

Вопросы по курсу МЧА ч.2

1. Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций
2. Разностные уравнения (РУ) 1-го и 2-го порядка. Общее решение
3. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.
Характеристическое уравнение
4. Краевая задача для РУ-2. Хорошо обусловленные задачи
5. Достаточный признак и критерий хорошей обусловленности
6. Методы решения краевой разностной задачи для ОДУ
7. Разностные схемы и их построение, сетки, нормы в пространстве сеточных функций и невязок
8. Первое дифференциальное приближение.
9. Параболическая форма первого дифференциального приближения.
10. Устойчивость в пространстве L_2 и метод Фурье.
11. Решение задачи теплопроводности методом разностных аппроксимаций
12. Решение волнового уравнения методом разностных аппроксимаций
13. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом разностных аппроксимаций
14. Разностные схемы. Сходимость разностных схем.
15. Аппроксимация разностными схемами. Порядок аппроксимации
16. Возмущенная краевая задача. Устойчивость разностных схем
17. Сходимость разностных схем как следствие аппроксимации и устойчивости. Примеры
18. Сходимость, аппроксимация и устойчивость для краевой задачи УЧП
19. Примеры применения спектрального признака устойчивости для исследования явной и неявной разностной аппроксимации уравнения теплопроводности.
20. Спектральный признак устойчивости. Примеры его применения для исследования разностных методов задачи Коши для гиперболического уравнения.
21. Разностные аппроксимации производных первого порядка.
22. Разностные аппроксимации производных второго порядка.
23. Классификация разностных схем. Понятие шаблона. Примеры шаблонов.
24. Явная разностная схема для одномерного уравнения теплопроводности.
25. Неявная РС для уравнения теплопроводности.
26. РС для волнового уравнения.
27. Понятие о методе прямых для волнового уравнения.
28. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с двумя пространственными переменными.
29. Неявная РС для уравнения теплопроводности с двумя пространственными переменными.
30. Схема переменных направлений.

- 31.Схемы расщеплений по пространственным переменным.
- 32.Редукция краевой задачи к вариационной задаче.
- 33.Метод Рунге.
- 34.МКЭ в одномерном случае двухточечная краевая задача.
- 35.Пример решения одномерной задачи для стержня методом конечных элементов
- 36.Конечные элементы для многомерных областей
37. Аппроксимирующие функции элементов Одномерный симплекс-элемент
38. Аппроксимирующие функции элементов Двумерный симплекс-элемент
- 39.Объединение конечных элементов в ансамбль
- 40.Определение вектора узловых значений функций вариационным методом.
- 41.Определение вектора узловых значений функций методом Галеркина.
- 42.Определение вектора узловых значений функций методом наименьших квадратов
- 43.Различные виды интегро-дифференциальных уравнений
- 44.Интегро-дифференциальные уравнения с интегральным оператором типа Вольтерра.
- 45.Интегро-дифференциальные уравнения с интегральным оператором типа Фредгольма
- 46.Существование и единственность решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода.
47. Резольвента для уравнения Вольтерра.
- 48.Решения интегральных уравнений Фредгольма методом замены интеграла квадратурной суммой.
- 49.Решения интегральных уравнений Вольтерра методом замены интеграла квадратурной суммой,
- 50.Приближенные решение интегральных уравнений посредством замены ядра вырожденным
51. Метод последовательных приближений,
- 52.. Метод Бубнова – Галеркина

1. Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций

4.2.2. Конечно-разностный метод решения краевой задачи

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[a, b]$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4.35)$$

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1. \quad (4.36)$$

Введем разностную сетку на отрезке $[a, b]$ $\Omega^{(h)} = \{x_k = x_0 + hk\}, k = 0, 1, \dots, N$, $h = (b - a) / N$. Решение задачи (4.35), (4.36) будем искать в виде сеточной функции $y^{(h)} = \{y_k, k = 0, 1, \dots, N\}$, предлагая, что решение существует и единственно. Введем разностную аппроксимацию производных следующим образом:

$$\begin{aligned} y'_k &= \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2); \\ y''_k &= \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2); \end{aligned} \quad (4.37)$$

Подставляя аппроксимации производных из (4.37) в (4.35), (4.36) получим систему уравнений для нахождения y_k :

$$\begin{cases} y_0 = y_a \\ \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p(x_k) \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q(x_k)y_k = f(x_k), k = 1, N-1 \\ y_N = y_b \end{cases} \quad (4.38)$$

Приводя подобные и учитывая, что при задании граничных условий первого рода два неизвестных y_0, y_N уже фактически определены, получим систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$\begin{cases} (-2 + h^2 q(x_1))y_1 + (1 + \frac{p(x_1)h}{2})y_2 = h^2 f(x_1) - (1 - \frac{p(x_1)h}{2})y_a \\ (1 - \frac{p(x_k)h}{2})y_{k-1} + (-2 + h^2 q(x_k))y_k + (1 + \frac{p(x_k)h}{2})y_{k+1} = h^2 f(x_k) \\ (1 - \frac{p(x_{N-1})h}{2})y_{N-1} + (-2 + h^2 q(x_{N-1}))y_{N-1} = h^2 f(x_{N-1}) - (1 + \frac{p(x_{N-1})h}{2})y_b \end{cases}, k=2, \dots, N-2$$

(4.39)

Для системы (4.39) при достаточно малых шагах сетки h и $q(x_k) < 0$ выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$|-2 + h^2 q(x_k)| > \left|1 - \frac{p(x_k)h}{2}\right| + \left|1 + \frac{p(x_k)h}{2}\right|, \quad (4.39)$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого и второго порядков.

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h);$$

$$y'_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + O(h) \quad (4.40)$$

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2);$$

$$y'_N = \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h} + O(h^2); \quad (4.41)$$

В случае использования формул (4.40) линейная алгебраическая система аппроксимирует дифференциальную задачу в целом только с первым порядком (из-за аппроксимации в граничных точках), однако сохраняется трехдиагональная структура матрицы коэффициентов. В случае использования формул (4.41) второй порядок аппроксимации сохраняется везде, но матрица линейной системы не трехдиагональная.

Пример 4.10. Решить краевую задачу
$$\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) + 2y(1) = 0 \end{cases} \quad \text{с шагом } h = 0.2.$$

Здесь $p(x) = x$, $q(x) = 1$, $f(x) = 0$, $N = 5$, $x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1.0$

Во всех внутренних узлах отрезка $[0,1]$ после замены производных их разностными аналогами получим

$$(1 - 0.1x_k)y_{k-1} + (-2.04)y_k + (1 + 0.1x_k)y_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, 4$$

На левой границе $y_0 = 1$, на правой границе аппроксимируем производную односторонней разностью 1-го порядка:

$$\frac{y_5 - y_4}{0.2} + 2y_5 = 0.$$

С помощью группировки слагаемых, приведения подобных членов и подстановки значений x_k и с учетом $y_0 = 1$ получим систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} -2.04y_1 + 1.02y_2 = -0.98 \\ 0.96y_1 - 2.04y_2 + 1.04y_3 = 0 \\ 0.94y_2 - 2.04y_3 + 1.06y_4 = 0 \\ 0.92y_3 - 2.04y_4 + 1.08y_5 = 0 \\ + y_4 - 1.4y_5 = 0 \end{cases}$$

В данной трехдиагональной системе выполнено условие преобладания диагональных элементов и можно использовать метод прогонки (раздел 1.1.2).

В результате решения системы методом прогонки получим следующие значения: $y_5 = 0.2233205$, $y_4 = 0.31265$, $y_3 = 0.43111$, $y_2 = 0.58303$, $y_1 = 0.77191$.

Решением краевой задачи является табличная функция

Таблица 4.17

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_k	1.0	0.77191	0.58303	0.43111	0.31265	0.22332

2. Разностные уравнения (РУ) 1-го и 2-го порядка. Общее решение

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

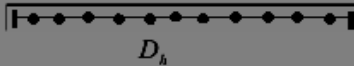
$$U' + AU = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Пусть его решением является функция $U=U(x)$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей с шагом h , то есть построим последовательность $\{x_k\}$:

$$x_0 = a, \quad x_k = x_0 + kh, \quad k = \overline{0, n}, \quad \text{где } h = \frac{b-a}{n}.$$

Множество узлов x_k на отрезке $[a, b]$ образует *сетку* D_h с шагом h .



При этом, любую функцию $g_k \quad k=0, 1, \dots, n$, определенную на сетке D_h , будем называть *сеточной функцией*. В частности, сеточной функцией будет последовательность $U(x_k) \quad k=0, \dots, n$, порожденная решением $U(x)$ дифференциального уравнения.

Заменим производные функции во внутренних узлах их разностными аппроксимациями:

$$U'(x_k) \approx \frac{U(x_k + h) - U(x_k)}{h}.$$

Значение функции U в k -ом узле обозначим

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1}, & k = \overline{1, n-1} \\ U_0, \\ U_n, \end{cases}$$

$$U(x_k) = U_k, \quad \text{а функции } f$$

$$\|U^{(h)}\|_{U_k} = \|U^{(h)}\| = \max_{k=\overline{0, n}} |U_k|$$

соответственно через $f_k = f(x_k)$. В новых обозначениях получим разностное уравнение:

$$\frac{U_{k+1} - U_k}{h} + AU_k = f_k.$$

С большей точностью первую производную можно также представить в виде:

$$U'(x_k) \approx \frac{U(x_k + h) - U(x_k - h)}{2h}, \quad \text{тогда уравнение будет иметь вид}$$

$$\frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h} + AU_k = f_k.$$

Рассмотрим теперь на данном отрезке дифференциальное уравнение второго порядка

$$U'' + AU' + BU = f(x).$$

Аналогично, заменив производные их разностными аппроксимациями, получим:

$$\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{h^2} + A \frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h} + BU_k = f_k.$$

Преобразуем полученное разностное уравнение:

$$\left(\frac{A}{2h} + \frac{1}{h^2}\right)U_{k+1} + \left(B - \frac{2}{h^2}\right)U_k + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{A}{2h}\right)U_{k-1} = f_k.$$

Полученные разностные уравнения будем также называть *разностными схемами* для соответствующих дифференциальных уравнений.

Таким образом, мы перешли от дифференциальных уравнений к разностным уравнениям вида:

$$a_k U_k + b_k U_{k+1} = f_k \quad (11.1)$$

и

$$a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k, \quad (11.2)$$

где a_k, b_k, c_k – некоторые коэффициенты. Уравнения (11.1) и (11.2) будем называть соответственно *линейными разностными уравнениями первого и второго порядка* (при условии, что $a_k, b_k \neq 0$ в (11.1) и $a_k, c_k \neq 0$ в (11.2)). Заметим, что при переходе от дифференциального уравнения к разностному уравнению, порядок уравнения не обязательно сохраняется.

Рассмотрим свойства линейных разностных уравнений (11.1) и (11.2), абстрагируясь от дифференциальных уравнений, их породивших. Их решениями будем называть сеточные функции $\{U_k\}$, удовлетворяющие соответствующим уравнениям при $k=0, 1, \dots, n$.

Очевидно, что для однозначного решения разностного уравнения (11.1) необходимо знать начальное значение сеточной функции U_k в нулевом узле, то есть U_0 . Для решения разностного уравнения (11.2) необходимо знать два начальных значения U_0, U_1 .

