线性代数笔记

刘承杰

南京大学软件学院

2021 年 7 月 23 日

目录

1 行列式

1.1 二阶与三阶行列式

定义 1.1 (二阶行列式) 将 4 个可以进行乘法与加法运算的元素 a, b, c, d 排成两行两列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

并称之为**二阶行列式**。行列式也可简记为 Δ、D 等

定理 1.1 对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ eb_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

有如下结论:

1. 若 $\Delta \neq 0$，则方程组(1) 有唯一解：$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$
2. 若 $\Delta = 0$，但 Δ_1, Δ_2 不全为零则方程组(1) 无解
3. 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$，则方程组(1)有无穷多组解

定义 1.2 (三阶行列式) 设有 9 个可以进行乘法和加法运算的元素排成三行三列，引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

并称之为**三阶行列式**，其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 为该行列式的元素。

定理 1.2 对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

记

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

有如下结论：

1. 若 $\Delta \neq 0$，则方程组(2)有唯一解 $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$
2. 若 $\Delta = 0$，而 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 不全为 0，则方程组(2)无解
3. 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$，则方程组(2)可能无解也可能有无穷多组解

1.2 n 阶行列式

定义 1.3 (n 阶行列式) 设有 n^2 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 n 行 n 列，引用记号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称它为n **阶行列式**，它是一个算式，有时也用记号 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 表示。

其数值可归纳定义为：当 $n=1$ 时，一阶行列式的值定义为 $D_1 = \det(a_{11}) = a_{11}$；当 $n \geq 2$ 时，

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

而

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的**余子式**，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。显然 M_{ij} 为一个 $n-1$ 阶的行列式，它是在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后得到的一个行列式。

评论 三角行列式的值为主对角线上元素的乘积。

定义 1.4 (转置行列式) 设

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 A' 为行列式 A 的**转置行列式**（也可以表示为 A^{T}）。显然 A' 是行列式 A 的行和列互换之后得到的行列式。

定理 1.3 n 阶行列式的性质：

- 行列式与它的转置行列式的值相等。
- 对调两行（列）的位置，行列式的值相差一个负号
- 两行（列）相等的行列式的值为 0
- 行列式可以按任意一行（列）展开
- 行列式的任一行（列）元素的公因子可以提到行列式外面
- 若行列式的某两行（列）成比例，则该行列式的值为零
- 若行列式的第 i 行（列）的每一个元素都可以表示为两数的和，则该行列式可以表示为两个行列式之和
- 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）元素的代数余子式对应乘积之和为零

  即，若设 $A=|a_{ij}|_{n\times n}$，则有
  $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} A, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$
  或
  $$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} A, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

定理 1.4 (克莱姆法则) 对于 n 元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_3=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{3}$$
若系数行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$
则方程组(3)有解，且解是唯一的，这个解可以表示为
$$x_j=\frac{D_j}{D} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$
其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是将 D 的第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 换成方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得到的行列式，即
$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

考虑方程组(3)的一个特殊情形，方程组(3)右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 全部为零，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_3 = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

这样的方程组称为**齐次线性方程组**，而方程组(3)称为**非齐次线性方程组**。

定理 1.5 含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组(4)若有非零解，则它的系数行列式等于零。

2 矩阵，向量

2.1 矩阵和 n 维向量的概念

定义 2.1 (矩阵) 有 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列数表，外加括号，写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 m 行 n 列矩阵，简称$m\times n$ **矩阵**。

定义 2.2 (n 维向量) n 个数 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 组成的有序数组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为n **维向量**，前者称为**行向量**，后者称为**列向量**。

评论 几个特殊的矩阵：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**。为了书写简洁起见，也经常用 $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 表示此对角矩阵 $\boldsymbol{A}$。

如果对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}=k$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**，当 $k=1$ 时，称为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**。类似地，可定义**下三角形矩阵**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果矩阵的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**；如果矩阵的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**。例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -7 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

依次是对称矩阵和反对称矩阵。

定义 2.3 (转置矩阵) 把 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行与列互换后得到一个 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 A^{T} 或 A'。

定义 2.4 (方阵的行列式) 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$。如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**非异矩阵**，如果 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**奇异矩阵**或**退化矩阵**。

2.2 矩阵运算

定义 2.5 (矩阵的加法) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和定义为 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

定理 2.1 矩阵加法的性质：

1. 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

2. 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
3. 零矩阵：对任一矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$（$\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 是同型矩阵）
4. 负矩阵：对任一矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，可定义 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$，称 $-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵。显然 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

定义 2.6 (矩阵的数乘) 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 相乘的积的定义为 $(ka_{ij})_{m\times n}$，记为 $k\boldsymbol{A}$:

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

定理 2.2 (方阵的数乘与其行列式) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 为任意数，则有 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$

