

linearRegression

January 14, 2025

1 Introduccion a la Regresion Lineal

1.1 ¿Qué es la regresión lineal?

La regresión lineal es una técnica de análisis de datos que predice el valor de datos desconocidos mediante el uso de otro valor de datos relacionado y conocido. Modela matemáticamente la variable desconocida o dependiente y la variable conocida o independiente como una ecuación lineal. Por ejemplo, supongamos que tiene datos sobre sus gastos e ingresos del año pasado. Las técnicas de regresión lineal analizan estos datos y determinan que tus gastos son la mitad de tus ingresos. Luego calculan un gasto futuro desconocido al reducir a la mitad un ingreso conocido futuro.

1.2 ¿Por qué es importante la regresión lineal?

Los modelos de regresión lineal son relativamente simples y proporcionan una fórmula matemática fácil de interpretar para generar predicciones. La regresión lineal es una técnica estadística establecida y se aplica fácilmente al software y a la computación. Las empresas lo utilizan para convertir datos sin procesar de manera confiable y predecible en inteligencia empresarial y conocimiento práctico. Los científicos de muchos campos, incluidas la biología y las ciencias del comportamiento, ambientales y sociales, utilizan la regresión lineal para realizar análisis de datos preliminares y predecir tendencias futuras. Muchos métodos de ciencia de datos, como el machine learning y la inteligencia artificial, utilizan la regresión lineal para resolver problemas complejos.

1.3 ¿Cómo funciona la regresión lineal?

En esencia, una técnica de regresión lineal simple intenta trazar un gráfico lineal entre dos variables de datos, x e y . Como variable independiente, x se traza a lo largo del eje horizontal. Las variables independientes también se denominan variables explicativas o variables predictivas. La variable dependiente, y , se traza en el eje vertical. También puede hacer referencia a los valores y como variables de respuesta o variables pronosticadas.

2 Modelo de regresion lineal

2.1 Regresion lineal simple

En una regresión lineal, se trata de establecer una relación entre una variable independiente y su correspondiente variable dependiente. Esta relación se expresa como una línea recta. No es posible trazar una línea recta que pase por todos los puntos de un gráfico si estos se encuentran ordenados de manera caótica. Por lo tanto, sólo se determina la ubicación óptima de esta línea mediante

una regresión lineal. Algunos puntos seguirán distanciados de la recta, pero esta distancia debe ser mínima. El cálculo de la distancia mínima de la recta a cada punto se denomina función de pérdida.

La ecuación de una línea recta tiene la siguiente forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

Donde:

- Y es la variable independiente.
 - β_0 es el punto de intersección (El valor esperado cuando $x = 0$).
 - β_1 es la pendiente (El cambio de Y por cada unidad de cambio en x).
 - ϵ (epsilon) es la función de pérdida.
-

2.2 Regresion lineal multiple

La regresión lineal múltiple encuentra la relación entre dos o más variables independientes y su correspondiente variable dependiente.

La ecuación de regresión lineal múltiple tiene la siguiente forma:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1} \beta_i x_i + \epsilon_i$$

Donde:

- Y es la variable dependiente.
- x es una variable independiente.
- β son coeficientes.
- ϵ (epsilon) es la función de pérdida.

3 Implementacion en python

3.1 Librerías necesarias

Utilizaremos la función `ols` de la librería `statsmodels`. Aunque existen otras bibliotecas en Python que también ofrecen modelos de regresión lineal, como `scikit-learn`, hemos optado por `statsmodels` debido a su notación estadística y la mayor explicabilidad que brinda sobre los modelos. Además, `statsmodels` está diseñado para trabajar de manera eficiente con `pandas`, por lo que también importaremos esta librería.

```
[1]: from statsmodels.formula.api import ols
import pandas as pd
```

```
[2]: from data.handler import get_heights
```

```
heights = get_heights()
heights.info()
```

