

1. (1) 在下列句子中随机地取一个单词, 以  $X$  表示取到的单词所包含的字母个数, 写出  $X$  的分布律, 并求  $E(X)$

“THE GIRL PUT ON HER BEAUTIFUL RED HAT.”

- (2) 在上述句子的 30 个字母中随机地取一个字母, 以  $Y$  表示取到的字母所在单词所包含的字母数. 写出  $Y$  的分布律并求  $E(Y)$ .
- (3) 一人掷骰子, 如得 6 点则掷第 2 次. 此时得分为 6 + 第二次得到的点数; 否则得分为他第一次掷得的点数, 且不能再掷. 求得分  $X$  的分布律及  $E(X)$ .
2. 某产品的次品率为 0.1, 检验员每天检验 4 次. 每次随机地取 10 件产品进行检验, 如发现其中的次品数多于 1, 就去调整设备. 以  $X$  表示一天中调整设备的次数, 试求  $E(X)$ . (设诸产品是否为次品是相互独立的.)
3. 有 3 只球, 4 个盒子, 盒子的编号为 1,2,3,4. 将球逐个独立地, 随机地放入 4 个盒子中去. 以  $X$  表示其中至少有一只球的盒子的最小号码 (例如  $X = 3$  表示第 1 号, 第 2 号盒子是空的, 第 3 个盒子至少有一只球), 试求  $E(X)$ .
4. (1) 设随机变量  $X$  的分布律为  $P\left\{X = (-1)^{j+1} \frac{3^j}{j}\right\} = \frac{2}{3^j}, j = 1, 2, \dots$ , 说明  $X$  的数学期望不存在.
- (2) 一盒中装有一只黑球, 一只白球, 作摸球游戏, 规则如下: 一次从盒中随机摸一只球, 若摸到白球. 则游戏结束, 摸到黑球放回再放入一只黑球, 然后再从盒中随机地摸一只球. 试说明要游戏结束的摸球次数  $X$  的数学期望不存在.
5. 设在某一规定的时间间隔里, 某电气设备用于最大负荷的时间  $X$  (以 min 计) 是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1500^2}x, & 0 \leq x \leq 1500, \\ -\frac{1}{1500^2}(x-300), & 1500 < x \leq 3000, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求  $E(X)$ .

6. (1) 设随机变量  $X$  的分布律为

$$\begin{array}{c|ccc} X & -2 & 0 & 2 \\ \hline p_k & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{array}$$

求  $E(X), E(X^2), E(3X^2 + 5)$ .

- (2) 设  $X \sim \pi(\lambda)$ , 求  $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$ .

7. (1) 设随机变量  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 (i)  $Y = 2X$ , (ii)  $Y = e^{-2X}$  的数学期望

- (2) 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且都服从  $(0, 1)$  上的均匀分布 (i) 求  $U = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  的数学期望, (ii) 求  $V = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  的数学期望

8. 设随机变量  $(X, Y)$  的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

- (1) 求  $E(X), E(Y)$ .
- (2) 设  $Z = Y/X$ , 求  $E(Z)$ .
- (3) 设  $Z = (X - Y)^2$ , 求  $E(Z)$ .

9. (1) 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $E(X), E(Y), E(XY), E(X^2 + Y^2)$ .

(2) 设随机变量  $X, Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-(y+x/y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $E(X), E(Y), E(XY)$ .

10. (1) 设随机变量  $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$  且  $X, Y$  相互独立. 求  $E[X^2/(X^2 + Y^2)]$ .

(2) 一飞机进行空投物资作业, 设目标点为原点  $O(0, 0)$ , 物资着陆点为  $(X, Y)$ ,  $X, Y$  相互独立, 且设  $X \sim N(0, \sigma^2), Y \sim N(0, \sigma^2)$ , 求原点到点  $(X, Y)$  间距离的数学期望.

11. 一工厂生产的某种设备的寿命  $X$  (以年计) 服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

工厂规定, 出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换. 若工厂售出一台设备赢利 100 元, 调换一台设备厂方需花费 300 元. 试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

12. 某车间生产的圆盘直径在区间  $(a, b)$  服从均匀分布. 试求圆盘面积的数学期望.

13. 设电压 (以 V 计)  $X \sim N(0, 9)$ . 将电压施加于一检波器, 其输出电压为  $Y = 5X^2$ . 求输出电压  $Y$  的均值.

14. 设随机变量  $X, Y$  的概率密度分别为

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- (1) 求  $E(X_1 + X_2), E(2X_1 - 3X_2^2)$ .
- (2) 又设  $X_1, X_2$  相互独立, 求  $E(X_1X_2)$ .

15. 将  $n$  只球 ( $1 \sim n$  号) 随机地放进  $n$  个盒子中去, 一个盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中, 称为一个配对. 记  $X$  为总的配对数, 求  $E(X)$ .

16. 若有  $n$  把看上去样子相同的钥匙. 其中只有一把能打开门上的锁. 用它们去试开门上的锁. 设取到每只钥匙是等可能的. 若每把钥匙试开一次后除去, 试用下面两种方法求试开次数  $X$  的数学期望.

(1) 写出  $X$  的分布律.

(2) 不写出  $X$  的分布律.

17. 设  $X$  为随机变量,  $C$  是常数, 证明  $D(X) < E[(X - C)]^2$ , 对于  $C \neq E(X)$ . (由于  $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$ , 上式表明  $E[(X - C)^2]$  当  $C = E(X)$  时取到最小值.)

18. 设随机变量  $X$  服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中  $\sigma > 0$  是常数, 求  $E(X), D(X)$ .

19. 设随机变量  $X$  服从  $\Gamma$  分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0$  是常数, 求  $E(X), D(X)$ .

