UNIVERSIDAD DE GRANADA

Simulación de Sistemas

grado en ingeniería informática

Práctica 3

Modelos de Simulación Dinámicos y Discretos

Autor

Vladislav Nikolov Vasilev

Rama

Computación y Sistemas Inteligentes

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Curso 2019-2020

Índice

1. Mi segundo modelo de simulación discreto

En esta sección vamos a estudiar primero el comportamiento de un modelo de simulación de un servidor con una única cola, y después de m servidores con una única cola. Vamos a ver cómo distintos métodos de incremento del itempo pueden afectar al funcionamiento del sistema, y discutiremos cuál de ellos es mejor.

1.1. Método de incremento fijo del tiempo

El primer método de incremento del tiempo que vamos a estudiar es el incremento fijo. Como su propio nombre indica, el tiempo se va incrementando en una cantidad fija, tal como lo hace un reloj normal. Esta cantidad viene decidida por la persona que va a utilizar el sistema (pueden ser minutos, segundos, milésimas, horas, etc.).

Debido a la naturaleza de dicho incremento, la variable de tiempo debe ser tratada como una variable entera. Por tanto, aunque en el pesudocódigo proporcionado se generen las llegadas y el servicio utilizando valores reales, dichos valores obtenidos deben ser transformados a enteros, redondeándolos al entero más próximo. Además, si el valor que se obtiene al hacer las transformaciones correspondientes es 0, se debe devolver 1, ya que si no, se generaría un suceso en el tiempo actual y, al incrementar el tiempo en una unidad, ese suceso se quedaría en un tiempo anterior al nuevo actual, y por tanto, nunca se podría llevar a cabo.

Una vez dicho esto, vamos a experimentar con el sistema. Para ello, vamos a utilizar las siguientes unidades de tiempo: horas, medias horas, cuartos de hora, minutos, segundos, décimas de segundo y milésimas de segundo. En cada caso simularemos que se tienen que atender 10000 clientes, y repetiremos cada ejecución 100 veces. De ahí, podremos ver los valores obtenidos en cada simulación y los valores medios para el número medio de clientes en la cola y el porcentaje de tiempo de ocio del servidor. Además, veremos cuánto tarda cada simulación y el tiempo medio que han tardado todas las simulaciones, aunque en la tabla se reflejará solo este último valor. Vamos a pintar también en algunos de los casos gráficas para ver cómo van evolucionando los resultados que se obtienen en cada una de las 100 simulaciones, para ver si de verdad se parecen a los resuldatos medios. Los valores de `tlleg` y `tserv` son 9 y 6 minutos, respectivamente, aunque aparecerán reflejados según la unidad de tiempo correspondiente.

Una vez hechas todas las simulaciones, se han obtenido los siguientes resultados:

`tlleg`	`tserv`	**Num. medio clientes cola**	**% medio tiempo ocio servidor**	**Tiempo ejecución medio**
0.15	0.1	0.0262607	0.138175	0.000593755
0.3	0.2	0.21363	2.93386	0.000889945
0.6	0.4	0.550758	11.669	0.000932894
9	6	1.25962	31.5821	0.00104538
540	360	1.33738	33.3778	0.0119809
5400	3600	1.32336	33.4474	0.134477
54000	36000	1.344	33.1509	1.33758

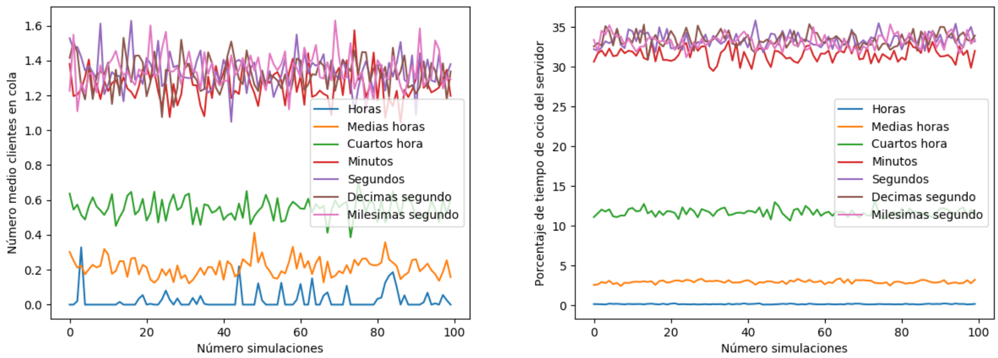
Cuadro 1: Resultados obtenidos por el incremento de tiempo fijo.

A primera vista podemos ver que a medida que `tlleg` y `tserv` usan unidades más pequeñas de tiempo (y por tanto, sus valores son más altos), los resultados obtenidos se van incrementando, hasta el punto en el que parece que se estabilizan. Lo que sucede es que cuando las unidades de tiempo son grandes, los valores de `tlleg` y `tserv` son menores que 0. Al llamar a los generadores, se producirán valores próximos a 0, y al redondearlos, estos pasan a valer 0. Como el generador no puede devolver 0, devuelve 1. Por tanto, lo que estamos haciendo en realidad es sobreestimar la duración de un suceso, por lo que los valores obtenidos no serán reales, ya que se va acumulando el error al haber sobreestimado. Este es un problema de los métodos de incremento fijo del tiempo, y a la vez es una fuerte desventaja, ya que dependiendo de la unidad de tiempo que se utilice, los valores obtenidos serán más o menos representativos de los que se podrían obtener de forma teórica.

Aparte de esto, si analizamos los resultados vemos que los tiempos medios de ejecución se van incrementando, debido a que se debe incrementar más veces el reloj hasta llegar a un suceso. El valor medio del número medio de clientes en cola, $Q(n)$, parece estabilizarse en torno a 1.33, y el valor medio del porcentaje de tiempo de ocio del servidor, $PTO(n)$ parece estabilizarse al final en torno al 33 %. Para unidades de tiempo superiores a los segundos los resultados obtenidos no son representativos, ya que se quedan demasiado lejos de los valores obtenidos al utilizar unidades de tiempo más pequeñas. Por tanto, parece ser que, en caso de utilizar generadores de incremento fijo, lo suyo sería utilizar unidades de tiempo más pequeñas (es decir, que los valores sean grandes), ya que de esta forma se cometerá menos error.

Ahora, pasemos a estudiar el comportamiento del sistema para cada simulación. Vamos a ver qué resultados se han obtenido para el número de medio de clientes en cola y para el porcentaje de tiempo de ocio del servidor. Vamos a estudiar dicha evolución con gráficas, tal y como se mencionó anteriormente, para ver si hay mucha discrepancia entre los valores medios obtenidos. Vamos a realizar un estudio de todos los resultados de forma conjunta.

