为 0，即 $P\{X=a\}=0$. 这两点性质离散型随机变量是不具备的.

我们将随机变量分成为

$$\text{随机变量}\begin{cases}\text{离散型}\\ \text{非离散型}\begin{cases}\text{连续型}\\ \text{其他}\end{cases}\end{cases}$$

读者不要误以为，一个随机变量，如果它不是离散型的那一定是连续型的. 但本书只讨论两类重要的随机变量：离散型和连续型随机变量.

读者应掌握分布函数、分布律、概率密度的性质. 本章引入了几种重要的随机变量的分布：(0－1)分布、二项分布、泊松分布、指数分布、均匀分布和正态分布. 读者必须熟知这几种随机变量的分布律或概率密度.

随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 也是一个随机变量. 要掌握如何由已知的 X 的分布（X 的分布律或概率密度）去求得 $Y=g(X)$ 的分布（Y 的分布律或概率密度）.

■ **重要术语及主题**

随机变量　分布函数　离散型随机变量及其分布律　连续型随机变量及其概率密度　伯努利试验　(0－1)分布　n 重伯努利试验　二项分布　泊松分布　指数分布　均匀分布　正态分布　随机变量函数的分布

习题

1. 考虑为期一年的一张保险单，若投保人在投保后一年内因意外死亡，则公司赔付 20 万元，若投保人因其他原因死亡，则公司赔付 5 万元，若投保人在投保期末生存，则公司无需付给任何费用. 若投保人在一年内因意外死亡的概率为 0.0002，因其他原因死亡的概率为 0.0010，求公司赔付金额的分布律.

2. (1) 一袋中装有 5 只球，编号为 1，2，3，4，5. 在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律.

(2) 将一颗骰子抛掷两次，以 X 表示两次中得到的小的点数，试求 X 的分布律.

3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，作不放回抽样. 以 X 表示取出的次品的只数.

(1) 求 X 的分布律.

(2) 画出分布律的图形.

4. 进行重复独立试验，设每次试验的成功概率为 p，失败概率为 $q=1-p\ (0<p<1)$.

(1) 将试验进行到出现一次成功为止，以 X 表示所需的试验次数，求 X 的分布律.（此时称 X 服从以 p 为参数的**几何分布**.）

(2) 将试验进行到出现 r 次成功为止，以 Y 表示所需的试验次数，求 Y 的分布律.（此时称 Y 服从以 r,p 为参数的**巴斯卡分布或负二项分布**.）

(3) 一篮球运动员的投篮命中率为 45%. 以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数，写出 X 的分布律，并计算 X 取偶数的概率.

5. 一房间有 3 扇同样大小的窗子，其中只有一扇是打开的. 有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出去. 鸟在房子里飞来飞去，试图飞出房间. 假定鸟是没有记

忆的，它飞向各扇窗子是随机的.

(1) 以 X 表示鸟为了飞出房间试飞的次数，求 X 的分布律.

(2) 户主声称，他养的一只鸟是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次. 以 Y 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数. 如户主所说是确实的，试求 Y 的分布律.

(3) 求试飞次数 X 小于 Y 的概率和试飞次数 Y 小于 X 的概率.

6. 一大楼装有 5 台同类型的供水设备. 设各台设备是否被使用相互独立. 调查表明在任一时刻 t 每台设备被使用的概率为 0.1，问在同一时刻，

(1) 恰有 2 台设备被使用的概率是多少？

(2) 至少有 3 台设备被使用的概率是多少？

(3) 至多有 3 台设备被使用的概率是多少？

(4) 至少有 1 台设备被使用的概率是多少？

7. 设事件 A 在每次试验发生的概率为 0.3. A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号.

(1) 进行了 5 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率.

(2) 进行了 7 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率.

8. 甲、乙两人投篮，投中的概率分别为 0.6，0.7. 今各投 3 次. 求

(1) 两人投中次数相等的概率；

(2) 甲比乙投中次数多的概率.

9. 有一大批产品，其验收方案如下，先作第一次检验：从中任取 10 件，经检验无次品接受这批产品，次品数大于 2 拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 5 件，仅当 5 件中无次品时接受这批产品. 若产品的次品率为 10%，求

(1) 这批产品经第一次检验就能接受的概率.

(2) 需作第二次检验的概率.

(3) 这批产品按第二次检验的标准被接受的概率.

(4) 这批产品在第一次检验未能作决定且第二次检验时被通过的概率.

(5) 这批产品被接受的概率.

10. 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯. 如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次.

(1) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒. 他连续试验 10 次，成功 3 次. 试推断他是猜对的，还是他确有区分的能力(设各次试验是相互独立的).

11. 尽管在几何教科书中已经讲过仅用圆规和直尺三等分一个任意角是不可能的，但每一年总是有一些"发明者"撰写关于仅用圆规和直尺将角三等分的文章. 设某地区每年撰写此类文章的篇数 X 服从参数为 6 的泊松分布. 求明年没有此类文章的概率.

12. 一电话总机每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布. 求

(1) 某一分钟恰有 8 次呼唤的概率；

(2) 某一分钟的呼唤次数大于 3 的概率.

13. 某一公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $(1/2)t$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关(时间以小时计).

(1) 求某一天中午 12 时至下午 3 时未收到紧急呼救的概率.

(2) 求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次紧急呼救的概率.

14. 某人家中在时间间隔 t(小时)内接到电话的次数 X 服从参数为 $2t$ 的泊松分布.

(1) 若他外出计划用时 10 分钟,问其间有电话铃响一次的概率是多少?

(2) 若他希望外出时没有电话的概率至少为 0.5,问他外出应控制最长时间是多少?

15. 保险公司在一天内承保了 5000 张相同年龄,为期一年的寿险保单,每人一份. 在合同有效期内若投保人死亡,则公司需赔付 3 万元. 设在一年内,该年龄段的死亡率为 0.0015,且各投保人是否死亡相互独立. 求该公司对于这批投保人的赔付总额不超过 30 万元的概率(利用泊松定理计算).

16. 有一繁忙的汽车站,每天有大量汽车通过,设一辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率为 0.0001. 在某天的该时间段内有 1000 辆汽车通过. 问出事故的车辆数不小于 2 的概率是多少?(利用泊松定理计算)

17. (1) 设 X 服从 $(0-1)$ 分布,其分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$,求 X 的分布函数,并作出其图形.

(2) 求第 2 题(1)中的随机变量的分布函数.

18. 在区间 $[0,a]$ 上任意投掷一个质点,以 X 表示这个质点的坐标. 设这个质点落在 $[0,a]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例. 试求 X 的分布函数.

19. 以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一个顾客到达的等待时间(以分计),X 的分布函数是

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.4x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求下述概率:

(1) P\{至多 3 分钟\}.

(2) P\{至少 4 分钟\}.

(3) P\{3 分钟至 4 分钟之间\}.

(4) P\{至多 3 分钟或至少 4 分钟\}.

(5) P\{恰好 2.5 分钟\}.

20. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\leqslant x<\mathrm{e},\\ 1, & x\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X<2\}, P\{0<X\leqslant 3\}, P\{2<X<5/2\}$.

(2) 求概率密度 $f_X(x)$.

21. 设随机变量 X 的概率密度为

(1) $f(x)=\begin{cases}2(1-1/x^2), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 X 的分布函数 $F(x)$，并画出(2)中的 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形.

22. (1) 分子运动速度的绝对值 X 服从麦克斯韦(Maxwell)分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-x^2/b}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $b=m/(2kT)$，k 为玻耳兹曼(Boltzmann)常数，T 为绝对温度，m 是分子的质量，试确定常数 A.

(2) 研究了英格兰在 1875 年～1951 年期间，在矿山发生导致不少于 10 人死亡的事故的频繁程度，得知相继两次事故之间的时间 T(日)服从指数分布，其概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{241}e^{-t/241}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求分布函数 $F_T(t)$，并求概率 $P\{50<T<100\}$.

23. 某种型号器件的寿命 X(以小时计)具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

现有一大批此种器件(设各器件损坏与否相互独立)，任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少？

24. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(min)服从指数分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 min，他就离开. 他一个月要到银行 5 次. 以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数. 写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

25. 设 K 在(0,5)服从均匀分布，求 x 的方程

$$4x^2+4Kx+K+2=0$$

有实根的概率.

26. 设 $X\sim N(3,2^2)$.

(1) 求 $P\{2<X\leqslant 5\}$，$P\{-4<X\leqslant 10\}$，$P\{|X|>2\}$，$P\{X>3\}$.

(2) 确定 c，使得 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$.

(3) 设 d 满足 $P\{X>d\}\geqslant 0.9$，问 d 至多为多少？

27. 某地区 18 岁的女青年的血压(收缩压，以 mmHg 计)服从 $N(110,12^2)$ 分布. 在该地区任选一 18 岁的女青年，测量她的血压 X. 求

(1) $P\{X\leqslant 105\}$，$P\{100<X\leqslant 120\}$；

(2) 确定最小的 x，使 $P\{X>x\}\leqslant 0.05$.

28. 由某机器生产的螺栓的长度(cm)服从参数 $\mu=10.05$，$\sigma=0.06$ 的正态分布. 规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品，求一螺栓为不合格品的概率.

29. 一工厂生产的某种元件的寿命 X(以小时计)服从参数为 $\mu=160$，$\sigma(\sigma>0)$ 的正态分布. 若要求 $P\{120<X\leqslant 200\}\geqslant 0.80$，允许 σ 最大为多少？

30. 设在一电路中，电阻两端的电压(V)服从 $N(120,2^2)$，今独立测量了 5 次，试确定有 2 次测定值落在区间[118,122]之外的概率.

31. 某人上班，自家里去办公楼要经过一交通指示灯，这一指示灯有 80% 时间亮红灯，此时他在指示灯旁等待直至绿灯亮. 等待时间在区间[0,30](以秒计)服从均匀分布. 以 X 表示他的等待时间，求 X 的分布函数 $F(x)$，画出 $F(x)$ 的图形，并问 X 是否为连续型随机变量，是否为离散型的？(要说明理由)

32. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是概率密度函数，求证

$$h(x)=\alpha f(x)+(1-\alpha)g(x),\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

也是一个概率密度函数.

33. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律.

34. 设随机变量 X 在区间(0,1)服从均匀分布.

(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度.

(2) 求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度.

35. 设 $X\sim N(0,1)$.

(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度.

(2) 求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度.

(3) 求 $Y=|X|$ 的概率密度.

36. (1) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，$-\infty<x<\infty$. 求 $Y=X^3$ 的概率密度.

(2) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度.

37. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

38. 设电流 I 是一个随机变量，它均匀分布在 9 A～11 A 之间. 若此电流通过 2 Ω 的电阻，在其上消耗的功率 $W=2I^2$. 求 W 的概率密度.

39. 某物体的温度 T(°F)是随机变量，且有 $T\sim N(98.6,2)$，已知 $\Theta=\frac{5}{9}(T-32)$，试求 Θ(℃)的概率密度.

随机变量的独立性是随机事件独立性的扩充．我们也常利用问题的实际意义去判断两个随机变量的独立性．例如，若 X,Y 分别表示两个工厂生产的显像管的寿命，我们可以认为 X,Y 是相互独立的．

我们还讨论了 $Z=X+Y, Z=Y/X, Z=XY, M=\max\{X,Y\}, N=\min\{X,Y\}$ 的分布的求法（设 (X,Y) 的分布已知）．

本章在进行各种问题的计算时，要用到二重积分或用到二元函数固定其中一个变量对另一个变量的积分．此时千万要搞清楚积分变量的变化范围．题目做错，往往是由于在进行积分运算时，将有关的积分区间或积分区域搞错了．在做题时，画出有关函数的定义域的图形，对于正确确定积分上下限肯定是有帮助的．另外，所求得的边缘密度、条件密度或 $Z=X+Y$ 的密度等，往往是分段函数，正确写出分段函数的表达式当然是必须的．

■重要术语及主题

二维随机变量 (X,Y)　(X,Y) 的分布函数　离散型随机变量 (X,Y) 的分布律　连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度　离散型随机变量 (X,Y) 的边缘分布律　连续型随机变量 (X,Y) 的边缘概率密度　条件分布函数　条件分布律　条件概率密度　两个随机变量 X,Y 的独立性　$Z=X+Y, Z=Y/X, Z=XY$ 的概率密度　$M=\max\{X,Y\}, N=\min\{X,Y\}$ 的概率密度

习题

1. 在一箱子中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次，每次任取一只，考虑两种试验：(1) 放回抽样；(2) 不放回抽样．我们定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出的是正品},\\ 1, & \text{若第一次取出的是次品};\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出的是正品},\\ 1, & \text{若第二次取出的是次品}.\end{cases}$$

试分别就 (1)、(2) 两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律．

2. (1) 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球．以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数．求 X 和 Y 的联合分布律．

(2) 在 (1) 中求 $P\{X>Y\}, P\{Y=2X\}, P\{X+Y=3\}, P\{X<3-Y\}$．

3. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 确定常数 k．

(2) 求 $P\{X<1, Y<3\}$．

(3) 求 $P\{X<1.5\}$．

(4) 求 $P\{X+Y\leqslant 4\}$．

4. 设 X,Y 都是非负的连续型随机变量，它们相互独立．

(1) 证明　$P\{X<Y\}=\int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(x)\,dx$，

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度．

(2) 设 X,Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $P\{X<Y\}$.

5. 设随机变量 (X,Y) 具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘分布函数.

6. 将一枚硬币掷 3 次，以 X 表示前 2 次中出现 H 的次数，以 Y 表示 3 次中出现 H 的次数. 求 X,Y 的联合分布律以及 (X,Y) 的边缘分布律.

7. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度.

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度.

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 确定常数 c;

(2) 求边缘概率密度.

10. 将某一医药公司 8 月份和 9 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y. 据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(1) 求边缘分布律.

(2) 求 8 月份的订单数为 51 时，9 月份订单数的条件分布律.

11. 以 X 记某医院一天出生的婴儿的个数，Y 记其中男婴的个数，设 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},$$

$$m=0,1,2,\cdots,n;\quad n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 求边缘分布律.

(2) 求条件分布律.

(3) 特别,写出当 $X=20$ 时,Y 的条件分布律.

12. 求§1例1中的条件分布律:$P\{Y=k \mid X=i\}$.

13. 在第9题中

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$,特别,写出当 $Y=\frac{1}{2}$ 时 X 的条件概率密度.

(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y \mid x)$,特别,分别写出当 $X=\frac{1}{3}$,$X=\frac{1}{2}$ 时 Y 的条件概率密度.

(3) 求条件概率

$$P\left\{Y \geqslant \frac{1}{4} \,\middle|\, X=\frac{1}{2}\right\},\quad P\left\{Y \geqslant \frac{3}{4} \,\middle|\, X=\frac{1}{2}\right\}.$$

14. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y \mid x)$,$f_{X|Y}(x \mid y)$.

15. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$,当给定 $X=x$ 时,随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$.

(2) 求边缘密度 $f_Y(y)$,并画出它的图形.

(3) 求 $P\{X>Y\}$.

16. (1) 问第1题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 问第14题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立(需说明理由)?

