1. 设 X_1, X_2 是数学期望为 θ 的指数分布总体 X 的容量为 2 的样本，设 $Y=\sqrt{X_1X_2}$，试证明:

$$E(\frac{4Y}{\pi})=\theta$$

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，试证

$$E[(\overline{X}S^2)^2]=\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\left(\frac{2\sigma^4}{n-1}+\sigma^4\right)$$

3. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}xe^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应的样本观察值.

(1) 求 θ 的最大似然估计量.

(2) 求 θ 的矩估计量.

(3) 问求得的估计量是否是无偏估计量.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 以及 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 为分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，且它们相互独立，μ_1,μ_2,σ^2 均未知，试求 μ_1,μ_2,σ^2 的最大似然估计量.

5. 为了研究一批贮存着的产品的可靠性，在产品投入贮存时，即在时刻 $t_0=0$ 时，随机地选定 n 件产品，然后在预先规定的时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 取出来进行检测（检测时确定已失效的去掉，将未失效的继续投入贮存），今得到以下的寿命试验数据：

检测时刻（月）	t_1	t_2	$\cdots$	t_k		
区间 $(t_{i-1}, t_i]$	$(0,t_1]$	$(t_1,t_2]$	$\cdots$	$(t_{k-1},t_k]$	(t_k,∞)	
在 $(t_{i-1}, t_i]$ 的失效数	d_1	d_2	$\cdots$	d_k	s	$\sum_{i=1}^{k}d_i+s=n$

这种数据称为区间数据．设产品寿命 T 服从指数分布，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad \lambda>0\text{未知}$$

(1) 试基于上述数据写出入的对数似然方程．（提示：考虑事件“n 只产品分别在区间 $(0,t_1], (t_1,t_2], \cdots, (t_{k-1},t_k]$ 失效 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 只，而直至 t_k 还有 s 只未失效”的概率.）

(2) 设 $d_1<n, s<n$，我们可以用数值解法求得 λ 的最大似然估计值，在计算机上计算是容易的．特别，取检测时间是等间隔的，即取 $t_i=it_1, i=1,2,\cdots,k$．验证，此时可得 λ 的最大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{t_1}\ln\left(1+\frac{n-s}{\sum_{k=2}^{k}(i-1)d_i+sk}\right)$$

6. 设某种电子器件的寿命（以小时计）T 服从指数分布，概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 未知. 从这批器件中任取 n 只在时刻 $t=0$ 时投入独立寿命试验. 试验进行到预定时间 T_0 结束. 此时，有 $k(0<k<n)$ 只器件失效，试求 λ 的最大似然估计.（提示：考虑"试验直至时刻 T_0 为止，有 k 只器件失效，而有 $n-k$ 只未失效"这一事件的概率，从而写出 λ 的似然方程.）

7. 设系统由两个独立工作的成败型元件串联而成（成败型元件只有两种状态：正常工作或失效）. 元件 1、元件 2 的可靠性分别为 p_1,p_2，它们均未知. 随机地取 N 个系统投入试验，当系统中至少有一个元件失效时系统失效，现得到以下的试验数据：n_1——仅元件 1 失效的系统数；n_2——仅元件 2 失效的系统数；n_{12}——元件 1，元件 2 至少有一个失效的系统数；s——未失效的系统数. $n_1+n_2+n_{12}+s=N$. 这里 n_{12} 为隐蔽数据，也就是只知系统失效，但不能知道是由元件 1 还是元件 2 单独失效引起的，还是由元件 1，2 均失效引起的. 设隐蔽与系统失效的真正原因独立.

(1) 试写出 p_1,p_2 的似然函数.

(2) 设有系统寿命试验数据 $N=20,n_1=5,n_2=3,n_{12}=1,s=11$. 试求 p_1,p_2 的最大似然估计.（提示：p_1 应满足方程 $(p_1-1)(12p_1^2+11p_1-14)=0$.）

8. (1) 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ	θ	$1-2\theta$

$\theta>0$ 未知，今有样本

1 1 1 3 2 1 3 2 2 1 2 2 3 1 1 2

试求 θ 的最大似然估计值和矩估计值.