A continuación se pueden ver las gráficas mencionadas en el párrafo anterior:



(a) Número medio de clientes en la cola. (b) Porcentaje de tiempo de ocio del servidor.

Figura 1: Variación de los resultados a lo largo de las simulaciones.

Vemos que, tal y como habíamos dicho antes, para unidades de tiempo más grandes que los minutos, los valores de $Q(n)$ y $PTO(n)$ están bastante alejados del resto. En aquellos casos en los que se usa como unidad de tiempo una que es el minuto o inferior a ésta los resultados sí que están próximos, y parece que se aproximan a los valores medios obtenidos. Vemos que en todos los casos existe cierta variabilidad entre los resultados de una simulación o de otra. Por tanto, no podríamos fiarnos solo de los resultados obtenidos por una simulación, sino que, tal y como llevamos haciendo hasta ahora, habría que hacer algunas simulaciones y promediar.

Por tanto, como pequeña conclusión de esta parte, podemos sacar que es importante escoger una unidad de tiempo adecuada, ya que si no lo es, va a provocar que los resultados no sean del todo buenos. Si hemos escogido una unidad de tiempo adecuada, los resultados que obtengamos serán buenos, ya que estarán bastante relacionados entre sí, justo como ha pasado aquí.

1.2. Método de incremento variable del tiempo

El siguiente método de incremento del tiempo que vamos a estudiar es el incremento variable. En este caso, el tiempo no se va incrementando de manera fija como sucedía anteriormente, si no que se incrementa hasta el suceso más próximo de una. Por tanto, este método parece ser mucho más eficiente, ya que evita tener que pegar demasiados saltos y evita errores como los que se producían anteriormente.

Para ver como funciona este tipo de incremento, vamos a realizar los mismos experimentos que en la sección anterior, de forma que tengamos resultados comparables. A continuación se puede ver una tabla con los resultados:

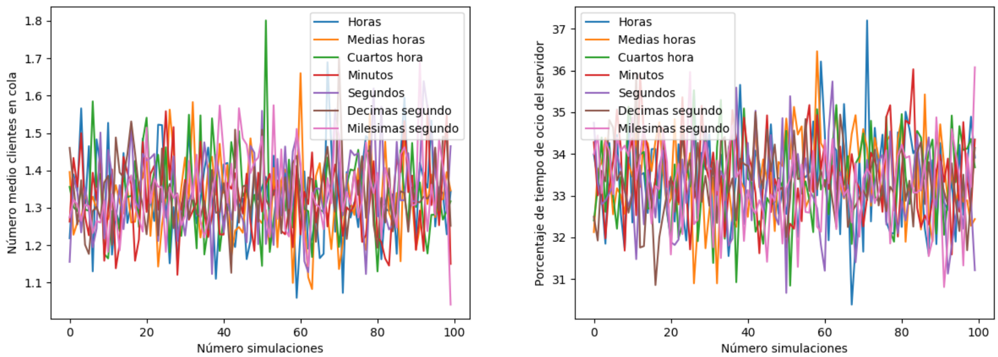
`tlleg`	`tserv`	**Num. medio clientes cola**	**% medio tiempo ocio servidor**	**Tiempo ejecución medio**
0.15	0.1	1.32894	33.3767	0.000731009
0.3	0.2	1.32033	33.4927	0.000986358
0.6	0.4	1.335	33.3979	0.000692968
9	6	1.32356	33.5117	0.000969834
540	360	1.35058	33.1523	0.000713056
5400	3600	1.33727	33.3192	0.000690027
54000	36000	1.34364	33.2906	0.000895026

Cuadro 2: Resultados obtenidos por el incremento de tiempo variable.

Podemos ver que en general los resultados obtenidos en todos los casos son más o menos iguales, tanto para los valores de $Q(n)$ como de $PTO(n)$. Además, los tiempos de ejecución son casi los mismos en todos los casos, por lo tanto son independiendes de la unidad de tiempo utilizada, a diferencia del caso anterior. Aquí los tiempos son casi constantes, ya que existe poca o muy poca variación entre éstos. Observando los tiempos de la tabla 1, vemos que, a medida que usamos medidas de tiempo más pequeñas, los tiempos medios se van haciendo más grandes, experimentando lo que parece ser un crecimiento lineal, ya que el número de veces que se incrementará el reloj aumenta. Aquí, los incrementos solo dependen del número de sucesos, mientras que en el caso anterior dependían de la unidad de medida de tiempo. Por tanto, de aquí podemos concluir que, efectivamente, el incremento variable del tiempo es muchísimo más eficiente que el incremento fijo del tiempo, ya que el primero es constante, independientemente de la unidad de medida utilizada, mientras que el segundo es lineal, ya que en función de la unidad de medida del tiempo utilizada tardará más o menos (será más rápido para las unidades más grandes).

Si comparamos la calidad de los resultados, vemos también que en general son mucho mejores. Vemos que incluso utilizando unidades de tiempo grandes, como por ejemplo horas, los valores medios obtenidos son muy parecidos a los que se obtienen con unidades más pequeñas, como por ejemplo las décimas de segundo. Esto es completamente lo opuesto a lo que sucedió anteriormente, ya que los resultados eran muy dispares. Por tanto, parece que el incremento de tiempo variable es independiente de la unidad de medida usada, a diferencia del incremento fijo del tiempo.

Si observamos los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones, nos encontramos con lo siguiente:



(a) Número medio de clientes en la cola. (b) Porcentaje de tiempo de ocio del servidor.

Figura 2: Variación de los resultados a lo largo de las simulaciones.

Tal y como pasaba antes, vemos que existen variaciones entre los resultados obtenidos para cada simulación. No obstante, vemos que son bastante parecidos en general. Parece que oscilan en torno a la media, tal y como pasaba antes. De nuevo, si hubiésemos tomado el resultado de una única simulación como el correcto, nos hubiésemos equivocado ya que, tal y como hemos visto, existe una ligera variación en los resultados.

