



VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL



NETWERKEN EN FILTERS

Filtersynthese

Jordan Van den Eeckhoudt en Vojtech De Coninck

21 mei 2025

IR - Elektronica en informatietechnologie

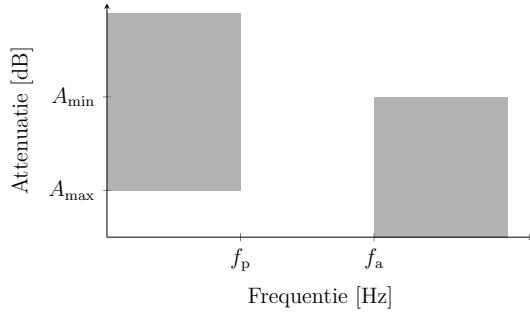
Inhoudsopgave

1 Actief Filter	2
1.1 Opgave	2
1.2 Bepalen van de transferfunctie	2
1.3 Sallen-Key sectie	4
1.4 Gevoeligheidsstudie	5
1.5 Bepalen van de componenten	5
1.6 Simuleren van de schakeling	7
1.7 Meting en resultaten	9
1.8 Besluit	10
2 Passief Filter	11
2.1 Opgave	11
2.2 Werkwijze	11
2.2.1 Symmetrievoorwaarde	12
2.2.2 Filterparameters	12
2.2.3 Transferfunctie laagdoorlaat equivalent	13
2.2.4 Transformatie Banddoorlaat	14
2.3 Predistortie	15
2.4 Opstellen Z-parameters	18
2.5 Cauersynthese	20
2.6 Correctie Z_{12}	23
2.7 Simuleren van de schakeling	24
2.8 Besluit	25
2.9 Bronnen	25

1 Actief Filter

1.1 Opgave

In deze opdracht ontwerpen we een actief laagdoorlaatfilter met behulp van de Butterworth-benadering en Sallen-Key-secties.



Figuur 1.1: Gabarit van de opgave

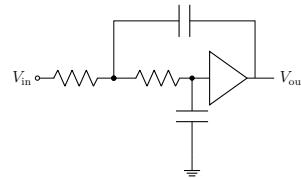
De filter moet voldoen aan de volgende specificaties:

$$A_{\min} = 40.00 \text{ dB} \implies A_s = -40.00 \text{ dB}$$

$$A_{\max} = 0.80 \text{ dB} \implies A_d = -0.80 \text{ dB}$$

$$f_p = 3300 \text{ Hz}$$

$$f_a = 8700 \text{ Hz}$$



Figuur 1.2: Sallen-Key Sectie

1.2 Bepalen van de transferfunctie

Voor de berekening van de filterparameters maken we gebruik van de volgende formules:

- De selectiviteit k :

$$k = \frac{f_p}{f_a} = \frac{3300}{8700} = 0,3793 \quad (1.1)$$

- De **orde** n :

$$n = \frac{\log_{10} \left(\frac{\sqrt{10^{-\frac{A_s}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{-\frac{A_d}{10}} - 1}} \right)}{\log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)} = \frac{\log_{10} \left(\frac{\sqrt{10^4 - 1}}{\sqrt{10^{0,08} - 1}} \right)}{\log_{10} \left(\frac{1}{0,3793} \right)} = 5,5748 \quad (1.2)$$

De berekende orde is geen geheel getal en wordt daarom naar boven afgerond. Dit resulteert in een laagdoorlaatfilter van orde 6.

- De **rimpelfactor** ε :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{-\frac{A_d}{10}} - 1} = \sqrt{10^{0,08} - 1} = 0,4497 \quad (1.3)$$

De transferfunctie $T(p)$, met de bijhorende polen, wordt weergegeven in onderstaande formule.

$$T(p) = \frac{K}{\prod_{m=0}^{n-1} (p - p_m)} \quad \text{met} \quad p_m = \frac{j\omega_d}{\varepsilon^{1/n}} e^{\frac{(2m+1)\pi}{2n} \cdot j} \quad (1.4)$$

Dit geeft 3 complex toegevoegde poolparen, allemaal op eenzelfde cirkel in het complexe vlak, wat correct is voor een Butterworth-benadering.

Tabel 1.1: Overzicht van de gesynthetiseerde polen (Butterworth, $n = 6$)

Pool	Waarde
p_1	$-6,131 \times 10^3 + 2,288 \times 10^4 i$
p_6	$-6,131 \times 10^3 - 2,288 \times 10^4 i$
p_2	$-1,675 \times 10^4 + 1,675 \times 10^4 i$
p_5	$-1,675 \times 10^4 - 1,675 \times 10^4 i$
p_3	$-2,288 \times 10^4 + 6,131 \times 10^3 i$
p_4	$-2,288 \times 10^4 - 6,131 \times 10^3 i$

Met deze gegevens kan de overblijvende parameter, K , worden berekend:

$$K = \prod_{m=0}^{n-1} (-p_m) = 1.767 \times 10^{26} \quad (1.5)$$

Op basis van de waarde van K en de polen, volgt uit eq (1.4) de algemene transferfunctie van de filter:

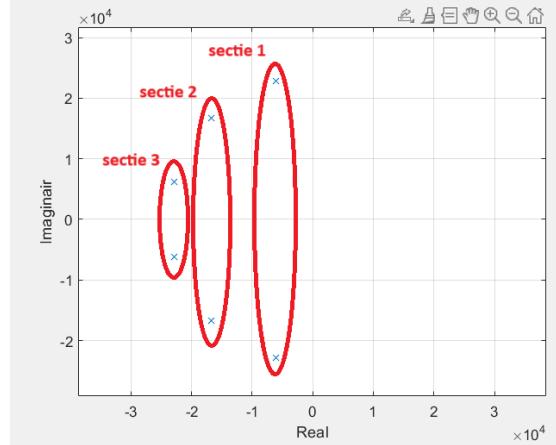
$$T(p) = \frac{1.767 \cdot 10^{26}}{p^6 + 9.1525 \cdot 10^9 p^5 + 4.1884 \cdot 10^{14} p^4 + 1.2151 \cdot 10^{14} p^3 + 2.3502 \cdot 10^{18} p^2 + 2.8819 \cdot 10^{22} p + 1.767 \cdot 10^{26}} \quad (1.6)$$

De filter zal bestaan uit 3 tweede orde Sallen-Key secties, één sectie per (geconjugeerd) poolpaar. Elke sectie heeft een kwaliteitsfactor Q en een resonantiefrequente ω_0 , deze worden bepaald door

respectievelijk (1.7) en (1.8). Deze zullen cruciaal zijn voor het kiezen van de correcte capaciteits- en weerstandswaarden.

$$Q = -\frac{|p_m|}{2Re(p_m)} \quad (1.7)$$

$$\omega_0 = |p_m| \quad (1.8)$$



Figuur 1.3: polen

	sectie 1	sectie 2	sectie 3
Q	1,9319	0,7071	0,5176
ω_0 [rad/s]	$2.3688 \cdot 10^4$	$2.3688 \cdot 10^4$	$2.3688 \cdot 10^4$

Tabel 1.2: Karakteristieken per filtersectie

1.3 Sallen-Key sectie

De transferfunctie voor een 2de orde Sallen-Key sectie wordt gegeven door:

$$T(p) = \frac{K}{R_1 C_1 R_2 C_2 p^2 + [(R_1 + R_2)C_2 + R_1 C_1(1 - K)]p + 1} = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q} \frac{p}{\omega_0} + 1}$$

Vergelijken van LL en RL geeft

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} \quad (1.9)$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}}{(R_1 + R_2)C_2 + R_1 C_1(1 - K)} \quad (1.10)$$

$$T(0) = K \quad (1.11)$$

Hier hebben we 3 vergelijkingen met 5 onbekenden: R_1 , R_2 , C_1 , C_2 en K . Dit betekent dat we over twee vrijheidsgraden beschikken en (strategisch) twee componenten vrij kunnen kiezen.

