Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Лабораторная работа по общему курсу физики
Электричество и магнетизм

3.6.1. Спектральный анализ

Глаз Роман Сергеевич
Группа Б01-007

Долгопрудный
2021

Содержание

Цель работы: исследование спектра колебаний электрических сигналов.
В работе используются: персональный компьютер; USB-осциллограф АКИП-4107; функциональный генератор WaveStation2012; соединительные кабели.

1. Теоретическое введение

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье.*

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\Omega_1 t\right) + b_n \sin\left(n\Omega_1 t\right)\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega_1 t - \psi_n\right). \tag{2}$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos\left(n\Omega_1 t\right)dt, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\left(n\Omega_1 t\right)dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь t_1 – время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan\frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \tag{4}$$

1.1. Периодические прямоугольные импульсы

Введем величину: $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T – период повторения импульсов.

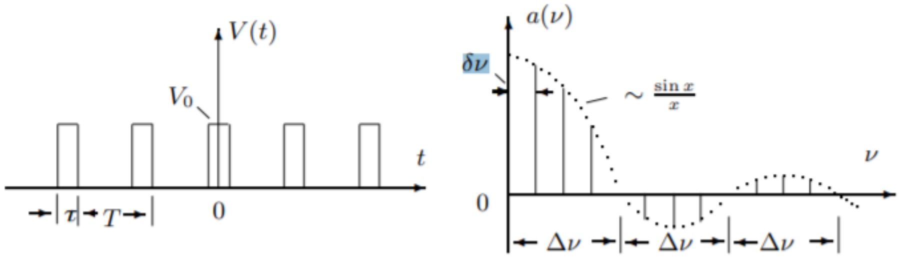

Рис. 1: График сигнала и его спектра (прямугольный импульс)

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(n\Omega_1\tau/2\right)}{n\Omega_1\tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{5}$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала.
Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть T кратно τ. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ – расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \tag{6}$$

1.2. Периодическая последовательность цугов

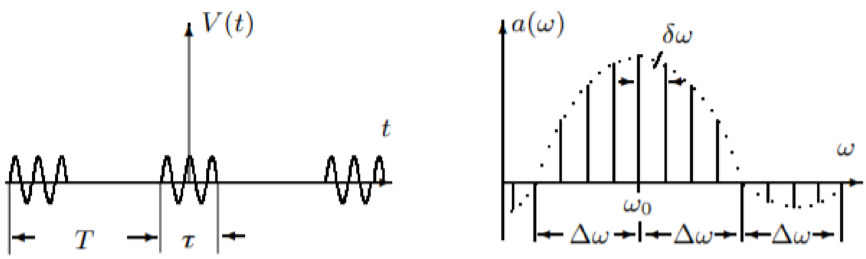

Рис. 2: График сигнала и его спектра (цуг)

Возьмём цуги колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T.

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t)\, dt = \tag{7}$$

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right).$$

Пусть T кратно τ. Тогда спектры последовательности прямоугильных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0.

1.3. Амплитудно-модулированные колебания

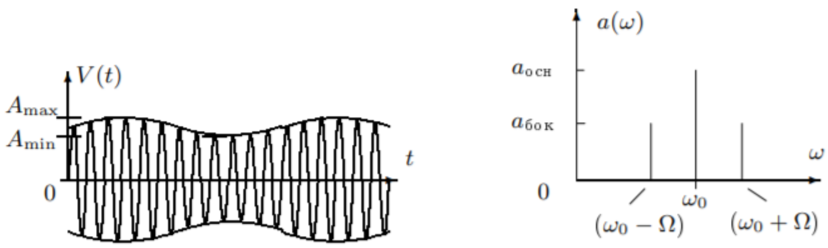

Рис. 3: Пример амплитудной модуляции

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 \left[1 + m \cos \Omega t\right] \cos \omega_0 t. \tag{8}$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \tag{9}$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)\, t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)\, t. \tag{10}$$

2. Обработка данных

2.1. Периодические прямоугольные импульсы

Рис. 4: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс

Рис. 5: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 200$ мкс

Рис. 6: Спектр при $f_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 100$ мкс

Рис. 7: Спектр при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс

При фиксированной частоте $f_{\text{повт}} = 1$ кГц будем менять τ, при этом будет меняться ширина спектра. Зафиксируем наблюдения в таблице.

