## Лекция 1-2

Слово «статистика» происходит от латинского status–“состояние, государство”. Статистика одна из древнейших наук. Еще в глубокой древности люди накапливали и анализировали сведения о природных и социальных явлениях с целью их изучения и **прогноза**. Существует производственная, демографическая, социальная, медицинская, экономическая и другие отраслевые статистики (эконометрика). Математическая статистика–абстрактная наука, изучающая математические аспекты работы с числовыми данными не зависимо от их описательной отраслевой специфики.

Математическая статистика–наука, разрабатывающая методы сбора, описания и анализа данных с целью создания вероятностно-статистических моделей случайных явлений для прогнозирования их поведения.

Задачи математической статистики:

1. приближенное определение вероятности события по относительной частоте.
2. нахождение приближенного закона распределения случайной величины по экспериментальным данным.
3. оценивание числовых характеристик или параметров распределения случайной величины по данным экспериментов.
4. проверка статистических гипотез о свойствах изучаемого случайного явления.
5. определение эмпирической зависимости между переменными, описывающими случайное явление, на основе экспериментальных данных.

Типичная схема при решении указанных задач разбивается на два этапа, реализуемых так называемыми описательной статистикой (descriptive statistics) и статистикой выводов (inferential statistics). Результаты исследования статистических данных методами математической статистики используются для принятия решений, т.е. для научных и практических выводов.

Математическая статистика–это теория принятия решений в условиях неопределенности.

Сегодня математическая статистика является мощным инструментом, применяемым в машинном обучении (Ensemble learning); в теории распознавания образов; прогнозной аналитикае (Numerix.com, Prognoz.ru, Численные методы) и др.

Раздел «математическая статистика» традиционно изучается в конце курса «высшая математика», поскольку основывается на всех ранее изученных разделах. Наиболее тесна связь математической статистики с теорией вероятностей. Обе эти математические дисциплины изучают массовые случайные явления. При этом теория вероятностей выводит из математической модели свойства реального процесса, а математическая статистика устанавливает свойства математической модели, исходя из данных наблюдений. В курсе «теории вероятности» учат, как по вероятностям некоторых «базисных» событий искать вероятности прочих событий, а в курсе «математической статистики» интересуются тем, как по эмпирическим данным извлечь эти «базисные» вероятности.

В логическом плане вероятностные понятия предшествуют статистическим. "Вероятностник" предполагает, что каждому событию приписано неотрицательное число, называемое его вероятностью, с выполнением известных свойств, главным из которых является аддитивность. Статистик, соглашаясь с ним в целом, подчеркивает, что имеющаяся у него априорная информация о случайном явлении не позволяет эту вероятностную меру однозначно определить, и потому работает со всеми априори допустимыми вероятностными мерами, а иногда, добавляет какие-либо кажущиеся осмысленными требования, урезающие это слишком обширное множество априори допустимых мер. При первой возможности статистик старается тестировать добавленные требования и отказывается от них, если обнаруживает, что эмпирические данные его к тому вынуждают (правда после этого ему приходится, изобретать альтернативную постановку задачи). Исследователь пытается, опираясь на статистические данные, решить, какая из априори допустимых возможностей реализована "в жизни" ("в природе", "вобществе", "на финансовом рынке". . . ).

Связующим звеном между теорией вероятностей и математической статистикой являются так называемые предельные теоремы теории вероятности.

Под предельными теоремами теории вероятности понимается большая группа утверждений и теорем, устанавливающих связь между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин при большом числе испытаний над ними. Предельные теоремы условно делят на две группы: ЗБЧ и ЦПТ. Первая группа теорем, называемая законом больших чисел, устанавливает свойство устойчивости средних значений: при большом числе испытаний их средний результат перестает быть случайным и может быть спрогнозирован с достаточной точностью. Вторая группа теорем, называемая центральной предельной теоремой, устанавливает условия, при которых закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному закону.