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
RangeIndex: 934 entries, 0 to 933
Data columns (total 7 columns):
#   Column                Non-Null Count  Dtype
---  -
0   father                934 non-null   float64
1   mother                934 non-null   float64
2   midparentHeight       934 non-null   float64
3   children              934 non-null   int64
4   childNum              934 non-null   int64
5   gender                934 non-null   object
6   childHeight           934 non-null   float64
dtypes: float64(4), int64(2), object(1)
memory usage: 51.2+ KB
```

3.2 Notación estadística

En los modelos que presentaremos, utilizaremos notación estadística, la cual es fundamental para comprender y expresar los conceptos detrás de la regresión lineal. Usaremos un ejemplo para comprender el uso de esta.

$$y \sim a + b$$

- y : Variable dependiente. Es la variable que queremos predecir o explicar con base en otras variables.
- “ \sim ” : Símbolo que indica una relación entre la variable dependiente (a la izquierda) y las variables independientes (a la derecha). En otras palabras, estamos diciendo que y depende de las variables a la derecha del \sim .
- a y b : Variables independientes, también conocidas como características o predictores. Son las variables que usamos para predecir y .
- $+$: Indica que las variables a y b se agregan al modelo de regresión como predictores separados.

En este caso estamos modelando la variable y como una función lineal de las variables a y b donde queremos entender cómo cambian los valores de y en función de los valores de a y b .

3.3 Modelo OLS

En Python, al usar el modelo de regresión lineal OLS (Ordinary Least Squares), empleamos la notación estadística, pero en lugar de variables abstractas, utilizamos los nombres de las columnas

del DataFrame. Esto permite que el modelo sea aplicado directamente a los datos que tenemos en forma de tablas (DataFrames).

```
[3]: # El dataframe heights fue importado previamente
model = ols('childHeight ~ father', data=heights)

# Ajustar modelo
model = model.fit()
```

3.4 Visualizacion

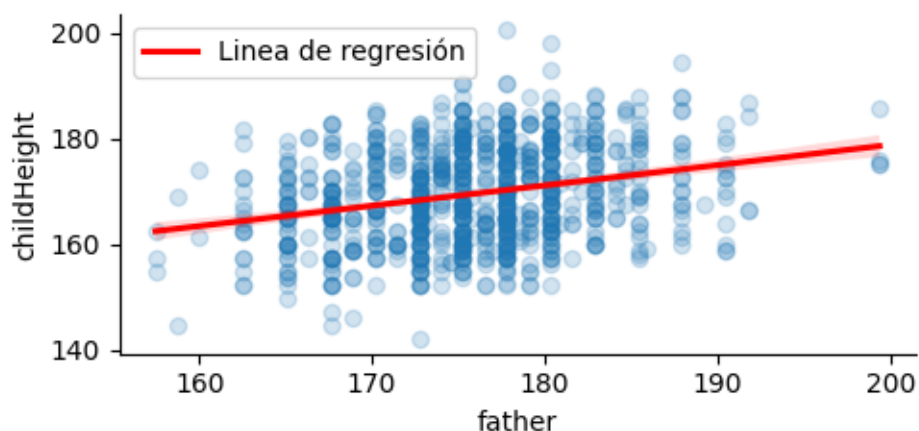
Para visualizar la regresión lineal, utilizamos la función `lmplot` de la librería `seaborn`, que es una herramienta poderosa para graficar relaciones lineales entre variables. Esta función no solo traza la línea de regresión, sino que también ofrece una visualización de los datos y puede incluir otras características útiles para el análisis.

```
[4]: import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

sns.lmplot(x='father', y='childHeight',
           data=heights,
           line_kws={'color' : 'red', 'label' : 'Linea de regresión'},
           scatter_kws={'alpha' : 0.2},
           height=2.5, aspect=2)

# Mostrar leyenda
plt.legend()

# Mostrar el gráfico
plt.show()
```



3.5 Valores atípicos

En el análisis de regresión, se pueden observar puntos que se encuentran considerablemente alejados de la línea de regresión. Estos puntos, conocidos como valores atípicos (outliers), son observaciones que se desvían notablemente de los valores esperados. Los outliers pueden surgir debido a factores externos, errores de medición, o simplemente por aleatoriedad. Su presencia puede influir de manera significativa en la forma y los parámetros de la línea de regresión, afectando la calidad del modelo.

3.5.1 Distancia de Cook

La Distancia de Cook es una métrica utilizada para identificar observaciones que tienen un impacto desproporcionado en el ajuste del modelo. Evalúa cuánto cambia el modelo global (coeficientes y predicciones) si una observación específica se elimina del análisis. Valores altos en la distancia de Cook indican puntos con una influencia considerable, que deben ser analizados cuidadosamente para determinar si deben ser tratados como outliers o si representan información válida.

Esta métrica puede ser obtenida de nuestro modelo OLS a través del método `get_influence()` con el cual obtenemos la clase `OLSInfluence` que contiene la distancia de Cook en su atributo `cooks_distance`.