1.4 Gevoelighedsstudie

Aangezien de transferfunctie afhankelijk is van de kwaliteitsfactor Q en de resonantiefrequentie ω_0 , die op hun beurt afhankelijk zijn van de gekozen weerstanden en capaciteiten, is het belangrijk om de invloed van componentvariaties te bestuderen. Idealiter zouden alle componenten exact overeenkomen met hun berekende waarden, maar in de praktijk treden er altijd kleine variaties op. De gevoelighedsstudie toont aan hoe sterk de transferfunctie T(p) beïnvloed wordt door kleine variaties in elke component. De gevoeligheid van T(p) ten opzichte van een component λ , met $\lambda = R_1, R_2, C_1, C_2$ en K , wordt gegeven door:

$$S_{T(p)}^\lambda = S_{T(p)}^Q S_Q^\lambda + S_{T(p)}^{\omega_0} S_{\omega_0}^\lambda \quad (1.12)$$

$S_{T(p)}^Q$ en $S_{T(p)}^{\omega_0}$ zijn onafhankelijk van de schakeling, terwijl S_Q^λ en $S_{\omega_0}^\lambda$ rechtstreeks bepaald worden door de schakeling. De algemene formule voor het berekenen van deze gevoeligheden wordt gegeven door:

$$S_\beta^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \quad (1.13)$$

De berekende gevoeligheden S_Q^λ en $S_{\omega_0}^\lambda$, met $\lambda = R_1, R_2, C_1, C_2$ en K zijn weergegeven in Tabel 1.3.

Tabel 1.3: Resultaten van de gevoeligheden

$S_{\omega_0}^{R_1}$	$S_{\omega_0}^{R_2}$	$S_{\omega_0}^{C_1}$	$S_{\omega_0}^{C_2}$	$S_{\omega_0}^K$	$S_Q^{R_1}$	$S_Q^{R_2}$	$S_Q^{C_1}$	$S_Q^{C_2}$	S_Q^K
-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	0	$0.5 - \frac{R_1}{R_1+R_2}$	$0.5 - \frac{R_2}{R_1+R_2}$	0.5	-0.5	$\frac{R_1 C_1 K}{(R_1+R_2) C_2 + R_1 C_1 (1-K)}$

De resultaten voor $S_{\omega_0}^\lambda$ werden overgenomen uit de cursus [2] (pg 57), terwijl de resultaten voor S_Q^λ werden berekend aan de hand van vergelijkingen (1.10) en (1.13). De gevoeligheid van Q ten opzichte van K is afhankelijk van de componenten. Er werd gekozen om voor elke sectie, een opamp als buffer te schakelen. Hieruit volgt dat $K = 1$, wat gunstig is, aangezien K zeer nauwkeurig moet zijn om de sectie correct te laten functioneren (zie cursus [2] voor verdere uitleg). In de praktijk zal de kwaliteitsfactor Q weinig last hebben van de opamp, aangezien buffers eenvoudig te realiseren zijn met hoge nauwkeurigheid. Uit Tabel 1.3 blijkt dat de meeste gevoeligheden onafhankelijk zijn van de componenten, behalve de gevoeligheid van Q ten opzichte van de weerstanden. Wiskundig gezien is het voordeleger om $R_1 = R_2$ te kiezen en zo de gevoeligheden te minimaliseren.

1.5 Bepalen van de componenten

Uit de gevoelighedsstudie blijkt dat R_1 en R_2 bij voorkeur even groot zijn. Indien voor deze aanpak gekozen wordt, liggen de waarden van C_1 en C_2 vast. Dit is praktisch onhandig, aangezien er een beperkt aantal condensatoren ter beschikking zijn in het labo. Er wordt voor een andere aanpak geopteerd; Als eerste wordt er de meest geschikte combinatie voor C_1 en C_2 gekozen, vervolgens worden de weerstanden berekend. Vertrekkend van de uitdrukkingen voor de resonantiefrequentie (1.9) en de kwaliteitsfactor (1.10), met $K=1$, kan er een belangrijke bestaansvoorwaarde worden afgeleid. Daarvoor worden beide vergelijkingen respectievelijk omgevormd naar R_1 en R_2 , waarna R_1 wordt gesubstitueerd in de tweede vergelijking. De volgende uitdrukking wordt bekomen:

$$R_1 = \frac{1}{\omega_0^2 C_1 C_2 R_2} \quad (1.14)$$

$$R_2 = \frac{1}{\omega_0 Q C_2} - R_1 = \frac{1}{\omega_0 Q C_2} - \frac{1}{\omega_0^2 C_1 C_2 R_2} \quad (1.15)$$

Alles naar één lid:

$$R_2^2 - \frac{R_2}{\omega_0 C_2 Q} + \frac{1}{\omega_0^2 C_1 C_2} = 0 \quad (1.16)$$

$$Q \omega_0^2 C_1 C_2 R_2^2 - \omega_0 C_1 R_2 + Q = 0. \quad (1.17)$$

Dit geeft een tweedegraadsvergelijking in R_2 . De uitdrukking voor R_2 wordt gevonden door (1.17) uit te werken:

$$R_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2 \frac{C_2}{C_1}}}{2Q\omega_0 C_2} \quad (1.18)$$

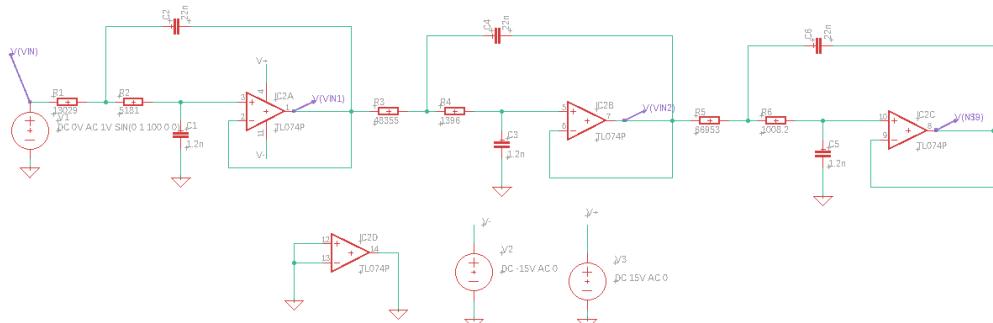
Indien we reële componenten wensen, moet er minstens 1 reële oplossing voor (1.18) bestaan en bijgevolg moet $1 - 4Q^2 \frac{C_2}{C_1} \geq 0$:

$$C_1 \geq 4Q^2 C_2, \implies \frac{C_2}{C_1} \leq \frac{1}{4Q^2}. \quad (1.19)$$

De sectie met de grootste Q-waarde heeft de strengste voorwaarde; C2 moet minstens een factor 15 groter zijn dan C1. Op basis van deze kennis worden voor C_1 en C_2 respectievelijk 22nF en 1.2nF gekozen. De parasitaire capaciteiten in de PCB liggen in de orde pF, bijgevolg is de relatieve fout op de capaciteitswaarden voldoende klein. Voor de andere twee secties worden dezelfde capaciteitswaarden gebruikt. Deze secties hebben een lagere kwaliteitsfactor dan sectie 1, dus een minder strenge voorwaarde dan sectie 1. Bijgevolg zullen ze, met dezelfde condensatoren, ook voldoen aan de bestaansvoorwaarde (1.19). Aan de hand van vergelijkingen (1.14), (1.18) en een Matlabscript worden alle weerstandswaarden berekend, weergegeven in Tabel 1.4 en gebruikt in het elektrisch schema van Figuur 1.4.

Tabel 1.4: Theoretische componentwaarden

secties	C_1 [nF]	C_2 [nF]	R_1 [kΩ]	R_2 [kΩ]
sectie 1	22	1.2	13029	5181
sectie 2	22	1.2	48355	1396
sectie 3	22	1.2	66953	1008.2



Figuur 1.4: Schema actief filter

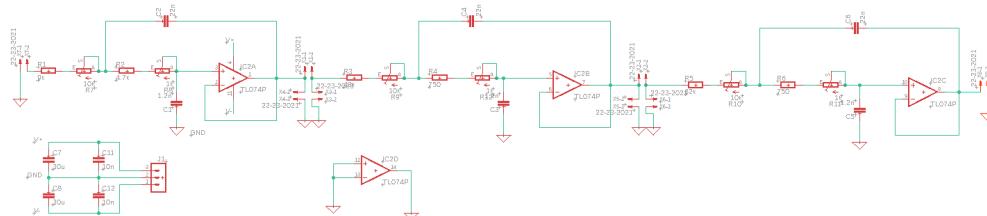
In theorie kunnen we kiezen om voor alle weerstanden enkel potentiometers te gebruiken. Dit laat toe om, na het solderen van de PCB, de volgorde van de secties om te draaien en het effect op een klein/groot ingangssignaal na te gaan. De potentiometers hebben in dat geval echter een lage instelprecisie, wat het praktisch onmogelijk maakt om alle weerstanden nauwkeurig in te stellen. Daarom wordt gekozen voor een combinatie van vaste weerstanden in serie met potentiometers. De potentiometers bieden ook het voordeel om de gebouwde filter (lichtjes) bij te stellen voor het gewenste filterrespons. Op basis van alle berekende parameters wordt uiteindelijk het elektrisch schema opgesteld (zie Figuur 1.5). Deze bevat de weerstanden en potentiometers uit Tabel 1.5. Hierin geven de waarden van de potentiometers het instelbereik aan. De bijhorende toleranties van de gebruikte componenten zijn terug te vinden in Tabel 1.6.

