

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

PARALELNÍ ARCHITEKTURY POČÍTAČŮ

TECHNICKÁ ZPRÁVA

Hledání nejkratších cest v grafu

Autoři:

Vojtěch MYSLIVEC

Zdeněk NOVÝ

30. dubna 2015



Abstrakt

Účelem této práce je sumarizovat výsledky měření řešení problému hledání nejkratších cest v grafu (NCG). Práce se zaměřuje na řešení problému Dijkstrovým a Floyd-Warshallovým algoritmem a porovnání sekvenční a několika paralelních implementací.

Klíčová slova Dijkstra, Floyd-Warshall, nejkratší cesty, NCG, OpenMP, Cuda

Obsah

1	Úvod	3
2	Hledání nejkratších cest v grafu	3
2.1	Definice	3
2.2	Algoritmy	3
2.2.1	Dijkstrův algoritmus	3
2.2.2	Floyd-Warshallův algoritmus	3
3	Sekvenční algoritmus	4
3.1	Společná implementace	4
3.2	Dijkstrův algoritmus	4
3.2.1	Dijkstrův algoritmus z jednoho zdroje	4
3.2.2	Vektorizace	5
3.3	Floyd-Warshallův algoritmus	6
3.4	Implementace	6
3.4.1	Vektorizace	6
4	Paralelní algoritmus pomocí knihovny OpenMP	7
4.1	Dijkstrův algoritmus	7
4.1.1	Paměťové struktury	7
4.1.2	Úprava algoritmu	8
4.2	Floyd-Warshallův algoritmus	8
4.2.1	První varianta	8
4.2.2	Druhá varianta	9
4.3	Optimalizace implementace	9
4.3.1	Optimalizace vytváření vláken	9
4.3.2	Odstranění výpočtu předchůdců	9
4.4	Měření	9
4.4.1	Testovací data	9
4.4.2	Výsledky	10
4.4.3	Analýza	11
4.4.4	Optimalizace vláken Floyd-Warshallova algoritmu	13
4.4.5	Optimalizace odstraněním předchůdců obou algoritmů	13
4.4.6	Zhodnocení	15

1 Úvod

Tato práce se zabývá implementací dvou algoritmů hledání nejkratších cest v grafu. Jedná se o implementaci sekvenčním algoritmem, který je poté paralelizován pro procesor a pro grafickou kartu. Pro jednotlivé algoritmy je provedeno měření, které si klade za cíl určit zrychlení paralelních algoritmů proti sekvenčnímu.

2 Hledání nejkratších cest v grafu

2.1 Definice

Hledání nejkratších cest v grafu je NP-úplná grafová úloha, jejímž cílem je nalézt v zadaném grafu nejkratší cesty mezi všemi možnými dvojicemi uzlů A a B [4].

2.2 Algoritmy

2.2.1 Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus slouží k nalezení všech nejkratších cest ze zadaného uzlu do všech ostatních uzlů grafu. Graf nesmí obsahovat hrany se zápornou délkou [2].

Princip Dijkstrův algoritmus je zobecněné prohledávání grafu do šířky, při kterém se vlna šíří na základě vzdálenosti od zdrojového uzlu. K uchovávání uzlů slouží prioritní fronta, která je řazena podle vzrůstající vzdálenosti od zdroje. V každém kroku algoritmu je vybrán uzel s nejmenší vzdáleností a pro každého souseda je vypočítána jeho vzdálenost od zdrojového uzlu [2].

2.2.2 Floyd-Warshallův algoritmus

Floyd-Warshallův algoritmus slouží k nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi uzlů v grafu. Graf může obsahovat hrany – nikoliv však cykly – se zápornou hodnotou délky¹ [3].

¹Pokud má graf cyklus se zápornou hodnotou délky, postrádá úloha nejkratších cest smysl.

