linearRegression

January 14, 2025

1 Introduccion a la Regresion Lineal

1.1 ¿Qué es la regresión lineal?

La regresión lineal es una técnica de análisis de datos que predice el valor de datos desconocidos mediante el uso de otro valor de datos relacionado y conocido. Modela matemáticamente la variable desconocida o dependiente y la variable conocida o independiente como una ecuación lineal. Por ejemplo, supongamos que tiene datos sobre sus gastos e ingresos del año pasado. Las técnicas de regresión lineal analizan estos datos y determinan que tus gastos son la mitad de tus ingresos. Luego calculan un gasto futuro desconocido al reducir a la mitad un ingreso conocido futuro.

1.2 ¿Por qué es importante la regresión lineal?

Los modelos de regresión lineal son relativamente simples y proporcionan una fórmula matemática fácil de interpretar para generar predicciones. La regresión lineal es una técnica estadística establecida y se aplica fácilmente al software y a la computación. Las empresas lo utilizan para convertir datos sin procesar de manera confiable y predecible en inteligencia empresarial y conocimiento práctico. Los científicos de muchos campos, incluidas la biología y las ciencias del comportamiento, ambientales y sociales, utilizan la regresión lineal para realizar análisis de datos preliminares y predecir tendencias futuras. Muchos métodos de ciencia de datos, como el machine learning y la inteligencia artificial, utilizan la regresión lineal para resolver problemas complejos.

1.3 ¿Cómo funciona la regresión lineal?

En esencia, una técnica de regresión lineal simple intenta trazar un gráfico lineal entre dos variables de datos, x e y. Como variable independiente, x se traza a lo largo del eje horizontal. Las variables independientes también se denominan variables explicativas o variables predictivas. La variable dependiente, y, se traza en el eje vertical. También puede hacer referencia a los valores y como variables de respuesta o variables pronosticadas.

2 Modelo de regresion lineal

2.1 Regresion lineal simple

En una regresión lineal, se trata de establecer una relación entre una variable independiente y su correspondiente variable dependiente. Esta relación se expresa como una línea recta. No es posible trazar una línea recta que pase por todos los puntos de un gráfico si estos se encuentran ordenados de manera caótica. Por lo tanto, sólo se determina la ubicación óptima de esta línea mediante una regresión lineal. Algunos puntos seguirán distanciados de la recta, pero esta distancia debe

ser mínima. El cálculo de la distancia mínima de la recta a cada punto se denomina función de pérdida.

La ecuación de una línea recta tiene la siguiente forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

Donde:

- Y es la variable independiente.
- β_0 es el punto de intersección (El valor esperado cuando x = 0).
- β_1 es la pendiente (El cambio de Y por cada unidad de cambio en x).
- ϵ (epsilon) es la función de pérdida.

2.2 Regresion lineal multiple

La regresión lineal múltiple encuentra la relación entre dos o más variables independientes y su correspondiente variable dependiente.

La ecuación de regresión lineal múltiple tiene la siguiente forma:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1} \beta_i x_i + \epsilon_i$$

Donde:

- Y es la variable dependiente.
- x es una variable independiente.
- β son coeficientes.
- ϵ (epsilon) es la función de pérdida.

3 Implementacion en python

3.1 Librerías necesarias

Utilizaremos la función `ols` de la librería `statsmodels`. Aunque existen otras bibliotecas en Python que también ofrecen modelos de regresión lineal, como `scikit-learn`, hemos optado por `statsmodels` debido a su notación estadística y la mayor explicabilidad que brinda sobre los modelos. Además, `statsmodels` está diseñado para trabajar de manera eficiente con pandas, por lo que también importaremos esta librería.

[2]:
```
from statsmodels.formula.api import ols
import pandas as pd
```

[3]:
```
from data.handler import get_heights

heights = get_heights()
heights.info()
```