Ahora que hemos visto los dos modelos, podemos hacer una comparación de cómo de buenos son los resultados ofrecidos. Para ello, nos podemos servir de las expresiones teóricas. Para hacer los cálculos, vamos a utilizar los tiempos expresados en minutos, para facilitar el cómputo. Primero tenemos que calcular ρ:

$$\rho = \frac{\texttt{tserv}}{\texttt{tlleg}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = 0.\widehat{6} \tag{1}$$

Ahora, podemos calcular el valor teórico de $Q(n)$:

$$Q(n) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1.\widehat{3} \tag{2}$$

Y también el de $PTO(n)$:

$$PTO(n) = 100 \cdot (1-\rho) = 100 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) 100 \cdot \frac{1}{3} = \frac{100}{3} = 33.\widehat{3} \tag{3}$$

Si comparamos los resultados de la tabla 1 con los teóricos, vemos que el incremento fijo de tiempo solo ofrece resultados parecidos a los teóricos cuando las unidades de tiempo utilizadas son pequeñas. A partir de los segundos podríamos decir realmente que son resultados correctos. A excepción de los minutos, que ofrecen unos resultados aproximados aunque con cierto error, las medidas de tiempo más grandes nos ofrecerían valores con demasiado error como para considerarlos válidos.

En cambio, todos los resultados medios obtenidos por el incremento variable del tiempo, tal y como se pueden ver en la tabla 2, son muy próximos, por no decir casi iguales, a los resultados teóricos, independientemente de la unidad de medida del tiempo utilizada. Por tanto, la calidad de los resultados ofrece el incremento variable del tiempo es muy superior a la del incremento fijo del tiempo.

Como conclusión, podemos decir que, tras estudiar los dos casos, hemos visto que el incremento variable del tiempo es órdenes de magnitud más eficiente que el incremento fijo del tiempo, y además, permite obtener unos resultados de mayor calidad, independientemente de qué medida del tiempo se use.

1.3. Modelo dinámico discreto de m servidores con una única cola

En esta sección vamos a estudiar un modelo algo más complejo que el anterior, en el cuál tenemos m servidores con una única cola. Vamos a empezar a estudiar el sistema primero con $m = 1$, de forma que podamos verificar utilizando valores teóricos. Posteriormente, estudiaremos el sistema al aumentar m y haciendo que el tiempo de servicio de los servidores se mantenga constante; es decir, vamos a hacer que `tserv` dividido m sea igual tanto para $m = 1$ como para valores más elevados. También probaremos a simular más de una vez, y además, cambiaremos los simuladores de datos, para ver qué efecto tiene dicho cambio sobre el sistema.

1.3.1. Verificación del sistema

Vamos a empezar experimentando con el servidor para ver si los resultados ofrecidos son buenos o no. Para ello, vamos a establecer una serie de condiciones:

- Como medida del tiempo utilizaremos los minutos, ya que no se especifica ninguna medida concreta con la que realizar las pruebas y porque el cáclulo de los valores teóricos será más sencillo. Por tanto, tendremos que `tlleg` $= 9$ y `tserv` $= 6$.
- Como al sistema se le tiene que especificar cuál es el tiempo de parada, vamos

a utilizar los siguientes tiempos: 100, 1000, 10000, 100000, 1000000. De esta forma, vamos a ver cómo evolucionan los resultados obtenidos al hacer la simulación más larga.

Una vez hechas las simulaciones correspondientes, se pueden ver los resultados a continuación:

	Tiempo parada				
	100	**1000**	**10000**	**100000**	**1000000**
T. medio espera en cola	14.319	6.660	9.228	11.988	11.970
T. medio estancia en sistema	20.319	12.660	15.228	17.988	17.970
Núm. medio clientes en cola	2.233	0.770	1.022	1.332	1.328
Núm. medio clientes en sistema	3.128	1.355	1.682	1.998	1.992
Long. media colas no vacías	2.860	2.166	2.474	3.006	2.996
% tiempo ocio servidor	10.530	41.511	34.085	33.362	33.507
Long. máx. cola	5	7	10	17	26

Cuadro 3: Resultados experimentando con el tiempo de parada.

Para comparar dichos resltados, vamos a calcular los valores teóricos, los cuáles tienen sentido cuando el sistema está en funcionamiento un tiempo lo suficientemente grande como para aproximarse a infinito. Los resultados podemos verlos a continuación:

- Tiempo medio de espera en cola $= \frac{tserv^2}{tlleg-tserv} = \frac{6^2}{9-6} = \frac{36}{3} = 12$
- Tiempo medio de estancia en el sistema $= \frac{tserv \cdot tlleg}{tlleg-tserv} = \frac{6 \cdot 9}{9-6} = \frac{54}{3} = 18$
- Número medio de clientes en cola $= \frac{tserv^2}{tlleg(tlleg-tserv)} = \frac{6^2}{9 \cdot (9-6)} = \frac{36}{27} = 1.\widehat{3}$
- Número medio de clientes en el sistema $= \frac{tserv}{tlleg-tserv} = \frac{6}{9-6} = \frac{6}{3} = 2$
- Longitud media de colas no vacías $= \frac{tlleg}{tlleg-tserv} = \frac{9}{9-6} = \frac{9}{3} = 3$

- Porcentaje de tiempo de ocio del servidor $= \left(1 - \frac{tserv}{tlleg}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{6}{9}\right) \cdot 100 = \frac{100}{3} = 33.\widehat{3}$

Ahora, pasemos a analizar los resultados obtenidos. Vemos que para un tiempo de simulación pequeño, los resultados obtenidos se alejan bastante de los teóricos, ya que éstos últimos son para cantidades de tiempo que tienden a infinito. Notamos, no obstante, que a medida que se aumenta el tiempo de simulación, los valores sí que empiezan a tender a los teóricos. A partir de un tiempo de simulación de 100000 unidades vemos que los resultados ya sí que casi iguales a los teóricos, con un cierto margen de error, obviamente. Por tanto, si quisiéramos obtener unos resultados acordes a los teóricos para cualesquiera valores de `tlleg` y `tserv`, deberíamos simular durante un tiempo lo suficientemente grande, siempre acorde al tamaño de las unidades de tiempo.

1.3.2. Aumento del número de servidores

Vamos a aumentar ahora el número de servidores que usamos, pero vamos a aumentar el valor de `tserv` de forma proporcional al número de servidores, tal y como se comentó anteriormente.

Para hacer la experimentación, vamos a probar con 2, 3, 4, 5 y 10 servidores, y por tanto, con unos valores de `tserv` de 12, 18, 24, 30 y 60. En cada caso simularemos durante 100000 unidades de tiempo, ya que antes ha permitido obtener unos resultados que se aproximaban a los teóricos.