Назовем разностное уравнение (11.1) *линейным разностным уравнением первого порядка*, а уравнение (11.2) *линейным разностным уравнением второго порядка*.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (11.1):

$$a_k U_k + b_k U_{k+1} = 0. \quad (11.3)$$

Легко видеть, что если $\{U_k^{(1)}\}$ его решение, то решением также будет и сеточная функция $\{\alpha U_k^{(1)}\}$. Тогда, очевидно, что любое другое решение уравнения (11.3) можно получить при определенном численном значении α . То есть, если известно $\{\alpha U_k^{(1)}\}$, то любое решение \tilde{U}_k представимо в виде $\tilde{U}_k = \alpha_0 U_k^{(1)}$.

Таким образом, $\{\alpha U_k^*\}$ представляет собой общее решение уравнения (11.3), из которого получаются выбором постоянной α все остальные решения. Легко видеть, что общим решением разностного уравнения (11.1) будет сеточная функция $U_k = U_k^* + \alpha U_k^{(1)}$, где U_k^* произвольное решение уравнения (11.1).

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (11.2):

$$a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = 0. \quad (11.4)$$

Пусть $\{U_k^{(1)}\}$ и $\{U_k^{(2)}\}$ – решения (11.4), причем векторы $(U_0^{(1)}, U_1^{(1)})$ и $(U_0^{(2)}, U_1^{(2)})$ – линейно независимы, т. е.

$$\begin{vmatrix} U_0^{(1)} & U_1^{(1)} \\ U_0^{(2)} & U_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Подстановка показывает, что при любых α и β сеточная функция $U_k = \alpha U_k^{(1)} + \beta U_k^{(2)}$ является тоже решением. Покажем, что $U_k = \alpha U_k^{(1)} + \beta U_k^{(2)}$ — общее решение, т.е. любое решение $\{U_k^*\}$ можно представить в виде

$$U_k^* = \alpha_0 U_k^{(1)} + \beta_0 U_k^{(2)}.$$

Действительно, полагая

$$(U_0^*, U_1^*) = \alpha(U_0^{(1)}, U_1^{(1)}) + \beta(U_0^{(2)}, U_1^{(2)}),$$

получим

$$\begin{cases} \alpha U_1^{(1)} + \beta U_1^{(2)} = U_1^* \\ \alpha U_1^{(1)} + \beta U_1^{(2)} = U_1^* \end{cases}$$

Поскольку

$\Delta \neq 0$, то решение системы $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ существует и является единственным.

Легко убедиться также, что, если U_k^* — частное решение уравнения (11.2), то общим решением уравнения (11.2) будет:

$$U_k = U_k^* + \alpha U_k^{(1)} + \beta U_k^{(2)}.$$

Теперь рассмотрим линейные однородные разностные уравнения с постоянными коэффициентами:

$$aU_{k-1} + bU_k + cU_{k+1} = 0, \quad (11.5)$$

где $a, c \neq 0$.

Составим уравнение $a + bq + cq^2 = 0$, которое будем называть характеристическим для (11.5). Найдём его корни q_1 и q_2 . Возможны следующие ситуации:

1). Пусть $q_1 \neq q_2$. Тогда подстановкой легко проверить, что $U_k^{(1)} = q_1^k$, $U_k^{(2)} = q_2^k$ — решения. Здесь q_1 и q_2 — действительные числа, отличные от нуля.

Подставив в уравнение (11.5), получим:

$$aq_1^k + bq_1^{k+1} + cq_1^{k+2} = 0 \text{ или } a + bq_1 + cq_1^2 = 0.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 \\ 1 & q_2 \end{vmatrix} = q_1 - q_2 \neq 0,$$

то общее решение имеет вид $U_k = \alpha q_1^k + \beta q_2^k$.

2. Пусть $q_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то есть корни комплексные. Тогда

$$U_k = q_1^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi).$$

Это комплексное решение. Отделяя его действительную и мнимую части, получим действительные частные решения

$$\begin{cases} U_k^{(1)} = r^k \cos k\varphi \\ U_k^{(2)} = r^k \sin k\varphi. \end{cases}$$

Значит, общее решение совпадает с линейной комбинацией $U_k = \alpha r^k \cos k\varphi + \beta r^k \sin k\varphi$.

3. Пусть $q_1 = q_2 = q$, то есть корни кратные.

Очевидно $U_k = q^k$ будет решением. Найдем второе решение.

Положим $\tilde{U}_k = y_k q^k$ и подставим в (11.5):

$$ay_{k-1}q^{k-1} + by_kq^k + cy_{k+1}q^{k+1} = 0,$$

откуда

$$ay_{k-1} + by_kq + cy_{k+1}q^2 = 0.$$

По теореме Виета для корней квадратного уравнения получаем

$$-\frac{b}{c} = 2q, \quad \frac{a}{c} = q^2. \quad (11.6)$$

Поделим квадратное уравнение на c :

$$\frac{a}{c}y_{k-1} + \frac{b}{c}ay_k + y_{k+1}q^2 = 0.$$

Тогда, согласно (11.6), получим:

$$q^2 y_{k-1} + 2q^2 y_k + q^2 y_{k+1} = 0$$

или

$$y_{k-1} - y_k = y_k - y_{k+1}.$$

Решением такого разностного уравнения будет любая арифметическая прогрессия, в том числе последовательность целых чисел $y_k = k$. То есть

$$\tilde{U}_k = kq^k.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} U_0 & U_1 \\ \tilde{U}_0 & \tilde{U}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & q \\ 0 & q \end{vmatrix} = q \neq 0,$$

то общим решением будет

$$U_k = \alpha q^k + \beta kq^k.$$

3. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/fe/fe-toc1.htm>

<http://wire.getdt.ru/docs/48/index-517967.html>

Выражение:

$$b_0 \Delta^n x[k] + b_1 \Delta^{n-1} x[k] + \dots + b_n x[k] = f[k] \quad (1)$$

называется разностным уравнением.

Здесь b_i - заданные постоянные коэффициенты, а $f[k]$ - заданная дискретная функция.

Уравнение (1) устанавливает связь между дискретной функцией и ее разностями.

Если воспользоваться:

$$\Delta^m x[k] = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i x[k + m - i] \quad (2)$$

То уравнение (1) представим в виде:

$$a_0 x[k + n] + a_1 x[k + n - 1] + \dots + a_n x[k] = f[k] \quad (3)$$

Где a_i - постоянные коэффициенты, связанные с b_i формулой:

$$a_i = \sum_{l=0}^i (-1)^{i-l} C_{n-l}^{i-l} b_l \quad (4)$$

Число n в выражении (3) – порядок разностного уравнения.

Дискретная функция $x[k]$, которая обращает разностное уравнение (3) в тождество, называется решением разностного уравнения.

Если $f[k] \equiv 0$, то получим однородное разностное уравнение:

$$a_0 x[k+n] + a_1 x[k+n-1] + \dots + a_n x[k] = 0 \quad (5)$$

Уравнение вида:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0 \quad (6)$$

называется характеристическим уравнением заданного разностного уравнения. Общее решение разностного уравнения (3) состоит из двух частей:

1) Из общего решения соответствующего линейного однородного уравнения, которое зависит от n постоянных и определяется формулой:

$$x_0[k] = x(k, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (7)$$

2) Из частного решения неоднородного разностного уравнения $x_n[k]$, которое определяется видом правой части $f[k]$. И, следовательно, общее решение линейного неоднородного разностного уравнения определяется равенством:

$$x[k, c_1, c_2, \dots, c_n] = x_0[k] + x_n[k] \quad (8)$$

4. Краевая задача для РУ-2. Хорошо обусловленные задачи

Рассмотрим задачу вида:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k, & k = \overline{1, n-1}, \\ U_0 = \varphi, & U_n = \psi, \end{cases} \quad (11.7)$$

называемую разностной краевой задачей (РКЗ).

Данную задачу можно коротко переписать в виде

$$\begin{cases} LU_k = f_k, & k = \overline{1, n-1}, \\ U_0 = \varphi, & U_n = \psi, \end{cases}$$

где линейный разностный оператор LU_k или $L(U_k)$ имеет вид

$$LU_k = a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1}.$$

Пример 1. Найти решение РКЗ $U_{k-1} - U_k + U_{k+1} = 0$, $k = 1, \dots, 299$,

где $U_0 = 0$, $U_{300} = 1$.

Запишем характеристическое уравнение $1 - q + q^2 = 0$. Отсюда

$q = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, и общее решение разностного уравнения имеет вид:

$$U_k = \alpha \cos \frac{k\pi}{3} + \beta \sin \frac{k\pi}{3}.$$

Подставляя значения U_0 и U_n , получаем $\alpha = 0$, $\beta = 1$. То есть рассматриваемая краевая задача не имеет решения.

Возьмем другие граничные условия

$$U_0 = 0, \quad U_{300} = 0.$$

Решая задачу с данными условиями, получим, что решений бесконечно много.

То есть в отличие от задачи Коши для разностного уравнения, в случае РКЗ возникают проблемы:

- 1) существования решения;
- 2) единственности решения.

Выделим класс задач РКЗ, которые эффективно решаются.

Пусть $|a_k|, |b_k|, |c_k| < K$, где $K = \text{const} > 0$.

Задачу РКЗ будем называть *хорошо обусловленной*, если она имеет решение, причем единственное, при любых значениях φ, ψ, f_k , и, кроме того, это решение $\{U_k\}$ удовлетворяет соотношению:

$$|U_k| \leq M \max \{|\varphi|, |\psi|, \max_i |f_i|\}, \quad (11.8)$$

где $M = \text{const}$, не зависящая от n .

Покажем, что условие (8) фактически означает слабую чувствительность задачи к ошибкам в граничных условиях и в правой части.

Рассмотрим возмущенную задачу:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k + \Delta f_k \\ U_0 = \varphi + \Delta\varphi, U_n = \psi + \Delta\psi. \end{cases}$$

Возмущенное решение имеет вид $U_k + \Delta U_k$, где ΔU_k – ошибка решения.

Оценим ΔU_k :

$$L(U_k + \Delta U_k) = f_k + \Delta f_k,$$

$$L(U_k) + L(\Delta U_k) = f_k + \Delta f_k.$$

Тогда

$$\begin{cases} L(\Delta U_k) = \Delta f_k, \\ \Delta U_0 = \Delta\varphi, \Delta U_n = \Delta\psi. \end{cases}$$

Из условия (11.8) получаем оценку:

$$|\Delta U_k| \leq M \max\{|\Delta\varphi|, |\Delta\psi|, \max_i |\Delta f_i|\}.$$

Следовательно, ошибка в решении ограничена последним соотношением и при уменьшении шага ошибка не увеличивается. Растет лишь число узлов.

Сформулируем теперь достаточный признак хорошей обусловленности.

5. Достаточный признак и критерий хорошей обусловленности

Теорема 1 (достаточный признак хорошей обусловленности). Пусть выполнимо следующее условие:

$$|b_k| \geq |a_k| + |c_k| + \delta, \quad \delta > 0. \quad (11.9)$$

Тогда задача РКЗ (11.3) хорошо обусловлена, а условие (8) имеет следующий вид:

$$|U_k| \leq \max\{|\phi|, |\psi|, \frac{1}{\delta} \max_i |f_i|\}. \quad (11.10)$$

Доказательство. Докажем сначала, что если РКЗ имеет решение, то это решение удовлетворяет (11.10). Пусть есть некоторое решение U_k и пусть $\max_k |U_k| = |U_m|$.

Возможны следующие ситуации:

1) $m=0$ или $m=n$. Тогда (11.10) – тривиально выполняются.

