

Implicitní funkce

Vojtěch Šára, Marek Douša

November 11, 2020

Úloha: řešit systém rovnic

$$F_1(x, y_1, \dots, y_n) = 0,$$

.....

$$F_n(x, y_1, \dots, y_n) = 0$$

pro y_i jako korektně definované $f_i(x)$

A. Jedna rovnice: $F(x, y) = 0$ V okolí bodu (x^0, y_0) (horní index není mocnina, ale index vektoru) předpokládáme o F : spojitě parciální derivace do řádu $k \geq 1$,

Pak se nějak použije lagrangova věta????

Z toho nám vyjde spojitost a derivace F . Díky tomu můžu spočítat libovolný řád derivace v f , z čehož získám Taylorův polynom - kterým aproximuji funkci, kterou hledám (asi teda hledáme f ?).

B. Dvě rovnice:

$$F_1(x, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(x, y_1, y_2) = 0$$

Řeším nějak jen jednu a druhou řeším parametrem (?) a spočítám determinant, který z nějakého důvodu nesmí být nulový.

Jacobiho determinant

$$\frac{D(F)}{D(y)} = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\dots,m}$$

Připomeňme si, že determinant má geometrický význam objemu rovnoběžnostěny. Stejně tak, jako funkce jedné proměnné natahuje nebo stlačuje délky malých kousků okolo x v poměru absolutní hodnoty derivace v x , tak vektorová funkce $f = (f_1, f_2, \dots)$ natahuje nebo stlačuje objemy malých kousků oblasti U okolo x v poměru absolutní hodnoty Jakobiánu.

Věta: Bud'te $F_i(x, y_1, \dots, y_m)$, $i = 1, \dots, m$ funkce $n+m$ proměnných se spojitými parciálními derivacemi do řádu $k \geq 1$. Bud':

$$F(x^0, y^0) = 0$$

a

$$\frac{D(F)}{D(y)}(x^0, y^0) \neq 0$$

(Proč tady je Jakobián je zatím nějak tajemné?) Potom existují $\delta > 0$ $\Delta > 0$ takové, že pro každé

$$x \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \dots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

existuje právě jedno

$$x \in (y_1^0 - \delta, y_1^0 + \delta) \times \dots \times (y_n^0 - \delta, y_n^0 + \delta)$$

t.ž.:

$$F(x, y) = 0$$

.

Vázané extrémy.

Jestli v daném bodě není derivace nulová, pak v tomto bodě nemůže být extrém. Takto můžeme snadno vygenerovat všechny kandidáty na extrémy (kde je derivace nulová). Akorát si musíme dát pozor na krajní body!

Ve více proměnných je hledání kandidátů stejně snadné - totální diferenciál musí být nulový. (Musím být ale ve vnitřním bodu definičního oboru - ne na kraji)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = 1, \dots, n$$

Zde je ale bodů na kraji nekonečně mnoho.

Příklad: $f(x, y) = x + 2y$ na kruhu $B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Kruh B je kompaktní a tedy funkce f nabývá maxima i minima na B. Parciální derivace jsou ale kladné, tudíž nám nedávají kandidáty na extrémy. Jak to vyřešíme?

Zkusíme najít extrémy funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ jako podřízené vazbám $g_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, k$ (zde funkce g jsou funkce, které omezují f - v našem příkladu je to kruh omezující danou funkci)

Věta: Buďte f, g_1, \dots, g_k reálné funkce def. na $D \subseteq \mathbb{E}_n$; necht' mají spojitě parciální derivace. Necht' je hodnota matice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

maximální, tedy k v každém bodě oboru D. Jestliže f nabývá v bodě $a = (a_1, \dots, a_n)$ lokálního extrému podmíněného vazbami g. Pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ taková, že pro každé $i = 1, \dots, n$ platí:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(a)}{\partial x_i} = 0$$

Aplikujeme formuli na předchozí příklad: $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ takže $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Máme tedy jedno λ které splňuje dvě rovnice

$$1 + \lambda \cdot 2x = 0 \quad 2 + \lambda \cdot 2y = 0$$

To je možné jen když $y = 2x$. Tedy, jelikož $x^2 + y^2 = 1$ dostáváme $5x^2 = 1$ a tedy $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$; to lokalizuje extrémy do $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

Předpokládáme existenci čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ splňujících víc než k rovnic, těmto lambdám se říká Lagrangeovy multiplikátory.

Důkaz:

Matice M má hodnotu k právě když aspoň jedna její $k \times k$ podmatice je regulární (a tedy má nenulový determinant). Dejme tomu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix} \neq 0$$

Potom podle věty o implicitních funkcích máme v okolí bodu a funkce $\phi_i(x_{k+1}, \dots, x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi takové, že (píšme $\tilde{x} = (x_{k+1}, \dots, x_n)$)

$$g_i(\phi_1(\tilde{x}), \dots, \phi_k(\tilde{x}), \tilde{x}) = 0$$

pro $i = 1, \dots, k$. Pak přeskočím počítání z lineární algebry a dostanu to co jsem chtěl dokázat (wow) (jakože tu formuli na konci).

Další využití Věty o implicitních funkcích: Regulární zobrazení

Bud' $U \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená a necht' mají

$$f_i, i = 1, \dots, n$$

spojité parciální derivace. Řekneme, že výsledné zobrazení

$$f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{E}_n$$

je regulární, jestliže je

$$\frac{D(f)}{D(x)}(x) \neq 0$$

pro $\forall x \in U$

Je-li $f : U \rightarrow \mathbb{E}_n$ regulární, je obraz $f[V]$ každé otevřené podmnožiny $V \subseteq U$ otevřený.

Regulární zobrazení je lokálně prosté.

Prosté regulární zobrazení má regulární inverzi.