定义 2.7 (矩阵的乘法) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 定义为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

评论 只有当 $\boldsymbol{A}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义，且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同，$\boldsymbol{C}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同。

矩阵乘法不满足交换律和消去律，但满足结合律，数乘结合律和分配律。

定义 2.8 (矩阵多项式) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，定义 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots,\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$ 其中 k 为正整数，这也就是说 $\boldsymbol{A}^k$ 是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘，称 $\boldsymbol{A}^k$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k **次幂**。再任取 $m+1$ 个实数 $a_0,a_1,\cdots,a_m$，显然

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$$

仍为 n 阶矩阵。称 $f(\boldsymbol{A})$ 为**矩阵多项式**

定理 2.3 转置矩阵的性质:

1. $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A};\quad|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$
3. $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
4. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，该式还可以推广为 $(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$

2.3 分块矩阵

定义 2.9 (分块矩阵) 对于一个 $m\times n$ 矩阵，如果在行的方向分成 s 块，在列的方向分成 t 块，就得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $s\times t$ 分块矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}=\begin{array}{c c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}&\begin{array}{c}m_1\text{行}\\m_2\text{行}\\\vdots\\m_s\text{行}\end{array}\\\begin{array}{cccc}n_1\text{列}&n_2\text{列}&\cdots&n_t\text{列}\end{array}&\end{array}$$

其中 $m_1+m_2+\cdots+m_s=m, n_1+n_2+\cdots+n_t=n$，而 $\boldsymbol{A}_{kl}(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,t)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块。

定理 2.4 分块矩阵的运算：

1. 分块矩阵的加法。设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}, \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}$ 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 对应的子块 $\boldsymbol{A}_{kl}$ 和 $\boldsymbol{B}_{kl}$ 都是同型矩阵，则
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{kl}+\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}$$
2. 分块矩阵的数乘。设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$，$k$ 是数，则
$$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$$
3. 分块矩阵的乘法。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$ 如果把 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别分块为 $r\times s$ 和 $s\times t$ 分块矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的列的分块法与 $\boldsymbol{B}$ 的行的分块法完全相同，则
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix}=\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{C}_{kl})_{r\times t}$$
其中 $\boldsymbol{C}$ 是 $r\times t$ 分块矩阵，且
$$\boldsymbol{C}_{kl}=\boldsymbol{A}_{k1}\boldsymbol{B}_{1l}+\boldsymbol{A}_{k2}\boldsymbol{B}_{2l}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ks}\boldsymbol{B}_{sl}=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{B}_{il}(k=1,2,\cdots,r;l=1,2,\cdots,t)$$
4. 分块矩阵的转置。$s\times t$ 分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $t\times s$ 分块矩阵，如果记 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s}$，则
$$\boldsymbol{B}_{lk}=\boldsymbol{A}_{kl}^{\mathrm{T}}(l=1,2,\cdots,t;k=1,2,\cdots,s)$$
5. 分块对角矩阵。设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵，即
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}$$
其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots.s)$ 都是方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵，也称**准对角矩阵**。

2.4 初等变换与初等矩阵

定义 2.10 (初等变换) 下面三种对矩阵的变换，统称为矩阵的初等变换：

1. 对调变换：互换矩阵 i,j 两行（列），记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$
2. 数乘变换：用任意数 $k\neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行（列），记为 $kr_i(kc_i)$

3. 倍加变换：把矩阵的第 i 行（列）的 k 倍加到第 j 行（列），其中 k 为任意数，记为 $r_j + kr_i(c_j + kc_i)$

定义 2.11 (初等矩阵) 将单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 做一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

1. 初等对调矩阵

$$
\boldsymbol{E}_{(i,j)} = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & 1 & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} & & \end{array} &
\end{array}
$$

即是将单位矩阵的第 i 行与第 j 行对调后所得的矩阵。

2. 初等倍乘矩阵

$$
\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & k & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & & \\ & & \text{第}i\text{列} & & \end{array} &
\end{array}
$$

其中 $k \neq 0$ 是任意数。既是将单位矩阵的第 i 个 1 换成 k 后所得的矩阵。

3. 初等倍加矩阵

$$
\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & \cdots & k & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{第}i\text{列} & & \text{第}j\text{列} & & \end{array} &
\end{array}
$$

即是将单位矩阵的第 i 行第 j 列的元素换成 k 后所得的矩阵。

定理 2.5 (初等变换与初等矩阵) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以一个相应的 m 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以一个相应的 n 阶初等矩阵。

评论 定理说法中“相应”的含义，具体来说，就是

- $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行互换；
- $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A}$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k；
- $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{A}$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行上；
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j)$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列与第 j 列互换；
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i(k))$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k；
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j(k))$：表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