Построим график зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$:

Из графика следует выоплнение соотношения неопределённости для прямяугольных импульсов: $\Delta\nu \cdot \tau =\approx 1$.

τ, **мкс**	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\Delta\nu$, **кГц**	25	16,5	12,5	10	8,5	7	6,5	5,5	5
$\frac{1}{\tau}$, **кГц**	25	16,66	12,5	10	8,33	7,14	6,25	5,56	5

Таблица 1: Зависимость ширины спектра от времени длительности импульса

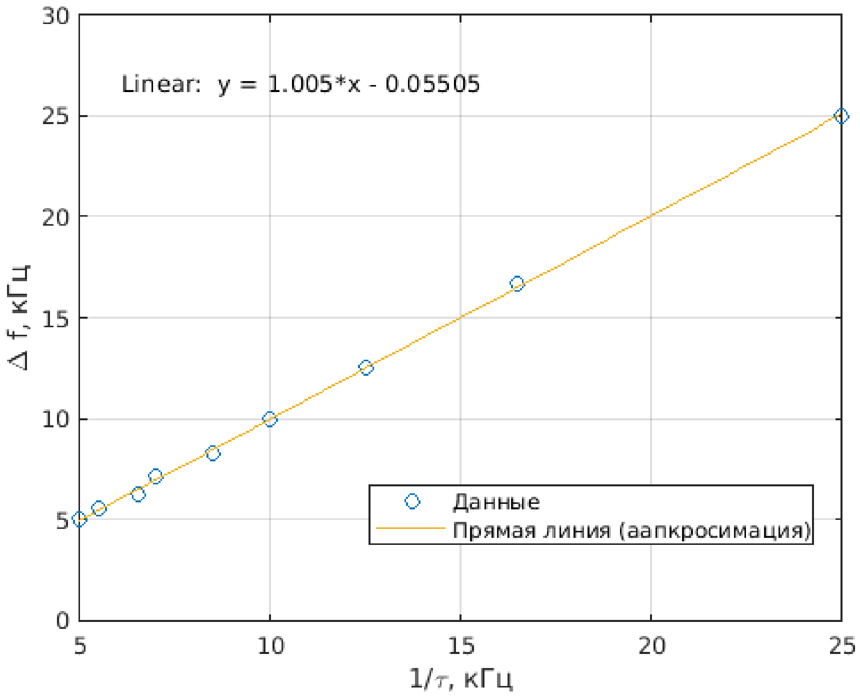

Рис. 8: Зависимость $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

2.2. Периодическая последовательность цугов

Установим несущую частоту цугов $\nu_0 = 25$ кГц, частота запуска цугов $f_{\text{повт}} = 1$ кГц с длительностью импульса $\tau = 100$ мкс.

Проанализируем, как меняется спектр при изменении длительности импульса цуга.

Теперь проанализируем, как меняется спектр при изменении несущей частоты.

Установим несущую частоту $\nu_0 = 30$ кГц при $\tau = 100$ Гц, варируя частоту запуска цугов. Снимем зависиимость расстояния между соседними спектральными компонентами от частоты повтоения цугов:

