

1. 一打靶场备有 5 支某种型号的枪，其中 3 支已经校正，2 支未经校正。某人使用已校正的枪击中目标的概率为  $p_1$ ，使用未经校正的枪击中目标的概率为  $p_2$ 。他随机地取一支枪进行射击，已知他射击了 5 次，都未击中，求他使用的是已校正的枪的概率（设各次射击的结果相互独立）。

2. 某人共买了 11 个水果，其中有 3 个是二级品，8 个是一级品。随机地将水果分给  $A, B, C$  三人，各人分别得到 4 个、6 个、1 个。

- (1) 求  $C$  未拿到二级品的概率。
- (2) 已知  $C$  未拿到二级品，求  $A, B$  均拿到二级品的概率。
- (3) 求  $A, B$  均拿到二级品而  $C$  未拿到二级品的概率。

3. 一系统  $L$  由两个只能传输字符 0 和 1 的独立工作的子系统  $L_1$  与  $L_2$  串联而成 (如图), 每个子系统输入为 0 输出为 0 的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ); 而输入为 1 输出为 1 的概率也是  $p$ . 今在图中  $a$  端输入字符 1, 求系统  $L$  的  $b$  端输出字符 0 的概率.



4. 甲乙两人轮流掷一颗骰子, 每轮掷一次, 谁先掷得 6 点谁得胜, 从甲开始掷, 问甲、乙得胜的概率各为多少?

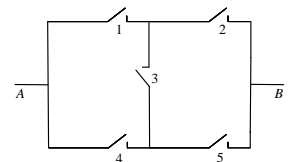
5. 将一颗骰子掷两次,考虑事件: $A =$ “第一次掷得点数 2 或 5”. $B =$ “两次点数之和至少为 7”,求  $P(A), P(B)$ , 并问事件  $A, B$  是否相互独立.

6.  $A, B$  两人轮流射击, 每次每人射击一枪, 射击的次序为  $A, B, A, B, A, \dots$ , 射击直至击中两枪为止. 设每人击中的概率均为  $p$ , 且各次击中与否相互独立. 求击中的两枪是由同一人射击的概率. (提示: 分别考虑两枪是由  $A$  击中的与两枪是由  $B$  击中的两种情况, 若两枪是由  $A$  击中的, 则射击必然在奇数次结束. 又当  $|x| < 1$  时,  $1 + 2x + 3x^2 + \dots = 1/(1-x)^2$ .)

7. 有 3 个独立工作的元件 1, 元件 2, 元件 3, 它们的可靠性分别为  $p_1, p_2, p_3$ . 设由它们组成一个“3 个元件取 2 个元件的表决系统”, 记为  $2/3[G]$ . 这一系统的运行方式是当且仅当 3 个元件中至少有 2 个正常工作时这一系统正常工作. 求这一  $2/3[G]$  系统的可靠性.

8. 在如图所示的桥式结构的电路中, 第  $i$  个继电器触点闭合的概率为  $p_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ . 各继电器工作相互独立, 求:

- (1) 以继电器触点 1 是否闭合为条件, 求  $A$  到  $B$  之间为通路的概率.
- (2) 已知  $A$  到  $B$  为通路的条件下, 继电器触点 3 是闭合的概率.



9. 进行非学历考试，规定考甲、乙两门课程，每门课程考试第一次未通过都只允许考第二次. 考生仅在课程甲通过后才能考课程乙. 如两门课程都通过可获得一张资格证书. 设某考生通过课程甲的各次考试的概率为  $p_1$ ，通过课程乙的各次考试的概率为  $p_2$ ，设各次考试的结果相互独立. 又设考生参加考试直至获得资格证书或者不准予再考为止. 以  $X$  表示考生总共需考试的次数. 求  $X$  的分布律.

10. (1) 5 只电池，其中有 2 只是次品，每次取一只测试，直到将 2 只次品都找到. 设第 2 只次品在第  $X(X = 2, 3, 4, 5)$  次找到，求  $X$  的分布律（注：在实际上第 5 次检测可无需进行）.
- (2) 5 只电池，其中 2 只是次品，每次取一只，直到找出 2 只次品或 3 只正品为止. 写出需要测试的次数的分布律.

