



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Název: Asymetrický šifrovací algoritmus McEliece
Student: Bc. Vojtěch Myslivec
Vedoucí: prof. Ing. Róbert Lórencz, CSc.
Studijní program: Informatika
Studijní obor: Poítačová bezpečnost
Katedra: Katedra počítačových systémů
Platnost zadání: Do konce letního semestru 2016/17

Pokyny pro vypracování

Prostudujte asymetrický šifrovací algoritmus McEliece založený na binárních Goppa kódech. Proveďte rešerši existujících kryptoanalýz algoritmu McEliece a jeho variant. Zvažte metody zabývající se zkrácením velikosti klíče. Implementujte šifrovací a dešifrovací algoritmy a změřte jejich výpočetní časovou a prostorovou náročnost v závislosti na velikosti klíče.

Seznam odborné literatury

Dodá vedoucí práce.

L.S.

prof. Ing. Róbert Lórencz, CSc.
vedoucí katedry

prof. Ing. Pavel Tvrdík, CSc.
děkan

V Praze dne 2. února 2016

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
KATEDRA POČÍTAČOVÝCH SYSTÉMŮ



Diplomová práce

Asymetrický šifrovací algoritmus McEliece

Bc. Vojtěch Myslivec

Vedoucí práce: prof. Ing. Róbert Lórencz, CSc.

21. dubna 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů. V souladu s ust. § 46 odst. 6 tohoto zákona tímto uděluji nevýhradní oprávnění (licenci) k užití této mojí práce, a to včetně všech počítačových programů, jež jsou její součástí či přílohou, a veškeré jejich dokumentace (dále souhrnně jen „Dílo“), a to všem osobám, které si přejí Dílo užít. Tyto osoby jsou oprávněny Dílo užít jakýmkoli způsobem, který nesnižuje hodnotu Díla, a za jakýmkoli účelem (včetně užití k výdělečným účelům). Toto oprávnění je časově, teritoriálně i množstevně neomezené. Každá osoba, která využije výše uvedenou licenci, se však zavazuje udělit ke každému dílu, které vznikne (byť jen zčásti) na základě Díla, úpravou Díla, spojením Díla s jiným dílem, zařazením Díla do díla souborného či zpracováním Díla (včetně překladu), licenci alespoň ve výše uvedeném rozsahu a zároveň zpřístupnit zdrojový kód takového díla alespoň srovnatelným způsobem a ve srovnatelném rozsahu, jako je zpřístupněn zdrojový kód Díla.

V Praze dne 21. dubna 2016

.....

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta informačních technologií

© 2016 Vojtěch Myslivec. Všechna práva vyhrazena.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Českém vysokém učení technickém v Praze, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna právními předpisy a mezinárodními úmluvami o právu autorském a právech souvisejících s právem autorským. K jejímu užití, s výjimkou bezúplatných zákonných licencí, je nezbytný souhlas autora.

Odkaz na tuto práci

Myslivec, Vojtěch. *Asymetrický šifrovací algoritmus McEliece*. Diplomová práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2016.

Abstrakt

Tady bude nějaký kuuul abstakt

Klíčová slova McEliece, asymetrická kryptografie, postkvantová kryptografie, binární Goppa kódy, konečná tělesa, polynomy, Wolfram Mathematica

Abstract

Sem doplňte ekvivalent abstraktu Vaší práce v angličtině.

Keywords McEliece, public-key cryptography, post-quantum cryptography, binary Goppa codes, finite fields, polynomy, Wolfram Mathematica

Obsah

Úvod	1
1 Obecná algebra	3
1.1 Základní termíny	3
1.2 Reprezentace prvků	4
1.3 Operace v tělese $GF(p^n)$	4
1.4 Rozšířená tělesa	6
2 Lineární kódy	7
2.1 Kódování	7
2.2 Lineární kódy	7
2.3 Goppa kódy	7
3 Kryptosystém McEliece	9
3.1 Asymetrické šifrování McEliece	9
3.2 Niederreiterovo schéma	13
3.3 Elektronický podpis	15
3.4 Kryptoanalýza systému McEliece	17
3.5 Moderní varianty a úpravy	19
4 Implementace	21
4.1 Binární konečná tělesa	21
4.2 Ireducibilní binární Goppa kódy	32
4.3 McEliece	32
4.4 Měření	32
Závěr	33
Literatura	35

A Seznam použitých zkratek	37
B Obsah přiloženého CD	39

Seznam obrázků

Seznam tabulek

4.1	Prvky syntaxe jazyka softwaru <i>Mathematica</i>	24
-----	--	----

Úvod

Tato práce se zabývá asymetrickým kryptosystémem *McEliece*. Mezi největší přednosti tohoto systému patří jeho odolnost vůči kvantovým počítačům a je tak jedním z vhodných kandidátů pro asymetrickou kryptografii pro postkvantovou dobu.

V prvních kapitolách této práce jsou popsány nezbytné primitivy z oblasti matematiky a teorie kódování, které jsou potřeba pro pochopení a použití kryptosystému *McEliece*. Jedná se především o počítání s *konečnými tělesy* a *polynomy* (kapitola 1) a binární *Goppa* kódy (kapitola 2).

Kryptosystému *McEliece* se věnuje kapitola 3. Kromě základního popisu generování klíčů a algoritmů pro šifrování a dešifrování je probráno i *Niederreiterovo* schéma – „úprava“ kryptosystému *McEliece* pro získání *digitálního podpisu*. Jsou ukázány slabiny, nevýhody i možné útoky na kryptosystém *McEliece* a též zmíněna praktická varianta systému odolná vůči těmto aspektům.

V poslední části práce je probrána implementace kryptosystému *McEliece* v softwaru *Wolfram Mathematica* včetně změřených časových složitostí (kapitola 4),.

Obecná algebra

V kapitole jsou probrány definice a algoritmy nutné pro práci s *konečnými tělesy* a *polynomy* nad konečným tělesem. V práci se předpokládá základních znalostí z oblasti *algebry*. Pro tato témata je doporučena literatura [13, 12, 10, 11, 7] (kde lze též najít většinu důkazů následujících vět).

1.1 Základní termíny

Pro ujasnění je uvedena definice tělesa:

Definice 1 (Těleso) *Nechť M je neprázdná množina a $+$ a \cdot binární operace¹. Struktura $T = (M, +, \cdot)$ se nazývá těleso, pokud platí*

1. $(M, +)$ je komutativní grupa (nazývána aditivní)
2. $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ ² je grupa (nazývána multiplikativní)
3. Platí (levý i pravý) distributivní zákon:

$$\forall a, b, c \in M : (a(b + c) = ab + ac) \wedge ((b + c)a = ba + ca)$$

Těleso, které má konečný počet prvků, se nazývá konečné těleso.

Věta 1 *Nechť T je konečné těleso, pak jeho počet prvků (řád) je p^n , kde p je prvočíslo a $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$.*

Číslo p se nazývá *charakteristika*. Navíc platí, že všechna konečná tělesa se stejným počtem prvků jsou navzájem *izomorfní*. Konečné těleso řádu p^n je tedy dále označováno jako $GF(p^n)$ (z anglického *Galois field*, dle francouzského matematika *Évariste Galois*).

¹ Pro zjednodušení zápisu je \cdot často vynecháváno.

² Prvek 0 je nulový (neutrální) prvek aditivní grupy.

1.2 Reprezentace prvků

Jak bude ukázáno dále, je vhodné prvky tělesa $GF(p^n)$ reprezentovat jako *polynomy* s koeficienty z množiny $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, tedy prvek $a \in GF(p^n)$ lze zapsat:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, a_i \in \mathbb{Z}_p$$

O takovém polynomu říkáme, že je to *polynom nad tělesem $GF(p)$ (řádu maximálně $n-1$)*. Na prvek a je též možné se dívat jako na vektor či n -tici koeficientů a_i :

$$A(x) \cong a \cong (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0) \cong a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$$

V této práci se mezi těmito reprezentacemi prvků nadále volně přechází, jak bude v daném kontextu potřeba³.

1.3 Operace v tělese $GF(p^n)$

V následujících sekcích jsou probrány operace potřebné pro počítání s tělesy $GF(p^n)$. Konkrétní zvolené algoritmy a jejich implementace je detailně popsána v kapitole 4.

