Fakulta informačních technologií

Paralelní architektury počítačů

technická zpráva

Hledání nejkratších cest v grafu

Autoři:
Vojtěch Myslivec
Zdeněk Nový

11. května 2015

Abstrakt

Účelem této práce je sumarizovat výsledky měření řešení problému hledání nejkratších cest v grafu (NCG). Práce se zaměřuje na řešení problému Dijkstrovým a Floyd-Warshallovým algoritmem a porovnání sekvenční a několika paralelních implementací.

Klíčová slova Dijkstra, Floyd-Warshall, nejkratší cesty, NCG, OpenMP, Cuda

Obsah

1 Úvod

Tato práce se zabývá implementací dvou algoritmů hledání nejkratších cest v grafu. Jedná se o implementaci sekvenčním algoritmem, který je poté paralelizován pro procesor a pro grafickou kartu. Pro jednotlivé algoritmy je provedeno měření, které si klade za cíl určit zrychlení paralelních algoritmů proti sekvenčnímu.

2 Hledání nejkratších cest v grafu

2.1 Definice

Hledání nejkratších cest v grafu je NP-úplná grafová úloha, jejímž cílem je nalézt v zadaném grafu nejkratší cesty mezi všemi možnými dvojicemi uzlů A a B [5].

2.2 Algoritmy

2.2.1 Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus slouží k nalezení všech nejkratších cest ze zadaného uzlu do všech ostatních uzlů grafu. Graf nesmí obsahovat hrany se zápornou délkou [3].

Princip Dijkstrův algoritmus je zobecněné prohledávání grafu do šířky, při kterém se vlna šíří na základě vzdálenosti od zdrojového uzlu. K uchovávání uzlů slouží prioritní fronta, která je řazena podle vzrůstající vzdálenosti od zdroje. V každém kroku algoritmu je vybrán uzel s nejmenší vzdáleností a pro každého souseda je vypočítána jeho vzdálenost od zdrojového uzlu [3].

2.2.2 Floyd-Warshallův algoritmus

Floyd-Warshallův algoritmus slouží k nalezení nejkratších cest mezi všemi dvojicemi uzlů v grafu. Graf může obsahovat hrany – nikoliv však cykly – se zápornou hodnotou délky[1] [4].

[1] Pokud má graf cyklus se zápornou hodnotou délky, postrádá úloha nejkratších cest smysl.

Princip Floyd-Warhsallův algoritmus pracuje s maticí sousednosti, kde hrana je ohodnocena vahou. Na počátku tato matice obsahuje pouze vzdálenosti dvou uzlů, mezi kterými je vedena hrana. V každém kroku je vybrán jeden uzel jako prostředník. Prvek matice sousednosti se přepočítá, pokud je vzdálenost z počátečního do koncového uzlu kratší přes nového prostředníka než bez něj [4].

3 Sekvenční algoritmus

3.1 Společná implementace

Oba algoritmy vycházejí z obecného principu, který je popsán v kapitole 2.2.2. Algoritmy pracují s grafem, který je programu předložen jako soubor, ve kterém je graf ve formě matice sousednosti. Společnou částí je tedy načítání vstupu a jeho kontrola.

3.2 Dijkstrův algoritmus

Protože Dijkstrův algoritmus slouží k hledání nejkratších cest od jednoho zdrojového uzlu, je nutné jej spouštět pro každý uzel grafu. To zajišťuje funkce *dijkstraNtoN*.

3.2.1 Dijkstrův algoritmus z jednoho zdroje

Pro výpočet Dijkstrova algoritmu z jednoho zdrojového uzlu se alokují tři pole o velikosti počtu uzlů. V jednom je uložena vzdálenost daného uzlu od zdrojového, ve druhém předchozí uzel v nalezené nejkratší cestě. Třetí pole určuje, jestli je už uzel uzavřený pro výpočty.

Algoritmus prochází postupně, podle nejmenší vzdálenosti, všechny uzly, které se nacházejí v prioritní frontě. Z daného uzlu vypočítá pro každého svého souseda novou cestu, která by vedla přes uzel samotný a porovná ji s dosavadní vzdáleností souseda. Menší vzdálenost je zapsána do pole vzdáleností a algoritmus pokračuje.