Данные по расстоянию между компонентами спектра получены по

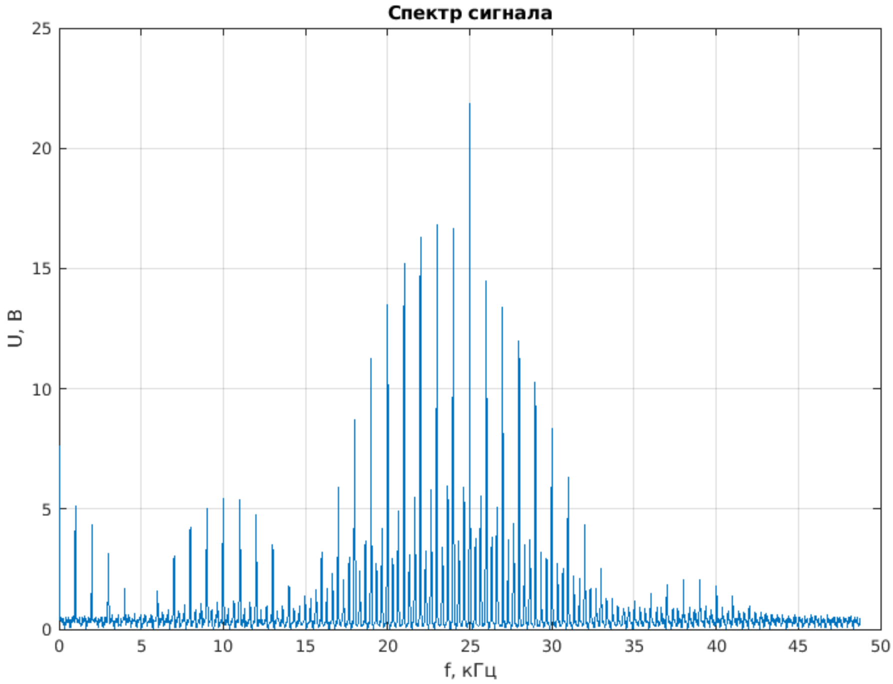

Рис. 9: Спектр при $\nu_0 = 25$ кГц, $\tau = 100$ мкс

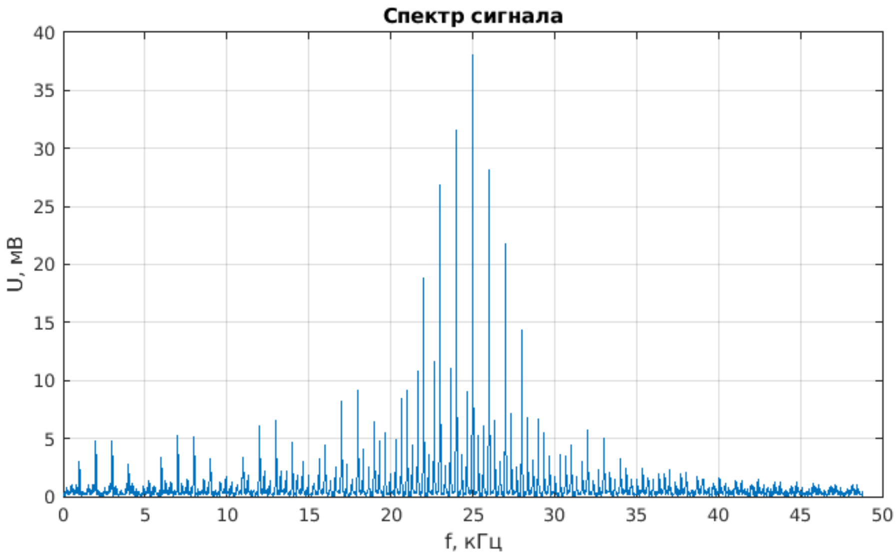

Рис. 10: Спектр при $\nu_0 = 25$ кГц, $\tau = 200$ мкс

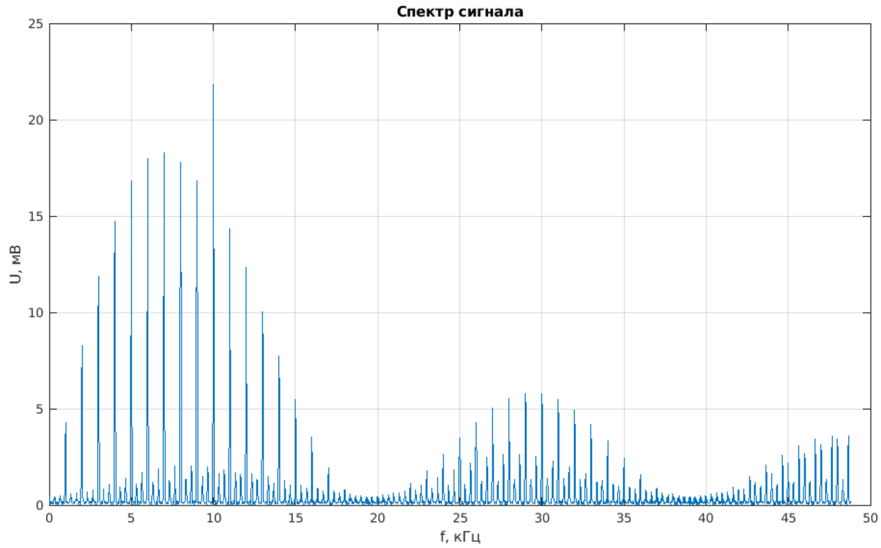

Рис. 11: Спектр при $\nu_0 = 10$ кГц, $\tau = 100$ мкс