```
[5]: import numpy as np

# Obtener distancia de Cook de OLSInfluence
cooks_distance = model.get_influence().cooks_distance[0]
threshold_cooks = 4 / len(heights) # Umbral para la distancia de Cook

# Obtener índices de los outliers
outliers = np.where(cooks_distance > threshold_cooks)[0]

# Mostrar los primeros 5 outliers
heights.iloc[outliers].head()
```

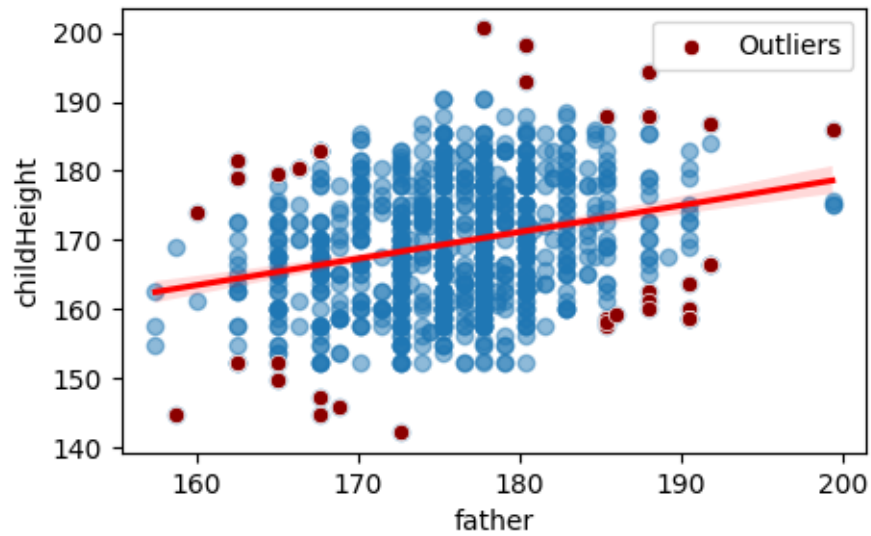
```
[5]:
```

| | father | mother | midparentHeight | children | childNum | gender | childHeight |
|----|--------|--------|-----------------|----------|----------|--------|-------------|
| 0 | 199.39 | 170.18 | 191.5922 | 4 | 1 | male | 185.928 |
| 4 | 191.77 | 168.91 | 187.0964 | 4 | 1 | male | 186.690 |
| 6 | 191.77 | 168.91 | 187.0964 | 4 | 3 | female | 166.370 |
| 7 | 191.77 | 168.91 | 187.0964 | 4 | 4 | female | 166.370 |
| 13 | 190.50 | 162.56 | 183.0324 | 5 | 4 | female | 163.830 |

Con estos cálculos, podemos identificar las entradas de nuestro conjunto de datos que tienen un valor alto en la distancia de Cook, lo que indica que son puntos atípicos con una influencia significativa en nuestro modelo.

3.5.2 Visualizacion de valores atipicos

```
[6]: plt.figure(figsize=(5,3))
sns.regplot(x='father', y='childHeight', data=heights, line_kws={'color' : 'red', 'alpha' : 0.5})
sns.scatterplot(x=heights.iloc[outliers]['father'], y=heights.iloc[outliers]['childHeight'], color='darkred', label='Outliers')
plt.show()
```



3.6 Parametros del modelo OLS

Para poder acceder a los parametros de nuestro modelo utilizamos el atributo `params`

```
[7]: model.params
```

```
[7]: Intercept    101.953809
father          0.384505
dtype: float64
```

3.7 Significado de los parametros

En este caso `Intercept` es el equivalente a β_0 y `father` el equivalente a β_1 , esto seria una regresion lineal simple donde podriamos explicarla de esta manera:

`altura_hijo = intercepto + pendiente * altura_padre`

```
[8]: # Obtener la intersección y la pendiente
intercept, slope = model.params

# Establecemos un valor ejemplo para la altura del padre
altura_padre = 177.8

# Calculamos la altura del hijo
altura_hijo = intercept + slope * altura_padre
altura_hijo
```

[8]: 170.31880344853033

Con el metodo `summary()` del modelo OLS obtenemos mucha informacion para pruebas estadisticas de la cual nos enfocaremos en una en particular, el coeficiente de determinacion r^2