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 934 entries, 0 to 933
Data columns (total 8 columns):
 #   Column           Non-Null Count  Dtype
---  ------           --------------  -----
 0   family           934 non-null    object
 1   father           934 non-null    float64
 2   mother           934 non-null    float64
 3   midparentHeight  934 non-null    float64
 4   children         934 non-null    int64
 5   childNum         934 non-null    int64
 6   gender           934 non-null    object
 7   childHeight      934 non-null    float64
dtypes: float64(4), int64(2), object(2)
memory usage: 58.5+ KB
```

3.2 Notación estadística

En los modelos que presentaremos, utilizaremos notación estadística, la cual es fundamental para comprender y expresar los conceptos detrás de la regresión lineal. Usaremos un ejemplo para comprender el uso de esta.

$$y \sim a + b$$

- y : Variable dependiente. Es la variable que queremos predecir o explicar con base en otras variables.
- "$\sim$" : Símbolo que indica una relación entre la variable dependiente (a la izquierda) y las variables independientes (a la derecha). En otras palabras, estamos diciendo que y depende de las variables a la derecha del $\sim$.
- a y b: Variables independientes, también conocidas como características o predictores. Son las variables que usamos para predecir y.
- $+$: Indica que las variables a y b se agregan al modelo de regresión como predictores separados.

En este caso estamos modelando la variable y como una funcion lineal de las variables a y b donde queremos entender cómo cambian los valores de y en función de los valores de a y b.

3.3 Modelo OLS

En Python, al usar el modelo de regresión lineal OLS (Ordinary Least Squares), empleamos la notación estadística, pero en lugar de variables abstractas, utilizamos los nombres de las columnas del DataFrame. Esto permite que el modelo sea aplicado directamente a los datos que tenemos en forma de tablas (DataFrames).

[4]:
```
# El dataframe heights fue importado previamente
model = ols('childHeight ~ father', data=heights)

# Ajustar modelo
```

```
model = model.fit()
```

3.4 Visualizacion

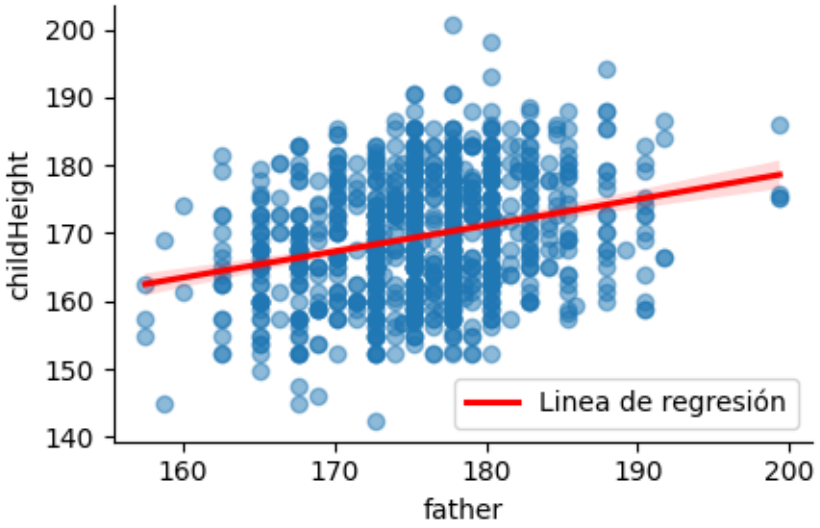
Para visualizar la regresión lineal, utilizamos la función `lmplot` de la librería `seaborn`, que es una herramienta poderosa para graficar relaciones lineales entre variables. Esta función no solo traza la línea de regresión, sino que también ofrece una visualización de los datos y puede incluir otras características útiles para el análisis.

[5]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

sns.lmplot(x='father', y='childHeight',
           data=heights,
           line_kws={'color' : 'red', 'label' : 'Linea de regresión'},
           scatter_kws={'alpha' : 0.5},
           height=3, aspect=1.5)

# Mostrar leyenda
plt.legend()

# Mostrar el gráfico
plt.show()
```



3.5 Valores atipicos

En el análisis de regresión, se pueden observar puntos que se encuentran considerablemente alejados de la línea de regresión. Estos puntos, conocidos como valores atípicos (outliers), son observaciones que se desvían notablemente de los valores esperados. Los outliers pueden surgir debido a factores

externos, errores de medición, o simplemente por aleatoriedad. Su presencia puede influir de manera significativa en la forma y los parámetros de la línea de regresión, afectando la calidad del modelo.

3.5.1 Distancia de Cook

La Distancia de Cook es una métrica utilizada para identificar observaciones que tienen un impacto desproporcionado en el ajuste del modelo. Evalúa cuánto cambia el modelo global (coeficientes y predicciones) si una observación específica se elimina del análisis. Valores altos en la distancia de Cook indican puntos con una influencia considerable, que deben ser analizados cuidadosamente para determinar si deben ser tratados como outliers o si representan información válida.