Princip Floyd-Warhsallův algoritmus pracuje s maticí sousednosti, kde hrana je ohodnocena vahou. Na počátku tato matice obsahuje pouze vzdálenosti dvou uzlů, mezi kterými je vedena hrana. V každém kroku je vybrán jeden uzel jako prostředník. Prvek matice sousednosti se přepočítá, pokud je vzdálenost z počátečního do koncového uzlu kratší přes nového prostředníka než bez něj [3].

3 Sekvenční algoritmus

3.1 Společná implementace

Oba algoritmy vycházejí z obecného principu, který je popsán v kapitole 2.2.2. Algoritmy pracují s grafem, který je programu předložen jako soubor, ve kterém je graf ve formě matice sousednosti. Společnou částí je tedy načítání vstupu a jeho kontrola.

3.2 Dijkstrův algoritmus

Protože Dijkstrův algoritmus slouží k hledání nejkratších cest od jednoho zdrojového uzlu, je nutné jej spouštět pro každý uzel grafu. To zajišťuje funkce *dijkstraNtoN*.

3.2.1 Dijkstrův algoritmus z jednoho zdroje

Pro výpočet Dijkstrova algoritmu z jednoho zdrojového uzlu se alokují tři pole o velikosti počtu uzlů. V jednom je uložena vzdálenost daného uzlu od zdrojového, ve druhém předchozí uzel v nalezené nejkratší cestě. Třetí pole určuje, jestli je už uzel uzavřený pro výpočty.

Algoritmus prochází postupně, podle nejmenší vzdálenosti, všechny uzly, které se nacházejí v prioritní frontě. Z daného uzlu vypočítá pro každého svého souseda novou cestu, která by vedla přes uzel samotný a porovná ji s dosavadní vzdáleností souseda. Menší vzdálenost je zapsána do pole vzdáleností a algoritmus pokračuje.

Prioritní fronta Za účelem prioritní fronty byla implementována binární halda, kde složitost výběru minima je logaritmická, oproti nativní implementaci pomocí pole, kde je složitost výběru minima lineární.

Obrázek 1: Úspěšně vektorizovaný cyklus.

dijkstra.cpp:38: note: LOOP VECTORIZED.

dijkstra.cpp:28: note: vectorized 1 loops in function.

```
for ( unsigned j = 0; j < pocetUzlu; j++ ) {  
    vzdalenostM[i][j] = DIJKSTRA_NEKONECNO;  
    predchudceM[i][j] = DIJKSTRA_NEDEFINOVANO;  
}
```

dijkstra.cpp:99: note: not vectorized: number of iterations cannot be co

dijkstra.cpp:99: note: bad loop form.

dijkstra.cpp:82: note: vectorized 0 loops in function.

Obrázek 2: Cyklus, který se nepodařilo vektorizovat.

dijkstra.cpp:99: note: not vectorized: number of iterations cannot be co

dijkstra.cpp:99: note: bad loop form.

dijkstra.cpp:82: note: vectorized 0 loops in function.

```
for ( unsigned i = 0 ; i < pocetUzlu ; i++ ) {  
    vzdalenostM[idUzlu][i] = vzdalenost[i];  
    predchudceM[idUzlu][i] = predchudce[i];  
}
```

3.2.2 Vektorizace

Pomocí přepínačů optimalizace *-O3* a podpory vektorových sad *-msse4.2* kompilátoru *gcc* byla zapnuta podpora vektorizace cyklů [6]. Pro záznam o pokusech vektorizace byl použit přepínač *-ftree-vectorizer-verbose=n*, kde za *n* byly dosazeny 1, 3, 5, kde čím vyšší číslo, tím podrobnější informace [6].

Samotný algoritmus je velmi sekvenční. V každém kroku se vybere minimum z prioritní fronty — jinými slovy ze složitější struktury — a přepíše se hodnoty uzlu ve frontě. Tyto operace nelze nijak vektorizovat a v průběhu výpočtu (kromě počáteční inicializace polí) se nevyskytují žádné prvky vedle sebe ani pro čtení ani pro zápis.