17. (1) 设随机变量 (X,Y) 具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})y, & x\geqslant 0,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1-e^{-\alpha x}, & x\geqslant 0,y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \alpha>0,$$

证明 X,Y 相互独立.

(2) 设随机变量 (X,Y) 具有分布律

$$P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x+y-2},0<p<1,x,y\text{ 均为正整数},$$

问 X,Y 是否相互独立.

18. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量,X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布,Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度.

(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$,试求 a 有实根的概率.

19. 进行打靶，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定

点 A 落在区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 得 2 分；

点 A 落在 $D_2=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 得 1 分；

点 A 落在 $D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2>4\}$ 得 0 分.

以 Z 记打靶的得分. 写出 X,Y 的联合概率密度，并求 Z 的分布律.

20. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0,\mu>0$ 是常数. 引入随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & \text{当 } X\leqslant Y,\\ 0, & \text{当 } X>Y.\end{cases}$$

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

(2) 求 Z 的分布律和分布函数.

21. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分别求(1) $Z=X+Y$，(2) $Z=XY$ 的概率密度.

22. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

23. 某种商品一周的需求量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的. 求(1)两周，(2)三周的需求量的概率密度.

24. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)问 X 和 Y 是否相互独立？

(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

25. 设随机变量 X,Y 相互独立，且具有相同的分布，它们概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}e^{1-x}, & x>1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

26. 设随机变量 X,Y 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=Y/X$ 的概率密度.

27. 设随机变量 X,Y 相互独立，它们都在区间(0,1)上服从均匀分布. A 是以 X,Y 为边长的矩形的面积，求 A 的概率密度.

28. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，它们都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 试验证随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

我们称 Z 服从参数为 σ ($\sigma>0$)的瑞利(Rayleigh)分布.

29. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 试确定常数 b.

(2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(3) 求函数 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数.

30. 设某种型号的电子元件的寿命(以小时计)近似地服从正态分布 $N(160,20^2)$，随机地选取4只，求其中没有一只寿命小于180的概率.

31. 对某种电子装置的输出测量了5次，得到结果为 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 设它们是相互独立的随机变量且都服从参数 $\sigma=2$ 的瑞利分布.

(1) 求 $Z=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数.

(2) 求 $P\{Z>4\}$.

32. 设随机变量 X,Y 相互独立，且服从同一分布. 试证明：

$$P\{a<\min\{X,Y\}\leqslant b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2 \quad (a\leqslant b).$$

33. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k),\quad k=0,1,2,\cdots,$$
$$P\{Y=r\}=q(r),\quad r=0,1,2,\cdots.$$

证明随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k),\ i=0,1,2,\cdots.$$

34. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X\sim\pi(\lambda_1)$, $Y\sim\pi(\lambda_2)$. 证明 $Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

35. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X\sim b(n_1,p)$, $Y\sim b(n_2,p)$. 证明

$$Z=X+Y\sim b(n_1+n_2,p).$$

36. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X=2|Y=2\}$，$P\{Y=3|X=0\}$.

(2) 求 $V=\max\{X,Y\}$的分布律.

(3) 求 $U=\min\{X,Y\}$的分布律.

(4) 求 $W=X+Y$ 的分布律.

(1.4). 这两个公式的意义在于当我们求 $E(Y)$ 时,不必先求出 $Y=g(X)$ 的分布律或概率密度,而只需利用 X 的分布律或概率密度就可以了,这样做的好处是明显的.

要掌握数学期望和方差的性质,提请读者注意的是:

(1) 当 X_1, X_2 独立或 X_1, X_2 不相关时,才有 $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$;

(2) 设 C 为常数,则有 $D(CX)=C^2D(X)$,右边的系数是 C^2,不是 C;

(3) $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$,当 X_1,X_2 独立或 X_1,X_2 不相关时才有

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2).$$

例如,若 X_1, X_2 独立,则有 $D(2X_1-3X_2)=4D(X_1)+9D(X_2)$.

相关系数 ρ_{XY} 有时也称为线性相关系数,它是一个可以用来描述随机变量 (X,Y) 的两个分量 X,Y 之间的线性关系紧密程度的数字特征. 当 $|\rho_{XY}|$ 较小时 X,Y 的线性相关的程度较差;当 $\rho_{XY}=0$ 时称 X,Y 不相关. 不相关是指 X,Y 之间不存在线性关系,X,Y 不相关,它们还可能存在除线性关系之外的关系(参见§3 例 1). 又由于 X,Y 相互独立是指 X,Y 的一般关系而言的,因此有以下的结论:X,Y 相互独立则 X,Y 一定不相关;反之,若 X,Y 不相关则 X,Y 不一定相互独立.

特别,对于二维正态随机变量 (X,Y),X 和 Y 不相关与 X 和 Y 相互独立是等价的. 而二元正态随机变量的相关系数 ρ_{XY} 就是参数 ρ. 于是,用"$\rho=0$"是否成立来检验 X,Y 是否相互独立是很方便的.

切比雪夫不等式给出了在随机变量 X 的分布未知,只知道 $E(X)$ 和 $D(X)$ 的情况下,对事件 $\{|X-E(X)|\leqslant\varepsilon\}$ 概率的下限的估计.

■重要术语及主题

数学期望　随机变量函数的数学期望　数学期望的性质

方差　标准差　方差的性质　标准化的随机变量　协方差　相关系数　相关系数的性质

X,Y 不相关　切比雪夫不等式　几种重要分布的数学期望和方差　矩　协方差矩阵

习题

1. (1) 在下列句子中随机地取一个单词,以 X 表示取到的单词所包含的字母个数,写出 X 的分布律并求 $E(X)$.

"THE GIRL PUT ON HER BEAUTIFUL RED HAT".

(2) 在上述句子的 30 个字母中随机地取一个字母,以 Y 表示取到的字母所在单词所包含的字母数,写出 Y 的分布律并求 $E(Y)$.

(3) 一人掷骰子,如得 6 点则掷第 2 次,此时得分为 6+第二次得到的点数;否则得分为他第一次掷得的点数,且不能再掷,求得分 X 的分布律及 $E(X)$.

2. 某产品的次品率为 0.1,检验员每天检验 4 次. 每次随机地取 10 件产品进行检验,如发现其中的次品数多于 1,就去调整设备. 以 X 表示一天中调整设备的次数,试求 $E(X)$.(设诸产品是否为次品是相互独立的.)

3. 有 3 只球,4 个盒子,盒子的编号为 1,2,3,4. 将球逐个独立地,随机地放入 4 个盒子中去. 以 X 表示其中至少有一只球的盒子的最小号码(例如 $X=3$ 表示第 1 号,第 2 号盒子是

空的，第 3 个盒子至少有一只球），试求 $E(X)$.

4. (1) 设随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X=(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\right\}=\frac{2}{3^j}$，$j=1,2,\cdots$，说明 X 的数学期望不存在.

(2) 一盒中装有一只黑球，一只白球，作摸球游戏，规则如下：一次从盒中随机摸一只球，若摸到白球，则游戏结束，摸到黑球放回再放入一只黑球，然后再从盒中随机地摸一只球. 试说明要游戏结束的摸球次数 X 的数学期望不存在.

5. 设在某一规定的时间间隔里，某电气设备用于最大负荷的时间 X（以 min 计）是一个随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1\,500^2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\,500,\\[2mm] \dfrac{-1}{1\,500^2}(x-3\,000), & 1\,500<x\leqslant 3\,000,\\[2mm] 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$.

6. (1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X)$，$E(X^2)$，$E(3X^2+5)$.

(2) 设 $X\sim\pi(\lambda)$，求 $E[1/(X+1)]$.

7. (1) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求 (i) $Y=2X$；(ii) $Y=e^{-2X}$ 的数学期望.

(2) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布 (i) 求 $U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望，(ii) 求 $V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望.

8. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X)$，$E(Y)$.

(2) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$.

(3) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$.

9. (1) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$、$E(Y)$，$E(XY)$，$E(X^2+Y^2)$。

(2) 设随机变量 X,Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{-(y+x/y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$。

10. (1) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$且 X,Y 相互独立. 求 $E[X^2/(X^2+Y^2)]$。

(2) 一飞机进行空投物资作业，设目标点为原点 $O(0,0)$，物资着陆点为(X,Y)，X,Y 相互独立，且设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim N(0,\sigma^2)$，求原点到点(X,Y)间距离的数学期望.

11. 一工厂生产的某种设备的寿命 X(以年计)服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

工厂规定，出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换. 若工厂售出一台设备赢利 100 元，调换一台设备厂方需花费 300 元. 试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

12. 某车间生产的圆盘直径在区间(a,b)服从均匀分布，试求圆盘面积的数学期望.

13. 设电压(以 V 计)$X\sim N(0,9)$. 将电压施加于一检波器，其输出电压为 $Y=5X^2$，求输出电压 Y 的均值.

14. 设随机变量 X_1，X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求 $E(X_1+X_2)$，$E(2X_1-3X_2^2)$。

(2) 又设 X_1，X_2 相互独立，求 $E(X_1X_2)$.

15. 将 n 只球($1\sim n$ 号)随机地放进 n 个盒子($1\sim n$ 号)中去，一个盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对. 记 X 为总的配对数，求 $E(X)$.

16. 若有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁. 设取到每只钥匙是等可能的. 若每把钥匙试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望.

(1) 写出 X 的分布律.

(2) 不写出 X 的分布律.

17. 设 X 为随机变量，C 是常数，证明 $D(X)<E[(X-C)^2]$，对于 $C\neq E(X)$. (由于 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$，上式表明$E[(X-C)^2]$当 $C=E(X)$时取到最小值.)

18. 设随机变量 X 服从瑞利分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$ 是常数. 求 $E(X)$，$D(X)$。

19. 设随机变量 X 服从 Γ 分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 是常数．求 $E(X),D(X)$．

20. 设随机变量 X 服从几何分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $0<p<1$ 是常数．求 $E(X),D(X)$．

21. 设长方形的高（以 m 计）$X\sim U(0,2)$，已知长方形的周长（以 m 计）为 20．求长方形面积 A 的数学期望和方差．

22. (1) 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且有 $E(X_i)=i,D(X_i)=5-i,i=1,2,3,4$．设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4$．求 $E(Y),D(Y)$．

(2) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(720,30^2),Y\sim N(640,25^2)$，求 $Z_1=2X+Y,Z_2=X-Y$ 的分布，并求概率 $P\{X>Y\},P\{X+Y>1\,400\}$．

23. 五家商店联营，它们每两周售出的某种农产品的数量（以 kg 计）分别为 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5．已知 $X_1\sim N(200,225),X_2\sim N(240,240),X_3\sim N(180,225),X_4\sim N(260,265),X_5\sim N(320,270),X_1,X_2,X_3,X_4,X_5$ 相互独立．

(1) 求五家商店两周的总销售量的均值和方差．

(2) 商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少千克该产品？

24. 卡车装运水泥，设每袋水泥重量 X（以 kg 计）服从 $N(50,2.5^2)$，问最多装多少袋水泥使总重量超过 2 000 的概率不大于 0.05．

25. 设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布．

(1) 求 $E(XY),E(X/Y),E[\ln(XY)],E[|Y-X|]$．

(2) 以 X,Y 为边长作一长方形，以 A，C 分别表示长方形的面积和周长．求 A 和 C 的相关系数．

26. (1) 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且有 $X_1\sim b(4,1/2),X_2\sim b(6,1/3),X_3\sim b(6,1/3)$，求 $P\{X_1=2,X_2=2,X_3=5\},E(X_1X_2X_3),E(X_1-X_2),E(X_1-2X_2)$．

(2) 设 X,Y 是随机变量，且有 $E(X)=3,E(Y)=1,D(X)=4,D(Y)=9$，令 $Z=5X-Y+15$，分别在下列 3 种情况下求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$．

(i) X,Y 相互独立，(ii) X,Y 不相关，(iii) X 与 Y 的相关系数为 0.25．

27. 下列各对随机变量 X 和 Y，问哪几对是相互独立的？哪几对是不相关的．

(1) $X\sim U(0,1),Y=X^2$．

(2) $X\sim U(-1,1),Y=X^2$．

(3) $X=\cos V,Y=\sin V,V\sim U(0,2\pi)$．

若 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，

(4) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}2y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

28. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

29. 设随机变量(X,Y)的分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

30. 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0,P(B)>0$，并定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生}.\end{cases}$$

证明若 $\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 必定相互独立.

31. 设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),\mathrm{Cov}(X,Y)$.

32. 设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X),E(Y),\mathrm{Cov}(X,Y),\rho_{XY},D(X+Y)$.

33. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且设 X,Y 相互独立，试求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数(其中 α,β是不为零的常数).

34. (1) 设随机变量 $W=(aX+3Y)^2,E(X)=E(Y)=0,D(X)=4,D(Y)=16,\rho_{XY}=-0.5$. 求常数 a 使 $E(W)$为最小，并求 $E(W)$的最小值.

(2) 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且有 $D(X)=\sigma_X^2,D(Y)=\sigma_Y^2$. 证明当 $a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$时，随机变量 $W=X-aY$ 与 $V=X+aY$ 相互独立.

35. 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且 $X\sim N(0,3),Y\sim N(0,4)$，相关系数 $\rho_{XY}=-1/4$，试写出 X 和 Y 的联合概率密度.

36. 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7 300，均方差是 700. 利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5 200～9 400 之间的概率 p.

37. 对于两个随机变量 V,W，若 $E(V^2),E(W^2)$存在，证明

$$[E(VW)]^2 \leqslant E(V^2)E(W^2). \tag{A}$$

这一不等式称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式.

提示：考虑实变量 t 的函数

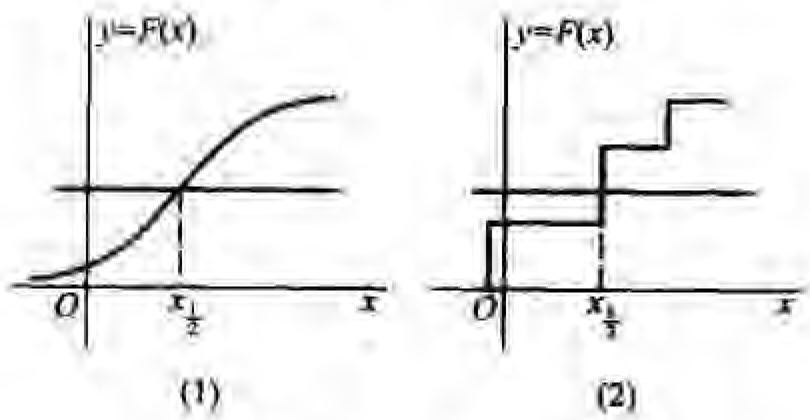
$$q(t)=E[(V+tW)^2]=E(V^2)+2tE(VW)+t^2E(W^2).$$

38. 中位数.