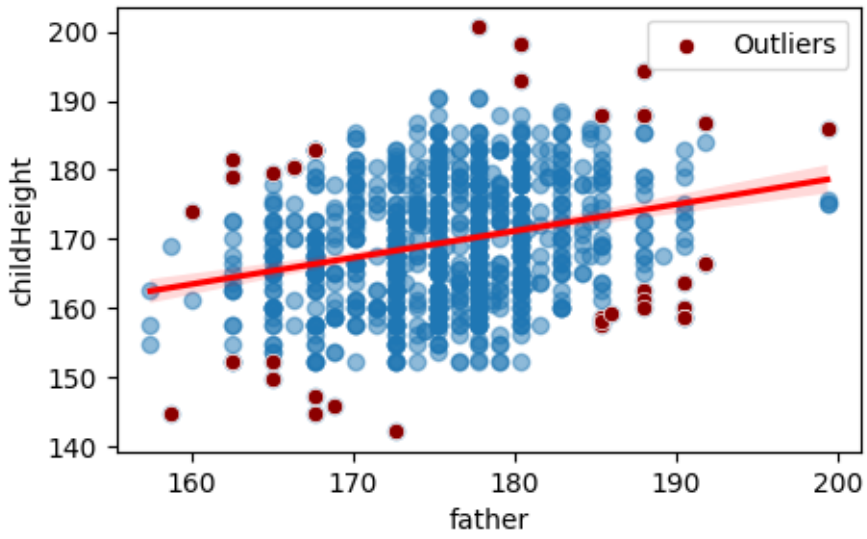
Esta metrica puede ser obtenida de nuestro modelo `OLS` a traves del metodo `get_influence()` con el cual obtenemos la clase `OLSInfluence` que contiene la distancia de cook en su atributo `cooks_distance`.

[6]:
```
import numpy as np
# Obtener distancia de Cook de OLSInfluence
cooks_distance = model.get_influence().cooks_distance[0]
threshold_cooks = 4 / len(heights)  # Umbral para la distancia de Cook

# Obtener índices de los outliers
outliers = np.where(cooks_distance > threshold_cooks)[0]
```

3.5.2 Visualizacion de valores atipicos

[7]:
```
plt.figure(figsize=(5,3))
sns.regplot(x='father', y='childHeight', data=heights, line_kws={'color' :␣
 ↪'red'}, scatter_kws={'alpha' : 0.5})
sns.scatterplot(x=heights.iloc[outliers]['father'], y=heights.
 ↪iloc[outliers]['childHeight'], color='darkred', label='Outliers')
plt.show()
```



3.6 Parametros del modelo OLS

Para poder acceder a los parametros de nuestro modelo utilizamos el atributo `params`

[8]:
```
model.params
```

[8]:
```
Intercept    101.953809
father         0.384505
dtype: float64
```

3.7 Significado de los parametros

En este caso `Intercept` es el equivalente a β_0 y `father` el equivalente a β_1, esto seria una regresion lineal simple donde podriamos explicarla de esta manera:

`altura_hijo = intercepto + pendiente * altura_padre`

[9]:
```
# Obtener la intersección y la pendiente
intercept, slope = model.params

# Establecemos un valor ejemplo para la altura del padre
altura_padre = 177.8

# Calculamos la altura del hijo
altura_hijo = intercept + slope * altura_padre
altura_hijo
```

[9]:
```
170.31880344853033
```

Con el metodo `summary()` del modelo `OLS` obtenemos mucha informacion para pruebas estadisticas de la cual nos enfocaremos en una en particular, el coeficiente de determinacion r^2

[10]:
```
model.summary()
```

[10]:

Dep. Variable:	childHeight	**R-squared:**	0.071
Model:	OLS	**Adj. R-squared:**	0.070
Method:	Least Squares	**F-statistic:**	70.99
Date:	Tue, 14 Jan 2025	**Prob (F-statistic):**	1.35e-16
Time:	20:34:43	**Log-Likelihood:**	-3352.1
No. Observations:	934	**AIC:**	6708.
Df Residuals:	932	**BIC:**	6718.
Df Model:	1		
Covariance Type:	nonrobust		

	coef	**std err**	**t**	**P> |t|**	**[0.025**	**0.975]**
Intercept	101.9538	8.026	12.703	0.000	86.202	117.705
father	0.3845	0.046	8.425	0.000	0.295	0.474

Omnibus:	29.333	**Durbin-Watson:**	1.341
Prob(Omnibus):	0.000	**Jarque-Bera (JB):**	14.852
Skew:	0.081	**Prob(JB):**	0.000596
Kurtosis:	2.404	**Cond. No.**	4.92e+03

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
[2] The condition number is large, 4.92e+03. This might indicate that there are
strong multicollinearity or other numerical problems.