20. 设随机变量  $X$  服从几何分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

其中  $0 < p < 1$  是常数, 求  $E(X), D(X)$ .

21. 设长方形的高 (以 m 计)  $X \sim U(0, 2)$ , 已知长方形的周长 (以 m 计) 为 20, 求长方形面积  $A$  的数学期望和方差.

22. (1) 设随机变量  $X_1, X_2, X_3, X_4$  相互独立, 且有  $E(X_i) = i, D(X_i) = 5 - i, i = 1, 2, 3, 4$ .

设  $Y = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4$ . 求  $E(Y), D(Y)$ .

(2) 设  $X, Y$  是随机变量, 且有  $E(X) = 3, E(Y) = 1, D(X) = 4, D(Y) = 9$ , 令  $Z = 5X - Y + 15$ , 分别在下列 3 种情况下求  $E(Z)$  和  $D(Z)$ .

(i)  $X, Y$  相互独立, (ii)  $X, Y$  不相关, (iii)  $X$  与  $Y$  的相关系数为 0.25

23. 五家商店联营, 它们每两周售出的某种农产品的数量 (以 kg 计) 分别为  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ . 已知  $X_1 \sim N(200, 225), X_2 \sim N(240, 240), X_3 \sim N(180, 225), X_4 \sim N(260, 265), X_5 \sim N(320, 270)$ ,  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  相互独立.

(1) 求五家商店两周的总销售量的均值和方差.

(2) 商店每隔两周进货一次, 为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99. 问商店的仓库应至少储存多少千克该产品?

24. 卡车装运水泥, 设每袋水泥重量  $X$  (以 kg 计) 服从  $N(50, 2.5^2)$ , 问最多装多少袋水泥使总重量超过 2000 的概率不大于 0.05.

25. 设随机变量  $X, Y$  相互独立. 且都服从  $(0, 1)$  上的均匀分布.

(1) 求  $E(XY), E(X/Y), E[\ln(XY)], E[|Y - X|]$ .

(2) 以  $X, Y$  为边长作一长方形, 以  $A, C$  分别表示长方形的面积和周长, 求  $A$  和  $C$  的相关系数.

26. (1) 设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 且有  $X_1 \sim b(4, 1/2), X_2 \sim b(6, 1/3), X_3 \sim b(6, 1/3)$ , 求  $P\{X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5\}, E(X_1 X_2 X_3), E(X_1 - X_2), E(X_1 - 2X_2)$ .

(2) 设  $X, Y$  是随机变量, 且有  $E(X) = 3, E(Y) = 1, D(X) = 4, D(Y) = 9$ , 令  $Z = 5X - Y + 15$ , 分别在下列 3 种情况下求  $E(Z)$  和  $D(Z)$ .

(i)  $X, Y$  相互独立, (ii)  $X, Y$  不相关, (iii)  $X$  和  $Y$  的相关系数为 0.25.

27. 下列各对随机变量  $X$  和  $Y$ , 问哪几对是相互独立的? 哪几对是不相关的.

(1)  $X \sim U(0, 1), Y = X^2$

(2)  $X \sim U(-1, 1), Y = X^2$

(3)  $X = \cos V, Y = \sin V, V \sim U(0, 2\pi)$

若  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ .

(4)

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(5)

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

28. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试验证  $X$  和  $Y$  是不相关的, 但  $X$  和  $Y$  不是相互独立的.

29. 设随机变量  $(X, Y)$  的分布律为

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	$-1$	$0$	$1$
$-1$	$1/8$	$1/8$	$1/8$
$0$	$1/8$	$0$	$1/8$
$1$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

验证  $X$  和  $Y$  是不相关的, 但  $X$  和  $Y$  不是相互独立的.

30. 设  $A$  和  $B$  是试验  $E$  的两个事件, 且  $P(A) > 0, P(B) > 0$ , 并定义随机变量  $X, Y$  如下:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 发生} \\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 发生} \\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生} \end{cases}$$

证明若  $\rho_{XY} = 0$ , 则  $X$  和  $Y$  必定相互独立。

31. 设随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $E(X), E(Y), \text{Cov}(X, Y)$ .

32. 设随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $E(X), E(Y), \text{Cov}(X, Y), \rho_{XY}, D(X+Y)$ .

33. 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 且设  $X, Y$  相互独立, 试求  $Z_1 = \alpha X + \beta Y$  和  $Z_2 = \alpha X - \beta Y$  的相关系数 (其中  $\alpha, \beta$  是不为零的常数) .

34. (1) 设随机变量  $W = (aX + 3Y)^2, E(X) = E(Y) = 0, D(X) = 4, D(Y) = 16, \rho_{XY} = -0.5$ . 求常数  $a$  使  $E(W)$  为最小, 并求  $E(W)$  的最小值。

(2) 设随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且有  $D(X) = \sigma_X^2, D(Y) = \sigma_Y^2$ . 证明当  $a^2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$  时, 随机变量  $W = X - aY$  与  $V = X + aY$  相互独立。

35. 设随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且  $X \sim N(0, 3), Y \sim N(0, 4)$ , 相关系数  $\rho_{XY} = -1/4$ , 试写出  $X$  和  $Y$  的联合概率密度。

36. 已知正常男性成人血液中, 每一毫升白细胞数平均是 7300, 均方差是 700. 利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200 ~ 9400 之间的概率  $p$ .

37. 对于两个随机变量  $V, W$ , 若  $E(V^2), E(W^2)$  存在, 证明

$$[E(VW)]^2 \leq E(V^2)E(W^2)$$

这一不等式称为柯西-施瓦茨不等式

提示: 考虑实变量  $t$  的函数

$$q(t) = E[(V + tW)^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2)$$