ЛЕКЦИЯ 5
Интервальное оценивание (доверительные интервалы)

Выше был рассмотрен вопрос об оценке неизвестного параметра θ одним числом θ^*, т.е. о точечной оценке. Однако точечная оценка θ^* неизвестного параметра θ является лишь приближенным значением неизвестного параметра θ даже в том случае, если она несмещенная (в среднем совпадает с θ), состоятельная (стремится к θ с ростом n) и эффективная (обладает наименьшей степенью случайных отклонений от θ) и для выборки малого объема может существенно отличаться от θ.

В ряде задач требуется не только найти для параметра θ подходящее численное значение, но и оценить его точность и надежность. Требуется знать, к каким ошибкам может привести замена θ его точечной оценкой θ^*, и с какой степенью уверенности можно ожидать, что эти оценки не выйдут за известные пределы.

О п р е д е л е н и е 1. Интервальной оценкой (доверительным интервалом) параметра θ называется числовой интервал (θ_1, θ_2), который с заданной вероятностью γ или при заданном уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$ накрывает неизвестное значение оцениваемого параметра θ (рис. 1), т.е.

$$P(\theta \in (\theta_1, \theta_2)) = P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma .$$

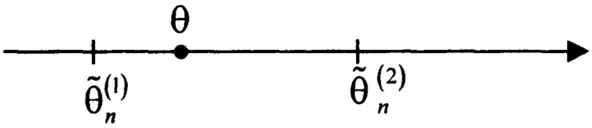


Рис.1

Границы интервала θ_1 и θ_2 называют доверительными границами. Доверительный интервал можно рассматривать как интервал значений параметра θ, совместимых с опытными данными и не противоречащих им.

Обращаем внимание на то, что границы интервала $\left(\tilde{\theta}_n^{(1)}, \tilde{\theta}_n^{(2)}\right)$ и его величина находятся по выборочным данным и потому являются с л у ч а й н ы м и в е л и ч и н а м и в отличие от оцениваемого параметра θ — величины неслучайной, поэтому правильнее говорить о том, что интервал $\left(\tilde{\theta}_n^{(1)}, \tilde{\theta}_n^{(2)}\right)$ «н а к р ы в а е т», а не «содержит» значение θ.

Величина доверительного интервала существенно зависит от объема выборки n (уменьшается с ростом n) и от значения доверительной вероятности γ (увеличивается с приближением γ к единице).

Метод доверительных интервалов был разработан Ю.Нейманом*, который использовал идеи Р.Фишера**.

Такого рода задачи особенно актуальны при малом числе наблюдений, когда точечная оценка θ^* в значительной мере случайна и приближенная замена θ на θ^* может привести к серьезным ошибкам. Для определения точности и надежности θ^* в МС вводят понятие доверительного интервала и доверительной вероятности. Часто из физических соображений делается вывод, что ξ распределена по нормальному закону с плотностью вероятности

$$f_\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad a = M_\xi, \quad \sigma = \sqrt{D\xi}.$$

Возникает задача оценки параметров a и σ или одного из них, если известны наблюдаемые значения $x_1, x_2, ..., x_n$ СВ ξ.

Выборочное распределение отдельных оценок θ^* (например, выборочной средней или частости) симметричны относительно параметра θ (генеральных средней или доли), поэтому целесообразно рассматривать доверительный интервал, симметричный относительно параметра θ.

Пусть для параметра θ из опыта получена несмещенная оценка θ^*. Оценим возможную при этом ошибку. Назначим некоторую достаточно большую вероятность γ $(\gamma = 0{,}95;\ 0{,}99;\ 0{,}9)$ такую, что событие с вероятностью γ можно считать практически достоверным. Найдём такое значение ε, $\varepsilon > 0$, для которого вероятность отклонения оценки на величину, не превышающую ε, равна γ:

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \varepsilon\right) = \gamma. \tag{1}$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене θ на θ^*, будет равен $\pm\varepsilon$. Большие по абсолютной величине ошибки будут появляться с малой вероятностью $\alpha = 1 - \gamma$.

