

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Лабораторная работа по общему курсу физики
Электричество и магнетизм

3.2.4. Свободные колебания

Глаз Роман Сергеевич
Группа Б01-007

Долгопрудный
2021

Содержание

1	Теоретическое введение	1
1.1	Последовательный RLC контур	1
1.2	Свободные затухающие колебания	1
1.3	Апериодические колебания	2
2	Экспериментальная установка	3
3	Ход работы	3
3.1	Проверка формулы Томсона	3
3.2	Определение критического сопротивления	5
3.3	Добротность контура	5
4	Заключение	6
5	Список используемой литературы	7

Цель работы: исследования свободных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, индуктивность, электронный осциллограф, универсальный мост.

1. Теоретическое введение

1.1. Последовательный RLC контур

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_C , а ток, текущий в контуре, через I . Тогда

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad (1)$$

Вводя обозначения $\gamma = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t), \quad (3)$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $U_0 = U_C$ – начальное напряжение на конденсаторе.

1.2. Свободные затухающие колебания

В случае, когда $\gamma < \omega_0$, имеем $\kappa = i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частоты свободных (собственных) колебаний. Тогда ток

$$I = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (4)$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = \frac{1}{\tau}$, где τ – время затухание амплитуды в e раз. Формулы для напряжения на конденсаторе и тока в цепи можно переписать иначе:

$$\begin{aligned}
 U_C &= U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta), \\
 I &= -\frac{U_0}{L} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

1.3. Апериодические колебания

В случае $\gamma > \omega_0$, формулы для тока и напряжения на конденсаторе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t), \\
 U_C &= U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \text{sh}(\kappa t) + \text{ch}(\kappa t) \right).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Процесс в этом случае не является колебательным, его называют апериодическим. Режим, соответствующий $\gamma = \omega_0$, называется *критическим*. В этом случае предельный переход $\omega \rightarrow 0$ в (6) даст

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t}, \\
 U_C &= U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Сопротивление в этом случае

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{8}$$

называется *критическим сопротивлением* контура.

Добротность контура по определению

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \tag{9}$$

где W – запасённая энергия, ΔW – потери за период. Тогда

$$Q = 2\pi \frac{CU_0^2/2 \cdot e^{-2\gamma t}}{CU_0^2/2 \cdot (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(T+t)})} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{10}$$

Логарифмическим декрементом затухания называются число

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \tag{11}$$

или

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \quad (12)$$

2. Экспериментальная установка

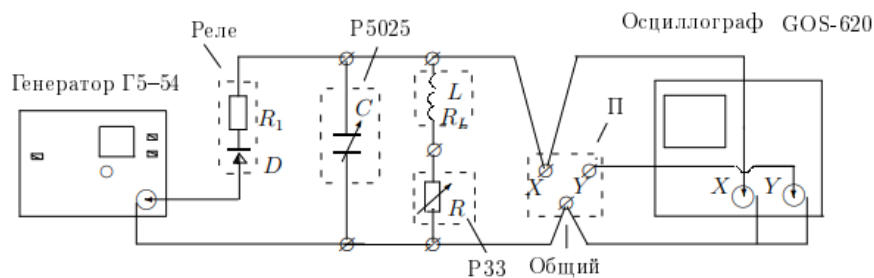


Рис. 1: Экспериментальная установка

На рисунке приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность L и переменные ёмкость C и сопротивление R . Колебания наблюдаются на экране осциллографа.

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит тиристор D и ограничительный резистор R_1 .

Импульсы заряжают конденсатор C . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико ($\approx 1 \text{ МОм}$), так что его влиянием на контур можно пренебречь.

Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

3. Ход работы

3.1. Проверка формулы Томсона

Установим в контуре $R = 0$, $C = 0,02 \text{ мкФ}$. Для генератора импульсов имеем следующие настройки: длительность импульсов 5 мкс, частота повторения импульсов 100 Гц.

Увеличивая значение C , снимем зависимость $T(C)$:

T , мкс	350	425	540	740	940	1240
C , мкФ	0,02	0,03	0,05	0,09	0,15	0,25
T , мкс	1460	1660	1850	2000	2150	2300
C , мкФ	0,36	0,47	0,58	0,69	0,80	0,90

Считая, что сопротивление цепи равно нулю, посчитаем также теоретические значение периодов по формуле Томсона. Для этого снимем значение индуктивности катушки: $L = 145 \pm 1$ мГн (при рассматриваемом диапазоне частот). С помощью посчитанных значений построим таблицу, а затем график $T_{\text{теор}}(T_{\text{эксп}})$:

T , мкс	344,14	421,48	544,13	730,04	942,47	1216,73
C , мкФ	0,02	0,03	0,05	0,09	0,15	0,25
T , мкс	1460	1660	1850	2000	2150	2300
C , мкФ	0,36	0,47	0,58	0,69	0,8	0,9

