Vektorová algebra

Orientovaná úsečka:

- = úsečka, u níž rozlišujeme počáteční a koncový bod; znázorňujeme ji šipkou směřující ke koncovému bodu

Př. 1: Spíše než příklad je to otázka. Liší se velikost orientované úsečky od běžné úsečky?

Vektor:

- = množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a směr; v širším obzoru je vektorem vše, co splňuje vlastnosti vektoru
- vektory značíme obvykle $\vec{u}$
- vektor se skládá z jednotlivých složek, dvourozměrné nebo trojrozměrné vektory můžeme zapsat s jejich pomocí jako:

$$\vec{u} = (u_1; u_2) \qquad nebo \qquad \vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$$

- pro složky vektoru $\vec{u}$ zadaného body A a B platí, že jednotlivé složky vektoru získáme odečtením jednotlivých souřadnic těchto dvou bodů; důležité je, že odčítáme vždy souřadnice počátečního bodu od souřadnic koncového bodu:

$$u_1 = b_1 - a_1 \qquad\qquad u_2 = b_2 - a_2 \qquad\qquad (u_3 = b_3 - a_3)$$

- třetí ze souřadnic je volitelná - záleží, jestli pracujeme ve dvou nebo ve třech rozměrech

Př. 2: Určete složky vektoru zadaného počátečním bodem $K[1; 5; 3]$ a koncovým bodem $L[7; 9; 2]$.

Velikost vektoru:

- velikost vektoru značíme $|\vec{u}|$
- získáme ji pomocí Pythagorovy věty ze složek onoho vektoru:

$$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \qquad nebo \qquad |\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

- **nulový vektor** = vektor s nulovou velikostí (nemá tak ani orientaci), označujeme jej $\vec{o}$
- **jednotkový vektor** = vektor jehož velikost je rovna 1

Př. 3: Je dán vektor $\vec{u} = (2; 3; 6)$. Určete velikost tohoto vektoru.

Součet vektorů:

- probíhá poměrně přímočaře, sčítáme jednotlivé složky vektoru
- má typické vlastnosti, které bychom od součtu čekali (komutativní, asociativní, ...)
- pro součet vektorů u a v platí:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2) \qquad nebo \qquad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$$

- kromě výpočtu lze vektory sčítat také graficky (jeden z vektorů přesuneme tak, aby jeho počáteční bod ležel na koncovém bodu druhého z vektorů; výsledkem je pak vektor směřující z úplného počátku do koncového bodu přesunutého vektoru)
- **opačný vektor** = vektor, který pokud sečteme s vektorem původním, dostaneme $\vec{o}$; opačný vektor značíme znaménkem minus - např. $-\vec{u}$

Př. 4: Sečtěte početně i graficky vektory $\vec{u} = (2;3)$ a $\vec{v} = (6;4)$. Výsledky porovnejte.

Rozdíl vektorů:

- takřka totožný se součtem, místo sčítání pouze odčítáme
- pro součet vektorů u a v platí:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2) \qquad nebo \qquad \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$$

- odčítat lze také graficky - buď k odčítanému vektoru vytvoříme vektor opačný a poté graficky sčítáme, nebo oba vektory zakreslíme se stejným počátečním bodem a výsledným vektorem je pak spojnice obou koncových vektorů (směřována od vektoru odčítaného)

Př. 5: Odečtěte početně i graficky (oběma způsoby) vektor $\vec{u} = (2;3)$ od vektoru $\vec{v} = (6;4)$. Výsledky porovnejte.

Násobení vektoru reálným číslem:

- pokud násobím vektor reálným číslem, násobím v podstatě každou z jeho složek tímto číslem; platí tedy:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2) \qquad nebo \qquad k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2; k \cdot u_3)$$

- pokud je k záporné, dochází u vektoru k změně směru na směr opačný oproti původnímu
- násobení vektorů má vlastnosti typické pro násobení (asociativní, distributivní, ...)

Př. 6: Kolikrát se zvětší velikost vektoru $\vec{u} = (-6;8)$, pokud jej vynásobíme číslem minus tři? Jak se změní jeho směr?

Lineární kombinace vektorů:

- vektor lze také vyjádřit jako tzv. lineární kombinaci dvou jiných vektorů (tyto vektory však nesmí být rovnoběžné):

$$\vec{x} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \qquad nebo \qquad \vec{x} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$

- význam tohoto postupu je však přesně opačný - mohu mít dva oblíbené vektory, pomocí nichž pak vyjádřím jakýkoliv jiný vektor
- toto funguje i v prostoru, musím však mít tři oblíbené vektory

Př. 7. Mám vektory $\vec{u} = (2;3)$ a $\vec{v} = (-1;4)$. Jak bych pomocí nich vyjádřil vektor $\vec{w} = (10;4)$?

Skalární součin:

- vektory můžeme vzájemně násobit dvěma způsoby, tím prvním a jednodušším je skalární součin
- značíme ho tečkou jako běžné násobení; jeho výsledkem je **reálné číslo**

- vypočítáme jej:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \qquad nebo \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

- pokud jsou vektory na sebe kolmé, je skalární součin roven nule (v rovině snadno určíme k vektoru vektor kolmý, stačí nám vyměnit jeho složky a jednu z nich vynásobit -1)

Př. 8: Určete skalární součin vektoru $\vec{u} = (4; 3)$ a vektoru kolmého k vektoru $\vec{v} = (-1; 5)$.

Vektorový součin:

- druhý způsob násobení vektorů, je použitelný pouze v prostoru
- značíme ho křížkem; jeho výsledkem je **vektor** kolmý k oběma násobeným vektorům o velikosti odpovídající obsahu plochy rovnoběžníku vytyčeného těmito dvěmi vektory
- o souřadnicích tohoto výsledného vektoru, označme si jej $\vec{w}$, platí:

$$w_1 = u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \qquad w_2 = u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \qquad w_3 = u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1$$

- vektorový součin používáme zejména pro naleznutí normálového vektoru k rovině, jež je v analytické geometrii určena parametricky

Př. 9: Určete vektorový součin vektorů $\vec{u} = (1; 3; -1)$ a $\vec{v} = (2; 4; 5)$.

Odchylka vektorů:

- pokud máme dány dva vektory, můžeme určit jejich odchylku pomocí vztahu:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

- tento vztah vychází z kosinové věty a platí pro dva i pro tři rozměry (je však nutné použít odpovídající vzorec pro skalární součin i pro velikost vektoru)
- velikost odchylky náleží do intervalu $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$
- **rovnoběžné vektory** = jeden z vektorů je násobkem druhého (jejich odchylka je tedy 0° nebo 180°)

Př. 10: Určete odchylku vektorů $\vec{u} = (4; 3)$ a $\vec{v} = (7; -1)$.

Obsah trojúhelníku:

- pokud máme vypočítat obsah trojúhelníku, jehož dvě strany jsou tvořeny vektory, můžeme použít vztah:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$$

- jedná se vlastně o analogii typického vztahu z trigonometrie

Př. 11: Jsou dány body $A[1; 2]$, $B[4; -3]$ a $C[9; 0]$, které vytvářejí trojúhelník. Vypočítejte obsah tohoto trojúhelníku.