	Número de servidores					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**
T. medio espera en cola	11.988	9.288	7.639	6.999	5.074	2.548
T. medio estancia en sistema	17.988	21.288	25.639	30.999	35.074	62.548
Núm. medio clientes en cola	1.332	1.016	0.851	0.780	0.554	0.284
Núm. medio clientes en sistema	1.998	2.317	2.854	3.450	3.819	6.914
Long. media colas no vacías	3.006	3.009	2.846	3.026	2.798	2.854
% tiempo ocio servidor	33.362	34.981	33.258	33.255	34.702	33.709
Long. máx. cola	17	21	15	19	16	12

Cuadro 4: Resultados variando el número de servidores.

Los resultados pueden verse en la tabla 4. Vemos que, en general, existen mejoras al aumentar el número de servidores. Vemos que los tiempos de espera en cola se reducen, al igual que el número medio de clientes en cola y la longitud media de las colas no vacías. Por otro lado, el tiempo de estancia en el sistema aumenta, al igual que el número medio de clientes en el sistema. No obstante, como podemos ver, la longitud máxima de la cola no experimenta mucha mejora (se podrían llevar a cabo tests estadísticos para ver si existe o no mejora significativa), y el porcentaje de tiempo de ocio del servidor se mantiene casi constante.

Por tanto, aumentar el número de servidores del que se dispone perimite obtener en general mejores resultados. No obstante, el tiempo de ocio va a ser el mismo en todos los casos, con lo cuál habrá potencia de cómputo desaprovechada siempre. Por tanto, si quisiéramos recomendar la mejor opción, tendríamos que encontrar un equilibrio entre los resultados que queramos conseguir y el presupuesto del que dispongamos, ya que este último factor influirá mucho a la hora de decantarnos por una u otra opcion.

1.3.3. Cálculo de valores medios

Lo siguiente que tenemos que hacer es modificar el sistema para que sea capaz de realizar más de una simulación. Para ello, hace falta llevar una cuenta de los valores que se van obteniendo, con el objetivo de poder sacar un valor medio final a partir de ellos, junto con su correspondiente desviación típica.

Después de realizar algunas modificaciones del sistema, vamos a ver qué resultados ofrece. Para ello, vamos a obtener una tabla parecida a las anteriores, en las que probaremos a simular 100 y 1000 veces para distintos tiempos de parada, como por ejemplo 1000 y 10000, para ver qué resultados medios se obtienen (si son mejores que los que había antes) junto con su desviación típica. Los tiempos son los mismos de antes, con lo cuál no los comentaremos.

Los resultados se pueden ver en la tabla 5. Podemos ver que al repetir las simulaciones una serie de veces, se consiguen mejores resultados de media. Para el caso del tiempo de parada de 1000, los resultados son peores que los de 10000. Además, la desviación típica es bastante grande, con lo cuál existe mucha variación de los resultados. Sin embargo, para el caso de 10000 unidades de tiempo, los resultados son bastante buenos, sobre todo si los comparamos con los de la tabla 3. En este caso se acercan más a la media, y tienen una desviación típica moderada, sin ser tan grande como en el caso de las 1000 unidades. Por tanto, de aquí podemos concluir que es importante realizar no una, si no un conjunto de simulaciones, y promediar los resultados obtenidos. Este acercamiento permite obtener resultados mucho más precisos que si simplemente se ejecuta una vez el sistema, ya que los procesos estocásticos son mucho más notables en una única simulación que en el promedio de un conjunto de simulaciones.

	Tiempo parada			
	1000		**10000**	
	Núm. simul.		**Núm. simul.**	
	100	**1000**	**100**	**1000**
T. medio espera en cola	10.012 ± 5.093	10.690 ± 6.705	11.646 ± 2.230	11.876 ± 2.496
T. medio estancia en sistema	16.012 ± 5.093	16.690 ± 6.705	17.646 ± 2.230	17.876 ± 2.496
Núm. medio clientes en cola	1.148 ± 0.645	1.229 ± 0.865	1.291 ± 0.258	1.326 ± 0.298
Núm. medio clientes en sistema	1.800 ± 0.710	1.883 ± 0.928	1.954 ± 0.276	1.992 ± 0.319
Long. media colas no vacías	2.557 ± 0.849	2.684 ± 1.104	2.905 ± 0.409	2.963 ± 0.471
% tiempo ocio servidor	34.823 ± 8.434	34.586 ± 8.560	33.677 ± 2.499	33.371 ± 2.803
Long. máx. cola	7.230 ± 2.730	7.463 ± 2.925	12.590 ± 2.656	12.872 ± 3.234

Cuadro 5: Resultados experimentando con el número de simulaciones.

1.3.4. Modificando los generadores de datos

Por úlitmo, vamos a experimentar modificando los generadores de datos para ver cómo influyen éstos en los resultados obtenidos. Se pide implementar un generador determinísitico, el cuál devuleve siempre los valores medios, los cuáles son en este caso 9 para `tlleg` y para `tserv`; y un generador uniforme que tenga como media los dos valores anteriormente mencionados. Para conseguir esto, basta con generar un uniforme en el rango $[0, 1)$ y multplicar dicho valor por dos veces el valor medio. De esta forma se obtiene un valor en el rango $[0, 2t)$, donde t es `tlleg` o `tserv`. Así nos aseguramos de que los dos valores anteriores son los centrales del intervalo, y por tanto, son el valor medio (recordemos que el valor medio de un intervalo uniforme $[a, b)$ es $\frac{1}{2}(a + b)$, de forma que aquí el valor medio es t).

Una vez implementados, para ver cómo se comportan, vamos a comparar los resultados obtenidos para un tiempo de simulación de 100000 unidades, ya que se considera un valor adecuado, con los obtenidos orignalmente, los cuáles se pueden ver en la tabla 3.

Los resultados los podemos ver en la tabla 6. Vemos que para el generador determinístico los valores obtenidos son los ideales, los mejores que se podrían obtener, ya que ningún cliente espera en cola y el tiempo que está un cliente en el sistema es justamente lo que tarda en ser atendido. Sin embargo, los resultados son irreales, ya que nunca o casi nunca nos encontraremos con una situación así, debido a que hay muchos factores que pueden alterar por ejemplo el tiempo de servicio (por ejemplo, que se produzca un fallo mientras se atienda a un cliente). Además, los resultados están casi totalmente alejados de los teóricos, excepto el porcentaje de tiempo de ocio del servidor. Por tanto, debemos evitar utilizar estos tipos de generadores, ya que no ofrecen resultados fiables.

El generador uniforme, por otra parte, obtiene resultados diferentes al determnístico, pero aun así, son bastante malos en general, ya que se quedan bastante lejos de los teóricos. El único valor obtenido que está más o menos cerca del valor teórico es el porcentaje de tiempo de ocio del servidor, aunque sucedía lo mismo con el generador determinístico. Por tanto, no podemos decir que sea la mejor de las ideas utilizar este generador para este problema, ya que no modela la realidad del todo bien.