```
[9]: model.summary()
```

```
[9]:
```

| | | | |
|--------------------------|------------------|----------------------------|----------|
| Dep. Variable: | childHeight | R-squared: | 0.071 |
| Model: | OLS | Adj. R-squared: | 0.070 |
| Method: | Least Squares | F-statistic: | 70.99 |
| Date: | Tue, 14 Jan 2025 | Prob (F-statistic): | 1.35e-16 |
| Time: | 21:54:42 | Log-Likelihood: | -3352.1 |
| No. Observations: | 934 | AIC: | 6708. |
| Df Residuals: | 932 | BIC: | 6718. |
| Df Model: | 1 | | |
| Covariance Type: | nonrobust | | |

| | coef | std err | t | P> t | [0.025 | 0.975] |
|------------------|----------|---------|--------|-------|--------|---------|
| Intercept | 101.9538 | 8.026 | 12.703 | 0.000 | 86.202 | 117.705 |
| father | 0.3845 | 0.046 | 8.425 | 0.000 | 0.295 | 0.474 |

| | | | |
|-----------------------|--------|--------------------------|----------|
| Omnibus: | 29.333 | Durbin-Watson: | 1.341 |
| Prob(Omnibus): | 0.000 | Jarque-Bera (JB): | 14.852 |
| Skew: | 0.081 | Prob(JB): | 0.000596 |
| Kurtosis: | 2.404 | Cond. No. | 4.92e+03 |

Notes:

- [1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
- [2] The condition number is large, 4.92e+03. This might indicate that there are strong multicollinearity or other numerical problems.

3.8 Coeficiente de determinacion

El coeficiente de determinacion comunmente denotado como r^2 es la varianza explicada por el modelo de regresión en relación con la variable dependiente.

- Un valor de $r^2 = 1$ indica que el modelo explica el 100% de la variabilidad de la variable dependiente
- Un valor de $r^2 = 0$ indica que el modelo no explica ninguna variabilidad de la variable dependiente

En nuestro modelo OLS este valor puede obtenerse a traves del atributo `rsquared`

```
[10]: print(model.rsquared)
```

```
0.07077650419213521
```

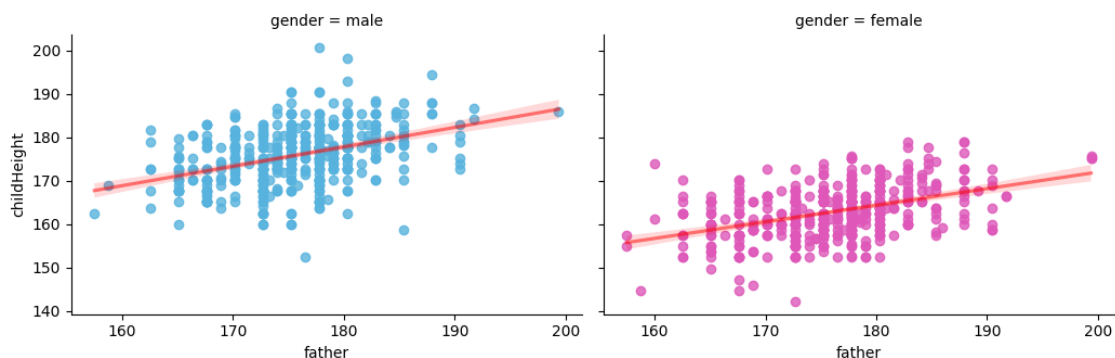
A como podemos ver, en este caso parece ser que la altura del padre explica tan solo un 7% de la varianza en la altura del hijo. Esto podría parecer sorprendente, dado que intuimos que la altura del padre podría ser un factor significativo para predecir la altura del hijo. Este bajo porcentaje de varianza explicada sugiere que hay otros factores no considerados en este modelo que influyen en la altura del hijo.

3.9 Modelo de regresion lineal multiple

Dado que en nuestro análisis inicial encontramos que la altura del padre explica tan solo un 7% de la varianza en la altura del hijo, decidimos explorar si incluir más variables en el modelo podría ayudarnos a mejorar el ajuste y explicar mejor esta relación.

El dataset de Galton incluye otras variables interesantes, como el genero del hijo. Esta variable podría darnos una perspectiva más completa al considerar la influencia del genero en la altura.