11. 向某一目标发射炮弹, 设炮弹弹着点离目标的距离为  $R$  (单位: 10m),  $R$  服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{2r}{25} e^{-r^2/25}, & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases}$$

若弹着点离目标不超过 5 个单位时, 目标被摧毁.

- (1) 求发射一枚炮弹能摧毁目标的概率.
- (2) 为使至少有一枚炮弹能摧毁目标的概率不小于 0.94, 问最少需要独立发射多少枚炮弹.

12. 设一枚深水炸弹击沉一潜水艇的概率为  $1/3$ , 击伤的概率为  $1/2$ , 击不中的概率为  $1/6$ . 并设击伤两次也会导致潜水艇下沉. 求施放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率. (提示: 先求击不沉的概率.)

13. 一盒中装有 4 只白球, 8 只黑球, 从中取 3 只球, 每次一只, 作不放回抽样.

- (1) 求第 1 次和第 3 次都取到白球的概率 (提示: 考虑第二次的抽取.)
- (2) 求在第 1 次取到白球的条件下, 前 3 次都取到白球的概率.

14. 设元件的寿命  $T$  (以小时计) 服从指数分布, 分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.03t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

- (1) 已知元件至少工作了 30 小时, 求它能再至少工作 20 小时的概率.
- (2) 由 3 个独立工作的此种元件组成一个  $2/3[G]$  系统 (参见第 7 题). 求这一系统的寿命  $X > 20$  的概率.

15. (1) 已知随机变量  $X$  的概率密度为  $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ , 求  $X$  的分布函数.  
(2) 已知随机变量  $X$  的分布函数为  $F_X(x)$ , 另有随机变量

$$Y = \begin{cases} 1, & X > 0 \\ -1, & X \leq 0 \end{cases}$$

试求  $Y$  的分布律和分布函数.

16. (1) 设随机变量  $X$  服从泊松分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

问当  $k$  取何值时  $P\{X = k\}$  为最大.

- (2) 设随机变量  $X$  服从二项分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

问当  $k$  取何值时  $P\{X = k\}$  为最大.



17. 若离散型随机变量  $X$  具有分布律

$X$	1	2	$\cdots$	$n$
$p_k$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

称  $X$  服从取值为  $1, 2, \cdots, n$  的离散型均匀分布. 对于任意非负实数  $x$ , 记  $[x]$  为不超过  $x$  的最大整数. 设  $U \sim U(0, 1)$ , 证明  $X = [nU] + 1$  服从取值为  $1, 2, \cdots, n$  的离散型均匀分布.

18. 设随机变量  $X \sim U(-1, 2)$ , 求  $Y = |X|$  的概率密度.

19. 设随机变量  $X$  的概率密度

$$f_R(r) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2x^2}, & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

求  $Y = \frac{1}{X}$  的概率密度.

20. 设随机变量  $X$  服从以均值为  $1/\lambda$  的指数分布. 验证随机变量  $Y = [X]$  服从以参数为  $1 - e^{-\lambda}$  的几何分布. 这一事实表明连续型随机变量的函数可以是离散型随机变量.

21. 投掷一枚硬币直至正面出现为止，引入随机变量

$X =$  投掷总次数

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{若首次投掷得到正面,} \\ 0, & \text{若首次投掷得到反面.} \end{cases}$$

(1) 求  $X$  和  $Y$  的联合分布律及边缘分布律.

(2) 求条件概率  $P\{X = 1|Y = 1\}, P\{Y = 2|X = 1\}$ .

22. 设随机变量  $X \sim \pi(\lambda)$ ，随机变量  $Y = \max\{X, 2\}$  . 试求  $X$  和  $Y$  的联合分布律及边缘分布律.

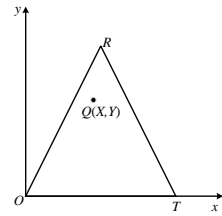
23. 设  $X, Y$  是相互独立的泊松随机变量, 参数分别为  $\lambda_1, \lambda_2$ , 求给定  $X + Y = n$  的条件下  $X$  的条件分布.

24. 一教授将两篇论文分别交给两个打字员打印. 以  $X, Y$  分别表示第一篇和第二篇论文的印刷错误. 设  $X \sim \pi(\lambda), Y \sim \pi(\mu)$ ,  $X, Y$  相互独立.