对于任意随机变量 X，满足以下两式

$$P\{X\leqslant x\}\geqslant\frac{1}{2},\qquad P\{X\geqslant x\}\leqslant\frac{1}{2}$$

的 x 称为 X 的**中位数**，记为 $x_{\frac{1}{2}}$ 或 M. 它是反映集中位置的一个数字特征，中位数总是存在的. 画出 X 的分布函数 $F(x)$ 的图. 如果 $F(x)$ 连续，那么 $x_{\frac{1}{2}}$ 是方程 $F(x)=\frac{1}{2}$ 的解(如题 38 图(1))，如果 $F(x)$ 有跳跃点(见题 38 图(2))，用垂直于横轴的线段联结后，得一连续曲线，它与直线 $y=1/2$ 的交点的横坐标即为 $x_{\frac{1}{2}}$.



题 38 图

(1) 设 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 X 的中位数 M.

(2) 设 X 服从柯西分布，其概率密度为

$$f(x)=\frac{b}{\pi[(x-a)^2+b^2]},\ b>0.$$

试求 X 的中位数 M.

$$=P\left\{\frac{Y-400\times0.8}{\sqrt{400\times0.8\times0.2}}\leqslant2.5\right\}\approx\Phi(2.5)=0.9938.$$ □

小结

人们在长期实践中认识到频率具有稳定性，即当试验次数不断增大时，频率稳定在一个数的附近．这一事实显示了可以用一个数来表征事件发生的可能性的大小．这使人们认识到概率是客观存在的，进而由频率的性质的启发和抽象给出了概率的定义，因而频率的稳定性是概率定义的客观基础．伯努利大数定理则以严密的数学形式论证了频率的稳定性．

中心极限定理表明，在相当一般的条件下，当独立随机变量的个数不断增加时，其和的分布趋于正态分布．这一事实阐明了正态分布的重要性．也揭示了为什么在实际应用中会经常遇到正态分布，也就是揭示了产生正态分布变量的源泉．另一方面，它提供了独立同分布随机变量之和 $\sum_{k=1}^{n}X_k$（其中 X_k 的方差存在）的近似分布，只要和式中加项的个数充分大，就可以不必考虑和式中的随机变量服从什么分布，都可以用正态分布来近似，这在应用上是有效和重要的．

中心极限定理的内容包含极限，因而称它为极限定理是很自然的．又由于它在统计中的重要性，称它为中心极限定理，这是波利亚(Polya)在1920年取的名字．

■ **重要术语及主题**

依概率收敛　伯努利大数定理　辛钦大数定理　独立同分布的中心极限定理　李雅普诺夫中心极限定理　棣莫弗－拉普拉斯中心极限定理

习题

1. 据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为100 h的指数分布，现随机地取16只，设它们的寿命是相互独立的，求这16只元件的寿命的总和大于1920 h的概率．

2. (1) 一保险公司有10 000个汽车投保人，每个投保人索赔金额的数学期望为280美元，标准差为800美元，求索赔总金额超过2 700 000美元的概率．

(2) 一公司有50张签约保险单，各张保险单的索赔金额为 $X_i, i=1,2,\cdots,50$（以千美元计）服从韦布尔(Weibull)分布，均值 $E(X_i)=5$，方差 $D(X_i)=6$，求50张保险单索赔的合计金额大于300的概率(设各保险单索赔金额是相互独立的)．

3. 计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数，设所有舍入误差相互独立且在 $(-0.5,0.5)$ 上服从均匀分布．

(1) 将1 500个数相加，问误差总和的绝对值超过15的概率是多少？

(2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于10的概率不小于0.90？

4. 设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为0.5 kg，均方差为0.1 kg，问5 000只零件的总重量超过2 510 kg的概率是多少？

5. 有一批建筑房屋用的木柱，其中80%的长度不小于3 m，现从这批木柱中随机地取100根，求其中至少有30根短于3 m的概率．

6. 一工人修理一台机器需两个阶段，第一阶段所需时间(小时)服从均值为0.2的指数

分布，第二阶段服从均值为 0.3 的指数分布，且与第一阶段独立．现有 20 台机器需要修理，求他在 8 h 内完成的概率．

7. 一食品店有三种蛋糕出售，由于售出哪一种蛋糕是随机的，因而售出一只蛋糕的价格是一个随机变量，它取 1 元、1.2元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3、0.2、0.5．若售出 300 只蛋糕．

(1) 求收入至少 400 元的概率．

(2) 求售出价格为1.2元的蛋糕多于 60 只的概率．

8. 一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成．在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10．为了使整个系统起作用，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率．

9. 已知在某十字路口，一周事故发生数的数学期望为 2.2，标准差为1.4．

(1) 以 $\overline{X}$ 表示一年(以 52 周计)此十字路口事故发生数的算术平均，试用中心极限定理求 $\overline{X}$ 的近似分布，并求 $P\{\overline{X}<2\}$．

(2) 求一年事故发生数小于 100 的概率．

10. 某种小汽车氧化氮的排放量的数学期望为 0.9 g/km，标准差为1.9 g/km，某汽车公司有这种小汽车 100 辆，以 $\overline{X}$ 表示这些车辆氧化氮排放量的算术平均，问当 L 为何值时 $\overline{X}>L$ 的概率不超过 0.01．

11. 随机地选取两组学生，每组 80 人，分别在两个实验室里测量某种化合物的 pH．各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，服从同一分布，数学期望为 5，方差为 0.3，以 $\overline{X}$、$\overline{Y}$ 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均．

(1) 求$P\{4.9<\overline{X}<5.1\}$．

(2) 求 $P\{-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1\}$．

12. 一公寓有 200 户住户，一户住户拥有汽车辆数 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.1	0.6	0.3

问需要多少车位，才能使每辆汽车都具有一个车位的概率至少为 0.95．

13. 某种电子器件的寿命(小时)具有数学期望 μ(未知)，方差 $\sigma^2=400$．为了估计 μ，随机地取 n 只这种器件，在时刻 $t=0$ 投入测试(测试是相互独立的)直到失效，测得其寿命为 X_1，X_2，…，X_n，以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 作为μ 的估计，为使 $P\{|\overline{X}-\mu|<1\}\geqslant 0.95$，问 n 至少为多少？

14. 某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难血液病的治愈率为 0.8，医院任意抽查 100 个服用此药品的病人，若其中多于 75 人治愈，就接受此断言，否则就拒绝此断言．

(1) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？

(2) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率为 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

2° 定理二的推广

定理二中 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立这一结论，还能推广到多个同方差正态总体的情形. 例如，对于两个同方差正态总体的情形. 设 $\overline{X},\overline{Y},S_1^2,S_2^2$ 是定理四 2°中所说的正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本均值和样本方差. 只要引入正交矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 n_i 阶正交矩阵，其第一行元素都是 $1/\sqrt{n_i}$ $(i=1,2)$，与上面同样的做法，考察向量

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{V}$$

各分量的独立性，其中

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=(V_1,V_2,\cdots,V_n),$$

$$V_i=(X_i-\mu_1)/\sigma,\ i=1,2,\cdots,n_1,$$

$$V_{n_1+j}=(Y_j-\mu_2)/\sigma,j=1,2,\cdots,n_2,n_1+n_2=n.$$

就可证得 $\overline{X},\overline{Y},S_1^2,S_2^2$ 相互独立.

对于 m $(m\geqslant2)$ 个同方差的正态总体的情形，设 $\overline{X}_i,S_i^2$ 分别是总体 $N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,m$ 的样本均值和样本方差，且设各样本相互独立，则 $\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_m,S_1^2,S_2^2,\cdots,S_m^2$ 相互独立.

习题

1. 在总体 $N(52,6.3^2)$ 中随机抽取一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 50.8 到 53.8 之间的概率.

2. 在总体 $N(12,4)$ 中随机抽一容量为 5 的样本 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5.

(1) 求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率.

(2) 求概率 $P\{\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}>15\}$；$P\{\min\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}<10\}$.

3. 求总体 $N(20,3)$ 的容量分别为 10，15 的两独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率.

4. (1) 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 来自总体 $N(0,1)$，$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，试确定常数 C 使 CY 服从 χ^2 分布.

(2) 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 来自总体 $N(0,1)$，$Y=\dfrac{C(X_1+X_2)}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{1/2}}$，试确定常数 C 使 Y 服从 t 分布.

(3) 已知 $X\sim t(n)$，求证 $X^2\sim F(1,n)$.

5. (1) 已知某种能力测试的得分服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，随机取 10 个人参与这一测试. 求他们得分的联合概率密度，并求这 10 个人得分的平均值小于 μ 的概率.

(2) 在(1)中设 $\mu=62$，$\sigma^2=25$，若得分超过 70 就能得奖，求至少有一人得奖的概率.

6. 设总体 $X\sim b(1,p)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本.

(1) 求 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律.

(2) 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律.

(3) 求 $E(\overline{X}),D(\overline{X}),E(S^2)$.

7. 设总体 $X \sim \chi^2(n)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自 X 的样本，求 $E(\overline{X})$，$D(\overline{X})$，$E(S^2)$。

8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自 X 的样本。

(1) 写出 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 的联合概率密度。

(2) 写出 $\overline{X}$ 的概率密度。

9. 设在总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽得一容量为 16 的样本，这里 μ, σ^2 均未知。

(1) 求 $P\{S^2/\sigma^2 \leqslant 2.041\}$，其中 S^2 为样本方差。

(2) 求 $D(S^2)$。

10. 下面列出了 30 个美国 NBA 球员的体重（以磅计，1 磅 $=0.454$kg）数据。这些数据是从美国 NBA 球队 1990—1991 赛季的花名册中抽样得到的。

225	232	232	245	235	245	270	225	240	240
217	195	225	185	200	220	200	210	271	240
220	230	215	252	225	220	206	185	227	236

(1) 画出这些数据的频率直方图（提示：最大和最小观察值分别为 271 和 185，区间 $[184.5, 271.5]$ 包含所有数据，将整个区间分为 5 等份，为计算方便，将区间调整为 $(179.5, 279.5)$）。

(2) 作出这些数据的箱线图。

11. 截尾均值　设数据集包含 n 个数据，将这些数据自小到大排序为

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)},$$

删去 $100\alpha\%$ 个数值小的数，同时删去 $100\alpha\%$ 个数值大的数，将留下的数据取算术平均，记为 $\bar{x}_\alpha$，即

$$\bar{x}_\alpha = \frac{x_{([n\alpha]+1)} + \cdots + x_{(n-[n\alpha])}}{n - 2[n\alpha]}$$

其中 $[n\alpha]$ 是小于或等于 $n\alpha$ 的最大整数（一般取 α 为 $0.1 \sim 0.2$）。$\bar{x}_\alpha$ 称为 $100\alpha\%$ 截尾均值。例如对于第 10 题中的数据，取 $\alpha = 0.1$，则有 $[n\alpha] = [30 \times 0.1] = 3$，得 $100 \times 0.1\%$ 截尾均值

$$\bar{x}_\alpha = \frac{200+200+\cdots+245+245}{30-6} = 225.416\,7.$$

若数据来自某一总体的样本，则 $\bar{x}_\alpha$ 是一个统计量。$\bar{x}_\alpha$ 不受样本的极端值的影响。截尾均值在实际应用问题中是常会用到的。

试求第 10 题的 30 个数据的 $\alpha = 0.2$ 的截尾均值。

习题

1. 随机地取 8 只活塞环，测得它们的直径为（以 mm 计）

$$74.001\quad 74.005\quad 74.003\quad 74.001$$
$$74.000\quad 73.998\quad 74.006\quad 74.002$$

试求总体均值 μ 及方差 σ^2 的矩估计值，并求样本方差 s^2.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一相应的样本值. 求下列各总体的概率密度或分布律中的未知参数的矩估计量和矩估计值.

(1) $f(x)=\begin{cases}\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}, & x>c,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $c>0$ 为已知，$\theta>1$，θ 为未知参数.

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}\, x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>0$，θ 为未知参数.

(3) $P\{X=x\}=\binom{m}{x}p^x(1-p)^{m-x}$，$x=0,1,2,\cdots,m$，其中 $0<p<1$，p 为未知参数.

3. 求上题中各未知参数的最大似然估计值和估计量.

4. (1) 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta\ (0<\theta<1)$ 为未知参数. 已知取得了样本值 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$. 试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的一个样本，试求 λ 的最大似然估计量及矩估计量.

(3) 设随机变量 X 服从以 r,p 为参数的负二项分布，其分布律为

$$P\{X=x_k\}=\binom{x_k-1}{r-1}p^r(1-p)^{x_k-r},\quad x_k=r,r+1,\cdots,$$

其中 r 已知，p 未知. 设有样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，试求 p 的最大似然估计值.

5. 设某种电子器件的寿命（以 h 计）T 服从双参数的指数分布，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(t-c)/\theta}, & t\geqslant c,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $c,\theta\ (c,\theta>0)$ 为未知参数. 自一批这种器件中随机地取 n 件进行寿命试验. 设它们的失效时间依次为 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$.

(1) 求 θ 与 c 的最大似然估计值.

(2) 求 θ 与 c 的矩估计量.

6. 一地质学家为研究密歇根湖湖滩地区的岩石成分，随机地自该地区取 100 个样品，每个样品有 10 块石子，记录了每个样品中属石灰石的石子数. 假设这 100 次观察相互独立，并

且由过去经验知，它们都服从参数为 $m=10$，p 的二项分布，p 是这地区一块石子是石灰石的概率. 求 p 的最大似然估计值. 该地质学家所得的数据如下：

样品中属石灰石的石子数 i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观察到 i 块石灰石的样品个数	0	1	6	7	23	26	21	12	3	1	0

7. (1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，且 $X \sim \pi(\lambda)$，求 $P\{X=0\}$ 的最大似然估计值.

(2) 某铁路局证实一个扳道员在五年内所引起的严重事故的次数服从泊松分布. 求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的最大似然估计. 使用下面 122 个观察值. 下表中，r 表示一扳道员五年中引起严重事故的次数，s 表示观察到的扳道员人数.

r	0	1	2	3	4	5
s	44	42	21	9	4	2

8. (1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

的总体的样本，θ 未知，求 $U=\mathrm{e}^{-1/\theta}$ 的最大似然估计值.

(2) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的样本，μ 未知，求 $\theta=P\{X>2\}$ 的最大似然估计值.

(3) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 $b(m,\theta)$ 的样本值，又 $\theta=\frac{1}{3}(1+\beta)$，求 β 的最大似然估计值.

9. (1) 验证教材第六章 §3 定理四中的统计量

$$S_w^2=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}S_1^2+\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}S_2^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

是两总体公共方差 σ^2 的无偏估计量（S_w^2 称为 σ^2 的合并估计）.

(2) 设总体 X 的数学期望为 μ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意常数，验证 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i$（其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$）是 μ 的无偏估计量.

10. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，设 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$.

(1) 确定常数 c，使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

(2) 确定常数 c 使 $(\overline{X})^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计（$\overline{X}$，S^2 是样本均值和样本方差）.

11. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad 0<\theta<+\infty,$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本.

(1) 验证 θ 的最大似然估计量是 $\hat{\theta}=\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$.

(2) 证明 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

12. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本,其中 θ 未知.设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4),$$

$$T_2=(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)/5,$$

$$T_3=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4.$$

(1) 指出 T_1,T_2,T_3 中哪几个是 θ 的无偏估计量.

(2) 在上述 θ 的无偏估计中指出哪一个较为有效.