2) $0 < m < n$. Тогда

$$b_m U_m = -a_m U_{m-1} - c_m U_{m+1} + f_m,$$

следовательно

$$|b_m| \cdot |U_m| = |b_m U_m| = |-a_m U_{m-1} - c_m U_{m+1} + f_m| \leq |a_m| \cdot |U_m| + |c_m| |U_m| + |f_m|.$$

Поскольку

$$|U_{m-1}| \leq |U_m|, \quad |U_{m+1}| \leq |U_m|,$$

то, принимая во внимание (11.9), получаем

$$|U_m| \leq \frac{|f_m|}{|b_m| - |a_m| - |c_m|} \leq \frac{|f_m|}{\delta}.$$

То есть $|U_k| \leq |U_m| \leq \frac{1}{\delta} \max_k |f_k|$ для всех $k = \overline{0, n}$. Следовательно, соотношение (11.10) справедливо.

Теперь покажем, что решение задачи РКЗ (11.9) существует и единственно.

При $k = \overline{0, n}$ задача РКЗ сводится к неоднородной линейной системе из $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестным. Она имеет единственное решение и то, тогда и только тогда, если соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. Соответствующая однородная система имеет вид:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = 0 \\ U_0 = 0, \quad U_n = 0. \end{cases}$$

Тогда по условию (11.9) для этой системы $|U_k| \leq 0$. Значит, $U_k \equiv 0$.

То есть однородная система имеет только нулевое решение, и, значит, РКЗ имеет единственное решение.

Теорема доказана.

Теорема 2 (критерий хорошей обусловленности). Пусть

$a_k = a, \quad b_k = b, \quad c_k = c$. Тогда задача является хорошо обусловленной тогда и

только тогда, когда корни q_1, q_2 характеристического уравнения удовлетворяют условиям $|q_1| < 1, |q_2| > 1$.

6. Методы решения краевой разностной задачи для ОДУ

Методы решения РКЗ

1. Метод прогонки.

Так как РКЗ представляет собой линейную трехдиагональную систему из $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными, то для ее решения можно применить метод прогонки. Он обладает рядом преимуществ.

Достоинства:

а) число арифметических операций при использовании данного метода составляет $O(n)$, т. е. не превосходит Kn , где $K = \text{const}$.

б) при выполнении условия преобладания диагональных элементов $|b_k| \geq |a_k| + |c_k| + \delta$ метод прогонки оказывается слабо чувствительным к ошибкам вычислений: вычислительная погрешность не накапливается с ростом числа узлов n .

2. Метод стрельбы.

Рассмотрим РКЗ:

$$\begin{cases} a_k U_{k-1} + b_k U_k + c_k U_{k+1} = f_k, & k = 0, \dots, n \\ U_0 = \varphi, & U_n = \psi \end{cases}$$

Вначале находим частное решение, решая задачу Коши с начальными условиями:

$$U_0 = \varphi, \quad U_1 = 0, \quad \Rightarrow \{U_k^{(1)}\}.$$

Затем находим второе частное решение

$$U_0 = \varphi, \quad U_1 = 1, \quad \Rightarrow \{U_k^{(2)}\}.$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} \varphi & 0 \\ \varphi & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

общее решение можно записать в виде линейной комбинации этих двух частных решений

$$U_k = \sigma U_k^{(1)} + (1 - \sigma) U_k^{(2)}.$$

Нужно выбрать σ так, чтобы выполнялись граничные условия:

$$U_n = \sigma U_n^{(1)} + (1 - \sigma) U_n^{(2)} = \psi.$$

$$\text{Отсюда: } \sigma = \frac{\psi - U_n^{(2)}}{U_n^{(1)} - U_n^{(2)}}.$$

Достоинством метода стрельбы является его исключительная простота. Однако он очень неустойчив. Приведем пример.

Пример 2. Рассмотрим РКЗ

$$\begin{cases} 5U_{k-1} - 26U_k + 5U_{k+1} = 0 \\ U_0 = \varphi, \quad U_n = \psi \end{cases}.$$

Данная РКЗ хорошо обусловлена. Это легко проверить, используя критерий хорошей обусловленности. Хорошая обусловленность означает устойчивость к ошибкам в правой части и начальных условиях.

Однако уже при вычислении $1-\sigma$ появляется ошибка округления ε . Можно показать, что данная ошибка имеет экспоненциальный рост при уменьшении шага h , именно $\Delta U_n \sim 5^n \cdot \varepsilon$.

Отсюда видно, что уменьшение шага вычисления не дает положительного результата в виду роста ошибок. То есть, фактически метод стрельбы вследствие его неустойчивости не может иметь широкого применения.

7. Разностные схемы и их построение, сетки, нормы в пространстве сеточных функций и невязок

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию двух переменных $U=U(x,y)$ в области D (см. рис.12.1), лежащей на плоскости Oxy . Необходимо аппроксимировать ее частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

с помощью разностных производных.

Разобьем область D с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с шагом h и l соответственно. То есть, проведем прямые $x = x_i$, $y = y_j$, где

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}$$

$$y_j = y_0 + jl, \quad j = \overline{0, m}.$$

Точки их пересечения образуют сетку на плоскости.

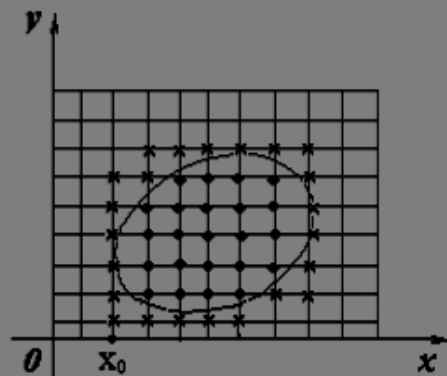


Рис. 12.1

Положим $U_{i,j} = U(x_i, y_j)$. Очевидно, возможны различные аппроксимации частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) &\approx \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{2h} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}, \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) &\approx \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i, y_j)}{h} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h}, \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) &\approx \frac{U(x_i, y_j + l) - U(x_i, y_j - l)}{2h} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h}.\end{aligned}$$

Их называют соответственно левой, правой и центральной разностными производными.

Аналогично получаются аппроксимации для производной $\frac{\partial U}{\partial y}$. Для вторых производных можно ввести аппроксимации

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\approx \frac{U(x_i + h, y_j) - 2U(x_i, y_j) + U(x_i - h, y_j))}{h^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)'_y \approx \left(\frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{2h} \right)'_y \approx \\ &\approx \frac{U(x_i + h, y_j + l) - U(x_i - h, y_j + l)}{2h} - \frac{U(x_i + h, y_j - l) - U(x_i - h, y_j - l)}{2h} = \\ &= \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{4hl}.\end{aligned}$$

Пусть $U=U(x,y)$. Рассмотрим в области D уравнение в частных производных вида:

$$a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{31} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{33} U = g(x, y) \quad (12.1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ – некоторые числовые коэффициенты, $g(x,y)$ – непрерывная в области D функция. Будем рассматривать уравнение (12.1) совместно с граничным условием

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (12.2)$$

где Γ – контур, ограничивающий область D .

Задачу (12.1), (12.2) будем называть дифференциальной краевой задачей и записывать коротко в виде

$$LU = f, \quad (12.3)$$

где

$$LU = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{31} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{33} U & \text{при } (x, y) \in D \\ U|_{\Gamma} & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} g(x, y) & \text{при } (x, y) \in D \\ \varphi(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$U = U(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных.

Заменяя частные производные во внутренних узлах сетки их разностными аппроксимациями, получим следующую разностную схему дифференциального уравнения (12.1)

$$a_{11} \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + a_{12} \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2lh} + \\ + a_{22} \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} + a_{31} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + a_{32} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2l} + a_{33} U_{i,j} = g_{i,j} \quad (12.4)$$

где $U_{i,j} = U(x_i, y_j)$, $g_{i,j} = g(x_i, y_j)$.

Каждый узел (x_i, y_j) , лежащий внутри области, будем называть внутренним и множество внутренних узлов обозначим D^* . Узлы, лежащие на контуре Γ (если они есть) и узлы, окаймляющие контур Γ извне, будем называть граничными и обозначим их совокупность Γ^* (см. рис. 12.1).

Аппроксимируем граничные условия (2), полагая

$$U_{ij} = \varphi_{ij}^* \text{ для } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \quad (12.5)$$

где φ_{ij}^* – значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Таким образом, мы получили разностную краевую задачу (12.4), (12.5), соответствующую дифференциальной краевой задаче (12.1), (12.2). Задачу (12.4), (12.5) называют также разностной схемой задачи (12.1), (12.2). В ней неизвестными являются всевозможные значения U_{ij} , соответствующие внутренним узлам. Отметим, что по существу задача (12.4), (12.5) представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных U_{ij} .

Обычно выбирают $l = r(h)$, где r – некоторая функция, или $l = rh$, где r – постоянная. Совокупность всех узлов обозначим

$$D_h = D^* \cup \Gamma^*$$

и будем называть сеткой в области D .

Функцию $U^{(h)}$, определенную на сетке D_h , будем называть сеточной. Т.е. это функция, которая ставит в соответствие каждому узлу $(x_i, y_j) \in D_h$ число $U(x_i, y_j) = U_{ij}$.

Обозначим через U_h пространство всех сеточных функций на сетке D_h и введем в нем норму сеточной функции $U^{(h)}$, полагая

$$\|U^{(h)}\|_{U_h} = \max_{i,j} |U_{ij}^{(h)}|,$$

где максимум берется по всем узлам сетки D_h .

Для краткости будем записывать разностную схему (12.4), (12.5) дифференциальной краевой задачи (12.1), (12.2) в виде операторного уравнения

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}, \quad (12.6)$$

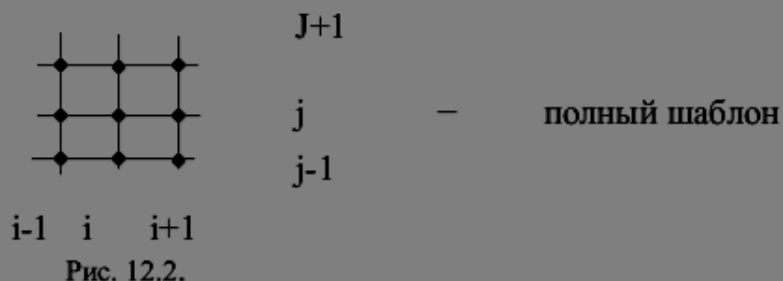
определенного на сетке D_h , где

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} a_{11} \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + a_{12} \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2lh} + \\ + a_{22} \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} + a_{31} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + a_{32} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2l} + a_{33} U_{i,j} \\ \text{при } (x_i, y_j) \in D^* \\ U^{(h)}|_{\Gamma^*}, \text{ при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} g_{ij} = g(x_i, y_j), \text{ при } (x_i, y_j) \in D^* \\ \varphi_{ij}^*, \text{ при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

φ_{ij}^* – значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Для классификации разностных схем используется понятие шаблона. Шаблоном разностной схемы называется геометрическое место узлов сетки, участвующих в разностном уравнении (4) (см. рис.12.2). В зависимости от разностного уравнения шаблон может быть полным и неполным.



Возникают естественные вопросы: Существует ли решение краевой дифференциальной задачи (12.1), (12.2) и единственно ли оно, в случае, если существует? Существует ли решение разностной краевой разностной задачи (12.4), (12.5)? Если существует, будет ли оно единственным? Если разностная краевая задача имеет решение, будет ли оно сходиться при h и l стремящихся к нулю? Если оно сходится, то сходится ли к решению дифференциальной краевой задачи (12.1), (12.2)? Если оно сходится, то с какой скоростью?