3.8 Coeficiente de determinacion

El coeficiente de determinacion comunmente denotado como r^2 es la varianza explicada por el modelo de regresión en relación con la variable dependiente.

- Un valor de $r^2 = 1$ indica que el modelo explica el 100% de la variabilidad de la variable dependiente
- Un valor de $r^2 = 0$ indica que el modelo no explica ninguna variabilidad de la variable dependiente

En nuestro modelo OLS este valor puede obtenerse a traves del atributo `rsquared`

[11]:
```
print(model.rsquared)
```

```
0.07077650419213521
```

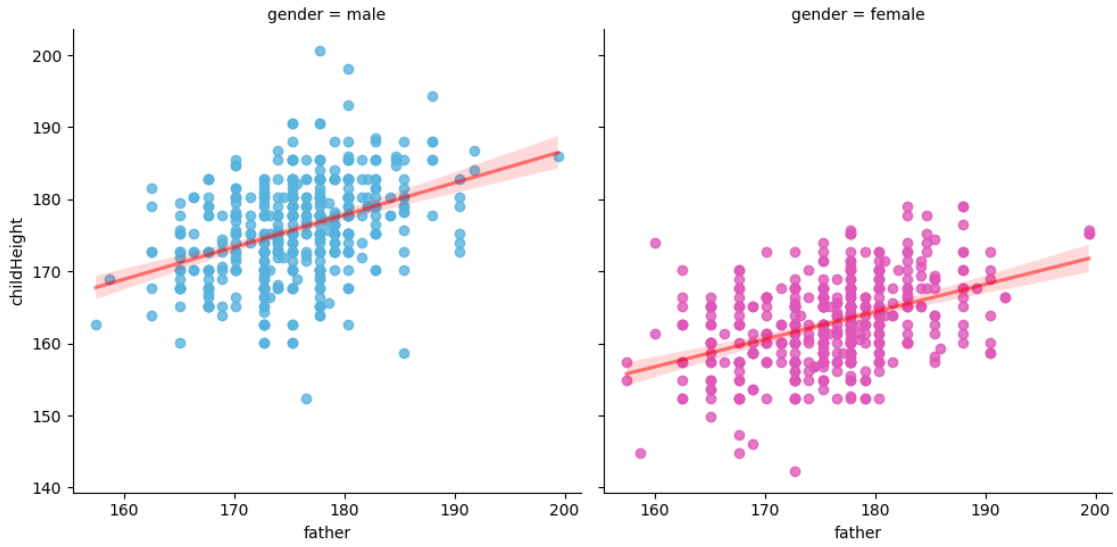
A como podemos ver, en este caso parece ser que la altura del padre explica tan solo un 7% de la varianza en la altura del hijo. Esto podría parecer sorprendente, dado que intuimos que la altura del padre podría ser un factor significativo para predecir la altura del hijo. Este bajo porcentaje de varianza explicada sugiere que hay otros factores no considerados en este modelo que influyen en la altura del hijo.

3.9 Modelo de regresion lineal multiple

Dado que en nuestro análisis inicial encontramos que la altura del padre explica tan solo un 7% de la varianza en la altura del hijo, decidimos explorar si incluir más variables en el modelo podría ayudarnos a mejorar el ajuste y explicar mejor esta relación.

El dataset de Galton incluye otras variables interesantes, como el genero del hijo. Esta variable podría darnos una perspectiva más completa al considerar la influencia del genero en la altura.

[12]:
```
sns.lmplot(
           x='father',
           y='childHeight',
           data=heights,
           palette=["#57b3de", "#de57b9"],
           hue="gender", col="gender",
           line_kws={'color':'red', 'alpha':0.5}
           )
plt.show()
```



[13]:
```
model_gender = ols('childHeight ~ father + gender + 0', data=heights).fit()
print(model_gender.rsquared)
```

```
0.5942556553726279
```

Teniendo en cuenta el genero, nuestro modelo de regresion lineal explica un 60% de la varianza, lo cual es un gran avance con respecto a nuestro modelo anterior. Teniendo ambos modelos, podemos comenzar a realizar predicciones en base a estos.