1.3.1 Sčítání

Sčítání v tělese $GF(p^n)$ je definováno stejně jako sčítání polynomů, s tím, že sčítání jednotlivých koeficientů je prováděno *modulo p* (v tělese $GF(p)$):

$$A(x) + B(x) = \sum a_i x^i + \sum b_i x^i = \sum |a_i + b_i|_p x^i$$

1.3.2 Násobení

Násobení v tělese $GF(p^n)$ nelze provádět „po složkách“, jako je tomu u sčítání. U takto definované operace by většina prvků neměla (multiplikativní) *inverzi* a nejednalo by se tak o *těleso*.

Při násobení prvků se opět využije jejich reprezentace pomocí polynomů. Výsledkem násobení pak je:

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = \sum_{i=0}^{2n-2} \left| \sum_{j+k=i} a_j \cdot b_k \right|_p x^i$$

Jak je naznačeno, násobení i sčítání koeficientů se provádí *modulo p* (v tělese $GF(p)$).

³ V některých materiálech se používá i obráceného zápisu $(a_0 a_1 \dots a_{p-1})$.

Kvůli uzavřenosti násobení v tělese je nutné zavést operaci $A(x) \bmod P(x)$, neboli zbytek po dělení polynomu $A(x)$ polynomem $P(x)$. Dále je třeba pro určení tělesa $GF(p^n)$ určit *ireducibilní* polynom, který bude použit při operaci násobení.

Definice 2 Polynom $P(x)$ nad tělesem $GF(p)$ je ireducibilní právě tehdy, když pro každé dva polynomy $A(x)$ a $B(x)$ nad $GF(p)$ platí:

$$A(x) \cdot B(x) = P(x) \Rightarrow (\deg(A(x)) = 0) \vee (\deg(B(x)) = 0)$$

Neboli pro *ireducibilní* polynom platí, že neexistuje rozklad na polynomy nad $GF(p)$ stupně alespoň 1.

Příklad Polynom $x^3 + x + 1$ je nad tělesem $GF(2)$ *ireducibilní*, protože neexistuje jeho rozklad na polynomy stupně alespoň 1.

Polynom $x^2 + 1$ není nad tělesem $GF(2)$ *ireducibilní*, protože:

$$(x + 1) \cdot (x + 1) = x^2 + |1 + 1|_2 x + 1 = x^2 + 1$$

Nyní je možné zavést operaci násobení dvou prvků tělesa jako násobení dvou polynomů *modulo* zadaný *ireducibilní* polynom:

$$A(x) \cdot B(x) = \sum a_i x^i \cdot \sum b_i x^i = \sum \left| \sum_{j+k=i} a_j \cdot b_k \right|_p x^i \bmod P(x)$$

Poznámka Pokud by zvolený $P(x)$ nebyl *ireducibilní*, jednalo by se o *okruh*, nikoliv o *těleso*, protože by neexistovala *multiplikativní inverze* pro některé prvky a navíc by i existovaly tzv. *dělitelé nuly*.

1.3.3 Umocňování

Pro rozšíření operací o opakované násobení je vhodné zavést operaci umocňování.

Definice 3 Pro prvek a tělesa T a číslo $n \in \mathbb{N}$ je operace umocňování definována následovně:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}} \\ a^{-n} &= \left(a^{-1}\right)^n \end{aligned}$$

Pro efektivní výpočet mocniny prvku je vhodné použít algoritmus *Square-and-Multiply*, kde se dílčí operace „square“ a „multiply“ provádí operací \cdot v daném tělese $GF(p^n)$.

1.3.4 Inverze

Inverzi v grupě lze obecně definovat následovně:

Definice 4 (Inverze) *Nechť a je prvkem $a \in \mathbb{O}$ neutrálním prvkem grupy $G = (M, \circ)$. Prvek \bar{a} je inverzí prvku a , pokud platí následující rovnice:*

$$a \circ \bar{a} = \mathbb{O}$$

1.3.4.1 Aditivní inverze

Inverze v *aditivní grupě* je značena znaménkem minus „ $-$ “ a je z definice velmi triviální:

$$|A(x) + (-A(x))|_p = 0 \Rightarrow -A(x) = \sum |-a_i|_p x^i$$

Neboli je to aditivní inverze jednotlivých koeficientů *modulo* p (v tělese $GF(p)$).

1.3.4.2 Multiplikativní inverze

Inverze v *multiplikativní grupě* je značena záporným exponentem „ $^{-1}$ “ či symbolem dělení.

$$\left| A(x) \cdot A(x)^{-1} \right|_p = \left| \frac{A(x)}{A(x)} \right|_p = 1$$

Tuto *multiplikativní inverzi* je třeba počítat *rozšířeným Euklidovým algoritmem pro polynomy (EEA)*, či případně jinými algoritmy, jako je např. *algoritmus Itoh-Teechai-Tsujii (ITT)* [11, 9].

Rozšířený Euklidův algoritmus pro polynomy, stejně jako v modulární aritmetice (neboli pro tělesa $GF(p)$), stojí na nalezení *Bézoutovy rovnosti*. Pro výpočet *EEA* je třeba výpočtu dělení polynomů se zbytkem⁴.

1.4 Rozšířená tělesa

Prvotěleso

⁴ Někdy uváděno jako dlouhé dělení.

Lineární kódy

2.1 Kódování

2.2 Lineární kódy

2.2.1 Hammingovy kódy

2.3 Goppa kódy

Irreducibilní binární Goppa kódy

Kryptosystém McEliece

Kryptosystém *McEliece* je asymetrický šifrovací algoritmus, publikovaný poprvé v roce 1978 Robertem McEliece [1]. V následujících kapitolách jsou probírány algoritmy navržené Robertem McEliece, dále *Niederreiterovo schéma* – varianta pro získání elektronického podpisu – a nakonec jsou zmíněny slabiny a existující útoky na tento kryptosystém.

Poznámka V této kapitole je nadále předpokládáno počítání s hodnotami z tělesa $GF(2)$, respektive s *bity*.

3.1 Asymetrické šifrování McEliece

Asymetrický kryptosystém *McEliece* je založený na lineárních samoopravných kódech. V následujících odstavcích systém popsán tak, jak byl definován v [1]:

3.1.1 Generování klíčů

Generování klíčů probíhá následovně:

1. Zvolí se *lineární kód*⁵ (n, k) , opravující t chyb (a pro který je znám efektivní dekódovací algoritmus) s odpovídající $k \times n$ *generující maticí* G .
2. Vygeneruje se *náhodná* $k \times k$ *regulární matice* S .
3. Vygeneruje se *náhodná* $n \times n$ *permutační matice* P .
4. Vypočítá se $k \times n$ matice $\hat{G} = SGP$.

Potom čísla k , n a t jsou *veřejné parametry* systému, matice \hat{G} je *veřejný klíč* a kód s maticí G a matice S a P jsou *soukromý klíč*.

⁵ V článku je kryptosystém definovaný pro libovolný *lineární kód* opravující zvolený počet chyb a jsou zmíněny *Goppa kódy* jako vhodný příklad k použití. Jak bude ukázáno dále, ne všechny lineární kódy jsou pro *McEliece* vhodné.

3.1.2 Algoritmy pro šifrování a dešifrování

3.1.2.1 Šifrování

Šifrování zprávy m (o délce k bitů) veřejným klíčem \hat{G} probíhá následujícím způsobem:

1. Vygeneruje se náhodný vektor z délky n s *Hammingovou vahou* maximálně t^6 .
2. Šifrovaná zpráva c délky n se sestrojí následujícím způsobem:

$$c = m\hat{G} + z$$

3.1.2.2 Dešifrování

Obdržená zašifrovaná zpráva c (délky n) se dešifruje následujícím způsobem:

1. Vypočítá se vektor \hat{c} délky n : $\hat{c} = cP^{-1}$.
2. Vektor \hat{c} se dekóduje zvoleným kódem na vektor \hat{m}
 $\hat{m} = Dek_G(\hat{c})$
3. Vypočítá se původní zpráva m : $m = \hat{m}S^{-1}$

3.1.2.3 Důkaz dešifrování

Důkaz, že výsledkem dešifrování je opět původní zpráva je následující:

- V prvním kroku dešifrovacího algoritmu je možné rozepsat původní zprávu m :

$$\hat{c} = cP^{-1} = (m\hat{G} + z)P^{-1} = (mSGP + z)P^{-1} = \hat{c} = mSG + zP^{-1}$$

- Zavedeme substituci $\hat{m} = mS$ a $\hat{z} = zP^{-1}$, potom

$$\hat{c} = mSG + zP^{-1} = \hat{m}G + \hat{z}$$

Z poslední rovnosti je vidět, že dekódováním je získán vektor \hat{m} , neboť \hat{z} je vektor s *Hammingovou vahou* maximálně t (matice P jen přehází jednotlivé bity vektoru z).

$$Dek_G(\hat{c}) = \hat{m}$$

- V posledním kroku stačí opět dosadit výše použitou substituci:

$$\hat{m}S^{-1} = mSS^{-1} = m$$

Dešifrováním je tedy získána původní zpráva m .