Первый вопрос относится к теории дифференциальных уравнений. Ответы на остальные вопросы дает численный анализ.

8. Первое дифференциальное приближение.

Представим, что существует гладкая функция, значения которой в узлах сетки совпадают с решением разностного уравнения. Нам не важно, построена ли эта функция каким-нибудь восполнением разностной функции, важен сам факт ее существования. Предположим дополнительно, что эта функция может быть разложена в ряд Тейлора по крайней мере в некоторой части области решения разностного уравнения. Подставим эту функцию в разностное уравнение и проделаем те же выкладки, которые мы делали раньше при исследовании аппроксимации. Будем считать на первых порах, что мы сохраняем при этом все члены ряда Тейлора.

Рассмотрим к примеру явную разностную схему для линейного обыкновенного уравнения

$$\frac{du}{dt} + cu - f = 0.$$

Подставим в нее функцию $U(t)$.

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + cU^n - f = 0.$$

Раскладывая эту функцию в ряд, получим

$$\frac{dU}{dt} + cU - f + \frac{1}{2!} \frac{d^2U}{dt^2} \tau + \frac{1}{3!} \frac{d^3U}{dt^3} \tau^2 + \dots = 0.$$

Смысл такой подстановки иной, несмотря на то, что выкладки формально совпадают. Раньше мы подставляли в разностное уравнение решение дифференциального уравнения и вычисляли невязку, то есть смотрели, насколько хорошо (или плохо) решение одного уравнения удовлетворяет другому. Теперь мы подставляем функцию, которая заведомо удовлетворяет разностному уравнению, так что невязка равна нулю, но делая выкладки, мы фактически преобразуем уравнение. В подобных случаях уравнения (имеющие одинаковые решения) называются равносильными. Особенность данного преобразования в том, что одно из равносильных уравнений является разностным, а второе - дифференциальным. Тем не менее, равносильность уравнений наводит на мысль, что свойства разностного уравнения переносятся на дифференциальное, которое исследовать иногда может быть проще. Еще проще исследовать уравнение, в котором оставлены только младшие по каждой переменной члены ряда Тейлора, такое уравнение часто бывает близким по форме к известным уравнениям математической физики, так что его свойства известны. Это уравнение называют первым дифференциальным приближением разностного уравнения. Первое дифференциальное приближение уже не равносильно разностному уравнению, но, тем не менее, обычно сохраняет некоторые важные его свойства. Для явной схемы первое дифференциальное приближение имеет вид

$$\frac{dU}{dt} + cU - f + \frac{1}{2!} \frac{d^2U}{dt^2} \tau = 0.$$

В некоторых случаях можно пойти на дальнейшие упрощения. Считая $f = \text{const}$, продифференцируем это уравнение почленно и пренебрежем третьей производной. Это даст возможность выразить вторую производную через первую, подставив ее в уравнение, получим еще одну форму первого дифференциального приближения.

$$\frac{dU}{dt} + cU - f - 0.5c \frac{dU}{dt} \tau = 0.$$

Приведем для сравнения графики решения исходного уравнения $V(t)$, первого дифференциального приближения $U(t)$ и разностного уравнения $u(k)$.

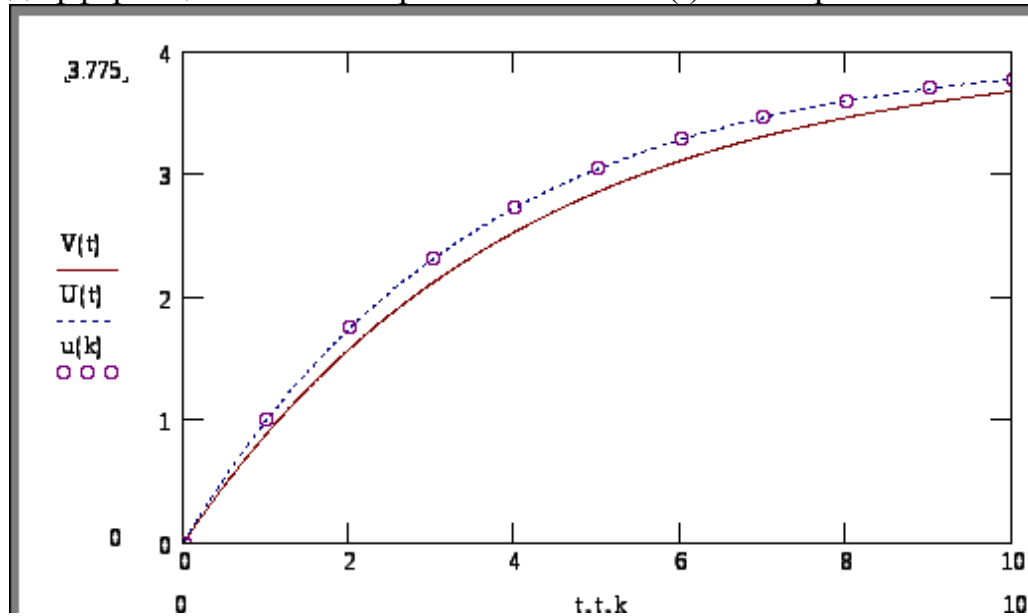


Рис. Точное решение, первое дифференциальное приближение, разностное. Видно, что разностное решение действительно ближе к решению уравнения первого дифференциального приближения.

Подробно свойства дифференциального приближения, в том числе первого, а также различные формы этого приближения, изучены и обоснованы в трудах Ю. И. Шокина (см., например, [29]) и других авторов, достаточно подробный список литературы содержится там же. Ю. И. Шокин отмечает, кстати, что идея использования дифференциального приближения для анализа разностных схем была высказана в 50-х годах А. И. Жуковым. Мне в связи с этим вспоминается, какое сильное впечатление своим умением неординарно взглянуть на вещи произвел на меня в свое время Анатолий Иванович Жуков, в частности, доклад, сделанный им на одной из межобъектовых конференций. В докладе проводился изящный анализ параметрического семейства разностных схем, включающего схемы от КРЕСТа до

схемы Годунова. Он показал, что все отличие схем сводится в конечном случае к той или иной (схемной или искусственной) вязкости.

Мы не будем заниматься вопросами обоснования свойств дифференциального приближения, отсылая интересующихся к названной книге, приведем лишь несколько характерных примеров.

Рассмотрим первое дифференциальное приближение для разностного уравнения, соответствующего обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого приравняем нулю оператор, полученный нами раньше при исследовании аппроксимации:

$$\frac{dU}{dt} + cU - f \pm 0.5 c \frac{dU}{dt} \tau = 0.$$

Знак плюс соответствует неявной схеме, минус - явной. Что видно из этого уравнения? Во первых, видно, что его главные члены совпадают с соответствующими членами исходного дифференциального уравнения. Это означает наличие аппроксимации. Младший член пропорционален первой степени шага сетки, что определяет порядок аппроксимации. Решение уравнения легко выписывается в явном виде, мы не будем этого делать, отметим однако, что знак коэффициента при производной ($1 \pm 0.5 c\tau$) для неявной схемы всегда совпадает со знаком коэффициента при функции (напомним, что коэффициент c мы считаем положительным). Отсюда следует, что решение однородного уравнения является убывающим по величине, то есть решение неоднородного уравнения устойчиво относительно возмущений. Тем самым первое дифференциальное приближение передает свойство безусловной устойчивости неявной разностной схемы. В случае явной схемы при

$$\tau \leq 2/c$$

решение также устойчиво, при нарушении этого неравенства решение однородного уравнения становится растущим, так что малые возмущения в решении неоднородного уравнения неограниченно растут. Условие устойчивости первого дифференциального приближения таким образом совпадают с условиями устойчивости для явной разностной схемы.

Для симметричной схемы первое дифференциальное приближение имеет вид:

$$\frac{dU}{dt} + cU - f - \frac{5}{24} c^2 \frac{dU}{dt} \tau^2 = 0.$$

Раньше мы видели, что разностная схема безусловно устойчива. О первом дифференциальном приближении этого сказать нельзя. Мы столкнулись, таким образом, со случаем, когда свойство устойчивости не сохраняется при переходе к первому дифференциальному приближению.

Рассмотрим устойчивость применительно к уравнению теплопроводности. Для явной схемы первое дифференциальное приближение имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tau - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} h^2 = 0.$$

Здесь младшие члены содержат производные по разным переменным, что затрудняет анализ их влияния на свойства уравнения. Выразим поэтому вторую производную по времени через остальные члены уравнения. Для этого продифференцируем обе части уравнения по времени и подставим в смешанную производную выражение первой производной из исходного уравнения. Выкладки, конечно, должны быть очень громоздкими, но мы ограничимся только главными членами:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}.$$

Подставляя полученное выражение в первое дифференциальное приближение получим новую его форму

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2} \tau - \frac{1}{12} h^2 \right) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0.$$

Легко понять, что если бы мы выполнили выкладки в полном объеме, то в полученном уравнении появились бы члены второго порядка малости. В рамках первого дифференциального приближения мы ими пренебрегаем. Внешне это выглядит так, как будто мы выразили нужную нам производную непосредственно из дифференциального уравнения. На самом деле это не так, функция U здесь другая и мы совершаем эквивалентные (хотя и приближенные) преобразования над уравнениями, содержащими именно эту функцию. Заметим, что не всегда получаемые члены имеют больший порядок.

Для исследования устойчивости нам нужно исследовать поведение возмущений данного уравнения. Поскольку уравнение само является однородным, то возмущения удовлетворяют этому же уравнению. Решение можно искать в виде $U = \exp(\lambda t + i k x)$, тогда $\lambda = -k^2 - (1/2 \tau - 1/12 h^2) k^4$.

Для устойчивости возмущений необходимо, чтобы λ было отрицательным при любых значениях k . Не будем останавливаться на анализе полученного выражения, так как очевидно, что результат никак не коррелирует с условиями устойчивости разностной схемы. Уравнение теплопроводности является еще одним примером, когда первое дифференциальное приближение теряет нужные нам свойства разностной схемы.

Перейдем к уравнениям газовой динамики. Рассмотрим явную схему. Для нее первое дифференциальное приближение имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} h^2 = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h^2 = 0.$$

Заменяя производные по времени, подобно тому, как мы это делали для уравнения теплопроводности, получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} h^2 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h^2 = 0.$$

Решение для возмущений будем искать в виде $U = u \exp(\lambda t + ikx)$, $P = p \exp(\lambda t + ikx)$, тогда характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{\tau}{2} k^2 & ik(1 - \frac{1}{6} h^2 k^2) \\ ik(1 - \frac{1}{6} h^2 k^2) & \lambda - \frac{\tau}{2} k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения имеют положительную вещественную часть

$$\operatorname{Re}(\lambda) = \frac{\tau}{2} k^2.$$

Следовательно, $\exp(\lambda t)$ будет расти, что определяет неустойчивость уравнений первого дифференциального приближения. Явная разностная схема, как мы знаем, также неустойчива. В дифференциальном приближении для неявной схемы, как отмечалось выше, члены первого порядка входят с противоположными знаками. Это приводит к изменению знака $\operatorname{Re}(\lambda)$, что означает безусловную устойчивость уравнений дифференциального приближения.