定义 2.12 (行 (列) 等价矩阵，等价矩阵) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初行等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **行等价**，记作 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r} \boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **列等价**，记作 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c} \boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$。

定理 2.6 具有行等价关系的矩阵所对应的线性方程组有相同的解。

定义 2.13 (梯形矩阵) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足下面两个条件：

(1) 若有零行，则零行全部在下方；
(2) 从第一行起，每行第一个非零元素前面的零的个数逐行增加。

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**行梯形矩阵**。若 $\boldsymbol{A}$ 还满足：

(3) 非零行的第一个非零元素为 1，且"1" 所在列的其余元素全为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**行简化梯形矩阵**。

类似可定义**列梯形矩阵**与**列简化梯形矩阵**。

定理 2.7 (矩阵的标准型) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是行简化矩阵，又是列简化矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**标准形矩阵**。矩阵的标准型可写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

即左上角为单位矩阵，其余都是零矩阵。

定理 2.8 (矩阵的化简) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则

(1) 存在 m 阶初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_s$ 使 $\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{P}_{s-1}\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$（即对 $\boldsymbol{A}$ 施加有限次的初等行变换）成为 $m \times n$ 阶行简化梯形矩阵。
也存在 n 阶初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \cdots, \boldsymbol{Q}_t$ 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_{t-1}\boldsymbol{Q}_t$（即对 $\boldsymbol{A}$ 施加有限次的初等行变换）成为 $m \times n$ 阶列简化梯形矩阵。
(2) 可以经过有限次初等行变换和初等列变换，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为标准型。

2.5 矩阵的秩

定义 2.14 (矩阵的子式) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，任取 $\boldsymbol{A}$ 的 k 行和 k 列 $(0<k\le\min\{m,n\})$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，按原来的顺序排成的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的k **阶子式**。

评论 例如，在 2×3 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-3&1\end{pmatrix}$$

中，1 阶子式是由其中一个元素所构成，共有 6 个 1 阶子式，它的 3 个 2 阶子式是:

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&-3\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}2&-1\\-3&1\end{vmatrix},$$

一般地，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $\boldsymbol{C}_m^k\boldsymbol{C}_n^k$ 个。

定义 2.15 (矩阵的秩) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 中至少存在一个非零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全为零，则称 D 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$(或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$)。并规定零矩阵的秩等于 0.

评论 与上述概念有关的结论为：

(1) $\mathrm{r}\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数；

(2) $0\le\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{m\times n})\le\min(m,n)$；

(3) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$；

(4) 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$（即 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵）$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq0\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 非异。

定理 2.9 初等行、列变换不改变矩阵的秩。

定理 2.10 行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数。

定理 2.11 任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行变换为单位矩阵，也可以经过若干次初等列变换为单位矩阵。

定理 2.12 (求矩阵的秩的方法) 先用初等行、列变换将矩阵化为梯形矩阵，其非零行的行数就是矩阵的秩。

2.6 可逆矩阵与伴随矩阵

定义 2.16 (逆矩阵) 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在同阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**，并称 $\boldsymbol{B}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

定理 2.13 可逆矩阵的性质：

(1) 可逆矩阵的逆矩阵是唯一的。

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；还有 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$

(5) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

定义 2.17 (方阵的伴随矩阵) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则称矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1n}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2n}\\\ddots&\ddots&&\ddots\\\boldsymbol{A}_{n1}&\boldsymbol{A}_{n2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{21}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n1}\\\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{n2}\\\ddots&\ddots&&\ddots\\\boldsymbol{A}_{1n}&\boldsymbol{A}_{2n}&\cdots&\boldsymbol{A}_{nn}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

评论 处理遇到 $\boldsymbol{A}^*$ 的题目时常用 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$

定理 2.14 (矩阵可逆的条件) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

定理 2.15 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵。

定理 2.16 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$

评论 判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是否是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，只需要验证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 中一个等式成立即可。

定理 2.17 (矩阵的分解) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{Q}$，其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$$

定理 2.18 任一 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可以表示成有限个 n 阶初等矩阵的乘积。进一步，任一可逆矩阵可以只经过行的初等变换化为单位阵，也可以只经过列的初等变换化为单位阵。

评论 该定理告诉我们一个求逆矩阵的方法：将 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E})$ 经过一系列行的初等变换化为 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$。

也可以用列的初等变换来求逆矩阵，即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{仅用初等列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$$

这种求逆的方法也可用于一类矩阵方程的求解。设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，可通过只做初等行变换将

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$$

来得到方程的具体解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

类似地，对矩阵方程 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 的解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$，可通过只做初等列变换

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

来得到。

定理 2.19 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 分别是 m 和 n 阶可逆矩阵，则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=\mathrm{r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})$$

2.7 向量组的线性相关与线性无关