Prioritní fronta Za účelem prioritní fronty byla implementována binární halda, kde složitost výběru minima je logaritmická, oproti nativní implementaci pomocí pole, kde je složitost výběru minima lineární.

Obrázek 1: Úspěšně vektorizovaný cyklus.

```
dijkstra.cpp:38: note: LOOP VECTORIZED.
dijkstra.cpp:28: note: vectorized 1 loops in function.

for ( unsigned j = 0; j < pocetUzlu; j++ ) {
        vzdalenostM[i][j] = DIJKSTRA_NEKONECNO;
        predchudceM[i][j] = DIJKSTRA_NEDEFINOVANO;
}

dijkstra.cpp:99: note: not vectorized: number of iterations cannot be co
dijkstra.cpp:99: note: bad loop form.
dijkstra.cpp:82: note: vectorized 0 loops in function.
```

Obrázek 2: Cyklus, který se nepodařilo vektorizovat.

```
dijkstra.cpp:99: note: not vectorized: number of iterations cannot be co
dijkstra.cpp:99: note: bad loop form.
dijkstra.cpp:82: note: vectorized 0 loops in function.

for ( unsigned i = 0 ; i < pocetUzlu ; i++ ) {
        vzdalenostM[idUzlu][i] = vzdalenost[i];
        predchudceM[idUzlu][i] = predchudce[i];
}
```

3.2.2 Vektorizace

Pomocí přepínačů optimalizace *-O3* a podpory vektorových sad *-msse4.2* kompilátoru *gcc* byla zapnuta podpora vektorizace cyklů [7]. Pro záznam o pokusech vektorizace byl použit přepínač *-ftree-vectorizer-verbose=n*, kde za *n* byly dosazeny 1, 3, 5, kde čím vyšší číslo, tím podrobnější informace [7].

Samotný algoritmus je velmi sekvenční. V každém kroku se vybere minimum z prioritní fronty — jinými slovy ze složitější struktury — a přepíší se hodnoty uzlu ve frontě. Tyto operace nelze nijak vektorizovat a v průběhu výpočtu (kromě počáteční inicializace polí) se nevyskytují žádné prvky vedle sebe ani pro čtení ani pro zápis.

Obrázek 3: Upravený cyklus, aby mohl být vektorizován.

```
Vectorizing loop at dijkstra.cpp:99
dijkstra.cpp:99: note: LOOP VECTORIZED.
dijkstra.cpp:82: note: vectorized 1 loops in function.

unsigned tmp = pocetUzlu;
for ( unsigned i = 0 ; i < tmp ; i++ ) {
        vzdalenostM[idUzlu][i] = vzdalenost[i];
        predchudceM[idUzlu][i] = predchudce[i];
}
```

Původní stav Na obrázcích 1 a 2 je znázorněn příklad jednoho z cyklů, který byl vektorizován a jiný cyklus, který se nepodařilo vektorizovat z důvodu neznámého počtu iterací.

Optimalizace Výpis 3 ukazuje úspěšnou úpravu cyklu, který se díky změně zdrojového kódu podařilo vektorizovat.

3.3 Floyd-Warshallův algoritmus

Floyd-Warshallův algoritmus obsahuje tři vnořené for cykly a funguje na principu popsaném v 2.2.2. Jako datové struktury používá čtyři matice o velikosti počtu uzlů × počet uzlů. Pro každý uzel si algoritmus udržuje aktuální vzdálenosti ke všem uzlům a navíc vzdálenosti z předchozí iterace. Další dvě matice obsahují předchozí uzel v nalezené cestě.

3.4 Implementace

Aktuální implementace je k nahlédnutí i ke stažení na adrese `https://github.com/VojtechMyslivec/PAP-NCG`. Sekvenční algoritmus se nachází ve složce *01_sekvencni*.