Таким образом мы видим, что анализ устойчивости с помощью первого дифференциального приближения иногда проще, чем исследование нормы

оператора шага, но не всегда дает правильные результаты. Подробнее условия применимости рассмотрены в упоминавшейся книге Ю. И. Шокина. Там же рассмотрены другие свойства разностных схем, которые можно исследовать с помощью дифференциальных приближений.

9. Параболическая форма первого дифференциального приближения.

12.2. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим одномерный однородный стержень длины L . Пусть $U(x, t)$ – температура в точке стержня с абсциссой x в момент времени t . Из математической физики известно, что распределение температуры в точках стержня в зависимости от времени описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (12.7)$$

Добавим к уравнению естественные граничные условия:

$$\begin{aligned} U(0, t) &= \varphi(t), \\ U(L, t) &= \psi(t), \\ U(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \quad (12.8)$$

которые описывают температуру, измеряемую на концах стержня и начальное распределение температуры в точках стержня.

Построим сетку $x_i = ih$, $i = \overline{0, n}$, $t_j = jl$, $j = \overline{0, m}$, в области D (см. рис.12.3)

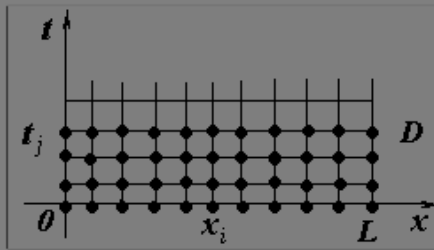


Рис. 12.3.

Заменим в дифференциальном уравнении значения частных производных во внутренних узлах их разностными аппроксимациями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned}$$

Получим разностное уравнение соответствующее исходному дифференциальному уравнению:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l} = a^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2},$$

или

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + a^2 \frac{l}{h^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}). \quad (12.9)$$

Положим

$$g_i = g(x_i), \quad \varphi_j = \varphi(t_j), \quad \psi_j = \psi(t_j).$$

Тогда граничные условия аппроксимируются следующим образом

$$U_{i0} = g_i, \quad U_{0,j} = \varphi_j, \quad U_{nj} = \psi_j. \quad (12.10)$$

Зная значения U_{ij} на нижнем (нулевом) слое и на границе слева и справа, вычисляем $U_{i,1}$ для $i = \overline{1, n-1}$:

$$U_{i,1} = U_{i,0} + \frac{a^2 l}{h^2} (U_{i+1,0} - 2U_{i,0} + U_{i-1,0}).$$

Таким образом, мы получили разностную краевую задачу (12.9), (12.10), которая очевидно имеет решение, причем единственное.

Рассматривая уравнение (12.9), построим его шаблон (см. рис. 12.4):

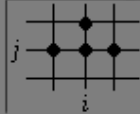


Рис. 12.4.

Вопрос сходимости к решению дифференциальной задачи зависит от соотношения между l и h в уравнении (12.7). Известно, что если

$$\frac{a^2 l}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad l \leq \frac{a^2 l}{h^2},$$

то имеет место сходимость.

Рассмотрим подробнее ситуацию:

$$\frac{a^2 l}{h^2} = \frac{1}{2}.$$

В этом случае уравнение (12.9) существенно упрощается и принимает вид:

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i-1,j}).$$

На рис. 12.5 показан его шаблон.

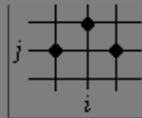


Рис. 12.5.

Пусть $U_{h,l}(x,t)$ - функция двух переменных, график которой построен на основе аппроксимации плоскостями найденных при решении задачи (12.9), (12.10) значений U_{ij} . Можно показать, что при выполнении условия $\frac{a^2 l}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ функция $U_{h,l}(x,t)$ будет сходиться к решению дифференциальной краевой задачи (7), (8) и скорость сходимости будет:

$$|U_{h,l}(x,t) - U(x,y)| = O(h^2).$$

10. Устойчивость в пространстве L_2 и метод Фурье.

11. Решение задачи теплопроводности методом разностных аппроксимаций

Рассмотрим одномерный однородный стержень длины L . Пусть $U(x, t)$ – температура в точке стержня с абсциссой x в момент времени t . Из математической физики известно, что распределение температуры в точках стержня в зависимости от времени описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (12.7)$$

Добавим к уравнению естественные граничные условия:

$$\begin{aligned} U(0, t) &= \varphi(t), \\ U(L, t) &= \psi(t), \\ U(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \quad (12.8)$$

которые описывают температуру, измеряемую на концах стержня и начальное распределение температуры в точках стержня.

Построим сетку $x_i = ih$, $i = \overline{0, n}$, $t_j = jl$, $j = \overline{0, m}$ в области D (см. рис.12.3)

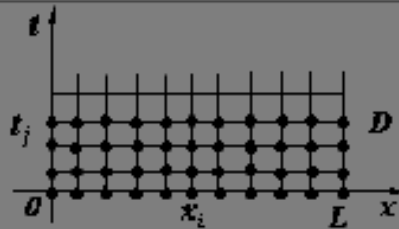


Рис. 12.3.

Заменим в дифференциальном уравнении значения частных производных во внутренних узлах их разностными аппроксимациями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned}$$

Получим разностное уравнение соответствующее исходному дифференциальному уравнению:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l} = a^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2},$$

или

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + a^2 \frac{l}{h^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}). \quad (12.9)$$

Положим

$$g_i = g(x_i), \quad \varphi_j = \varphi(t_j), \quad \psi_j = \psi(t_j).$$

Тогда граничные условия аппроксимируются следующим образом

$$U_{i0} = g_i, \quad U_{0j} = \varphi_j, \quad U_{nj} = \psi_j. \quad (12.10)$$

Зная значения U_{ij} на нижнем (нулевом) слое и на границе слева и справа, вычисляем $U_{i,1}$ для $i = \overline{1, n-1}$:

$$U_{i,1} = U_{i,0} + \frac{a^2 l}{h^2} (U_{i+1,0} - 2U_{i,0} + U_{i-1,0}).$$

Таким образом, мы получили разностную краевую задачу (12.9), (12.10), которая очевидно имеет решение, причем единственное.

Рассматривая уравнение (12.9), построим его шаблон (см. рис. 12.4):

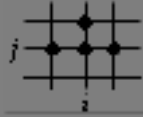


Рис. 12.4.

Вопрос сходимости к решению дифференциальной задачи зависит от соотношения между l и h в уравнении (12.7). Известно, что если

$$\frac{a^2 l}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad l \leq \frac{a^2 l}{h^2},$$

то имеет место сходимость.

Рассмотрим подробнее ситуацию:

$$\frac{a^2 l}{h^2} = \frac{1}{2}.$$

В этом случае уравнение (12.9) существенно упрощается и принимает вид:

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i-1,j}).$$

На рис. 12.5 показан его шаблон.

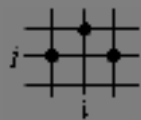


Рис. 12.5.

Пусть $U_{h,l}(x,t)$ - функция двух переменных, график которой построен на основе аппроксимации плоскостями найденных при решении задачи (12.9), (12.10) значений U_{ij} . Можно показать, что при выполнении условия $\frac{a^2 l}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ функция $U_{h,l}(x,t)$ будет сходиться к решению дифференциальной краевой задачи (7), (8) и скорость сходимости будет:

$$|(U_{h,l}(x,t) - U(x,y))| = O(h^2).$$

12. Решение волнового уравнения методом разностных аппроксимаций

Волновое уравнение – дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка, описывающее процесс распространения колебаний в некоторой среде. Мы будем рассматривать малые колебания натянутой струны, закрепленной в двух точках на оси Ox .

Пусть $U(x, t)$ – отклонение точки струны с абсциссой x в момент времени t от положения равновесия. Тогда величина $U(x, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (12.11)$$

Добавим к уравнению граничные условия:

$$U(0, t) = 0, \quad U(L, t) = 0, \quad U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad (12.12)$$

которые отражают тот факт, что концы струны закреплены и дают величину начального отклонения точек струны от положения равновесия и их начальные скорости.

Построим сетку:

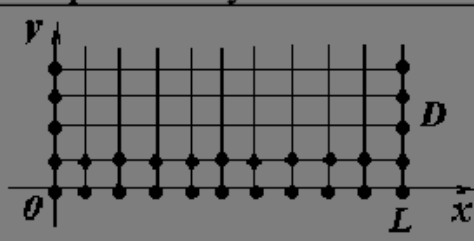


Рис. 12.6.

$$x_i = ih, \quad i = \overline{0, n}, \quad t_j = jl, \quad j = \overline{0, m}.$$

разностными аппроксимациями:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2}.$$

Получим разностное уравнение, отвечающее уравнению

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2} = a^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

или

$$U_{i,j+1} = 2U_{i,j} - U_{i,j-1} + \lambda(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}),$$

$$\text{где } \lambda = \frac{a^2 l^2}{h^2}.$$

Запишем его окончательно в виде:

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \lambda)U_{i,j} - U_{i,j-1} + \lambda(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}). \quad (12.13)$$

Данное разностное уравнение имеет шаблон, изображенный на рисунке 12.7.

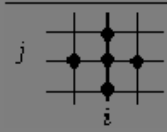


Рис. 12.7.

Получим аппроксимацию граничных условий (12.12):

$$U_{0,j} = 0, \quad U_{n,j} = 0, \quad \forall j = \overline{0, m} \quad (12.14)$$

$$U_{i,0} = \varphi_i, \quad \varphi_i = \varphi(x_0), \quad \psi_i = \varphi(x_i), \quad (12.15)$$

а также

$$\frac{U_{i,1} - U_{i,0}}{l} = \psi_i$$

или

$$U_{i,1} = U_{i,0} - l\psi_i. \quad (12.16)$$

Как легко видеть разностная схема (12.13)-(12.16) имеет единственное решение и легко реализуется последовательным вычислением значений сеточной функции, начиная с нулевого и первого слоя. Можно показать, что приближенное решение $U_{h,l}(x,t)$, полученное из решения разностной схемы (12.13)-(12.16), будет сходиться к решению исходной дифференциальной краевой задачи, если

$$\frac{a^2 l^2}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

причем со скоростью $|(U_{h,l}(x,t) - U(x,y))| = O(h^2)$.

13. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом разностных аппроксимаций

Пусть D область на плоскости Oxy (см. рис.12.1), ограниченная замкнутым контуром Γ . Рассмотрим в этой области однородное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

с граничными условиями

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y).$$

Данную краевую задачу называют задачей Дирихле для уравнения Лапласа. Поскольку переменные x и y имеет одинаковый характер, разобьем область с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с одинаковым шагом $l=h$.

Для каждого внутреннего узла (x_i, y_j) составим разностное уравнение:

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0, \quad (12.17)$$

заменяя значения частных производных в дифференциальном уравнении их разностными аппроксимациями.

Аппроксимируем граничные условия, полагая положительно во всех узлах. Полученное противоречие говорит о том, что решение (12.20) должно быть нулевым.

Следовательно, система (12.18),(12.19) имеет решение, причем единственное.

узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Приводя подобные, получаем разностную схему

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}), \quad (12.18)$$

$$U_{ij} = \varphi_{ij}^* \quad (\text{в граничных узлах}). \quad (12.19)$$

Полученную разностную схему будем рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных U_{ij} во внутренних узлах. При этом линейная система является неоднородной, поскольку некоторые уравнения будут содержать кроме неизвестных еще и определенные значения $U_{ij} = \varphi_{ij}^*$ в граничных узлах. Чтобы система линейных уравнений (12.18), (12.19) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей однородная система имела только нулевое решение. Но соответствующая однородная система линейных уравнений имеет вид

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}), \quad (12.20)$$

$$U_{i,j} = 0 \quad (\text{в граничных узлах}).$$

Допустим, что система (12.20) имеет ненулевое решение. Предположим, что хотя бы в некоторых узлах это решение принимает положительные значения, и положим

$$\overline{U}_{i,j} = \max U_{i,j} = U_{i_0,j_0},$$

где максимум берется по всем внутренним узлам.