- (1) 求  $X, Y$  的联合分布律.
- (2) 求两篇论文总共至多 1 个错误的概率.

25. 一等边三角形  $\triangle ROT$  (如图) 的边长为 1, 在三角形内随机地取点  $Q(X, Y)$  (意指随机点  $(X, Y)$  在三角形  $ROT$  内均匀分布).

- (1) 写出随机变量  $(X, Y)$  的概率密度.
- (2) 求点  $Q$  到底边  $OT$  的距离的分布函数.



26. 设随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求边缘概率密度  $f_X(x), f_Y(y)$ .
- (2) 求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$ .

27. 设有随机变量  $U$  和  $V$ ，它们都仅取  $1, -1$  两个值. 已知

$$P\{U = 1\} = 1/2,$$

$$P\{V = 1|U = 1\} = 1/3 = P\{V = -1|U = -1\}.$$

- (1) 求  $U$  和  $V$  的联合分布律.
- (2) 求  $x$  的方程  $x^2 + Ux + V = 0$  至少有一个实根的概率.
- (3) 求  $x$  的方程  $x^2 + (U + V)x + U + V = 0$  至少有一个实根的概率.

28. 某图书馆一天的读者人数  $X \sim \pi(\lambda)$ ，任一读者借书的概率为  $p$ ，各读者借书与否相互独立. 记一天读者借书的人数为  $Y$ ，求  $X$  和  $Y$  的联合分布律.

29. 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 且都服从均匀分布  $U(0, 1)$ , 求两变量之一至少为另一变量之值之两倍的概率.

30. 一家公司有一份保单招标, 两家保险公司竞标. 规定标书的保险费必须在 20 万元至 22 万元之间. 若两份标书保险费相差 2 千或 2 千以上, 招标公司将选择报价低者, 否则就重新招标. 设两家保险公司的报价是相互独立的, 且都在 20 万至 22 万之间均匀分布. 试求招标公司需重新招标的概率.

31. 设随机变量  $X \sim N(0, \sigma_1^2), Y \sim N(0, \sigma_2^2)$  且  $X, Y$  相互独立, 求概率

$$P\{0 < \sigma_2 X - \sigma_1 Y < 2\sigma_1 \sigma_2\}$$

32. NBA 篮球赛中有这样的规律, 两支实力相当的球队比赛时, 每节主队得分与客队得分之差为正态随机变量, 均值为 1.5, 方差为 6, 并且假设四节的比分差是相互独立的. 问:

- (1) 主队胜的概率有多大?
- (2) 在前半场主队落后 5 分的情况下, 主队得胜的概率有多大?
- (3) 在第一节主队赢 5 分的情况下, 主队得胜的概率有多大.



33. 产品的某种性能指标的测量值  $X$  是随机变量, 设  $X$  的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{2}x^2}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

测量误差  $Y \sim U(-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $X, Y$  相互独立. 求  $Z = X + Y$  的概率密度  $f_Z(z)$ , 并验证

$$p\{Z > \varepsilon\} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{2\varepsilon} e^{-u^2/2} du$$

34. 在一化学过程中, 产品中有份额  $X$  为杂质, 而在杂质中有份额  $Y$  是有害的, 而其余部分不影响产品的质量. 设  $X \sim U(0, 0.1)$ ,  $Y \sim U(0, 0.5)$ , 且  $X$  和  $Y$  相互独立. 求产品中有害杂质份额  $Z$  的概率密度.

35. 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求  $(X, Y)$  的边缘概率密度.
- (2) 问  $X, Y$  是否相互独立.
- (3) 求  $X + Y$  的概率密度  $f_{X+Y}(z)$ .
- (4) 求条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$ .
- (5) 求条件概率  $P\{X > 3|Y < 5\}$ .
- (6) 求条件概率  $P\{X > 3|Y = 5\}$ .

36. 设某图书馆的读者借阅甲种图书的概率为  $p$ , 借阅乙种图书的概率为  $\alpha$ , 设每人借阅甲、乙图书的行动相互独立, 读者之间的行动也相互独立.
- (1) 某天恰有  $n$  个读者, 求借阅甲种图书的人数的数学期望.
  - (2) 某天恰有  $n$  个读者, 求甲、乙两种图书中至少借阅一种的人数的数学期望.