3.4.1 Vektorizace

Algoritmus sice počítá s maticemi, ale během výpočtu se porovnávají čísla, která v dané matici nemusí vůbec sousedit (navíc se porovnávají pouze dvě

Obrázek 4: Úspěšně vektorizovaný cyklus.

```
floydWarshall.cpp:90: note: vectorizing stmts using SLP.BASIC BLOCK VEC
floydWarshall.cpp:90: note: basic block vectorized using SLP

for ( unsigned k = 0; k < tmp; k++ ) {
        unsigned i;
        #pragma omp parallel for private( i, novaVzdalenost ) shared( d
dchudcePredchozi, predchudceAktualni )
        for ( i = 0; i < tmp; i++ ) {
                for ( unsigned j = 0; j < tmp; j++ ) {
```

čísla: jedno na indexu *(i,j)* a druhé, které je součtem dvou čísel na indexech *(i,k)* a *(k,j)*). Z výpisu 4 je patrné, že v programu je vektorizován pouze cyklus pro inicializaci matic.

4 Paralelní algoritmus pomocí knihovny OpenMP

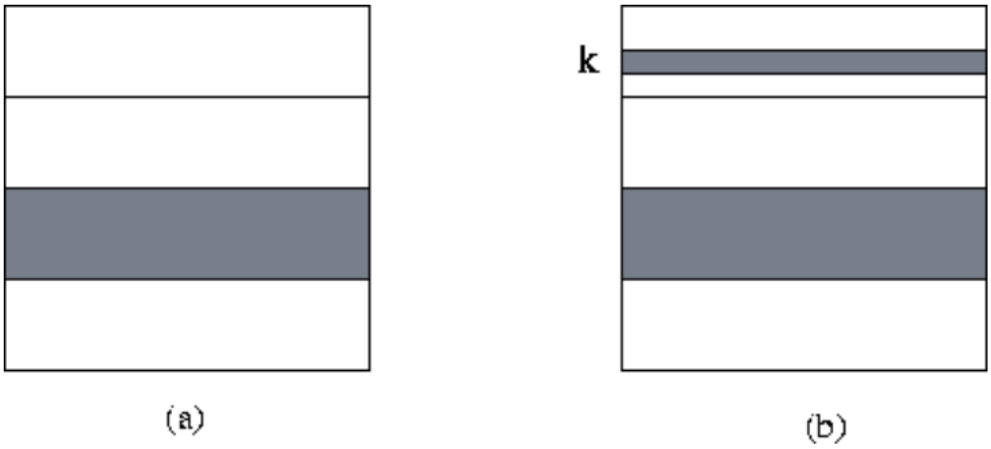
4.1 Dijkstrův algoritmus

Paralelizace algoritmu spočívá v paralelizaci cyklu, který prochází jednotlivé uzly a pro ně řeší problém hledání nejkratší cesty v grafu z jednoho počátečního uzlu. Každé vlákno tedy zpracovává jeden uzel jako počáteční a z něj hledá nejkratší cesty do všech ostatních uzlů.

4.1.1 Paměťové struktury

Každé vlákno dostane ukazatel na strukturu grafu. Protože všechna vlákna používají strukturu grafu pouze ke čtení, nedochází při přístupu k této struktuře k žádným datovým hazardům.

Každé vlákno si vytvoří jeden objekt, ve kterém si alokuje vlastní pole vzdáleností a předchůdců, které používá pro své výpočty. Tyto struktury jsou po ukončení funkce vlákna dealokovány společně s objektem.



Obrázek 5: Ukázka dat přidělených jednomu vláknu při paralelizaci jednoho cyklu [2].

4.1.2 Úprava algoritmu

Z důvodu paralelizace algoritmu bylo nutné upravit použitou prioritní frontu. V sekvenčním řešení byla použita implementace pomocí binární haldy 3.2.1. Z důvodu paralelizace výběru minima z fronty je pro paralelní řešení výhodnější použít implementaci polem.

4.2 Floyd-Warshallův algoritmus

Díky třem vnořeným sekvenčního algoritmu existuje několik možností, jak algoritmus paralelizovat.

4.2.1 První varianta

První variantou je algoritmus paralelizovat pouze v jednom cyklu, který definuje, která řádka je právě zpracovávána. Vlákna čtou z matice W_k a zapisují do přidělených řádků v matici W_{k+1}[2]. Přidělené řádky jsou navzájem disjunktní, takže nehrozí konflikt zápisů jednotlivými vlákny (viz obrázek 5).

