

线性代数笔记

刘承杰

南京大学软件学院

2021 年 7 月 22 日

目录

1	行列式	1
1.1	二阶与三阶行列式	1
1.2	n 阶行列式	2
2	矩阵, 向量	5
2.1	矩阵和 n 维向量的概念	5
2.2	矩阵运算	6
2.3	初等变换与初等矩阵	8
2.4	矩阵的秩	10
2.5	可逆矩阵与伴随矩阵	11

1 行列式

1.1 二阶与三阶行列式

定义 1.1 (二阶行列式) 将 4 个可以进行乘法与加法运算的元素 a, b, c, d 排成两行两列, 引用记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

并称之为二阶行列式。行列式也可简记为 Δ 、 D 等

定理 1.1 对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

记

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

有如下结论:

1. 若 $\Delta \neq 0$, 则方程组(1)有唯一解: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$
2. 若 $\Delta = 0$, 但 Δ_1, Δ_2 不全为零则方程组(1)无解
3. 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, 则方程组(1)有无穷多组解

定义 1.2 (三阶行列式) 设有 9 个可以进行乘法和加法运算的元素排成三行三列, 引用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

并称之为三阶行列式, 其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 为该行列式的元素。

定理 1.2 对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

记

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

有如下结论：

1. 若 $\Delta \neq 0$ ，则方程组(2)有唯一解 $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$
2. 若 $\Delta = 0$ ，而 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 不全为 0，则方程组(2)无解
3. 若 $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ ，则方程组(2)可能无解也可能有无穷多组解

1.2 n 阶行列式

定义 1.3 (n 阶行列式) 设有 n^2 个可以进行加法和乘法运算的元素排成 n 行 n 列，引用记号

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称它为 n 阶行列式，它是一个算式，有时也用记号 $|a_{ij}|_{n \times n}$ 表示。

其数值可归纳定义为：当 $n = 1$ 时，一阶行列式的值定义为 $D_1 = \det(a_{11}) = a_{11}$ ；当 $n \geq 2$ 时，

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}$$

其中

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

而

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式， A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式。显然 M_{ij} 为一个 $n-1$ 阶的行列式，它是在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后得到的一个行列式。

评论 三角行列式的值为主对角线上元素的乘积。

定义 1.4 (转置行列式) 设

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 A' 为行列式 A 的转置行列式 (也可以表示为 A^T)。显然 A' 是行列式 A 的行和列互换之后得到的行列式。

定理 1.3 n 阶行列式的性质:

- 行列式与它的转置行列式的值相等。
 - 对调两行 (列) 的位置, 行列式的值相差一个负号
 - 两行 (列) 相等的行列式的值为 0
 - 行列式可以按任意一行 (列) 展开
 - 行列式的任一行 (列) 元素的公因子可以提到行列式外面
 - 若行列式的某两行 (列) 成比例, 则该行列式的值为零
 - 若行列式的第 i 行 (列) 的每一个元素都可以表示为两数的和, 则该行列式可以表示为两个行列式之和
 - 行列式任一行 (列) 的元素与另一行 (列) 元素的代数余子式对应乘积之和为零
- 即, 若设 $A = |a_{ij}|_{n \times n}$, 则有

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} = \begin{cases} A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \cdots + a_{ni} A_{nj} = \begin{cases} A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

定理 1.4 (克莱姆法则) 对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3)$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(3)有解, 且解是唯一的, 这个解可以表示为

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中 $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 是将 D 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 换成方程组右端的常数项 b_1, b_2, \cdots, b_n 所得到的行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

考虑方程组(3)的一个特殊情形，方程组(3)右端的常数项 b_1, b_2, \dots, b_n 全部为零，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

这样的方程组称为齐次线性方程组，而方程组(3)称为非齐次线性方程组。

定理 1.5 含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组(4)若有非零解，则它的系数行列式等于零。