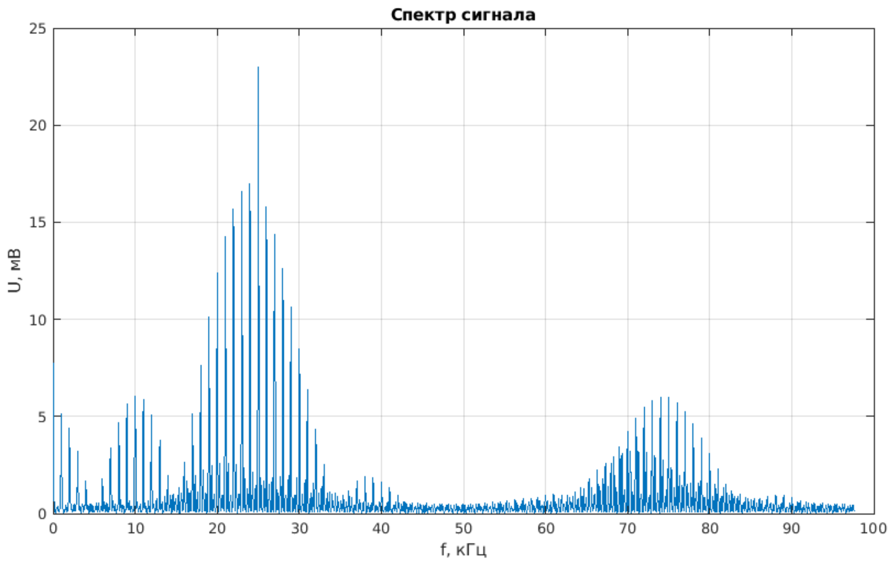

Рис. 12: Спектр при $\nu_0 = 25$ кГц, $\tau = 100$ мкс

более, чем 80 точек данных, и с точностью до погрешности генератора совпадают со значениями частоты повторения цугов $f_{\text{повт}}$.

Получается, что $\delta\nu = kf_{\text{повт}}$, где $k \approx 1$. Из теории следует, что значения двух величин совпадают, значит экспериментальная зависимость

