1. 在一箱子中装有 12 只开关．其中 2 只是次品，在其中取两次．每次任取一只，考虑两种试验：（1）放回抽样；（2）不放回抽样．我们定义随机变量 X, Y 如下：

$$X = \begin{cases} 0, & \text{若第一次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第一次取出的是次品} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 0, & \text{若第二次取出的是正品} \\ 1, & \text{若第二次取出的是次品} \end{cases}$$

试分别就（1）、（2）两种情况．写出 X 和 Y 的联合分布律．

2. (1) 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取 4 只球．以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数．求 X 和 Y 的联合分布律．

(2) 在（1）中求 $P\{X > Y\}, P\{Y = 2X\}, P\{X + Y = 3\}, P\{X < 3 - Y\}$.

3. 设随机变量 X, Y 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6 - x - y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k.

(2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}$.

(3) 求 $P\{X < 1.5\}$.

(4) 求 $P\{X + Y \le 4\}$.

4. 设 X, Y 都是非负的连续型随机变量，它们相互独立．

(1) 证明

$$P\{X < Y\} = \int_0^\infty F_X(x) f_Y(x) \mathrm{d}x$$

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度．

(2) 设 X, Y 相互独立．其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $P\{X < Y\}$.

5. 设随机变量 (X, Y) 具有分布函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘分布函数．

6. 将一枚硬币掷 3 次以 X 表示前 2 次中出现 H 的次数，以 Y 表示 3 次中出现 H 的次数．求 X, Y 的联合分布律以及 (X, Y) 的边缘分布律．

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2 - x), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求边缘概率密度．

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求边缘概率密度.

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & x^2\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 确定常数 c;

(2) 求边缘概率密度.

10. 将某一医药公司 8 月份和 9 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y，据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(1) 求边缘分布律.

(2) 求 8 月份的订单数为 51 时，9 月份订单数的条件分布律.

11. 以 X 记某医院一天出生的婴儿的个数，Y 记其中男婴的个数. 设 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},$$
$$m=0,1,2,\cdots,n;\quad n=0,1,2,\cdots$$

(1) 求边缘分布律.

(2) 求条件分布律.

(3) 特别地，写出当 $X=20$ 时，Y 的条件分布律.

12. 设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值。求条件分布律 $P\{Y=k|X=i\}$。

13. 在第 9 题中

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$. 特别地，写出当 $Y=\dfrac{1}{2}$ 时 X 的条件概率密度.

(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$. 特别地，写出当 $X=\dfrac{1}{3},X=\dfrac{1}{2}$ 时 Y 的条件概率密度.

(3) 求条件概率

$$P\left\{Y\ge\frac{1}{4}\,\middle|\,X=\frac{1}{2}\right\},\quad P\left\{Y\ge\frac{3}{4}\,\middle|\,X=\frac{1}{2}\right\}$$

14. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}=(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

15. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，当给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$.

(2) 求边缘密度 $f_Y(y)$，并画出它的图形.

(3) 求 $P\{X>Y\}$.

16. (1) 问第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 问第 14 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立（需说明理由)?

17. (1) 设随机变量 (X,Y) 具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})y, & x\ge 0, 0\le y\le 1,\\ 1-e^{-\alpha x}, & x\ge 0, y>1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad \alpha>0$$

证明 X,Y 相互独立.

(2) 设随机变量 (X,Y) 具有分布律

$$P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x+y-2}, 0<p<1, x,y\text{均为正整数}$$

问 X,Y 是否相互独立。

18. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度。

(2) 设有 a 的二元一次方程为 $a+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率。

19. 进行打靶，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定

$$\text{点}A\text{落在区域}D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}\text{得2分}$$
$$\text{点}A\text{落在区域}D_2=\{1<(x,y)|x^2+y^2\le 4\}\text{得1分}$$
$$\text{点}A\text{落在区域}D_3=\{(x,y)|x^2+y^2>4\}\text{得0分}$$

以 Z 记打靶的得分．写出 X,Y 的联合概率密度，并求 Z 的分布律.

20. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y<0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

其中 $\lambda>0, \mu>0$ 是常数。引入随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & \text{当}X\le Y,\\ 0, & \text{当}X>Y\end{cases}$$

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

(2) 求 Z 的分布律和分布函数.

21. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分别求（1）$Z=X+Y$，（2）$Z=XY$ 的概率密度

22. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度。

23. 某种商品一周的需求量是一个随机变量. 其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t>0 \\ 0, & t\le 0 \end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的。求（1）两周，（2）三周的需求量的概率密度.

24. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否相互独立

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度

25. 设随机变量 X,Y 相互独立，且具有相同的分布，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases} e^{1-x}, & x>1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度

26. 设随机变量 X,Y 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z=Y/X$ 的概率密度

27. 设随机变量 X,Y 相互独立，它们都在区间 (0,1) 上服从均匀分布，A 是以 X,Y 为边长的矩形的面积，求 A 的概率密度.

28. 设 X,Y 是相互独立的随机变量. 它们都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 试验证随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z\ge 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

我们称 Z 服从参数为 $\sigma(\sigma>0)$ 的瑞利分布.

29. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

30. 设某种型号的电子元件的寿命（以小时计）近似地服从正态分布 $N(160,20^2)$．随机地选取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 的概率．

31. 对某种电子装置的输出测量了 5 次．得到结果为 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 设它们是相互独立的随机变量且都服从参数 $\sigma=2$ 的瑞利分布．

(1) 求 $Z=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数

(2) 求 $P\{Z>4\}$

32. 设随机变量 X,Y 相互独立，且服从同一分布，试证明；

$$P\{a<\min\{X,Y\}\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2 \quad (a\le b)$$

33. 设 X,Y 是相互独立的随机变量．其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k), \quad k=0,1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=r\}=q(r), \quad r=0,1,2,\cdots.$$

证明随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k), \quad i=0,1,2,\cdots$$

34. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X\sim\pi(\lambda_1),Y\sim\pi(\lambda_2)$. 证明 $Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$

35. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X\sim b(n_1,p),Y\sim b(n_2,p)$. 证明 $Z=X+Y\sim b(n_1+n_2,p)$

36. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X=2|Y=2\},P\{Y=3|X=0\}$

(2) 求 $V=\max\{X,Y\}$ 的分布律

(3) 求 $U=\min\{X,Y\}$ 的分布律

(4) 求 $W=X+Y$ 的分布律