Modelos de Computación
grado en ingeniería informática

Memoria de prácticas

Autor
Vladislav Nikolov Vasilev

Grupo
3º A1

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Curso 2018-2019

Contents

1 Prácticas

1.1 Práctica 1

1.1.1 Ejercicio 1

Enunciado. Calcula una gramática libre de contexto que genere el lenguaje $L = \{a^n b^m c^m d^{2n}$ tal que $n, m \geq 0\}$.

Solución

Se define la gramática como una cuádrupla con la forma $G = (V, T, P, S)$, siendo V el conjunto de variables, T el conjunto de elementos terminales, P las reglas de producción y S el símbolo inicial. Se puede definir cada uno de los conjuntos de la siguiente forma:

$$V = \{S, X, Y\}$$

$$T = \{a, b, c, d\}$$

$$P = \{S \to aXdd \mid bYc \mid \varepsilon,\ X \to aXdd \mid bYc \mid add \mid \varepsilon,\ Y \to bYc \mid bc \mid \varepsilon\}$$

$$S = \{S\}$$

Ésta es una gramática de **tipo 2**, ya que a la izquierda aparce una variable sola, sin símbolos terminales, y a la derecha aparece la variable con símbolos terminales tanto por la derecha como por la izquierda, impidiendo por tanto que sea regular por la izquierda o por la derecha.

Con ésta gramática, primero se escoge si se van a empezar a generar una a con la secuencia dd al final, o si directamente se comenzará a generar la secuencia b seguida de c. Si se escoge la primera opción, se ponen tantas a al principio y dd al final como sea necesario, y después se puede escoger si se sigue con las b y c, o si se termina sin poner ninguno de los símbolos anteriores. Si se decide comenzar a poner b y c desde el principio o después de poner todas las a y dd que se quieran, se ponen todas las b y c que se quieran, hasta que se decida terminar la secuencia.

Gracias a las reglas de producción se pueden satisfacer todas las restricciones del lenguaje, ya que por cada a se genera dd, y por cada b se genera c. Además, se puede aceptar la cadena vacía o que alguna de las partes no esté.

1.1.2 Ejercicio 2

Enunciado. Describir una gramática que genere los números decimales escritos con el formato [signo][cifra][punto][cifra]. Por ejemplo, +3.45433, -453.23344, ...

Solución

La solución más sencilla que se puede ofrecer a este problema consiste en utilizar una gramática libre de contexto, como se mostrará a continuación. No obstante, el problema también es resoluble mediante una gramática regular, aumentando sin embargo el número de producciones y de variables necesarias.

Definimos la gramática como una cuádrupla con la forma $G = (V, T, P, S)$, siendo V el conjunto de variables, T el conjunto de elementos terminales, P las reglas de producción y S el símbolo inicial. Se puede definir cada uno de los conjuntos de la siguiente forma:

$$V = \{S, X\}$$

$$T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ., +, -\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{c} S \to +X.X \mid -X.X \\ X \to 0X \mid 1X \mid 2X \mid 3X \mid 4X \mid 5X \mid 6X \mid 7X \mid 8X \mid 9X \mid \\ 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \end{array} \right\}$$

$$S = \{S\}$$

Primero se genera el signo y el punto, pudiendo escoger si el número es positivo o negativo. Después, en la parte entera y decimal se van generando números en el rango $[0, 9]$, pudiendo escoger cuál es el siguiente número o cuando terminar de insertar números.

1.1.3 Ejercicio 3

Enunciado. Calcula una gramática libre de contexto que genere el lenguaje $L = \{0^i 1^j 2^k$ tal que $i \neq j$ o $j \neq k\}$.

Solución

Definimos la gramática como una cuádrupla con la forma $G = (V, T, P, S)$, siendo V el conjunto de variables, T el conjunto de elementos terminales, P las reglas de producción y S el símbolo inicial. Se puede definir cada uno de los conjuntos de la siguiente forma:

$$V = \{S, X, Y, Z, P, R, A, B, M, K, U, D, N, L, C, Q\}$$

$$T = \{0, 1, 2\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{c} S \to 0X1 \mid 0Y2 \mid 1Z2 \mid 0A1P2 \mid 0R1B2,\ X \to 0X \mid X1 \mid \varepsilon \\ Y \to 0Y \mid Y2 \mid \varepsilon,\ Z \to 1Z \mid Z2 \mid \varepsilon,\ P \to P2 \mid \varepsilon,\ R \to 0R \mid \varepsilon, \\ A \to 0M \mid N1,\ M \to OMU \mid \varepsilon,\ U \to 1 \mid \varepsilon,\ N \to CN1 \mid \varepsilon,\ C \to 0 \mid \varepsilon, \\ B \to 1K \mid L2,\ K \to 1KD \mid \varepsilon,\ D \to 2 \mid \varepsilon,\ L \to QL2 \mid \varepsilon,\ Q \to 1 \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$S = \{S\}$$

Ya que hay muchas reglas y puede no llegar a quedar claro para qué es cada una, vamos a ir comentándolas para que no queden dudas sobre el por qué de cada una de ellas.

La primera de ellas, $S \to 0X1$, indica que solo se van a producir los símbolos 0 y 1, dándose por tanto la condición $j \neq k$, ya que no hay ningún símbolo 2. X puede ser sustituido por tantos 0 o 1 como se desee, lo cuál corresponde a la producción $X \to 0X \mid X1 \mid \varepsilon$.

Después tenemos la producción $S \to 0Y2$, la cuál es parecida a la anterior, solo que esta vez se producen solo los símbolos 0 y 2, satisfaciendo por tanto las condiciones $i \neq j$ y $j \neq k$ simultáneamente. La variable Y puede ser sustituida por tantos 0 o 2 como se desee, lo cuál se corresponde con la producción $Y \to 0Y \mid Y2 \mid \varepsilon$.

La regla $S \to 1Z2$ permite producir los símbolos 1 y 2. En este caso, esta regla permite satisfacer la restricción $i \neq j$, ya que no se produce ningún símbolo 0. La variable Z puede ser sustituida por tantos 1 y 2 como se desee. Ésto se corresponde con la producción $Z \to 1Z \mid Z2 \mid \varepsilon$.

La regla $S \to 0A1P2$ permite producir los símbolos 0, 1 y 2, cumpliendo sin embargo la restricción $i \neq j$, introduciendo la desigualdad por tanto en la parte de los 0 y los 1, es decir, obligando que el número de 0 y de 1 sea diferente y permitiendo producir tantos 2 como se desee. La variable A se puede sustituir con la regla $A \to 0M \mid N1$, escogiendo si se quieren más 0 que 1 (se escogería OM) o más 1 que 0 (se escogería en este caso $N1$). Al haber escogido estas reglas, se asegura que como mínimo hay un símbolo más de ese tipo. La variable M puede ser sustituída por $M \to OMU \mid \varepsilon$, permitiendo poner tantos 0 como se deseen y poniendo por cada uno una variable U, la cuál puede ser sustituida luego por $U \to 1 \mid \varepsilon$, poniendo o no tantos 1 como U haya. Hay que tener en cuenta que el número de 1 será siempre menor que el número de 0, ya que al principio, con $A \to 0M$ se puso un 0 extra, y como la regla $M \to OMU$ produce una variable que pueda ser sustituida por 1 por cada 0 nuevo que se coloca, se asegura que se cumplirá la desigualdad $i \neq j$ como se mencionó anteriormente, siendo en este caso

$i > j$ ya que $num(1) \leq num(0) - 1$. Algo similar ocurre con la regla $A \to N1$, ya que permite producir más 1 que 0 de la misma forma que antes. Primero se introduce un 1 extra y después se sustituye la variable N por $N \to CN1 \mid \varepsilon$, permitiendo poner tantos 1 como se deseen y permitiendo poner un 0 por cada nuevo 1 que se añade (lo cuál se corresponde a la regla $C \to 0 \mid \varepsilon$). Aquí ocurre lo mismo que en el caso anterior, ya que cumplirá la restricción $i \neq j$ verificando que $i < j$, debido a que $num(0) \leq num(1) - 1$.

Finalmente tenemos la regla $S \to 0R1B2$, la cuál es similar a la anterior mencionada debido a que permite producir los símbolos 0, 1 y 2, satisfaciendo sin embargo la desigualdad $j \neq k$, lo cuál significa que se producen tantos 0 como se deseen, pero el número de 1 y de 2 tiene que ser distinto. La variable R puede ser sustituída por $R \to 0R \mid \varepsilon$, es decir, por tantos 0 como se desee. La variable B puede ser sustituída por $B \to 1K \mid L2$, permitiendo en el primer caso que haya más 1 que 2, y en el segundo caso que haya más 2 que 1. La variable K puede ser sustituida por $K \to 1KD \mid \varepsilon$, poniendo un símbolo 1, después otra variable K y finalmente una variable D, la cuál puede ser sustituida mediante la regla $D \to 2 \mid \varepsilon$, poniendo como mucho tantos 2 como variables D haya. Con esto se cumple la desigualdad $j \neq k$ ya que se ha puesto un 1 extra al principio, de forma que $j > k$ y $num(2) \leq num(1) - 1$. En el caso de querer más 2 que 1, se escogería $B \to L2$, sustituyendo luego la variable L por $L \to QL2 \mid \varepsilon$, poniendo una variable Q, una variable L y un 2. La variable Q sería sustituida luego mediante la regla $Q \to 1 \mid \varepsilon$, permitiendo poner un o ningún 1 por cada variable Q. En este caso se cumpliría que $j \neq k$ ya que $j < k$ porque se cumple que $num(1) \leq num(2) - 1$.

1.1.4 Ejercicio 4

Enunciado. Una empresa de videojuegos "*The fantastic platform*" están planteando diseñar una gramática capaz de generar niveles de un juego de plataformas, cada uno de los niveles siguiendo las siguientes restricciones:

- Hay 2 grupos de enemigos: grupos grandes (g) y grupos pequeños (p).
- Hay 2 tipos de monstruos: fuertes (f) y débiles (d).
- Los grupos grandes de enemigos tienen, al menos, 1 monstruo fuerte y 1 débil. Y los 2 primeros monstruos pueden ir en cualquier orden. A partir del tercer monstruo, irán primero los débiles y después los fuertes.
- Los grupos pequeños tienen como mucho 1 monstruo fuerte.
- Al final de cada nivel habrá una sala de recompensas (x).

Por ejemplo, la cadena terminal "*gfddddfffpdddfx*" representa que el nivel tiene (*gfddddfff*) un grupo grande con un monstruo fuerte, 4 débiles y otros 3 fuertes; después tiene (*pddddf*) un grupo pequeño con 3 débiles y uno fuerte.

Elaborar una gramática que genere estos niveles con sus restricciones. Cada palabra del lenguaje es un solo nivel. ¿A qué tipo de gramática dentro de la jerarquía de Chomsky pertenece la gramática diseñada?

¿Sería posible diseñar una gramática de tipo 3 para dicho problema?