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$P(\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon) = \gamma. \tag{2}$$

Равенство (2) означает, что с вероятностью γ неизвестное значение параметра θ попадает в интервал I_γ, равный

$$I_\gamma = (\theta^* - \varepsilon; \theta^* + \varepsilon), \tag{3}$$

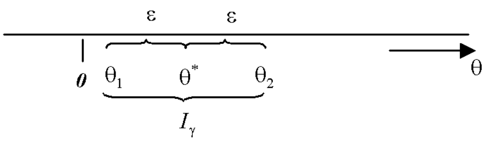
который является случайным, т.к. случайным является центр θ^* интервала I_γ. Случайной является и его длина, равная 2ε, т.к. ε, как правило, вычисляется по опытным данным. Поэтому в (2) **величину γ лучше**

---

* Ю.Нейманом (1894-1981) – американский математик-статистик

** Р.Фишера (1890-1962) – английский статистик и генетик

толковать не как вероятность γ попадания точки θ в интервал I_γ, а как вероятность того, что случайный интервал I_γ накроет точку θ:



θ^* – центр доверительного интервала, $\theta_1 = \theta^* - \varepsilon$, $\theta_2 = \theta^* + \varepsilon$.

Вероятность γ принято называть **доверительной вероятностью** (надежностью), а интервал I_γ – **доверительным интервалом**.

Наибольшее отклонение ε несмещенной оценки θ^* от оцениваемого параметра θ, которое возможно с заданной доверительной вероятностью γ, называется **предельной ошибкой выборки**.

Ошибка ε является ***ошибкой репрезентативности (представительства) выборки. Она возникает только вследствие того, что исследуется не вся совокупность, а лишь часть ее (выборка), отобранная случайно.*** Эту ошибку часто называют *случайной* ошибкой репрезентативности. Ее не следует путать с *систематической* ошибкой репрезентативности, появляющейся в результате нарушения принципа случайности при отборе элементов в выборку.

Рассмотрим вопрос о нахождении доверительных границ θ_1 и θ_2. Пусть для параметра θ имеется несмещённая оценка θ^*. Если бы был известен закон распределения величины θ^*, задача нахождения доверительного интервала была бы весьма простой. Для этого достаточно было бы найти такое значение ε, для которого выполнено соотношение (1). Сложность состоит в том, что закон распределения оценки θ^* зависит от закона распределения СВ ξ, следовательно, от его неизвестных параметров, в частности, от параметра θ.

Для построения доверительных интервалов для параметров генеральных совокупностей могут быть реализованы два подхода: для малых выборок ($n < 40$) и больших выборок. Первый подход основан на знании *точного*, а второй – *асимптотического* распределения выборочных характеристик (или некоторых функций от них).

Доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания нормального распределения при известном σ

Пусть количественный признак ξ генеральной совокупности распределен нормально, причем известно σ – среднее квадратичное отклонение этого распределения. Оценим неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}_в$, т.е. найдем доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ. Будем рассматривать $\bar{x}_в$ как СВ $\bar{\xi}$ (т.е. $\bar{x}_в$ меняется от выборки к выборке), а выборочные значения признака $x_1, x_2, \dots x_n$ – как одинаково распределенные (т.е. имеющие одну и ту же функцию распределения $F(x)$) независимые в совокупности случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ (эти числа также изменяются от выборки к выборке). Тогда математические ожидания каждой из величин $x_1, x_2, \dots x_n$ одинаковы и равны a, т.е. $M_{x_i} = a, \quad \sigma_{x_i} = \sigma, \; i = \overline{1,n}.$

Известно, что если СВ ξ распределена нормально, то выборочная средняя также распределена нормально и

$$M_{\bar{\xi}} = a, \; D_{\bar{\xi}} = \frac{\sigma^2}{n}, \; \sigma_{\bar{\xi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем выполнение соотношения $P\left(\left|\xi - a\right| < \delta\right) = \gamma$, где γ – заданная надежность. Поскольку для нормально распределенной СВ ξ $P(\left|\xi - a\right| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$, то, сделав замену $\xi \to \bar{\xi}, \quad \sigma \to \sigma_{\bar{\xi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, получим $P(|\bar{\xi} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t_\gamma)$, где $t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Следовательно, $\delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$.