13. (1) 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计,且有 $D(\hat{\theta})>0$,试证

$$\hat{\theta}^2=(\hat{\theta})^2 \text{ 不是 } \theta^2 \text{ 的无偏估计.}$$

(2) 试证明均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

中未知参数 θ 的最大似然估计量不是无偏的.

14. 设从均值为 μ,方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中分别抽取容量为 n_1,n_2 的两独立样本.$\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 分别是两样本的均值.试证:对于任意常数 $a,b\ (a+b=1)$,$Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计,并确定常数 a,b 使 $D(Y)$ 达到最小.

15. 设有 k 台仪器,已知用第 i 台仪器测量时,测定值总体的标准差为 $\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,k)$.用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次,分别得到 $X_1,X_2,\cdots,X_k$.设仪器都没有系统误差,即 $E(X_i)=\theta\ (i=1,2,\cdots,k)$.问 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 取何值,方能使使用 $\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{k}a_iX_i$ 估计 θ 时,$\hat{\theta}$ 是无偏的,并且 $D(\hat{\theta})$ 最小?

16. 设某种清漆的 9 个样品,其干燥时间(以 h 计)分别为

6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.(1) 若由以往经验知 $\sigma=0.6$(h).(2) 若 σ 为未知.

17. 分别使用金球和铂球测定引力常数(单位:$10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$).

(1) 用金球测定观察值为

6.683　6.681　6.676　6.678　6.679　6.672

(2) 用铂球测定观察值为

6.661　6.661　6.667　6.667　6.664

设测定值总体为 $N(\mu,\sigma^2)$,μ,σ^2 均为未知.试就(1),(2)两种情况分别求 μ 的置信水平为 0.9 的置信区间,并求 σ^2 的置信水平为 0.9 的置信区间.

18. 随机地取某种炮弹 9 发做试验,得炮口速度的样本标准差 $s=11$ m/s.设炮口速度服从正态分布.求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

19. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，μ 已知，σ 未知.

（1）验证 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$. 利用这一结果构造 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

（2）设 $\mu=6.5$，且有样本值 7.5，2.0，12.1，8.8，9.4，7.3，1.9，2.8，7.0，7.3. 试求 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

20. 在第 17 题中，设用金球和用铂球测定时测定值总体的方差相等. 求两个测定值总体均值差的置信水平为 0.90 的置信区间.

21. 随机地从 A 批导线中抽 4 根，又从 B 批导线中抽 5 根，测得电阻(Ω)为

A 批导线：0.143　0.142　0.143　0.137

B 批导线：0.140　0.142　0.136　0.138　0.140

设测定数据分别来自分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$，$N(\mu_2, \sigma^2)$，且两样本相互独立. 又 μ_1, μ_2, σ^2 均为未知. 试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

22. 研究两种固体燃料火箭推进器的燃烧率. 设两者都服从正态分布，并且已知燃烧率的标准差均近似地为 0.05 cm/s，取样本容量为 $n_1=n_2=20$. 得燃烧率的样本均值分别为 $\bar{x}_1=18$ cm/s，$\bar{x}_2=24$ cm/s. 设两样本独立. 求两燃烧率总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.99 的置信区间.

23. 设两位化验员 A，B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各做 10 次测定，其测定值的样本方差依次为 $s_A^2=0.5419$，$s_B^2=0.6065$. 设 σ_A^2，σ_B^2 分别为 A，B 所测定的测定值总体的方差. 设总体均为正态的，且两样本独立. 求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间.

24. 在一批货物的容量为 100 的样本中，经检验发现有 16 只次品. 试求这批货物次品率的置信水平为 0.95 的置信区间.

25. （1）求第 16 题中 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限.

（2）求第 21 题中 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

（3）求第 23 题中方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限.

26. 为研究某种汽车轮胎的磨损特性，随机地选择 16 只轮胎，每只轮胎行驶到磨坏为止，记录所行驶的路程(以 km 计)如下：

41 250	40 187	43 175	41 010	39 265	41 872	42 654	41 287
38 970	40 200	42 550	41 095	40 680	43 500	39 775	40 400

假设这些数据来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 未知，试求 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

27. 科学上的重大发现往往是由年轻人做出的. 下面列出了自 16 世纪中叶至 20 世纪早期的十二项重大发现的发现者和他们发现时的年龄：

发现内容	发现者	发现时间	年龄
1. 地球绕太阳运转	哥白尼(Copernicus)	1543	40
2. 望远镜、天文学的基本定律	伽利略(Galileo)	1600	36
3. 运动原理、重力、微积分	牛顿(Newton)	1665	23
4. 电的本质	富兰克林(Franklin)	1746	40

5. 燃烧是与氧气联系着的	拉瓦锡（Lavoisier）	1774	31
6. 地球是渐进过程演化成的	莱尔（Lyell）	1830	33
7. 自然选择控制演化的证据	达尔文（Darwin）	1858	49
8. 光的场方程	麦克斯韦（Maxwell）	1864	33
9. 放射性	居里（Curie）	1896	34
10. 量子论	普朗克（Plank）	1901	43
11. 狭义相对论，$E=mc^2$	爱因斯坦（Einstein）	1905	26
12. 量子论的数学基础	薛定谔（Schrödinger）	1926	39

设样本来自正态总体，试求发现者的平均年龄 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信上限.

取 H_0 为"无效益"、"无改进"、"无价值"等等．例如，取

$$H_0: \text{新技术未提高效益}, \quad H_1: \text{新技术提高效益}.$$

实际上，我们感兴趣的是 H_1"提高效益"，但对采用新技术应持慎重态度．选取 H_0 为"新技术未提高效益"，一旦 H_0 被拒绝了，表示有较强的理由去采用新技术．

在实际问题中，情况比较复杂，如何选取 H_0、H_1 只能在实践中积累经验，根据实际情况去判断了．

注意，拒绝域的形式是由 H_1 确定的．

我们还介绍了置信区间与假设检验的关系．知道了置信区间就能容易判明是否接受原假设；反之，知道了检验的接受域就得到了相应的置信区间．

■ **重要术语及主题**

原假设　备择假设　检验统计量　单边检验　双边检验　显著性水平　拒绝域　显著性检验　一个正态总体的参数的检验　两个正态总体均值差、方差比的检验　成对数据的检验　χ^2 分布拟合检验　偏度、峰度检验　秩和检验

习题

1. 某批矿砂的 5 个样品中的镍含量，经测定为(%)

3.25　3.27　3.24　3.26　3.24

设测定值总体服从正态分布，但参数均未知，问在 $\alpha=0.01$ 下能否接受假设：这批矿砂的镍含量的均值为 3.25．

2. 如果一个矩形的宽度 w 与长度 l 的比 $w/l=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$，这样的矩形称为黄金矩形．这种尺寸的矩形使人们看上去有良好的感觉．现代的建筑构件(如窗架)、工艺品(如图片镜框)，甚至司机的执照、商业的信用卡等常常都是采用黄金矩形．下面列出某工艺品工厂随机取的 20 个矩形的宽度与长度的比值：

0.693	0.749	0.654	0.670	0.662	0.672	0.615	0.606	0.690	0.628
0.668	0.611	0.606	0.609	0.601	0.553	0.570	0.844	0.576	0.933

设这一工厂生产的矩形的宽度与长度的比值总体服从正态分布，其均值为 μ，方差为 σ^2，μ,σ^2 均未知．试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$$H_0: \mu=0.618, \quad H_1: \mu\neq 0.618.$$

3. 要求一种元件平均使用寿命不得低于 1 000 h，生产者从一批这种元件中随机抽取 25 件，测得其寿命的平均值为 950 h．已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma=100$ h 的正态分布．试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下判断这批元件是否合格？设总体均值为 μ，μ 未知．即需检验假设 $H_0: \mu\geq 1\,000$，$H_1: \mu<1\,000$．

4. 下面列出的是某工厂随机选取的 20 只部件的装配时间(min)：

9.8	10.4	10.6	9.6	9.7	9.9	10.9	11.1	9.6	10.2
10.3	9.6	9.9	11.2	10.6	9.8	10.5	10.1	10.5	9.7

设装配时间的总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知．是否可以认为装配时间的均值显著大于 10 (取 $\alpha=0.05$)？

5. 按规定，100 g 罐头番茄汁中的平均维生素 C 含量不得少于 21 mg/g. 现从工厂的产品中抽取 17 个罐头，其 100 g 番茄汁中，测得维生素 C 含量(mg/g)记录如下：

16　25　21　20　23　21　19　15　13　23　17　20　29　18　22　16　22

设维生素含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知，问这批罐头是否符合要求(取显著性水平 $\alpha=0.05$).

6. 下表分别给出两位文学家马克·吐温(Mark Twain)的 8 篇小品文以及斯诺特格拉斯(Snodgrass)的 10 篇小品文中由 3 个字母组成的单字的比例.

马克·吐温	0.225	0.262	0.217	0.240	0.230	0.229	0.235	0.217		
斯诺特格拉斯	0.209	0.205	0.196	0.210	0.202	0.207	0.224	0.223	0.220	0.201

设两组数据分别来自正态总体，且两总体方差相等，但参数均未知. 两样本相互独立. 问两位作家所写的小品文中包含由 3 个字母组成的单字的比例是否有显著的差异(取 $\alpha=0.05$)?

7. 在 20 世纪 70 年代后期人们发现，在酿造啤酒时，在麦芽干燥过程中形成致癌物质亚硝基二甲胺(NDMA). 到了 20 世纪 80 年代初期开发了一种新的麦芽干燥过程. 下面给出分别在新老两种过程中形成的 NDMA 含量(以 10 亿份中的份数计)：

老过程	6	4	5	5	6	5	5	6	4	6	7	4
新过程	2	1	2	2	1	0	3	2	1	0	1	3

设两样本分别来自正态总体，且两总体的方差相等，但参数均未知. 两样本独立. 分别以 μ_1，μ_2 记对应于老、新过程的总体的均值，试检验假设($\alpha=0.05$)

$$H_0:\mu_1-\mu_2\leqslant 2,\quad H_1:\mu_1-\mu_2>2.$$

8. 随机地选了 8 个人，分别测量了他们在早晨起床时和晚上就寝时的身高(cm)，得到以下的数据.

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
早上(x_i)	172	168	180	181	160	163	165	177
晚上(y_i)	172	167	177	179	159	161	166	175

设各对数据的差 $D_i=X_i-Y_i\quad(i=1,2,\cdots,8)$是来自正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，μ_D,σ_D^2 均未知. 问是否可以认为早晨的身高比晚上的身高要高(取 $\alpha=0.05$)?

9. 为了比较用来做鞋子后跟的两种材料的质量，选取了 15 名男子(他们的生活条件各不相同)，每人穿一双新鞋，其中一只是以材料 A 做后跟，另一只以材料 B 做后跟，其厚度均为 10 mm. 过了一个月再测量厚度，得到数据如下：

男子	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
材料 $A(x_i)$	6.6	7.0	8.3	8.2	5.2	9.3	7.9	8.5	7.8	7.5	6.1	8.9	6.1	9.4	9.1
材料 $B(y_i)$	7.4	5.4	8.8	8.0	6.8	9.1	6.3	7.5	7.0	6.5	4.4	7.7	4.2	9.4	9.1

设 $D_i=X_i-Y_i$ $(i=1,2,\cdots,15)$是来自正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，μ_D,σ_D^2 均未知. 问是否可以认为以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿(取 $\alpha=0.05$)?

10. 为了试验两种不同的某谷物的种子的优劣，选取了 10 块土质不同的土地，并将每块土地分为面积相同的两部分，分别种植这两种种子. 设在每块土地的两部分人工管理等条件完全一样. 下面给出各块土地上的单位面积产量：

土地编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
种子 $A(x_i)$	23	35	29	42	39	29	37	34	35	28
种子 $B(y_i)$	26	39	35	40	38	24	36	27	41	27

设 $D_i=X_i-Y_i$ $(i=1,2,\cdots,10)$是来自正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本，μ_D,σ_D^2 均未知. 问以这两种种子种植的谷物的产量是否有显著的差异(取 $\alpha=0.05$)?

11. 一种混杂的小麦品种，株高的标准差为 $\sigma_0=14$ cm，经提纯后随机抽取 10 株，它们的株高(以 cm 计)为

90　105　101　95　100　100　101　105　93　97

考察提纯后群体是否比原群体整齐? 取显著性水平 $\alpha=0.01$，并设小麦株高服从 $N(\mu,\sigma^2)$.

12. 某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005 Ω，今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得 $s=0.007$ Ω，设总体为正态分布，参数均未知. 问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大?

13. 在第 2 题中记总体的标准差为 σ，试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$$H_0:\sigma^2=0.11^2,\quad H_1:\sigma^2\neq 0.11^2.$$

14. 测定某种溶液中的水分，它的 10 个测定值给出 $s=0.037\%$，设测定值总体为正态分布，σ^2 为总体方差，σ^2 未知. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_0:\sigma\geqslant 0.04\%,\quad H_1:\sigma<0.04\%.$$

15. 在第 6 题中分别记两个总体的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2. 试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2,$$

以说明在第 6 题中我们假设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 是合理的.

16. 在第 7 题中分别记两个总体的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2. 试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2,$$

以说明在第 7 题中我们假设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 是合理的.

17. 两种小麦品种从播种到抽穗所需的天数如下：

x	101	100	99	99	98	100	98	99	99	99
y	100	98	100	99	98	99	98	98	99	100

设两样本依次来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，μ_i,σ_i $(i=1,2)$均未知，两样本相互独立.

(1) 试检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ (取 $\alpha=0.05$).

(2) 若能接受 H_0，接着检验假设 $H_0':\mu_1=\mu_2$，$H_1':\mu_1\neq\mu_2$ (取 $\alpha=0.05$).

18. 用一种叫"混乱指标"的尺度去衡量工程师的英语文章的可理解性，对混乱指标的打分越低表示可理解性越高. 分别随机选取 13 篇刊载在工程杂志上的论文，以及 10 篇未出版的学术报告. 对它们的打分列于下表：

工程杂志上的论文（数据Ⅰ）	未出版的学术报告（数据Ⅱ）
1.79　1.75　1.67　1.65	2.39　2.51　2.86
1.87　1.74　1.94	2.56　2.29　2.49
1.62　2.06　1.33	2.36　2.58
1.96　1.69　1.70	2.62　2.41

设数据Ⅰ，Ⅱ分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 均未知，两样本独立.

(1) 试检验假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ （取 $\alpha=0.1$）.

(2) 若能接受 H_0，接着检验假设 $H_0':\mu_1=\mu_2$，$H_1':\mu_1\neq\mu_2$（取 $\alpha=0.1$）.

19. 有两台机器生产金属部件. 分别在两台机器所生产的部件中各取一容量 $n_1=60$，$n_2=40$ 的样本，测得部件重量（以 kg 计）的样本方差分别为 $s_1^2=15.46$，$s_2^2=9.66$. 设两样本相互独立. 两总体分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 分布. μ_i,σ_i^2 $(i=1,2)$ 均未知. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_0:\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2.$$

20. 设需要对某一正态总体的均值进行假设检验

$$H_0:\mu\geqslant 15,\quad H_1:\mu<15.$$

已知 $\sigma^2=2.5$，取 $\alpha=0.05$. 若要求当 H_1 中的 $\mu\leqslant 13$ 时犯第Ⅱ类错误的概率不超过 $\beta=0.05$，求所需的样本容量.