```
[ ]: sns.lmplot(x='father', y='childHeight', data=heights,
               palette=["#57b3de", "#de57b9"],
               hue="gender", col="gender",
               line_kws={'color':'red', 'alpha':0.5},
               aspect=1.5, height=3.5
               )
plt.show()
```




```
[12]: model_gender = ols('childHeight ~ father + gender + 0', data=heights).fit()
      print(model_gender.rsquared)
```

0.5942556553726279

Teniendo en cuenta el genero, nuestro modelo de regresion lineal explica un 60% de la varianza, lo cual es un gran avance con respecto a nuestro modelo anterior. Teniendo ambos modelos, podemos comenzar a realizar predicciones en base a estos.

3.10 Creando predicciones

Para realizar predicciones con el modelo OLS, necesitamos crear un DataFrame de `pandas` que contenga los valores de las variables utilizadas en el ajuste del modelo. A continuación, se presenta un ejemplo:

```
[13]: # Crear dataframe con las variables a utilizar
      exploratory_data = heights[["father", "gender", "childHeight"]].copy()

      # Crear predicciones para la altura del hijo con cada modelo
      exploratory_data['childHeight_father'] = model.predict(exploratory_data)
      exploratory_data['childHeight_father_gender'] = model_gender.
        ↪predict(exploratory_data)

      # Mostar las primeras filas
      exploratory_data.head()
```

```
[13]:
```

| | father | gender | childHeight | childHeight_father | childHeight_father_gender |
|---|--------|--------|-------------|--------------------|---------------------------|
| 0 | 199.39 | male | 185.928 | 178.620267 | 185.614246 |
| 1 | 199.39 | female | 175.768 | 178.620267 | 172.455897 |
| 2 | 199.39 | female | 175.260 | 178.620267 | 172.455897 |
| 3 | 199.39 | female | 175.260 | 178.620267 | 172.455897 |
| 4 | 191.77 | male | 186.690 | 175.690339 | 182.486947 |

En este caso, creamos una copia del DataFrame original y le agregamos las columnas con nuestras predicciones. Como podemos observar, las predicciones parecen acercarse al valor real de `childHeight`, pero ¿cómo podemos determinar cuán precisas son estas predicciones? Esto se evalúa utilizando las métricas de evaluación de modelos de regresión.

4 Evaluacion de modelo

La eficiencia de un modelo se mide a través de su precisión, es decir, la proporción de instancias que el modelo predice correctamente. La precisión es una métrica que se puede utilizar para comparar el rendimiento de diferentes modelos. En este caso al ser un modelo de regresion, existen diversas metricas bajo las cuales podemos evaluar un modelo.

4.1 Metricas de evaluacion

- **Error Absoluto Medio (MAE - Mean Absolute Error)**

Representa el promedio de las diferencias absolutas entre los valores reales y las predicciones . Es fácil de interpretar en términos de las unidades originales de la variable objetivo.

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$$

- **Error Cuadratico Medio (MSE - Mean Squared Error)**

Promedia el cuadrado de los errores. Penaliza más los errores grandes debido al uso del cuadrado, por lo que es útil si los errores grandes son especialmente indeseables.

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- **Raiz del Error Cuadratico Medio (RMSE - Root Mean Squared Error)**

Es la raíz cuadrada del MSE, lo que la devuelve a las unidades originales de la variable objetivo. Se usa comúnmente porque es intuitiva y sensible a errores grandes.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

```
[14]: # Calcular el error residual
exploratory_data["error_father"] = (exploratory_data["childHeight"] -
    ↪exploratory_data["childHeight_father"])
exploratory_data["error_father_gender"] = (exploratory_data["childHeight"] -
    ↪exploratory_data["childHeight_father_gender"])

residual_error = exploratory_data[["error_father", "error_father_gender"]]

errors = pd.DataFrame()

# Calcular el error absoluto medio
errors["MAE"] = np.abs(residual_error).mean()

# Calcular el error cuadrático medio
errors["MSE"] = np.pow(residual_error, 2).mean()

# Calcular la raíz del error cuadrático medio
errors["RMSE"] = np.sqrt(errors["MSE"])

print(errors)
```

| | MAE | MSE | RMSE |
|---------------------|----------|-----------|----------|
| error_father | 7.345475 | 76.719673 | 8.758977 |
| error_father_gender | 4.564529 | 33.499555 | 5.787880 |

En el objeto OLS de `statsmodels` podemos obtener el mse directamente a través del atributo `mse_resid`, de la siguiente manera:

```
[15]: print(f"Father model: {model.mse_resid}")
      print(f"Father+Gender model: {model_gender.mse_resid}")
```

Father model: 76.88430733132492

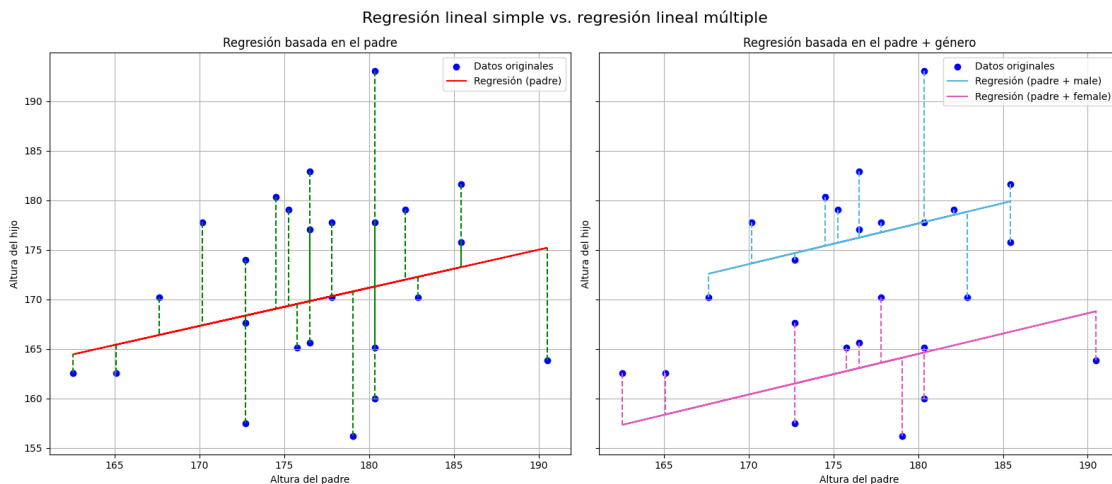
Father+Gender model: 33.607501761881565

Como se puede observar, los resultados son prácticamente los mismos que los obtenidos previamente, con pequeñas diferencias debido a la precisión del cálculo computacional.

4.2 Gráfica de errores residuales

Los errores residuales representan la diferencia entre los valores observados y los valores predichos por nuestra línea de regresión. Es decir, miden la distancia entre los puntos originales y la línea ajustada. Estos errores nos ayudan a evaluar la precisión del modelo y a identificar patrones no capturados por la regresión.

```
[16]: from scripts.not_shown_cells import plot_regression_error
      plot_regression_error(exploratory_data)
```



Se puede observar en las líneas punteadas la distancia entre los valores reales y la línea de regresión. A la izquierda, tenemos el modelo de regresión que solo considera la altura del padre, mientras que a la derecha, el modelo incluye tanto la altura del padre como el género. Al ser el género una variable categórica, la línea de regresión se ajusta y se divide según las distintas categorías. Tal como se observó en los cálculos previos, aquí tenemos una representación visual que nos permite verificar la diferencia entre los valores reales y nuestras predicciones. Como se puede apreciar, el modelo que incluye el género se ajusta mejor a los datos reales.

5 Limitaciones de la regresión lineal

Al utilizar la regresión lineal, es importante tener en cuenta varias limitaciones inherentes a este modelo. Aunque es una herramienta poderosa y fácil de interpretar, presenta restricciones que pueden afectar su desempeño en ciertos casos. A continuación, se destacan algunas de las principales limitaciones:

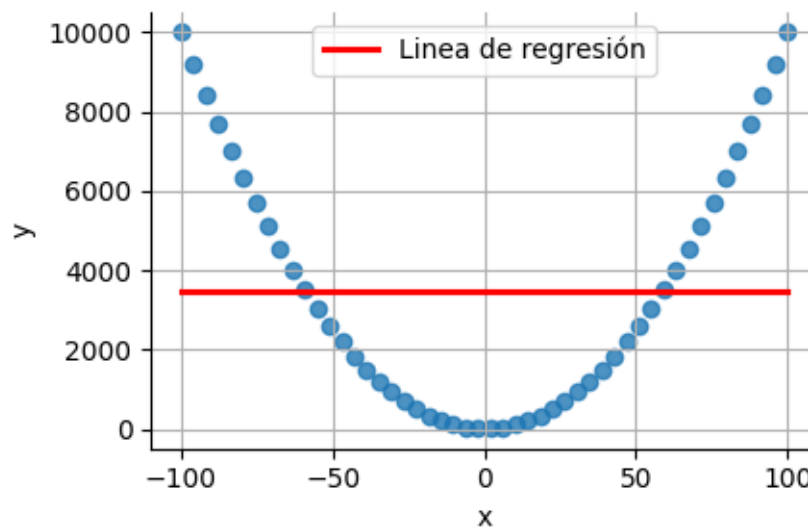
5.1 Suposición de linealidad

La regresión lineal asume que la relación entre las variables independientes y la variable dependiente es lineal. Si la relación es no lineal, el modelo puede no capturar adecuadamente los patrones en los datos.