Таким образом, $P(|\bar{\xi} - a| < \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t_\gamma)$. Так как вероятность задана и равна γ, то, заменив $\bar{\xi}$ на $\bar{x}_в$, получим

$$P\left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(t_\gamma\right) = \gamma. \qquad (4)$$

Таким образом, с доверительной вероятностью γ (надежностью γ) можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x}_в - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_в + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестное математическое ожидание a нормально распределенной СВ с известным среднеквадратичным отклонением σ с точностью $\delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$. Число t_γ определяется из соотношения $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. По таблице значений функции Лапласа находим аргумент t_γ, которому соответствует значение функции Лапласа, равное γ.

З а м е ч а н и е . Вообще говоря, требование «нормальности» СВ ξ, введенное в начале параграфа, не обязательно. Согласно ЦПТ (теоремы Ляпунова) применимость (4) обеспечивается и при отсутствии этого требования, но требование $n \to \infty$ существенно (на практике – это большие выборки).

Пример 3. СВ ξ распределена нормально с $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в$, если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0.95$.

Решение. Вычислим $\Phi(t_\gamma) = \gamma = 0.95$. По таблице значений функции Лапласа находим $t_\gamma = 1.96$; следовательно, точность оценки $\delta = = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \cdot 3}{6} = 0.98$. Тогда доверительный интервал $(\bar{x}_в - \delta, \bar{x}_в + \delta)$ имеет вид $(\bar{x}_в - 0.98, , \bar{x}_в + 0.98)$. Таким образом, с вероятностью 0.95 СВ ξ попадет в интервал $\left(\bar{x}_в - 0.98, \bar{x}_в + 0.98\right)$.

Смысл заданной надежности: надежность $\gamma = 0.95$ означает, что если проведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяют такие доверительные интервалы, в которых действительно заключен параметр a; в 5% случаев параметр a может выйти за границы доверительного интервала.

Пример 4. С целью определения среднего трудового стажа на предприятии методом случайной повторной выборки проведено обследование трудового стажа рабочих. Из всего коллектива рабочих завода случайным образом выбрано 400 рабочих, данные о трудовом стаже которых и составили выборку. Средний по выборке стаж оказался равным 9,4 года. Считая, что трудовой стаж рабочих имеет нормальный закон распределения, определить с вероятностью 0,97 границы, в которых окажется средний трудовой стаж для всего коллектива, если известно, что σ = 1,7 года.

Решение. Признак X – трудовой стаж рабочих. Этот признак имеет нормальный закон распределения с известным параметром σ = 1,7, параметр a неизвестен. Сделана выборка объемом n = 400, по данным выборки найдена точечная оценка параметра a: $\bar{x}_в = 9{,}4$. С надежностью γ = 0,97 найдем интервальную оценку параметра a по формуле:

$$\bar{x}_в - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(t) \approx \frac{0{,}97}{2} = 0{,}485$ находим

$t = 2{,}17$; тогда: $9{,}4 - \frac{2{,}17 \cdot 1{,}7}{\sqrt{400}} < a < 9{,}4 + \frac{2{,}17 \cdot 1{,}7}{\sqrt{400}}$,

9,4 – 0,18 <a< 9,4 + 0,18. Итак, 9,22 < a < 9,58, то есть средний трудовой стаж рабочих всего коллектива лежит в пределах от 9,22 года до 9,58 года (с надежностью γ = 0,97).

С изменением надежности γ изменится и интервальная оценка.