Tabel 1.5: Werkelijke componentwaarden

secties	R_1^{vast} [kΩ]	R_1^{pot} [kΩ]	R_2^{vast} [kΩ]	R_2^{pot} [kΩ]
sectie 1	11	5	3.6	5
sectie 2	47	2	0.750	1
sectie 3	62	10	0.750	1

Tabel 1.6: Toleranties componenten

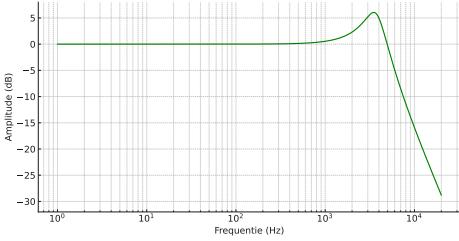
componenten	toleranties
C_1	$\pm 1\%$
C_2	$\pm 5\%$
R^{vast}	$\pm 1\%$
R^{pot}	$\pm 10\%$



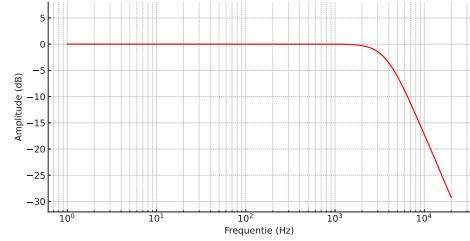
Figuur 1.5: Aangepast schema met potentiometers

1.6 Simuleren van de schakeling

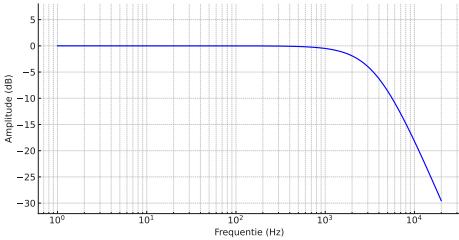
De frequentierespons van bovenstaand schema werd gesimuleerd in *Eagle*. Daarnaast werd ook de transferfunctie van elke sectie afzonderlijk gesimuleerd. Dit biedt inzicht in het effect van elke filtertrap, wat cruciaal is aangezien de secties worden gecascadeerd en volgorde van belang is (zie verder). Voor elke simulatie werd een AC-sweep uitgevoerd van 1 Hz tot 20 kHz.



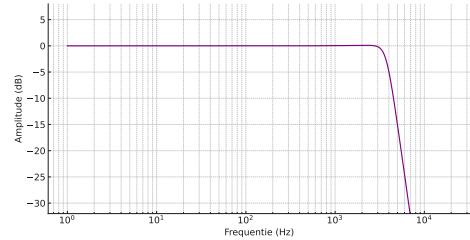
Figuur 1.6: Simulatie sectie 1: $T_1(p)$



Figuur 1.7: Simulatie sectie 2: $T_2(p)$



Figuur 1.8: Simulatie sectie 3: $T_3(p)$



Figuur 1.9: Gedrag van de volledige filter

De -3 dB punten voor de secties 1, 2 en 3 bevinden zich respectievelijk rond 5570 Hz, 3767 Hz en 2858 Hz. De totale frequentierespons van de filter, weergegeven in Figuur 1.9, voldoet aan de opgegeven specificaties uit de opgave. De samenwerking tussen de drie tweede-orde secties, die gezamenlijk de zesde-orde laagdoorlaatfilter vormen, kan worden geïnterpreteerd aan de hand van de analogie van professor Rolain; sectie 3 graaft een put in de frequentierespons, vervolgens vult sectie 2 de put op door de overgang geleidelijk te verzachten. Tot slot maakt sectie 1 de put recht, waardoor de totale respons een scherpe, maar stabiele overgangszone vormt.

Het is ook belangrijk om stil te staan bij de volgorde van cascadering. Bij een 'groot' ingangssignaal willen we liefst eerst het signaal verkleinen (sectie 3) en pas in de laatste stap het signaal door de sectie (sectie 1) met hoge opslingerings laten gaan. Dit voorkomt dat de filter het grote signaal, dicht bij de resonantiefrequentie van sectie 1, meer moet versterken dan de aangesloten voeding aankan. Omgekeerd, wensen we bij een 'klein' ingangssignaal dat deze niet eerst door sectie 3 gaat, hiermee zou het signaal mogelijk in de buurt komen van de grootteorde van de aanwezige ruis. Dit zou resulteren in een onaanvaardbare relatieve fout en bijgevolg slechtere filterwerking. Aangezien deze filter met kleine ingangssignalen zal werken, wordt de volgende volgorde gekozen: sectie Figuur 1.6 - sectie Figuur 1.7 - sectie Figuur 1.8.

De transferfuncties voor de drie secties werden vervolgens bepaald door de waarden uit tabel 1.2 in te vullen in vergelijking (1.9):

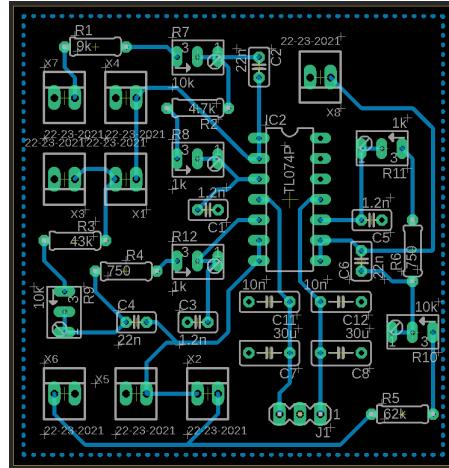
$$T_1(p) = \frac{1}{1.7821 \times 10^{-9}p^2 + 2.1852 \times 10^{-5}p + 1} \quad (1.20)$$

$$T_2(p) = \frac{1}{1.7821 \times 10^{-9}p^2 + 5.9701 \times 10^{-5}p + 1} \quad (1.21)$$

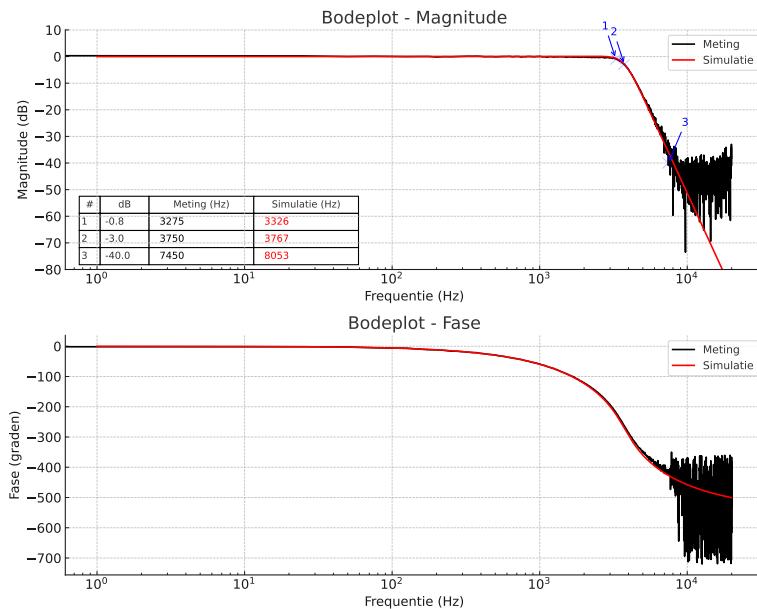
$$T_3(p) = \frac{1}{1.7821 \times 10^{-9}p^2 + 8.1553 \times 10^{-5}p + 1} \quad (1.22)$$

1.7 Meting en resultaten

De PCB (Figuur 1.10) werd uitgemeten met de *H3562A signal analyzer*. Hierbij werd een 100 mV_{pp} chirp signaal aangelegd van 1 Hz tot 20 kHz.