[2]V každém kroku je potřeba pouze jedna matice z předchozí iterace a jedna matice pro zápis nalezených cest. Na konci každé iterace se pak prohodí matice aktuální s maticí předchozí a mohou se tak nepotřebná starší data přepisovat.

4.2.2 Druhá varianta

Druhou variantou, jak problém paralelizovat je použít původní variantu a přidat paralelizaci zároveň ve vnitřním cyklu, který prochází jednotlivé sloupce matice. V takovém případě by jednomu vláknu byl přidělen jeden nebo více necelých řádků ohraničených sloupci. Tato varianta se jeví vhodnější pouze při velkém počtu dostupných vláken, proto není v naší implementaci použita.

4.3 Optimalizace implementace

4.3.1 Optimalizace vytváření vláken

Z měření algoritmu Floyd-Warshall v sekci 4.4.2 bylo zjištěno, že implementace v každé iteraci vnějšího cyklu vytváří a spouští nová vlákna, která po skončení vnitřního cyklu ukončí a v další iteraci proces opakuje. Proto byla paralelizace vláken upravena tak, aby na začátku vnějšího cyklu algoritmus vytvořil příslušný počet vláken, kterým pak v jednotlivých iteracích přidělo-val práci. Grafy s touto optimalizací mají tvar **_v2.png*. Výsledky měření jsou prezentovány v kapitole 4.4.4.

4.3.2 Odstranění výpočtu předchůdců

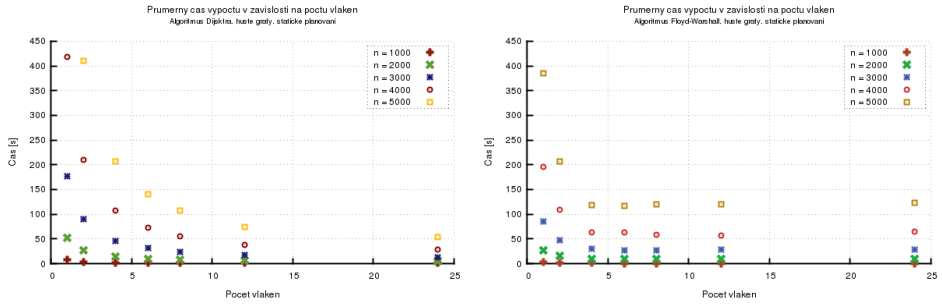
Protože zadáním této práce nebylo získat matici předchůdců, je v algoritmu zbytečné udržovat informaci o předchůdcích jednotlivých uzlů. Proto byly v rámci další optimalizace odstraněny veškeré výpočty, které se týkaly matice předchůdců. Výsledek byl znovu naměřen a výsledky jsou prezentovány v kapitolách 4.4.5.

4.4 Měření

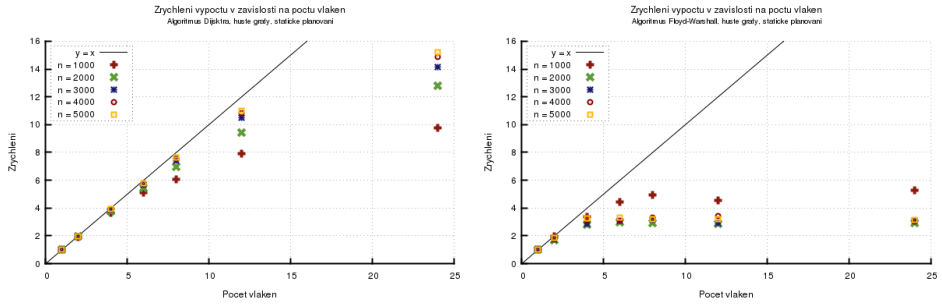
Na obou algoritmech bylo provedeno měření, které si klade za cíl analyzovat čas, zrychlení a efektivitu použitého paralelního algoritmu. Měření bylo prováděno na hustých grafech, kde při generování grafů byla použita pravděpodobnost 0.5, že mezi dvěmi uzly existuje hrana.

4.4.1 Testovací data

Byly vygenerovány 2 testovací sady dat. Obě sady obsahují 25 grafů, kde pro každé n (počet uzlů) z 1000, 2000, 3000, 4000 a 5000 je vygenerováno



Obrázek 6: Závislost průměrného času výpočtu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování.