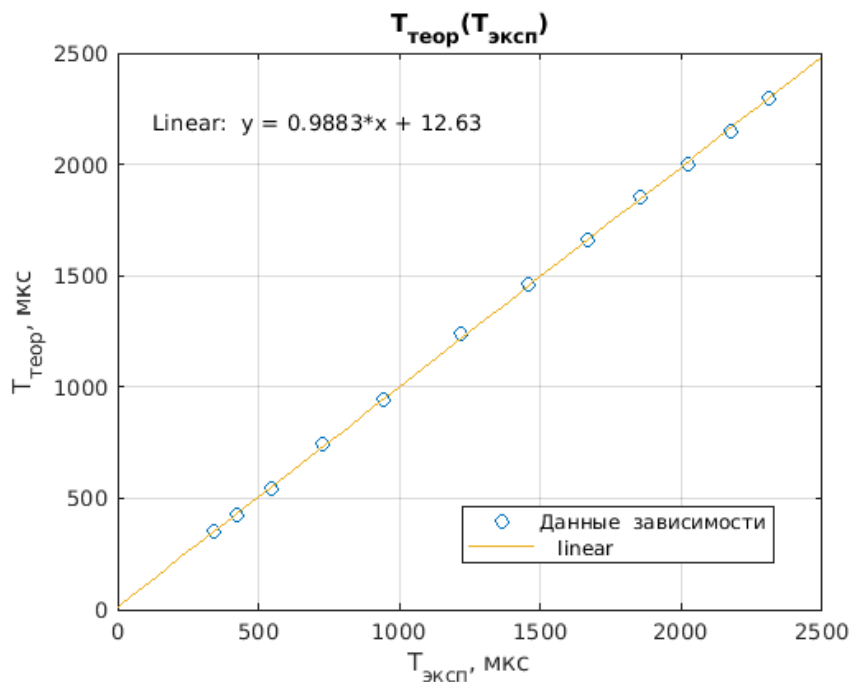


Рис. 2: График зависимости $T_{\text{теор}}(T_{\text{эксп}})$

Из графика видно, что для цепи с $R = 0$ действительно выполняется формула Томсона для периода свободных колебаний. Однако нужно учитывать,

что у катушки всё ещё есть сопротивление R_L и формула Томсона описывает период колебаний лишь приблизительно.

3.2. Определение критического сопротивления

Из формулы Томсона, имея значение индуктивности катушки, найдём такую ёмкость, при которой частота колебаний будет равна 5 кГц: $C = 6,75 \pm 0,08$ мкФ. Тогда поставим значение $C = 6,7$ мкФ на магазине. Из полученных значений найдём критическое сопротивление из теоретической формулы: $R_{кр} = 2\sqrt{L/C} = 9430 \pm 30$ Ом.

Теперь найдём значение критического сопротивления, увеличивая сопротивление на магазине от нуля до тех пор, пока колебания не станут апериодическими: $R_{кр} = 9000 \pm 100$ Ом.

Теперь установим посчитанное значение ёмкости на магазине ёмкостей. Снимания значения амплитуд с осциллографа, посчитаем зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления $\theta(R)$, учитывая, что при рассматриваемой частоте колебаний у катушки сопротивление $R_L = 17,2 \pm 0,05$ Ом (это значение нужно добавить к сопротивлению магазина сопротивлений):

θ	0,57	0,69	0,88	0,96	1,10	1,41	1,67	1,76
$R, \text{ Ом}$	917	1117	1367	1617	1817	2267	2517	2717

Построим график $\theta(R)$:

Зависимость действительно линейная, как и описывает теория. Теперь построим зависимость $\frac{1}{\theta^2} \left(\frac{1}{R^2} \right)$:

Коэффициент наклона равен $k = (2,50 \pm 0,13) \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-2}$, при этом критическое сопротивление связано с этим коэффициентом формулой $R_{кр} = 2\pi\sqrt{k} = 9930 \pm 260$ Ом.

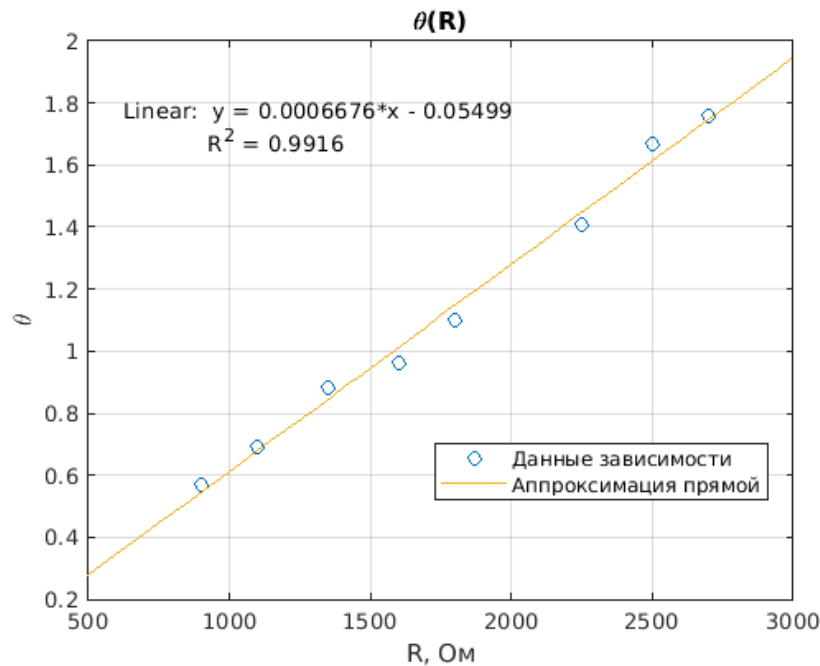
Таким образом, измеренное значение критического сопротивления тремя способами оказалось во всех случаях примерно одинаковым.