3.10 Creando predicciones

Para realizar predicciones con el modelo `OLS`, necesitamos crear un DataFrame de `pandas` que contenga los valores de las variables utilizadas en el ajuste del modelo. A continuación, se presenta un ejemplo:

[14]:
```
# Crear dataframe con las variables a utilizar
exploratory_data = heights[["father", "gender", "childHeight"]].copy()

# Crear predicciones para la altura del hijo con cada modelo
exploratory_data['childHeight_father'] = model.predict(exploratory_data)
exploratory_data['childHeight_father_gender'] = model_gender.
 ↪predict(exploratory_data)

# Mostar las primeras filas
exploratory_data.head()
```

[14]:

	father	gender	childHeight	childHeight_father	childHeight_father_gender
0	199.39	male	185.928	178.620267	185.614246
1	199.39	female	175.768	178.620267	172.455897
2	199.39	female	175.260	178.620267	172.455897

```
3   199.39   female      175.260          178.620267                172.455897
4   191.77     male      186.690          175.690339                182.486947
```

En este caso, creamos una copia del DataFrame original y le agregamos las columnas con nuestras predicciones. Como podemos observar, las predicciones parecen acercarse al valor real de `childHeight`, pero ¿cómo podemos determinar cuán precisas son estas predicciones? Esto se evalúa utilizando las métricas de evaluación de modelos de regresión.

4 Evaluacion de modelo

La eficiencia de un modelo se mide a través de su precisión, es decir, la proporción de instancias que el modelo predice correctamente. La precisión es una métrica que se puede utilizar para comparar el rendimiento de diferentes modelos. En este caso al ser un modelo de regresion, existen diversas metricas bajo las cuales podemos evaluar un modelo.

4.1 Metricas de evaluacion

- **Error Absoluto Medio (MAE - Mean Absolute Error)**

  Representa el promedio de las diferencias absolutas entre los valores reales y las predicciones . Es fácil de interpretar en términos de las unidades originales de la variable objetivo.

$$\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|$$

- **Error Cuadratico Medio (MSE - Mean Squared Error)**

  Promedia el cuadrado de los errores. Penaliza más los errores grandes debido al uso del cuadrado, por lo que es útil si los errores grandes son especialmente indeseables.

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

- **Raiz del Error Cuadratico Medio (RMSE - Root Mean Squared Error)**

  Es la raíz cuadrada del MSE, lo que la devuelve a las unidades originales de la variable objetivo. Se usa comúnmente porque es intuitiva y sensible a errores grandes.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}$$

[15]:
```
# Calcular el error residual
exploratory_data["error_father"] = (exploratory_data["childHeight"] -␣
 ↪exploratory_data["childHeight_father"])
exploratory_data["error_father_gender"] = (exploratory_data["childHeight"] -␣
 ↪exploratory_data["childHeight_father_gender"])

residual_error = exploratory_data[["error_father", "error_father_gender"]]
```

```
errors = pd.DataFrame()

# Calcular el error absoluto medio
errors["MAE"] = np.abs(residual_error).mean()

# Calcular el error cuadrático medio
errors["MSE"] = np.pow(residual_error, 2).mean()

# Calcular la raíz del error cuadrático medio
errors["RMSE"] = np.sqrt(errors["MSE"])

print(errors)
```

```
                         MAE        MSE      RMSE
error_father        7.345475  76.719673  8.758977
error_father_gender 4.564529  33.499555  5.787880
```

En el objeto `OLS` de `statsmodels` podemos obtener el mse directamente a traves del atributo `mse_resid`, de la siguiente manera:

[16]:
```
print(f"Father model: {model.mse_resid}")
print(f"Father+Gender model: {model_gender.mse_resid}")
```