21. 电池在货架上滞留的时间不能太长. 下面给出某商店随机选取的 8 只电池的货架滞留时间（以天计）：

$$108\quad 124\quad 124\quad 106\quad 138\quad 163\quad 159\quad 134$$

设数据来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知.

(1) 试检验假设 $H_0:\mu\leqslant 125$，$H_1:\mu>125$，取 $\alpha=0.05$.

(2) 若要求在上述 H_1 中 $(\mu-125)/\sigma\geqslant 1.4$时，犯第Ⅱ类错误的概率不超过 $\beta=0.1$，求所需的样本容量.

22. 一药厂生产一种新的止痛片，厂方希望验证服用新药片后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出需检验假设

$$H_0:\mu_1\leqslant 2\mu_2,\quad H_1:\mu_1>2\mu_2.$$

此处 μ_1,μ_2 分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至起作用的时间间隔的总体的均值. 设两总体均为正态且方差分别为已知值 σ_1^2,σ_2^2. 现分别在两总体中取一样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，设两个样本独立. 试给出上述假设 H_0 的拒绝域，取显著性水平为 α.

23. 检查了一本书的 100 页，记录各页中印刷错误的个数，其结果为

错误个数 f_i	0	1	2	3	4	5	6	≥7
含 f_i 个错误的页数	36	40	19	2	0	2	1	0

问能否认为一页的印刷错误的个数服从泊松分布(取 $\alpha=0.05$).

24. 在一批灯泡中抽取 300 只作寿命试验,其结果如下:

寿命 t(h)	$0\leqslant t\leqslant 100$	$100<t\leqslant 200$	$200<t\leqslant 300$	$t>300$
灯泡数	121	78	43	58

取 $\alpha=0.05$,试检验假设

H_0:灯泡寿命服从指数分布

$$f(t)=\begin{cases}0.005e^{-0.005t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

25. 下面给出了随机选取的某大学一年级学生(200 名)一次数学考试的成绩.

(1) 画出数据的直方图.

(2) 试取 $\alpha=0.1$ 检验数据来自正态总体 $N(60,15^2)$.

分数 x	$20\leqslant x\leqslant 30$	$30<x\leqslant 40$	$40<x\leqslant 50$	$50<x\leqslant 60$
学生数	5	15	30	51
分数 x	$60<x\leqslant 70$	$70<x\leqslant 80$	$80<x\leqslant 90$	$90<x\leqslant 100$
学生数	60	23	10	6

26. 袋中装有 8 只球,其中红球数未知.在其中任取 3 只,记录红球的只数 X,然后放回,再任取 3 只,记录红球的只数,然后放回.如此重复进行了 112 次,其结果如下:

x	0	1	2	3
次数	1	31	55	25

试取 $\alpha=0.05$ 检验假设

H_0:X 服从超几何分布

$$P\{X=k\}=\binom{5}{k}\binom{3}{3-k}\Big/\binom{8}{3},\quad k=0,1,2,3.$$

即检验假设 H_0:红球的只数为 5.

27. 一农场 10 年前在一鱼塘中按比例 20 : 15 : 40 : 25 投放了四种鱼:鲑鱼、鲈鱼、竹夹鱼和鲇鱼的鱼苗,现在在鱼塘里获得一样本如下:

序号	1	2	3	4	
种类	鲑鱼	鲈鱼	竹夹鱼	鲇鱼	
数量(条)	132	100	200	168	$\sum=600$

试取 $\alpha=0.05$,检验各类鱼数量的比例较 10 年前是否有显著的改变.

28. 某种鸟在起飞前,双足齐跳的次数 X 服从几何分布,其分布律为

$$P\{X=x\}=p^{x-1}(1-p),\quad x=1,2,\cdots.$$

今获得一样本如下:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\geqslant 13$
观察到 x 的次数	48	31	20	9	6	5	4	2	1	1	2	1	0

(1) 求 p 的最大似然估计值.

(2) 取 $\alpha=0.05$,检验假设:H_0:数据来自总体 $P\{X=x\}=p^{x-1}(1-p),x=1,2,\cdots$.

29. 分别抽查了两球队部分队员行李的重量(kg)为:

1 队	34	39	41	28	33	
2 队	36	40	35	31	39	36

设两样本独立且 1,2 两队队员行李重量总体的概率密度至多差一个平移.记两总体的均值分别为 μ_1,μ_2,且 μ_1,μ_2 均未知.试检验假设:$H_0:\mu_1=\mu_2,H_1:\mu_1<\mu_2$ (取 $\alpha=0.05$).

30. 下面给出两种型号的计算器充电以后所能使用的时间(h):

型号 A	5.5	5.6	6.3	4.6	5.3	5.0	6.2	5.8	5.1	5.2	5.9	
型号 B	3.8	4.3	4.2	4.0	4.9	4.5	5.2	4.8	4.5	3.9	3.7	4.6

设两样本独立且数据所属的两总体的概率密度至多差一个平移,试问能否认为型号 A 的计算器平均使用时间比型号 B 来得长($\alpha=0.01$)?

31. 下面给出两个工人五天生产同一种产品每天生产的件数:

工人 A	49	52	53	47	50
工人 B	56	48	58	46	55

设两样本独立且数据所属的两总体的概率密度至多差一个平移.问能否认为工人 A、工人 B 平均每天完成的件数没有显著差异($\alpha=0.1$)?

32. (1) 设总体服从 $N(\mu,100)$,μ 未知,现有样本:$n=16,\bar{x}=13.5$,试检验假设 $H_0:\mu\leqslant 10,H_1:\mu>10$,(i)取 $\alpha=0.05$,(ii)取 $\alpha=0.10$,(iii) H_0 可被拒绝的最小显著性水平.

(2) 考察生长在老鼠身上的肿块的大小.以 X 表示在老鼠身上生长了 15 天的肿块的直径(以 mm 计),设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,μ,σ^2 均未知.今随机地取 9 只老鼠(在它们身上的肿块都长了 15 天),测得 $\bar{x}=4.3,s=1.2$,试取 $\alpha=0.05$,用 p 值检验法检验假设 $H_0:\mu=4.0,H_1:\mu\neq 4.0$,求出 p 值.

(3) 用 p 值检验法检验 §2 例 4 的检验问题.

(4) 用 p 值检验法检验第 27 题中的检验问题.

习题

以下约定各个习题均符合涉及的方差分析模型或回归分析模型所要求的条件.

1. 今有某种型号的电池三批，它们分别是 A、B、C 三个工厂所生产的. 为评比其质量，各随机抽取 5 只电池为样品，经试验得其寿命(h) 如下：

A		B		C	
40	42	26	28	39	50
48	45	34	32	40	50
38		30		43	

试在显著性水平 0.05 下检验电池的平均寿命有无显著的差异. 若差异是显著的，试求均值差 $\mu_A-\mu_B$，$\mu_A-\mu_C$ 和 $\mu_B-\mu_C$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

2. 为了寻找飞机控制板上仪器表的最佳布置，试验了三个方案，观察领航员在紧急情况的反应时间（以 1/10 秒计），随机地选择 28 名领航员，得到他们对于不同的布置方案的反应时间如下：

方案 Ⅰ	14	13	9	15	11	13	14	11				
方案 Ⅱ	10	12	7	11	8	12	9	10	13	9	10	9
方案 Ⅲ	11	5	9	10	6	8	8	7				

试在显著性水平 0.05 下检验各个方案的反应时间有无显著差异. 若有差异，试求 $\mu_1-\mu_2$，$\mu_1-\mu_3$，$\mu_2-\mu_3$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

3. 某防治站对 4 个林场的松毛虫密度进行调查，每个林场调查 5 块地得资料如下表：

地点	松毛虫密度(头 / 标准地)				
A_1	192	189	176	185	190
A_2	190	201	187	196	200
A_3	188	179	191	183	194
A_4	187	180	188	175	182

判断 4 个林场松毛虫密度有无显著差异，取显著性水平 $\alpha=0.05$.

4. 一试验用来比较 4 种不同药品解除外科手术后疼痛的延续时间(h)，结果如下表：

药品	时间长度(h)				
A	8	6	4	2	
B	6	6	4	4	
C	8	10	10	10	12
D	4	4	2		

试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验各种药品对解除疼痛的延续时间有无显著差异.

5. 将抗生素注入人体会产生抗生素与血浆蛋白质结合的现象,以致减少了药效.下表列出 5 种常用的抗生素注入牛的体内时,抗生素与血浆蛋白质结合的百分比.

青霉素	四环素	链霉素	红霉素	氯霉素
29.6	27.3	5.8	21.6	29.2
24.3	32.6	6.2	17.4	32.8
28.5	30.8	11.0	18.3	25.0
32.0	34.8	8.3	19.0	24.2

试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验这些百分比的均值有无显著的差异.

6. 下表给出某种化工过程在三种浓度、四种温度水平下得率的数据:

		温度(因素 B)			
		10℃	24℃	38℃	52℃
浓度(因素 A)	2%	14　10	11　11	13　9	10　12
	4%	9　7	10　8	7　11	6　10
	6%	5　11	13　14	12　13	14　10

试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验:在不同浓度下得率的均值是否有显著差异,在不同温度下得率的均值是否有显著差异,交互作用的效应是否显著.

7. 为了研究某种金属管防腐蚀的功能,考虑了 4 种不同的涂料涂层.将金属管埋设在 3 种不同性质的土壤中,经历了一定时间,测得金属管腐蚀的最大深度如下表所示(以 mm 计):

	土壤类型(因素 B)		
	1	2	3
涂层(因素 A)	1.63	1.35	1.27
	1.34	1.30	1.22
	1.19	1.14	1.27
	1.30	1.09	1.32

试取显著性水平 $\alpha=0.05$ 检验在不同涂层下腐蚀的最大深度的平均值有无显著差异,在不同土壤下腐蚀的最大深度的平均值有无显著差异.设两因素间没有交互作用效应.

8. 下表数据是退火温度 x(℃)对黄铜延性 Y 效应的试验结果,Y 是以延长度计算的.

x(℃)	300	400	500	600	700	800
y(%)	40	50	55	60	67	70

画出散点图并求 Y 对于 x 的线性回归方程.

9. 在钢线碳含量对于电阻的效应的研究中,得到以下的数据:

碳含量 $x(\%)$	0.10	0.30	0.40	0.55	0.70	0.80	0.95
20℃ 时电阻 $y(\mu\Omega)$	15	18	19	21	22.6	23.8	26

(1) 画出散点图.

(2) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

(3) 求 ε 的方差 σ^2 的无偏估计.

(4) 检验假设 $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$.

(5) 若回归效果显著,求 b 的置信水平为 0.95 的置信区间.

(6) 求 $x = 0.50$ 处 $\mu(x)$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

(7) 求 $x = 0.50$ 处观察值 Y 的置信水平为 0.95 的预测区间.

10. 下表列出了 18 名 5～8 岁儿童的体重(这是容易测得的)和体积(这是难以测量的):

体重 x(kg)	17.1	10.5	13.8	15.7	11.9	10.4	15.0	16.0	17.8
体积 $y(\mathrm{dm}^3)$	16.7	10.4	13.5	15.7	11.6	10.2	14.5	15.8	17.6
体重 x(kg)	15.8	15.1	12.1	18.4	17.1	16.7	16.5	15.1	15.1
体积 $y(\mathrm{dm}^3)$	15.2	14.8	11.9	18.3	16.7	16.6	15.9	15.1	14.5

(1) 画出散点图.

(2) 求 Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

(3) 求 $x = 14.0$ 时 Y 的置信水平为 0.95 的预测区间.

11. 蟋蟀用一个翅膀在另一翅膀上快速地滑动,从而发出吱吱喳喳的叫声.生物学家知道叫声的频率 x 与气温 Y 具有线性关系.下表列出了 15 对频率与气温间的对应关系的观察结果:

频率 x_i(叫声数 / 秒)	20.0	16.0	19.8	18.4	17.1	15.5	14.7	17.1
气温 y_i(℃)	31.4	22.0	34.1	29.1	27.0	24.0	20.9	27.8
频率 x_i(叫声数 / 秒)	15.4	16.2	15.0	17.2	16.0	17.0	14.4	
气温 y_i(℃)	20.8	28.5	26.4	28.1	27.0	28.6	24.6	

试求 Y 关于 x 的线性回归方程.

12. 下面列出了自 1952 年～2004 年各届奥林匹克运动会男子 10 000 米赛跑的冠军的成绩(时间以 min 计):

年份(x)	1952	1956	1960	1964	1968	1972	1976
成绩(y)	29.3	28.8	28.5	28.4	29.4	27.6	27.7
年份(x)	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
成绩(y)	27.7	27.8	27.4	27.8	27.1	27.3	27.1

(1) 求 Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

(2) 检验假设 $H_0: b=0, H_1: b\neq 0$ (显著性水平 $\alpha=0.05$)

(3) 求 2008 年冠军成绩的预测值.

13. 以 x 与 Y 分别表示人的脚长(英寸①)与手长(英寸),下面列出了 15 名女子的脚的长度 x 与手的长度 Y 的样本值:

x	9.00	8.50	9.25	9.75	9.00	10.00	9.50	9.00
y	6.50	6.25	7.25	7.00	6.75	7.00	6.50	7.00
x	9.25	9.50	9.25	10.00	10.00	9.75	9.50	
y	7.00	7.00	7.00	7.50	7.25	7.25	7.25	

试求(1) Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

(2) 求 b 的置信水平为 0.95 的置信区间.

14. 槲寄生是一种寄生在大树上部树枝上的寄生植物. 它喜欢寄生在年轻的大树上. 下面给出在一定条件下完成的试验中采集的数据:

大树的年龄 x(年)	3	4	9	15	40
每株大树上槲寄生的株数 y	28	10	15	6	1
	33	36	22	14	1
	22	24	10	9	

(1) 作出 (x_i, y_i) 的散点图.

(2) 令 $z_i=\ln y_i$,作出 (x_i, z_i) 的散点图.

(3) 以模型 $Y=ae^{bx}\varepsilon, \ln\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$ 拟合数据,其中 a, b, σ^2 与 x 无关. 试求曲线回归方程 $\hat{y}=\hat{a}\exp(\hat{b}x)$.

15. 一种合金在某种添加剂的不同浓度之下,各做三次试验,得数据如下:

浓度 x	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
抗压强度 y	25.2	29.8	31.2	31.7	29.4
	27.3	31.1	32.6	30.1	30.8
	28.7	27.8	29.7	32.3	32.8

① 1 英寸 = 2.54 厘米.

(1) 作散点图.

(2) 以模型 $Y=b_0+b_1x+b_2x^2+\varepsilon,\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$ 拟合数据，其中 b_0,b_1,b_2,σ^2 与 x 无关. 求回归方程 $\hat{y}=\hat{b}_0+\hat{b}_1x+\hat{b}_2x^2$.