⁶ V některých pozdějších pracích na toto téma je uvedeno právě t .

3.1.3 Základní vlastnosti kryptosystému

V této kapitole jsou probrány základní fakta a vlastnosti *kryptosystému*. Jsou zde popsány způsoby uložení a velikost klíčů a hlavní výhody a nevýhody použití *McEliece*.

3.1.3.1 Předpočítané matice

Je vidět, že původní matice S a P se ve výpočtu nepoužívají a pro dešifrování jsou potřeba pouze jejich *inverze*. Je tedy možné tyto matice předpočítat a *soukromý klíč* je tak trojice kód s generující maticí G , matice S^{-1} a matice P^{-1} .

3.1.3.2 Velikost klíčů

Největší nevýhodou *kryptosystému McEliece* je velikost klíčů. Již v původním článku jsou navrhovány parametry $n = 1024$, $k = 524$ a $t = 50^7$. Za použití těchto parametrů má matice S (respektive její inverze) 274576 b ≈ 268 kb a (inverze) matice P 1048576 b = 1 Mb.

Matice P je ve skutečnosti velmi *řádká* – každý *řádek* (respektive i *sloupec*) obsahuje pouze jednu jedničku, jinak je nulová. Je to permutační matice a lze tak uchovat ve formě $\log_2 n$ n -bitových indexů. Pro výše zmíněné hodnoty je to 10240 b = 10 kb.

Při použití *binárních Goppa kódů* s těmito parametry je potřeba k uložení informace o použitém kódu ≈ 26 kb. Celkem se jedná o přibližně 300 kb dat pro uložení soukromého klíče

Pro uložení *veřejného klíče* (matice \hat{G}) je třeba 536576 b = 524 kb dat.

Metody snížení velikosti klíčů *kryptosystému McEliece* jsou jedním z hlavních překážek pro rozšíření algoritmu a také jedním z hlavních cílů zkoumání tohoto *kryptosystému* a věnuje se jim kapitola 3.5.3.

3.1.3.3 Rychlost algoritmů

Naopak jednou z největších výhod algoritmu *McEliece* je rychlost algoritmů pro šifrování i dešifrování. Šifrování je prosté násobení matice s vektorem, což je jednoduchá operace, kterou je navíc možné provádět paralelně či efektivně implementovat v hardwaru. Dešifrování používá též násobení matic, ale složitější operace je dekodování vektoru \hat{m} .

TBA

3.1.4 Bezpečnost kryptosystému

Již v původním článku [1] *McEliece* zmiňuje dva možné útoky na navržený kryptosystém.

⁷ Jak bude zmíněno dále, velikost těchto parametrů je pro dnešní použití nedostatečná.

1. získání *soukromého* klíče ze znalosti *veřejného*
2. získání m bez nutnosti znát *soukromý* klíč

Nicméně je dobré již na tomto místě zmínit, že existují útoky využívající strukturu použitého kódu (tomuto tématu se věnuje kapitola 3.4.3.1).

3.1.4.1 Získání soukromého klíče

U prvního způsobu je v článku zmíněno, že je třeba rozložit \hat{G} na G , S a P . Matici \hat{G} je sice možné dekomponovat, ale množství jednotlivých matic je pro velká n a k obrovské, a získat tak původní matice hrubou silou je *neschůdné*⁸.

3.1.4.2 Získání původní zprávy

Druhý způsob znamená dekódovat původní zprávu m z přijaté zprávy c , která navíc obsahuje chybový vektor. Provést toto dekódování bez znalosti použitého kódu je *NP-těžký* problém [4].

Naznačení problému

V případě, že by byl chybový vektor *nulový*, platila by rovnost $c = m\hat{G}$. Výběrem k *dimenzí* vznikne \hat{G}_k a c_k z matice \hat{G} a vektoru c . Pokud je \hat{G}_k regulární, lze řešit soustavu k nerovnic pro k neznámých (m_i) v polynomiálním (!) čase $O(k^3)$:

$$c_k = m\hat{G}_k$$

Za použití šifrovacího algoritmu *McEliece* je vektor c „zakrytý“ náhodným chybovým vektorem z *Hammingovy váhy* t . Potom pravděpodobnost, že c_k (ve výběru k dimenzí) je bez chyby je $(1 - \frac{t}{n})^k$ [1]. Pro $O(k^3)$ operací pro vyřešení jedné soustavy rovnic je to přibližně:

$$O\left(\frac{n^3}{(1 - \frac{t}{n})^k}\right) = O\left(n^3 \left(\frac{n}{n-t}\right)^k\right)$$

Zlomek $\frac{n}{n-t}$ je jistě větší než 1, tudíž pro velká k výrazně převyšuje druhý činitel a jedná se o *NP-těžký* problém.

Navíc není jasné, *které z nalezených řešení odpovídá původní zprávě m .*

⁸ Např. jen počet možných *permutačních matic* je $n!$. Počet *generujících matic* závisí na zvoleném kódu.

3.2 Niederreiterovo schéma

V roce 1986 publikoval *Harald Niederreiter* v [2] kryptosystém s veřejným klíčem využívající stejných principů jako kryptosystém *McEliece*. Tento kryptosystém je též založený na *lineárních kódech* a jeho bezpečnost též stojí na problému dekódování neznámého kódu. Na rozdíl však od kryptosystému *McEliece* používá k sestrojení klíčů *kontrolní* matici místo matice *generující*.

3.2.1 Generování klíčů

Generování klíčů probíhá následovně:

1. Zvolí se *lineární kód* (n, k) , opravující t chyb s odpovídající $(n - k) \times n$ *kontrolní maticí* H .
2. Vygeneruje se *náhodná* $(n - k) \times (n - k)$ *regulární* matice S .
3. Vygeneruje se *náhodná* $n \times n$ *permutační* matice P .
4. Vypočítá se $(n - k) \times n$ matice $\hat{H} = SHP$.

Potom čísla k , n a t jsou *veřejné parametry* systému, matice \hat{H} je *veřejný klíč* a kód s *kontrolní* maticí H a matice S a P jsou *soukromý klíč*.

3.2.2 Algoritmy pro šifrování a dešifrování

3.2.2.1 Šifrování

Šifrování zprávy probíhá následujícím způsobem:

1. Zpráva m dlouhá n bitů s *Hammingovou vahou* maximálně t . Tato zpráva reprezentuje *chybový vektor* pro použitý kód.
2. Šifrový text c (délky $n - k$) se spočte jako *syndrom* zprávy m (respektive chyby) za použití matice \hat{H} : $c = m\hat{H}^T$.

Poznámka

Chybový vektor m požadované délky n a *Hammingovy váhy* t lze získat *zakódováním*⁹ původní zprávy k zašifrování. Je vidět, že možných zpráv je pro $t \ll n$ řádově méně než všech možných vektorů délky n . Způsob zakódování bude probírán níže při popisu získání *elektronického podpisu* pomocí tohoto kryptosystému.

⁹ Zde nejsou na mysli samoopravné kódy, ale pouze jednoznačné zakódování zprávy.

3.2.2.2 Dešifrování

Obdržená šifrová zpráva c se dešifruje následujícím způsobem:

1. Vypočte se vektor \hat{c} délky $n - k$: $\hat{c} = c \left(S^T \right)^{-1}$
2. Pomocí dekódovacího algoritmu použitého kódu se z \hat{c} získá chybový vektor \hat{m} (délky n).
3. Původní zpráva m se získá výpočtem $m = \hat{m} \left(P^T \right)^{-1}$

Poznámka

Stejně jako je tomu u *kryptosystému McEliece*, je možné hodnoty $\left(P^T \right)^{-1}$ a $\left(S^T \right)^{-1}$ předpočítat. Navíc inverzi P je opět možné uložit jako $\log_2 m$ n -bitových hodnot, jelikož se jedná o permutaci. Soukromý klíč je tak trojice kód s kontrolní maticí H , matice $\left(P^T \right)^{-1}$ a matice $\left(S^T \right)^{-1}$.