Obrázek 7: Závislost zrychlení paralelního algoritmu oproti sekvenčnímu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování.

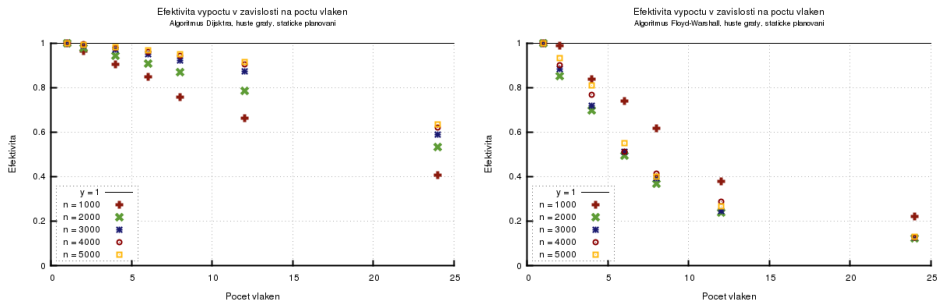
5 náhodných grafů. Jedna sada obsahuje *husté* grafy s pravděpodobností hrany 50%, druhá obsahuje *řídké* grafy s pravděpodobností hrany 1%. Měření probíhalo na serveru `star2.fit.cvut.cz` na stroji *gpu-02* pro počet vláken p 1, 2, 4, 6, 8, 12 a 24.

Jako čas výpočtu pro dané n se vypočítal průměr z časů přes všech 5 grafů s odpovídajícím počtem uzlů.

4.4.2 Výsledky

Grafy 6, 7 a 8 ukazují výsledky měření z pohledu času, zrychlení a efektivity.

Poměr rychlosti algoritmů v závislosti na hustotě grafu Graf 9 porovnává výpočetní časy při použití statického plánování v závislosti na hustotě grafu. Z grafů vyplývá, že oba algoritmy jsou téměř nezávislé na hustotě



Obrázek 8: Závislost efektivity algoritmu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování.

grafu.

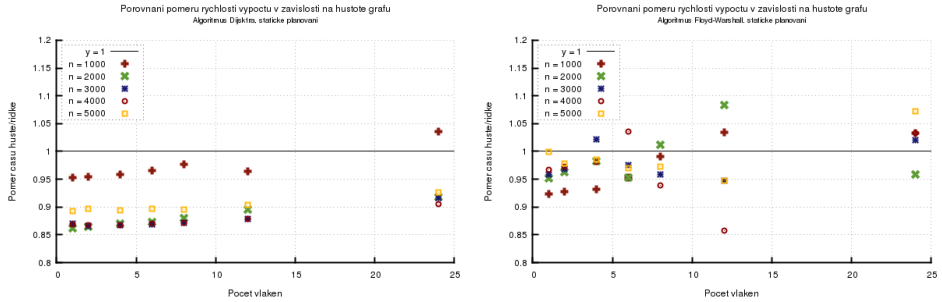
Poměr rychlosti algoritmů v závislosti na plánování Graf 10 zobrazuje poměr výpočetních časů v závislosti na použitém plánování. V porovnání byla použita plánování statické a dynamické. Z grafů je patrné, že plánování ovlivní čas výpočtu pouze nevýznamně a není tedy podstatné, jaké plánování je v algoritmu použito.

Statické plánování Při statickém plánování se iterace cyklu rovnoměrně rozdělí po blocích mezi všechna vlákna před začátkem provádění cyklu [6].

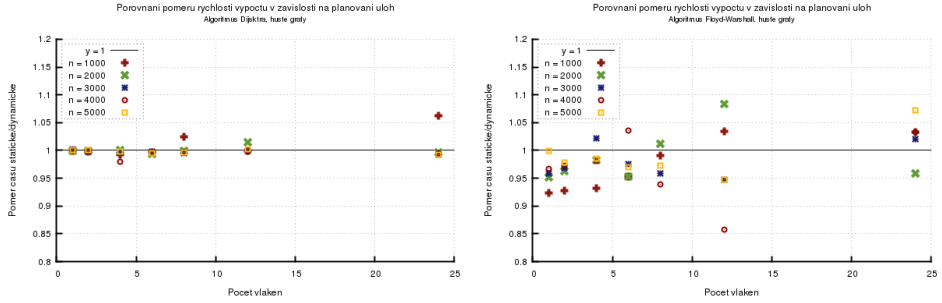
Dynamické plánování Dynamickým plánováním se rozumí rozdělení jednotlivých iterací vláknům po jedné iteraci. Vždy když vlákno dokončí iteraci, je mu přidělena další iterace [6].