Если подставить $i=i_0, j=j_0$ в уравнение (12.20), то максимальное значение U_{i_0,j_0} равно среднему арифметическому значений нашего решения в соседних узлах. Но это возможно только в случае, когда значения в соседних узлах совпадают с максимальным значением U_{i_0,j_0} . Подставим теперь в уравнение (12.20)

$$i=i_0+1, j=j_0 \text{ (} i=i_0, j=j_0+1; i=i_0-1, j=j_0; i=i_0, j=j_0-1 \text{)}$$

и совершенно аналогично получим, что в соседних с данными узлами узлах решение U_{ij} должно принимать также максимальное значение. Поскольку через конечное число шагов мы придем к уравнению, в котором участвуют граничные узлы, получается, что и в граничных узлах значение решения уравнения (12.20) максимально и, следовательно, положительно. Последнее очевидно невозможно в виду нулевых граничных условий. Аналогично рассматривается и случай, когда решение уравнения (12.20) не

14.

Разностные схемы. Сходимость разностных схем.

Пусть D – область на плоскости Oxy , ограниченная контуром Γ . Рассмотрим дифференциальную краевую задачу

$$LU = f, \quad (13.1)$$

где

$$LU = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{33} U & \text{при } (x, y) \in D \\ U|_{\Gamma} & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} g(x, y) & \text{при } (x, y) \in D \\ \varphi(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$U = U(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных.

Разобьем область D с помощью прямых $x_i = x_0 + ih$ $i = \overline{0, n}$, $y_j = y_0 + jl$ $j = \overline{0, m}$. Каждый узел (x_i, y_j) , лежащий внутри области, будем называть внутренним и множество внутренних узлов обозначим D^* . Узлы, лежащие на контуре Γ (если они есть) и узлы, окаймляющие контур Γ извне, будем называть граничными и обозначим их совокупность Γ^* (см. рисунок 13.1).

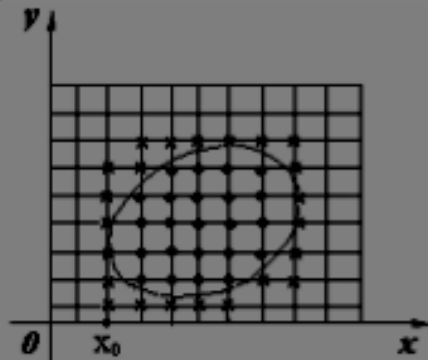


Рис. 13.1

Обычно выбирают $l = r(h)$, где r – некоторая функция, или $l = rh$, где r – постоянная. Совокупность всех узлов обозначают

$$D_h = D^* \cup \Gamma^*$$

и называют сеткой.

Функцию $U^{(h)}$, определенную на сетке D_h , будем называть сеточной. Т.е. это функция, которая ставит в соответствие каждому узлу $(x_i, y_j) \in D_h$ число $U(x_i, y_j) = u_{ij}$.

Обозначим через U_h пространство всех сеточных функций на сетке D_h и введем в нем норму сеточной функции $U^{(h)}$, положим

$$\|U^{(h)}\|_{U_h} = \max_{i,j} |u_{ij}^{(h)}|,$$

где максимум берется по всем узлам сетки D_h .

Построим для дифференциальной краевой задачи (13.1) разностную схему

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}, \quad (13.2)$$

определенную на сетке D_h , где

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} \text{Разностная схема, соответствующая левой части} \\ \text{дифференциального уравнения из (1), при } (x_i, y_j) \in D^* \\ U^{(h)}|_{\Gamma^*}, \text{ при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} g_{ij} = g(x_i, y_j), \text{ при } (x_i, y_j) \in D^* \\ \varphi_{ij}^*, \text{ при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

где φ_{ij}^* — значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Будем предполагать далее, что

- 1) дифференциальная краевая задача (13.1) имеет решение $U = U(x, y)$, причем единственное;
- 2) разностная краевая задача (13.2) имеет единственное решение при любом выборе шага h меньшего некоторого значения h_0 .

Определим сеточную функцию $[U]_h$, значения которой совпадают на сетке D_h со значениями решения $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1) в узлах сетки D_h .

Определение 1. Будем говорить, что разностная схема (13.2) сходится на решении $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1), если

$$\|U^{(h)} - [U]_h\|_{U_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

где $U^{(h)}$ — решение разностной краевой задачи (2). При этом, если

$$\|U^{(h)} - [U]_h\|_{U_h} \leq C_1 h^m,$$

где $C_1 = \text{const}$ не зависящая от h , то имеет место порядок сходимости $O(h^m)$.

15. Аппроксимация разностными схемами. Порядок аппроксимации

В области D , ограниченной контуром Γ , рассмотрим дифференциальную краевую задачу

$$LU = f, \quad (12.21)$$

где

$$LU = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{33} U & \text{при } (x, y) \in D \\ U|_{\Gamma} & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} g(x, y) & \text{при } (x, y) \in D \\ \varphi(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$U = U(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных.

Разобьем область D (см. рис. 12.1) с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с шагом h и l соответственно. То есть, проведем прямые $x = x_i$, $y = y_j$, где

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, & i &= \overline{0, n} \\ y_j &= y_0 + jl, & j &= \overline{0, m}. \end{aligned}$$

Положим $l = r(h)$, где r – некоторая функция, или $l = rh$, где r – постоянная. Определим сетку D_h (совокупность внутренних и граничных узлов) и пространство сеточных функций на сетке D_h с нормой сеточной функции $U^{(h)}$

$$\|U^{(h)}\|_{U_h} = \max_{i,j} |U_{i,j}^{(h)}|,$$

где максимум берется по всем узлам сетки D_h .

Для дифференциальной краевой задачи построим некоторую разностную схему

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}, \quad (12.22)$$

где

$$\left[a_{11} \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + a_{12} \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{h^2} + \right.$$

Определение 2. Будем говорить, что разностная схема (12.22) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (21) на ее решении $U = U(x, y)$, если

$$\left| \mathcal{G}^{(h)} \right|_{\mathcal{K}_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

При этом будем говорить, что имеет место порядок аппроксимации $O(h^\alpha)$, если

$$\left| \mathcal{G}^{(h)} \right|_{\mathcal{K}_h} \leq C_2 h^\alpha,$$

где $C_2 = const$ не зависит от h .

$$J^{(h)} = \begin{cases} \varphi_i^*, & \text{при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

φ_i^* – значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Будем предполагать далее, что

- 1) дифференциальная краевая задача (12.21) имеет решение $U = U(x, y)$, причем единственное;
- 2) разностная краевая задача (12.22) имеет единственное решение при любом выборе шага h меньшего некоторого значения h_0 .

Определим сеточную функцию $[U]_h$, значения которой совпадают на сетке D_h со значениями решения $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (12.21) в узлах сетки D_h .

Определение 1. Будем говорить, что разностная схема (12.22) сходится на решении $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (12.21), если

$$\left\| U^{(h)} - [U]_h \right\|_{\mathcal{K}_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

где $U^{(h)}$ – решение разностной краевой задачи (12.22). При этом, если

$$\left\| U^{(h)} - [U]_h \right\|_{\mathcal{K}_h} \leq C_1 h^\alpha,$$

где $C_1 = const$ не зависящая от h , то имеет место порядок сходимости $O(h^\alpha)$.

Введем пространство сеточных функций F_h , элементами которого являются всевозможные сеточные функции $f^{(h)}$, определенные на сетке D_h . Норму в пространстве F_h определим как

$$\left\| f^{(h)} \right\|_{\mathcal{K}_h} = \max_{(x_i, y_j) \in \mathcal{K}_h} |\varphi_{ij}| + \max_{(x_i, y_j) \in \mathcal{K}_h^*} |g_{ij}|.$$

Рассмотрим невязку

$$\mathcal{G}^{(h)} = L_h[U]_h - f^{(h)},$$

соответствующую решению $U = U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (12.21).

16. Возмущенная краевая задача. Устойчивость разностных схем

Рассмотрим ДКЗ

$$LU=f \quad (11.14)$$

и соответствующую ей разностную схему

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}. \quad (11.15)$$

Пусть $U = U(x)$ - решение задачи (1) и построена сеточная функция $[U]_h$.

Построим невязку

$$\mathcal{G}^{(h)} = L_h[U]_h - f^{(h)}.$$

Напомним, что разностная схема аппроксимирует решение $U(x)$ с порядком m , если справедливо соотношение:

$$\|\mathcal{G}^{(h)}\| \leq Ch^m,$$

где C – постоянная, не зависящая от h .

Рассмотрим возмущенную разностную схему:

$$L_h \cdot Z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}, \text{ где } \varepsilon^{(h)} \in F_n. \quad (11.16)$$

Т.е. схема (11.16) получена добавлением к правой части разностной схемы (11.15) возмущения $\varepsilon^{(h)} \in F_n$. Новое решение обозначим через $Z^{(h)}$.

Определение 3. Разностную схему (11.15) будем называть *устойчивой*, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при всех $0 < h < h_0$ и всех

$\varepsilon^{(h)} \in F_h$ таких, что $\|\varepsilon^{(h)}\| < \delta$, возмущенная разностная схема (11.16) имеет

единственное решение, и это решение удовлетворяет оценке

$$\|Z^{(h)} - U^{(h)}\| \leq C \cdot \|\varepsilon^{(h)}\|, \quad (11.17)$$

где $C = \text{const}$ и не зависит от h .

Необходимо подчеркнуть, что устойчивость не связана с дифференциальной краевой задачей (11.14), а имеет отношение только к разностной краевой задаче (11.15). То есть устойчивость – это внутреннее свойство разностной схемы.

Пусть задачи (11.14) и (11.15) линейны, тогда можно дать равносильное определение устойчивости разностной схемы.

Определение 4. В случае линейной РКЗ разностная схема (11.15) называется *устойчивой*, если существует число $h_0 > 0$ такое, что при любом

$h < h_0$ разностная задача (11.15) имеет единственное решение при любой

правой части $f^{(h)}$, и это решение удовлетворяет соотношению

$$\|U^{(h)}\| \leq C \cdot \|f^{(h)}\|, \quad (11.18)$$

где C – независимая от шага h константа.

Убедимся в равносильности этих определений в случае линейной разностной краевой задачи. Пусть задача (11.15) линейна и устойчива по определению 4.

Наряду с задачей (11.15)

$$L_h U^h = f^{(h)},$$

рассмотрим возмущенную задачу (11.16)

$$L_h Z^h = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)},$$

которая имеет решение, причем единственное. Вычтем (11.15) из (11.16), используя линейность разностного оператора. Получим

$$\begin{aligned} L_h(Z^{(h)} - U^{(h)}) &= \varepsilon^{(h)}, \\ L_h W^{(h)} &= \varepsilon^{(h)}, \end{aligned} \tag{11.19}$$

$$\text{где } W^{(h)} = Z^{(h)} - U^{(h)}.$$

Разностная задача (11.19) имеет единственное решение по определению 4, причем выполнено условие (11.18):

$$\|W^{(h)}\| \leq C \cdot \|\varepsilon^{(h)}\|.$$

С учетом введенных обозначений выполнено также условие (11.17), то есть

$$\|Z^{(h)} - U^{(h)}\| \leq C \cdot \|\varepsilon^{(h)}\|.$$

То есть из определения 4 следует определение 3. Нетрудно показать, что справедливо и обратное.