3.2.2.3 Důkaz dešifrování

Důkaz, že výsledkem dešifrování je opět původní zpráva je následující:

- V prvním kroku dešifrovacího algoritmu je možné výpočet rozepsat následujícím způsobem:

$$\hat{c} = c \left(S^T \right)^{-1} = m \hat{H}^T \left(S^T \right)^{-1} = m P^T H^T S^T \left(S^T \right)^{-1} = m P^T H^T$$

- Zavedeme substituci $\hat{m} = m P^T$, potom $\hat{c} = \hat{m} H^T$, což odpovídá výpočtu *syndromu* pro použitý kód. Jelikož \hat{m} je pouze *permutovaná* původní m , má *Hammingovu váhu* t a pomocí dekódovacího algoritmu získáme \hat{m} jako *chybový vektor*.
- Nakonec se jen vynásobí inverzí matice P^T

3.2.3 Vlastnosti kryptosystému

Niederreiterovo schéma je variantou asymetrického kryptosystému založeného na lineárních kódech, jak je použito u kryptosystému *McEliece*. Šifrovým textem není zakódované slovo, jak je tomu u *McEliece*, nýbrž *syndrom* chybového vektoru, který je možné dekódovat pouze za znalosti skrytého lineárního kódu.

V [3] byla dokázána ekvivalence složitosti prolomení tohoto kryptosystému s kryptosystémem *McEliece*. Útočník, který dokáže prolomit jeden ze systémů dokáže prolomit i druhý. Další informace jsou k nalezení v [2, 6].

3.3 Elektronický podpis

V původním článku od *R. McEliece* [1] bylo zmíněno, že tímto navrženým kryptosystémem nelze získat schéma pro *elektronický podpis*. Původní algoritmy byly navrženy pouze pro *asymetrické šifrování*. Až v roce 2001 byl v [6] publikován postup pro získání elektronického podpisu za pomoci asymetrického kryptosystému založeného na samoopravných kódech.

3.3.1 Překážky pro použití McEliece pro podepisování

Aby bylo možné využít algoritmus pro dešifrování jako algoritmus *podepisování*, bylo by potřeba, aby vektor c (resp. \hat{c}) bylo možné dekódovat na kódové slovo. Nicméně pro původně navrhované parametry je poměr počtu vektorů délky n v *Hammingově vzdálenosti* t od kódových slov ku všem vektorům délky n téměř nulový. Takový algoritmus pro podepisování by prakticky vždy selhal a nebylo by možné získat žádný výstup jako *podpis*.

Konkrétně pro navrhované parametry $n = 1024$, $t = 50$ (a $k = 524$) je počet vektorů do *Hammingovy vzdálenosti* 50 od všech kódových slov:

$$2^{524} \sum_{i=0}^{50} \binom{1024}{i} \approx 2^{808}$$

Počet všech vektorů délky 1024 je 2^{1024} . Tedy pravděpodobnost, že vektor délky 1024 půjde algoritmem *dekódovat* je přibližně 2^{-216} [1].

Algoritmus *Niederreiter* selhává naprosto stejným způsobem [6].

3.3.2 Schéma pro elektronický podpis

V roce 2001 autoři *Courtois* a spol. v [6] publikovali postup, jakým lze získat z kryptosystému založeném na lineárních kódech schéma pro *elektronický podpis*. Autoři zmiňují, že je možné stejným způsobem využít i kryptosystém *McEliece*, nicméně kvůli délce výsledného *podpisu* je mnohem praktičtější využít *Niederreiterovo* schéma.

3.3.2.1 Vyhovující parametry

V článku je dokázán vzorec pro pravděpodobnost, že náhodný *syndrom* délky $n - k$ (a při použití *Goppa kódů*) je možné dekódovat je

$$\mathcal{P} = \frac{N_{\text{dekódovatelné}}}{N_{\text{celkem}}} \approx \frac{\frac{n!}{t!}}{n^t} = \frac{1}{t!}$$

A závisí tedy pouze na počtu chyb t . V článku je popsána volba parametrů¹⁰ a pro bezpečnost odpovídající 80 bitům symetrické šifry jsou zvoleny

¹⁰ S ohledem na útok *Canteaut-Chabaud* [?].

parametry $n = 2^{16}$ a $t = 9$. Pravděpodobnost, že pro zadané parametry bude náhodný vektor možné dekodovat jako *syndrom* je $\frac{1}{9!} \approx 2^{-19}$. Pro získání platného *syndromu* bude tedy nutné v průměru vygenerovat 2^{19} vektorů.

3.3.2.2 Popis schématu

Dle kapitoly výše je nutné získat několik ($9!$) vektorů k odpovídajícímu *dokumentu*, který je třeba *podepsat*. To je možné zajistit jednoduše použitím *hashovací* funkce h s tím, že je společně s dokumentem hashován i náhodný index i . Ten je možné postupně zvyšovat, dokud výstup h nebude možné *dekódovat* a získat odpovídající chybový vektor z . Jak bude ukázáno dále, hodnota i bude třeba pro ověření podpisu a podpis je tak dvojice (z, i) .

Značení

Nechť h je kryptograficky bezpečná *hashovací* funkce, jejíž výstup je dlouhý přesně $n - k$ bitů. Dále D je dokument, který je třeba *podepsat* a $s = h(D)$ *hash* (*otisk*) dokumentu. Zřetězení s a i bude značeno jako $(s|i)$ a $s_i = h(s|i)$ je tedy *otisk* dokumentu za použití odpovídajícího *indexu* i . Nejmenší i takové, že s_i lze dekodovat, bude značeno i_0 . Odpovídající s_{i_0} je tedy *syndrom*, který bude použitý pro podpis D . Nakonec chybový vektor z odpovídá *syndromu* s_{i_0} a podpis S je tedy $S = (z|i_0)$

Délka podpisu

Délka podpisu závisí na uložení dat z a i_0 . Vektor z je chybový vektor odpovídajícího samoopravného kódu. Jeho *Hammingova váha* je tedy maximálně t a je tedy velmi řídký. Existuje pouze $\binom{n}{t}$ vektorů *váhy* t a délky n a je tedy možné tento řídký vektor komprimovat. V [6] je uvedeno, jak všechny možné vektory seřadit a vyjádřit tak konkrétní vektor pouze jeho *indexem* I_z . Takový *index* je pak možno uložit v $\log_2 \binom{n}{t}$ bitech.

Index i_0 bude zabírat v průměru $\log_2 t!$ bitů a nelze ho uložit žádným kompaktnějším způsobem.

Pro konkrétní uvedený příklad ($n = 2^{16}$, $t = 9$) je pak průměrná velikost podpisu $S = (I_z|i_0) : \log_2 \binom{2^{16}}{9} + \log_2 9! = 125.5 + 18.4 = 144$ b.

3.3.3 Algoritmus pro podepisování

Podpis je sestaven následujícím způsobem:

- Sestrojíme *hash* s dokumentu D : $s = h(D)$.
- Nalezneme nejmenší i (i_0) takové, že $s_i = h(s|i)$ lze dekodovat.
- Použijeme *Niederreiterův* algoritmus pro dešifrování k nalezení chybového vektoru z , že $z\hat{H}^T = s_{i_0}$

- Převědeme z na index I_z .
- Použijeme $S = (I_Z|i_0)$ jako podpis dokumentu D .

3.3.4 Algoritmus pro ověření

Ověření probíhá následujícím způsobem:

- Převědeme index I_z zpět na vektor z .
- Spočítáme $s_1 = z\hat{H}^T$ pomocí veřejného klíče \hat{H}
- Spočítáme *hash* $s_2 = h(h(d)|i_0)$
- Pokud se s_1 a s_2 shodují, podpis je platný.

3.3.5 Poznámky

Bezpečnost schématu pro elektronický podpis závisí na jednosměrné funkci de-kódování syndromu. Tuto operaci není možné provést bez znalosti *soukromého klíče* – matic H , S a P .

V případě použití kryptosystému *McEliece* pro získání podpisu, bychom ve třetím kroku algoritmu pro podepisování místo *syndromu* slovo délky k . Při zvolených parametrech ($n = 2^{16}$ a $t = 9$) je k rovno $2^m - mt = 2^{16} - 16 \cdot 9 = 64$ kb, což je velikost pro podpis prakticky nepřijatelná (často by byl podpis delší než původní *dokument*).