4.4.3 Analýza

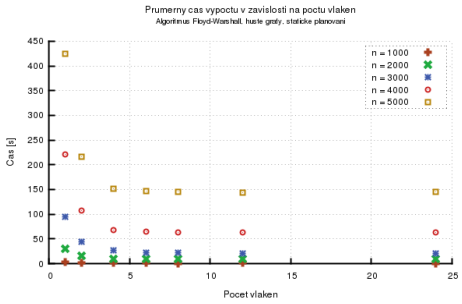
Dijkstra Z grafů 6 je vidět klesající dobu výpočtu v závislosti na počtu vláken. Zrychlení, které je zobrazeno v grafu 7 na počátku stoupá téměř lineárně a teprve pro větší počet vláken se zmírňuje. Toto nelineární zrychlení může způsobit například přístup do paměti, protože se vzrůstajícím počtem vláken klesá relativní velikost cache pro každé z vláken. Z výše uvedeného vyplývá efektivita, která je zobrazena v grafu 8.



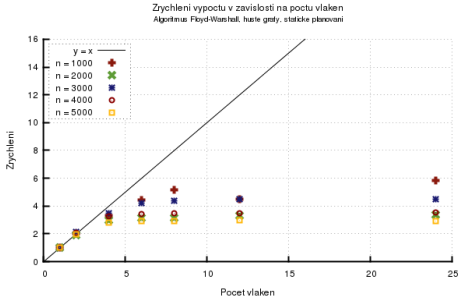
Obrázek 9: Porovnání poměru rychlostí výpočtu v závislosti na hustotě grafu při použití statického plánování.



Obrázek 10: Porovnání poměru rychlostí výpočtu v závislosti na použitém plánování.



Obrázek 11: Závislost průměrného času výpočtu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.1.



Obrázek 12: Závislost zrychlení paralelního algoritmu oproti sekvenčnímu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánovánípo optimalizaci 4.3.1.

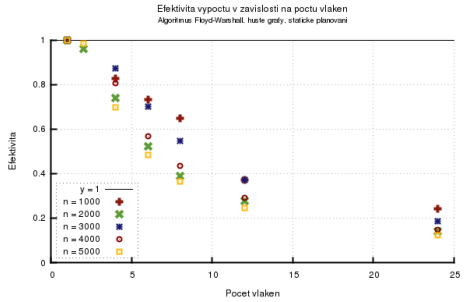
Floyd-Warshallův algoritmus U Floyd-Warshallova algoritmu se výpočetní čas pro počty vláken větší než 3 téměř nezkracuje. Zrychlení je tedy patrné pouze při použití 2 případně 4 vláknech. Z výše uvedené plyne, že efektivita paralelního algoritmu velmi rychle klesá.

4.4.4 Optimalizace vláken Floyd-Warshallova algoritmu

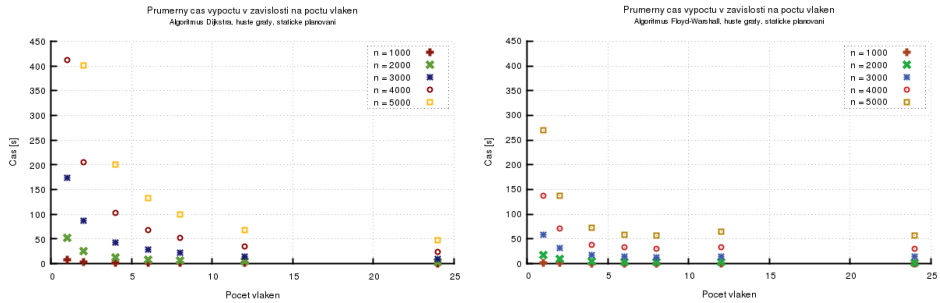
Výsledky měření po implementaci optimalizace 4.3.1 Floyd-Warshallova algoritmu.

