Integrál více proměnných

Vojtěch Šára, Marek Douša

December 2, 2020

.... Podobně jako jedné proměnné, děláme horní a dolní součty, pokud se rovnají, tak existuje Riemannův integrál na daném intervalu.
Tvrzení Riemannův integrál $\int_J f(x)dx$ existuje právě když pro $\forall\epsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že $S_J(f,P) - s_J(f,P) < \epsilon$.

Každá spojitá funkce $fJ \to \mathbb{R}$ na n-rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál.

Důkaz:
V $\mathbb{E}_n$ budeme užívat vzdálenost σ definovanou jako $\sigma(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$. Jelikož je f stejnoměrně spojitá, můžeme pro $\epsilon > 0$ zvolit $\delta > 0$ takové, že:

$$\sigma(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x)|$$

... Zde chybí zápisek z hodiny 25. listopadu

Primitivní rozšíření na vyšší dimenzi - povolíme si pouze rovnoběžnostěn jako Df, pak můžeme rozdělit tvar ve všech dimenzích rozdělením $\to$ z toho máme cihličky ve více dimenzích, které můžeme opět sčítat jako 2dimenzionální cihličky = obdélníčky. Takto získáme většinu vlastností integrálu, které už známe. Co ovšem nemáme je protějšek základní věty Analýzy. To v následujícím textu zkusíme napravit.

Fubiniova věta
Pozor, x a y jsou zde vektory!
Vezměme součin $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$ intervalů $J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$. Nechť $\int_J f(x,y)dxy$ existuje a nechť pro $\forall x \in J'$ (resp. $\forall y \in J''$) existuje $\int_{J''} f(x,y)dy$ (resp. $\int_{J'} f(x,y)dx$). Potom je

$$\int_J f(x,y)dxy = \int_{J'} (\int_{J''} f(x,y)dy)dx = \int_{J''} (\int_{J'} f(x,y)dx)dy$$

Ve třech dimenzích pro příklad tedy máme:

$$\int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} (\int_{a_3}^{b_3} (f(x_1,x_2,x_3))dx_3)dx_2)dx_1$$

Pro nahlédnutí proč Fubini funguje:

$$\sum_{i\leq m, j\leq n} x_{ij} = \sum_{i\leq m} (\sum_{j\leq n} x_{ij})$$

Samotný důkaz:
Položme $F(x) = \int_{J''} f(x,y)dy$. Dokážeme, že $\int_{J'} F$ existuje a že $\int_J f = \int_{J'} F$. Zvolme rozdělení P intervalu J tak aby

$$\int f - \epsilon \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq \int f + \epsilon$$

Toto P je tvořeno rozděleními P' intervalu J' a P" intervalu J". Máme

$$\mathcal{B}(P) = \{B' \times B'' | B' \in \mathcal{B}(P'), B'' \in \mathcal{B}(P'')\}$$

Každá cihla P se objeví jako právě jedno $B' \times B''$. Potom je

$$F(x) \leq \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'') \max_{y \in B''} f(x,y) \times \mathrm{vol}(B'')}$$

a tedy

$$S(F,P') \leq \sum_{B' \in \mathcal{P}'} \max_{x \in B'} (\sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{y \in B''} f(x,y) \cdot \mathrm{vol}(B'')) \cdot \mathrm{vol}(B') \Rightarrow \ldots$$

To už se nějak dopočítá s nehlédnutím o sumách, které je těsně před důkazem.

Příklad: Objem koule.
Interval $J = \langle -r, r \rangle \times \langle -r, r \rangle$ vezměme:

$$f(x,y) = \left\{ \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \text{ pro } r^2 - x^2 - y^2 \geq 0 0 \text{jinak} \right.$$

Podle Fubiniovy věty

$$2 \int_{-r}^{r} (\int_{-r}^{r} f(x,y)dy)dx = 2 \int_{-r}^{r} (\int_{-u}^{u} f(x,y)dy)dx$$

kde $u = \sqrt{r^2 - x^2}$. Pak už jen spočítáme...

Co uděláme, pokud máme divoký definiční obor? Uvědomme si, že při užití Fubiniovy věty dostaneme více integrálů jedné proměnné, které už mají konečně mnoho bodů nespojitosti a to nám nevadí. Takováto argumentace ale není dostatečná - netuším proč, ale intuice docela sedí.

První poznámka o Lebesgueově integrálu.
Riemannův integrál se dá rozšířit tak, že např. můžeme korektně počítat

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n$$

předpokládajíce jen, že $|f_n| \leq K$.
To je přesně Lebesgeův integrál - rozšíření Riemannova integrálu, které funguje lépe v některých speciálních případech.

Tietzova věta:
Mějme reálnou spojitou omezenou funkci na uzavřené množině. Pak tato funkce lze rozšířit na celý prostor...

S těmito dvěma věcmi bez důkazu vyřešíme náš problém s ošklivými definičními obory. Tady už jsem moc nevěděl, ale v příští přednášce by se toto mělo zlepšit - téma bude Lebesgeův integrál. (TOTO NEBUDE U ZKOUŠKY ANYWAYS)