2 矩阵, 向量

2.1 矩阵和 n 维向量的概念

定义 2.1 (矩阵) 有 $m \times n$ 个数 $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 排成 m 行 n 列数表, 外加括号, 写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵。

定义 2.2 (n 维向量) n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为 n 维向量, 前者称为行向量, 后者称为列向量。

评论 几个特殊的矩阵:

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 如果当 $i \neq j$ 时, $a_{ij} = 0$, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为对角矩阵。为了书写简洁起见, 也经常用 $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 表示此对角矩阵 A 。

如果对角矩阵 A 中的 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = k$, 则称 A 为数量矩阵, 当 $k = 1$ 时, 称为单位矩阵, 记为 E 或 I

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵, 如果当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$, 即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为上三角形矩阵。类似地，可定义下三角形矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶方阵，如果矩阵的元素满足 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ ，则称 A 为对称矩阵；如果矩阵的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ ，则称 A 为反对称矩阵。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & -7 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

依次是对称矩阵和反对称矩阵。

定义 2.3 (转置矩阵) 把 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行与列互换后得到一个 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的转置矩阵，记为 A^T 或 A' 。

定义 2.4 (方阵的行列式) 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的行列式，记为 $|A|$ 。如果 $|A| \neq 0$ ，则称矩阵 A 是非异矩阵，如果 $|A| = 0$ ，则称矩阵 A 是奇异矩阵或退化矩阵。

2.2 矩阵运算

定义 2.5 (矩阵的加法) 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 是两个同型矩阵，矩阵 A 和矩阵 B 的和定义为 $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ ，记为 $A + B$ ：

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

定理 2.1 矩阵加法的性质：

1. 交换律： $A + B = B + A$

2. 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. 零矩阵: 对任一矩阵 A , $A+O=A=O+A$ (O 与 A 是同型矩阵)
4. 负矩阵: 对任一矩阵 $A=(a_{ij})$, 可定义 $-A=(-a_{ij})$, 称 $-A$ 为 A 的负矩阵。显然 $A+(-A)=O$

定义 2.6 (矩阵的数乘) 数 k 与矩阵 $A=(a_{ij})_{m \times n}$ 相乘的积的定义为 $(ka_{ij})_{m \times n}$, 记为 kA :

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}$$

定理 2.2 (方阵的数乘与其行列式) 若 A 是 n 阶方阵, k 为任意数, 则有 $|kA| = k^n |A|$

定义 2.7 (矩阵的乘法) 设 $A=(a_{ij})_{m \times l}$, $B=(b_{ij})_{l \times n}$, 则 A 与 B 的乘积 AB 定义为 $C=(c_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$$

评论 只有当 A 的列数和 B 的行数相等时, 乘积 AB 才有意义, 且乘积矩阵 C 的行数与矩阵 A 的行数相同, C 的列数与矩阵 B 的列数相同。

矩阵乘法不满足交换律和消去律, 但满足结合律, 数乘结合律和分配律。

定义 2.8 (矩阵多项式) 设 A 是 n 阶方阵, 定义 $A^0 = E_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, \cdots , $A^{k+1} = A^k A$ 其中 k 为正整数, 这也就是说 A^k 是 k 个 A 连乘, 称 A^k 是方阵 A 的 k 次幂。再任取 $m+1$ 个实数 a_0, a_1, \cdots, a_m , 显然

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

仍为 n 阶矩阵。称 $f(A)$ 为矩阵多项式

定理 2.3 转置矩阵的性质:

1. $(A^T)^T = A$; $|A^T| = |A|$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$, 该式还可以推广为 $(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$

定义 2.9 (分块矩阵) 对于一个 $m \times n$ 矩阵, 如果在行的方向分成 s 块, 在列的方向分成 t 块, 就得到 A 的一个 $s \times t$ 分块矩阵, 记作

$$A = (A_{kl})_{s \times t} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \text{ 行} \\ m_2 \text{ 行} \\ \vdots \\ m_s \text{ 行} \end{matrix}$$