	Generador exponencial	**Generador determinístico**	**Generador uniforme**
T. medio espera en cola	11.988	0	3.398
T. medio estancia en sistema	17.988	6	9.398
Núm. medio clientes en cola	1.332	0	0.377
Núm. medio clientes en sistema	1.998	0.667	1.036
Long. media colas no vacías	3.006	0	1.468
% tiempo ocio servidor	33.362	33.339	34.062
Long. máx. cola	17	0	7

Cuadro 6: Resultados experimentando con el tipo de generador.

Por tanto, de aquí podemos concluir que es importante escoger un generador adecuado para el problema, uno que permita modelar de la mejor manera posible la realidad. Para este caso, por ejemplo, el generador exponencial es el que mejor modela los ratios de llegadas y servicio de un sistema, ya que nun nos encontraremos que los valores sean exactamente los medios, o que sigan una distribución uniforme, ya que no es el comportamiento típico.

2. Mi Tercer Modelo de Simulación Discreto

En esta sección vamos a estudiar un nuevo modelo de simulación: el remolcador de un puerto. El objetivo principal es comprender el funcionamiento del modelo base y estudiar una serie de mejoras propuestas después, las cuáles serán comentadas más adelante.

2.1. Modelo base

Lo primero que haremos será estudiar el funcionamiento del modelo base. Para ello, vamos a realizar algunas ejecuciones y vamos a ver la salida que nos ofrece cada una. Vamos a repetir cada simulación 10, 100, 500 y 1000 veces y vamos a anotar los resultados medios obtenidos en cada caso.

A continuación podemos ver los resultados después de las pruebas realizadas:

	Número de simulaciones			
	10	**100**	**500**	**1000**
Núm. medio barcos cola llegadas	1.399593	1.204157	1.181208	1.209925
Núm. medio barcos cola salidas	0.029396	0.028271	0.028591	0.028572
Tiempo medio estancia puerto barcos tipo 1	34.717091	33.718605	33.383743	33.695980
Tiempo medio estancia puerto barcos tipo 2	42.068489	39.607136	39.372013	39.640503
Tiempo medio estancia puerto barcos tipo 3	53.770702	51.405556	51.160088	51.512184
% tiempo remolcador desocupado	80.660751	80.630157	80.610443	80.632378
% tiempo remolcador viajando vacío	1.258519	1.291953	1.269158	1.263484
% tiempo remolcador remolcando barcos	18.080725	18.077887	18.120363	18.104191
% tiempo puntos atraque libres	12.866133	13.152012	13.021187	13.011533
% tiempo puntos atraque ocupados sin cargar	0.979862	0.942353	0.953049	0.952398
% tiempo puntos atraque ocupados cargando	86.154007	85.905632	86.025764	86.036064

Cuadro 7: Resultados del sistema del puerto con remolcador base.

Si observamos la evolución de los resultados, vemos que a partir de las 100 simulaciones los resultados se estabilizan, ya que los valores obtenidos son muy parecidos, y podríamos decir que las diferencias no son lo suficientemente significativas. Por tanto, si quisiéramos obtener unos resultados que fuesen fiables, tendríamos que simular unas 100 o más veces. Con solo 10 simulaciones los resultados no es que sean del todo malos, ya que muchos de los valores obtenidos son similares a los otros. Sin embargo, hay algunos casos en los que sobreestima bastante, como por ejemplo en el número medio de barcos en la cola de llegadas o en los tiempos medios de estancia.

Ahora, si miramos los resultados obtenidos en general, vemos que el remolcador está bastante tiempo desocupado, con lo cuál en un principio se desaprovecharía batante el servicio que ofrece. Sin embargo, esto es comprensible y lógico, ya que los barcos tardan mucho en ser cargados, con lo cuál realmente no tiene nada que hacer durante ese tiempo. Vemos también que de media hay aproximadamente un barco en la cola esperando para poder cargar, con lo cuál a lo mejor incrementar el número de puntos de atraque supondría una mejora en este sentido, ya que no se tendrían barcos esperando. Para salir, sin embargo, vemos que casi no hay problemas, ya que no hay casi ningún barco esperando. Vemos que en general los puntos de atraque son utilizados bastante bien, ya que pasan aproximadamente el 86 % del tiempo cargando los barcos, mientras que solo pasan un 0.95 % del tiempo total sin cargar.

Por tanto, en general, el sistema funciona bastante bien, aunque hay algunas cosas que podríamos mejorar, como por ejemplo disminuir el porcentaje de tiempo en el que el remolcador está desocupado o reducir el número medio de barcos en la cola de llegadas.

2.2. Mejoras del sistema

En esta sección vamos a estudiar algunas mejoras que se podrían aplicar sobre el sistema con tal de obtener mejores resultados. También se plantea utilizar una nueva medida de rendimiento, que es el total de toneladas cargadas, y que se use esta medida para comparar los nuevos sistemas.

Por tanto, lo que se va a hacer es implementar esta medida en el sistema base, y se tendrá posteriormente en las mejoras, de forma que se facilite la comparación. De esta forma, podremos hacer una comparación general de golpe, en vez de hacerla por partes. Para las mejoras, vamos a hacer lo siguiente:

- Aumentar el número de puntos de atraque a 4.
- Aumentar el número de puntos de atraque a 5.

- Cambiar el remolcador por uno que no se vea afectado por las tormentas. Esto se puede hacer eliminando el primer suceso de tormenta. Si no se genera el primero, no se generarán los siguientes.
- Cambiar el remolcador por uno ligeramente más rápido a la hora de hacer viajes sin barcos.

Vamos a simular cada mejora 100 veces y construiremos una tabla con los resultados. Añadiremos a esta tabla también la versión base del sistema, para ver si existe cierta mejora o no de los resultados.