Пусть γ = 0,99, тогда Φ(t) = 0,495, отсюда t = 2,58. Тогда:

$$9{,}4-\frac{2{,}58\cdot 1{,}7}{20}<a<9{,}4+\frac{2{,}58\cdot 1{,}7}{20},\ \text{ или }\ 9{,}4-0{,}22<a<9{,}4+0{,}22\ .$$

Окончательно: 9,18 < а < 9,62.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ

На практике часто приходится иметь дело с выборками небольшого объема ($n<40$). В этом случае приведенный выше метод построения интервальной оценки для генеральной средней не применим ввиду необоснованности вывода о нормальном законе распределения выборочной средней, т.к. он основан на ЦПТ при больших n.

Построение доверительного интервала для генеральной средней по малой выборке. Задача построения доверительного интервала для генеральной средней может быть решена, если в генеральной совокупности рассматриваемый признак имеет *нормальное распределение*.

Нормальность распределения $\bar{x}_в$ как СВ ξ в данном случае вытекает из известного факта ТВ о том, что распределение суммы *любого* числа нормально распределенных СВ имеет нормальное распределение.

Заметим, что в этом случае нормированное отклонение выборочной средней $T=\frac{\bar{X}_в-a}{\sigma}\cdot\sqrt{n}$ имеет стандартное нормальное распределение $N(0;1)$.

Однако на практике почти всегда генеральная дисперсия σ^2 не известна (как и оцениваемая генеральная средняя $\bar{x}$ или параметр a). Если заменить σ^2 ее «наилучшей» оценкой по выборке «исправленной» выборочной дисперсией S^2, то большой интерес представляет распределение выборочной характеристики (статистики) $t=\frac{\bar{x}_в-a}{S}\cdot\sqrt{n}=\frac{\bar{x}_в-a}{\sqrt{D_в}}\cdot\sqrt{n-1}$.

Пусть количественный признак ξ генеральной совокупности распределен по нормальному закону, причем σ неизвестно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительных интервалов с заданной доверительной вероятностью (надежностью) γ.

Воспользоваться результатами предыдущего раздела нельзя, т.к. параметр σ в данном случае неизвестен. Для решения задачи по выборке $x_1, x_2, \dots x_n$ вычислим $\bar{x}_в$ и исправленную дисперсию S^2.

Представим статистику *t* в виде:

$$t = \frac{(\overline{x}_в - a) / \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \frac{nD_в}{\sigma^2}}}$$

Числитель дроби имеет стандартное нормальное распределение $N(0;1)$. Можно показать, что случайная величина $\frac{nD_в}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $k = n-1$ степенями свободы. Указанное распределение не зависит от параметров распределения СВ $\overline{\xi}$, а зависит лишь от числа k.

Число степеней свободы k определяется как общее число n наблюдений (вариантов) случайной величины X минус число уравнений l, связывающих эти наблюдения, т.е. $k = n - l$.

Так, например, для распределения статистики $t = \frac{\overline{x}_в - a}{\sqrt{D_в}} \cdot \sqrt{n-1}$ число степеней свободы $k = n-1$, т.к. одна степень свободы «теряется» при определении выборочной средней $\overline{x}_в$ (n наблюдений связаны одним уравнением $\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i x_i}{n}$).

Зная t-распределение Стьюдента, можно найти такое критическое значение $t_{\gamma,n-1}$, что вероятность того, что статистика $t = \frac{\overline{x}_в - a}{\sqrt{D_в}} \cdot \sqrt{n-1}$ не превзойдет величину $t_{\gamma,n-1}$ (по абсолютной величине), равна γ:

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_в - a}{\sqrt{D_в}} \cdot \sqrt{n-1}\right| < t_{\gamma,n-1}\right) = \gamma.$$

или

$$P\left(\left|\overline{x}_в - a\right| < \frac{t_{\gamma,n-1}\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma.$$