Figuur 1.10: PCB Layout



Figuur 1.11: Simulatie vs gemeten filter

Figuur 1.11 toont de gemeten filterrespons in het zwart en de verwachte respons uit de

simulatie in het rood. Drie referentiepunten, op respectievelijk -0.8 dB, -3.0 dB en -40.0 dB, worden onder de magnitudeplot weergegeven. Tot aan c.a. 8 kHz komt de gemeten grafiek overeen met de simulatie. Deze samenhang verdwijnt voorbij 8 kHz ten gevolge van ruis. De magnitude is bij deze frequenties immers al rond de -50 dB. Logischerwijs is ook de fasemetting ruizig vanaf 8kHz. Aangezien de filter 6 polen bevat, draait de fase in totaal -540 graden.

1.8 Besluit

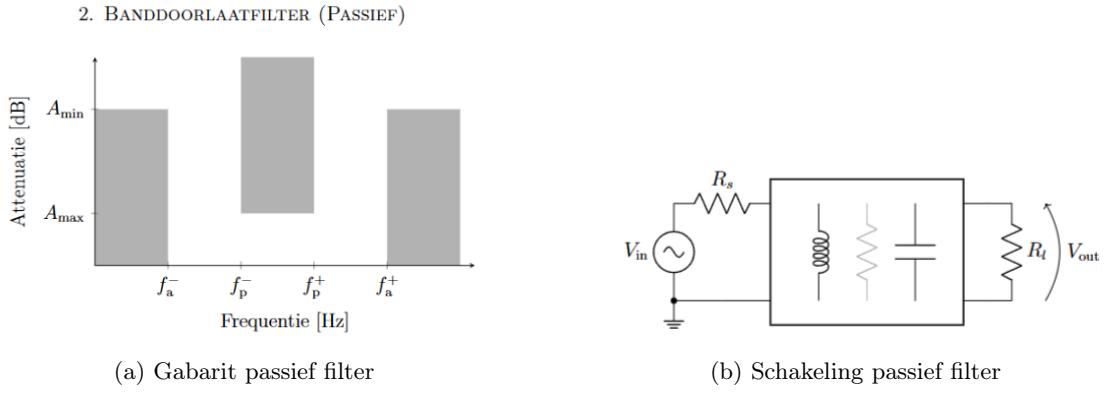
Op het eerste zicht is de zwarte curve een goede benadering van de rode curve, maar om na te gaan of de gebouwde filter voldoet aan de eisen, werd er gekeken naar de doorlaat- en stopband. Bij de doorlaatband van de gebouwde filter werd er op een frequentie van 3300 Hz een attenuatie van 0.95 dB gemeten. Volgens de opgave mag deze attenuatie maximaal 0.80 dB zijn. In de stopband bereikt de filter een attenuatie van -40.0 dB reeds bij 8250 Hz, in plaats van 8700 Hz. Dit wil zeggen dat er nog veel marge is voor f_a . Beide effecten kunnen verklaard worden door het feit dat de filter strenger is gebouwd; er werd immers bij het berekenen van de orde naar boven afgerond, dit resulteert in een extra pool en bijgevolg ook een strengere filter.

We mogen concluderen dat, ondanks het verschil van 0.15 dB bij f_a en een kortsluiting tijdens het solderen, de filter zeer goed ontworpen is en voldoet aan de gevraagde specificaties.

2 Passief Filter

2.1 Opgave

Voor deze opdracht ontwerpen we een passief banddoorlaatlaatfilter met behulp van de Chebyshev benadering.



Figuur 2.1: Opdracht passief filter

De filter moet voldoen aan de volgende specificaties:

$$\begin{aligned}
 A_{\min} &= 35.00 \text{ dB} \implies A_s = -35.00 \text{ dB} \\
 A_{\max} &= 0.25 \text{ dB} \implies A_d = -0.25 \text{ dB} \\
 f_a^- &= 420 \text{ kHz} \\
 f_p^- &= 1170 \text{ kHz} \\
 f_p^+ &= 2250 \text{ kHz} \\
 f_a^+ &= 6700 \text{ kHz} \\
 R_s &= 50 \Omega \\
 R_l &= 220 \Omega
 \end{aligned}$$

2.2 Werkwijze

De transferfunctie van de banddoorlaatfilter met deze specificaties wordt eerst ontworpen in het laagdoorlaat domein. Om de frequentietransformatie naar low-pass en de inverse transformatie naar het uiteindelijke banddoorlaatontwerp te vereenvoudigen, worden de specificaties vooraf frequentie- en weerstandsgenormaliseerd ($\omega_c=1$, $R_n=1$). Na het bepalen van $T(s)$ en toepassen van de banddoorlaattransformatie worden de z-parameters berekend en wordt de Cauersynthese uitgevoerd. Hieruit bekomt men een laddernetwerk met dimensieloze componentwaarden van de band-pass filter. Indien de filter fysiek zou worden opgebouwd, zullen de reële spoelen en condensatoren ook resistieve verliezen vertonen. Deze kunnen, met een gegeven Q-factor, in rekening worden gebracht via predistortiecorrectie. Tot slot wordt de uiteindelijke, gedenormaliseerde schakeling gesimuleerd in Eagle.

2.2.1 Symmetrievoorwaarde

Vooraleer de transformatie naar het laagdoorlaat equivalent kan worden uitgevoerd, moet de filter voldoen aan de symmetrievoorwaarde eq (2.1):

$$f_a^- f_a^+ = f_p^- f_p^+ \quad (2.1)$$

Men bekomt voor het linker- en rechterlid respectievelijk $2.8140e+12$ Hz en $2.6325e+12$ Hz. Bijgevolg is de filter niet symmetrisch en moet een van deze frequenties aangepast worden. f_a^+ verlagen is hier de beste optie, aangezien het verlagen van f_a^- zou resulteren in verzwakte filterspecificaties.

$$f_a^+ = \frac{f_p^- f_p^+}{f_a^-} = 6268 \text{ kHz} \quad (2.2)$$

Vervolgens wordt de centerfrequentie berekend en omgezet naar pulsatie, waarmee men de verstrengde specificaties kan normaliseren.

$$f_o = \sqrt{f_p^- f_p^+} = 1623 \text{ kHz} \quad \omega_c = 2\pi f_0 = 1.019 \times 10^7 \text{ rad/s} \quad (2.3)$$

$$\omega_a^- = 2.469 \times 10^6 \text{ rad/s} \quad \omega_{an}^- = \frac{\omega_a^-}{\omega_c} = 0.2422 \quad (2.4)$$

$$\omega_p^- = 7.351 \times 10^6 \text{ rad/s} \quad \omega_{pn}^- = \frac{\omega_p^-}{\omega_c} = 0.7211 \quad (2.5)$$

$$\omega_p^+ = 1.414 \times 10^7 \text{ rad/s} \quad \omega_{pn}^+ = \frac{\omega_p^+}{\omega_c} = 1.387 \quad (2.6)$$

$$\omega_a^+ = 4.210 \times 10^7 \text{ rad/s} \quad \omega_{an}^+ = \frac{\omega_a^+}{\omega_c} = 4.129 \quad (2.7)$$

Ook werden de weerstand genormaliseerd door ze te delen door R_l :

$$R_s = \frac{50 \Omega}{220 \Omega} = 0.227 \quad R_l = \frac{220 \Omega}{220 \Omega} = 1 \quad (2.8)$$

2.2.2 Filterparameters

Met deze pulsaties worden de relatieve bandbreedte B en de pulsaties van de stop- ω_s en doorlaatband ω_d bepaald. In deze tekst beschouwt men Ω als de pulsatie van de low-pass en ω als die van de band-pass. De formules (2.9) en (2.10) komen overeen met respectievelijk vergelijkingen (1.7) en (1.18) uit de cursus [2]. De laagdoorlaatfilter heeft een attenuatie A_{min} bij Ω_s en A_{max} bij Ω_p .

$$B = \omega_{pn}^+ - \omega_{pn}^- = 0.6656 \quad (2.9)$$

$$\Omega_s = \left| \frac{\omega_{an}^+ - \frac{1}{\omega_{an}^+}}{B} \right| = 5.840 \quad \Omega_p = \left| \frac{\omega_{pn}^- - \frac{1}{\omega_{pn}^-}}{B} \right| = 1.000 \quad (2.10)$$

De filterparameters worden berekend aan de hand van onderstaande formules:

- De selectiviteit k :

$$k = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_a^+ - f_a^-} = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 0.1712 \quad (2.11)$$

- De **orde** n :

$$n = \frac{\operatorname{argch} \left(\sqrt{\frac{10^{\frac{-A_d}{10}} - 1}{10^{\frac{-A_d}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{argch} \left(\frac{1}{k} \right)} = 3 \quad (2.12)$$

Ook bij het passief filter wordt de orde naar boven afgerond, wat resulteert in een derde-orde filter.