Замечания.

1) Понятие устойчивости зависит от определения нормы. За счет выбора подходящей нормы можно в известных пределах добиться устойчивости разностной схемы, неустойчивой в другой норме.

2) Понятие хорошей обусловленности представляет собой частный случай устойчивости, когда разностное уравнение линейно, второго порядка и выбор нормы зафиксирован (как выше).

17. Сходимость разностных схем как следствие аппроксимации и устойчивости. Примеры

Теорема 3. Если разностная схема (11.15) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (11.14) на решении $U(x)$ с порядком аппроксимации $O(h^m)$ и разностная схема (11.15) устойчива, то имеет место сходимость разностной схемы (11.15) на решении $U(x)$ с порядком сходимости $O(h^m)$.

Доказательство. Рассмотрим решение $U(x)$ задачи (11.14) и сеточную функцию $[U]_h$. Запишем невязку:

$$\delta \cdot f^{(h)} = L_h[U]_h - f^{(h)}.$$

Преобразуем это выражение в

$$L_h[U]_h = f^{(h)} + \delta \cdot f^{(h)}.$$

Мы получили возмущенную задачу, где $Z^{(h)} = [U]_h$ и $\delta \cdot f^{(h)}$ – возмущение.

Так как разностная схема устойчива, то

$$\|U^{(h)} - [U]_h\| \leq C \cdot \|\delta \cdot f^{(h)}\| \leq CC_1 h^m.$$

Последнее означает, что имеет место сходимость порядка m .

Теорема доказана.

18. Сходимость, аппроксимация и устойчивость для краевой задачи УЧП

Пусть D – область на плоскости Oxy , ограниченная контуром Γ . Рассмотрим дифференциальную краевую задачу

$$LU = f, \quad (13.1)$$

где

$$LU = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{10} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{20} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{00} U & \text{при } (x, y) \in D \\ U|_{\Gamma} & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} g(x, y) & \text{при } (x, y) \in D \\ \varphi(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$U = U(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных.

Разобьем область D с помощью прямых $x_i = x_0 + ih$ $i = \overline{0, n}$, $y_j = y_0 + jh$ $j = \overline{0, m}$. Каждый узел (x_i, y_j) , лежащий внутри области, будем называть внутренним и множество внутренних узлов обозначим D^* . Узлы, лежащие на контуре Γ (если они есть) и узлы, окаймляющие контур Γ извне, будем называть граничными и обозначим их совокупность Γ^* (см. рисунок 13.1).

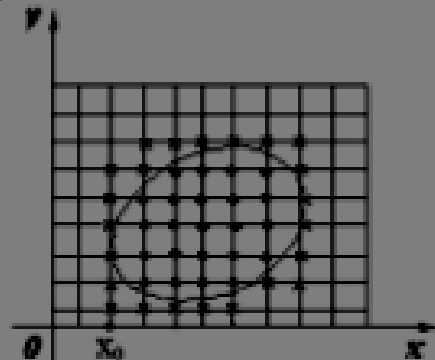


Рис. 13.1

Обычно выбирают $l = r(h)$, где r – некоторая функция, или $l = rh$, где r – постоянная. Совокупность всех узлов обозначают

$$D_h = D^* \cup \Gamma^*$$

и называют сеткой.

Функцию $U^{(h)}$, определенную на сетке D_h , будем называть сеточной. Т.е. это функция, которая ставит в соответствие каждому узлу $(x_i, y_j) \in D_h$ число $U(x_i, y_j) = u_{ij}$.

Обозначим через U_h пространство всех сеточных функций на сетке D_h и введем в нем норму сеточной функции $U^{(h)}$, положим

Определение 2. Будем говорить, что разностная схема (13.2) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (13.1) на ее решении $U = U(x, y)$, если

$$\|\tilde{g}^{(h)}\|_{\bar{D}_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

При этом будем говорить, что имеет место порядок аппроксимации $O(h^m)$, если

$$\|\tilde{g}^{(h)}\|_{\bar{D}_h} \leq C_1 h^m,$$

где $C_1 = const$ не зависит от h .

По аналогии с §12 введем понятие устойчивости разностной схемы. (Отметим, что в данном параграфе мы имеем дело с линейными дифференциальными операторами LU).

Определение 3. Разностная схема (13.2) называется устойчивой, если существует число $h_0 > 0$ такое, что для любого $h < h_0$ разностная краевая задача (2) имеет единственное решение при любой правой части $f^{(h)}$, и это условие удовлетворяет условию

$$\|U^{(h)}\| \leq C \|f^{(h)}\|,$$

где $C = const$ не зависит от h и $f^{(h)}$.

Сформулируем теперь определение сходимости разностной схемы.

Определим сеточную функцию $[U]_h$, значения которой совпадают на сетке D_h со значениями решения $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1) в узлах сетки D_h .

Определение 1. Будем говорить, что разностная схема (13.2) сходится на решении $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1), если

$$\|U^{(h)} - [U]_h\|_{\bar{D}_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

где $U^{(h)}$ – решение разностной краевой задачи (2). При этом, если

$$\|U^{(h)} - [U]_h\|_{\bar{D}_h} \leq C_1 h^m,$$

где $C_1 = const$ не зависящая от h , то имеет место порядок сходимости $O(h^m)$.

Введем пространство сеточных функций F_h , элементами которого являются всевозможные сеточные функции $f^{(h)}$, определенные на сетке D_h .

Норму в пространстве F_h определим как

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{(x_i, y_j) \in \Gamma^h} |f_{ij}^{(h)}| + \max_{(x_i, y_j) \in \bar{D}^h} |g_{ij}^{(h)}|.$$

Введем невязку

$$\tilde{g}^{(h)} = L_h[U]_h - f^{(h)},$$

соответствующую решению $U = U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1).

19.Примеры применения спектрального признака устойчивости для исследования явной и неявной разностной аппроксимации уравнения теплопроводности.

Спектральный признак устойчивости разностных схем

В предыдущем параграфе, представив разностную схему в виде ~~_____~~, получили достаточное условие ее устойчивости как требование равномерной ограниченности норм степеней оператора перехода:

$$\|A^n\| \leq C, \quad (8.11)$$

где постоянная ~~_____~~ не зависит от параметров сетки (в этом и существо дела), так как для каждого фиксированного ~~_____~~, ~~_____~~, ~~_____~~ величина ~~_____~~, естественно, конечна.

В более сложных случаях применить этот признак удастся не всегда.

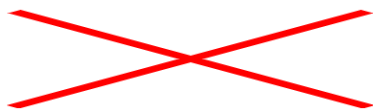
Пусть сеточная функция ~~_____~~ – собственная функция оператора перехода ~~_____~~, соответствующая собственному значению ~~_____~~, т.е. выполняется равенство ~~_____~~.

Тогда ~~_____~~



и ~~_____~~

Поскольку ~~_____~~ – произвольное собственное число оператора ~~_____~~,

то



(8.12)

где  - максимальное по модулю собственное значение оператора .

В силу (8.12) очевидно, что для выполнения условия устойчивости (8.11) должен существовать круг





(8.13)

на комплексной плоскости, в котором лежат все собственные числа оператора .

На практике часто используют более сильное, но легче проверяемое условие



(8.14)

Очевидно, (8.13) всегда следует из (8.14). Собственное значение  оператора перехода  называют еще множителем перехода (со слоя на слой).

Таким образом, условия (8.13) и (8.14) необходимы для выполнения (8.11) и, значит, для устойчивости разностной схемы независимо от выбора нормы.

Спектральный признак устойчивости

Для широкого класса эволюционных (зависящих от времени) задач исследование устойчивости можно осуществить с помощью спектрального признака, который в случае разностной задачи с постоянными коэффициентами, состоит в следующем.

Заменяем правую часть разностного уравнения в (11.1а) нулем, краевую задачу — задачей Коши, функцию φ_m — гармоникой $e^{i\omega m}$ и ищем решение в виде

$$u_m^p = \lambda^p e^{i\omega m}$$

(для задач с одной пространственной переменной), ω — произвольное число, $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Для устойчивости разностной схемы необходимо, чтобы спектр $\lambda = \lambda(\omega)$ лежал в круге $|\lambda| \leq 1 + c\tau$, где c не зависит от τ . Подставляя $u_m^p = \lambda^p e^{i\omega m}$ в рассмотренное разностное уравнение, получим:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a^2 \frac{e^{-i\omega m} - 2 + e^{i\omega m}}{h^2} = 0,$$

или

$$\lambda = 1 - \frac{4a^2\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Разностная схема устойчива, если выполнено неравенство $|\lambda| \leq 1$, т. е. когда τ, h выбраны так, что $\tau a^2 / h^2 \leq 0,5$.

20. Спектральный признак устойчивости. Примеры его применения для исследования разностных методов задачи Коши для гиперболического уравнения.

Спектральный признак устойчивости разностных схем

В предыдущем параграфе, представив разностную схему в виде ~~_____~~, получили достаточное условие ее устойчивости как требование равномерной ограниченности норм степеней оператора перехода:

~~$$\|U^n\| \leq C \|U^0\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$~~ (8.11)

где постоянная ~~_____~~ не зависит от параметров сетки (в этом и состоит дело), так как

для каждого фиксированного ~~_____~~, ~~_____~~, ~~_____~~ величина ~~_____~~, естественно, конечна.

В более сложных случаях применить этот признак удастся не всегда.

Пусть сеточная функция ~~—~~ *собственная* функция оператора перехода ~~,~~,
соответствующая *собственному значению* ~~,~~ т.е. выполняется равенство
~~.~~

Тогда

и

Поскольку ~~-~~ произвольное собственное число оператора ~~,~~

то

(8.12)

где ~~-~~ максимальное по модулю собственное значение оператора ~~.~~

В силу (8.12) очевидно, что для выполнения условия устойчивости (8.11) должен существовать круг



(8.13)

на комплексной плоскости, в котором лежат все собственные числа оператора ~~.~~

На практике часто используют более сильное, но легче проверяемое условие



(8.14)

Очевидно, (8.13) всегда следует из (8.14). Собственное значение ~~оператора~~
перехода ~~называют~~ еще множителем перехода (со слоя на слой).

Таким образом, условия (8.13) и (8.14) необходимы для выполнения (8.11) и, значит, для устойчивости разностной схемы независимо от выбора нормы.

Спектральный анализ волнового уравнения

Для однородной разностной задачи ищем решение в виде

$$u_m^p = \lambda^p e^{im\omega}.$$

Подставляя это решение в разностные уравнения, получим

$$\frac{\lambda - 2 + 1/\lambda}{\tau^2} - \alpha^2 \frac{e^{-i\omega} - 2 + e^{i\omega}}{h^2} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - 2 \left(1 - \frac{2\tau^2\alpha^2}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \lambda + 1 = 0.$$

Произведение корней этого уравнения равно единице. Если дискриминант

$$D(\omega) = \frac{4\tau^2\alpha^2}{h^2} \left(\frac{\tau^2\alpha^2}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2} - 1 \right) \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

квадратного уравнения отрицателен, то корни $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ комплексно-сопряженные и равны единице по модулю.