Una vez construidos los programas, se han recopilado los resultados en la siguiente tabla:

	Sistema base	**Puntos atraque = 4**	**Puntos atraque = 5**	**No tormentas**	**Remolcador rápido**
Núm. medio barcos cola llegadas	1.228703	*0.087190*	**0.047528**	1.006400	1.225528
Núm. medio barcos cola salidas	0.028366	0.029285	0.029908	**0.010902**	0.028724
Tiempo medio estancia puerto barcos tipo 1	33.818714	*21.281456*	**20.855934**	31.277277	33.802959
Tiempo medio estancia puerto barcos tipo 2	39.892330	*27.291992*	**26.852468**	37.106529	39.952133
Tiempo medio estancia puerto barcos tipo 3	51.759125	*39.262413*	**38.857533**	49.128735	51.683792
% tiempo remolcador desocupado	80.643372	*78.209877*	**77.840446**	80.512268	81.141968
% tiempo remolcador viajando vacío	1.270267	3.641019	4.000751	1.348367	**0.756990**
% tiempo remolcador remolcando barcos	18.086378	18.149103	18.158806	18.139357	18.101032
% tiempo puntos atraque libres	13.103617	34.538692	47.734127	13.457410	**12.964047**
% tiempo puntos atraque ocupados sin cargar	0.945520	0.732131	0.598164	**0.363400**	0.957480
% tiempo puntos atraque ocupados cargando	85.950890	64.729164	51.667721	**86.179199**	86.078484
Total toneladas cargadas	1780590.25	**1788039.5**	1781649.875	1783919.625	1782359.625

Cuadro 8: Resultados del sistema del puerto con remolcador aplicando mejoras. En negrita están los valores más destacados. En cursiva aquellos que pueden ser buenos si se consideran como diferencias no significativas respecto a los que están en negrita en la misma fila.

Podemos ver que, en general, cada modificación del sistema aporta mejoras en algunas medidas respecto al sistema base. Vemos que por ejemplo aumentar el número de puertos de atraque provoca que el número medio de barcos en la cola de llegadas sea casi 0, ya que hay suficientes lugares donde ponerlos a cargar. Consecuentemente, los barcos están una cantidad menor de tiempo en el puerto, ya que no tienen que esperar tanto tiempo en la cola. Adicionalmente, el porcentaje de tiempo en el que el remolcador está desocupado se reduce ligeramente, ya que aumenta el porcentaje de tiempo en el que tiene que estar viajando vacío. Y, adicionalmente, podemos ver una redistribución de los porcentajes de tiempo relacionados al punto de atraque, ya que se encuentran un mayor porcentaje del tiempo libres y un menor porcentaje ocupados cargando. El porcentaje en el que están ocupados pero sin cargar también se ve reducido en los dos casos donde se ha incrementado el número de puntos de atraque.

Si hacemos que el remolcador no se vea afectado por las tormentas también se producen ciertas mejoras, aunque no son tan pronunciadas como el caso anterior. Vemos que el valor medio del número medio de barcos en la cola de llegadas se ve reducido, aunque sigue estando alrededor de 1. El valor medio del número medio de barcos en la cola de salidas se ve reducido a la mitad, aunque sigue tendiendo a 0. Además, los tiempos medios de estancia para los tres tipos de barcos se ven reducidos ligeramente. Y, aparte de eso, permite reducir el porcentaje de tiempo en el que los puntos de atraque están ocupados sin cargar. El resto de medidas no se ven afectadas de forma que se pueda considerar demasiado significativa, con lo cuál el grado de mejora ofrecido es bastante menor en este caso.

Por último, si observamos la modificación de tener un remolcador más rápido, vemos que las únicas mejoras son que el porcentaje de tiempo que el remolcador está viajando vacío es menor, y que el porcentaje de tiempo en el que los puntos de atraque están libres disminuye. El resto de medidas no experimentan una mejora demasiado significativa comparándolos con el sistema base.

Por tanto, parece que en un principio la mejor opción es aumentar el número de puntos de atraque, ya que es lo que permite obtener una mejora más grande en todos los aspectos. Las otras modificaciones tienen cierto grado de mejora en cuanto a los resultados, pero no es lo suficientemente buena.

Si ahora analizamos el total de toneladas cargadas, vemos que todas las modificaciones permiten cargar una mayor cantidad de petróleo. La que más permite es en la que se utilizan 4 puntos de atraque, y la que menos, en la que se usan 5 puntos de atraque. Las otras dos mejoras permiten obtener unos totales decentes, sin ser demasiado destacables tampoco.

Por lo tanto, sabemos que la mejor modificación que se puede hacer es aumentar el número de puntos de atraque, ya que es la modificación que permite mejorar una mayor cantidad de aspectos. Ahora bien, elegir entre cuál de las dos mejoras es la mejor no es fácil. Tener 5 puntos de atraque permite obtener unos resultados que a primera vista son mejores. Sin embargo, podría ser que estas diferencias no fuesen significativas, y entonces los dos sistemas tuviesen un comportamiento similar. Donde sí que hay una diferencia significativa es en el número total de toneladas cargadas, donde el puerto con 4 puntos de atraque permite cargar una mayor cantidad de combustible. Por tanto, si nuestro objetivo es maximizar este valor (ya que por ejemplo es lo que más beneficio nos trae), ésta sería la mejor modificación que podríamos hacer sobre el modelo que ya tenemos. En caso contrario, habría que considerar otros factores y ver si realmente merece la pena tener 5 puntos de atraque en vez de 4. Por tanto, podemos decir que la **mejor alternativa** que tenemos ahora mismo es modificar el sistema que tenemos de forma que éste disponga de **4 puntos de atraque**.

3. Análisis de Salidas y Experimentación

En esta última sección vamos a hacer un análisis de las salidas del modelo del puerto con remolcador. Vamos a comparar distintas alternativas al modelo original utilizando como medida para comparar el número de barcos en la cola de atraque. Vamos a intentar primero determinar el mejor en función de las salidas que obtengamos, simulando cada vez un número diferente de veces y quedándonos con el mejor sistema, y posteriormente, compararemos algunos sistemas utilizando técnicas estadísticas, como por ejemplo los intervalos de confianza.

3.0.1. Comparando las salidas en función del número de simulaciones

Vamos a estudiar dos alternativas al modelo original que ya hemos visto anteriormente: un modelo en el que el remolcador no se ve afectado por las tormentas, y un modelo en el que el remolcador es más rápido. Para ello, vamos a comparar siempre el modelo original con las modificaciones propuestas. Vamos a realizar un conjunto de simulaciones y vamos a ver qué porcentaje de veces un sistema es mejor que el otro.

Para realizar todo esto, vamos a simular los sistemas primero una vez y vamos a tomar el valor obtenido para la medida de rendimiento seleccionada. Vamos a repetir este proceso 100 veces y veremos el porcentaje de veces que que un modelo es mejor que el otro, y por tanto, que uno de los modelos sería más recomendable que el otro. Vamos a repetir este proceso simulando 5, 10, 25 y 50 veces, y repitiendo 100 veces, tal y como hacíamos en el primer caso. No vamos a simular más de 50 veces ya que los tiempos de cómputo empiezan a ser demasiado elevados. Por ejemplo si simulásemos 100 veces, habría que repetir 100 simulaciones 100 veces, lo cuál hace que al final se hagan 10000 simulaciones. Esto no merece demasiado la pena, ya que solo llevaría un tiempo de cómputo progresivamente más grande. Además, como estamos comparando 100 veces los resultados obtenidos para cada número de simulaciones diferentes, se puede llegar a extraer alguna conclusión (aunque no sea la mejor) sin necesidad de simular tanto.

