Poítání dvma zpsoby

Vojtch ára, Marek Doua

November 11, 2020

Abstract: urím njakou veliinu dvma zpsoby, dám je dohromady a dostanu tak explicitní vzorec pro danou veliinu.

Poet hran symetrického bipartitního grafu je $(\frac{n}{2})^2$
Pozorování: grafy bez C_3 mohou mít a kvadraticky mnoho hran vzhledem k $|v|$.
Vta:
Pokud graf G na n vrcholech neobsahuje C_4 jako podgraf, potom má nejvýe $\frac{1}{2}(n^{\frac{3}{2}} + n)$ hran.

Dkaz:
Spoítáme dvma zpsoby poet vidliek P_3. Pokud zafixuji dva vrcholy, tak vidím, e vidliek je maximáln tolik kolik je dvojic rzných vrchol - $\#vidliek \leq \binom{n}{2}$.
Zárove meme vybírat dvojice sousedních vrchol kadého vrcholu - ty také tvoí vidliky a tímto zpsobem také sumou pes vechny vrcholy dojdeme k celkovému potu vidliek. $\#vidliek = \sum_{v\in V} \binom{deg(v)}{2}$
Dosazením do rovnosti je $\sum_{v\in V} \binom{deg(v)}{2} \leq \binom{n}{2} => \sum_{v\in V} (def(v) - 1)^2 \leq n^2$ Cauchy Schwartzova nerovnost $(< x|y > \leq ||x|| * ||y||)$.
$x = deg(v1) - 1, deg(v2) - 1, ..., deg(vn) - 1$ $y = 1, 1, 1, ..., 1$ ikovn zvolím x a y, t.. mi vyjde $< x|y >= \sum_{i=n} deg(i) - 1 = 2 * |E| - n$
$||x|| = \sqrt{\sum_{i=n} deg(i) - 1} \leq \sqrt{n^2} = n$ z rovnice co nám vyla díve $||y|| = \sqrt{\sum_{i=n} 1^2} = \sqrt{n}$ vycházi $2 * |E| - n \leq n * \sqrt{n}$, tedy e poet hran je maximáln $\frac{1}{2}(n^{3/2} + n)$
$A, B \subseteq X$ nezávislé ... $A \subsetneq B \wedge B \subsetneq A$
Antietzec / nezávislá mnoina $Y \subseteq P(X) : \forall A, B \in Y$ jsou A, B navzájem nezávislé.

Spernerova Vta:
Kadý mnoinový systém vybudovaný na n prvcích má nejvýe $\binom{n}{n/2}$ nezávislých podmnoin.
Dkaz:
Oznaíme M nejvtí antietzec v $(S, \subseteq)$ kde $S \subseteq P(X), |x| = n$. $m = \{M_1, M_2, ..., M_k\}$. Dvma zposby spoítejme $\#(M,)$, kde $M \in m$ a je maximální etzec obsahující M.
Pozorování: $\#(M,) \leq \# \leq n!$ protoe k jednomu lze doplnit nanejvý jedno M. etzc je maximáln tolik, kolik je rzných uspoádání.
Druhý zpsob:
Pozorování - kadou mnoinu M lze nalézt v nejvýe $|M|!(n - |M|)!$ etzcích. Nakreslíme-li obsahující M.

$$\emptyset = M_0, M_1, ..., M_i = M, ..., M_n = X$$

. $\#(M,) = \sum_{M\in m} |M|!(n - |M|)!$

$$\sum_{M\in m} |M|!(n - |M|)! \leq n!$$

$$\sum_{M\in m} \frac{|M|!(n - |M|)!}{n!} \leq -1$$

$$1 \geq \sum_{M\in m} \binom{n}{|M|}^{-1} \geq \sum_{M\in m} \binom{n}{\frac{n}{2}}^{-1} = |m| \binom{n}{\frac{n}{2}}^{-1}$$

Poslední krok: $\Rightarrow |m| \leq \binom{n}{\frac{n}{2}}$

Vta nám umonuje testovat ásteném uspoádání na celém grafu.

Míra souvislosti graf

Meme pevést na jednoduí úlohu podrozdlením grafu na více ástí. Definice: eknme, e $S \subseteq V_0$ je vrcholový ez (separátor) pokud G§je nesouvislý. Vrcholová souvislost neprázdného grafu F je $K_{v(G)} = min|S|, kdeSjevrcholovez, G \neq K_n$ neboli nejmení poet vrchol, který u graf udlá nesouvislý. Graf je t-souvislý pokud $K_v(G) \geq t$ Jak se souvislost mní na podgrafech? Pokud má stejn vrchol, tak má podgraf $\leq$ souvislost. Pokud má mén, tak o nm nemohu íct nic. $K_v(G) \leq$min deg(n) Hranová souvislost $\neq$ Vrcholová souvislost. # Hranových ez $\geq$ # vrcholových ez.w