Obrázek 3: Upravený cyklus, aby mohl být vektorizován.

```
Vectorizing loop at dijkstra.cpp:99
dijkstra.cpp:99: note: LOOP VECTORIZED.
dijkstra.cpp:82: note: vectorized 1 loops in function.

unsigned tmp = pocetUzlu;
for ( unsigned i = 0 ; i < tmp ; i++ ) {
    vzdalenostM[idUzlu][i] = vzdalenost[i];
    predchudceM[idUzlu][i] = predchudce[i];
}
```

Původní stav Na obrázcích 1 a 2 je znázorněn příklad jednoho z cyklů, který byl vektorizován a jiný cyklus, který se nepodařilo vektorizovat z důvodu neznámého počtu iterací.

Optimalizace Výpis 3 ukazuje úspěšnou úpravu cyklu, který se díky změně zdrojového kódu podařilo vektorizovat.

3.3 Floyd-Warshallův algoritmus

Floyd-Warshallův algoritmus obsahuje tři vnořené for cykly a funguje na principu popsaném v 2.2.2. Jako datové struktury používá čtyři matice o velikosti počtu uzlů \times počet uzlů. Pro každý uzel si algoritmus udržuje aktuální vzdálenosti ke všem uzlům a navíc vzdálenosti z předchozí iterace. Další dvě matice obsahují předchozí uzel v nalezené cestě.

3.4 Implementace

Aktuální implementace je k nahlédnutí i ke stažení na adrese <https://github.com/VojtechMyslivec/PAP-NCG>. Sekvenční algoritmus se nachází ve složce *01_sekvencni*.

3.4.1 Vektorizace

Algoritmus sice počítá s maticemi, ale během výpočtu se porovnávají čísla, která v dané matici nemusí vůbec sousedit (navíc se porovnávají pouze dvě

Obrázek 4: Úspěšně vektorizovaný cyklus.

```
floydWarshall.cpp:90: note: vectorizing stmts using SLP.BASIC BLOCK VECTORIZATION
floydWarshall.cpp:90: note: basic block vectorized using SLP
```

```
for ( unsigned k = 0; k < tmp; k++ ) {
    unsigned i;
    #pragma omp parallel for private( i, novaVzdalenost ) shared( dchudcePredchozi, predchudceAktualni )
    for ( i = 0; i < tmp; i++ ) {
        for ( unsigned j = 0; j < tmp; j++ ) {
```

čísla: jedno na indexu (i,j) a druhé, které je součtem dvou čísel na indexech (i,k) a (k,j)). Z výpisu 4 je patrné, že v programu je vektorizován pouze cyklus pro inicializaci matic.