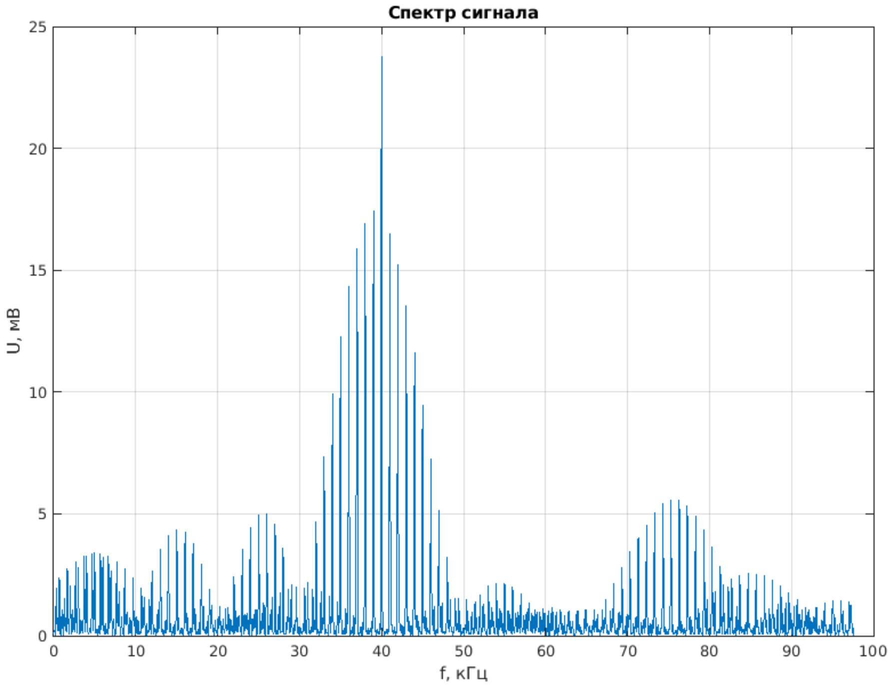

Рис. 13: Спектр при $\nu_0 = 40$ кГц, $\tau = 100$ мкс

$\delta\nu$, **кГц**	0,5	1	2	4	5
$f_{\text{повт}}$, **кГц**	0,5	1	2	4	5

Таблица 2: Зависимость расстояния между компонентами спектра от частоты повторения цугов

верна.

И для прямугольных импульсов, и для цугов при повышении частоты повторения импульсов увеличивается расстояние между компонентами спектра, а при повышении длительности импульса уменьшается ширина спектра. Разница между графиками спектров прямугольного импульса и цуга в том, что спектр цугаа смещён на значение несущей частоты в сторону поовышения частоты. То есть при устрмлении несущей частоты к нулю графики наложатся друг на друга.

2.3. Амплитудно-модулированные колебания

Установим синусоидальный сигнал частоты $\nu_0 = 25$ кГц, амплитуды $0,5$ В. Подключим модуляцию к этому сигналу амплитуды $0,1$ В и частоты

$\nu = 1$ кГц.

Меняя глубину модуляции до 1, измерим следующие значения:

A_{min}, мВ	450	375	300	225	150	75	0
A_{max}, мВ	550	625	700	775	850	925	1000
m	0,1	0,25	0,4	0,55	0,7	0,85	1
$A_{бок}$, мВ	17	43	68	94	120	147	174
$A_{осн}$, мВ	343	341	342	342	340	342	341
$\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$	0,496	0,126	0,199	0,275	0,353	0,430	0,510

Таблица 3: Зависимость $\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$ от m

Построим график зависимости.

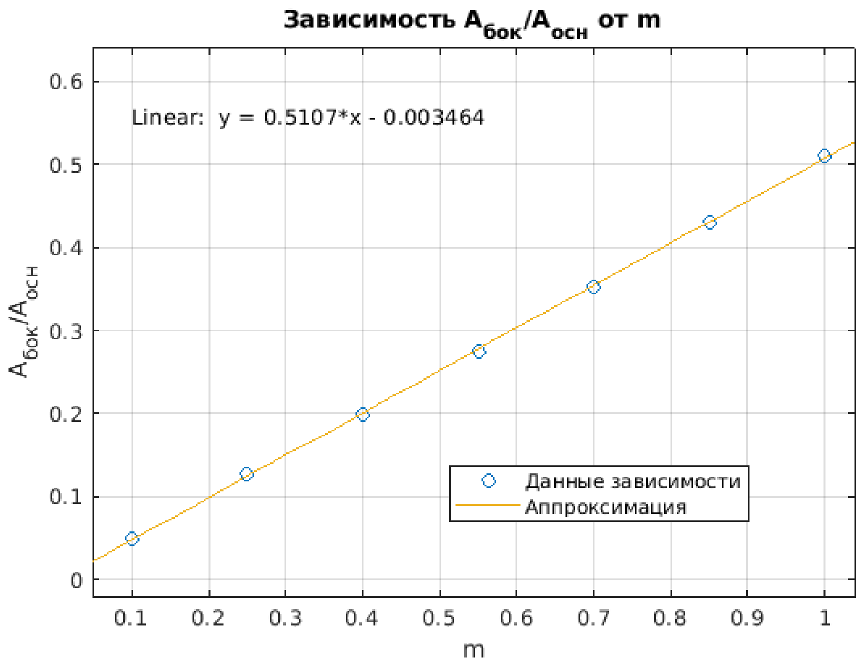

Рис. 14: График зависимости $\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$ от m

Получилось значение $k = 0,511 \pm 0,021$, согласно же теории это значение должно равняться $0,5$. То есть получилось верное соотношение амплитуд при различных модуляциях.