37. 某种鸟在某时间区间  $(0, t_0]$  下蛋数为  $1 \sim 5$  只, 下  $r$  只蛋的概率与  $r$  成正比. 一个收拾鸟蛋的人在时刻  $t_0$  去收集鸟蛋, 但他仅当鸟窝中多于 3 只蛋时才从中取走一只蛋. 在某处有这种鸟的鸟窝 6 个 (每个鸟窝保存完好, 各鸟窝中蛋的只数相互独立).

- (1) 写出一个鸟窝中鸟蛋只数  $X$  的分布律.
- (2) 对于指定的一个鸟窝, 求拾蛋人在该鸟窝中拾到一只蛋的概率.
- (3) 求拾蛋人在 6 个鸟窝中拾到蛋的总数  $Y$  的分布律及数学期望.
- (4) 求  $P\{Y < 4\}, P\{Y > 4\}$ .
- (5) 当一个拾蛋人在这 6 个鸟窝中拾过蛋后, 紧接着又有一个拾蛋人到这些鸟窝中拾蛋, 也仅当鸟窝中多于 3 只蛋时, 拾取一只蛋, 求第二个拾蛋人拾得蛋数  $Z$  的数学期望.

38. 设袋中有  $r$  只白球,  $N-r$  只黑球. 在袋中取球  $n(n \leq r)$  次, 每次任取一只作不放回抽样, 以  $Y$  表示取到白球的个数, 求  $E(Y)$ . (提示: 引入随机变量:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 次取到白球,} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次取到黑球,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ).

39. 抛一颗骰子直到所有点数全部出现为止, 求所需投掷次数  $Y$  的数学期望. (提示: 令  $X_1 = 1$ ,  $X_2 =$  第一点得到后, 等待第二个不同点所需的等待次数,  $X_3 =$  第一二两点得到后, 等待第三个不同点所需的等待次数,  $X_4, X_5, X_6$  类似, 则  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_6$ . 又几何分布  $P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$  的数学期望  $E(X) = \frac{1}{p}$ .)

40. 设随机变量  $X, Y$  相互独立. 且  $X, Y$  分别服从以  $1/\alpha, 1/\beta$  为均值的指数分布. 求  $E(X^2 + Ye^{-X})$ .

41. 一酒吧间柜台前有 6 张凳子, 服务员预测, 若两个陌生人进来就座的话, 他们之间至少相隔两张凳子. (提示: 先列出两人之间至少隔两张凳子的不同情况.)

- (1) 若真有两个陌生人入内, 他们随机地就座, 问服务员预言为真的概率是多少?
- (2) 设两位顾客是随机就座的. 求顾客之间凳子数的数学期望.

42. 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  相互独立, 且都服从  $U(0, 1)$ , 又设  $Y = X_1 X_2 \cdots X_{100}$ , 求概率  $P\{Y < 10^{-40}\}$  的近似值.

43. 来自某个城市的长途电话呼唤的持续时间  $X$  (以分计) 是一个随机变量, 它的分布函数是

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}e^{-[\frac{x}{3}]}, & x \leq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(其中  $[\frac{x}{3}]$  是不大于  $\frac{x}{3}$  的最大整数).

(1) 画出  $F(x)$  的图形.

(2) 说明  $X$  是什么类型的随机变量.

(3) 求  $P\{X = 4\}, P\{X = 3\}, P\{X < 4\}, P\{X > 6\}$ . (提示:  $P\{X = a\} = F(a) - F(a - 0)$ .)



44. 一汽车保险公司分析一组 (250 人) 签约的客户中的赔付情况. 据历史数据分析, 在未来的一周中一组客户中至少提出一项索赔的客户数  $X$  占 10%. 写出  $X$  的分布, 并求  $X > 250 \times 0.12$  (即  $X > 30$ ) 的概率. 设各客户是否提出索赔相互独立.

45. 在区间  $(0, 1)$  随机地取一点  $X$ . 定义  $Y = \min\{X, 0.75\}$ .

- (1) 求随机变量  $Y$  的值域.
- (2) 求  $Y$  的分布函数, 并画出它的图形.
- (3) 说明  $Y$  不是连续型的随机变量,  $Y$  也不是离散型的随机变量.