Solución

Definimos la gramática como una cuádrupla con la forma $G = (V, T, P, S)$, siendo V el conjunto de variables, T el conjunto de elementos terminales, P las reglas de producción y S el símbolo inicial. Se puede definir cada uno de los conjuntos de la siguiente forma:

$$V = \{S, G, X, Y, Z, V, R, P, B\}$$

$$T = \{g, p, f, d, x\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{c} S \to gGx \mid pPx,\ G \to ddX \mid dfY \mid fdY \mid ffZ,\ X \to dX \mid fR, \\ Y \to X \mid V \mid R \mid gG \mid pP \mid \varepsilon,\ Z \to dX \mid dV,\ V \to dV \mid gG \mid pP \mid \varepsilon, \\ R \to fR \mid gG \mid pP \mid \varepsilon,\ P \to dP \mid dB \mid fB,\ B \to dB \mid gG \mid pP \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$S = \{S\}$$

La gramática es de **tipo 2**, ya que a la izquierda aparecen solo variables y a la derecha aparecen variables con símbolos terminales tanto por la derecha como por la izquierda o sin símbolos terminales, impidiendo por tanto que sea regular, tanto por la derecha o regular por la izquierda.

Una vez dicho esto, se va a proceder a explicar cómo funcionan las reglas de producción. Con $S \to gGx \mid pPx$ se escoge con qué grupo empezar primero: si uno grande (gGx) o uno pequeño (pPx).

Si se escoge empezar con un grupo grande, como da igual en qué orden están los dos primeros enemigos, se puede sustituir la variable G mediante la regla $G \to ddX \mid dfY \mid fdY \mid ffZ$. Si con la regla anterior se han producido dos enemigos débiles, se sustituye la variable X mediante la regla X $\to dX \mid fR$, que permite poner primero todos los enemigos débiles que se quieran y poner uno fuerte al final. Después de poner el fuerte, la variable R se puede sustituir mediante la regla $R \to fR \mid gG \mid pP \mid \varepsilon$, que permite poner tantos enemigos fuertes como se quieran, y después un grupo grande, uno pequeño o terminar de poner grupos de enemigos. Si por el contrario, al principio del grupo grande se escogen poner dos enemigos fuertes, entonces se tiene que poner como mínimo un enemigo débil. Esto se hace a través de la variable Z, que se sustituye mediante la regla $Z \to dX \mid dV$, que pone un enemigo débil y permite escoger si seguir con la variable X para poner enemigos débiles o fuertes, o seguir con la variable V, que se sustituye mediante

la regla $V \rightarrow dV \mid gG \mid pP \mid \varepsilon$ y permite poner tantos enemigos débiles como se quieran o poner un nuevo grupo grande, pequeño o terminar de poner grupos. Si por el contrario se escoge poner un enemigo fuerte y uno débil, como ya se cumple la restricción del grupo grande, se puede sustituir la variable Y mediante la regla $Y \rightarrow X \mid V \mid R \mid gG \mid pP \mid \varepsilon$, que permite poner enemigos fuertes y débiles, solo fuertes, solo débiles, poner un grupo grande, uno pequeño o terminar de insertar grupos.

Si en cambio se escoge empezar con un grupo pequeño, la variable P puede ser sustituida mediante la regla $P \rightarrow dP \mid dB \mid fB$, que permite poner tantos enemigos débiles como se quieran y se puede escoger si se quiere un enemigo fuerte, o si por el contrario solo se van a producir débiles. En todo caso, si se produce un enemigo fuerte o si no se decide producir se escoge el camino de la variable B, la cuál puede ser sustituida con la regla $B \rightarrow dB \mid gG \mid pP \mid \varepsilon$, permitiendo de nuevo poner cuantos enemigos débiles se desee, y después poner un grupo grande, uno pequeño o terminar de insertar grupos de enemigos.

Como se puede comprobar, estas reglas permiten crear niveles de forma flexible, ya que se pueden combinar los grupos grandes y los pequeños en el orden que se quiera. Además, también permite generar los enemigos de una forma versátil, permitiendo muchas combinaciones posibles.

Respecto a la segunda pregunta, es posible diseñar una gramática de tipo 3 para este problema. Esto se debe al hecho de que, aunque la gramática obtenida inicialmente sea de tipo de 2, no se garantiza que el lenguaje sea de tipo 2, si no que también puede ser de tipo 3. Para ello,definimos la gramática como una cuádrupla $G = (V, T, P, S)$, donde V son las variables, T los símbolos terminales, P las reglas de producción y S el símbolo inicial. Cada uno de los conjuntos tendría la siguiente forma:

$$V = \{S, G, X, Y, Z, V, R, P, B\}$$

$$T = \{g, p, f, d, x\}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{c} S \rightarrow gG \mid pP,\ G \rightarrow ddX \mid dfY \mid fdY \mid ffZ,\ X \rightarrow dX \mid fR, \\ Y \rightarrow dX \mid dV \mid fR \mid gG \mid pP \mid x,\ Z \rightarrow dX \mid dV,\ V \rightarrow dV \mid gG \mid pP \mid x, \\ R \rightarrow fR \mid gG \mid pP \mid x,\ P \rightarrow dP \mid dB \mid fB,\ B \rightarrow dB \mid gG \mid pP \mid x \end{array} \right\}$$

$$S = \{S\}$$

Como se puede comprobar fácilmente, esta gramática es de **tipo 3**, ya que a la izquierda aparece la variable sola y a la derecha aparece, o bien un símbolo terminal, o bien uno o más símbolos terminales acompañados de una variable a la derecha. Por tanto, se trata de una gramática regular por la derecha.

Se puede comprobar fácilmente que esta gramática produce las mismas palabras que la anterior. Las diferencias son que el símbolo de recompensa de nivel x se genera cuando no se quieren generar más grupos de enemigos en vez de al principio como se hacía antes. Esto también implica que todos los ε se han sustituido por el símbolo x. Adicionalmente, para que el lenguaje fuese regular por la derecha, a las producciones de Y que anteriormente solo implicaban un cambio de variable se les ha añadido un símbolo terminal que además cumple las restricciones impuestas por el problema (una d para las variables X y V y una f para la variable R).

1.2 Práctica 2

Esta práctica ha sido realizada con mi compañera Nazaret Román Guerrero. Aquí se incluye la descripción y solución del problema para ambos alumnos.

1.2.1 Descripción del problema

El problema que se ha decidido abordar consiste en la creación de un programa capaz de traducir el lenguaje natural en código ejecutable en Python. Ya que de por sí el problema sería demasiado grande y complejo, lo hemos restringido a crear un traductor que permite convertir expresiones simples relacionadas con el manejo de listas en lenguaje natural a Python.

Las funcionalidades que hemos decidido implementar son:

- Creación de listas, tanto vacías como con elementos.
- Inserción de elementos en las listas.
- Borrado de elementos de una lista.
- Obtención de un elemento en una posición de una lista.
- Imprimir una lista.
- Recorrer una lista, usando el delimitador por defecto o escogiendo uno que se desee.
- Obtener la longitud de una lista.
- Ordenar una lista, permitiendo que se ordene al revés.
- Copiar una lista en otra.
- Concatenar dos listas en una nueva o una ya existente.
- Comparar listas, permitiendo poner como expresión sumas de n listas, la longitud de una lista, obtener el elemento de una lista, ordenar listas o comparar directamente listas entre sí. Los operadores que soporta la traducción son igual ($==$), diferente ($!=$), menor ($<$), mayor ($>$), menor o igual ($\leq$) y mayor o igual ($\geq$).
- Mostrar el resultado de la comparación.

Los elementos que se pueden insertar en listas son números enteros y reales (los reales tienen una parte entera separada por el símbolo gráfico . de la parte decimal) y cadenas de caracteres (encerradas entre comillas simples, con espacios y sin restricciones de longitud).

1.2.2 Resolución del problema

Para resolver el problema hemos utilizado la herramienta *Flex*. Hemos creado un programa escrito en C que permite procesar símbolos de entrada y obtener la traducción en Python correspondiente.

Se procede a mostrar ahora el codigo:

```
1     /* ------------------- Declaraciones ------------------- */
2
3  %option noyywrap
4  %{
5  #include <stdio.h>
6
7  char * procesado;
8  char * elem;
9  int i = 0;
10 int j = 0;
11 int comparar = 0;
12 char * comparacion;
13 %}
14
15 letra          [a-zA-Z]
16 digito         [0-9]
17 espacio        [ ]
18 entero         \-?{digito}+
19 numero         {entero}(\.{digito}+)?
20 delimitador    "'"[^\t\n]+"'"
21 cadena         "'"({letra}|{digito}|{espacio})*"'"
22 variable       ({letra}|{digito}|_)+
23 crear          "crear "{variable}(" "({numero}|{cadena}|{espacio})+)?
24 longitud       "longitud "{variable}
25 imprimir       "imprimir "{variable}
26 recorrer       "recorrer "{variable}(" "{delimitador})?
27 insertar       "insertar "{variable}" "({cadena}|{numero})
28 borrar         "borrar "{variable}" "({cadena}|{numero})
29 obtener        "obtener "{variable}" "{entero}
30 copiar         "copiar "{variable}" "{variable}
31 concatenar     "concatenar "{variable}" "{variable}" "{variable}
32 ordenar        "ordenar "{variable}" reves"?
33 suma           {variable}" mas "{variable}(" mas "{variable})*
34 operador       "igual"|"diferente"|"menor"|"menor igual"|"mayor"|"mayor
       igual"
35 expresion      {longitud}|{suma}|{obtener}|{variable}|{ordenar}
36 comparar       "comparar "{expresion}" "{operador}" "{expresion}
```

```
37
38 %%
39
40 {crear}    {procesado = yytext + 6;
41             char * lista = malloc(strlen(procesado));
42             elem = malloc(strlen(procesado) * 2);
43             for (i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i] != ' '; i++)
44                 lista[i] = procesado[i];
45                 if (i < strlen(procesado)) {
46                     procesado += i + 1;
47                     j = 0;
48                     int cambiar_espacio_coma = 0;
49                     for (i = 0; i < strlen(procesado); i++) {
50                         if (procesado[i] == ' ') {
51                           if (cambiar_espacio_coma != 0) {
52                             elem[j] = ',';
53                             j++;
54                             elem[j] = ' ';
55                             j++;
56                             cambiar_espacio_coma = 0;
57                           }
58                         } else {
59                           elem[j] = procesado[i];
60                           j++;
61                           cambiar_espacio_coma = 1;
62                         }
63                     }
64                 }
65                 printf("%s = [%s]", lista , elem);}
66 {longitud}    {procesado = yytext + 9;
67                 if (comparar > 0)
68                   comparar--;
69                 printf("len(%s)", procesado);}
70 {imprimir}    {procesado=yytext + 9; printf("print(%s)", procesado);}
71 {recorrer}    {procesado = yytext + 9;
72                 char * lista = malloc(strlen(procesado));
73                 char * delim;
74                 int usar_delim = 0;
75                 for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
76                   lista[i] = procesado[i];
77                 if (strlen(procesado) >= i + 1)
78                   usar_delim = 1;
79                 procesado += i + 1;
80                 delim = procesado;
81                 printf("for item in %s:\n    print(item", lista);
82                 if (usar_delim)
83                   printf(", end = %s", delim);
84                 printf(")");}
85 {insertar}    {procesado = yytext + 9;
86                 char * lista = malloc(strlen(procesado));
87                 for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
88                   lista[i] = procesado[i];
89                 procesado += i + 1;
```

```
90                  elem = procesado;
91                  printf("%s.append(%s)", lista, elem);}
92  {borrar}        {procesado = yytext + 7;
93                  char *lista = malloc(strlen(procesado));
94                  for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
95                    lista[i] = procesado[i];
96                  procesado += i + 1;
97                  elem = procesado;
98                  printf("%s.remove(%s)", lista, elem);}
99  {obtener}       {procesado = yytext; procesado += 8;
100                 char *lista = malloc(strlen(procesado));
101                 for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
102                   lista[i] = procesado[i];
103                 procesado += i + 1;
104                 elem = procesado;
105                 if(comparar > 0) {
106                   printf("%s[%s]", lista, elem);
107                   comparar--;
108                 }
109                 else
110                   printf("print(%s[%s])", lista, elem);}
111 {copiar}        {procesado = yytext + 7;
112                 char *orig = malloc(strlen(procesado));
113                 char *dest = malloc(strlen(procesado));
114                 for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
115                   orig[i] = procesado[i];
116                 procesado += i + 1;
117                 dest = procesado;
118                 printf("%s = %s", dest, orig);}
119 {concatenar}    {procesado = yytext + 11;
120                 char *l1 = malloc(strlen(procesado));
121                 char *l2 = malloc(strlen(procesado));
122                 char *dest = malloc(strlen(procesado));
123                 for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
124                   l1[i] = procesado[i];
125                 procesado += i + 1;
126                 for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
127                   l2[i] = procesado[i];
128                 procesado += i + 1;
129                 dest = procesado;
130                 printf("%s = %s + %s", dest, l1, l2);}
131 {ordenar}       {procesado = yytext + 8;
132                 char *lista = malloc(strlen(procesado));
133                 if (comparar > 0)
134                   comparar--;
135                 for(i=0; i<strlen(procesado) && procesado[i]!=' '; i++)
136                   lista[i] = procesado[i];
137                 if (strlen(procesado) >= i + 1)
138                   printf("%s.sort(reverse=True)", lista);
139                 else
140                   printf("%s.sort()", lista);}
141 {suma}          {procesado = yytext;
142                 char * suma = malloc(strlen(procesado));
```