Para comparar, vamos a crear dos tablas que contengan los resultados. Una tabla comparará el modelo original con el modelo en el que el remolcador no se ve afectado por las tormentas, mientras que la otra comparará el original con el remolcador más rápido. Para obtener los resultados de un script en `Python`, ya que nos ha permitido manejar la información de forma muy sencilla para poder sacar los resultados que necesitábamos.

Para acelerar todo el proceso de comparación y cálculo de resultados, vamos a sacar primero los valores para comparar el modelo base con el del remolcador no afectado por las tormentas. Para comparar el modelo base con el modelo con el remolcador más rápido, vamos a reutilizar los resultados obtenidos para el modelo base la primera vez, de forma que no tengamos que simular de nuevo (lo cuál llevaría un tiempo extra considerable). Una vez dicho esto, veamos qué resultados se han obtenido en cada caso:

Núm. simulaciones	**1**	**5**	**10**	**25**	**50**
Modelo base	29 %	24 %	13 %	4 %	0 %
Modelo remolcador no afectado por tormentas	**71 %**	**76 %**	**87 %**	**96 %**	**100 %**

Cuadro 9: Porcentaje de veces que un modelo es mejor que el otro. En negrita los mejores valores.

Núm. simulaciones	**1**	**5**	**10**	**25**	**50**
Modelo base	46 %	47 %	49 %	**54 %**	42 %
Modelo remolcador rápido	**54 %**	**53 %**	**51 %**	46 %	**58 %**

Cuadro 10: Porcentaje de veces que un modelo es mejor que el otro. En negrita los mejores valores.

Si observamos los valores de la tabla 9, vemos que en todos los casos el sistema modificado sale como mejor opción con un porcentaje más elevado. A medida que se va aumentando el número de simulaciones que se realiza por cada repetición, el porcentaje de veces que es mejor el sistema modificado aumenta, ya que al promediar se van obteniendo resultados más fiables. Al final, el sistema modificado es recomendado el 100 % de las veces, ya que siempre ofrece mejores resultados. Por tanto, es posible que, al tomar decisiones de este tipo basándonos en unas pocas simulaciones, como 1 o 5, estemos cometiendo un error, ya que los resultados pueden no ser demasiado representativos.

Si analizamos el caso que se puede ver en la tabla 10, vemos que la situación es un poco diferente. Vemos como el modelo modificado es casi siempre mejor que el modelo base excepto en un caso. En general, aquí las diferencias no son tan abismales como en el caso anterior, ya que las veces que se recomendaría un sistema en vez del otro no distan mucho. Además, aquí no sucede algo como en el caso anterior en el que al aumentar el número de simulaciones se producía un crecimiento lineal de alguno de los modelos (es decir, que se podría recomendar cada vez más veces que el otro). Aquí primero se van obteniendo mejores resultados en el modelo base, pero a partir de las 50 simulaciones el porcentaje de veces que es mejor el sistema base parece comenzar a decrecer. Por tanto, no hay ningún patrón de comportamiento fijo. Esto, junto con los resultados obtenidos a lo largo de la experimentación, hace que haya un margen de error mucho mayor que en el caso anterior, ya que en caso de recomendar por ejemplo el modelo modificado, acertaríamos poco más del 50 % de las veces en general. Podríamos hacer algún otro tipo de análisis para ver si existen diferencias significativas, y en función de eso y los resultados obtenidos anteriormente, decidir qué sistema recomendar.

Como conclusión, a pesar de que el método es simple y en un principio parece que es capaz de permitirnos decidir de manera sencilla cuál es el mejor sistema en función del porcentaje de veces que uno es mejor que el otro, tiene serias limitaciones. Por ejemplo, se debe considerar el número de simulaciones que se realizan, ya que con unas pocas no se obtendrán resultados fiables. Además, hay casos en los que los resultados son demasiado ajustados, con lo cuál no podremos saber a ciencia cierta cuál de los dos modelos es mejor, si es que existe tal modelo. Por ello se suelen utilizar ténicas algo más sofisticas basadas en la estadística, las cuále veremos a continuación.

3.1. Intervalos de confianza

Los intervalos de confianza nos permiten determinar si existen diferencias significativas entre los resultados obtenidos para dos sitemas, modelos, etc. Son una técnica muy útil y relativamente fácil de utilizar, y que permite obtener en general muy buenos resultados. En este apartado, vamos a construir un intervalo de confianza para determinar si existen diferencias significativas entre el modelo con el remolcador que no se ve afectado por las tormentas y el modelo con el remolcador más rápido. Para ello, vamos a utilizar la misma medida de rendimiento que antes.

El proceso para construir el intervalo de confianza es muy simple:

1. Simular una serie de veces los dos modelos y obetener los resultados. Para simplificar, vamos a suponer que cada vez se hace una única simulación.
2. Emparejar los resultados y calcular su diferencia, obteniendo una nueva variable.
3. Calcular media y desviación típica de la nueva variable.
4. Obtener el intervalo de confianza utilizando la distribución t de Student y los valores calculados anteriormente.

El objetivo es constuir el intervalo de confianza al 95 %, lo cuál supone utilizar un $\alpha = 0.05$. Para construir el intervalo, lo primero que necesitamos son muestras, es decir, resultados de simulaciones. Para hacerlo, vamos a coger los resultados que hemos obtenidos para el apartado anterior y vamos a reutilizarlos. Adicionalmente vamos a añadir algunas simulaciones más. El motivo de esto se entenderá un poco más adelante. Una vez que hayamos calculado el intervalo de confianza, vamos a ver si el 0 se sitúa dentro de él. Si está dentro, entonces no podemos afirmar que existe diferencia significativa entre los dos modelos. Si no lo está, podremos afirmar con un 95 % de confianza que existen diferencias significativas entre los dos modelos.

Vamos a construir el intervalo de confianza algunas veces, cambiando el número de muestras que se utilizan, para ver qué resultados se obtienen. Para ayudarnos, de nuevo, vamos a usar un script en `Python` que nos permita agilizar los cálculos realizados.