```
[17]: x = np.linspace(-100, 100, 50)
y = x ** 2
squared_df = pd.DataFrame({'x': x, 'y': y})

sns.lmplot(data=squared_df,
           x="x",
           y="y",
           line_kws={'color': 'red', 'label': 'Linea de regresión'},
           height=3, aspect=1.5,
           ci=None)

plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



Por ejemplo, si tuviéramos variables que tienen una relación cuadrática entre sí, como en el caso de la función $y = x^2$, una regresión lineal no podría capturar adecuadamente esta relación. La regresión lineal asume que la relación entre las variables es lineal, por lo que no sería capaz de

diferenciar ni ajustar correctamente la curvatura de los datos. Esto podría llevar a un ajuste deficiente y a predicciones inexactas cuando la verdadera relación entre las variables sea no lineal.

5.2 Sensibilidad a los valores atípicos

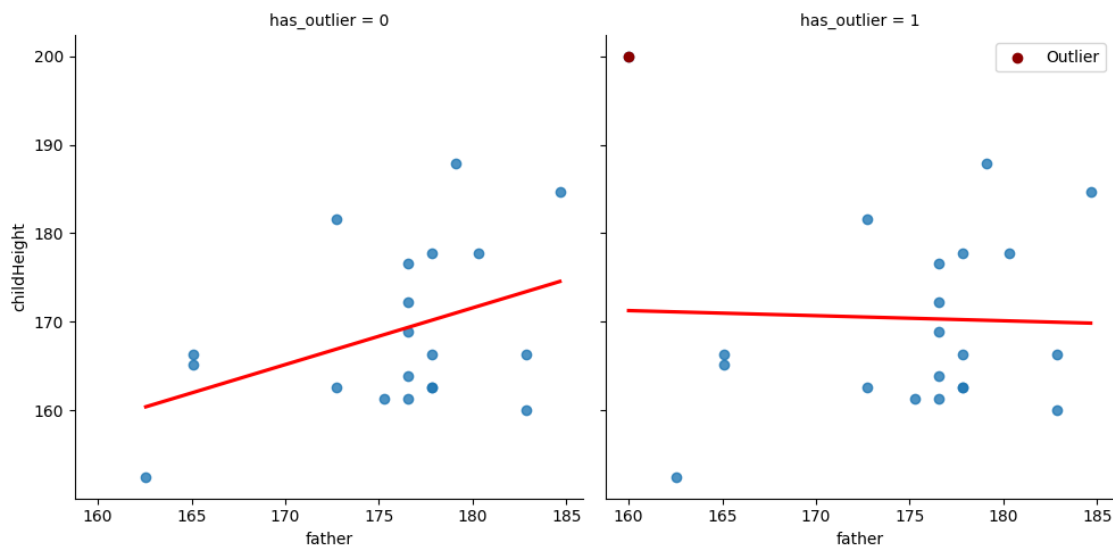
Los modelos de regresión lineal son muy sensibles a los valores atípicos, los cuales pueden tener un impacto significativo en la estimación de los coeficientes y, por lo tanto, en la precisión de las predicciones.

```
[18]: from scripts.not_shown_cells import get_outlier_df

outlier_df = get_outlier_df(exploratory_data)
outlier_df.loc[len(outlier_df)] = [160,200,1]

sns.lmplot(x="father",
            y="childHeight",
            data=outlier_df,
            ci=None,
            line_kws={'color' : 'red'},
            col="has_outlier")

plt.scatter(160, 200, color='darkred', label='Outlier')
plt.legend()
plt.show()
```