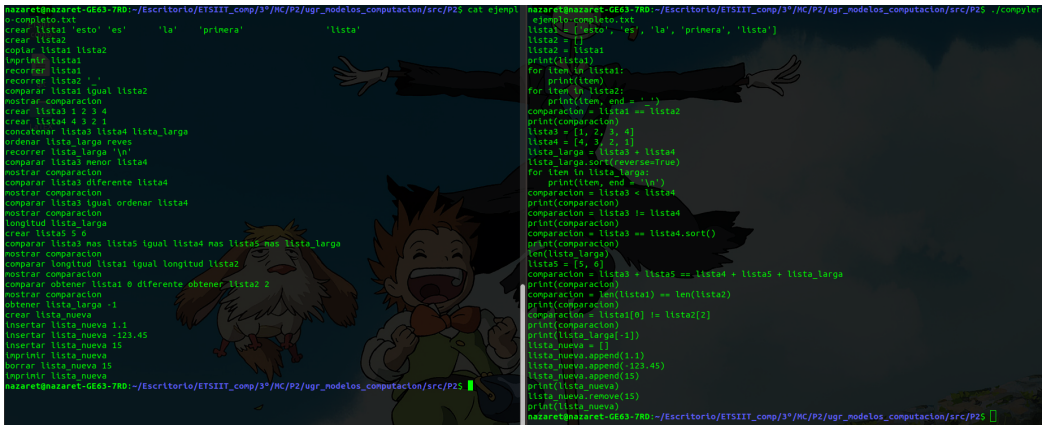
```
143                 int salta_palabra = 0;
144                 j = 0;
145                 if (comparar > 0)
146                   comparar--;
147                 for(i=0; i<strlen(procesado); i++) {
148                   if (procesado[i] == ' ') {
149                     salta_palabra = !salta_palabra & 0x1;
150                       if(salta_palabra) {
151                         suma[j] = ' ';
152                         j++;
153                         suma[j] = '+';
154                         j++;
155                         suma[j] = ' ';
156                         j++;
157                       }
158                   } else {
159                     if (!salta_palabra) {
160                       suma[j] = procesado[i];
161                       j++;
162                     }
163                   }
164                 }
165                 printf("%s", suma);}
166 {comparar}      {comparar = 2; printf("comparacion = "); yyless(9);}
167 {operador}      {procesado = yytext;
168                 i = 0;
169                 if(procesado[i] == 'i')
170                   printf(" == ");
171                 else if(procesado[i] == 'd')
172                   printf(" != ");
173                 else if(procesado[i] == 'm') {
174                   if(procesado[i+1] == 'e' && yyleng == 5)
175                     printf(" < ");
176                   else if(procesado[i+1] == 'e' && yyleng > 5)
177                     printf(" <= ");
178                   else if(procesado[i+1] == 'a' && yyleng == 5)
179                     printf(" > ");
180                   else
181                     printf(" >= ");}}
182 {variable}      {if (comparar > 0)
183                   comparar--;
184                 printf("%s", yytext);}
185 "mostrar comparacion" {printf("print(comparacion)");}
186 .                                   {}
187
188 %%
189
190 int main(int argc, char *argv[]) {
191
192   if (argc == 2) {
193     yyin = fopen(argv[1], "rt");
194
195     if (yyin == NULL) {
```

```
196         printf("El fichero %s no se pudo abrir\n", argv[1]);
197         exit(-1);
198       }
199     } else
200       yyin = stdin;
201
202     yylex();
203
204     return 0;
205 }
206
```

Cabe mencionar que a la hora de crear una lista, si se deciden insertart cadenas de caracteres, por la forma en la que está hecho el código, éstas no pueden contener espacios, ya que si no serían sustituidas por espacios. Cuando se inserten de otra forma sí que pueden contenerlos.

1.2.3 Pruebas

Para probar el funcionamiento del programa, vamos a pasarle un fichero de texto que contiene expresiones en lenguaje natural que deberán ser convertidas a Python. Aquí se puede ver un ejemplo de la salida obtenida:



Para comprobar que funciona, vamos a redirigir la salida a un fichero con extensión .py y vamos a probar a ejecutarlo con Python. Se puede ver el resultado en la siguiente imagen:


nazaret@nazaret-GE63-7RD:~/Escritorio/ETSIIT_comp/3º/MC/P2/ugr_modelos_computacion/src/P2$ ./compyler ejemplo-completo.txt > ejemplo_salida.py
nazaret@nazaret-GE63-7RD:~/Escritorio/ETSIIT_comp/3º/MC/P2/ugr_modelos_computacion/src/P2$ python3 ejemplo_salida.py
['esto', 'es', 'la', 'primera', 'lista']
esto
es
la
primera
lista
esto_es_la_primera_lista_True
4
4
5
5
6
6
8
8
true
true
false
false
true
true
4
[1.1, -123.45, 15]
[1.1, -123.45]
nazaret@nazaret-GE63-7RD:~/Escritorio/ETSIIT_comp/3º/MC/P2/ugr_modelos_computacion/src/P2$

1.3 Práctica 3

1.3.1 Ejercicio 1

Enunciado. En el alfabeto $\{x, y\}$, construir un AFD que acepte cada uno de los siguientes lenguajes:

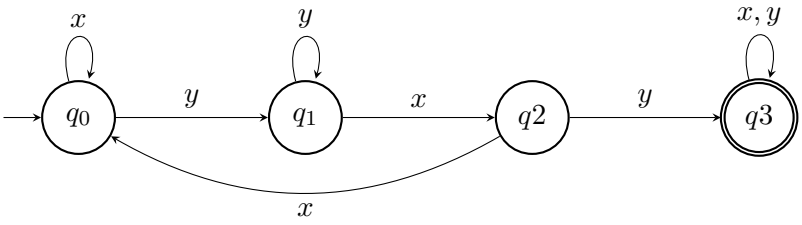
a) El lenguaje de las palabras que contienen la subcadena yxy.

b) El lenguaje de las palabras que comienzan o terminan en xyx (o ambas cosas).

c) El lenguaje $L \subseteq \{x, y\}^*$ que acepta aquellas palabras con un número impar de ocurrencias de la subcadena xy.

Solución

a) Definimos como Autómata Finito Determinista a la quintupla $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$, donde Q es el conjunto de estados, A el alfabeto de entrada, q_0 el estado inicial, δ el conjunto de funciones de transición y F el estado final. El autómata quedaría de la siguiente forma:

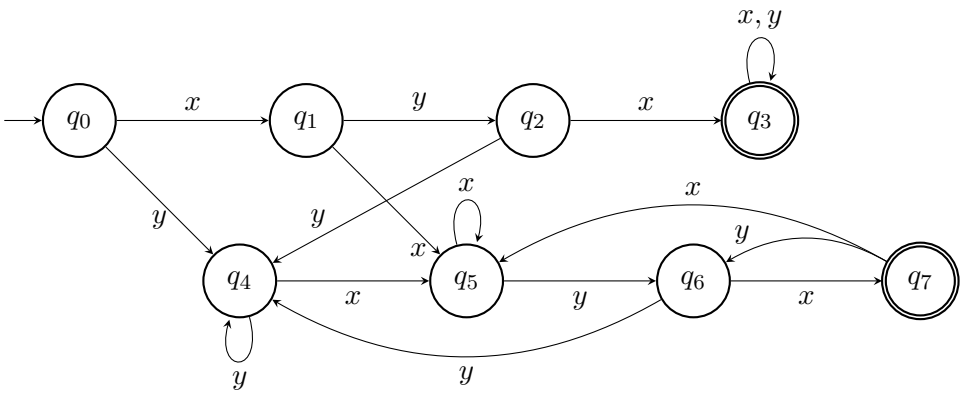


Cada estado representa lo sguiente:

- q_0 representa el estado inicial, y se continúa en él mientras le lleguen x, lo cuál significa que todavía no le ha llegado el primer elemento de la subcadena que debe contener.
- q_1 representa que ha llegado la primera y, y se mantiene en ese estado mientras sigan llegando y, ya que simboliza que al menos habrá una que forme parte de la cadena yxy. Se pasará al estado q_2 cuando le llegue una x, que representa el elemento de en medio.

- q_2 representa que ha llegado la x que forma la parte central de la cadena a aceptar. Si le llega una x vuelve a q_0, ya que se ha interrumpido la cadena. Si le llega una y significa que le ha llegado el último elemento de la cadena a aceptar y pasa al estado q_3.
- q_3 representa el estado final, al que se llega una vez que se han encontrado todos los símbolos consecutivos de la cadena. Se permanece en este estado le llegue lo que le llegue, ya que se ha encontrado la cadena que se buscaba. Si se llega a este estado, se acepta la cadena de entrada.

b) Definimos como Autómata Finito Determinista a la quintupla $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$, donde Q es el conjunto de estados, A el alfabeto de entrada, q_0 el estado inicial, δ el conjunto de funciones de transición y F el estado final. El autómata quedaría de la siguiente forma:



Antes de explicar lo que representa cada estado, hace falta clarificar algunas ideas sobre el autómata. La parte de arriba del autómata representa el autómata capaz de aceptar las palabras que contienen la cadena xyx al principio, mientras que la parte de abajo del autómata es la que es capaz de aceptar las palabras que contienen la cadena anterior al final de la palabra. Se aceptará una palabra si el autómata se encuentra en el estado q_3 o en el q_7 tras leer todos los símbolos de entrada.

Una vez dicho esto, se va a proceder con la explicación:

- q_0 es el estado inicial. De aquí se pueden dar dos situaciones. La primera es que le llegue una x, lo cuál podría representar que la cadena xyx se encuentra al principio de la palabra, y entonces se pasaría al estado q_1. En caso de que llegue una y, se descarta que la cadena se encuentre al principio de la palabra y se pasa al estado q_4 para intentar comprobar que se encuentra al final de la palabra.