4 Paralelní algoritmus pomocí knihovny OpenMP

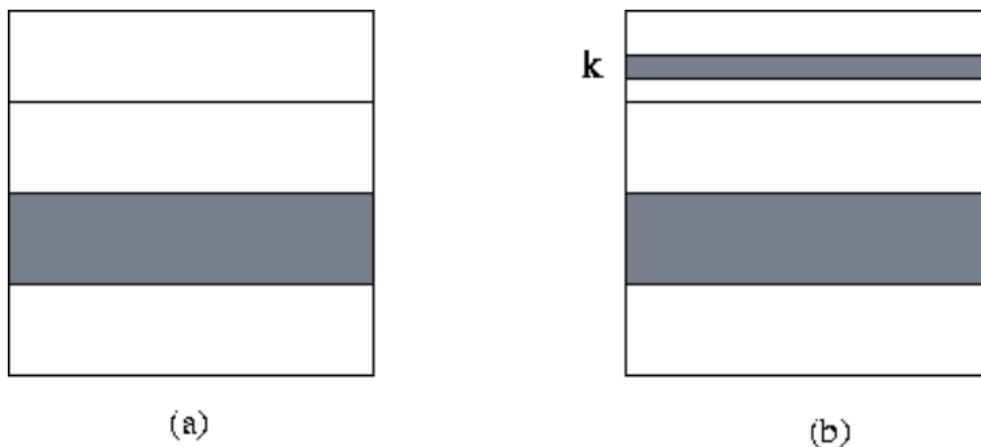
4.1 Dijkstrův algoritmus

Paralelizace algoritmu spočívá v paralelizaci cyklu, který prochází jednotlivé uzly a pro ně řeší problém hledání nejkratší cesty v grafu z jednoho počátečního uzlu. Každé vlákno tedy zpracovává jeden uzel jako počáteční a z něj hledá nejkratší cesty do všech ostatních uzlů.

4.1.1 Paměťové struktury

Každé vlákno dostane ukazatel na strukturu grafu. Protože všechna vlákna používají strukturu grafu pouze ke čtení, nedochází při přístupu k této struktuře k žádným datovým hazardům.

Každé vlákno si vytvoří jeden objekt, ve kterém si alokuje vlastní pole vzdáleností a předchůdců, které používá pro své výpočty. Tyto struktury jsou po ukončení funkce vlákna dealokovány společně s objektem.



Obrázek 5: Ukázka dat přidělených jednomu vláknu při paralelizaci jednoho cyklu [1].

4.1.2 Úprava algoritmu

Z důvodu paralelizace algoritmu bylo nutné upravit použitou prioritní frontu. V sekvenčním řešení byla použita implementace pomocí binární haldy 3.2.1. Z důvodu paralelizace výběru minima z fronty je pro paralelní řešení výhodnější použít implementaci polem.

4.2 Floyd-Warshallův algoritmus

Díky třem vnořeným sekvenčnímu algoritmu existuje několik možností, jak algoritmus paralelizovat.

4.2.1 První varianta

První variantou je algoritmus paralelizovat pouze v jednom cyklu, který definuje, která řádka je právě zpracovávána. Vlákna čtou z matice W_k a zapisují do přidělených řádků v matici W_{k+1} ². Přidělené řádky jsou navzájem disjunktní, takže nehrozí konflikt zápisů jednotlivými vlákny (viz obrázek 5).

²V každém kroku je potřeba pouze jedna matice z předchozí iterace a jedna matice pro zápis nalezených cest. Na konci každé iterace se pak prohodí matice aktuální s maticí předchozí a mohou se tak nepotřebná starší data přepisovat.

4.2.2 Druhá varianta

Druhou variantou, jak problém paralelizovat je použít původní variantu a přidat paralelizaci zároveň ve vnitřním cyklu, který prochází jednotlivé sloupce matice. V takovém případě by jednomu vláknu byl přidělen jeden nebo více necelých řádků ohraničených sloupci. Tato varianta se jeví vhodnější pouze při velkém počtu dostupných vláken, proto není v naší implementaci použita.

4.3 Optimalizace implementace

4.3.1 Optimalizace vytváření vláken

Z měření algoritmu Floyd-Warshall v sekci 4.4.2 bylo zjištěno, že implementace v každé iteraci vnějšího cyklu vytváří a spouští nová vlákna, která po skončení vnitřního cyklu ukončí a v další iteraci proces opakuje. Proto byla paralelizace vláken upravena tak, aby na začátku vnějšího cyklu algoritmus vytvořil příslušný počet vláken, kterým pak v jednotlivých iteracích přiděloval práci. Grafy s touto optimalizací mají tvar **_v2.png*. Výsledky měření jsou prezentovány v kapitole 4.4.4.