Используя распределение Стьюдента, покали, что

$$P\left(\overline{x}_в - \frac{t_{\gamma,n-1}\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}} < a < \overline{x}_в + \frac{t_{\gamma,n-1}\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma. \quad (5)$$

Таким образом, доверительный интервал $\left(\overline{x}_в - \frac{t_{\gamma,n-1}\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}};\ \overline{x}_в + \frac{t_{\gamma,n-1}\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a с надежностью γ. По таблице распределения Стьюдента по заданным n-1 и γ можно найти $t_{\gamma,n-1}$ ($t_{\gamma,n-1}=t(\gamma,n-1)$). Величина $\dfrac{t_{\gamma,n-1}\sqrt{D_в}}{\sqrt{n-1}}$ – предельная ошибка малой выборки.

З а м е ч а н и е . Используя для построения доверительного интервала ту же статистику t, но записанную в другом виде $t=\dfrac{\overline{x}_в-a}{S}\cdot\sqrt{n}$, будем иметь доверительный интервал $\left(\overline{x}_в-\dfrac{t_{\gamma,n}S}{\sqrt{n}};\ \overline{x}_в+\dfrac{t_{\gamma,n}S}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a с надежностью γ. По таблице распределения Стьюдента по заданным n и γ можно найти $t_{\gamma,n}$ ($t_{\gamma,n}=t(\gamma,n)$). Величина $\dfrac{t_{\gamma,n}S}{\sqrt{n}}$ – предельная ошибка малой выборки.

Пример 5. Количественный признак ξ генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема n=16 найдены $\overline{x}_в=20.2$ и исправленное среднее квадратичное отклонение $S=0.8$. Оценить неизвестное математическое ожидание а при помощи доверительного интервала с надежностью γ=0.95.

Решение. Для нахождения доверительного интервала следует по таблице t-распределения Стьюдента по n=16, γ=0.95 найти $t_{\gamma,n}$=2.13. Тогда границы доверительного интервала имеют вид

$$\overline{x}_в-t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}}=20.2-\frac{2.13\cdot0.8}{4}=19.774;\ \overline{x}_в+t_{\gamma,n}\frac{S}{\sqrt{n}}=20.2+\frac{2.13\cdot0.8}{4}=20.626.$$

Таким образом, с надежностью γ=0.95 неизвестный параметр а заключается в доверительном интервале (19.774, 20.626).

Пример 6. С целью определения средней продолжительности рабочего дня на предприятии методом случайной повторной выборки проведено обследование продолжительности рабочего дня сотрудников. Из всего коллектива завода случайным образом выбрано 30 сотрудников. Данные табельного учета о продолжительности рабочего дня этих сотрудников и составили выборку. Средняя по выборке продолжительность рабочего дня оказалась равной 6,85 часа, а S = 0,7 часа. Считая, что продолжительность рабочего дня имеет нормальный закон распределения, с надежностью γ = 0,95 определить, в каких пределах находится действительная средняя продолжительность рабочего дня для всего коллектива данного предприятия.

Решение. Признак X – продолжительность рабочего дня. Признак имеет нормальное распределение с неизвестными параметрами. Сделана выборка объемом n = 30, по выборочным данным найдены точечные оценки параметров распределения: $\bar{x}_в = 6,85$; S = 0,7. С надежностью $\gamma = 0,95$ найдем интервальную оценку параметра a по формуле:

$$\bar{x}_в - \frac{t_{\gamma,n} \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_{\gamma,n} \cdot S}{\sqrt{n}},$$

$t_{\gamma,n}$ находим по таблице t-распределения Стьюдента $t_{\gamma,n} = t(0,95;\ 30)=2,045$. Тогда:

$$6,85 - \frac{2,045 \cdot 0,7}{\sqrt{30}} < a < 6,85 + \frac{2,045 \cdot 0,7}{\sqrt{30}},$$ или $6,85 - 0,26 < a < 6,85 + 0,26$.