- q_1 representa que ha llegado la primera x y que se está comprobando que la cadena esté al principio. En caso de que le llegue una y se pasará al estado q_2, esperando por tanto a que le llegue el último elemento. En caso de que le llegue una x, significa que la cadena a buscar no se pudo encontrar al principio de la palabra y por tanto se intentará buscar al final de ésta. Por tanto, se pasará al estado q_5, simbolizando que ha llegado la primera x que puede estar al final de la palabra.

- q_2 representa que han llegado los símbolos xy al principio de la cadena y está esperando a que llegue la última x. En caso de que esto ocurra, se pasará al estado q_3. En caso de que llegue una y significaría que se está interrumpiendo la cadena al inicio y por tanto se pasaría al estado q_4, indicando que se intentará comprobar que la cadena está al final de la palabra, y que todavía no ha llegado el primer elemento de ésta.

- q_3 es un estado final que indica que se ha encontrado la cadena xyx al principio de la palabra, y que por tanto se acepta la palabra. Ya que se ha cumplido la restricción, el autómata permanecerá en este estado sin importar que símbolo le venga de entrada.

- q_4 indica que, o bien el primer símbolo no ha sido una x o que la cadena xyx que se buscaba al principio o al final ha sido interrumpida con una y (por ejemplo con la cadena xyy), y que por tanto aun no ha llegado el primer elemento de la cadena a buscar. El autómata permanecerá en este estado mientras le siga llegando el símbolo y, y pasará al estado q_5 en cuanto le llegue una x, que simboliza el primer elemento de la cadena.

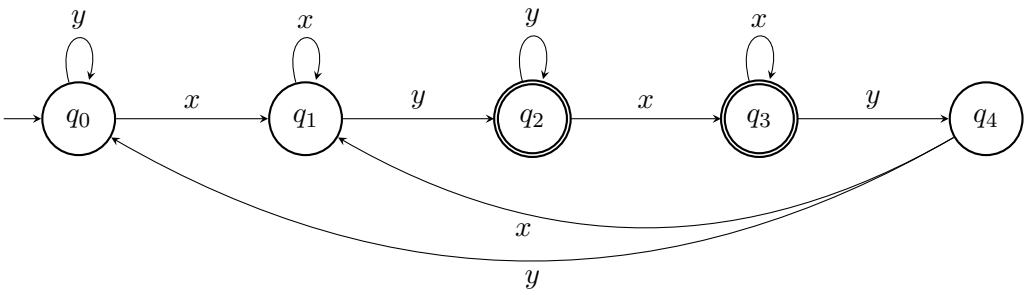
- q_5 representa un estado en el que se está buscando la cadena xyx al final de la palabra y que ha llegado el primer elemento, bien porque la cadena había sido interrumpida por una y, como se ha mencionado en el estado anterior, o bien porque al principio ha llegado una cadena del tipo xx. Mientras le sigan llegando x, el autómata permanecerá en este estado, ya que este es el primer elemento de la cadena. Pasará a q_6 en cuánto le llegue el símbolo y.

- q_6 simboliza que se está buscando la cadena al final de la palabra y que de momento han llegado los símbolos xy. Si le llega el símbolo y, entonces se interrumpe la cadena, y se pasa al estado q_4. En caso de que llegue una x, el autómata pasará al estado q_7.

- q_7 representa es un estado final que indica que se ha encontrado la cadena xyx al final de una palabra, probablemente. El autómata se quedará en este estado, y por tanto aceptará la palabra en el caso de que no le llegue ningún símbolo más. En caso de que le llegue una x, pasará al estado q_5, indicando que ha llegado el primer elemento de la cadena de nuevo. En caso de que le llegue una y, pasará al estado q_6, indicando que de momento lleva la cadena

xy. Esto se debe a que anteriormente le llegó el símbolo x, con lo cuál, ahora con una y, lleva dos elementos de la cadena.

c) Definimos como Autómata Finito Determinista a la quintupla $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$, donde Q es el conjunto de estados, A el alfabeto de entrada, q_0 el estado inicial, δ el conjunto de funciones de transición y F el estado final. El autómata quedaría de la siguiente forma:



Se va ahora a comentar cada estado:

- q_0 representa el estado inicial. El autómata se mantendrá en este estado mientras le sigan llegando símbolos y. Pasará al siguiente estado, q_1 cuando le llegue el símbolo x, el cuál forma parte de la cadena xy a buscar.
- q_1 representa ha llegado el símbolo x de la cadena xy. Se mantendrá en este estado mientras le sigan llegando síbolos x, ya que este sigue siendo el primer elemento de la cadena. Pasará al siguiente estado, q_2, en cuanto le llegue el símbolo y.
- q_2 es el primer estado final del autómata. Indica que se ha procesado la palabra y que se han encontrado un número impar de cadenas xy. Mientras le lleguen símbolos y, permanecerá en este estado. Por tanto, si el autómata está en este estado y no le llegan nuevos símbolos, o le siguen llegando y, aceptará la palabra.
- q_3 es el segundo estado final. Representa la situación en la que ha llegado un número de cadenas xy impares y que ha llegado una nueva x, la cuál puede llegar a convertirse en una nueva cadena xy, haciendo que el número de éstas sea par. No obstante, como todavía no ha llegado un símbolo y, es un estado final, ya que como se mencionó anteriormente han llegado un número impar de cadenas xy. Por tanto, si el autómata se encuentra en este estado al finalizar de procesar la palabra, la aceptará. Se mantendrá en este

estado mientras le sigan llegando símbolos x, y pasará al estado q_4 si le llega un símbolo y.

- q_4 es un estado que representa que han llegado un número par de cadenas xy. Si le llega un símbolo y pasará al estado q_0. Si le llega una x, pasará al estado q_1, ya que se ha obtenido el primer símbolo de una potencial cadena xy.

1.3.2 Ejercicio 2

Enunciado. En el alfabeto $\{0, 1\}$, construir un AFND que acepte cada uno de los siguientes lenguajes:

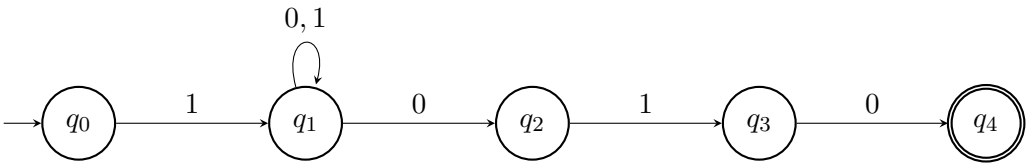
a) El lenguaje de las palabras que empiezan en 1 y terminan en 010.

b) El lenguaje de las palabras que empiezan o terminan (o ambas cosas) en 101.

c) El lenguaje de las palabras que contienen, simultáneamente, las subcadenas 0101 y 100. El AFDN también acepta las cadenas en las que las subcadenas están solapadas (por ejemplo, "10100" y "100101" serían palabras aceptadas).

Solución

a) Definimos como Autómata Finito No Determinista a la quintupla $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$, donde Q es el conjunto de estados, A el alfabeto de entrada, q_0 el estado inicial, δ el conjunto de funciones de transición y F el estado final. El autómata quedaría de la siguiente forma:



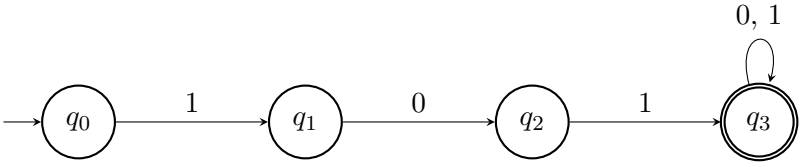
A continuación, se va a explicar lo que representa cada estado:

- q_0 es el estado inicial. Desde él se pasa al estado q_1 en caso de que le llegue un 1 al principio de la palabra a procesar. En caso contrario, el autómata rechaza la palabra.

- q_1 representa que ya ha llegado un símbolo 1 como primer elemento de la palabra. Como se está trabajando con un AFND, el autómata estará en este estado mientras le sigan llegando 0 y 1, pero además transicionará al estado q_2 en cuanto le llega un 0.
- q_2 representa que ha llegado un 0 que potencialmente forma parte de la cadena 010 que se encuentra al final de la palabra. En caso de que le llegue un 1, el autómata pasaría al estado q_3. En caso de llegarle un 0, el autómata no sabría qué hacer y no pasaría a ningún estado. No obstante, ya que se mantiene al mismo tiempo en el estado q_1, el autómata permanecería en este estado y pasaría de nuevo al estado q_2.
- q_3 representa que ha llegado un 1 que potencialmente forma parte de la cadena 010 que se encuentra al final de una palabra. En caso de que le llegue un 0, el autómata transicionará al estado q_4. En caso de llegarle un símbolo 0, como no hay ninguna transición, el autómata no sabría que hacer y no haría nada. Sin embargo, como todavía se encuentra en el estado q_1, permanecería en este.
- q_4 es el estado final del autómata, y representa que le ha llegado una palabra con un 1 al principio y la cadena 010 al final. Por tanto, si al terminar de procesar una palabra el autómata se encuentra en este estado, se acepta la palabra. Esto es con la condición de que no le lleguen nuevos símbolos de entrada. Sin embargo, si le llegan, el autómata no sabrá que hacer, y por tanto dejará de aceptar la palabra. Sin embargo, como aún se mantiene en el estado q_1, hará alguna de las acciones especificadas para ese estado en función de la entrada.

b) Definimos como Autómata Finito No Determinista a la quintupla $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$, donde Q es el conjunto de estados, A el alfabeto de entrada, q_0 el estado inicial, δ el conjunto de funciones de transición y F el estado final.

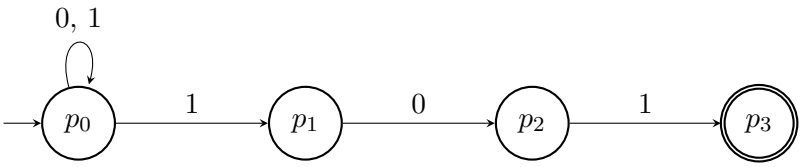
El autómata tiene dos partes: una para aceptar las palabras que contienen la cadena 101 al principio y una para aceptar las palabras que contienen 101 al final. Primero se procederá a mostrar el autómata que acepta las palabras que contienen la cadena al principio, el cuál quedaría de la siguiente forma:



Como se puede ver, el autómata rechazará cualquier palabra que no empiece por 101, ya que en las transiciones no se especifica que hacer cuando le llegue un

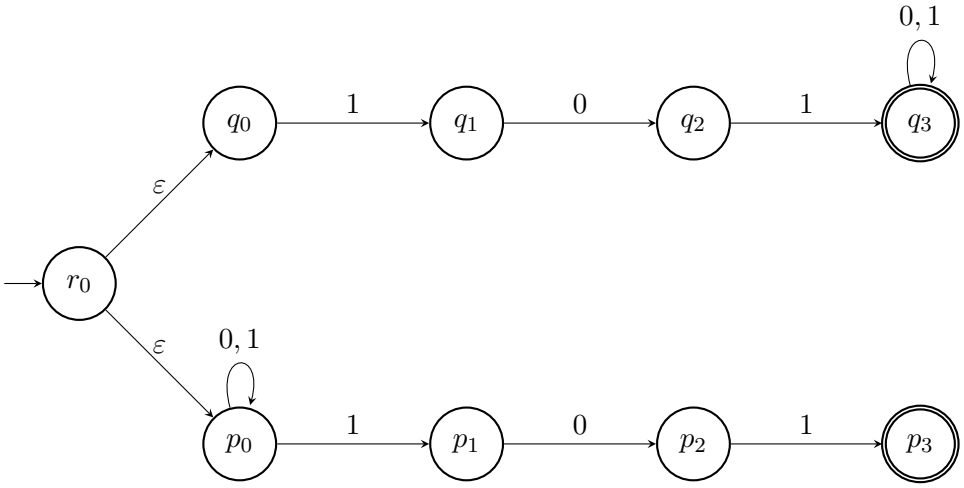
símbolo que no se espere. Una vez encontrada la cadena, da igual qué símbolo le llegue, ya que habrá cumplido el objetivo inicial.