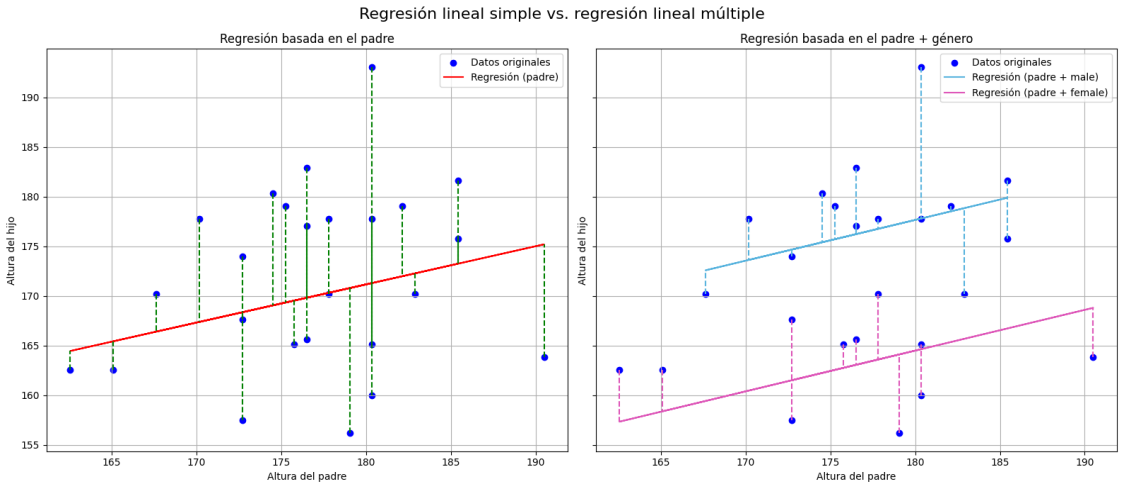
```
Father model: 76.88430733132492
Father+Gender model: 33.607501761881565
```

Como se puede observar, los resultados son prácticamente los mismos que los obtenidos previamente, con pequeñas diferencias debido a la precisión del cálculo computacional.

4.2 Gráfica de errores residuales

Los errores residuales representan la diferencia entre los valores observados y los valores predichos por nuestra línea de regresión. Es decir, miden la distancia entre los puntos originales y la línea ajustada. Estos errores nos ayudan a evaluar la precisión del modelo y a identificar patrones no capturados por la regresión.

[17]:
```
from scripts.not_shown_cells import plot_regression_error
plot_regression_error(exploratory_data)
```



Se puede observar en las líneas punteadas la distancia entre los valores reales y la línea de regresión. A la izquierda, tenemos el modelo de regresión que solo considera la altura del padre, mientras que a la derecha, el modelo incluye tanto la altura del padre como el género. Al ser el género una variable categórica, la línea de regresión se ajusta y se divide según las distintas categorías. Tal como se observó en los cálculos previos, aquí tenemos una representación visual que nos permite verificar la diferencia entre los valores reales y nuestras predicciones. Como se puede apreciar, el modelo que incluye el género se ajusta mejor a los datos reales.

5 Limitaciones de la regresion lineal

Al utilizar la regresión lineal, es importante tener en cuenta varias limitaciones inherentes a este modelo. Aunque es una herramienta poderosa y fácil de interpretar, presenta restricciones que pueden afectar su desempeño en ciertos casos. A continuación, se destacan algunas de las principales limitaciones:

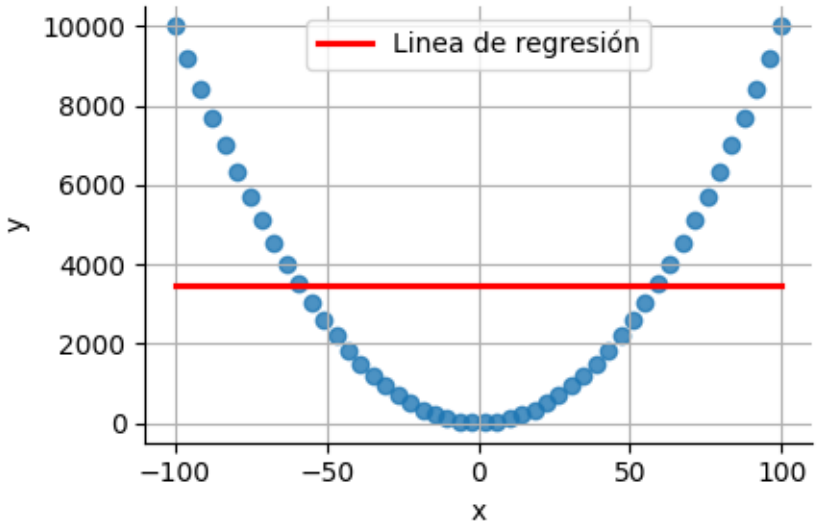
5.1 Suposición de linealidad

La regresión lineal asume que la relación entre las variables independientes y la variable dependiente es lineal. Si la relación es no lineal, el modelo puede no capturar adecuadamente los patrones en los datos.