4.3.2 Odstranění výpočtu předchůdců

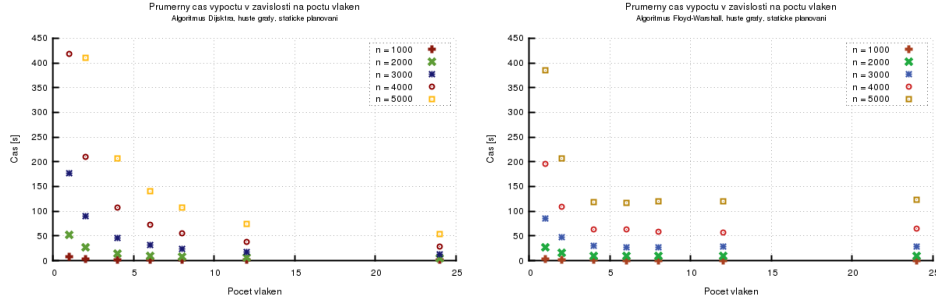
Protože zadáním této práce nebylo získat matici předchůdců, je v algoritmu zbytečné udržovat informaci o předchůdcích jednotlivých uzlů. Proto byly v rámci další optimalizace odstraněny veškeré výpočty, které se týkaly matice předchůdců. Výsledek byl znovu naměřen a výsledky jsou prezentovány v kapitolách 4.4.5.

4.4 Měření

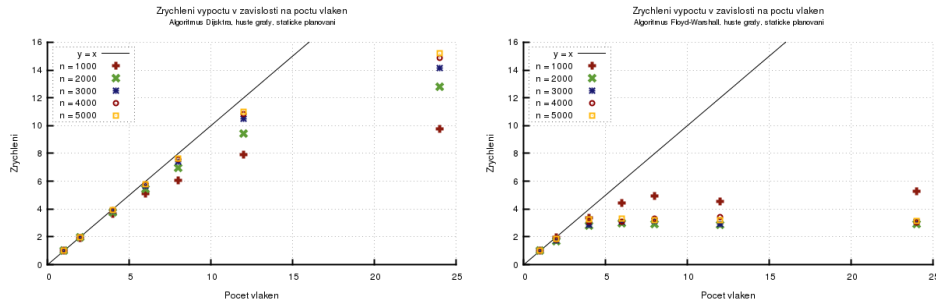
Na obou algoritmech bylo provedeno měření, které si klade za cíl analyzovat čas, zrychlení a efektivitu použitého paralelního algoritmu. Měření bylo prováděno na hustých grafech, kde při generování grafů byla použita pravděpodobnost 0.5, že mezi dvěma uzly existuje hrana.

4.4.1 Testovací data

Byly vygenerovány 2 testovací sady dat. Obě sady obsahují 25 grafů, kde pro každé n (počet uzlů) z 1000, 2000, 3000, 4000 a 5000 je vygenerováno



Obrázek 6: Závislost průměrného času výpočtu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování.



Obrázek 7: Závislost zrychlení paralelního algoritmu oproti sekvenčnímu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování.

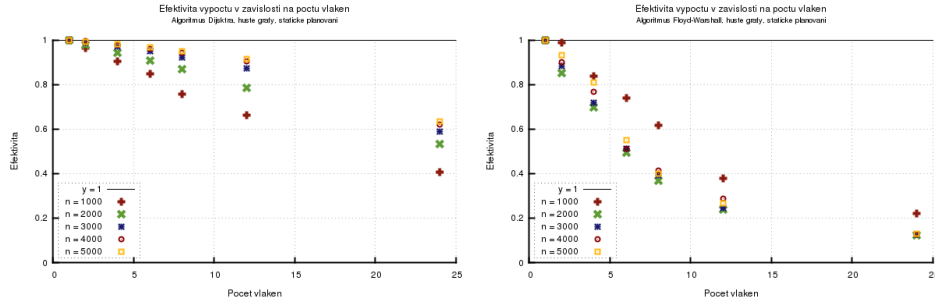
5 náhodných grafů. Jedna sada obsahuje *husté* grafy s pravděpodobností hrany 50%, druhá obsahuje *řídke* grafy s pravděpodobností hrany 1%. Měření probíhalo na serveru `star2.fit.cvut.cz` na stroji *gpu-02* pro počet vláken p 1, 2, 4, 6, 8, 12 a 24.