A continuación se va a construir el autómata que acepte las palabras que terminen en la secuencia 101:



Como se puede comprobar fácilmente, este autómata procesa las palabras y las acepta si contienen la cadena 101 al final, es decir, si llega al estado p_3 y se mantiene ahí, sin que le llegue ningún símbolo nuevo.

Para crear el autómata que acepta a la palabras que comiencen en 101 o acaben en 101, o ambas cosas, lo único que se tiene que hacer es unir los dos autómatas en uno mediante transiciones nulas. El resultado sería el siguiente:



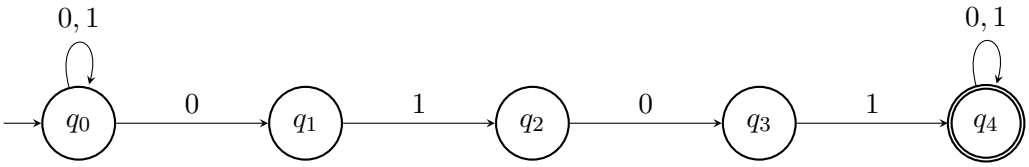
Para que el autómata acepte una palabra de entrada, al terminar de procesarla debe encontrarse o bien en q_3, o bien en p_3, o bien en ambos estados.

c) Definimos como Autómata Finito No Determinista a la quintupla $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$, donde Q es el conjunto de estados, A el alfabeto de entrada, q_0 el estado inicial, δ el conjunto de funciones de transición y F el estado final.

El autómata tiene 2 partes: una que se encarga de comprobar que la palabra contenga las dos cadenas en el orden 0101 y 100 y la otra que se encarga de

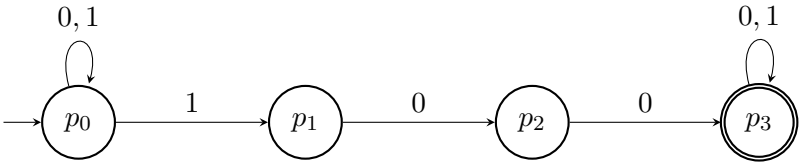
comprobar que contiene las cadenas en el orden 100 y 0101. Ambas aceptan cadenas solapadas.

Antes de empezar, vamos a construir los autómtas que aceptan cada cadena por separado, empezando por el que acepta las palabras que contengan la cadena 0101:



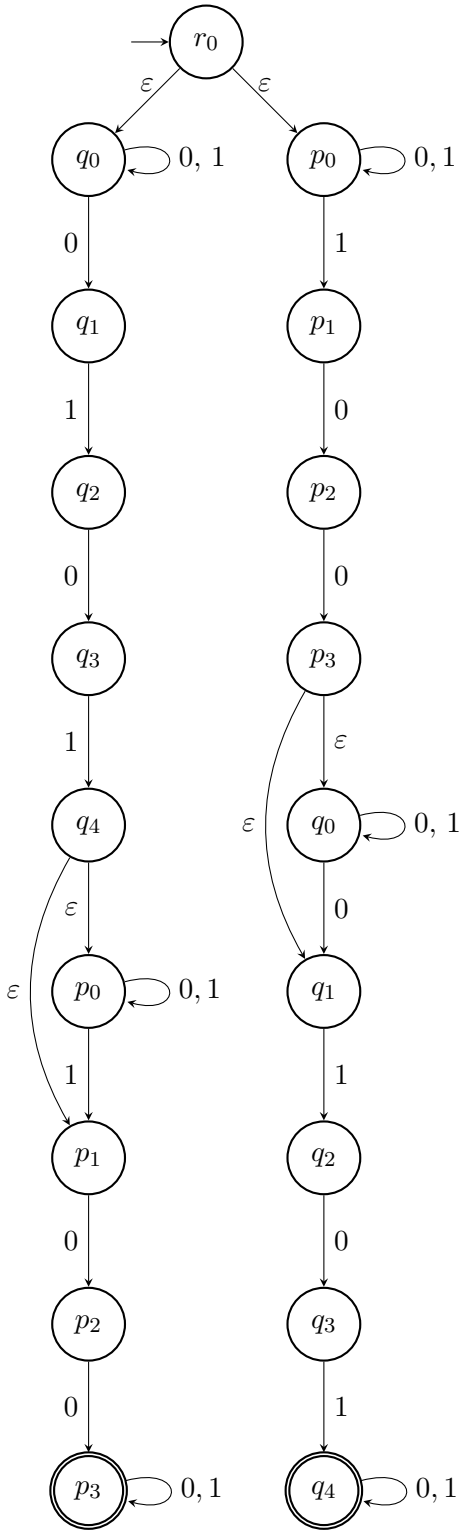
Se puede comprobar fácilmente que este autómata procesa la palabra y busca en ella la cadena 0101, y la acaba aceptando si llega al estado q_4, una vez encontrada ésta. Al llegar a este estado, como se ha cumplido la restricción, da igual qué símbolo le llegue, ya que se mantendrá en el estado final.

A continuación se muestra el autómata que busca la cadena 100:



De nuevo, es fácil comprobar que el autómata procesa la palabra y determina si la cadena 100 forma parte de ella, aceptando la palabra de entrada si llega al estado p_3. Como da igual que símbolo de entrada le llegue una vez encontrada la cadena se mantendrá en ese estado final.

Una vez dicho esto, se va a construir el autómata que acepte las palabras que contengan las cadenas 0101 y 100 en cualquier orden, y de ser el caso, solapadas. El autómata sería el siguiente:


r_0
ε
ε
q_0
0, 1
p_0
0, 1
0
1
q_1
p_1
1
0
q_2
p_2
0
0
q_3
p_3
1
ε
q_4
ε
q_0
0, 1
ε
ε
p_0
0, 1
q_1
0
1
1
p_1
q_2
0
0
p_2
q_3
0
1
p_3
0, 1
q_4
0, 1

Para que se solapen las cadenas, se han añadido transiciones nulas que permiten pasar de la parte final de un autómata al estado siguiente del inicial del otro. Adicionalmente, entre el final de un autómata y el principio del otro se han añadido transiciones nulas para conectarlos.

El autómata aceptará las palabras si llega a uno de los dos estados finales del autómata. Como son mutuamente excluyentes, solo puede llegar a uno.

1.3.3 Ejercicio 3

Enunciado. Calcular una máquina de Mealy o Moore que codifique el complemento a dos de un número en binario.

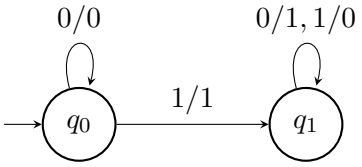
Nota: *El complemento a dos se realiza cambiando ceros por unos y unos por ceros, y luego, al resultado, sumándole uno en binario.*

Nota 2: *El complemento a dos es la forma en que se calcula el entero opuesto a uno dado para la representación binaria de los enteros con signo en C++.*

Solución

Se va a construir una máqiona de Mealy que permita calcular el complemento a dos de un número binario. En esta máquina, las salidas correspondientes a las entradas se indican en las transiciones en vez de en los estados en sí.

El resultado sería el siguiente:



El comportamiento del autómata sería el siguiente:

- Si el primer elemento de entrada es un 0, y mientras le sigan llegando símbolos 0, el autómata imprimirá el símbolo 0. Esto se debe a que al dígito más a la derecha se le suma un 1 en el complemento a 2. Por tanto, si el complemento a 1 de 0 es 1, y al sumarle el 1 del complemento a 2, su valor pasa a ser 0, y se tiene un 1 de acarreo, el cuál se sumará al siguiente símbolo de entrada. Si vuelve a entrar un 0, se obtiene un 1 del complemento a 1 y se le suma el acarreo, produciendo un 0 de nuevo con acarreo, y así sucesivamente. En el

autómata esto se representa con el estado q_0 y la transición que sale y entra hacia él.

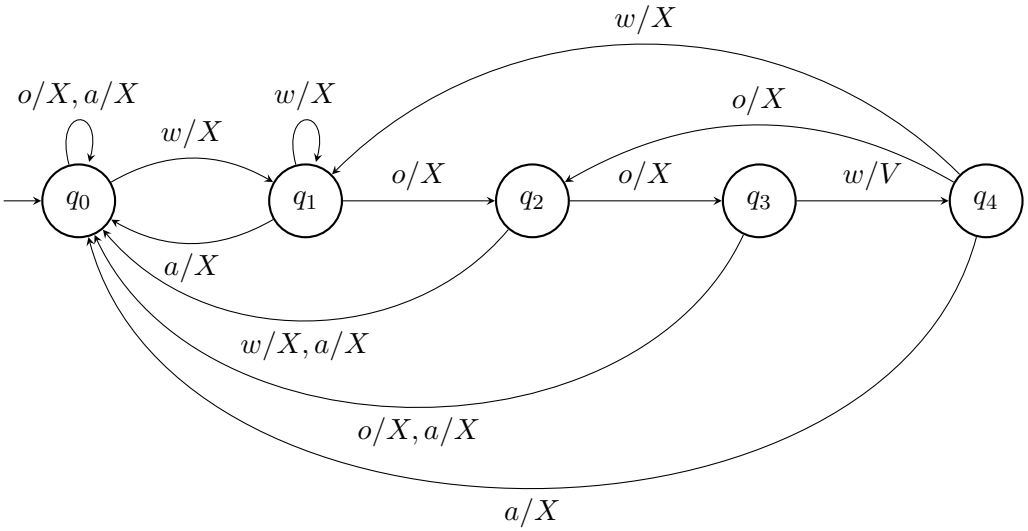
- Si el primer símbolo es 1, o llega el primer 1 de la cadena, se le hace su complemento a 1, el cuál es 0, y se le suma un 1 si es el primer elemento de entrada o si han llegado anteriormente símbolos 0 y se ha producido acarreo, resultando por tanto en 1. En este caso, no se produciría acarreo, y los símbolos que vengan a continuación tendrán su valor inverso. Esto se representa con la transición de q_0 a q_1.
- Una vez que ya no hay acarreo y sigan llegando símbolos de entrada, se imprimirá el valor contrario al de entrada. Por ejemplo, si llega un 0 se imprimirá un 1, y si llega un 1, un 0. Esto se representa con la transición que entra y sale de q_1.