- De **rimpelfactor** ε :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{-\frac{A_d}{10}} - 1} = \sqrt{10^{0,025} - 1} = 0,2434 \quad (2.13)$$

2.2.3 Transferfunctie laagdoorlaat equivalent

Vermits de orde oneven is, neemt de transferfunctie $T(p)$ de volgende vorm aan:

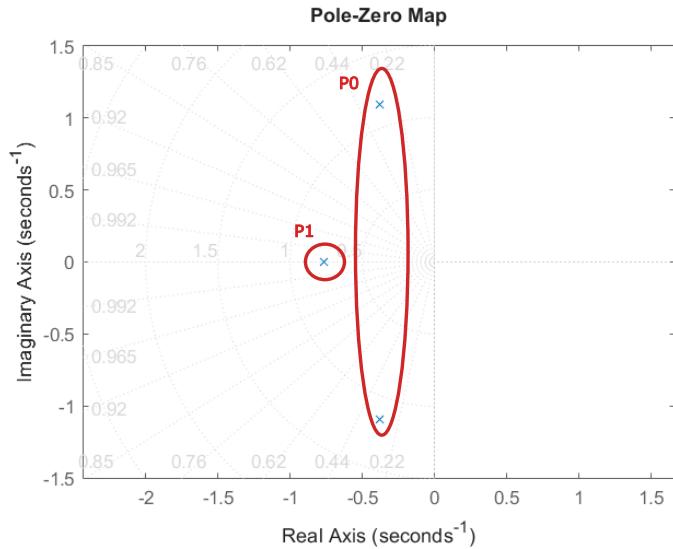
$$T(p) = \frac{(-p_{(n-1)/2}) \prod_{m=0}^{(n-3)/2} |p_m|^2}{(p - p_{(n-1)/2}) \prod_{m=0}^{(n-3)/2} (p^2 - 2\Re(p_m)p + |p_m|^2)} \quad (2.14)$$

De polen p_m worden bepaald volgens formules (2.15); de resultaten staan in tabel 2.1 en zijn grafisch weergegeven in Figuur 2.2.

$$\begin{aligned} p_m &= -\sigma_m \pm j\omega_m \\ \sigma_m &= \omega_d \sinh(a) \sin \left(\frac{2m+1}{2n}\pi \right) \\ \omega_m &= \omega_d \cosh(a) \cos \left(\frac{2m+1}{2n}\pi \right) \\ a &= \frac{1}{n} \operatorname{argsh}(1/\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Tabel 2.1: polen van het laagdoorlaatequivalent

p_0	$-0.3836 \pm 1.0915i$
p_1	-0.7672



Figuur 2.2: polen van het laagdoorlaat equivalent

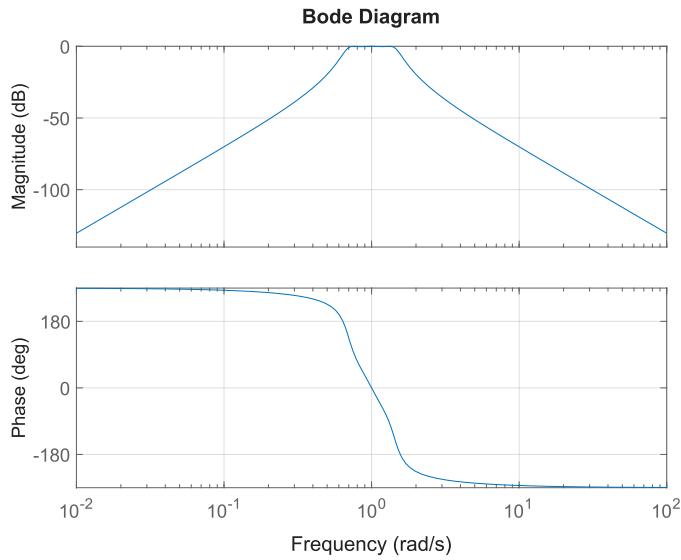
Aangezien alle polen van het systeem nu gekend zijn, kan de transferfunctie van het laagdoorlaatequivalent (2.16) worden bepaald.

$$T(p) = \frac{1.027}{p^3 + 1.534p^2 + 1.927p + 1.027} \quad (2.16)$$

2.2.4 Transformatie Banddoorlaat

De transferfunctie van de banddoorlaat wordt bekomen door de substitutie $p = \frac{q+\frac{1}{B}}{B}$ toe te passen in vergelijking (2.16). Voor het leesgemak en de consistentie wordt de variabele q vervangen door p, wat resulteert in vergelijking (2.17). De bijhorende bodeplot is weergegeven in figuur 2.3.

$$T(p) = \frac{0.3029 p^3}{p^6 + 1.021 p^5 + 3.854 p^4 + 2.346 p^3 + 3.854 p^2 + 1.021 p + 1} \quad (2.17)$$



Figuur 2.3: Gabarit passief filter

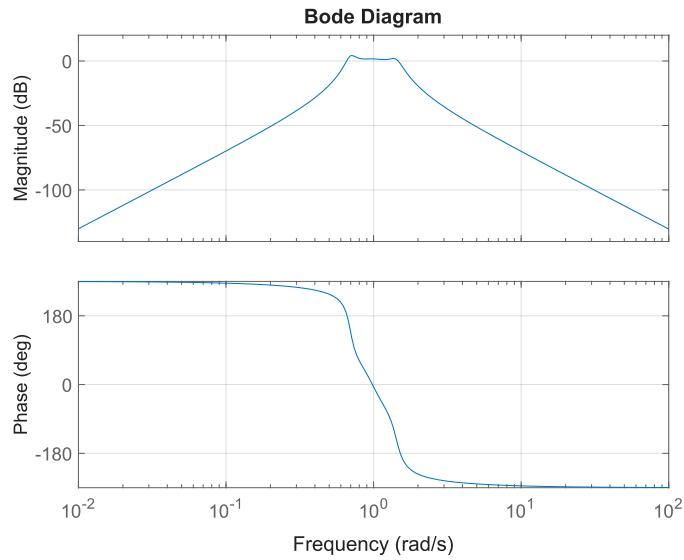
2.3 Predistortie

De componenten van de filter zijn niet-ideaal; dit wil zeggen dat de spoel en condensator niet volledig inductief en capacitief zijn, maar ook dissipatieve verliezen vertonen. Om deze verliezen in rekening te brengen, wordt bij de spoel een serieuze weerstand R_L toegevoegd en bij de condensator een parallelweerstand R_C . De bijbehorende weerstanden worden gegeven door relatie (2.18), waarbij Q de kwaliteitsfactor van de componenten voorstelt. Idealiter zou voor elke component afzonderlijk een specifieke Q-factor worden gebruikt. De gebruikte Q-factor is die van de component met de laagste kwaliteit, en wordt in dit geval opgelegd op $Q=30$.

$$\frac{1}{Q} = d = \frac{R_L}{L_n} = \frac{1}{C_n R_C} \quad (2.18)$$

Deze verliezen zorgen voor 'distortie'; de polen van de filter verschuiven over een afstand d naar links in het complexe vlak. Voor de polen die oorspronkelijk dichter bij de imaginaire as lagen, betekent diezelfde verschuiving een groter relatief effect. Met als gevolg dat die frequentie sterkere demping vertoont dan de polen die al ver naar links stonden, wat zorgt voor een assymetrisch gabarit. Dit effect wordt gecompenseerd door de polen doelbewust op voorhand over afstand d naar rechts te verschuiven, dit noemt men 'predistortie'. De predistortie vangt dus het effect op van de distortie, resulterend in het gewenst, ideaal en symmetrisch gabarit. Mathematisch komt dit overeen met de substitutie $p = q - d$ in de transferfunctie van de banddoorlaat (2.19). De afstand d is gedefinieerd als de inverse van Q . De substitutie wordt alleen in de noemer uitgevoerd. Indien dit ook in de teller wordt gedaan, is de teller niet meer puur oneven en verkrijgen we een RLC filter, in plaats van LC. Na substitutie bekomt men:

$$T(p) = \frac{0.3029 p^3}{p^6 + 0.8214 p^5 + 3.7 p^4 + 1.842 p^3 + 3.645 p^2 + 0.7717 p + 0.9702} \quad (2.19)$$