3.3. Добротность контура

Рассчитаем теперь значения добротности для минимум и максимума логарифмического декремента, взятые из предыдущей таблицы с данными:

$$Q_{min} = \frac{\pi}{\theta_{max}} = 1,79 \pm 0,10, \quad Q_{max} = \frac{\pi}{\theta_{min}} = 5,51 \pm 0,33 \quad (13)$$

Погрешности высоки из-за погрешностей измерения логарифмических декрементов затухания.

Рис. 3: График зависимости $\theta(R)$

Теперь найдём те же самые значения через спирали на фазовой плоскости, измеряя аналогично логарифмический декремент затухания:

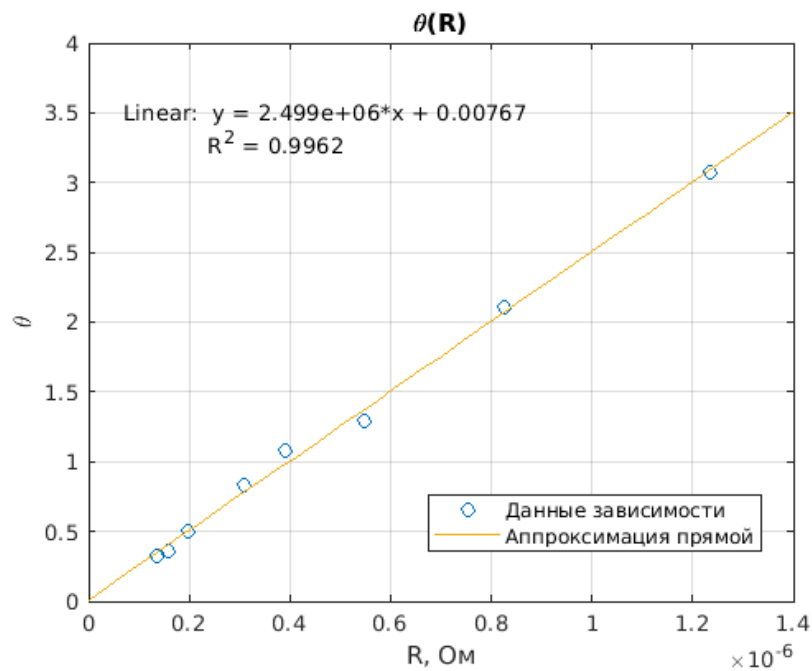
$$Q_{min} = \frac{\pi}{\theta_{max}} = 1,82 \pm 0,08, \quad Q_{max} = \frac{\pi}{\theta_{min}} = 5,57 \pm 0,29 \quad (14)$$

4. Заключение

В результате эксперимента подтверждена формула Томсона для свободных колебаний, а так же измерены различные параметры RLC контура при различных значениях параметров контура.

Ёмкость катушки фиксирована на протяжении всего эксперимента и при частоте в районе 5000 Гц равна $L = 145,1 \pm 0,2$ мГн, для конденсатора имеем $C = 6,7$ мкФ.

Критическое сопротивление для контура было найдено тремя способами: $R_{кр} = 9430 \pm 30$ Ом – посчитанное значение из теоретической формулы, $R_{кр} = 9000 \pm 100$ Ом – напрямую, исследуя, когда колебания переходят в апериодические и $R_{кр} = 9930 \pm 260$ Ом – значение, найденное косвенным способом через измерение логарифмических декрементов затухания при различных сопротивлениях. Таким образом, самое точное значение –

Рис. 4: График зависимости $\frac{1}{\theta^2}(\frac{1}{R^2})$

измеренное через формулу. При этом все значения получились одинаковыми в пределах нескольких σ .

Для добротностей имеем следующее: $Q_{min} = 1,79 \pm 0,10$, $Q_{max} = 5,51 \pm 0,33$ – значения, измеренные через логарифмические декременты затухания из ранее построенной таблицы, $Q_{min} = 1,82 \pm 0,08$, $Q_{max} = 5,57 \pm 0,29$ – значения, измеренные через спирали на фазовой диаграмме. Таким образом, значения совпадают, но в методе фазовой диаграммы значения имеют меньшую погрешность.

5. Список используемой литературы

- Лабораторный практикум по общей физике. Электричество и магнетизм
- [Описание лабораторных работ на кафедре общей физики МФТИ](#)