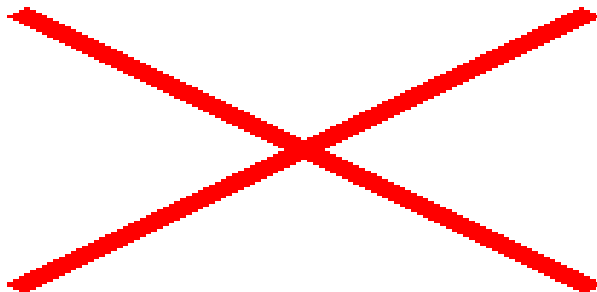
Разностная схема устойчива, если выполнено неравенство $|\lambda| \leq 1$, т. е. когда $\{\tau, h\}$ выбраны так, что

$$\frac{\alpha^2\tau^2}{h^2} \leq 1.$$

21. Разностные аппроксимации производных первого порядка.

Рассмотрим конечно-разностные схемы для решения одномерного *линейного* волнового уравнения первого порядка.

1. Явные методы Эйлера.



Погрешность

аппроксимации:



и



соответственно.



- множитель перехода для схемы с центральной разностью.

Разностные схемы *явные*, так как в каждое разностное уравнение входит лишь одно неизвестное.

Анализ устойчивости разностных схем с помощью спектрального признака приводит к тому, что они обе *абсолютно неустойчивы* и, следовательно, для численного решения волнового уравнения непригодны.

2. Метод использования разностей против потока.

Простую явную схему Эйлера можно сделать устойчивой, если при аппроксимации производной по пространственной переменной использовать не разности вперед, а *разности назад* в тех случаях, когда скорость волны ~~положительна~~. Если скорость волны ~~отрицательна~~, то устойчивость схемы обеспечивается при использовании *разностей вперед*.

При использовании разностей назад разностные уравнения принимают вид

~~$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(-\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right)$$~~

Эта разностная схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации ~~второго~~. Множитель перехода равен

~~$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} |c|$$~~

и

~~$$\lambda < 1$$~~

Из условия устойчивости (8.14) следует, что схема устойчива при

~~$$\Delta t \leq \Delta x / |c|$$~~

то есть ~~тогда~~.

3. Схема Лакса.

Разностную схему Эйлера можно сделать устойчивой, если заменить ~~разности~~ на пространственное среднее ~~вперед~~.

В результате получим широко известную схему Лакса:

~~Это явная одношаговая схема с погрешность аппроксимации~~

Множитель перехода равен

Схема устойчива при $\Delta t \leq \Delta x^2 / 2D$ – число Куранта.

4. Неявный метод Эйлера.

Погрешность аппроксимации $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Множитель перехода равен

Схема *абсолютно устойчива*, при использовании этой схемы приходится решать систему линейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени:

Начальные условия заданы, матрица системы трехдиагональная, для решения применяется *метод прогонки*.

При использовании неявных схем на каждом шаге по Δt приходится проводить больше вычислений, чем при использовании явных схем, но зато можно проводить расчеты с существенно большим шагом Δt .

22. Разностные аппроксимации производных второго порядка.

1. Пятиточечная разностная схема

$$\begin{aligned} & \text{[Diagram of a 5-point stencil with a red X over it]} \\ & i=1, \dots, n-1, \quad j=1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (1)$$

Погрешность аппроксимации разностного уравнения составляет $O(h^2+k^2)$.

Уравнение (1) вместе со значениями $U_{i,j}$ в граничных узлах образуют систему алгебраических уравнений относительно приближенных значений функции $U(x,y)$ в узлах сетки (x_i, y_j) .

Наиболее простой вид имеет эта система при $h=k$:

$$\begin{aligned} & \text{[Diagram of a 5-point stencil with a red X over it]} \\ & U_{i0}=f_3(x_i), \quad U_{im}=f_4(x_i), \\ & U_{0j}=f_1(y_j), \quad U_{nj}=f_2(y_j), \\ & i=1, \dots, n-1; \quad j=1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Для определения величин $U_{i,j}$ требуется решить систему линейных алгебраических уравнений. Методы решения разделяются на **прямые и итерационные**.

Прямые методы: Метод Гаусса и его модификации, прогонки.

Итерационные методы: метод итераций, метод Зейделя

Итерационный метод Зейделя:

$$\text{[Diagram of a 5-point stencil with a red X over it]}$$

где верхний индекс s - номер итерации.

При ~~последовательность~~ ~~сходится~~ к точному решению системы.

В качестве условия окончания итерационного процесса можно принять

~~$$\epsilon = \max_{i=1, \dots, N} |u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}|$$~~

Погрешность приближенного решения, получаемого конечно-разностным методом, складывается из двух погрешностей: *погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностным и погрешности итерационного процесса.*

Разностные схемы для уравнений гиперболического типа

Одномерным волновым уравнением называется следующее гиперболическое уравнение в частных производных:

~~$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$~~

(8.24)

~~$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$~~

Это уравнение описывает распространение звуковых волн в однородной среде со скоростью ~~c~~ .

Рассмотрим смешанную краевую задачу, которая состоит в отыскании функции ~~$u(x, t)$~~ , удовлетворяющей уравнению (8.24) (однородному уравнению колебаний струны), начальным условиям

~~$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$~~

(8.25)

и краевым условиям

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2} \quad (8.26)$$

Так как замена переменных $x = x_0 + \Delta x \xi$ приводит уравнение (8.24) к виду

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2},$$

то в дальнейшем будем считать $\Delta x = \Delta y = 1$.

Для построения разностной схемы решения задачи (8.24) – (8.26) построим в области $0 \leq i \leq N_x - 1$, $0 \leq j \leq N_y - 1$ разностную сетку Ω_τ , $0 \leq n \leq N_\tau - 1$.

Используя для аппроксимации частных производных центральные разностные производные, получаем следующую разностную аппроксимацию уравнения (8.24):

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2} \quad (8.27)$$

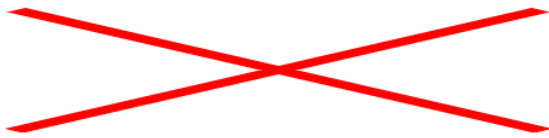
Здесь $u_{i,j}^n$ - приближенное значение функции $u(x,y,t)$ в узле (i,j,n) .

Полагая $\Delta x = \Delta y = 1$, получаем трехслойную разностную схему:


$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2} + \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^n}{2}$$

Схема (8.27) называется *трехслойной* потому, что связывает между собой значения $u_{i,j}^n$ функции на трех временных слоях (с номерами $n-1, n, n+1$). Схема (8.27) *явная*, т.е. позволяет в явном виде выразить $u_{i,j}^{n+1}$ через значения функции с предыдущих двух слоев.

Для получения решения на первом слое ($n=0$) можно принять простейший способ, состоящий в том, что если положить



(8.28)

то . Теперь для вычисления решений на следующих слоях можно применить формулу (8.27).





Предложенная схема аппроксимирует задачу (8.24) – (8.26) с точностью ,
Невысокий порядок аппроксимации по  объясняется использованием слишком грубой аппроксимацией производной в (8.28).



Схема устойчива, если выполнено условие Куранта . Это означает, что малые погрешности, возникающие, например, при вычислении решения на первом слое, не будут неограниченно возрастать при переходах к следующим временным слоям.

При выполнении условий Куранта схема обладает равномерной сходимостью, т.е. при  решение разностной задачи равномерно стремится к решению исходной задачи (8.24) – (8.26).

Рассмотрим простейшее линейное уравнение гиперболического типа



(8.29)

свойства решений которого близки к свойствам решения волнового уравнения (8.24). Это уравнение называют одномерным линейным уравнением переноса, описывающим распространение волны со скоростью  вдоль оси .

Непосредственно проверяется, что при условиях



точное аналитическое решение уравнения (8.29) с начальными данными (задача Коши) имеет вид

$$\text{[Crossed-out equation]} \quad (8.30)$$

23.Классификация разностных схем. Понятие шаблона. Примеры шаблонов.

Для классификации разностных схем используется понятие шаблона. Шаблоном разностной схемы называется геометрическое место узлов сетки, участвующих в разностном уравнении (4) (см. рис.12.2). В зависимости от разностного уравнения шаблон может быть полным и неполным.

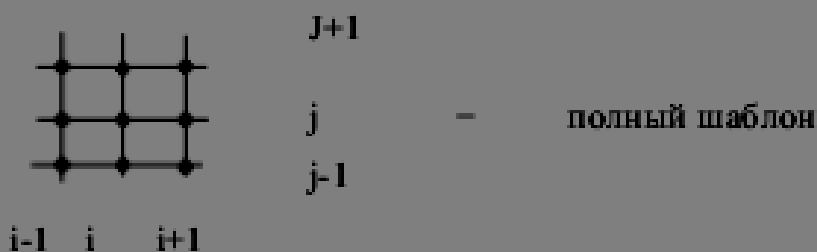


Рис. 12.2.

Явная схема. Шаблон схемы имеет вид:



Разностные уравнения для внутренних узлов сетки:

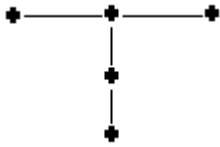
$$\frac{u_m^{p+1} - 2u_m^p + u_m^{p-1}}{\tau^2} - \alpha^2 \frac{u_{m-1}^{p-1} - 2u_m^{p-1} + u_{m+1}^{p-1}}{h^2} = f_m^{p-1},$$

$$p = 1, 2, \dots, P-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (10.3)$$

Начальные и краевые условия аппроксимируются как и в схеме «крест». Таким образом, данная схема состоит из уравнений (10.3) и начальных и краевых условий из схемы «крест».

Это схема первого порядка точности, но абсолютно неустойчива! Для решения конкретных задач она не используется и приводится здесь лишь как пример абсолютно неустойчивой разностной схемы.

Неявная схема (1). Шаблон схемы имеет вид:



Разностные уравнения для внутренних узлов сетки:

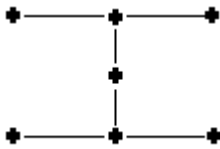
$$\frac{u_m^{p+1} - 2u_m^p + u_m^{p-1}}{\tau^2} - \alpha^2 \frac{u_{m-1}^{p+1} - 2u_m^{p+1} + u_{m+1}^{p+1}}{h^2} = f_m^{p+1},$$

$$p = 1, 2, \dots, P-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (10.4)$$

Начальные и краевые условия аппроксимируются также как в схеме «крест». Таким образом, данная схема состоит из приведенных здесь уравнений (10.4) и начальных и краевых условий из схемы «крест».

Это схема первого порядка точности абсолютно устойчива. Однако для решения конкретных задач она практически не используется, так как дает слишком плохие результаты. В этом можно убедиться на методических примерах этой лабораторной работы.

Неявная схема (2). Шаблон схемы имеет вид:



Разностные уравнения для внутренних узлов сетки:

$$\frac{u_m^{p+1} - 2u_m^p + u_m^{p-1}}{\tau^2} - \alpha^2 \frac{(u_{m-1}^{p+1} - 2u_m^{p+1} + u_{m+1}^{p+1}) + (u_{m-1}^{p-1} - 2u_m^{p-1} + u_{m+1}^{p-1})}{2h^2} = f_m^p,$$

$$p = 1, 2, \dots, P-1; \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (10.5)$$

Начальные и краевые условия аппроксимируются как в схеме «крест». Таким образом, данная схема состоит из уравнений (10.5) и начальных и краевых условий из схемы «крест».

Это схема первого порядка точности по t (за счет грубой аппроксимации начальных данных, как и схема «крест»), абсолютно устойчива.