$n_1 \text{ 列} \quad n_2 \text{ 列} \quad \cdots \quad n_t \text{ 列}$

其中 $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n$, 而 $A_{kl} (k=1, 2, \cdots, s; l=1, 2, \cdots, t)$ 称为 A 的子块。

定理 2.4 分块矩阵的运算:

1. 分块矩阵的加法。设分块矩阵 $A = (A_{kl})_{s \times t}$, $B = (B_{kl})_{s \times t}$ 如果 A 与 B 对应的子块 A_{kl} 和 B_{kl} 都是同型矩阵, 则

$$A + B = (A_{kl} + B_{kl})_{s \times t}$$

2. 分块矩阵的数乘。设分块矩阵 $A = (A_{kl})_{s \times t}$, k 是数, 则

$$kA = (kA_{kl})_{s \times t}$$

3. 分块矩阵的乘法。设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$ 如果把 A, B 分别分块为 $r \times s$ 和 $s \times t$ 分块矩阵, 且 A 的列的分块法与 B 的行的分块法完全相同, 则

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} = C = (C_{kl})_{r \times t}$$

其中 C 是 $r \times t$ 分块矩阵, 且

$$C_{kl} = A_{k1}B_{1l} + A_{k2}B_{2l} + \cdots + A_{ks}B_{sl} = \sum_{i=1}^s A_{ki}B_{il} (k = 1, 2, \cdots, r; l = 1, 2, \cdots, t)$$

4. 分块矩阵的转置。 $s \times t$ 分块矩阵 $A = (A_{kl})_{s \times t}$ 的转置矩阵 A^T 为 $t \times s$ 分块矩阵, 如果记 $A^T = (B_{lk})_{t \times s}$, 则

$$B_{lk} = A_{kl}^T (l = 1, 2, \cdots, t; k = 1, 2, \cdots, s)$$

5. 分块对角矩阵。设 n 阶矩阵 A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且在对角线上的子块都是方阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都是方阵, 则称 A 为分块对角矩阵, 也称准对角矩阵。

2.3 初等变换与初等矩阵

定义 2.10 (初等变换) 下面三种对矩阵的变换, 统称为矩阵的初等变换:

1. 对调变换: 互换矩阵 i, j 两行 (列), 记为 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$
2. 数乘变换: 用任意数 $k \neq 0$ 去乘矩阵的第 i 行 (列), 记为 $kr_i (kc_i)$
3. 倍加变换: 把矩阵的第 i 行 (列) 的 k 倍加到第 j 行 (列), 其中 k 为任意数, 记为 $r_j + kr_i (c_j + kc_i)$

定义 2.11 (初等矩阵) 将单位矩阵 E 做一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

1. 初等对调矩阵

$$E_{(i,j)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 第 i 列 第 j 列

即是将单位矩阵的第 i 行与第 j 行对调后所得的矩阵。

2. 初等倍乘矩阵

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行}$$

\uparrow
 第 i 列

其中 $k \neq 0$ 是任意数。既是将单位矩阵的第 i 个 1 换成 k 后所得的矩阵。

3. 初等倍加矩阵

$$E(i, j(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \end{matrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 第 i 列 第 j 列

即是将单位矩阵的第 i 行第 j 列的元素换成 k 后所得的矩阵。

定理 2.5 (初等变换与初等矩阵) 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以一个相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以一个相应的 n 阶初等矩阵。

评论 定理说法中“相应”的含义，具体来说，就是

- $E(i, j)A$: 表示 A 的第 i 行与第 j 行互换;
- $E(i(k))A$: 表示 A 的第 i 行乘以 k ;
- $E(i, j(k))A$: 表示 A 的第 j 行乘以 k 加到第 i 行上;
- $AE(i, j)$: 表示 A 的第 i 列与第 j 列互换;
- $AE(i(k))$: 表示 A 的第 i 列乘以 k ;
- $AE(i, j(k))$: 表示 A 的第 i 列乘以 k 加到第 j 列上.