При увеличении частоты модуляции две боковые гармоники отдаляются от основной по величине на спектре.

2.4. Частотная модуляция

Установим синусоидальный сигнал с частотой $\nu = 25$ кГц с синусоидальной модуляцией частоты 1 кГц с девиацией частоты 100 Гц.

Меняя девиацию, снимем зависимость амплитуд гармоник от её значения.

Δf_m, **кГц**	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
A_0, **мВ**	338	335	331	325	318	309	299	287	273	260
A_{+-1}, **мВ**	17	33	50	67	83	97	112	125	138	150
A_{+-2}, **мВ**	0	2	4	7	10	15	20	26	32	38
β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{A_{+-1}}{A_0}$	0,050	0,099	0,151	0,206	0,261	0,314	0,375	0,436	0,505	0,577

Построим график зависимости $\frac{A_{+-1}}{A_0}$ от β:

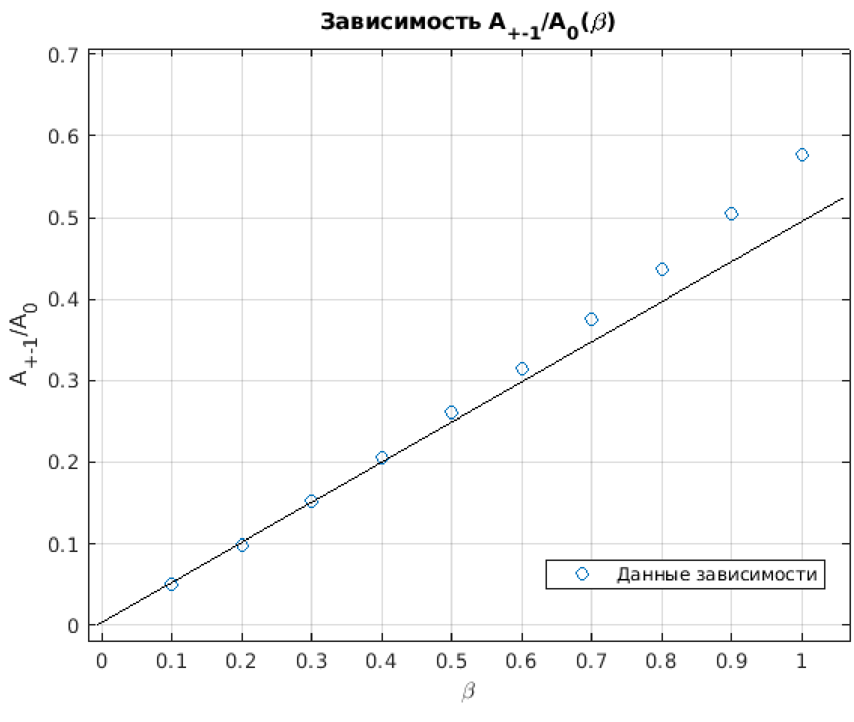

Рис. 15: График зависимости $\frac{A_{+-1}}{A_0}$ от β

Предельная кривая, построенная при $\beta \ll 1$, даёт отношение боковых гармоник к основной $k = 0,5$, что и соответсвуте теоретической формуле, выведенной в приближении $\beta \ll 1$. При этом значения $\beta \geqslant 0,9$ дают отклонение от построенной прямой больше, чем 10 %.