[18]:
```
x = np.linspace(-100, 100, 50)
y = x ** 2
squared_df = pd.DataFrame({'x': x, 'y': y})

sns.lmplot(data=squared_df,
           x="x",
           y="y",
           line_kws={'color' : 'red', 'label' : 'Linea de regresión'},
           height=3, aspect=1.5,
           ci=None)
```

```
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



Por ejemplo, si tuviéramos variables que tienen una relación cuadrática entre sí, como en el caso de la función $y = x^2$, una regresión lineal no podría capturar adecuadamente esta relación. La regresión lineal asume que la relación entre las variables es lineal, por lo que no sería capaz de diferenciar ni ajustar correctamente la curvatura de los datos. Esto podría llevar a un ajuste deficiente y a predicciones inexactas cuando la verdadera relación entre las variables sea no lineal.

5.2 Sensibilidad a los valores atípicos

Los modelos de regresión lineal son muy sensibles a los valores atípicos, los cuales pueden tener un impacto significativo en la estimación de los coeficientes y, por lo tanto, en la precisión de las predicciones.

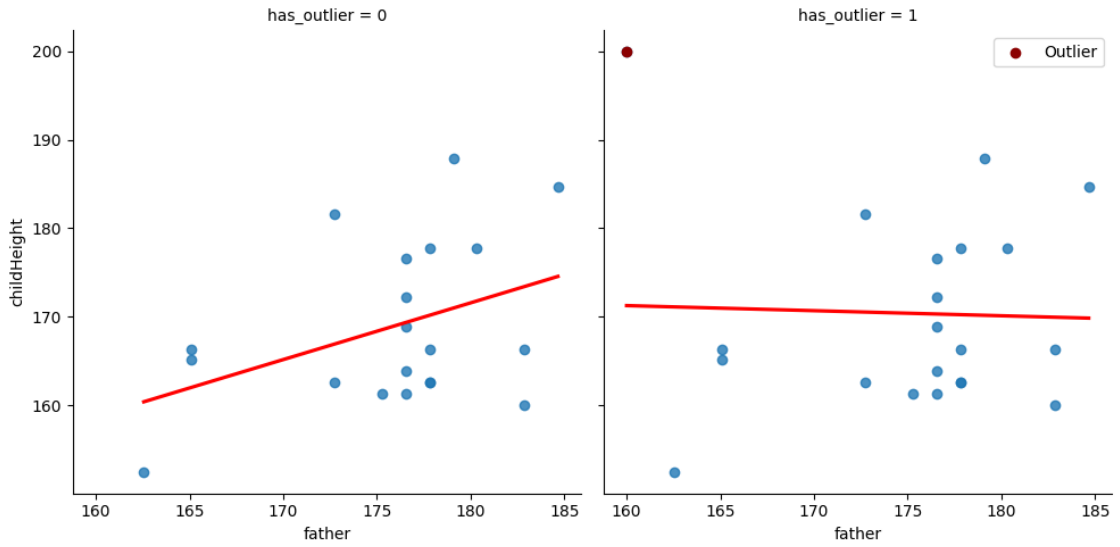
[35]:
```
from scripts.not_shown_cells import get_outlier_df

outlier_df = get_outlier_df(exploratory_data)
outlier_df.loc[len(outlier_df)] = [160,200,1]

sns.lmplot(x="father",
           y="childHeight",
           data=outlier_df,
           ci=None,
           line_kws={'color' : 'red'},
           col="has_outlier")