3.4 Kryptoanalýza systému McEliece

Již v původním článku [1] byly naznačeny 2 aspekty, díky kterým je možné považovat kryptosystém McEliece *bezpečný*:

1. Problém nalezení kódového slova *obecného lineárního kódu* s minimální vzdáleností k danému vektoru – *problém obecného dekódování* – je *NP-těžký* [4]
2. Není znám žádný algoritmus, který by *bez znalosti tajných parametrů* dokázal nalézt kódové slovo efektivněji, než *za použití obecného kódu*.

Druhý z těchto aspektů neplatí za použití libovolného kódu.

3.4.1 Bezpečné parametry

Tabulky z aktuálních článků

3.4.2 Známé útoky

Canteaut-Chabaud a další

3.4.3 Slabiny kryptosystému

V této kapitole jsou shrnuty známé slabiny kryptosystému *McEliece*, se kterými je nutné počítat a praktické použití šifrování pomocí *McEliece* náležitě upravit. V podkapitole 3.4.3.1 jsou zmíněné slabiny kryptosystému při použití alternativních lineárních kódů.

3.4.3.1 Útoky na strukturu použitého kódu

3.4.3.2 Malleability

Použití šifrování tak, jak je definováno v kapitole 3.1.2 umožňuje deterministickým způsobem změnit (neznámou) zašifrovanou zprávu – tzv. *malleability*.

Zašifrovaná zpráva c_1 veřejným klíčem \hat{G} byla zkonstruována (dle definice) $c_1 = m_1\hat{G} + z$, kde z je náhodný chybový vektor. Pokud je tato zpráva c_1 zachycena, je možné ji pozměnit následujícím způsobem:

- Připraví se (otevřená) zpráva m_1
- Tato zpráva se „zašifruje“ veřejným klíčem \hat{G} , ale nepoužije se chybový vektor z : $c_2 = m_2\hat{G}$
- K původní zašifrované zprávě c_1 se přičte nová zpráva c_2 : $c = c_1 + c_2$
- Odešle se vzniklá zpráva c původnímu účastníkovi.

Dešifrování proběhne naprosto bezchybným způsobem, ale účastník získá místo původní zprávy m_1 podvrženou zprávu $m_1 + m_2$.

$$D_G(c) = D_G(c_1 + c_2) = D_G((m_1\hat{G} + z) + m_2\hat{G}) = D_G((m_1 + m_2)\hat{G} + z) = (m_1 + m_2)$$

Podobnou slabinu mají i algoritmy *RSA* či *ElGamal*. Stejně jako u těchto algoritmů (např. *PKCS#1* pro *RSA*) i pro *McEliece* se dá tomuto útoku efektivně bránit předem daným formátem zprávy a *paddingem*.

3.4.3.3 Opakované šifrování jedné zprávy

3.4.3.4 Znalost části OT

3.4.3.5 Hádání chybových bitů pomocí dešifrovacího orákula

3.4.4 Odolnost vůči kvantovým počítačům

3.4.5 Shrnutí

Pro *McEliece* je doporučeno použít *CCA2* odolnou variantu – více viz 3.5.4.

3.5 Moderní varianty a úpravy

3.5.1 Quasi-dyadické Goppa kódy

3.5.2 Význam matic S a P

3.5.3 Metody na snížení velikosti klíčů

3.5.4 CCA2-odolná varianta

Implementace

Pro implementaci kryptosystému *McEliece* v této práci byl zvolen software *Wolfram Mathematica* [14]. Tento software byl zvolen hlavně díky pohodlnosti některých matematických výpočtů a konstrukcí a také pro přehlednost výstupů.

Při implementaci *kryptosystému* se ukázaly nedostatky softwaru *Mathematica* a bylo nutné zpracovat problematiku (rozšířených) *konečných těles* a *binárních Goppa kódů*. Tyto dvě oblasti byly implementovány přímo v softwaru *Mathematica* tak, aby bylo možné jejich pohodlné použití i v jiných oblastech.

Celková práce byla rozdělena do třech ucelených částí – (binární) *konečná tělesa*, (ireducibilní) *binární Goppa kódy* a *kryptosystém McEliece* –, kde každou z nich lze využít jako *balík* či *knihovnu* pro další výpočty. Následující kapitoly popisují jednotlivé části.

4.1 Binární konečná tělesa

Tato kapitola pojednává o implementaci *binárních konečných těles* včetně jejich *rozšíření*. Jsou zmíněna existující řešení v softwaru *Mathematica*, zvolená implementace a popis implementovaných algoritmů.

Ač jsou funkce implementované v co nejobecnějším pojetí, tak je kladen důraz na efektivnost výpočtů vzhledem k *binárním* tělesům – tedy k *tělesům* s charakteristikou 2. Pro *tělesa* s jinou charakteristikou není chování funkcí definováno.

4.1.1 Existující řešení

Pro operace s *konečnými tělesy* v softwaru *Mathematica* byly prostudovány interní funkce pro operace s polynomy a externí balík `FiniteFields`. Vlastnosti těchto řešení jsou popsány v následujících kapitolách.

4.1.1.1 Operace s polynomy

Software *Mathematica* obsahuje funkce pro operace s polynomy nad reálnými (případně i komplexními) čísly. Většina těchto funkcí má volitelnou *možnost*¹¹ *Modulus*, díky které lze zajistit, aby operace s koeficienty byly prováděny nad celými čísly *modulo* zadané číslo p . Tímto způsobem je možné implementovat operace nad tělesy $GF(p^n)$, nicméně je téměř nemožné tímto způsobem implementovat *rozšířená tělesa* – polynomy nad polynomy.

Pro použití těchto funkcí (např. `ExtendedPolynomialGCD`, je třeba polynomu v úplném tvaru $\sum a_i x^i$ – včetně x^i s tím, že x musí být nedefinovaný *symbol*¹². Tento požadavek je celkem nepraktický, protože definování této proměnné kdekoliv v programu by vedlo k nemožnosti použití těchto funkcí. Navíc udržovat si prvky ve formě např. $x^6 + x^3 + x + 1$ místo 1001011 není pohodlné. Další nevýhoda použití polynomů je, že software *Mathematica* vypisuje polynomy od *nejnižšího* členu po *nejvyšší* (např. $1 + x^2 + x^4 + x^7$), což je obrácený zápis, než je v technické literatuře zvykem.

4.1.1.2 Balík FiniteFields

Balík *Balík* v softwaru *Mathematica* je soubor obsahující rozšiřující funkce, které standardně nejsou k dispozici. Balík je možné načíst pomocí funkcí `Needs`, či případně `Get`.

Balík `FiniteFields` obsahuje základní operace pro práci s tělesy $GF(p^n)$. Prvky konečných těles jsou pak určeny *seznamem*¹³ koeficientů a *hlavičkou*, která určuje do jakého tělesa prvek patří. Výhoda tohoto opatření je, že pro sčítání a násobení je pak možné využít obvyklé symboly operací (+, −, *, /) a operace se automaticky provede v daném tělese. Pro parametry p a n je určené jedno těleso $GF(p^n)$ (s jedním konkrétním ireducibilním polynomem) a *seznam* koeficientů prvku se opět píše od nejnižšího řádu po nejvyšší (například polynom $x^3 + x + 1$ z tělesa $GF(2^5)$ je zapsán jako $GF[2, 5][\{1, 1, 0, 1, 0\}]$.

Funkce z balíku `FiniteFields` nejsou dostatečně zdokumentovány, jak je jinak v softwaru *Mathematica* zvykem. Nepodařilo se využít funkcí z tohoto balíku pro operace s *rozšířenými tělesy*.

4.1.2 Zvolené řešení

Existující řešení pro práci s *konečnými tělesy* se ukázala jako nedostačující. Jejich hlavní nevýhodou je nemožnost použití při výpočtech s *rozšířenými tělesy*. Proto bylo implementováno vlastní řešení pro práci s *konečnými tělesy*.

Při implementaci operací nad *konečnými tělesy* bylo dodržováno následující jednotné rozhraní:

¹¹ Anglicky se tento termín v softwaru *Mathematica* nazývá *Option*.

¹² Jinými slovy proměnná, která nemá definovanou hodnotu.