4.4.5 Optimalizace odstraněním předchůdců obou algoritmů

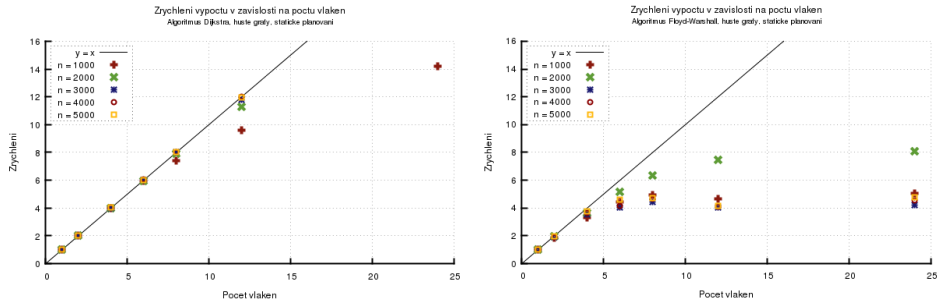
Výsledky měření obou algoritmů po implementaci optimalizace 4.3.2.



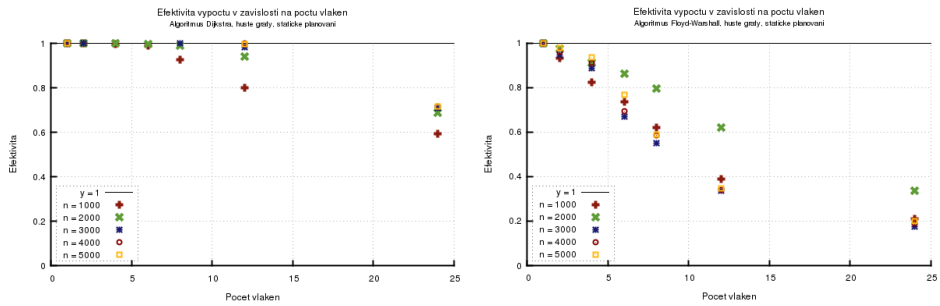
Obrázek 13: Závislost efektivity algoritmu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.1.



Obrázek 14: Závislost průměrného času výpočtu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.2.



Obrázek 15: Závislost zrychlení paralelního algoritmu oproti sekvenčnímu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánovánípo optimalizaci 4.3.2.



Obrázek 16: Závislost efektivity algoritmu v závislosti na počtu vláken za použití statického plánování po optimalizaci 4.3.2.

4.4.6 Zhodnocení

Efektivita Dijkstrova algoritmu s přidáváním vláken pomalu klesá a například pro 24 vláken dosahuje hodnoty 0.5. Naproti tomu u Floyd-Warshallova algoritmu klesá efektivita mnohem rychleji a na hodnotě 0.5 se nachází už pro 6 vláken.

Výrazně lépe ve prospěch Dijkstrova paralelního algoritmu vycházejí i ostatní ukazatele – zrychlení a čas výpočtu.

Výsledky Floyd-Warshallova algoritmu mohou být způsobeny opakovaným vytvářením a rušením vláken. V každém vnějším cyklu se vytvoří daný počet vláken, zpracuje jeden uzel a všechna tato vytvořená vlákna se opět ukončí. Tedy za běhu algoritmu se vytváří a ruší $pocet\_uzlu \times vlaken$, kde parametr *vlaken* je počet najednou vytvářených paralelních vláken.

5 Paralelní algoritmy pomocí technologie CUDA

5.1 Dijkstrův algoritmus

Paralelizace Dijkstrova algoritmu spočívá, stejně jako u technologie openMP 4.1, v paralelizaci cyklu, který prochází jednotlivé uzly a pro ně řeší problém hledání nejkratší cesty v grafu z jednoho počátečního uzlu. Každé vlákno na grafické kartě (GPU) [1] zpracovává jednu instanci s jedním uzlem jako počátečním a z něj hledá nejkratší cesty do všech ostatních uzlů. Na grafické kartě se tedy spouští v součtu N vláken.