16. 某种化工产品的得率 Y 与反应温度 x_1、反应时间 x_2 及某反应物浓度 x_3 有关. 今得试验结果如下表所示，其中 x_1,x_2,x_3 均为二水平且均以编码形式表达.

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
得率	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

(1) 设 $\mu(x_1,x_2,x_3)=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$，求 Y 的多元线性回归方程.

(2) 若认为反应时间不影响得率，即认为

$$\mu(x_1,x_2,x_3)=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_3x_3,$$

求 Y 的多元线性回归方程.

$$W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s)).$$

它们的增量的分布都只与时间差 $t-s$ 有关(即增量具有平稳性),所以实际上它们都属于齐次独立增量过程.

读者还需研究,在 $X(0)=0$ 的条件下,怎样利用增量的独立性,从独立增量过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的已知方差函数 $D_X(t)$,推演出它的自协方差函数

$$C_X(s,t)=D_X(\min\{s,t\}),\quad s,t\geqslant 0,$$

并由此获得泊松过程和维纳过程的自协方差函数(自相关函数).

■ **重要术语及主题**

随机过程　状态和状态空间　样本函数(样本曲线)　有限维分布函数族　均值函数　方差函数　自相关函数　自协方差函数　正态过程　互协方差函数　两个随机过程的独立性和不相关　齐次(时齐)的独立增量过程　泊松过程　维纳过程

习题

1. 利用抛掷一枚硬币的试验定义一随机过程

$$X(t)=\begin{cases}\cos \pi t, & \text{出现 } H,\\ 2t, & \text{出现 } T,\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

假设 $P(H)=P(T)=\dfrac{1}{2}$ 试确定 $X(t)$ 的

(1) 一维分布函数 $F\left(x;\dfrac{1}{2}\right)$,$F(x;1)$,

(2) 二维分布函数 $F\left(x_1,x_2;\dfrac{1}{2},1\right)$.

2. 给定随机过程 $\{X(t),t\in T\}$,x 是任一实数,定义另一个随机过程

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\leqslant x,\\ 0, & X(t)>x,\end{cases}\quad t\in T.$$

试将 $Y(t)$ 的均值函数和自相关函数用随机过程 $X(t)$ 的一维和二维分布函数来表示.

3. 设随机过程 $X(t)=e^{-At}$,$t>0$,其中 A 是在区间 $(0,a)$ 上服从均匀分布的随机变量,试求 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数.

4. 设随机过程 $X(t)=X$ (随机变量),$E(X)=a$,$D(X)=\sigma^2$ $(\sigma>0)$,试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数.

5. 已知随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 和协方差函数 $C_X(t_1,t_2)$,$\varphi(t)$ 是普通的函数,试求随机过程 $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$ 的均值函数和协方差函数.

6. 给定一随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 和常数 a,试以 $X(t)$ 的自相关函数表出随机过程 $Y(t)=X(t+a)-X(t)$,$t\in T$ 的自相关函数.

7. 设 $Z(t)=X+Yt$,$-\infty<t<+\infty$,若已知二维随机变量 (X,Y) 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

试求 $Z(t)$ 的协方差函数.

8. 设 $X(t)=At+B$,$-\infty<t<+\infty$,式中 A,B 相互独立,且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的

随机变量，试证明 $X(t)$ 是一正态过程，并求出它的相关函数(协方差函数).

9. 设随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$，$t\in T$ 不相关，试用它们的均值函数与协方差函数来表示随机过程

$$Z(t)=a(t)X(t)+b(t)Y(t)+c(t),t\in T$$

的均值函数和自协方差函数，其中 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 是普通的函数.

10. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ $(t>0)$ 是两个相互独立的，分别具有强度 λ 和 μ 的泊松过程，试证

$$S(t)=X(t)+Y(t)$$

是具有强度 $\lambda+\mu$ 的泊松过程.

11. 设 $\{W(t),t\geqslant 0\}$ 是以 σ^2 为参数的维纳过程，求下列过程的协方差函数：

(1) $W(t)+At$ (A 为常数).

(2) $W(t)+Xt$，X 为与 $\{W(t),t\geqslant 0\}$ 相互独立的标准正态变量.

(3) $aW(t/a^2)$，a 为正常数.

或即存在 m，使 m 步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(m)=\boldsymbol{P}^m$ 无零元(当 $\boldsymbol{P}$ 的阶数不高时，寻求 m 的方法见§3 例 1)，而极限分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$ 是方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi P},\\ \pi_j>0,\sum_{j=1}^{N}\pi_j=1\end{cases}$$

的唯一解.

■ 重要术语及主题

无后效性(马氏性)　齐次马氏链　n 步转移概率与 n 步转移概率矩阵　C—K 方程　马氏链的有限维分布律　遍历性　极限分布(平稳分布)

习题

1. 从数 $1,2,\cdots,N$ 中任取一数，记为 X_1；再从 $1,2,\cdots,X_1$ 中任取一数，记为 X_2；如此继续，从 $1,2,\cdots,X_{n-1}$ 中任取一数，记为 X_n. 说明 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 构成一齐次马氏链，并写出它的状态空间和一步转移概率矩阵.

2. 说明第十二章§1 例 5 中的随机过程都是齐次马氏链，并写出它们的状态空间和一步转移概率矩阵.

3. 设 $X_0=1,X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立且都以概率 $p\ (0<p<1)$ 取值 1，以概率 $q=1-p$ 取值 0 的随机变量序列，令 $S_n=\sum_{k=0}^{n}X_k$，证明 $\{S_n,n\geqslant0\}$ 构成一马氏链，并写出它的状态空间和一步转移概率矩阵.

4. (传染模型)有 N 个人及某种传染病，假设

(1) 在每个单位时间内此 N 个人中恰有两人互相接触，且一切成对的接触是等可能的.

(2) 当健康者与患病者接触时，被传染上病的概率为 α.

(3) 患病者康复的概率是 0，健康者如果不与患病者接触，得病的概率也为 0.

现以 X_n 表示第 n 个单位时间内的患病人数. 试说明这种传染过程，即 $\{X_n,n\geqslant0\}$ 是一马氏链，并写出它的状态空间及一步转移概率矩阵.

5. 设马氏链 $\{X_n,n\geqslant0\}$ 的状态空间为 $I=\{1,2,3\}$，初始分布为 $p_1(0)=1/4,p_2(0)=1/2,p_3(0)=1/4$，一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c c}& \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}1/4 & 3/4 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/4 & 3/4\end{bmatrix}\end{array}$$

(1) 计算 $P\{X_0=1,X_1=2,X_2=2\}$.

(2) 证明 $P\{X_1=2,X_2=2\mid X_0=1\}=p_{12}p_{22}$.

(3) 计算 $P_{12}(2)=P\{X_2=2\mid X_0=1\}$.

(4) 计算 $p_2(2)=P\{X_2=2\}$.

6. 证明§2 中公式(2.5).

7. 设任意相继的两天中，雨天转晴天的概率为 1/3，晴天转雨天的概率为 1/2，任一天晴

或雨是互为逆事件. 以 0 表示晴天状态，以 1 表示雨天状态，X_n 表示第 n 天的状态(0 或 1). 试写出马氏链 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 的一步转移概率矩阵. 又若已知 5 月 1 日为晴天，问 5 月 3 日为晴天，5 月 5 日为雨天的概率各等于多少?

8. 在一计算系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差. 以 0 表示误差状态，以 1 表示无误差状态. 设状态的一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

试证明相应齐次马氏链是遍历的，并求其极限分布(平稳分布).

(1) 用定义解.

(2) 利用遍历性定理解.

9. 试证第 5 题中的马氏链具有遍历性，并求其极限分布.

10. 设齐次马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix},\quad q=1-p, 0<p<1.$$

试证明此链具有遍历性，并求其平稳分布.

11. 设马氏链的一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

试证此链不是遍历的.

相关函数及其性质　功率谱(谱密度)　维纳—辛钦公式　白噪声　互谱密度

习题

1. 设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$，$-\infty<t<+\infty$，其中 A 是服从瑞利分布的随机变量，其概率密度为

$$f(a)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sigma^2}e^{-a^2/(2\sigma^2)}, & a>0,\\ 0, & a\leqslant 0,\end{cases}$$

Θ 是在 $(0,2\pi)$ 上服从均匀分布且与 A 相互独立的随机变量，ω 是一常数，问 $X(t)$ 是不是平稳过程？

2. 设 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是相互独立的平稳过程. 试证以下随机过程也是平稳过程：

(1) $Z_1(t)=X(t)Y(t)$.　(2) $Z_2(t)=X(t)+Y(t)$.

3. 设 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 是平稳过程，$R_X(\tau)$ 是其自相关函数，a 是常数，试问随机过程

$$Y(t)=X(t+a)-X(t)$$

是不是平稳过程？为什么？

4. 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，定义随机过程 $Y(t)=N(t+L)-N(t)$，其中常数 $L>0$. 试求 $Y(t)$ 的均值函数和自相关函数，并问 $Y(t)$ 是否是平稳过程？

5. 设平稳过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-a|\tau|}(1+a|\tau|)$，其中常数 $a>0$，而 $E[X(t)]=0$. 试问 $X(t)$ 的均值是否具有各态历经性？为什么？

6. 第 1 题中的随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$ 是否是各态历经过程？为什么？

7. (1) 设 $C_X(\tau)$ 是平稳过程 $X(t)$ 的协方差函数. 试证：若 $C_X(\tau)$ 绝对可积，即

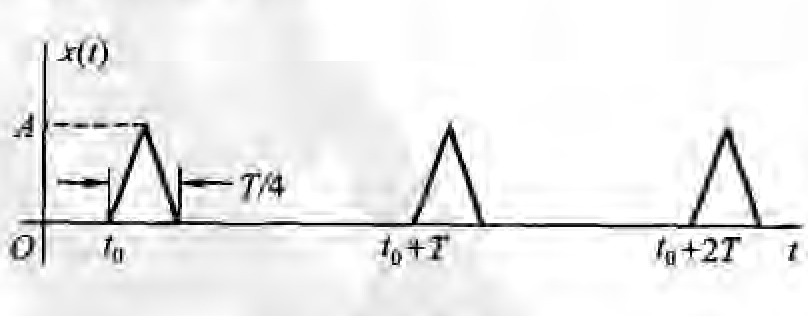
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|C_X(\tau)|\,d\tau<+\infty,$$

则 $X(t)$ 的均值具有各态历经性.

(2) 证明第十四章 §1 例 2 中的随机相位周期过程 $X(t)=\tilde{s}(t+\Theta)$ 是各态历经过程.

8. 设 $X(t)$ 是随机相位周期过程，下图表示它的一个样本函数 $x(t)$，其中周期 T 和波幅 A 都是常数，而相位 t_0 是在 $(0,T)$ 上服从均匀分布的随机变量.

(1) 求 μ_X，Ψ_X^2. (2) 求 $\overline{X(t)}$ 和 $\overline{X^2(t)}$.



题 8 图

9. 设平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$，证明：

$$P\{|X(t+\tau)-X(t)|\geqslant a\}\leqslant 2[R_X(0)-R_X(\tau)]/a^2,\quad a>0.$$

10. 设 $X(t)$ 为平稳过程，其自相关函数 $R_X(\tau)$ 是以 T_0 为周期的函数. 证明：$X(t)$ 是周期为 T_0 的平稳过程.

11. 设 $X(t)$ 是雷达的发射信号，遇目标后返回接收机的微弱信号是 $aX(t-\tau_1)$，$a\ll 1$，τ_1 是信号返回时间，由于接收到的信号总是伴有噪声的，记噪声为 $N(t)$，于是接收到的全信号为

$$Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t).$$

(1) 若 $X(t)$ 和 $N(t)$ 是平稳相关，证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 也平稳相关.

(2) 在(1)的条件下，假设 $N(t)$ 的均值为零且与 $X(t)$ 是相互独立的，求 $R_{XY}(\tau)$（这是利用互相关函数从全信号中检测小信号的相关接收法）.

12. 平稳过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau)=4\mathrm{e}^{-|\tau|}\cos\pi\tau+\cos 3\pi\tau,$$

求：(1) $X(t)$ 的均方值. (2) $X(t)$ 的谱密度.

13. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega)=\frac{\omega^2}{\omega^4+3\omega^2+2},$$

求 $X(t)$ 的均方值.

14. 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{T}, & |\tau|\leqslant T,\\ 0, & |\tau|>T,\end{cases}$$

求谱密度 $S_X(\omega)$.

15. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega)=\begin{cases}8\delta(\omega)+20\left(1-\dfrac{|\omega|}{10}\right), & |\omega|<10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $X(t)$ 的自相关函数.

16. 记随机过程

$$Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta),\quad -\infty<t<+\infty,$$

其中 $X(t)$ 是平稳过程，Θ 为在区间 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，ω_0 为常数，且 $X(t)$ 与 Θ 相互独立. 记 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$，功率谱密度为 $S_X(\omega)$. 试证：

(1) $Y(t)$ 是平稳过程，且它的自相关函数

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}R_X(\tau)\cos\omega_0\tau.$$

(2) $Y(t)$ 的功率谱密度为

$$S_Y(\omega)=\frac{1}{4}[S_X(\omega-\omega_0)+S_X(\omega+\omega_0)].$$

17. 设平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为 $S_X(\omega)$，证明：$Y(t)=X(t)+X(t-T)$ 的谱密度是

$$S_Y(\omega)=2S_X(\omega)(1+\cos\omega T).$$

18. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个平稳相关的过程，证明

$$\mathrm{Re}\,S_{YX}(\omega)=\mathrm{Re}\,S_{XY}(\omega),\quad \mathrm{Im}\,S_{YX}(\omega)=-\mathrm{Im}\,S_{XY}(\omega).$$

19. 设两个平稳过程

$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Theta)$，　$Y(t)=b\sin(\omega_0 t-\Theta)$，　$-\infty<t<+\infty$，

其中 a、b，ω_0 均为常数，而 Θ 是 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，试求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$，$R_{YX}(\tau)$ 和互谱密度 $S_{XY}(\omega)$，$S_{YX}(\omega)$.

20. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个相互独立的平稳过程，均值 μ_X 和 μ_Y 都不为零，定义

$$Z(t)=X(t)+Y(t).$$

试计算 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$.

选 做 习 题

概率论部分

1. 一打靶场备有 5 支某种型号的枪，其中 3 支已经校正，2 支未经校正. 某人使用已校正的枪击中目标的概率为 p_1，使用未经校正的枪击中目标的概率为 p_2. 他随机地取一支枪进行射击，已知他射击了 5 次，都未击中，求他使用的是已校正的枪的概率(设各次射击的结果相互独立).

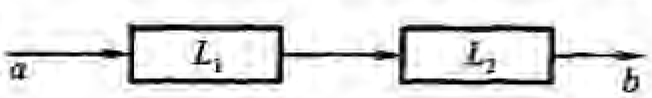
2. 某人共买了 11 个水果，其中有 3 个是二级品，8 个是一级品. 随机地将水果分给 A、B、C 三人，各人分别得到 4 个、6 个、1 个.

(1) 求 C 未拿到二级品的概率.