Итак, $6,59 < a < 7,11$, то есть с надежностью $\gamma = 0,95$ средняя продолжительность рабочего дня для всего коллектива лежит в пределах от 6,59 до 7,11 ч.

Построение доверительного интервала для дисперсии генеральной совокупности

Пусть распределение признака (СВ ξ) в генеральной совокупности является нормальным $N(a;\ \sigma^2)$. Предположим, что математическое ожидание $M(\xi) = a = \bar{x}$ (генеральная средняя) известно. Тогда выборочная дисперсия

$$\sigma_в{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{n}.$$

Ее не следует путать с выборочной дисперсией $D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}{n}$

и исправленной выборочной дисперсией $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2$.

Если $\sigma_в{}^2$ характеризует вариацию значений признака относительно генеральной средней a, то $D_в$ и S^2 относительно выборочной средней $\bar{x}_в$.

Рассмотрим статистику

$$\chi^2 = \frac{n\sigma_в{}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i{}^2$$

Учитывая, что все случайные величины выборки распределены одинаково, т.е. $M(X_i) = a, \quad D(X_i) = \sigma^2$, то $M(t_i) = 0, \quad D(t_i) = 1$.

В лекции 4 отмечалось, что распределение суммы квадратов n независимых случайных величин $\sum_{i=1}^{n} t_i^2$, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение $N(0;1)$, представляет *распределение* χ^2 *с* $k = n$ *степенями свободы.*

Таким образом, статистика $\chi^2 = \dfrac{n\sigma_в{}^2}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2 с $k = n$ степенями свободы.

Распределение χ^2 не зависит от неизвестных параметров СВ ξ, а зависит лишь от числа степеней свободы k.

В практике выборочного наблюдения математическое ожидание a как правило неизвестно, и приходится иметь дело не с $\sigma_в{}^2$, а с $D_в$ и S^2. Тогда случайная величина $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ или $\chi^2 = \dfrac{(n-1)D_в{}^2}{\sigma^2}$ имеет распределение χ^2 с $k = n-1$ степенями свободы.

Поэтому для заданной доверительной вероятности γ можем записать

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = \gamma \tag{6}$$

(графически это площадь под кривой распределения между χ_1^2 и $\chi_2{}^2$, см. рис.2.)

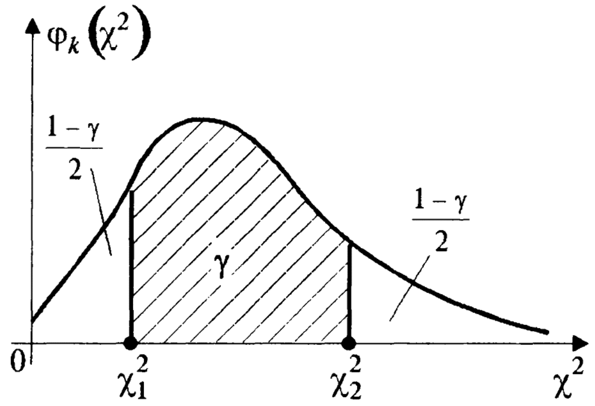


Рис.2.

Очевидно, что значения χ_1^2 и χ_2^2 определяются неоднозначно при одном и том же значении заштрихованной площади[1], равной γ. Обычно χ_1^2 и χ_2^2 выбирают таким образом, чтобы вероятности событий $\chi^2 < \chi_1^2$ и $\chi^2 > \chi_2^2$ были одинаковы, т.е.

$$P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{1-\gamma}{2}.$$

[1] При построении доверительных интервалов для неизвестного математического ожидания мы эту неоднозначность обходили тем, что строили доверительный интервал, симметричный относительно несмещенной точечной оценки. Здесь это смысла не имеет, т.к. в отличие от выборочного распределения $\overline{X}_в$ распределение χ^2 не обладает симметрией.