Una vez que se han obtenido los resultados, se ha construido la siguiente tabla:

N	$\bar{Z}$	σ^2	**Intervalo**
20	0.078	0.422	$[-0.124, 0.281]$
40	0.058	0.688	$[-0.165, 0.281]$
60	0.078	0.709	$[-0.107, 0.262]$
80	0.152	0.735	$[-0.012, 0.317]$
100	0.161	0.679	$[0.025, 0.296]$
120	0.201	0.646	$[0.084, 0.318]$

Cuadro 11: Resultados para el intervalo de confianza.

Podemos ver que en la tabla tenemos tanto los tamaños de las muestras N como las medias, varianzas e intervalos correspondientes. Los valores de Z se han calculado como $X_{remolcadorrpido,i} - X_{remolcadortormenta,i}$. Vemos que para tamaños de muestra no muy grandes, el 0 cae dentro del intervalo. Sin embargo, para un valor de N relativamente grande, como podría ser por ejemplo 100 o 120, el 0 ya está fuera del intervalo. Como se ha querido estudiar la evolución del intervalo a medida que se aumentaba el número de muestras, se han tenido que realizar más simulaciones, como se ha dicho antes, ya que al principio disponíamos solo de 100 resultados para cada modelo.

Ahora, si nos paramos a analizar los resultados un poco más detenidamente, vemos que en la mayoría de casos, para tamaños de muestra menores a 100 no existe una diferencia significativa entre los dos modelos. Una vez que el tamaño de la muestra empieza a ser un poco grande, vemos que el 0 deja de estar en el intervalo, con lo cuál parece que los dos modelos tienen una diferencia significativa al 95 %. En este caso, el remolcador que no se ve afectado por la tormenta ofrecería unos mejores resultados, ya que el 0 se sitúa a la izquierda del extremo inferior del intervalo, además de que $\bar{Z}$ es positivo. Por tanto, a partir de esta información podemos deducir que los tiempos para el remolcador más rápido tienen que ser más grandes, y por tanto, peores que los del otro modelo.

Por tanto, en función del número de muestras del que dispongamos podríamos afirmar una cosa u otra. Si tenemos pocas muestras, podemos afirmar que no existen diferencias significativas entre los dos modelos con un 95 % de confianza. En caso de tener un número de muestras grande, podríamos afirmar con un 95 % de confianza que existen diferencias significativas entre los dos modelos y que, además, el mejor modelo es el del remolcador que no es afectado por las tormentas por los motivos especificados anteriormente.

3.2. Comparación de más de dos sistemas

Por último, vamos a realizar un análisis entre 4 modelos diferentes:

- Un modelo en el que hay 4 puntos de atraque.
- Un modelo en el que hay 5 puntos de atraque.
- Un modelo con un remolcador más rápido.
- Un modelo con un remolcador que no se ve afectado por las tormentas.

Para ello, vamos a utilizar el **método de la selección del mejor entre k sistemas**. Queremos estar bastante seguros de que hemos hecho la elección correcta. Por tanto, queremos que la probabilida de seleccionar el sistema correcto sea mayor a un valor P^* determinado. En este caso, queremos estar seguros al 95 % de que hacemos la elección correcta, ya que si nos ponemos en la piel de la persona que debe invertir para mejorar el sistema, todas las mejoras son caras, por tanto no se pueden tomar a la ligera. Por tanto, en este caso, tenemos que $P^* = 0.95$. Queremos además que la indiferencia d^* sea relativamente pequeña, ya que, como hemos podido comprobar anteriormente, la medida utilizada tiene unos resultados en general bastante bajos, y las diferencias suelen ser unas cuantas décimas como mucho, si es que existen. Por tanto, nos interesa tener, por ejemplo, $d^* = 0.1$, ya que queremos cometer un error bajo al decidir el mejor sistema. El número de simulaciones inicial, n_0, también debe ser escogido. En este caso, hemos probado con $n_0 = 20$ y $n_0 = 40$. Con el primer valor se ha tenido algún que otro problema, ya que la expresión dentro de la raíz que se obtenía en el caso del remolcador no afectado por las tormentas era negativo, con lo cuál no se puede aplicar la raíz cuadrada sobre dicho valor. Por tanto, utilizaremos $n_0 = 40$, ya que no hemos tenido ningún tipo de problema con este valor. Por último, el valor de $h1$ viene determinado por los de P^* y k (el número de sistemas). En este caso, tenemos que $h1 = 3.003$.

Para obtener los datos, hemos reutilizado algunos de los que ya teníamos del apartado anterir y hemos generado nuevos para los modelos con más puntos de atraque. En caso de necesitar más datos, se han hecho más simulaciones. En todos los casos, los datos proceden de 1 simulación sin repetir.

Una vez dicho esto, vamos a ver los resultados que se han obtenido. Para ello, nos hemos ayudado de un scrpt en `Python` para obtener los resultados. A continuación se puede ver una tabla con todos los resultados obtenidos:

Sistema	$X_i^{(1)}(40)$	$s_i^2(20)$	N_i	$X_i^{(2)}(N_i - 40)$	W_{i1}	W_{i2}	$X_i^p(N_i)$
4 puntos atraque	0.087	0.00008284	41	0.089	4.586	-3.586	**0.081**
5 puntos atraque	0.047	0.00000408	41	0.045	17.258	-16.258	0.090
Remolcador rápido	1.171	0.221	199	1.225	0.210	0.790	1.213
Remolcador inmune tormentas	1.112	1.112	278	1.002	0.150	0.850	1.018

Cuadro 12: Resultados del método de selección del mejor sistema entre k.

Para comparar los sistemas, tenemos que fijarnos en el valor de $X_i^p(N_i)$, el cuál la suma ponderada de $X_i^{(1)}(40)$ y $X_i^{(2)}(N_i - 40)$ utilizando los pesos W_{i1} y W_{i2}. Tenemos que fijarnos en el valor más pequeño, ya que nos interesa minimizar el número medio de barcos en la cola de atraque.

Si nos fijamos en los resultados obtenidos, vemos que el mejor sistema es el que tiene **4 puntos de atraque**, ya que es el que obtiene un valor menor de $X_i^p(N_i)$. La segunda mejor opción sería el puerto con 5 puntos de atraque, ya que no dista del mejor valor. Para asegurarnos de si existen diferencias significativas podríamos hacer un estudio con intervalos de confianza. Sin embargo, ese no es el objetivo principal de este apartado. Por tanto, podríamos quedarnos con el modelo con 4 puntos de atraque con una probabilidad de 0.95 de que sea la opción correcta con una indiferencia de 0.1, ya que es el que ha ofrecido el menor número medio de barcos en la cola de atraque de los cuatro sistemas que hemos comparado.