(2) 已知 C 未拿到二级品，求 A，B 均拿到二级品的概率.

(3) 求 A，B 均拿到二级品而 C 未拿到二级品的概率.

3. 一系统 L 由两个只能传输字符 0 和 1 的独立工作的子系统 L_1 与 L_2 串联而成(如题 3 图)，每个子系统输入为 0 输出为 0 的概率为 $p(0<p<1)$；而输入为 1 输出为 1 的概率也是 p. 今在图中 a 端输入字符 1，求系统 L 的 b 端输出字符 0 的概率.



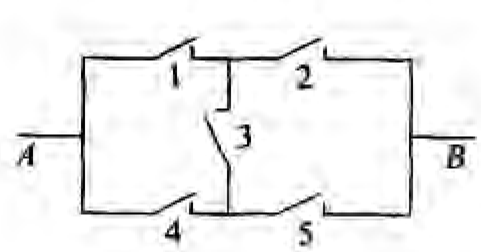
题 3 图

4. 甲乙两人轮流掷一颗骰子，每轮掷一次，谁先掷得 6 点谁得胜，从甲开始掷，问甲、乙得胜的概率各为多少?

5. 将一颗骰子掷两次，考虑事件：A=“第一次掷得点数 2 或 5”，B=“两次点数之和至少为 7”，求 $P(A)$，$P(B)$，并问事件 A，B 是否相互独立.

6. A、B 两人轮流射击，每次每人射击一枪，射击的次序为 A，B，A，B，A，…，射击直至击中两枪为止. 设每人击中的概率均为 p，且各次击中与否相互独立. 求击中的两枪是由同一人射击的概率.(提示：分别考虑两枪是由 A 击中的与两枪是由 B 击中的两种情况. 若两枪是由 A 击中的，则射击必然在奇数次结束. 又当 $|x|<1$时，$1+2x+3x^2+\cdots=1/(1-x)^2$.)

7. 有 3 个独立工作的元件 1，元件 2，元件 3，它们的可靠性分别为 p_1，p_2，p_3. 设由它们组成一个“3 个元件取 2 个元件的表决系统”，记为 $2/3[G]$. 这一系统的运行方式是当且仅当 3 个元件中至少有 2 个正常工作时这一系统正常工作. 求这一 $2/3[G]$ 系统的可靠性.



题 8 图

8. 在如题 8 图所示的桥式结构的电路中，第 i 个继电器触点闭合的概率为 p_i，$i=1,2,3,4,5$. 各继电器工作相互

独立．求：

(1) 以继电器触点 1 是否闭合为条件，求 A 到 B 之间为通路的概率．

(2) 已知 A 到 B 为通路的条件下，继电器触点 3 是闭合的概率．

9. 进行非学历考试，规定考甲、乙两门课程，每门课程考试第一次未通过都只允许考第二次．考生仅在课程甲通过后才能考课程乙，如两门课程都通过可获得一张资格证书．设某考生通过课程甲的各次考试的概率为 p_1，通过课程乙的各次考试的概率为 p_2，设各次考试的结果相互独立．又设考生参加考试直至获得资格证书或者不准予再考为止．以 X 表示考生总共需考试的次数．求 X 的分布律．

10. (1) 5 只电池，其中有 2 只是次品，每次取一只测试，直到将 2 只次品都找到．设第 2 只次品在第 X ($X=2,3,4,5$)次找到，求 X 的分布律(注：在实际上第 5 次检测可无需进行)．

(2) 5 只电池，其中 2 只是次品，每次取一只，直到找出 2 只次品或 3 只正品为止．写出需要测试的次数的分布律．

11. 向某一目标发射炮弹，设炮弹弹着点离目标的距离为 R (单位：10 m)，R 服从瑞利分布，其概率密度为

$$f_R(r)=\begin{cases}\dfrac{2r}{25}e^{-r^2/25}, & r>0,\\ 0, & r\leqslant 0.\end{cases}$$

若弹着点离目标不超过 5 个单位时，目标被摧毁．

(1) 求发射一枚炮弹能摧毁目标的概率．

(2) 为使至少有一枚炮弹能摧毁目标的概率不小于 0.94，问最少需要独立发射多少枚炮弹．

12. 设一枚深水炸弹击沉一潜水艇的概率为 1/3，击伤的概率为 1/2，击不中的概率为 1/6．并设击伤两次也会导致潜水艇下沉．求施放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率．(提示：先求击不沉的概率．)

13. 一盒中装有 4 只白球，8 只黑球，从中取 3 只球，每次一只，作不放回抽样．

(1) 求第 1 次和第 3 次都取到白球的概率．(提示：考虑第二次的抽取．)

(2) 求在第 1 次取到白球的条件下，前 3 次都取到白球的概率．

14. 设元件的寿命 T (以小时计)服从指数分布，分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-0.03t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 已知元件至少工作了 30 小时，求它能再至少工作 20 小时的概率．

(2) 由 3 个独立工作的此种元件组成一个 $2/3[G]$ 系统(参见第 7 题)．求这一系统的寿命 $X>20$ 的概率．

15. (1) 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<\infty$，求 X 的分布函数．

(2) 已知随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$，另有随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ -1, & X\leqslant 0,\end{cases}$$

试求 Y 的分布律和分布函数.

16. (1) 设随机变量 X 服从泊松分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

问当 k 取何值时 $P\{X=k\}$ 为最大.

(2) 设随机变量 X 服从二项分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

问当 k 取何值时 $P\{X=k\}$ 为最大.

17. 若离散型随机变量 X 具有分布律

X	1	2	$\cdots$	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

称 X 服从取值为 $1,2,\cdots,n$ 的离散型均匀分布. 对于任意非负实数 x,记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 设 $U\sim U(0,1)$,证明 $X=[nU]+1$ 服从取值为 $1,2,\cdots,n$ 的离散型均匀分布.

18. 设随机变量 $X\sim U(-1,2)$,求 $Y=|X|$ 的概率密度.

19. 设随机变量 X 的概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2x^2}, & 1\leqslant x<\infty,\end{cases}$$

求 $Y=\frac{1}{X}$ 的概率密度.

20. 设随机变量 X 服从以均值为 $1/\lambda$ 的指数分布. 验证随机变量 $Y=[X]$ 服从以参数为 $1-e^{-\lambda}$ 的几何分布. 这一事实表明连续型随机变量的函数可以是离散型随机变量.

21. 投掷一枚硬币直至正面出现为止,引入随机变量

$$X=\text{投掷总次数}.$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{若首次投掷得到正面},\\ 0, & \text{若首次投掷得到反面}.\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合分布律及边缘分布律.

(2) 求条件概率 $P\{X=1\mid Y=1\}$, $P\{Y=2\mid X=1\}$.

22. 设随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$,随机变量 $Y=\max\{X,2\}$. 试求 X 和 Y 的联合分布律及边缘分布律.

23. 设 X,Y 是相互独立的泊松随机变量,参数分别为 λ_1,λ_2,求给定 $X+Y=n$ 的条件下

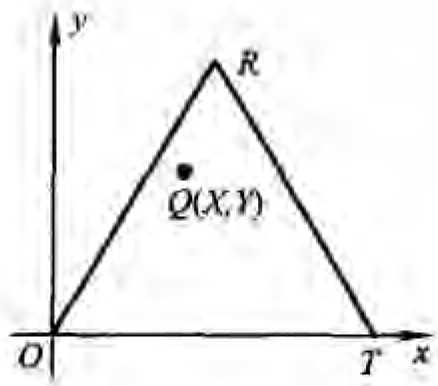
X 的条件分布.

24. 一教授将两篇论文分别交给两个打字员打印. 以 X,Y 分别表示第一篇和第二篇论文的印刷错误. 设 $X\sim\pi(\lambda)$, $Y\sim\pi(\mu)$, X,Y 相互独立.

(1) 求 X,Y 的联合分布律.

(2) 求两篇论文总共至多 1 个错误的概率.

25. 一等边三角形 $\triangle ROT$(如题 25 图)的边长为 1, 在三角形内随机地取点 $Q(X,Y)$ (意指随机点 (X,Y) 在三角形 ROT 内均匀分布).



题 25 图

(1) 写出随机变量 (X,Y) 的概率密度.

(2) 求点 Q 到底边 OT 的距离的分布函数.

26. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(y+1)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$.

27. 设有随机变量 U 和 V, 它们都仅取 $1,-1$ 两个值. 已知

$$P\{U=1\}=1/2,$$
$$P\{V=1|U=1\}=1/3=P\{V=-1|U=-1\}.$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布律.

(2) 求 x 的方程 $x^2+Ux+V=0$ 至少有一个实根的概率.

(3) 求 x 的方程 $x^2+(U+V)x+U+V=0$ 至少有一个实根的概率.

28. 某图书馆一天的读者人数 $X\sim\pi(\lambda)$, 任一读者借书的概率为 p, 各读者借书与否相互独立. 记一天读者借书的人数为 Y, 求 X 和 Y 的联合分布律.

29. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且都服从均匀分布 $U(0,1)$, 求两变量之一至少为另一变量之值之两倍的概率.

30. 一家公司有一份保单招标, 两家保险公司竞标. 规定标书的保险费必须在 20 万元至 22 万元之间. 若两份标书保险费相差 2 千或 2 千以上, 招标公司将选择报价低者, 否则就重新招标. 设两家保险公司的报价是相互独立的, 且都在 20 万至 22 万之间均匀分布. 试求招标公司需重新招标的概率.

31. 设随机变量 $X\sim N(0,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(0,\sigma_2^2)$, 且 X,Y 相互独立, 求概率

$$P\{0<\sigma_2X-\sigma_1Y<2\sigma_1\sigma_2\}.$$

32. NBA 篮球赛中有这样的规律, 两支实力相当的球队比赛时, 每节主队得分与客队得分之差为正态随机变量, 均值为 1.5, 方差为 6, 并且假设四节的比分差是相互独立的. 问:

(1) 主队胜的概率有多大?

(2) 在前半场主队落后 5 分的情况下, 主队得胜的概率有多大?

(3) 在第一节主队赢 5 分的情况下, 主队得胜的概率有多大.

33. 产品的某种性能指标的测量值 X 是随机变量, 设 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{2}x^2}, & x>0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

测量误差 $Y\sim U(-\varepsilon,\varepsilon)$，$X,Y$ 相互独立. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$，并验证

$$P\{Z>\varepsilon\}=\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^{2\varepsilon}e^{-u^2/2}\mathrm{d}u.$$

34. 在一化学过程中，产品中有份额 X 为杂质，而在杂质中有份额 Y 是有害的，而其余部分不影响产品的质量. 设 $X\sim U(0,0.1)$，$Y\sim U(0,0.5)$，且 X 和 Y 相互独立. 求产品中有害杂质份额 Z 的概率密度.

35. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的边缘概率密度.

(2) 问 X,Y 是否相互独立.

(3) 求 $X+Y$ 的概率密度 $f_{X+Y}(z)$.

(4) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

(5) 求条件概率 $P\{X>3|Y<5\}$.

(6) 求条件概率 $P\{X>3|Y=5\}$.

36. 设某图书馆的读者借阅甲种图书的概率为 p，借阅乙种图书的概率为 α，设每人借阅甲、乙图书的行动相互独立，读者之间的行动也相互独立.

(1) 某天恰有 n 个读者，求借阅甲种图书的人数的数学期望.

(2) 某天恰有 n 个读者，求甲、乙两种图书中至少借阅一种的人数的数学期望.

37. 某种鸟在某时间区间 $(0,t_0]$ 下蛋数为 1～5 只，下 r 只蛋的概率与 r 成正比. 一个收拾鸟蛋的人在时刻 t_0 去收集鸟蛋，但他仅当鸟窝中多于 3 只蛋时才从中取走一只蛋. 在某处有这种鸟的鸟窝 6 个（每个鸟窝保存完好，各鸟窝中蛋的只数相互独立）.

(1) 写出一个鸟窝中鸟蛋只数 X 的分布律.

(2) 对于指定的一个鸟窝，求拾蛋人在该鸟窝中拾到一只蛋的概率.

(3) 求拾蛋人在 6 个鸟窝中拾到蛋的总数 Y 的分布律及数学期望.

(4) 求 $P\{Y<4\}$，$P\{Y>4\}$.

(5) 当一个拾蛋人在这 6 个鸟窝中拾过蛋后，紧接着又有一个拾蛋人到这些鸟窝中拾蛋，也仅当鸟窝中多于 3 只蛋时，拾取一只蛋，求第二个拾蛋人拾得蛋数 Z 的数学期望.

38. 设袋中有 r 只白球，$N-r$ 只黑球. 在袋中取球 $n\ (n\leqslant r)$ 次，每次任取一只作不放回抽样，以 Y 表示取到白球的个数，求 $E(Y)$.（提示：引入随机变量：

$$X_i=\begin{cases}1, \text{若第 } i \text{ 次取到白球},\\0, \text{若第 } i \text{ 次取到黑球},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$.）

39. 抛一颗骰子直到所有点数全部出现为止，求所需投掷次数 Y 的数学期望.（提示：令 $X_1=1$，$X_2=$ 第一点得到后，等待第二个不同点所需的等待次数，$X_3=$ 第一二两点得到后，等待第三个不同点所需的等待次数，X_4，X_5，X_6 类似，则 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_6$. 又几何分布

$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots$ 的数学期望 $E(X)=\frac{1}{p}$.)

40. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 X,Y 分别服从以 $1/\alpha, 1/\beta$ 为均值的指数分布. 求 $E(X^2+Y\mathrm{e}^{-X})$.

41. 一酒吧间柜台前有 6 张凳子，服务员预测，若两个陌生人进来就座的话，他们之间至少相隔两张凳子.（提示：先列出两人之间至少隔两张凳子的不同情况.）

（1）若真有两个陌生人入内，他们随机地就座，问服务员预言为真的概率是多少？

（2）设两位顾客是随机就座的，求顾客之间凳子数的数学期望.

42. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立，且都服从 $U(0,1)$，又设 $Y=X_1\cdot X_2\cdot\cdots\cdot X_{100}$，求概率 $P\{Y<10^{-40}\}$ 的近似值.

43. 来自某个城市的长途电话呼唤的持续时间 X（以分计）是一个随机变量，它的分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\left[\frac{x}{3}\right]}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

（其中 $\left[\frac{x}{3}\right]$ 是不大于 $\frac{x}{3}$ 的最大整数）.

（1）画出 $F(x)$ 的图形.

（2）说明 X 是什么类型的随机变量.

（3）求 $P\{X=4\}, P\{X=3\}, P\{X<4\}, P\{X>6\}$.（提示：$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$.）

44. 一汽车保险公司分析一组（250 人）签约的客户中的赔付情况. 据历史数据分析，在未来的一周中一组客户中至少提出一项索赔的客户数 X 占 10%. 写出 X 的分布，并求 $X>250\times 0.12$（即 $X>30$）的概率. 设各客户是否提出索赔相互独立.

45. 在区间 $(0,1)$ 随机地取一点 X. 定义 $Y=\min(X, 0.75)$.

（1）求随机变量 Y 的值域.

（2）求 Y 的分布函数，并画出它的图形.