plt.scatter(160, 200, color='darkred', label='Outlier')
```

```
plt.legend()
plt.show()
```



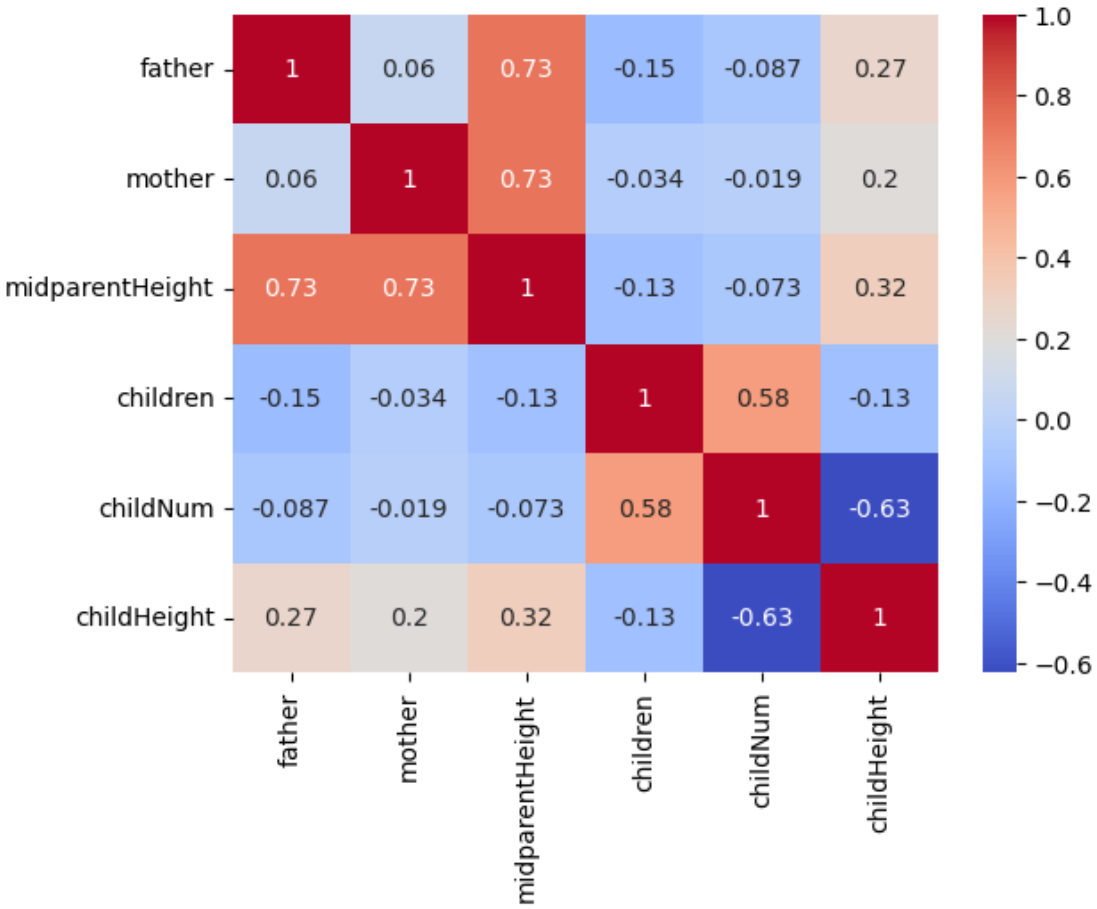
En este ejemplo, podemos observar cómo la inclusión de un único dato en el que el padre es significativamente más bajo que su hijo afecta drásticamente nuestra línea de regresión. Este valor atípico provoca que la pendiente de la línea cambie incluso a una dirección negativa, ilustrando cómo los valores extremos pueden influir de manera desproporcionada en los coeficientes del modelo y en la interpretación de la relación entre las variables.

5.3 Multicolinealidad

Si las variables independientes están fuertemente correlacionadas entre sí, el modelo puede no ser capaz de distinguir de manera efectiva el impacto de cada variable en la variable dependiente, lo que puede llevar a coeficientes inestables.

[29]:
```
numeric_heights = heights.select_dtypes(include=[np.number])

sns.heatmap(numeric_heights.corr(), annot=True, cmap='coolwarm')
plt.show()
```



Este mapa de calor muestra la correlación entre las variables numéricas del conjunto de datos. Podemos observar que la variable `midparentHeight` está fuertemente relacionada con las alturas del padre y la madre, lo cual es esperado, ya que representa el promedio de estos valores. Por este motivo, incluir estas variables adicionales no aportaría información nueva a nuestro modelo. Es importante destacar que, aunque este caso es evidente, podrían presentarse situaciones menos obvias en otros conjuntos de datos. Por ello, evaluar la colinealidad entre las variables es un paso crucial para garantizar la validez y el desempeño de nuestro modelo.

6 Conclusion