定理 6.22 若 λ_0 是线性变换 T 的 s 重特征值，则 T 的属于 λ_0 的特征向量中，线性无关的最大组包含的向量的个数不超过 s.

定理 6.23 n 维线性空间上的线性变换 T 有最简表示 $\Longleftrightarrow T$ 有 n 个特征值（包括重数），且对 T 的每个 s_i 重特征值 λ_i，其对应的特征矩阵 $\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 的秩为 $n - s_i$.