1.3.4 Ejercicio 4

Enunciado. Diseñar una Máquina de Mealy o de Moore que, dada una cadena usando el alfabeto $A = \{a, w, o\}$, encienda un led verde (salida V) cada vez que se detecte la cadena "*woow*" en la entrada, apagándolo cuando lea cualquier otro símbolo después de esta cadena (representamos el led apagado con la salida "X"). El autómata tiene que encender el led verde (salida V), tantas veces como aparezca en la secuencia "*woow*" en la entrada, y esta secuencia puede estar solapada

Solución

Se plantea una máquina de Mealy como solución al problema dado, la cuál tiene la siguiente forma:



A continuación se va a explicar brevemente el funcionamiento de la máquina:

- q_0 es el estado inicial y al que transicionan todos los estados cuando les llega un símbolo que no esperaban. Representa además un estado en el que todavía no ha llegado ningún elemento de la cadena "*woow*".
- q_1 representa el estado siguiente de q_0, en el cuál le llega la primera w. Mientras le sigan llegando w permanecerá en este estado, ya que sigue siendo el primer elemento de la cadena. Cuando le llegue una o pasará al siguiente estado.
- q_2 representa que ha llegado la primera o, y si le llega cualquier otro elemento que no sea otra o, vuelve al estado q_0. En caso de que le llegue, pasa al siguiente estado.
- q_3 representa un estado en el que han llegado las dos o y está esperando una w para pasar al siguiente estado y encender finalmente el led de color verde. En caso de llegarle otro símbolo, volverá al estado q_0.
- q_4 representa que han llegado todos los elementos de la cadena "*woow*" y que se ha encendido el led verde (mediante la transición w/X para pasar de q_3 a q_4). Desde aquí, como se pueden solapar las cadenas, pueden darse distintas situaciones. La primera es que le llegue una a, pasando por tanto al estado q_0. Si le llega una w, significa que puede llegar una nueva cadena "*woow*" sin solapar, y por tanto pasará al estado q_1, simbolizando que ha llegado la primera w. En caso de llegarle una o, significa que posiblemente la cadena se

solape, pasando por tanto al estado q_2, indicando que ha llegado la primera o.

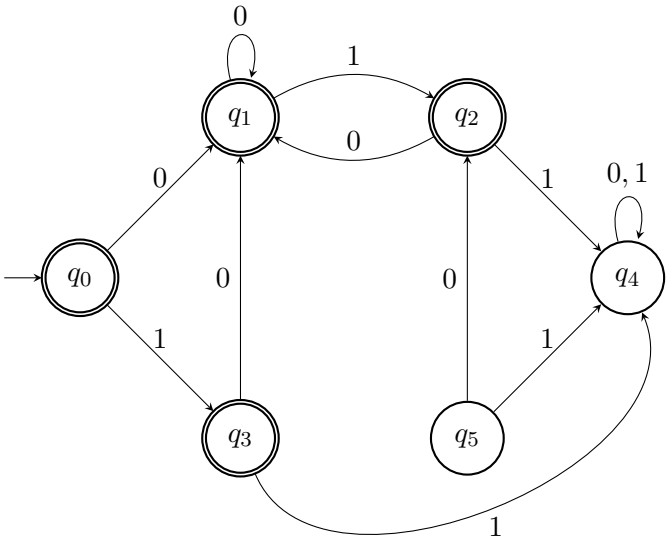
1.4 Práctica 4

1.4.1 Ejercicio 1

Enunciado. Dado el siguiente autómata responde a las siguientes cuestiones razonadamente:

a) ¿Habría alguna forma de optimizar el autómata para que reduciendo su complejidad siga aceptado exactamente el mismo lenguaje?

b) ¿Se podría obtener la gramática que genera este lenguaje en la Forma Normal de Chomsky? En caso afirmativo, proporcionar dicha gramática en FNC. En caso contrario, justificar.

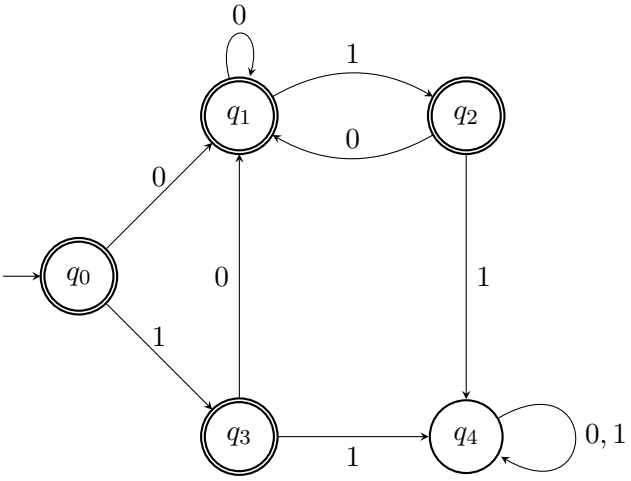


Solución

a) Para intentar optimizar el autómata y reducir su complejidad se puede aplicar el algoritmo de minimización. En caso de obtener el mismo autómata después de intentar minimizarlo, significaría que ya se estaría delante de un autómata minimal, y que por tanto no se puede simplificar más.

Para empezar, se van a eliminar todos los estados inaccesibles, es decir, aquellos a los que no se pueda llegar desde ningún otro estado.

Como se puede observar claramente, el estado q_5 es inaccesible, ya que no se puede llegar hasta él de ninguna forma. Dicho de otra manera, no existe ninguna transición que lleve cualquier estado a q_5. Por tanto se eliminaría, y el resultado sería el siguiente:



Una vez eliminados los estados inaccesibles se puede aplicar el algoritmo de minimización. Con este algoritmo se intentan reducir el número de estados, dejando solo aquellos que son distinguibles entre sí. Dos estados son distinguibles si, para un mismo símbolo de entrada, se llegan a dos estados diferentes (es decir, que uno sea final y el otro no, por ejemplo). Si dos estados son distinguibles, significia que los estados padres también lo serán, ya que los hijos se pueden distinguir. Con esto se busca reducir el número de estados, combinando aquellas parejas que son indistinguibles en un solo estado.

Para ello, se va a construir una tabla triangular y se van a marcar con una cruz las casillas en las que la pareja de estados sea distinguible. Se hará una primera iteración, en la que se marcarán aquellas parejas distinguibles sin que les entre ningún símbolo de entrada. Es decir, aquellas en las que uno de los estados sea final y el otro no.

El resultado de esta primera iteración es el siguiente:

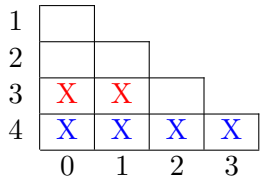
1				
2				
3				
4	X	X	X	X
	0	1	2	3

Como se puede observar, el estado q_4 es distinguible de todos los otros porque es el único que no es final. Los demás, de momento, son indistinguibles, así que se irán comprobando por partes a medida que se itere. El criterio a seguir ahora para determinar si dos estados son distinguibles es comprobar, según el símbolo de entrada, hacia donde transiciona cada pareja. En caso de llegar con cualquiera de los símbolos de entrada del lenguaje a una pareja de estados distinguibles, entonces se marcará en la tabla que esa pareja también lo es. En caso de ir a una pareja de estados que todavía no se ha marcado, se guardará la pareja y, si al comprobar la pareja a la que llegan se determina que esos valores son distinguibles, entonces también se marcará a la pareja original como distinguible. En caso contrario, no se hará nada. Este proceso, como se puede ver, determina recursivamente las parejas que son distinguibles, reduciendo por tanto el número de iteraciones que se tienen que hacer.

A continuación, se van a comprobar las parejas formadas por el estado q_3 con los estados q_0, q_1 y q_2, ya que todavía no se ha determinado si son distinguibles estas parejas. Para eso, se van a construir tablas que permitan ver hacia donde se transiciona con las entradas. Se marcarán en rojo aquellas transiciones que ya sean distinguibles para facilitar el seguimiento del algoritmo. Luego se mostrará el resultado en la tabla donde se minimiza.

Este es el resultado para las parejas mencionadas anteriormente:

	0	1
0	1	3
3	1	4
1	1	2
3	1	4
2	1	4
3	1	4



Como se puede comprobar, solo la pareja $\{q_2, q_3\}$ ha quedado sin marcar, y tampoco parece llegar a ningún estado que pueda ser comprobado más adelante. Con lo cuál, como a medida que se itere no se volverá atrás, se puede decir de momento que la pareja $\{q_2, q_3\}$ es indistinguible.

Ahora se procederá a comprobar el estado q_2 con los estados q_0 y q_1. El resultado

es el siguiente:

	0	1
0	1	3
2	1	4
1	1	2
2	1	4

1				
2	X	X		
3	X	X		
4	X	X	X	X
	0	1	2	3

Aquí se puede ver que todas las parejas de estados posibles son distinguibles con q_2, por tanto se han marcado las casillas que corresponden en la tabla.

Para finalizar se va a comprobar la pareja formada por los estados q_0 y q_1. El resultado es el siguiente:

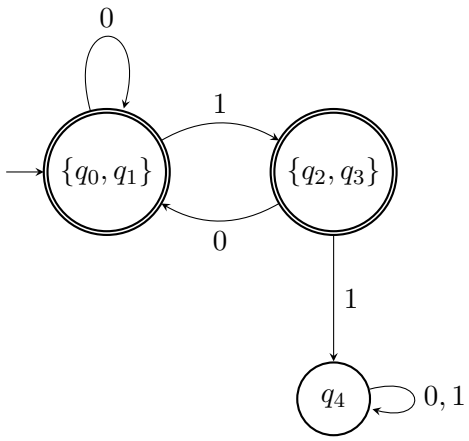
	0	1
0	1	3
1	1	2

1				
2	X	X		
3	X	X		
4	X	X	X	X
	0	1	2	3

Después de esta última iteración se ha concluído que la pareja de estados $\{q_0, q_1\}$ también son indistinguibles, ya que no conducen a ningún estado distinguible.

Por tanto, se puede afirmar que las parejas de estados $\{q_0, q_1\}$ y $\{q_2, q_3\}$ son indistinguibles. Esto implica que los dos estados se pueden juntar en uno nuevo, conservando las transiciones de ambos estados.

Para finalizar, se va a crear el nuevo autómata, el cuál es mínimo y el más simple posible, con las agrupaciones de estados correspondientes. El resultado sería el siguiente:



b) Lo primero que se va a hacer es pasar el AFD anterior a gramática. Definimos gramática como la cuádrupla $G = (V, T, P, S)$, donde V son las variables, T los símbolos terminales, P el conjunto de reglas de producción y S el estado inicial. Para facilitar el trabajo se va a nombrar al estado $\{q_0, q_1\}$ como S, al $\{q_2, q_3\}$ como A y al estado q_4 como B. Por tanto, la gramática sería la siguiente:

$$V = \{S, A, B\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

$$P = \{S \to 0S \mid 1A \mid \varepsilon,\ A \to 0S \mid 1B \mid \varepsilon,\ B \to 0B \mid 1B\}$$

$$S = \{S\}$$

La Forma Normal de Chomsky tiene las reglas de producción de la forma $A \to BC$ y $A \to a$, donde $A, B, C \in V$ y $a \in T$. Como se puede ver, nuestra gramática se encuentra lejos de eso.

El primer paso consiste en limpiar la gramática de producciones inútiles, es decir, de las variables que no produzcan un símbolo terminal y de aquellas variables inalcanzables. Al limpiar la gramática anterior, obtenemos la siguiente:

$$V = \{S, A\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

$$P = \{S \to 0S \mid 1A \mid \varepsilon,\ A \to 0S \mid \varepsilon\}$$

$$S = \{S\}$$

Como se puede ver, la variable B ha sido eliminada, ya que no producía ningún símbolo terminal.