¹³ *Seznamem* se myslí struktura v softwaru *Mathematica* – *List*

- Prvky *konečných těles* jsou reprezentovány *seznamem* koeficientů od nejvyššího po nejnižší.
U *rozšířených těles* jsou koeficienty opět prvky konečných těles.
Například polynom $x^3 + x + 1$ je reprezentován seznamem: $\{1, 0, 1, 1\}$
a polynom $(y + 1)x^2 + (y)$ je reprezentován: $\{\{1, 1\}, \{0, 0\}, \{1, 0\}\}$
- Prvek (seznam koeficientů) může být libovolně dlouhý. V případě potřeby se při výpočtu *redukuje* (ireducibilním) polynomem nebo dorovná nulovými koeficienty.
- Počet koeficientů vnitřních prvků (koeficientů) musí být vždy stejný.
Například prvek $\{\{0, 0\}, \{1\}, \{1, 0\}\}$ není dovolený.
- Jednotlivým funkcím je kromě operandů předáván též i *modul* skládající se z odpovídajících (ireducibilních) polynomů, včetně charakteristiky tělesa. Tento *modul* je definovaný následovně:
Pro tělesa $GF(p^{n_1})$ je *modul* složen z (ireducibilního) polynomu i_1 stupně n_1 a dané charakteristiky p : $modul_1 = \{i_1, p\}$
Pro rozšířená tělesa se *modul* skládá z odpovídajícího *polynomu* i_k stupně n_k nad tělesem $GF(p^{n_1 \dots n_{k-1}})$ a *modulu vnitřního tělesa*:
 $modul_k = \{i_k, modul_{k-1}\}$.
- Všem funkcím se předávají nejdříve *operandy* a poté *modul*.
Například pro prvky $a, b \in GF(p^{\dots})$, $m \in \mathbb{N}$ a odpovídající *modul*:

$$\begin{aligned} &krat[a, b, modul] \\ &inverze[a, modul] \\ &mocnina[a, m, modul] \\ &\dots \end{aligned}$$
- Pro implementaci operací v *prvotělesech* (tělesech $GF(p^n)$) jsou použité vnitřní funkce softwaru *Mathematica* pro práci s *polynomy*. Implementované funkce pro *prvotělesa* tedy zpravidla obsahují převod ze *seznamu* čísel na *polynom*, zavolání vnitřní funkce pro *polynomy* a převodu zpět na *seznam* koeficientů. Díky těmto vnitřním funkcím je docíleno rychlejšího výpočtu, než kdyby byla použita vlastní implementace nad *seznamy* celých čísel.
- Pro implementaci operací v *rozšířených tělesech* byly implementovány jednotlivé algoritmy operací (popsané níže), jelikož nebylo možné použít pro tyto operace vnitřní funkce softwaru *Mathematica*. Funkce nad *rozšířenými tělesy* zpravidla volají odpovídající funkce ve vnitřních tělesech (například násobení jednotlivých *koeficientů*).

Tato pravidla umožňují pohodlný, jednotný a *rekurzivní* přístup k jednotlivým prvkům a voláním funkcí (druhá složka *modulu* je *modul vnitřního tělesa*, prvky *polynomu* jsou opět *polynomy*, ...).

4.1.3 Implementace operací

V následujících kapitolách je popsána implementace hlavních operací v *konečných tělesech* a použitých algoritmů. Pro další informace je doporučeno nahlédnout do zdrojového kódu a příkladů použití.

V níže uvedených pseudokódech se používá některých prvků ze syntaxe softwaru *Mathematica*:

Zápis	Význam
<code>foo[bar]</code>	Volání funkce <i>foo</i> s argumentem <i>bar</i>
<code>ham[[i]]</code>	<i>i</i> -tý prvek seznamu (pole) <i>ham</i>

Tabulka 4.1: Prvky syntaxe jazyka softwaru *Mathematica*

4.1.3.1 Sčítání

Jelikož operace sčítání se v jakémkoliv *tělese* provádí po jednotlivých koeficientech *modulo p*, je tato funkce jediná volána místo celkového modulu pouze se zadanou charakteristikou *p*.

Pro *rozšířená tělesa* funkce rekurzivně volá stejnou operaci sčítání na jednotlivé koeficienty zadaných polynomů až na úroveň *prvotěles* – obyčejných jednorozměrných seznamů. Pro *prvotělesa* funkce používá obyčejné sčítání dvou seznamů modulo *p*.

Algoritmus 1 Sčítání polynomů

```
1: function PLUS[a,b,p]                                ▷ Pro  $GF(p^n)$ , p je prvočíslo
2:   return Mod[a + b, p]
3: end function

1: function PLUS[a,b,p]                                ▷ Pro  $GF(q^n)$ , q je  $p^{\dots}$ 
2:   for i ← 1 . . . Length[a] do
3:     c[[i]] ← plus[a[[i]], b[[i]], p]
4:   end for
5:   return c
6: end function
```

4.1.3.2 Redukce polynomu

Redukce polynomu (neboli *modulo* polynom) se používá ve většině dalších funkcí. Tato funkce se volá se dvěma parametry – prvkem *a* a polynomem (*modulem*) *m*. Funkce vrátí zbytek polynomu *a* po dělení polynomem *m*.

Redukce polynomu pro *rozšířená tělesa* je inspirovaná *Comb metodou* z [8]. K původnímu prvku *a* se opakovaně přičítá (od nejvyššího řádu) patřičný násobek *polynomu m* tak, aby se daný koeficient *a_i* rovnal nule (viz příklad níže).

Pro *prvotělesa* se používá interní funkce `PolynomialMod`

Algoritmus 2 Redukce polynomu v tělese s charakteristikou 2

```

1: function REDUKUJ[  $a, \{m, modul_{vnitrni}\}$  ]
2:    $l_a \leftarrow stupen[a] + 1$  ▷ Délka redukovaného polynomu
3:    $l_m \leftarrow stupen[m]$  ▷ Výsledná délka redukovaného polynomu
   // Převod  $m$  na monický polynom
4:    $kcoef \leftarrow inverze[m[[1]], modul_{vnitrni}]$  ▷ Inverze nejvyššího koeficientu
5:    $m \leftarrow krat[kcoef, m, modul_{vnitrni}]$  ▷ Násobení skalárem

6:    $m \leftarrow PadRight[m, l_a - l_m]$  ▷ Natáhnutí polynomu na délku  $a$ 
7:   for  $i \leftarrow 1 \dots l_a - l_m$  do
8:      $s \leftarrow krat[a[[i]], m, modul_{vnitrni}]$  ▷ Skalární násobek
9:      $a \leftarrow plus[a, s, 2]$  ▷ Odečtení v binárním tělese
10:     $m \leftarrow RotateRight[m]$  ▷ Posunutí redukovaného polynomu
11:  end for

12:  return  $a$ 
13: end function

```

Příklad Redukce polynomu $x^{12} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ polynomem $x^4 + x + 1$ (nad tělesem $GF(2)$):

$$\begin{array}{r}
 1000110111001 \text{ mod } 10011 : \\
 \underline{1000110111001} \\
 1001100000000 \\
 0001001100000 \\
 0000010011000 \\
 \underline{0000001001100} \\
 1101
 \end{array}$$

4.1.3.3 Násobení

Výsledkem násobení dvou polynomů a a b stupně n a m je polynom c stupně $n + m$. Násobení je implementováno tak, že k výsledku c (na počátku je to nulový polynom) se postupně přičítá skalární násobek polynomu b koeficienty polynomu a , který je zároveň *posunutý* o patřičný počet pozic. Využívá se zde faktu, že násobení libovolného *polynomu* $A(x)$ a x^i je posunutí koeficientů polynomu A o i pozic doleva. Výsledný polynom c je následně *redukován* zadaným modulem (viz výše).

Pro *prvotělesa* se používá obyčejného násobení dvou *polynomů* a následné *redukce modulem*.