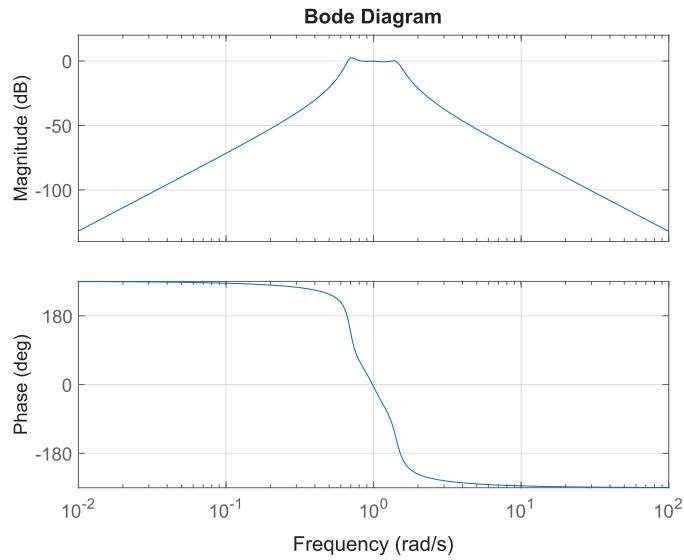


Figuur 2.4: Gabarit met predistortie

De transferfunctie (2.19) is die voor het verliesloos tweepoort. Wij zijn geïnteresseerd in het volledig netwerk, inclusief R_s en R_l . Hiervoor wordt de transferfunctie nog vermenigvuldigd met de spanningsdeler.

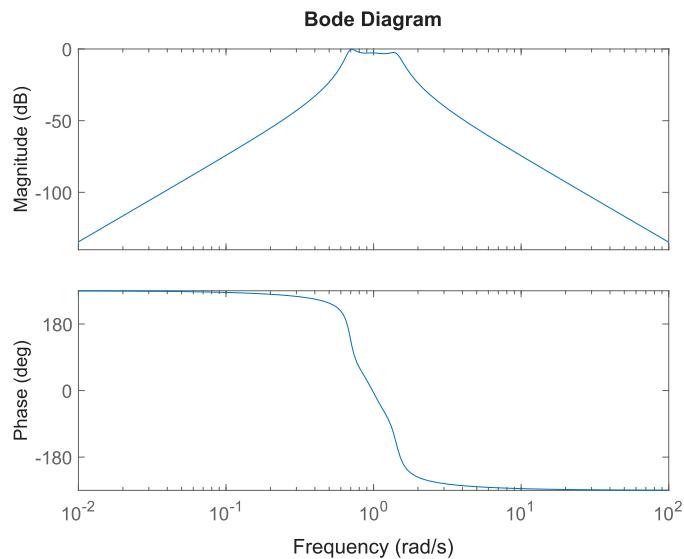
$$\begin{aligned}
 T(p) &= \frac{220}{50 + 220} \frac{0.3029 p^3}{p^6 + 0.8214 p^5 + 3.7 p^4 + 1.842 p^3 + 3.645 p^2 + 0.7717 p + 0.9702} \\
 &= \frac{0.2468 p^3}{p^6 + 0.8214 p^5 + 3.7 p^4 + 1.842 p^3 + 3.645 p^2 + 0.7717 p + 0.9702}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Merk op dat de bodeplot 2.5 positieve versterking vertoont. Hoewel de spanningsdeler, de Bodeplot (Figuur 2.7) naar beneden trekt, blijft de frequentierespons deels boven 0 dB. Daarom werd met behulp van een Matlab-script de maximale schaalfactor (tussen 0 en 1) bepaald, zodat de volledige frequentierespons onder 0 dB blijft. De optimale factor bedraagt 0.74 wat resulteert in de aangepaste respons weergegeven in Figuur 2.6.



Figuur 2.5: Gabarit met predistortie en spanningsdeler

$$T(p) = \frac{0.1826 p^3}{p^6 + 0.8214 p^5 + 3.7 p^4 + 1.842 p^3 + 3.645 p^2 + 0.7717 p + 0.9702} \quad (2.21)$$



Figuur 2.6: Gabarit met predistortie, spanningsdeler en schalingsfactor 0.74

2.4 Opstellen Z-parameters

Nu de transferfunctie bekend is (vergelijking (2.21)), kunnen de Z-parameters worden bepaald. De filtersynthese behoort tot een probleem van de derde categorie (zie figuur 2.1b). Voor het bepalen van de Z-parameters werd gebruikgemaakt van de concepten uit hoofdstuk 6 van Balabanian [1]. De transferfunctie $T(s)$ wordt gegeven als de verhouding van de ingangsspanning V_{in} en de uitgangsspanning V_{out} . De formules die gebruikt werden voor het afleiden van de Z-parameters worden hieronder gegeven:

$$T(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_s}} \frac{N_{12}(s)}{m(s) + n(s)} \quad (2.22)$$

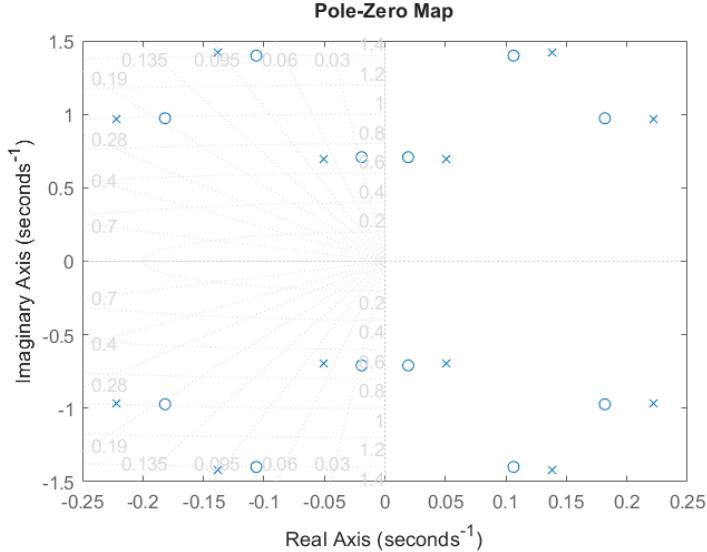
$$\rho(s)\rho(-s) = 1 - \frac{4R_s}{R_l} T(s)T(-s) \quad (2.23)$$

$$\rho(s) = \frac{m_r + n_r}{m + n} \quad (2.24)$$

$T(s)$ stelt de transferfunctie $T(p)$ voor, zoals gedefinieerd in vergelijking (2.21). De grootheid $\rho(s)$ is de reflectiefactor. De functies $m(s)$ en $n(s)$ zijn respectievelijk het even en oneven deel van de noemer van $T(s)$. Voor m en n geldt hetzelfde, maar dan voor de noemer van de reflectiefactor. De functies m_r en n_r zijn die voor de teller van $\rho(s)$. Eerste werd $N_{12}(s)$ bepaald door volgende afleiding:

$$N_{12}(s) = \frac{2(m(s) + n(s))}{\sqrt{\frac{R_l}{R_s}}} T(p) = 0.1741 p^3 \quad (2.25)$$

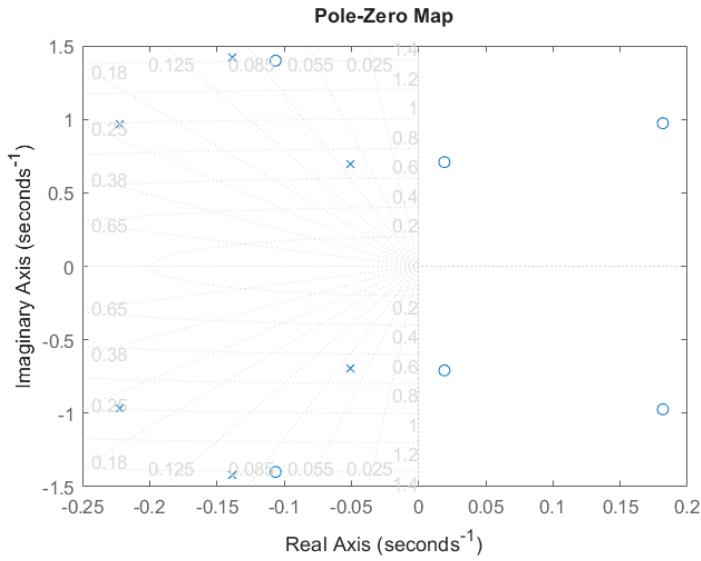
De vergelijking van $T(-p)$ vindt men door p te substitueren met $-p$. Vervolgens wordt de pzmap van $\rho(p)\rho(-p)$ geplot.