（3）说明 Y 不是连续型的随机变量，Y 也不是离散型的随机变量.

数理统计部分

46. 设 X_1, X_2 是数学期望为 θ 的指数分布总体 X 的容量为 2 的样本，设 $Y=\sqrt{X_1X_2}$，试证明 $E\left(\frac{4Y}{\pi}\right)=\theta$.

47. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本. $\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，试证 $E[(\overline{X}S^2)^2]=\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\left(\frac{2\sigma^4}{n-1}+\sigma^4\right)$.（提示：注意到 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，且有 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.）

48. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^2}xe^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本观察值.

(1) 求 θ 的最大似然估计量.

(2) 求 θ 的矩估计量.

(3) 问求得的估计量是否是无偏估计量.

49. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 以及 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 为分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，且它们相互独立. μ_1,μ_2,σ^2 均未知，试求 μ_1,μ_2,σ^2 的最大似然估计量.

50. 为了研究一批贮存着的产品的可靠性，在产品投入贮存时，即在时刻 $t_0=0$ 时，随机地选定 n 件产品，然后在预先规定的时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 取出来进行检测（检测时确定已失效的去掉，将未失效的继续投入贮存），今得到以下的寿命试验数据：

检测时刻(月)	t_1	t_2	$\cdots$	t_k		
区间 $(t_{i-1},t_i]$	$(0,t_1]$	$(t_1,t_2]$	$\cdots$	$(t_{k-1},t_k]$	(t_k,∞)	
在 $(t_{i-1},t_i]$ 的失效数	d_1	d_2	$\cdots$	d_k	s	$\sum\limits_{i=1}^{k}d_i+s=n$

这种数据称为区间数据. 设产品寿命 T 服从指数分布，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad \lambda>0\ \text{未知}.$$

(1) 试基于上述数据写出 λ 的对数似然方程.（提示：考虑事件“n 只产品分别在区间 $(0,t_1],(t_1,t_2],\cdots,(t_{k-1},t_k]$ 失效 $d_1,d_2,\cdots,d_k$ 只，而直至 t_k 还有 s 只未失效”的概率.）

(2) 设 $d_1<n,s<n$，我们可以用数值解法求得 λ 的最大似然估计值，在计算机上计算是容易的. 特别，取检测时间是等间隔的，即取 $t_i=it_1,i=1,2,\cdots,k$. 验证，此时可得 λ 的最大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{t_1}\ln\left(1+\frac{n-s}{\sum\limits_{i=2}^{k}(i-1)d_i+sk}\right)$$

51. 设某种电子器件的寿命（以小时计）T 服从指数分布，概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 未知. 从这批器件中任取 n 只在时刻 $t=0$ 时投入独立寿命试验. 试验进行到预定时间 T_0 结束. 此时，有 $k\ (0<k<n)$ 只器件失效，试求 λ 的最大似然估计.（提示：考虑“试验直至时刻 T_0 为止，有 k 只器件失效，而有 $n-k$ 只未失效”这一事件的概率，从而写出 λ 的似然方程.）

52. 设系统由两个独立工作的成败型元件串联而成（成败型元件只有两种状态：正常工作或失效）. 元件 1，元件 2 的可靠性分别为 p_1,p_2，它们均未知. 随机地取 N 个系统投入试验，

当系统中至少有一个元件失效时系统失效，现得到以下的试验数据：n_1—仅元件 1 失效的系统数；n_2—仅元件 2 失效的系统数；n_{12}—元件 1，元件 2 至少有一个失效的系统数；s—未失效的系统数。$n_1+n_2+n_{12}+s=N$. 这里 n_{12} 为隐蔽数据，也就是只知系统失效，但不能知道是由元件 1 还是元件 2 单独失效引起的，还是由元件 1，2 均失效引起的，设隐蔽与系统失效的真正原因独立.

(1) 试写出 p_1，p_2 的似然函数.

(2) 设有系统寿命试验数据 $N=20$，$n_1=5$，$n_2=3$，$n_{12}=1$，$s=11$. 试求 p_1，p_2 的最大似然估计.（提示：p_1 应满足方程 $(p_1-1)(12p_1^2+11p_1-14)=0$.）

53. (1) 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ	θ	$1-2\theta$

$\theta>0$ 未知，今有样本

1 1 1 3 2 1 3 2 2 1 2 2 3 1 1 2

试求 θ 的最大似然估计值和矩估计值.

(2) 设总体 X 服从 Γ 分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其形状参数 $\alpha>0$ 为已知，尺度参数 $\beta>0$ 未知. 今有样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求 β 的最大似然估计值.

54. (1) 设 $Z=\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$，即 X 服从对数正态分布，验证 $E(X)=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$.

(2) 设自(1)中总体 X 中取一容量为 n 的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求 $E(X)$ 的最大似然估计. 此处设 μ,σ^2 均为未知.

(3) 已知在文学家萧伯纳的《An Intelligent Woman's Guide To Socialism》一书中，一个句子的单词数近似地服从对数正态分布，设 μ 及 σ^2 为未知. 今自该书中随机地取 20 个句子. 这些句子中的单词数分别为

52 24 15 67 15 22 63 26 16 32

7 33 28 14 7 29 10 6 59 30

问这本书中，一个句子单词数均值的最大似然估计值等于多少？

55. 考虑进行定数截尾寿命试验，假设将随机抽取的 n 件产品在时间 $t=0$ 时同时投入试验. 试验进行到 m 件($m<n$)产品失效时停止，m 件失效产品的失效时间分别为

$$0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_m.$$

t_m 是第 m 件产品的失效时间. 设产品的寿命分布为韦布尔分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\eta^{\beta}}x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数 β 已知. 求参数 η 的最大似然估计.

56. 设某大城市郊区的一条林荫道两旁开设了许多小商店，这些商店的开设延续时间（以月计）是一个随机变量，现随机地取 30 家商店，将它们的延续时间按自小到大排序，选其中前 8 家商店，它们的延续时间分别是

$$3.2\quad 3.9\quad 5.9\quad 6.5\quad 16.5\quad 20.3\quad 40.4\quad 50.9$$

假设商店开设延续时间的长度是韦布尔随机变量，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\eta^{\beta}}x^{\beta-1}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{\eta})^{\beta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中，$\beta=0.8$.

(1) 试用上题结果，写出 η 的最大似然估计.

(2) 按(1)的结果求商店开设延续时间至少为 2 年的概率的估计.

57. 设分别自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 中抽取容量 n_1,n_2 的两独立样本，其样本方差分别为 S_1^2,S_2^2. 试证，对于任意常数 a,b $(a+b=1)$，$Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计，并确定常数 a,b，使 $D(Z)$ 达到最小.

58. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本. 已知样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计. 验证样本标准差 S 不是标准差 σ 的无偏估计.（提示：记 $Y=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，则 $Y\sim\chi^2(n-1)$，而 $S=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\sqrt{Y}$ 是 Y 的函数，利用 $\chi^2(n-1)$ 的概率密度可得 $E(S)=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^n}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\dfrac{\Gamma(n/2)\sigma}{\Gamma((n-1)/2)}\neq\sigma$.）

59. 设总体 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$\theta>0$ 未知. 从总体中抽取一容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

(1) 证明 $\dfrac{2n\overline{X}}{\theta}\sim\chi^2(2n)$.

(2) 求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

(3) 某种元件的寿命（以 h 计）服从上述指数分布，现从中抽得一容量 $n=16$ 的样本，测得样本均值为 5010 h，试求元件的平均寿命的置信水平为 0.90 的单侧置信下限.

60. 设总体 $X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本.

(1) 验证 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y^n/\theta^n, & 0\leqslant y<\theta,\\ 1, & y\geqslant\theta.\end{cases}$$

(2) 验证 $U=Y/\theta$ 的概率密度为

$$f_U(u)=\begin{cases} nu^{n-1}, & 0\leqslant u\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) 给定正数 α，$0<\alpha<1$，求 U 的分布的上 $\alpha/2$ 分位点 $h_{\alpha/2}$ 以及上 $1-\alpha/2$ 分位点 $h_{1-\alpha/2}$.

(4) 利用(2)、(3)求参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(5) 设某人上班的等车时间 $X\sim U(0,\theta)$，θ 未知. 现在有样本 $x_1=4.2$，$x_2=3.5$，$x_3=1.7$，$x_4=1.2$，$x_5=2.4$，求 θ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

61. 设总体 X 服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \theta>0.$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个样本. 试取第 59 题中当 $\theta=\theta_0$ 时的统计量 $\chi^2=\dfrac{2n\overline{X}}{\theta_0}$ 作为检验统计量，检验假设 $H_0:\theta=\theta_0$，$H_1:\theta\neq\theta_0$. 取显著性水平为 α(注意：$E(\overline{X})=\theta$).

设某种电子元件的寿命(以小时计)服从均值为 θ 的指数分布，随机取 12 只元件测得它们的寿命分别为

340　430　560　920　1380　1520　1660　1770　2100　2320　2350　2650

试取显著性水平 $\alpha=0.05$，检验假设 $H_0:\theta=1450$，$H_1:\theta\neq1450$.

62. 经过十一年的试验，达尔文于 1876 年得到 15 对玉米样品的数据如下表，每对作物除授粉方式不同外，其他条件都是相同的. 试用逐对比较法检验不同授粉方式对玉米高度是否有显著的影响($\alpha=0.05$). 问应增设什么条件才能用逐对比较法进行检验?

授粉方式	1	2	3	4	5	6	7
异株授粉的作物高度(x_i)	$23\frac{1}{8}$	12	$20\frac{3}{8}$	22	$19\frac{1}{8}$	$21\frac{4}{8}$	$22\frac{1}{8}$
同株授粉的作物高度(y_i)	$27\frac{3}{8}$	21	20	20	$19\frac{3}{8}$	$18\frac{5}{8}$	$18\frac{5}{8}$

授粉方式	8	9	10	11	12	13	14	15
异株授粉的作物高度(x_i)	$20\frac{3}{8}$	$18\frac{2}{8}$	$21\frac{5}{8}$	$23\frac{2}{8}$	21	$22\frac{1}{8}$	23	12
同株授粉的作物高度(y_i)	$15\frac{2}{8}$	$16\frac{4}{8}$	18	$16\frac{2}{8}$	18	$12\frac{6}{8}$	$15\frac{4}{8}$	18

63. 一内科医生声称，如果病人每天傍晚聆听一种特殊的轻音乐会降低血压(舒张压，以 mmHg 计). 今选取了 10 个病人在试验之前和试验之后分别测量了血压，得到以下的数据：

病人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
试验之前(x_i)	86	92	95	84	80	78	98	95	94	96
试验之后(y_i)	84	83	81	78	82	74	86	85	80	82

设 $D_i=X_i-Y_i(i=1,2,\cdots,10)$ 为来自正态总体 $N(\mu_D,\sigma_D^2)$ 的样本，μ_D,σ_D^2 均未知. 试检验是否可以认为医生的意见是对的(取 $\alpha=0.05$).

64. 以下是各种颜色的汽车的销售情况：

颜色	红	黄	蓝	绿	棕
车辆数	40	64	46	36	14

试检验顾客对这些颜色是否有偏爱，即检验销售情况是否是均匀的(取 $\alpha=0.05$).

65. 某种闪光灯，每盏灯含 4 个电池，随机地取 150 盏灯，经检测得到以下的数据：

一盏灯损坏的电池数 x	0	1	2	3	4
灯的盏数	26	51	47	16	10

试取 $\alpha=0.05$ 检验一盏灯损坏的电池数 $X\sim b(4,\theta)$(θ 未知).

66. 下面分别给出了某城市在春季(9 周)和秋季(10 周)发生的案件数.

春季	51	42	57	53	43	37	45	49	46	
秋季	40	35	30	44	33	50	41	39	36	38

试取 $\alpha=0.03$ 用秩和检验法检验春季发生的案件数的均值是否较秋季的为多.

67. 临界闪烁频率(cff)是人眼对于闪烁光源能够分辨出它在闪烁的最高频率(以 Hz 计). 超过 cff 的频率，即使光源实际是在闪烁的，而人看起来是连续的(不闪烁的). 一项研究旨在判定 cff 的均值是否与人眼的虹膜颜色有关，所得数据如下：

临界闪烁频率(cff)

虹膜颜色	棕色		绿色		蓝色	
	26.8	26.3	26.4	29.1	25.7	29.4
	27.9	24.8	24.2		27.2	28.3
	23.7	25.7	28.0		29.9	
	25.0	24.5	26.9		28.5	

试在显著性水平 0.05 下，检验各种虹膜颜色相应的 cff 的均值有无显著的差异. 设各个总体服从正态分布，且方差相等，不同颜色下的样本之间相互独立.

68. 下面列出了挪威人自 1938—1947 年间年人均脂肪消耗量与患动脉粥样硬化症而死亡的死亡率之间相关的一组数据.

年份	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
脂肪消耗量 x（千克/人年）	14.4	16.0	11.6	11.0	10.0	9.6	9.2	10.4	11.4	12.5
死亡率 y（$1/(10^5$ 人年)）	29.1	29.7	29.2	26.0	24.0	23.1	23.0	23.1	25.2	26.1

设对于给定的 x，Y 为正态变量，且方差与 x 无关.

（1）求回归直线方程 $y=a+bx$.

（2）在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0:b=0$，$H_1:b\neq 0$.

（3）求 $\hat{y}|_{x=13}$.

（4）求 $x=13$ 处 $\mu(x)$ 置信水平为0.95的置信区间.

（5）求 $x=13$ 处 Y 的新观察值 Y_0 的置信水平为0.95的预测区间.

69. 下面给出 1924—1992 年奥林匹克运动会女子 100 米仰泳的最佳成绩（以 s 计），（其中 1940 年及 1944 年未举行奥运会）

年份	1924	1928	1932	1936	1948	1952	1956	1960
成绩	83.2	82.2	79.4	78.9	74.4	74.3	72.9	69.3
年份	1964	1968	1972	1976	1980	1984	1988	1992
成绩	67.7	66.2	65.8	61.8	60.9	62.6	60.9	60.7

（1）画出散点图.

（2）求成绩关于年份的线性回归方程.

（3）检验回归效果是否显著（取 $\alpha=0.05$）.

随机过程部分

70. 设在时间区间 $(0,t]$ 内来到某商店的顾客数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程. 每个来到商店的顾客购买某些货物的概率是 p，不买货物就离去的概率是 $1-p$，且各个顾客是否购买货物是相互独立的. 令 $Y(t)$ 为 $(0,t]$ 内购买货物的顾客数. 试证 $\{Y(t),t\geqslant 0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程.

71. 设随机过程

$$X(t)=a\cos(\Omega t+\Theta),\quad -\infty<t<+\infty,$$

其中 a 是常数,随机变量 $\Theta\sim U(0,2\pi)$,随机变量 Ω 具有概率密度 $f(x)$,设 $f(x)$ 连续且为偶函数,Θ 与 Ω 相互独立.试证 $X(t)$ 是平稳过程,且其谱密度为 $S_X(\omega)=a^2\pi f(\omega)$.(提示:要运用 δ 函数的筛选性.)