Algoritmus 3 Násobení prvků

```
1: function KRAT[  $a, b, \{m, modul_{vnitrni}\}$  ]
2:    $p \leftarrow charakteristika[modul]$  ▷ Charakteristika tělesa
   // Natažení na výslednou délku
3:    $b \leftarrow PadLeft[b, stupen[a] + stupen[b] + 1]$ 
4:    $c \leftarrow nulovyPolynom[...]$  ▷ Nulový polynom nad vnitřním tělesem

5:   for  $i \leftarrow stupen \dots 1$  do
6:      $s \leftarrow krat[a[[i]], b, modul_{vnitrni}]$  ▷ Skalární násobek
7:      $c \leftarrow plus[c, s, p]$ 
8:      $b \leftarrow RotateLeft[b]$  ▷ Posunutí přičítaného polynomu
9:   end for

10:  return redukuj[c]
11: end function
```

Příklad Násobení polynomu $x^3 + x + 1$ polynomem $x^4 + x^2 + 2x + 1$ (nad tělesem $GF(3)$):

$$\begin{array}{r} 1011 \cdot 10121 : \\ 1(x^4) 10110000 \\ 0(x^3) 00000000 \\ 1(x^2) 00101100 \\ 2(x^1) 00020220 \\ 1(x^0) 00001011 \\ \hline 10202001 \end{array}$$

4.1.3.4 Inverze

Výpočet multiplikativní *inverze* je implementován pomocí *rozšířeného Euklidova algoritmu*. Tento algoritmus se často vizualizuje jako výpočet tabulky po řádkách (viz níže). Ve skutečnosti však pro výpočet dalšího řádku stačí pracovat s hodnotami dvou řádků předešlých. Proto si není nutné udržovat v paměti celou tabulku, ale stačí si udržovat hodnoty dvou řádků a po výpočtu třetího hodnoty posunout.

Výpočet hodnot dalšího řádku tabulky probíhá následovně:

- Hodnoty předchozích řádků jsou:
Polynomy p_{i-2} a p_{i-1} (na začátku inicializovány na ireducibilní polynom m a *prvek*, ke kterému je hledaná inverze).
Polynomy k_{i-2} a k_{i-1} (na začátku inicializovány na 0 a 1, respektive *nulový* a *jednotkový polynom*).

- Je spočítán *podíl* q a zbytek p_i pomocí tzv. *dlouhého dělení* polynomu p_{i-2} polynomem p_{i-1} .
- Je spočítán *polynom* $k_i = k_{i-2} - q \cdot k_{i-1}$
- Tyto kroky se opakují, dokud není získán polynom p_i stupně 0 (jinými slovy jediný prvek vnitřního tělesa).
- Výsledná *inverze* se získá jako skalární násobek *polynomu* k_i inverzí (posledního) *koefficientu* polynomu p_i ¹⁴.

Inverze v *prvotělese* je implementovaná pomocí interní funkce `PolynomialExtendedGCD`.

Algoritmus 4 Inverze prvků – *Rozšířený Euklidův algoritmus*

```

1: function INVERZE[ prvek, modul : { $m, modul_{vnitrni}$ } ]
2:    $A \leftarrow m$ ;  $B \leftarrow prvek$ 
      // Inicializace na jednotkový resp. nulový polynom z tělesa
3:    $k_A \leftarrow nulovyPolynom[...]$ ;  $k_B \leftarrow jednotkovyPolynom[...]$ 
4:   while  $stupen[B] \neq 0$  do
      // Výpočet  $q$  a  $C$  pomocí dlouhého dělení v jednom kroku
5:      $q \leftarrow A/B$ ;  $C \leftarrow A \bmod B$ 
6:      $k_C \leftarrow k_A - krat[q, k_B, modul]$ 
7:      $A \leftarrow B$ ;  $k_A \leftarrow k_B$ 
8:      $B \leftarrow C$ ;  $k_B \leftarrow k_C$ 
9:   end while
      // Výpočet koefficientu ve vnitřním tělese
10:   $kof \leftarrow inverze[Last[C], modul_{vnitrni}]$ 
11:  return  $krat[kof, k_C, modul_{vnitrni}]$  ▷ Násobení skalárem
12: end function

```

Příklad *Rozšířený Euklidův algoritmus* pro výpočet *inverze* polynomu $x^3 + x^2 + 1$ modulo $x^6 + x + 1$ (nad tělesem $GF(2)$):

Podíl	Zbytek	Koefficienty	
	1000011	0	1
	1101	1	0
1110	101	-1110	1
11	10	10011	-11
10	1	-101000	111

$$\Rightarrow |1101^{-1}|_{1000011} = 101000$$

¹⁴ Zde je vidět, že pro výpočet inverze v tělese $GF(q^n)$ je třeba vypočítat inverzi v tělese $GF(q)$.

Poznámka Poslední sloupec tabulky se v algoritmu nepočítá, je zde uveden pouze pro úplnost.

4.1.3.5 Druhá mocnina

Pro prvky tělesa s *charakteristikou* 2 Je výhodné implementovat funkci „na druhou“ díky následujícímu tvrzení:

Tvrzení 1 *Nechť $A = (a_n \dots a_2 a_1 a_0)$ je prvek tělesa s charakteristikou 2, potom platí:*

$$A^2 = (a_n^2 0 \dots 0 a_2^2 0 a_1^2 0 a_0^2)$$

Důkaz

$$\begin{aligned}
A(x) &= a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
A(x)^2 &= (a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \cdot (a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\
&= a_n x^n \cdot (a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_2 x^2 \cdot (a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + \\
&\quad + a_1 x \cdot (a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + \\
&\quad + a_0 \cdot (a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\
&= a_n^2 x^{2n} + \dots + a_n a_2 x^{n+2} + a_n a_1 x^{n+1} + a_n a_0 x^n + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_n a_2 x^{n+2} + \dots + a_2^2 x^4 + a_2 a_1 x^3 + a_2 a_0 x^2 + \\
&\quad + a_n a_1 x^{n+1} + \dots + a_2 a_1 x^3 + a_1^2 x^2 + a_1 a_0 x + \\
&\quad + a_n a_0 x^n + \dots + a_2 a_0 x^2 + a_1 a_0 x + a_0^2 \\
&= a_n^2 x^{2n} + \dots + 2(a_3 a_0 + a_2 a_1) x^3 + 2(a_2 a_0) x^2 + a_1^2 x^2 + 2(a_1 a_0) x + a_0^2 \\
&= \sum_{i=0}^n a_i^2 x^{2i} + 2 \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j < k \\ j+k=i}} a_j a_k \\
&= \sum_{i=0}^n a_i^2 x^{2i} \qquad \cong (a_n^2 0 \dots 0 a_2^2 0 a_1^2 0 a_0^2)
\end{aligned}$$

S využitím tohoto tvrzení je realizace funkce na počítání druhé mocniny triviální:

- Provedení druhé mocniny všech koeficientů.
- Proložení koeficientů polynomu nulovými koeficienty.
- Redukování polynomem (viz výše).

Algoritmus 5 Umocňování na druhou v tělese s charakteristikou 2

```

1: function NADRUHOU[  $a, \{m, modul_{vnitrni}\}$  ]
2:   for  $i \leftarrow 1 \dots Length[i]$  do
3:      $a[[i]] \leftarrow naDruhou[a[[i]], modul_{vnitrni}]$ 
4:   end for
5:    $nula \leftarrow nulovyPolynom[...]$   $\triangleright$  Odpovídající nulový koeficient
6:    $a \leftarrow Riffle[a, nula]$   $\triangleright$  Proloží koeficienty prvkem  $nula$ 
7:   return  $redukujPolynom[a, modul]$ 
8: end function

```

4.1.3.6 Mocnění

Mocnění *polynomů* je implementováno pomocí algoritmu *Square-and-Multiply* (*SM*). Algoritmus využívá faktu, že libovolnou mocninu lze rozložit na součin mocnin čtverců ($2, 4, 8, \dots$). Konkrétně byla implementována varianta provádějící výpočet od nejvíce významného bitu exponentu¹⁵. Algoritmus má vstupy polynom a a exponent e . Exponent se vyjádří jako číslo v *binární* soustavě a poté algoritmus provádí cyklus přes bity tohoto rozvoje. V každém kroku se mezivýsledek umocní na druhou a v případě, že je odpovídající bit exponentu 1, přinásobí se původní číslo a .

Algoritmus 6 Umocňování prvku $a^e \bmod modul$ – *Square-and-Multiply*

```

1: function UMOONI[  $a, e, modul$  ]
2:   if  $e = 0$  then
3:     return  $nulovyPolynom[...]$   $\triangleright$  Nulový prvek tělesa
4:   end if
5:    $rozvoj \leftarrow IntegerDigits[e, 2]$   $\triangleright$  Binární rozvoj exponentu
6:    $c \leftarrow a$   $\triangleright rozvoj[[1]]$  je vždy 1
7:   for  $i \leftarrow 2 \dots Length[rozvoj]$  do
8:      $s \leftarrow naDruhou[c, modul]$ 
9:      $m \leftarrow krat[s, a, modul]$ 
10:    if  $rozvoj[[i]] = 0$  then
11:       $c \leftarrow s$ 
12:    else
13:       $c \leftarrow m$ 
14:    end if
15:  end for
16:  return  $c$ 
17: end function

```

¹⁵ Uváděna jako *MSB* – z anglického *most significant bit*

Poznámka Takto implementovaný algoritmus je zranitelný vůči odběrové a časové analýze. Pro odolnou implementaci je nutné počítat násobek *vždy* a pokud je daný bit exponentu 1, přiřadit násobek do mezi výpočtu. Pseudokód i reálná implementace je prováděna tímto (bezpečným) způsobem.