Una vez limpiada la gramática, el siguiente paso consiste en eliminar las producciones nulas y sustituirlas por los símbolos terminales que correspondan. Las reglas de producción, una vez aplicado este paso, quedarían de la siguiente forma:

$$P = \{S \to 0S \mid 1A \mid 0 \mid 1,\ A \to 0S \mid 0\}$$

Como se puede ver, ahora nuestra gramática no contiene producciones nulas, y se puede pasar al paso final, que consiste en dejar todas las producciones de la forma $A \to BC$ y $A \to a$, donde $A, B, C \in V$ y $a \in T$. Una vez aplicado el proceso de transformación de la gramática, obtenemos la siguiente gramática, la cuál ya está en la Forma Normal de Chomsky:

$$V = \{S, A, X, Y\}$$

$$T = \{0, 1\}$$

$$P = \{X \to 0,\ Y \to 1,\ S \to XS \mid YA \mid 0 \mid 1,\ A \to XS \mid 0\}$$

$$S = \{S\}$$

Como se puede comprobar fácilmente, todas las producciones siguen las condiciones descritas anteriormente. El proceso para llegar hasta esta gramática ha consistido en sustituir en las reglas de producción los símbolos terminales que iban acompañados por una variable por otra variable (cambiar 0 y 1 por X e Y, respectivamente). Esa variable luego se sustituye por el símbolo terminal correspondiente. Si una regla producía un símbolo terminal, no se ha cambiado el símbolo por la nueva variable, solo en los casos en los que va acompañado de otra variable.

1.4.2 Ejercicio 2

Enunciado. Observando las siguientes gramáticas, determinar cuáles de ellas son ambiguas y, en su caso, comprobar si los lenguajes generados son inherentemente ambiguos. Justificar la respuesta.

a) $S \to AbB,\ A \to aA \mid \varepsilon,\ B \to aB \mid bB \mid \varepsilon$

b) $S \to abaS \mid babS \mid baS \mid \varepsilon$

c) $S \to aSA \mid \varepsilon,\ A \to bA \mid \varepsilon$

Nota: Explicar y demostrar cuidadosamente si la gramática no es ambigua (con lenguaje natural).

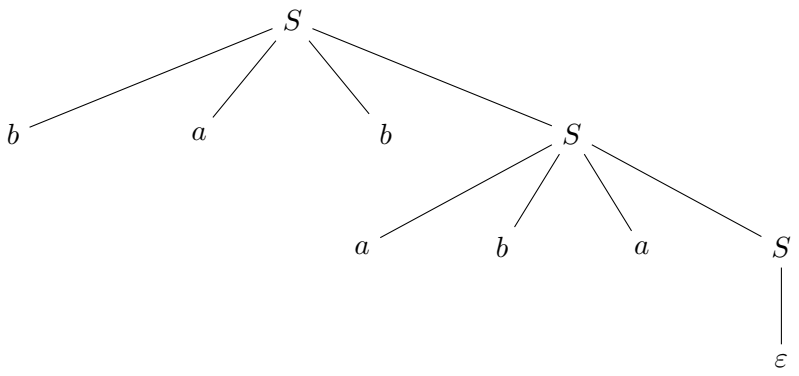
Solución

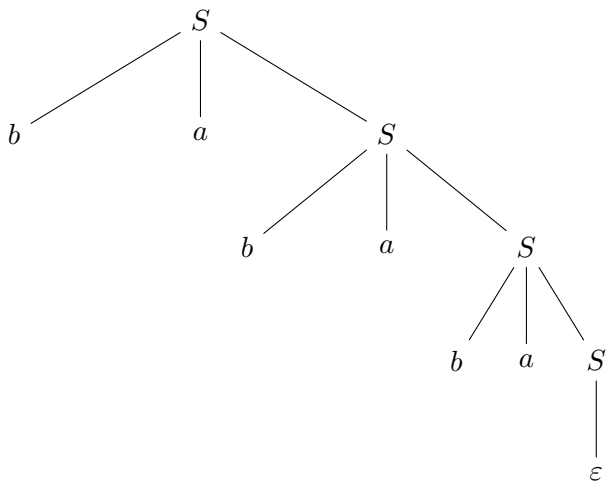
a) La gramática no es ambigua. En un principio puede parecerlo ya que al principio, con la regla $S \to AbB$ se crea un árbol que puede crecer tanto por la derecha como por la izquierda. Sin embargo, el resto de reglas obligan a crecer esas ramas obligatoriamente hacia la derecha. Aunque en un principio eso no llega a salvar a la gramática de ser ambigua, en este caso no se produce ninguna ambigüedad. Esto se puede ver de la siguiente forma:

- En la parte derecha de la palabra habrá una sucesión de 0 o más símbolos a. Como los símbolos se van poniendo uno detrás de otro hasta que se inserte el símbolo vacío, solo hay camino único para un número dado de símbolos a.
- Entre las dos partes que pueden crecer del árbol siempre habrá un símbolo b.
- En la parte izquierda habrá 0 o más símbolos a y b, entremezclados o no. La forma en la que va creciendo esta parte del árbol permite seguir un camino único para cada posible combinación de símbolos a y b que se genere, con lo cuál no es posible obtener dos árboles distintos para una misma sucesión de símbolos.

Al demostrar que la gramática no es ambigua, se puede decir también que el lenguaje no es inherentemente ambigua, ya que existe al menos una gramática no ambigua para éste.

b) La gramática es ambigua, ya que se puede obtener la cadena *bababa* con dos árboles distintos, los cuáles son:

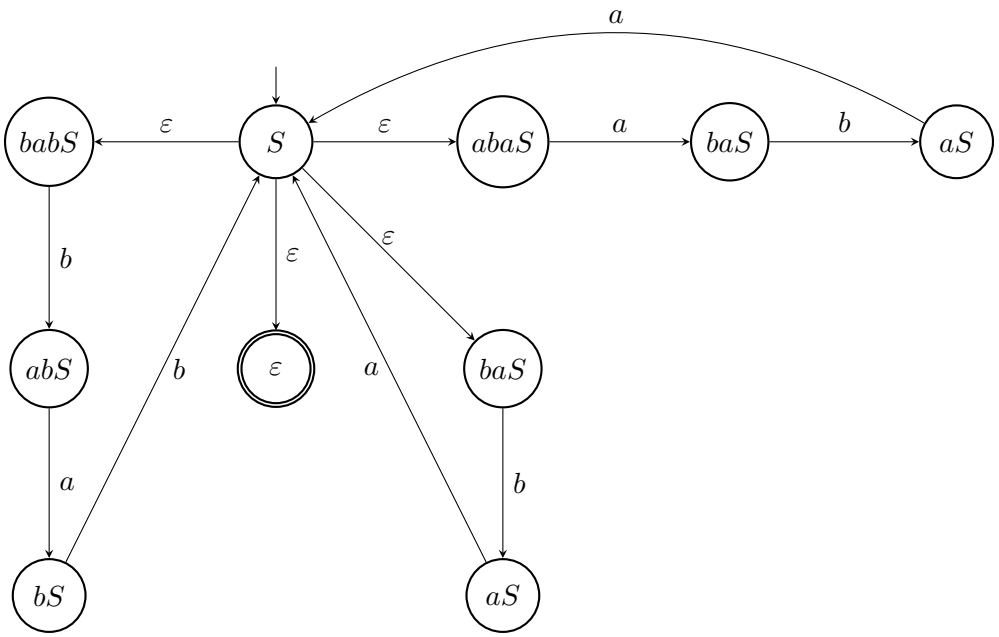




Como se puede comprobar fácilmente, los caminos a seguir para llegar a la misma palabra son claramente distintos.

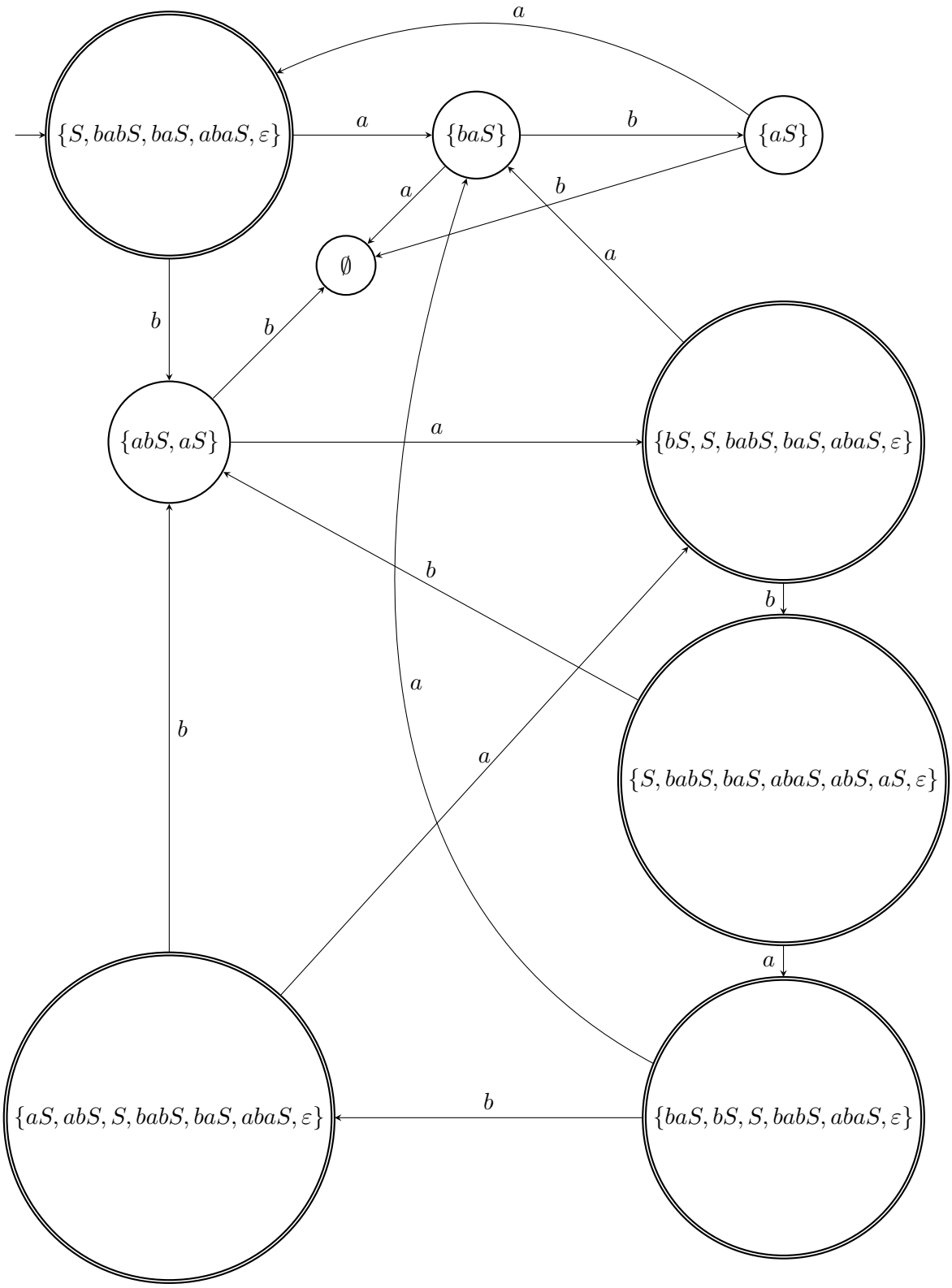
Para demostrar que el lenguaje no es inherentemente ambiguo, se va a buscar una gramática no ambigua que genere las mismas palabras que esta.