Figuur 2.7: pzmap van $\rho(p)\rho(-p)$

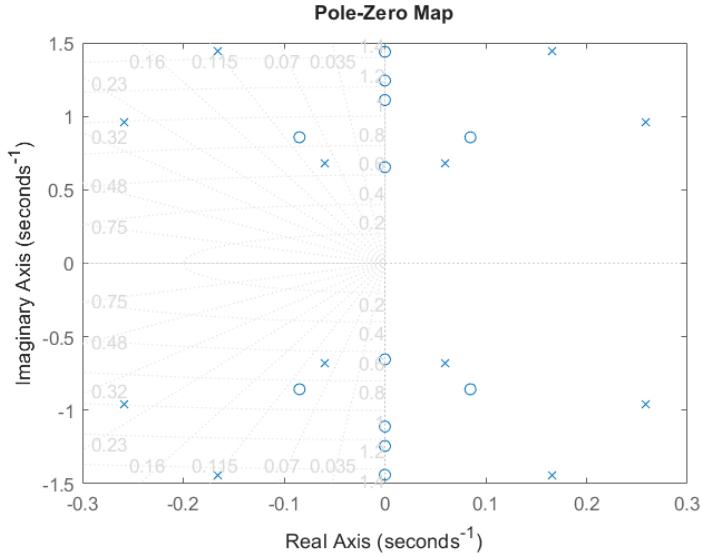
Om reflectiefactor $\rho(s)$ te bepalen, moeten er 6 polen en nullen worden geselecteerd van $\rho(p)\rho(-p)$. De reflectiefactor $\rho(s)$ moet stabiel zijn, dus worden alle polen in het linkerhalf-

vlak geselecteerd. Voor de nullen is er meer ontwerp vrijheid, ze worden zo gekozen zodat ze geconjugeerde paren vormen, zonder dat ze kwadrant symmetrisch worden gekozen. In dat geval zou men $\rho(p)\rho(-p)$ niet meer kunnen realiseren. De keuze van de nullen is cruciaal voor het ontwerp van de filter, aangezien ze een grote invloed hebben op de realiseerbaarheid ervan. In figuur 2.8 wordt de gemaakte keuze voor de filter getoond.



Figuur 2.8: pzmap van $\rho(p)$

Indien vergelijking (2.19) wordt gebruikt voor de transferfunctie $T(s)$ - dus zonder de spanningssdeler - zouden de nullen van $\rho(p)\rho(-p)$ op de imaginaire assen liggen. Dit is echter niet toegestaan. (zie figuur 2.9)



Figuur 2.9: pzmap van $\rho(p)\rho(-p)$

De refleciefactor $\rho(p)$ wordt bepaalt door de matlab functie `zpk`. Hier worden de geselecteerde nullen en polen ingevuld, waarbij de gain 1 is.

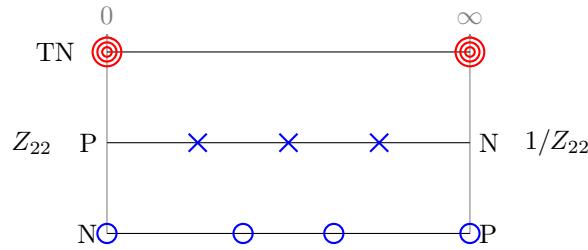
$$\rho(p) = \frac{p^6 - 0.1893 p^5 + 3.381 p^4 - 0.6939 p^3 + 3.394 p^2 - 0.3293 p + 0.9702}{p^6 + 0.8213 p^5 + 3.701 p^4 + 1.842 p^3 + 3.645 p^2 + 0.7717 p + 0.9702} \quad (2.26)$$

Om te bepalen welke formules nodig zijn voor de Z-parameters, wordt verwezen naar tabel 6-2 uit Balabanian [1]. Omdat parameter N_{12} van oneven orde is (zie vergelijking (2.25)), volgt hieruit dat case B van toepassing is. De bijbehorende Z-parameters worden hieronder gegeven:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_l \frac{n - n_r}{m + m_r} = \frac{0.2297 p^5 + 0.5764 p^3 + 0.2502 p}{2 p^6 + 7.0813 p^4 + 7.0383 p^2 + 1.9403} \\ Z_{22} &= R_s \frac{n + n_r}{m + m_r} = \frac{0.6320 p^5 + 1.1485 p^3 + 0.4424 p}{2 p^6 + 7.0813 p^4 + 7.0383 p^2 + 1.9403} \\ Z_{12} &= \sqrt{R_s R_l} \frac{N_{12}}{m + m_r} = \frac{0.08302 p^3}{2 p^6 + 7.0813 p^4 + 7.0383 p^2 + 1.9403} \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.5 Cauersynthese

De volgende stap is het bepalen van de fysieke L- en C-componenten, waarbij steeds wordt voldaan aan de vereiste waarden van Z_{11} , Z_{22} , en Z_{12} . Dit gebeurt aan de hand van de Cauersynthese. Bij het kiezen van componenten voor Z_{22} zorgen we er tegelijk voor dat ook aan Z_{12} wordt voldaan. Dit doen we door de transmissienullen (de nullen van Z_{12}) te realiseren via partiële of volledige poolafslittings uit Z_{22} . Merk op dat Z_{22} hier geen eigenpolen heeft, daarom starten we de Cauersynthese met $\frac{1}{Z_{22}}$. In totaal zijn er zes transmissienullen: drie bij $p = 0$, aangezien de graad van de noemer drie hoger ligt dan die van de teller, en drie bij $p = \infty$, omdat de teller enkel één term van de derde graad bevat.



Figuur 2.10: Pole-zero-diagram

Stap 1: volledige poolafsplitsing in $[p = 0]$

$$Y_0(p) = 1/Z_{22}(p)$$

$$Y_0(p) = \frac{2p^6 + 7.0813p^4 + 7.0383p^2 + 1.9403}{0.6320p^5 + 1.1485p^3 + 0.4424p} = \frac{A}{p} + Y_1(p), \quad A = 4.3861$$

$$Y_1(p) = \frac{3.1644p^5 + 6.8178p^3 + 3.1655p}{p^4 + 1.8172p^2 + 0.6999}$$

Spoel $L_{1n} = 1/A$ in parallel.

Stap 2: volledige poolafsplitsing in $[p = 0]$

$$Z_1(p) = \frac{1}{Y_1(p)} = \frac{p^4 + 1.8172p^2 + 0.6999}{3.1644p^5 + 6.8178p^3 + 3.1655p} = \frac{B}{p} + Z_2(p), \quad B = 0.2211 \quad (2)$$

$$Z_2(p) = \frac{0.09491p^3 + 0.09788p}{p^4 + 2.1546p^2 + 1.0004}$$

Condensator $C_{1n} = 1/B$ in serie.

Stap 3: volledige poolafsplitsing in $[p = 0]$

$$Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{p^4 + 2.1546p^2 + 1.0004}{0.09491p^3 + 0.09788p} = \frac{C}{p} + Y_3(p), \quad C = 10.2202 \quad (3)$$

$$Y_3(p) = \frac{10.5361p^3 + 12.4805p}{p^2 + 1.0313}$$

Spoel $L_{2n} = 1/C$ in parallel.

Stap 4: volledige poolafsplitsing in $[p = \infty]$

$$Y_3(p) = \frac{10.5361 p^3 + 12.4805 p}{p^2 + 1.0313} = D p + Y_4(p), \quad D = 10.5361 \quad (4)$$

$$Y_4(p) = \frac{1.6147 p}{p^2 + 1.0313}$$

Capaciteit $C_{2n} = D$ in parallel.

Stap 5: volledige poolafsplitsing in $[p = \infty]$

$$Z_4(p) = \frac{1}{Y_4(p)} = \frac{p^2 + 1.0313}{1.6147 p} = E p + Z_5(p), \quad E = 0.6193 \quad (5)$$

$$Z_5(p) = \frac{0.6387}{p}$$

Spoel $L_{3n} = E$ in serie.