Počet vláken Pomocí přepínače *-w* je možné specifikovat počet spouštěných warpů. Algoritmus si poté sám vypočte, jaký počet bloků a vláken je potřeba spustit pro daný počet uzlů *N*.

5.1.1 Paměť

Alokace paměti v programu, který počítá na grafické kartě je rozdílná od klasické alokace v RAM, kterou používá procesor. Pro alokaci paměti na grafické kartě je nutné využívat specializované funkce pro systém Cuda. Pro alokaci pole na grafické kartě je nutné nejprve alokovat pole na příslušnou velikost a poté ještě nakopírovat ukazatel na toto pole do paměti grafické karty. Pro dvojrozměrné pole, které v algoritmu využíváme, je nutné přidat ještě další krok kopírování *N* ukazatelů a pro každý z nich teprve alokovat příslušné pole.

Paměťové struktury na CPU V algoritmu je na CPU alokována *matice vzdáleností*, která je použita pro sběr výsledků, kam po skončení algoritmu vlákna z GPU kopírují své výsledky.

Paměťové struktury na GPU Na GPU je alokována a inicializována jedna instance grafu, která je kopií grafu, vytvořeného na CPU. Graf je přístupný všem vláknům a slouží pouze ke čtení, proto stačí pouze jedna instance. Dále je na GPU alokován celý objekt třídy *cDijkstra*, který obsahuje číslo výchozího uzlu, které je pro každé vlákno jiné, počet již uzavřených uzlů, celkový počet uzlů, ukazatel na společný graf a dvě jednorozměrná pole. První je pole *vzdáleností* k ostatním uzlům, které je inicializováno na *nekonečno*. Druhé pole *uzavřený* definuje již uzavřené uzly, ke kterým již byla nalezena nejkratší možná cesta.

5.1.2 Výpočet

Samotný výpočet již zajišťuje samotná třída *cDijkstra*, respektive její metoda *devSpustVypocet()*, která je spuštěna v každém vlákně. Protože vlákno již má všechny potřebné paměťové struktury, může počítat nejkratší cesty v grafu z daného výchozího uzlu, aniž by bylo nutné synchronizovat se s ostatními vlákny.

Kopírování a výpis výsledků Po skončení výpočtu na všech vláknech na GPU následuje kopírování výsledků zpět do paměti RAM tak, aby data byla přístupná z CPU. CPU pak pouze vypíše připravenou matici nejkratších vzdáleností v grafu.

5.2 Floyd-Warshallův algoritmus

5.2.1 Základní paralelní algoritmus

5.2.2 Bloková optimalizace

5.2.3 Fázová bloková optimalizace

5.2.4 Optimalizace pamětí

5.3 Měření

5.3.1 Analýza

5.3.2 Zhodnocení

6 Závěr

Reference

[1] Falcus, D.: Graphics Processing Unit (GPU). [cit. 2015-05-11].
URL http://www.nvidia.com/object/gpu.html

[2] Foster, I.: Case Study: Shortest-Path Algorithms. 1995, [cit. 2015-04-13].
URL http://www.mcs.anl.gov/~itf/dbpp/text/node35.html

[3] Mička, P.: Dijkstrův algoritmus. [cit. 2015-04-08].
URL http://www.algoritmy.net/article/5108/Dijkstruv-algoritmus

[4] Mička, P.: Floyd-Warshallův algoritmus. [cit. 2015-04-08].
URL http://www.algoritmy.net/article/5207/Floyd-Warshalluv-algoritmus

[5] Mička, P.: Problém nejkratší cesty. [cit. 2015-04-08].
URL http://www.algoritmy.net/article/36597/Nejkratsi-cesta

[6] Šimeček, I.: Technologie OpenMP. 2014, [cit. 2015-04-14].
URL https://edux.fit.cvut.cz/courses/MI-PAP/_media/lectures/omp.pdf

[7] Šimeček, I.; Šoch, M.: Použití vektorizace v C/C++. 2015, [cit. 2015-04-13].
URL https://edux.fit.cvut.cz/courses/MI-PAP/_media/lectures/vektorizace.pdf