# Objemy

Vojtěch Šára, Marek Douša

November 18, 2020

Nejprve si představme nějaké hezké podmnožiny eukleidovského prostoru. Co znamená objem - jaké by měl mít vlastnotsti?

1. $A \subseteq B \Rightarrow vol(A) \leq vol(B)$
2. $A, Bdisjunktn \Rightarrow vol(A \cup B) = vol(A) + vol(B)$
3. vol je zachován isometrií
4. V $\mathbb{E}_2 : vol(\prod_i \langle a_i, b_i \rangle)$ =obsah obdélníku.

Intuitivní pozorování: obsah přímky je nulový (mohu ho obalit jakkoli malým obdélníkem). Obecně objem objektu, který je méně dimenzionální než zkoumaný prostor, je nulový.

## 0.1 Stejnoměrná spojitost

(silnější spojitost): $f : (X, d) \to (Y, d')$ je stejnoměrně spojité, je-li

$$\forall \epsilon \exists \delta \quad \forall x \forall y : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Srovnejme s normální spojitostí:

$$\forall x \forall \epsilon \exists \delta \quad \forall y : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Rozdíl je zásadní! Například:
$f = (x \to x^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá.

Je-li $(X, d)$ kompaktní, je každé spojité zobrazení stejnoměrně spojité. Zejména to platí pro spojité funkce na kompaktních intervalech. Důkaz je jednoduchý, sporem.

## 0.2 Riemannův integrál v jedné proměnné - rekapitulace

Rozdělení intervalu je posloupnost

$$P : a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n < b$$

Rozdělení můžeme zjemnit. Zjemnění:

$$P' : a = t'_0 < t'_1 < ... < t'_{n-1} < t'_n < ... < t'_m < b$$

Máme horní a dolní součty obdélníčkových odhadů funkce. Rozdíl těchto dvou součtů při zjemňování klesá.

$$s(f, P) =$$

Pokud P' zjemňuje P máme (s je dolní součet, S je horní součet):

$$s(f,P) \leq s(f,P')\text{a}S(f,P) \geq S(f,P')$$

Pro každá dvě $P_1, P_2$ je

$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2')$$

Pak:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,P)|P\text{rozdělení}\}$$

a

$$\bar{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P)|P\text{rozdělení}\}$$

Je-li $\underline{\int} = \bar{\int}$ pak společnou hodnotu označujeme jako $\int$

Riemannův integrál existuje právě když $\forall \epsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že:

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

Důkaz:
Nechť $\int_a^b f(x)dx$ existuje a nechť $\epsilon > 0$. Potom existují rozdělení $P_1$ a $P_2$ taková, která jsou si bližší než epsilon. (trochu wonky no)

Pro každou spojitou $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ Riemannův integrál $\int_a^b f$ existuje.

Důkaz:
Nestihnul jsem

Věta: (Integrální o střední hodnotě)
Buď $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá, potom existuje $c \in \langle a,b\rangle$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Důkaz:
Položme $m = \min\{f(x)|a \leq x \leq b\}$ a $M = \max\{f(x)|a \leq x \leq b\}$. Pak:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Existuje tedy K takové, že $m \leq K \leq M$ a $\int_a^b f(x)f(x)dx = K(b-a)$ Jelikože je $f$ spojitá, existuje takové $c \in \langle a,b\rangle$.

Pozorování: Pro $a < b < c$ je:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

**Základní věta analýzy:**
Buď $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a,b\rangle$ definujeme

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Potom je $F'(x) = f(x)$.

Důkaz:
Pro $h \neq 0$ máme:

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} - \int_a^x f) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \frac{1}{h} f(x+\theta h)h = f(x+\theta h)$$

kde $0 < \theta < 1$ a jelikož je $f$ i spojitá, je $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} f(x+\theta h) = f(x)$.
**Tohle je naprosto zásadně ta nejdůležitější věta analýzy ever (tak to řekl Pultr)**

Důsledek:
Buď $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom má primitivní funkci na $(a,b)$ spojitou na $\langle a,b\rangle$. Je-li G primitivní funkce $f$ na $(a,b)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$ potom je

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$