При дальнейшей увеличении частоты девиации получим более сложные спектры:

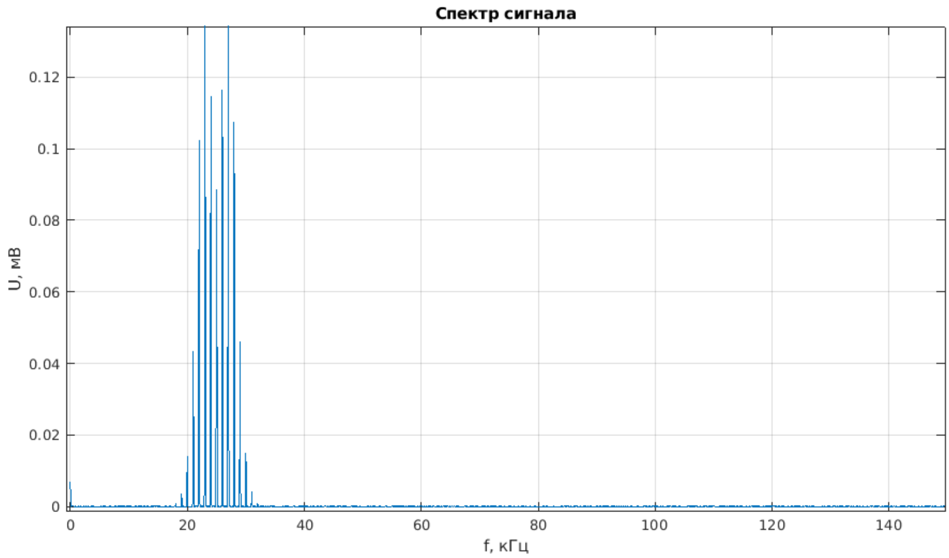

Рис. 16: Спектр при частоте девиации $\Delta f_m = 3$ кГц

3. Заключение

Таким образом теоретическое описание спектров исследуемых сигналов подтвердилось на основе их изучения с помощью генератора и осциллографа.

4. Список используемой литературы

- Лабораторный практикум по общей физике. Электричество и магнетизм
- Описание лабораторных работ на кафедре общей физики МФТИ

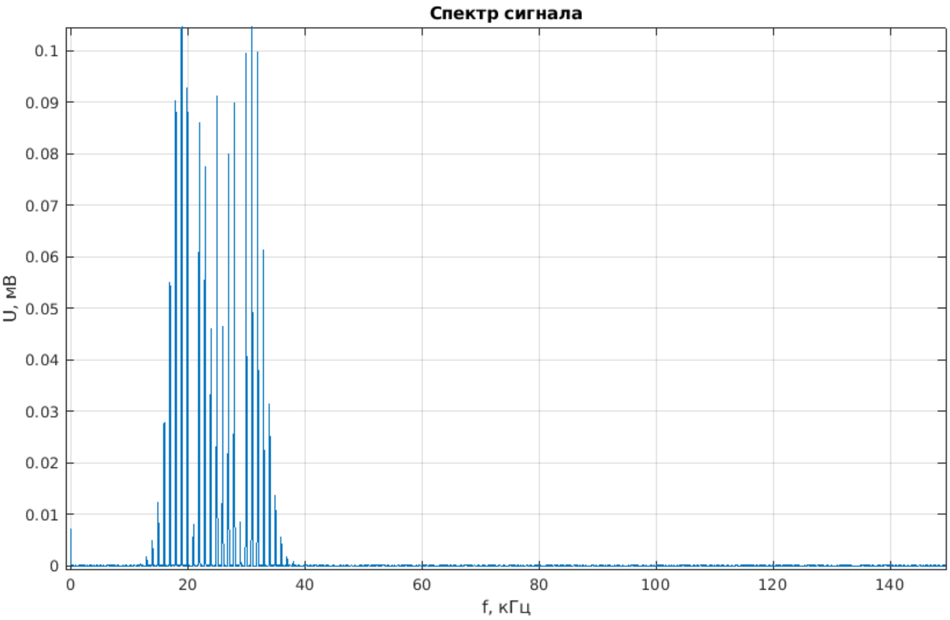

Рис. 17: Спектр при частоте девиации $\Delta f_m = 7,5$ кГц