Příklad *Square-and-Multiply* pro výpočet $(x^3 + 1)^{26}$ modulo $x^6 + x + 1$ (nad tělesem $GF(2)$):

Op.	Mocnina		Výpočet	Výsledek
	dek.	bin.		
	1	1		1001
S	2	1	1000001	10
M	3	11	10 · 1001	10010
S	6	110	100000100	1000
S	12	1100	1000000	11
M	13	1101	11 · 1001	11011
S	26	11010	101000101	1010

$$\Rightarrow |1001^{26}|_{1000011} = 1010$$

4.1.4 Možná zlepšení

V této kapitole jsou nastíněny možná zlepšení implementace, která zrychlují výpočet některých operací.

4.1.4.1 Logaritmické tabulky

Pro zrychlení výpočtu násobení a mocnin prvku lze v *konečném tělese* využít faktu, že vždy existuje *primitivní prvek* a převádět tak operace v tělese na operace s celými čísly.

Definice 5 *Nechť α je generátor multiplikativní grupy tělesa F . Potom říkáme, že α je primitivní prvek tělesa F .*

Důsledek Každý prvek tělesa F – kromě nulového prvku *aditivní grupy* – lze vyjádřit jako α^i pro nějaké i .

Důkaz plyne přímo z definice.

Násobení dvou prvků $a = \alpha^{i_a}$ a $b = \alpha^{i_b}$ tak lze převést na součet mocnin *primitivního prvku*:

$$a \cdot b = \alpha^{i_a} \cdot \alpha^{i_b} = \alpha^{i_a + i_b}$$

Podobným způsobem je možné zjednodušit umocňování prvku:

$$a^e = \left(\alpha^i\right)^e = \alpha^{ie}$$

V obou případech je samozřejmě možné použít *Eulerovu větu* a mocniny redukovat *modulo* N , kde N je počet prvků *multiplikativní grupy tělesa* ($N = p^n - 1$ pro těleso $GF(p^n)$). Jakoukoliv operací násobení a mocnění se získá prvek α^{n_c} , kde n_c je celé číslo v rozsahu od 0 do $N - 1$.

Reprezentací prvků pomocí odpovídajících mocnin *primitivního prvku* je tak možné vyhnout se násobení a umocňování prvků v tělese a nahradit ho sčítáním a násobením celých čísel, což je řádově jednodušší. V případě sčítání prvků v tělese je však nutné mít jejich standardní reprezentaci (seznam koeficientů), jelikož se sčítání provádí po jednotlivých koeficientech, respektive bitech. Není možné nahradit sčítání dvou prvků jiné operací s mocninami *primitivního prvku*.

Pro použití tohoto zrychlení výpočtů je tak nutné připravit v paměti programu překladové *log-* a *antilogaritmičké* tabulky pro překlad prvků z jedné reprezentace na druhou.

Ač se tak získá podstatné zrychlení výpočtů v tělese, existuje několik nevýhod tohoto přístupu:

- Je nutné nalézt *primitivní prvek tělesa*.
- Je nutné vygenerovat a uchovat v paměti počítače obě tabulky pro překlad.
 - Tato tabulka lze implementovat pomocí obyčejného pole či seznamu, kde se k danému indexu v seznamu vyskytuje odpovídající hodnota.
 - Pro binární tělesa $GF(2^m)$ je velikost jedné tabulky $O(m2^m)$ (konkrétně $2^m - 1$ hodnot, kde každá je reprezentována m bity).
 - Jelikož je paměťová náročnost *exponenciální*, je možné tyto tabulky uchovávat pouze pro *malá* m (např. 8 či 16, nikoliv však 1024).
- *Nulový prvek* tělesa není možné žádným způsobem zobrazit jako mocninu. Při každé operaci je potřeba s touto skutečností počítat a hlídat jako výjimku.

Tohoto vylepšení se dá využít pro operace ve *vnitřním tělese* $GF(2^m)$, nad kterým jsou postavené polynomy v *binárních Goppa kódech*.

4.1.4.2 Implementace dělení

Dělení prvkem b v *konečném tělese* se převádí na násobení b^{-1} . Pro výpočet *podílu* se tak počítá inverze a následně násobek. Je ale možné implementovat rovnou algoritmus pro dělení.

Algoritmus pro dělení prvkem a prvkem b je totožný s algoritmem pro výpočet *inverze* prvkem b s tím rozdílem, že je počáteční hodnota koeficientu k_b (viz *EEA* – alg. 4) nastavena na hodnotu a . Výsledkem algoritmu pak bude inverze prvkem b vynásobená a , což přesně odpovídá výrazu a/b .

4.2 Ireducibilní binární Goppa kódy

4.3 McEliece

4.4 Měření

Závěr

Literatura

- [1] Robert J. McELIECE, A Public-Key Cryptosystem Based on Algebraic Coding Theory v *JPL Deep Space Network Progress Report 42-44* January and February 1978, strany 114–116. Dostupné online http://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress_report2/42-44/44N.PDF
- [2] Harald NIEDERREITER. Knapsack-type cryptosystems and algebraic coding theory v *Problems of Control and Information Theory* 15, strany 19-34. 1986
- [3] Yuan XING LI, Robert H. DENG, Xin MEI WANG. On the equivalence of McEliece's and Niederreiter's public-key cryptosystems v *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, strany 271-273. IEEE, leden 1994. Dostupné online <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=272496>
- [4] Elwyn R. BERLEKAMP, Robert J. McELIECE, Henk C. A. van TILBORG. On the Inherent Intractability v *IEEE Transactions of Information Theory*, vol. IT-24, No. 3, strany 384-386. IEEE, květen 1978.
- [5] T. A. BERSON. Failure of the McEliece public-key cryptosystem under message-resend and related-message attack v *Advances in Cryptology-CRYPTO '97*, vol. 1294, strany 213-200, Springer Berlin, 1997.
- [6] Nicolas T. COURTOIS, Matthieu FINIASZ, Nicolas SENDRIER. How to Achieve a McEliece-Based Digital Signature Scheme v *Advances in Cryptology - ASIACRYPT 2001*, strany 157-174. Springer Berlin Heidelberg, 2001. Dostupné online http://link.springer.com/chapter/10.1007/2F3-540-45682-1_10
- [7] Christof PAAR, Jan PELZL. *Understanding Cryptography: A Textbook for Students and Practitioners*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. Dostupné online: <https://www.springer.com/us/book/9783642041006>

- [8] J. G. MERCHAN, S. KUMAR, C. PAAR, J. PELZL. Efficient Software Implementation of Finite Fields with Applications to Cryptography v *Acta Applicandae Mathematicae: An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications*, Volume 93, Numbers 1-3, strany 3-32. Ruhr-Universitat Bochum, 2006. Dostupné online: <http://www.emsec.rub.de/research/publications/efficient-software-implementation-finite-fields-ap/>
- [9] ITT
- [10] Přednášky BI-LIN
- [11] Přednášky MI-BHW
- [12] Přednášky MI-MKY
- [13] Přednášky MI-MPI
- [14] Wolfram Mathematica

Seznam použitých zkratek

EEA *Extended Euclidean Algorithm* – Rozšířený Euklidův algoritmus

GCD *Greatest Common Divisor* – Největší společný dělitel

GF *Galois field* – konečné těleso

LSB Least Significant Bit/Byte – nejméně významný bit/bajt

MSB Most Significant Bit/Byte – nejvíce významný bit/bajt

S&M algoritmus *Square-and-Multiply*

Obsah přiloženého CD

	readme.txt.....	stručný popis obsahu CD
	exe	adresář se spustitelnou formou implementace
	src	
	impl.....	zdrojové kódy implementace
	thesis	zdrojová forma práce ve formátu L ^A T _E X
	text	text práce
	thesis.pdf	text práce ve formátu PDF
	thesis.ps	text práce ve formátu PS