1. 设 X_1, X_2 是数学期望为 θ 的指数分布总体 X 的容量为 2 的样本，设 $Y = \sqrt{X_1 X_2}$，试证明:

$$E(\frac{4Y}{\pi}) = \theta$$

2. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，试证

$$E[(\overline{X}S^2)^2] = \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\left(\frac{2\sigma^4}{n-1} + \sigma^4\right)$$

3. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的样本观察值.

(1) 求 θ 的最大似然估计量.

(2) 求 θ 的矩估计量.

(3) 问求得的估计量是否是无偏估计量.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 以及 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，且它们相互独立，μ_1, μ_2, σ^2 均未知，试求 μ_1, μ_2, σ^2 的最大似然估计量.

5. 为了研究一批贮存着的产品的可靠性，在产品投入贮存时，即在时刻 $t_0 = 0$ 时，随机地选定 n 件产品，然后在预先规定的时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 取出来进行检测（检测时确定已失效的去掉，将未失效的继续投入贮存），今得到以下的寿命试验数据：