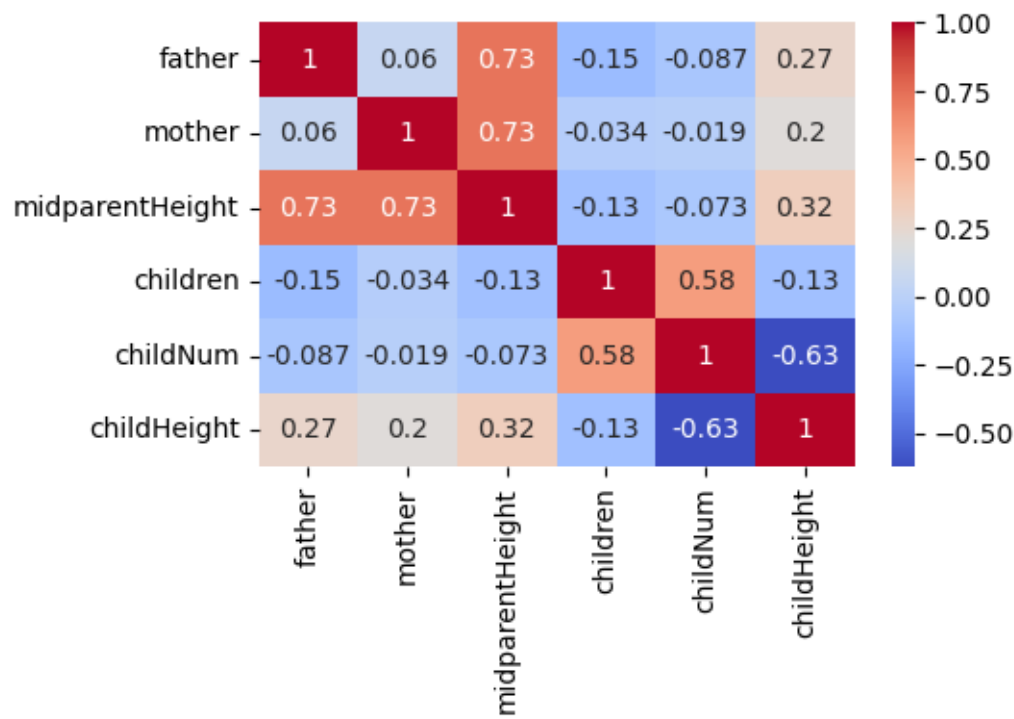
En este ejemplo, podemos observar cómo la inclusión de un único dato en el que el padre es significativamente más bajo que su hijo afecta drásticamente nuestra línea de regresión. Este valor atípico provoca que la pendiente de la línea cambie incluso a una dirección negativa, ilustrando cómo los valores extremos pueden influir de manera desproporcionada en los coeficientes del modelo y en la interpretación de la relación entre las variables.

5.3 Multicolinealidad

Si las variables independientes están fuertemente correlacionadas entre sí, el modelo puede no ser capaz de distinguir de manera efectiva el impacto de cada variable en la variable dependiente, lo que puede llevar a coeficientes inestables.

```
[19]: numeric_heights = heights.select_dtypes(include=[np.number])

plt.figure(figsize=(5,3))
sns.heatmap(numeric_heights.corr(), annot=True, cmap='coolwarm')
plt.show()
```



Este mapa de calor muestra la correlación entre las variables numéricas del conjunto de datos. Podemos observar que la variable `midparentHeight` está fuertemente relacionada con las alturas del padre y la madre, lo cual es esperado, ya que representa el promedio de estos valores. Por este motivo, incluir estas variables adicionales no aportaría información nueva a nuestro modelo. Es importante destacar que, aunque este caso es evidente, podrían presentarse situaciones menos obvias en otros conjuntos de datos. Por ello, evaluar la colinealidad entre las variables es un paso crucial para garantizar la validez y el desempeño de nuestro modelo.

6 Conclusion

La regresión lineal es una herramienta fundamental en análisis de datos y machine learning, ideal para modelar relaciones lineales entre variables y obtener interpretaciones claras de los resultados. A través de este documento, exploramos su concepto, implementación en Python utilizando el modelo OLS, métricas para evaluar su desempeño, y limitaciones que deben considerarse para garantizar un análisis robusto y confiable.

Con las bases aquí presentadas, los estudiantes podrán implementar modelos de regresión lineal de manera eficiente, interpretar sus resultados y tomar decisiones informadas sobre su uso. Este conocimiento servirá como punto de partida para profundizar en modelos más avanzados y técnicas estadísticas que respondan a problemas complejos en ciencia de datos y programación.