Jako čas výpočtu pro dané n se vypočítal průměr z časů přes všech 5 grafů s odpovídajícím počtem uzlů.

4.4.2 Výsledky

Grafy 6, 7 a 8 ukazují výsledky měření z pohledu času, zrychlení a efektivity.

Poměr rychlosti algoritmů v závislosti na hustotě grafu Graf 9 porovnává výpočetní časy při použití statického plánování v závislosti na hustotě grafu. Z grafů vyplývá, že oba algoritmy jsou téměř nezávislé na hustotě



Obrázek 8: Závislost efektivity algoritmu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování.

grafu.

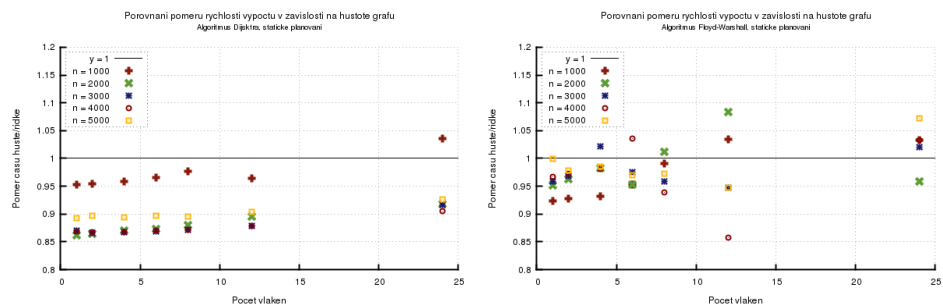
Poměr rychlosti algoritmů v závislosti na plánování Graf 10 zobrazuje poměr výpočetních časů v závislosti na použitém plánování. V porovnání byla použita plánování statické a dynamické. Z grafů je patrné, že plánování ovlivní čas výpočtu pouze nevýznamně a není tedy podstatné, jaké plánování je v algoritmu použito.

Statické plánování Při statickém plánování se iterace cyklu rovnoměrně rozdělí po blocích mezi všechna vlákna před začátkem provádění cyklu [5].

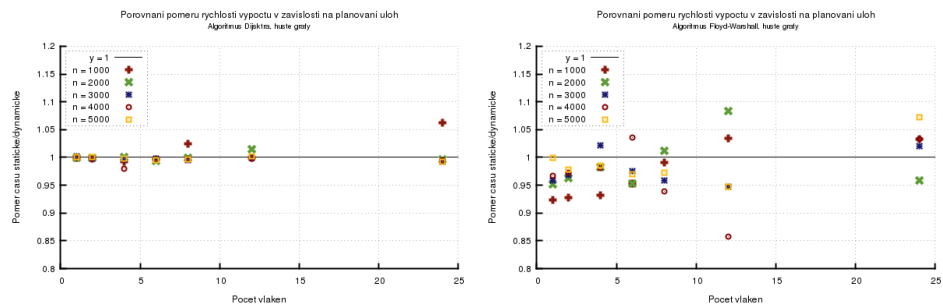
Dynamické plánování Dynamickým plánováním se rozumí rozdělení jednotlivých iterací vláknům po jedné iteraci. Vždy když vlákno dokončí iteraci, je mu přidělena další iterace [5].

4.4.3 Analýza

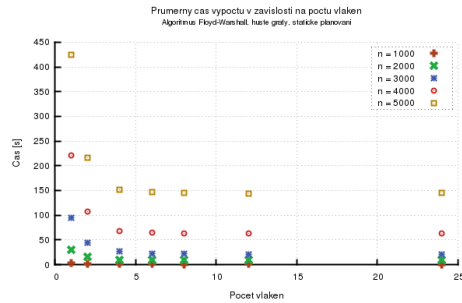
Dijkstra Z grafů 6 je vidět klesající dobu výpočtu v závislosti na počtu vláken. Zrychlení, které je zobrazeno v grafu 7 na počátku stoupá téměř lineárně a teprve pro větší počet vláken se zmírňuje. Toto nelineární zrychlení může způsobit například přístup do paměti, protože se vzrůstajícím počtem vláken klesá relativní velikost cache pro každé z vláken. Z výše uvedeného vyplývá efektivita, která je zobrazena v grafu 8.