(2) 设总体 X 服从 Γ 分布. 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其形状参数 $\alpha>0$ 为已知，尺度参数 $\beta>0$ 未知. 今有样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求 β 的最大似然估计值.

9. (1) 设 $Z=\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$，即 X 服从对数正态分布，验证 $E(X)=\exp(\mu+\dfrac{1}{2}\sigma^2)$.

(2) 设自（1）中总体 X 中取一容量为 n 的样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求 $E(X)$ 的最大似然估计. 此处设 μ,σ^2 均为未知.

(3) 已知在文学家萧伯纳的《An Intelligent Woman's Guide To Socialism》一书中，一个句子的单词数近似地服从对数正态分布，设 μ,σ^2 为未知. 今自该书中随机地取 20 个句子. 这些句子中的单词数分别为

52	24	15	67	15	22	63	26	16	32
7	33	28	14	7	29	10	6	59	30

问这本书中，一个句子单词数均值的最大似然估计值等于多少？

10. 考虑进行定数截尾寿命试验，假设将随机抽取的 n 件产品在时间 $t=0$ 时同时投入试验试验进行到 m 件 $(m<n)$ 产品失效时停止，m 件失效产品的失效时间分别为

$$0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m$$

t_m 是第 m 件产品的失效时间．设产品的寿命分布为韦布尔分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\eta})^\beta}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 β 已知．求参数 η 的最大似然估计．

11. 设某大城市郊区的一条林荫道两旁开设了许多小商店，这些商店的开设延续时间（以月计）是一个随机变量，现随机地取 30 家商店，将它们的延续时间按自小到大排序，选其中前 8 家商店．它们的延续时间分别是

$$3.2 \quad 3.9 \quad 5.9 \quad 6.5 \quad 16.5 \quad 20.3 \quad 40.4 \quad 50.9$$

假设商店开设延续时间的长度是韦布尔随机变量．其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\eta})^\beta}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中，$\beta=0.8$.

(1) 试用上题结果，写出 η 的最大似然估计．

(2) 按（1）的结果求商店开设延续时间至少为 2 年的概率的估计．

12. 设分别自总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 中抽取容量 n_1,n_2 的两独立样本，其样本方差分别为 S_1^2,S_2^2．试证．对于任意常数 $a,b(a+b=1), Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计，并确定常数 a,b，从使 $D(Z)$ 达到最小．

13. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本.已知样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计.验证样本标准差 S 不是标准差 σ 的无偏估计.(提示:记 $Y=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，则 $Y\sim\chi^2(n-1)$，而 $S=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\sqrt{Y}$ 是 Y 的函数，利用 $\chi^2(n-1)$ 的概率密度可得 $E(S)=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^n}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\dfrac{\Gamma(n/2)\sigma}{\Gamma((n-1)/2)}\ne\sigma$.)

14. 设总体 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta} x^{-x/\theta}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\theta>0$ 未知．从总体中抽取一容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.

(1) 证明 $\dfrac{2n\overline{X}}{\theta}\sim\chi^2(2n)$.

(2) 求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

(3) 某种元件的寿命（以 h 计）服从上述指数分布，现从中抽得一容量 $n=16$ 的样本，测得样本均值为 5010 h, 试求元件的平均寿命的置信水平为 0.90 的单侧置信下限.

15. 设总体 $X \sim U(0,\theta)$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本.

(1) 验证 $Y = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y > 0 \\ y^n/\theta^n, & 0 \le y < \theta \\ 1, & y \ge \theta \end{cases}$$

(2) 验证 $U = Y/\theta$ 的概率密度为

$$f_U(u) = \begin{cases} n\mu^{n-1}, & 0 \le \mu \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 给定正数 $\alpha, 0 < \alpha < 1$，求 U 的分布的上 $\alpha/2$ 分位点 $h_{\alpha/2}$ 以及上 $1-\alpha/2$ 分位点 $h_{1-\alpha/2}$.

(4) 利用（2）,（3）求参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(5) 设某人上班的等车时间 $X \sim U(0,\theta)$，θ 未知. 现在有样本 $x_1 = 4.2, x_2 = 3.5, x_3 = 1.7, x_4 = 1.2, x_5 = 2.4$，求 θ 的置信水平为 0.95 的置信区间.