

1. 在一箱子中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次。每次任取一只，考虑两种试验：(1) 放回抽样；(2) 不放回抽样。我们定义随机变量 X, Y 如下：

$$X = \begin{cases} 0, & \text{若第一次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第一次取出的是次品} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{若第二次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第二次取出的是次品} \end{cases}$$

试分别就 (1)、(2) 两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律。

2. (1) 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球。以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数。求 X 和 Y 的联合分布律。
- (2) 在 (1) 中求 $P\{X > Y\}, P\{Y = 2X\}, P\{X + Y = 3\}, P\{X < 3 - Y\}$ 。

3. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6 - x - y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 确定常数 k .
- (2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$.
- (3) 求 $P\{X < 1.5\}$.
- (4) 求 $P\{X + Y \leq 4\}$.

4. 设 X, Y 都是非负连续型随机变量, 它们相互独立.

- (1) 证明

$$P\{X < Y\} = \int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(x) dx$$

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数, $f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度.

- (2) 设 X, Y 相互独立. 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $P\{X < Y\}$.

5. 设随机变量 (X, Y) 具有分布函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘分布函数.

6. 将一枚硬币掷 3 次, 以 X 表示前 2 次中出现 H 的次数, 以 Y 表示 3 次中出现 H 的次数. 求 X, Y 的联合分布律以及 (X, Y) 的边缘分布律.

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求边缘概率密度.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求边缘概率密度.

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

- (1) 确定常数 c ;
- (2) 求边缘概率密度.

10. 将某一医药公司 8 月份和 9 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y ，据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

- (1) 求边缘分布律.
- (2) 求 8 月份的订单数为 51 时，9 月份订单数的条件分布律.

11. 以 X 记某医院一天出生的婴儿的个数, Y 记其中男婴的个数. 设 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X = n, Y = m\} = \frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},$$
$$m = 0, 1, 2, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (1) 求边缘分布律.
- (2) 求条件分布律.
- (3) 特别地, 写出当 $X = 20$ 时, Y 的条件分布律.

12. 设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值, 另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数. 求条件分布律 $P\{Y = k|X = i\}$ 。

13. 在第 9 题中

- (1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$. 特别地, 写出当 $Y = \frac{1}{2}$ 时 X 的条件概率密度.
- (2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$. 特别地, 写出当 $X = \frac{1}{3}, X = \frac{1}{2}$ 时 Y 的条件概率密度.
- (3) 求条件概率

$$P\left\{Y \geq \frac{1}{4} \middle| X = \frac{1}{2}\right\}, \quad P\left\{Y \geq \frac{3}{4} \middle| X = \frac{1}{2}\right\}$$

14. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

15. 设随机变量 $X \sim U(0, 1)$, 当给定 $X = x$ 时, 随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x, & 0 < y < \frac{1}{x} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x, y)$.
- (2) 求边缘密度 $f_Y(y)$, 并画出它的图形.
- (3) 求 $P\{X > Y\}$.

16. (1) 问第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立?

- (2) 问第 14 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立 (需说明理由)?

17. (1) 设随机变量 (X, Y) 具有分布函数

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha x})y, & x \geq 0, 0 \leq y \leq 1, \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0, y > 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \alpha > 0$$

证明 X, Y 相互独立.

(2) 设随机变量 (X, Y) 具有分布律

$$P\{X = x, Y = y\} = p^2(1 - p)^{x+y-2}, 0 < p < 1, x, y \text{ 均为正整数}$$

问 X, Y 是否相互独立。

18. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度。

(2) 设有 a 的二元一次方程为 $a^2 + 2Xa + Y = 0$, 试求 a 有实根的概率。

19. 进行打靶, 设弹着点 $A(X, Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立, 且都服从 $N(0, 1)$ 分布, 规定

点 A 落在区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 得 2 分

点 A 落在区域 $D_2 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ 得 1 分

点 A 落在区域 $D_3 = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 4\}$ 得 0 分

以 Z 记打靶的得分. 写出 X, Y 的联合概率密度, 并求 Z 的分布律.

20. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y < 0, \\ 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0, \mu > 0$ 是常数. 引入随机变量

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{当 } X \leq Y, \\ 0, & \text{当 } X > Y \end{cases}$$

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

(2) 求 Z 的分布律和分布函数.

21. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分别求 (1) $Z = X + Y$, (2) $Z = XY$ 的概率密度

22. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度。

23. 某种商品一周的需求量是一个随机变量. 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

设每周的需求量是相互独立的. 求 (1) 两周, (2) 三周的需求量的概率密度.

24. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否相互独立

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度

25. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且具有相同的分布, 它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x}, & x > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度

26. 设随机变量 X, Y 相互独立, 它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = Y/X$ 的概率密度

27. 设随机变量 X, Y 相互独立, 它们都在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布, A 是以 X, Y 为边长的矩形的面积, 求 A 的概率密度.

28. 设 X, Y 是相互独立的随机变量. 它们都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$. 试验证随机变量 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

我们称 Z 服从参数为 $\sigma (\sigma > 0)$ 的瑞利分布.

29. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 1, 0 < y < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 试确定常数 b .
- (2) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.
- (3) 求函数 $U = \max\{X, Y\}$.

30. 设某种型号的电子元件的寿命（以小时计）近似地服从正态分布 $N(160, 20^2)$. 随机地选取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

31. 对某种电子装置的输出测量了 5 次. 得到结果为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 . 设它们是相互独立的随机变量且都服从参数 $\sigma = 2$ 的瑞利分布.

(1) 求 $Z = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ 的分布函数

(2) 求 $P\{Z > 4\}$

32. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且服从同一分布, 试证明:

$$P\{a < \min\{X, Y\} \leq b\} = [P\{X > a\}]^2 - [P\{X > b\}]^2 \quad (a \leq b)$$

33. 设 X, Y 是相互独立的随机变量. 其分布律分别为

$$P\{X = k\} = p(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P\{Y = r\} = q(r), \quad r = 0, 1, 2, \dots.$$

证明随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律为

$$P\{Z = i\} = \sum_{k=0}^i p(k)q(i-k), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

34. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$. 证明 $Z = X + Y \sim \pi(\lambda_1 + \lambda_2)$

35. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, $X \sim b(n_1, p), Y \sim b(n_2, p)$. 证明 $Z = X + Y \sim b(n_1 + n_2, p)$

36. 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

$\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X = 2|Y = 2\}, P\{Y = 3|X = 0\}$

(2) 求 $V = \max\{X, Y\}$ 的分布律

(3) 求 $U = \min\{X, Y\}$ 的分布律

(4) 求 $W = X + Y$ 的分布律