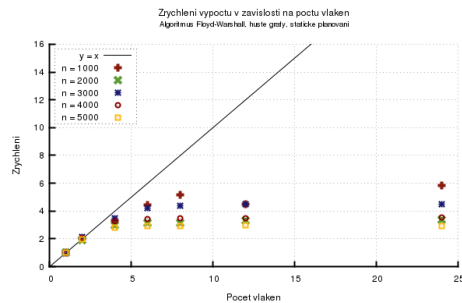
Obrázek 9: Porovnání poměru rychlostí výpočtu v závislosti na hustotě grafu při použití statického plánování.



Obrázek 10: Porovnání poměru rychlostí výpočtu v závislosti na použitém plánování.



Obrázek 11: Závislost průměrného času výpočtu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.1.



Obrázek 12: Závislost zrychlení paralelního algoritmu oproti sekvenčnímu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.1.

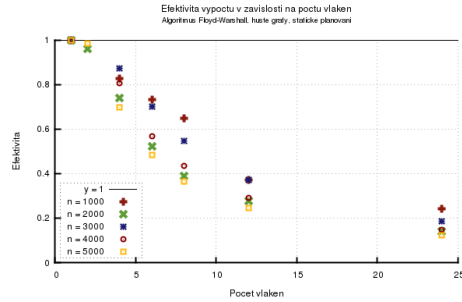
Floyd-Warshallův algoritmus U Floyd-Warshallova algoritmu se výpočetní čas pro počty vláken větší než 3 téměř nezkracuje. Zrychlení je tedy patrné pouze při použití 2 případně 4 vláček. Z výše uvedeného plyne, že efektivita paralelního algoritmu velmi rychle klesá.

4.4.4 Optimalizace vláken Floyd-Warshallova algoritmu

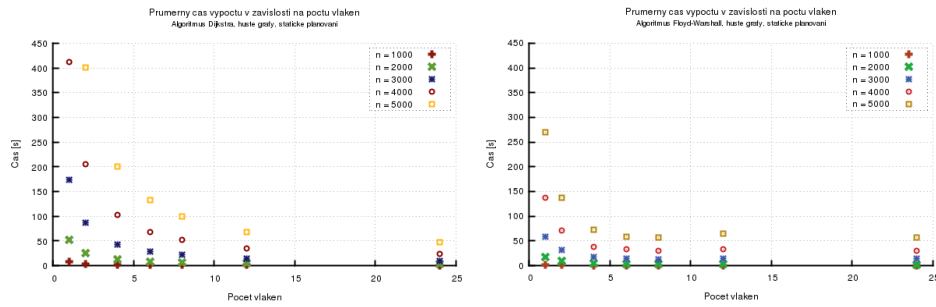
Výsledky měření po implementaci optimalizace 4.3.1 Floyd-Warshallova algoritmu.

4.4.5 Optimalizace odstraněním předchůdců obou algoritmů

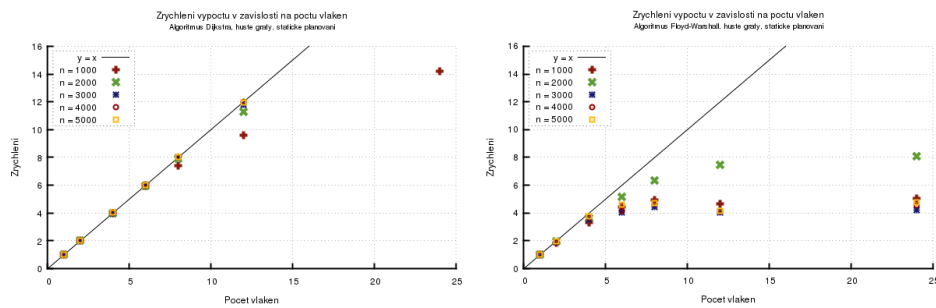
Výsledky měření obou algoritmů po implementaci optimalizace 4.3.2.