定义 2.12 (行 (列) 等价矩阵, 等价矩阵) 如果矩阵 A 经过有限次初等行变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与 B 行等价, 记作 $A \xrightarrow{r} B$; 如果矩阵 A 经过有限次初等列变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与 B 列等价, 记作 $A \xrightarrow{c} B$; 如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称矩阵 A 与 B 等价, 记作 $A \rightarrow B$.

定理 2.6 具有行等价关系的矩阵所对应的线性方程组有相同的解。

定义 2.13 (梯形矩阵) 若矩阵 A 满足下面两个条件:

- (1) 若有零行, 则零行全部在下方;
- (2) 从第一行起, 每行第一个非零元素前面的零的个数逐行增加。

则称矩阵 A 为行梯形矩阵。若 A 还满足:

- (3) 非零行的第一个非零元素为 1, 且“1”所在列的其余元素全为零, 则称 A 为行简化梯形矩阵。

类似可定义列梯形矩阵与列简化梯形矩阵。

定理 2.7 (矩阵的标准型) 若矩阵 A 既是行简化矩阵, 又是列简化矩阵, 则称 A 是标准形矩阵。矩阵的标准型可写为

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

即左上角为单位矩阵, 其余都是零矩阵。

定理 2.8 (矩阵的化简) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则

- (1) 存在 m 阶初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s 使 $P_s P_{s-1} \cdots P_2 P_1 A$ (即对 A 施加有限次的初等行变换) 成为 $m \times n$ 阶行简化梯形矩阵。
也存在 n 阶初等矩阵 Q_1, Q_2, \dots, Q_t 使 $A Q_1 Q_2 \cdots Q_{t-1} Q_t$ (即对 A 施加有限次的初等行变换) 成为 $m \times n$ 阶列简化梯形矩阵。
- (2) 可以经过有限次初等行变换和初等列变换, 将矩阵 A 化为标准型。

2.4 矩阵的秩

定义 2.14 (矩阵的子式) 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 任取 A 的 k 行和 k 列 ($0 < k \leq \min\{m, n\}$), 位于这些行列交叉处的 k^2 个元素, 按原来的顺序排成的 k 阶行列式, 称为矩阵 A 的 k 阶子式。

评论 例如, 在 2×3 的矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

中, 1 阶子式是由其中一个元素所构成, 共有 6 个 1 阶子式, 它的 3 个 2 阶子式是:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix},$$

一般地, $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个。

定义 2.15 (矩阵的秩) 设 \mathbf{A} 是一个 $m \times n$ 矩阵, 如果 \mathbf{A} 中至少存在一个非零的 r 阶子式 D , 且所有 $r+1$ 阶子式 (如果存在的话) 全为零, 则称 D 为矩阵 \mathbf{A} 的最高阶非零子式, 数 r 称为矩阵 \mathbf{A} 的秩, 记为 $\text{rank } \mathbf{A} = r$ (或 $r(\mathbf{A}) = r$)。并规定零矩阵的秩等于 0。

评论 与上述概念有关的结论为:

- (1) $r\mathbf{A}$ 是 \mathbf{A} 的非零子式的最高阶数;
- (2) $0 \leq r(\mathbf{A}_{m \times n}) \leq \min(m, n)$;
- (3) $r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$;
- (4) 对于 n 阶方阵 \mathbf{A} , 有 $r(\mathbf{A}) = n$ (即 \mathbf{A} 为满秩矩阵) $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 非异。

定理 2.9 初等行、列变换不改变矩阵的秩。

定理 2.10 行梯形矩阵的秩等于它的非零行的行数。

定理 2.11 任一满秩矩阵都可以经过若干次初等行变换为单位矩阵, 也可以经过若干次初等列变换为单位矩阵。

定理 2.12 (求矩阵的秩的方法) 先用初等行、列变换将矩阵化为梯形矩阵, 其非零行的行数就是矩阵的秩。

2.5 可逆矩阵与伴随矩阵