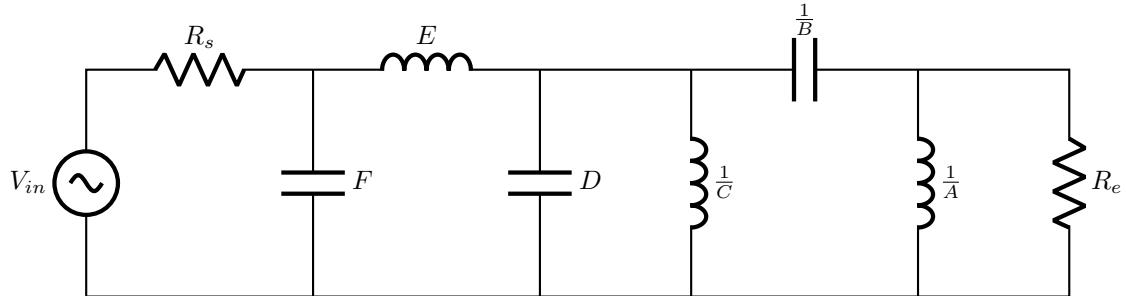
Stap 6: volledige poolafsplitsing in $[p = \infty]$

$$Y_5(p) = \frac{p}{0.6387} = F p + Y_6(p), \quad F = 1.5658 \quad (6)$$

Capaciteit $C_{3n} = F$ in parallel.

$$Y_6(p) = 0. \quad (7)$$

Na zes volledige poolafsplitsingen is de Cauer-synthese afgerond. Er waren (gelukkig) geen partiële poolafsplitsingen nodig. Het resulterende passieve banddoorlaatfilter is:



Figuur 2.11: Gesynthetiseerd laddernetwerk

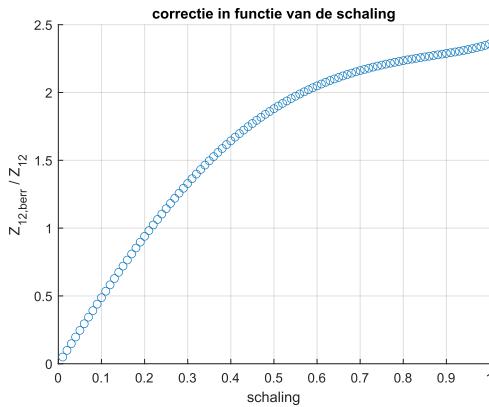
2.6 Correctie Z_{12}

Nu de filter gesynthetiseerd is, kan de berekende waarde van Z_{12} worden vergeleken met de theoretische waarde. De berekende Z_{12} is gelijk aan de theoretische waarde, op een constante na. Om deze gelijk te maken, schalen we de transferfunctie met een factor tussen 0 en 1, aangezien Z_{12} mee schaalt met de transferfunctie (zie Formule 2.28).

$$\frac{V_2}{E^{(I)}} = \frac{R_L z_{12}^{(II)}}{(Z_2^{(I)} + Z_k + z_{11}^{(II)}) (z_{22}^{(II)} + R_L) - (z_{12}^{(II)})^2} \quad (2.28)$$

De factor die voldoet aan Formule 2.29 vindt men uit de grafiek in Figuur 2.12 en heeft waarde 0.21.

$$\frac{Z_{12,\text{berekend}}}{Z_{12}} = 1 \quad (2.29)$$



Figuur 2.12: Verhouding

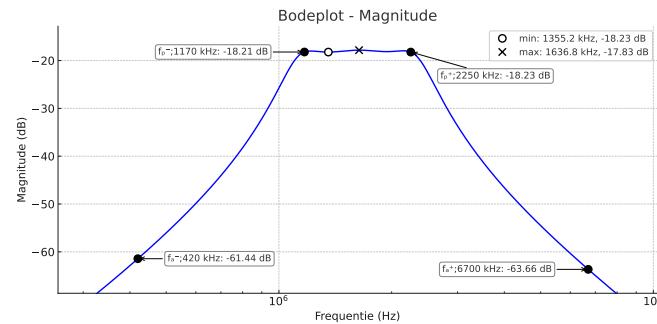
Opmerking: Oorspronkelijk was de keuze voor de nullen van $\rho(s)$ anders, maar na het bepalen van de Z parameters en de Cauersynthese bleek echter dat geen schaalfactor tussen 0 en 1 voldeed aan Formule 2.29. Daarom werd het hele proces herhaald voor verschillende keuzes van de nullen, tot aan de huidige selectie. De waarden van de componenten bekomen met de Cauersynthese zijn genormaliseerd. Deze worden frequentie- en weerstandsgedenormaliseerd, de bekomen componenten worden weergegeven in tabel 1.4. De weerstanden R_C en R_L staan in serie of parallel met de componenten (zie hoofdstuk *Predistortie 2.3*). Deze weerstanden zijn berekend volgens vergelijking (2.18) en gedenormaliseerd door vermenigvuldiging met 220Ω .

Tabel 2.2: Componenten voor verstrenging (links en rechts)

C_1	$6.9814 \times 10^{-10} F$	R_{C1}	$4.2152 \times 10^3 \Omega$
C_2	$4.6978 \times 10^{-9} F$	R_{C2}	626.4157Ω
C_3	$2.0166 \times 10^{-9} F$	R_{C3}	$1.4593 \times 10^3 \Omega$
L_1	$1.3365 \times 10^{-5} H$	R_{L1}	4.5415Ω
L_2	$2.1115 \times 10^{-6} H$	R_{L2}	0.7175Ω
L_3	$4.9201 \times 10^{-6} H$	R_{L3}	1.6719Ω

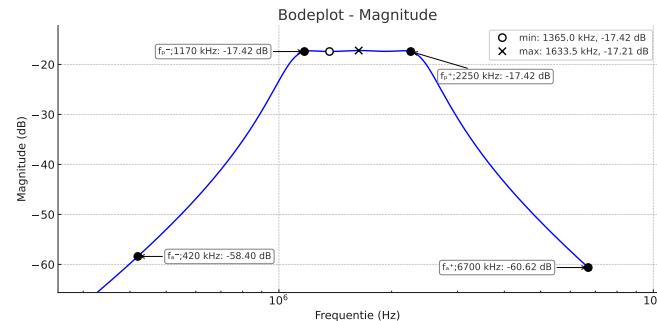
2.7 Simuleren van de schakeling

Vervolgens wordt de gesynthetiseerde filter gesimuleerd in Autodesk Eagle, de gebruikte componenten zijn opgelijst in tabel 2.2. De weerstandswaarden worden aan de hand van Q berekend. Deze dienen om een niet-ideale spoel/condensator met $Q = 30$ te moddeleren. Uit de eerste simulatie blijkt dat de rimpel van 0.40 dB groot is, terwijl deze maximaal 0.25dB mag zijn. Bijgevolg voldoet de filter niet aan de specificaties en zal men een manier moeten vinden om de rimpel te verkleinen. Aan de andere specificaties voldoet de filter wel.

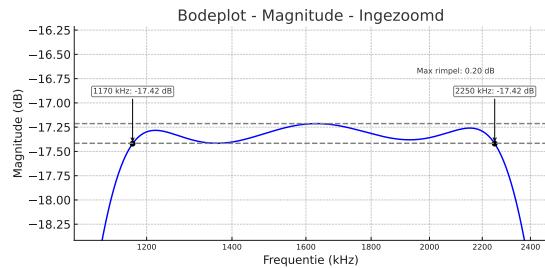


Figuur 2.13: Simulatie passief filter - te grote rimpel

Een mogelijke oplossing is het verder verstrekken van de filter; indien men de filter ontwerpt voor een $A_{\text{max}} = 0.15$ dB, is de rimpel 0.20 dB. De lichte assymetrie in de doorlaatband is een gevolg van de afrondingen van de componentswaarden in Eagle.



Figuur 2.14: Simulatie passief filter - verstrengd



Figuur 2.15: Simulatie passief filter - verstrengd - ingezoomd

2.8 Besluit

Ook de passieve filter synthese is gelukt; aan alle gevraagd specificaties is voldaan! De filter is echter twee keer verstrengd tijdens het ontwerpproces; een eerste keer tijdens het afronden van de orde en een tweede keer om de rimpelfactor te verkleinen. De vorm van de filterrespons volgt inderdaad de vorm van een chebychev filter.

2.9 Bronnen

Referenties

- [1] Norman Balabanian en Theodore A. Bickart. *Electric Network Theory*. Available as PDF. New York: John Wiley & Sons, 1958.
- [2] R. Pintelon en Y. Rolain. *Filtersynthese*. VUB, 2023.