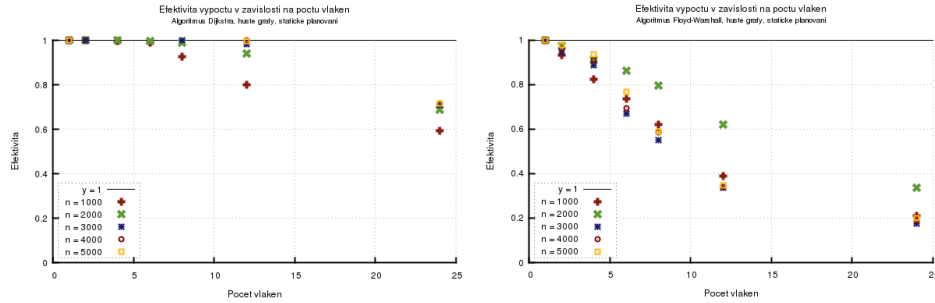
Obrázek 13: Závislost efektivity algoritmu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.1.



Obrázek 14: Závislost průměrného času výpočtu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.2.



Obrázek 15: Závislost zrychlení paralelního algoritmu oproti sekvenčnímu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.2.



Obrázek 16: Závislost efektivity algoritmu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.2.

4.4.6 Zhodnocení

Efektivita Dijkstrova algoritmu s přidáváním vláken pomalu klesá a například pro 24 vláken dosahuje hodnoty 0.5. Naproti tomu u Floyd-Warshallova algoritmu klesá efektivita mnohem rychleji a na hodnotě 0.5 se nachází už pro 6 vláken.

Výrazně lépe ve prospěch Dijkstrova paralelního algoritmu vycházejí i ostatní ukazatele – zrychlení a čas výpočtu.

Výsledky Floyd-Warshallova algoritmu mohou být způsobeny opakovaným vytvářením a rušením vláken. V každém vnějším cyklu se vytvoří daný počet vláken, zpracuje jeden uzel a všechna tato vytvořená vlákna se opět ukončí. Tedy za běhu algoritmu se vytváří a ruší $pocet_uzlu \times vlaken$, kde parametr *vlaken* je počet najednou vytvářených paralelních vláken.

Reference

- [1] Foster, I.: Case Study: Shortest-Path Algorithms. 1995, [cit. 2015-04-13].
URL <http://www.mcs.anl.gov/~itf/dbpp/text/node35.html>
- [2] Mička, P.: Dijkstrův algoritmus. [cit. 2015-04-08].
URL <http://www.algoritmy.net/article/5108/Dijkstruv-algoritmus>
- [3] Mička, P.: Floyd-Warshallův algoritmus. [cit. 2015-04-08].
URL <http://www.algoritmy.net/article/5207/Floyd-Warshalluv-algoritmus>
- [4] Mička, P.: Problém nejkratší cesty. [cit. 2015-04-08].
URL <http://www.algoritmy.net/article/36597/Nejkratsi-cesta>
- [5] Šimeček, I.: Technologie OpenMP. 2014, [cit. 2015-04-14].
URL https://edux.fit.cvut.cz/courses/MI-PAP/_media/lectures/omp.pdf
- [6] Šimeček, I.; Šoch, M.: Použití vektorizace v C/C++. 2015, [cit. 2015-04-13].
URL https://edux.fit.cvut.cz/courses/MI-PAP/_media/lectures/vektORIZACE.pdf