Ya que nos encontramos ante una gramática regular por la derecha, es decir, de tipo 3, entonces existe un Autómata Finito Determinista asociado a la gramática. Si lo conseguimos sacar, lo minimizamos y obtenemos la gramática asociada, habremos encontrado una gramática no ambigua, ya que al minimizarlo nos aseguramos que el autómata resultante tenga el mínimo número de estados. Primero, vamos a sacar el autómata asociado a la gramática, que es el siguiente:



Ahora, vamos a pasar el autómata a uno que sea finito y determinista. Se avisa que es posible que se haya repetido algún estado, ya que es difícil llevar la cuenta del conjunto de estados que se tiene y de si existe alguno que ya se a el mismo. Sin embargo, este problema se solucionará una vez se minimice el autómata.

El resultado es el siguiente:


$\{S, babS, baS, abaS, \varepsilon\}$
$\{baS\}$
$\{aS\}$
$\emptyset$
$\{abS, aS\}$
$\{bS, S, babS, baS, abaS, \varepsilon\}$
$\{S, babS, baS, abaS, abS, aS, \varepsilon\}$
$\{aS, abS, S, babS, baS, abaS, \varepsilon\}$
$\{baS, bS, S, babS, abaS, \varepsilon\}$
a
b

Para poder simplificar la minimización, vamos a llamar a los estados de la siguiente forma:

- $q_0 = \{S, babS, baS, abaS, \varepsilon\}$
- $q_1 = \{baS\}$
- $q_2 = \{aS\}$
- $q_3 = \{abS, aS\}$
- $q_4 = \{bS, S, babS, baS, abaS, \varepsilon\}$
- $q_5 = \{S, babS, baS, abaS, abS, aS, \varepsilon\}$
- $q_6 = \{baS, bS, S, babS, abaS, \varepsilon\}$
- $q_7 = \{aS, abS, S, babS, baS, abaS, \varepsilon\}$
- $q_8 = \emptyset$

Una vez hecho esto vamos a proceder a la minimización. Con la primera iteración obtenemos lo siguiente:

1	X							
2	X							
3	X							
4		X	X	X				
5		X	X	X				
6		X	X	X				
7		X	X	X				
8	X				X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

Primero vamos a comprobar la fila de abajo del todo. En las tablas se muestra en verde aquellas parejas que se determina que son distinguibles de forma recursiva, y en rojo las que se determina que son distinguibles directamente. El resultado es el siguiente:

	a	b
1	8	2
8	8	8
2	0	8
8	8	8
3	4	8
8	8	8

1	X							
2	X							
3	X							
4		X	X	X				
5		X	X	X				
6		X	X	X				
7		X	X	X				
8	X	X	X	X	X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

En la siguiente iteración se obtiene:

	a	b
0	1	3
7	4	3
4	1	5
7	4	3
5	6	3
7	4	3
6	1	7
7	4	3

1	X							
2	X							
3	X							
4		X	X	X				
5		X	X	X				
6		X	X	X	5, 7			
7	X	X	X	X	X		X	
8	X	X	X	X	X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

Se ha marcado a la pareja $\{q_5, q_7\}$ para en el futuro mirar si se puede llegar a la conclusión que distinguible.

Con la siguiente iteración se obtienen los siguientes resultados:

	a	b
0	1	3
6	1	7
4	1	5
6	1	7
5	6	3
6	1	7

1	X							
2	X							
3	X							
4		X	X	X				
5		X	X	X				
6	X	X	X	X		X		
7	X	X	X	X	X		X	
8	X	X	X	X	X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

No se ha podido demostrar que la pareja la pareja $\{q_5, q_7\}$ fuese distinguible, y por tanto, se elimina de la tabla.

Con la siguiente iteración se obtiene:

	a	b
0	1	3
5	6	3
4	1	5
5	6	3

1	X							
2	X							
3	X							
4		X	X	X				
5	X	X	X	X	X			
6	X	X	X	X		X		
7	X	X	X	X	X		X	
8	X	X	X	X	X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

Con la siguiente iteración se obtiene:

	a	b
0	1	3
4	1	5

1	X							
2	X							
3	X							
4	X	X	X	X				
5	X	X	X	X	X			
6	X	X	X	X		X		
7	X	X	X	X	X		X	
8	X	X	X	X	X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

Con la siguiente iteración se obtiene:

	a	b
1	1	3
3	4	8
2	0	8
3	4	8

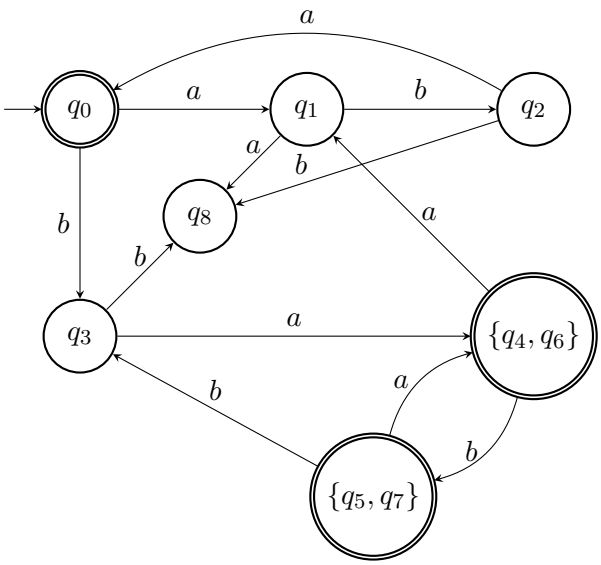
1	X							
2	X							
3	X	X	X					
4	X	X	X	X				
5	X	X	X	X	X			
6	X	X	X	X		X		
7	X	X	X	X	X		X	
8	X	X	X	X	X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

Con la última iteración se obtiene:

	a	b
1	8	2
2	0	8

1	X							
2	X	X						
3	X	X	X					
4	X	X	X	X				
5	X	X	X	X	X			
6	X	X	X	X		X		
7	X	X	X	X	X		X	
8	X	X	X	X	X	X	X	X
	0	1	2	3	4	5	6	7

Con esto se puede concluir que las parejas de estados $\{q_4, q_6\}$ y $\{q_5, q_7\}$ son indistinguibles. Esto se puede ver claramente si observamos el autómata original, ya que los estados son la misma agrupación de estados. Si ahora construimos el AFD con los nuevos estados obtenemos lo siguiente:



Antes de pasar el autómata a una gramática con sus reglas de producción, vamos a renombrar los estados para que sea más fácil luego escribir las reglas de producción. Tenemos por tanto:

- $S = q_0$
- $A = q_1$
- $B = q_2$
- $C = q_3$

- $D = \{q_4, q_6\}$
- $E = \{q_5, q_7\}$
- $F = q_8$

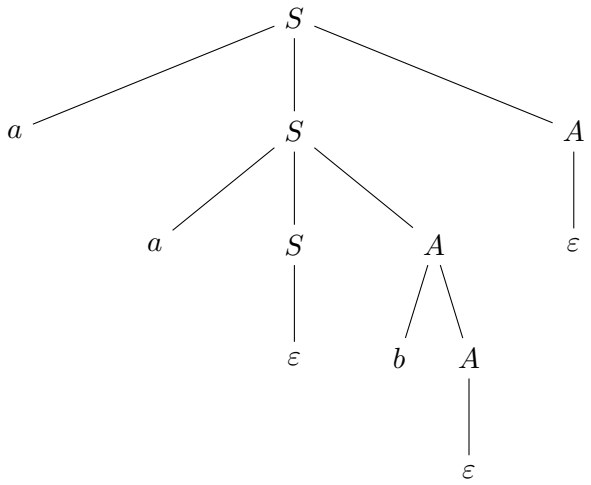
Si ahora pasamos este autómata a gramática, obtenemos las siguientes reglas de producción:

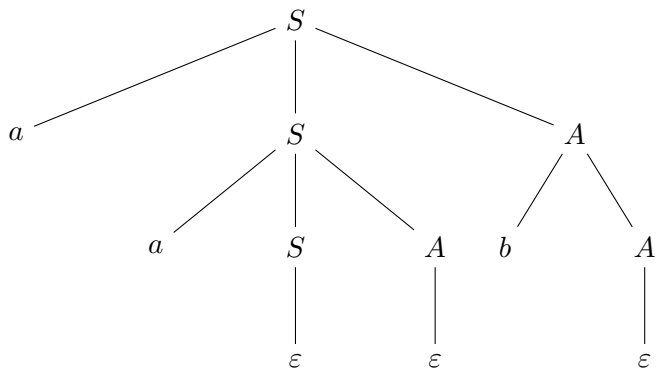
$$S \to aA \mid bC \mid \varepsilon$$
$$A \to aF \mid bB$$
$$B \to aS \mid bF$$
$$C \to aD \mid bF$$
$$D \to aA \mid bE \mid \varepsilon$$
$$E \to aD \mid bC \mid \varepsilon$$
$$F \to aF \mid bF$$

Esta gramática puede ser simplificada, ya que tiene muchas producciones inútiles, pero ese no es el objetivo de este ejercicio.

Al haber encontrado esta gramática, se puede ver que cualquier palabra que se forme solo tiene un posible camino, ya que cada vez se va insertando un símbolo en vez de muchos de golpe, como pasaba al principio. Por tanto, ya que esta gramática no es ambigua, hemos demostrado que el lenguaje no es inherentemente ambiguo.

c) La gramática es ambigua, ya que se puede obtener la cadena aab con dos árboles distintos, los cuáles son:





Como se puede ver claramente, al haber dos árboles para una misma palabra, la gramática pasa a ser ambigua.

Para demostrar que el lenguaje no es inherentemente ambiguo se va a buscar una gramática que no lo sea. Para poder encontrarla más fácilmente, vamos a buscar un patrón en la gramática.

Parece ser que la gramática genera o bien la palabra vacía, o bien uno o más símbolos a seguidos de cero o más símbolos b.

Por tanto, definimos la nueva gramática como una cuádrupla $G = (V, T, P, S)$, donde V son las variables, T los símbolos terminales, P el conjunto de reglas de producción y S el estado inicial. Los conjuntos serían los siguientes:

$$V = \{S, A, B\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$P = \{S \to aA \mid \varepsilon,\ A \to aA \mid bB \mid \varepsilon,\ B \to bB \mid \varepsilon\}$$
$$S = \{S\}$$

Como se puede comprobar, esta gramática no es ambigua, ya que permite generar primero o la palabra vacía o un símbolo a. Después se pueden generar tantos símbolos a como se quieran y si se desea se pueden generar después tantos símbolos b como se desee.

Al haber encontrado una gramática no ambigua, se ha demostrado que el lenguaje no es inherentemente ambiguo.

1.4.3 Ejercicio 3

Enunciado. Encontrar el autómata que acepte el siguiente lenguaje L.

$$L = \{0^i 1^j 0^k 1 \mid i + k = j;\ i, j, k \in \mathbb{N}\}$$

Una vez diseñado el autómata, calcular la gramática libre de contexto que acepta L eliminando posibles producciones inútiles que hayan ido apareciendo durante el proceso.

Solución

2 Ejercicios voluntarios

Se han realizado los ejercicios voluntarios de la semana del 24 de septiembre a la semana del 22 de octubre (sin haber realizado el ejercicio de implementación). Sin embargo, por falta de tiempo, no se han podido pasar a ordenador.