1. (1) 在下列句子中随机地取一个单词，以 X 表示取到的单词所包含的字母个数，写出 X 的分布律，并求 $E(X)$

"THE GIRL PUT ON HER BEAUTIFUL RED HAT."

(2) 在上述句子的 30 个字母中随机地取一个字母，以 Y 表示取到的字母所在单词所包含的字母数．写出 Y 的分布律并求 $E(Y)$．

(3) 一人掷骰子，如得 6 点则掷第 2 次．此时得分为 6 + 第二次得到的点数；否则得分为他第一次掷得的点数，且不能再掷．求得分 X 的分布律及 $E(X)$．

2. 某产品的次品率为 0.1，检验员每天检验 4 次．每次随机地取 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备．以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 $E(X)$ ．（设诸产品是否为次品是相互独立的．）

3. 有 3 只球，4 个盒子，盒子的编号为 1,2,3,4. 将球逐个独立地, 随机地放入 4 个盒子中去. 以 X 表示其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 $X=3$ 表示第 1 号，第 2 号盒子是空的，第 3 个盒子至少有一只球），试求 $E(X)$.

4. (1) 设随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X=(-1)^{j+1}\dfrac{3^j}{j}\right\}=\dfrac{2}{3^j}, j=1,2,\cdots$，说明 X 的数学期望不存在.

(2) 一盒中装有一只黑球，一只白球，作摸球游戏，规则如下：一次从盒中随机摸一只球，若摸到白球．则游戏结束，摸到黑球放回再放入一只黑球，然后再从盒中随机地摸一只球．试说明要游戏结束的摸球次数 X 的数学期望不存在.

5. 设在某一规定的时间间隔里，某电气设备用于最大负荷的时间 X（以 min 计）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{1}{1500^2}x, & 0 \le x \le 1500, \\ -\dfrac{1}{1500^2}(x-3000), & 1500 < x \le 3000, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X)$.

6. (1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X), E(X^2), E(3X^2+5)$.

(2) 设 $X \sim \pi(\lambda)$，求 $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

7. (1) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

求（i）$Y=2X$，（ii）$Y=e^{-2X}$ 的数学期望

(2) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布（i）求 $U=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的数学期望，（ii）求 $V=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的数学期望

8. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X), E(Y)$.

(2) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$.

(3) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$.

9. (1) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 12y^2, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$.

(2) 设随机变量 X,Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}e^{-(y+x/y)}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),E(XY)$.

10. (1) 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立．求 $E[X^2/(X^2+Y^2)]$.

(2) 一飞机进行空投物资作业，设目标点为原点 $O(0,0)$，物资着陆点为 (X,Y)，X,Y 相互独立，且设 $X\sim N(0,\sigma^2),Y\sim N(0,\sigma^2)$，求原点到点 (X,Y) 间距离的数学期望．

11. 一工厂生产的某种设备的寿命 X（以年计）服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0\\[2ex] 0, & x\le 0\end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换．若工厂售出一台设备赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元．试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望．

12. 某车间生产的圆盘直径在区间 (a,b) 服从均匀分布. 试求圆盘面积的数学期望.

13. 设电压（以 V 计）$X \sim N(0,9)$．将电压施加于一检波器，其输出电压为 $Y = 5X^2$．求输出电压 Y 的均值.

14. 设随机变量 X_1, X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(1) 求 $E(X_1 + X_2), E(2X_1 - 3X_2^2)$.

(2) 又设 X_1, X_2 相互独立，求 $E(X_1 X_2)$.

15. 将 n 只球（$1 \sim n$ 号）随机地放进 n 个盒子（$1 \sim n$ 号）中去，一个盒子装一只球．若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对. 记 X 为总的配对数，求 $E(X)$.

16. 若有 n 把看上去样子相同的钥匙．其中只有一把能打开门上的锁．用它们去试开门上的锁. 设取到每只钥匙是等可能的．若每把钥匙试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望.

(1) 写出 X 的分布律.

(2) 不写出 X 的分布律.

17. 设 X 为随机变量，C 是常数，证明 $D(X) < E[(X-C)^2]$，对于 $C \neq E(X)$. （由于 $D(X) = E\{[X-E(X)]^2\}$，上式表明 $E[(X-C)^2]$ 当 $C = E(X)$ 时取到最小值.）

18. 设随机变量 X 服从瑞利分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\sigma > 0$ 是常数，求 $E(X), D(X)$.