Преобразовав двойное неравенство $\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$ в равенстве

(6) к равносильному виду $\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}$, получим ***формулы доверительной вероятности для генеральной дисперсии при неизвестном математическом ожидании:***

$$P\left(\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}\right) = \gamma ,$$

и *для среднего квадратического отклонения*

$$P\left(\frac{\sqrt{n}s}{\chi_2} < \sigma < \frac{\sqrt{n}s}{\chi_1}\right) = \gamma .$$

При использовании таблиц значений $\chi^2_{\alpha;k}$, полученных из равенства $P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k}\right) = \alpha$, необходимо учесть, что $P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = 1 - P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right)$, поэтому условие $P\left(\chi^2 < \chi_1^2\right) = \frac{1-\gamma}{2}$ равносильно условию $P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+\gamma}{2}$. Таким образом, значения $\chi_1{}^2$ и $\chi_2{}^2$ находим по соответствующей таблице из формул:

$$P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = \frac{1+\gamma}{2} ,$$

$$P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{1-\gamma}{2} ,$$

т.е. при $k = n - 1$ $\chi_1^2 = \chi^2_{(1+\gamma)/2;n-1}$, $\chi_2^2 = \chi^2_{(1-\gamma)/2;n-1}$.

Аналогично получаем формулу ***доверительной вероятности для генеральной дисперсии при известном математическом ожидании:***

$$P\left(\frac{n\sigma_в{}^2}{\chi_2{}^2} < \sigma^2 < \frac{n\sigma_в{}^2}{\chi_1{}^2}\right) = \gamma$$

Значения $\chi_1{}^2$ и $\chi_2{}^2$ находим по соответствующей таблице из формул:

$$P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = \frac{1+\gamma}{2} ,$$

$$P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{1-\gamma}{2} ,$$

при $k = n$ степеней свободы $\chi_1{}^2 = \chi^2{}_{(1+\gamma)/2;n}$ и $\chi_2{}^2 = \chi^2{}_{(1-\gamma)/2;n}$.

Замечание. Таблица значений $\chi^2_{\alpha;k}$ составлена при числе степеней свободы k от 1 до 30. При $k>30$ можно считать, что случайная величина $\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2k-1}$ имеет стандартное нормальное распределение $N(0;1)$. Поэтому для определения χ_1^2 и χ_2^2 следует записать, что

$$P\left(\left|\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2k-1}\right|<t\right)=2\Phi(t)=\gamma,$$

откуда $-t<\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2k-1}<t$ и после преобразований $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k-1}-t\right)^2<\chi^2<\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k-1}+t\right)^2$. Таким образом, при расчете доверительного интервала при $k>30$ надо полагать $\chi_1^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k-1}-t\right)^2$, $\chi_2^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2k-1}+t\right)^2$,
где $2\Phi(t)=\gamma$.

Определение объема выборки

Для определения необходимого объема выборки, при котором с заданной вероятностью γ можно утверждать, что выборочная средняя отличается от генерального по абсолютной величине меньше чем на δ, пользуются формулами:

а) в случае известной дисперсии из формулы $n=\frac{t_\gamma{}^2\sigma^2}{\delta^2}$, где $\Phi\left(t_\gamma\right)=\gamma$.

б) в случае неизвестной дисперсии организуют специальную «пробную» выборку небольшого объема, находят оценку S^2 и, полагая $\sigma^2\approx S^2$, находят объем «основной» выборки $n=\frac{t_\gamma{}^2S^2}{\delta^2}$.

Пример 7. Найти минимальный объем выборки, на основе которой можно было бы оценить математическое ожидание СВ с ошибкой, которая не превышает 0.2 и надежностью 0.98, если допускается что СВ имеет нормальное распределение с $\sigma=4$.

Решение. Из равенства $\Phi(t_\gamma)=0.98$ по таблице определяют $t_\gamma=2.33$. По формуле находим: $n=\frac{t_\gamma{}^2\sigma^2}{\delta^2}=\frac{2.33^2\cdot 16}{0.2^2}\approx 2171$.