19. 设随机变量 X 服从 Γ 分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 是常数，求 $E(X), D(X)$.

20. 设随机变量 X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中 $0 < p < 1$ 是常数，求 $E(X), D(X)$.

21. 设长方形的高（以 m 计）$X \sim U(0,2)$，已知长方形的周长（以 m 计）为 20，求长方形面积 A 的数学期望和方差.

22. (1) 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，且有 $E(X_i) = i, D(X_i) = 5 - i, i = 1, 2, 3, 4$. 设 $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4$. 求 $E(Y), D(Y)$.

(2) 设随机变量 X, Y 相互独立，且 $X \sim N(720, 30^2), Y \sim N(640, 25^2)$，求 $Z_1 = 2X + Y, Z_2 = X - Y$ 的分布，并求概率 $P\{X > Y\}, P\{X + Y > 1400\}$.

23. 五家商店联营，它们每两周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. 已知 $X_1 \sim N(200, 225), X_2 \sim N(240, 240), X_3 \sim N(180, 225), X_4 \sim N(260, 265), X_5 \sim N(320, 270)$，$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ 相互独立.

(1) 求五家商店两周的总销售量的均值和方差.

(2) 商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99. 问商店的仓库应至少储存多少千克该产品？

24. 卡车装运水泥，设每袋水泥重量 X（以 kg 计）服从 $N(50, 2.5^2)$，问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

25. 设随机变量 X, Y 相互独立．且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布．

(1) 求 $E(XY), E(X/Y), E[\ln(XY)], E[|Y-X|]$.

(2) 以 X, Y 为边长作一长方形，以 A, C 分别表示长方形的面积和周长，求 A 和 C 的相关系数.

26. (1) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立，且有 $X_1 \sim b(4, 1/2), X_2 \sim b(6, 1/3), X_3 \sim b(6, 1/3)$，求 $P\{X_1=2, X_2=2, X_3=5\}, E(X_1X_2X_3), E(X_1-X_2), E(X_1-2X_2)$.

(2) 设 X, Y 是随机变量，且有 $E(X)=3, E(Y)=1, D(X)=4, D(Y)=9$，令 $Z=5X-Y+15$，分别在下列 3 种情况下求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

（i）X, Y 相互独立，（ii）X, Y 不相关，（iii）X 和 Y 的相关系数为 0.25.

27. 下列各对随机变量 X 和 Y，问哪几对是相互独立的？哪几对是不相关的.

(1) $X \sim U(0,1), Y = X^2$

(2) $X \sim U(-1,1), Y = X^2$

(3) $X = \cos V, Y = \sin V, V \sim U(0, 2\pi)$

若 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$.

(4)

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(5)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

28. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

29. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

30. 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0, P(B)>0$，并定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\ 0, & 若A不发生\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\ 0, & 若B不发生\end{cases}$$

证明若 $\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 必定相互独立。

31. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),\mathrm{Cov}(X,Y)$.

32. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2,0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),\mathrm{Cov}(X,Y),\rho_{XY},D(X+Y)$.

33. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，且设 X, Y 相互独立，试求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数（其中 α, β 是不为零的常数）.

34. (1) 设随机变量 $W = (aX+3Y)^2, E(X) = E(Y) = 0, D(X) = 4, D(Y) = 16, \rho_{XY} = -0.5.$ 求常数 a 使 $E(W)$ 为最小，并求 $E(W)$ 的最小值。

(2) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，且有 $D(X) = \sigma_X^2, D(Y) = \sigma_Y^2$. 证明当 $a^2 = \sigma_X^2/\sigma_Y^2$ 时，随机变量 $W = X - aY$ 与 $V = X + aY$ 相互独立。

35. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 $X\sim N(0,3), Y\sim N(0,4)$，相关系数 $\rho_{XY}=-1/4$，试写出 X 和 Y 的联合概率密度.

36. 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差是 700. 利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 $5200\sim 9400$ 之间的概率 p.

37. 对于两个随机变量 V, W，若 $E(V^2), E(W^2)$ 存在，证明

$$[E(VW)]^2 \leq E(V^2)E(W^2)$$

这一不等式称为柯西-施瓦茨不等式

提示：考虑实变量 t 的函数

$$q(t) = E[(V+tW)^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2)$$