## ЗБЧ

**Теорема 1** (неравенства Чебышева). Для любой случайной величины $X$, имеющей математическое ожидание и дисперсию, справедливы неравенства

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \qquad (1)$$

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \qquad (2)$$

Для любого $\varepsilon>0$ $\left|X-M(X)\right|^2\ge\varepsilon^2\Rightarrow\frac{\left|X-M(X)\right|^2}{\varepsilon^2}\ge 1\Rightarrow\frac{\left|X-M(X)\right|^2}{\varepsilon^2}f(x)\ge f(x)$

$$P\{|X-a| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x-a| \geqslant \varepsilon} (x-a)^2 f(x)\, dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\, dx,$$

так как интеграл от неотрицательной функции при расширении области интегрирования может только возрасти. Таким образом,

$$P\{|X-a| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\varepsilon^2} DX,$$

т. е. $P\{|X-a| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$.
что и требовалось доказать. Аналогично доказывается неравенство Чебышева и для ДСВ X (самостоятельно)

Пример 3. Оценить вероятность того, что отклонение любой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет не более трех средних квадратических отклонений.

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева (7.3), учитывая, что $\varepsilon = 3\sigma, D(X) = \sigma^2$:

$P\left(\left|X - M\left(X\right)\right| < 3\sigma\right) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \dfrac{8}{9} = 0{,}889$.

Пример 4. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20 000 квт-ч, а среднеквадратичное отклонение – 200 квт-ч. Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева (7.3):

$P\left(\left|X - M\left(X\right)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставим в правую часть неравенства вместо $D(X)$ величину $200^2 = 40\,000$, сделаем ее большей или равной 0,96:

$$1 - \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \geq 0{,}96 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \leq 0{,}04 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 \geq \frac{40\,000}{0{,}04}, \quad \varepsilon \geq 1000.$$

Следовательно, в этом населенном пункте можно ожидать с вероятностью не меньшей 0,96 потребление электроэнергии $20\,000 \pm 1000$, т.е.
$X \in [19\,000; 21\,000]$.

Ответ: от 19000 до 21000.

Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *сходятся по вероятности* к величине $A$ (случайной или неслучайной), если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события $\{|X_n - A| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремится к единице, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - A| < \varepsilon\} = 1$$

(или $P\{|X_n - A| < \varepsilon\} \to 1$). Сходимость по вероятности символически записывают так:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} A.$$

**Теорема 2** (теорема Чебышева). Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, дисперсии которых ограничены одной и той же постоянной, т.е. $D(X_i) \le C$ (конечность вторых моментов, т.е. $D(X_i) < \infty$), то при неограниченном увеличении числа $n$ и для сколь угодно малого числа ε имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (7.6)$$

Доказательство. Рассмотрим новую случайную величину $\tilde{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ и найдем ее математическое ожидание. Используя свойства математического ожидания, получим, что $M\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \dfrac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}$.

Применим к $\tilde{X}$ неравенство Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Так как рассматриваемые случайные величины независимы, то, учитывая условие теоремы, имеем: $D\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \dfrac{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}{n^2} \le \dfrac{Cn}{n^2} = \dfrac{C}{n}$.

Используя этот результат, представим предыдущее неравенство в виде:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \quad (7.7)$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \ge 1.$$

Поскольку вероятность не может быть больше 1, можно утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема доказана.

Замечание. Формулу (7.6) можно записать в виде:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}. \qquad (7.8)$$

Формула (7.8) отражает тот факт, что при выполнении условий теоремы Чебышева, средняя арифметическая случайных величин сходится по вероятности к средней арифметической их математических ожиданий.

В отличие от записи $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}$, которая обозначает, что начиная с некоторого $n$ для сколь угодно малого числа $\varepsilon$ неравенство

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon \qquad (7.9)$$

будет верно всегда, из (7.8) не следует такого же категоричного утверждения. Возможно, что в отдельных случаях неравенство (7.9) выполняться не будет, однако, с увеличением числа $n$ вероятность неравенства (7.9) стремится к 1, что означает практическую достоверность выполнения этого неравенства при $n\to\infty$.

Требование конечности второго момента в теореме Чебышева связано исключительно со способом ее доказательства. Хинчин доказал, что утверждение остается верным, если требовать существования только первых моментов ($M(X_i)$)

**ЗБЧ в форме Хинчина.** Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – попарно независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие математическое ожидание, равное $a$, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon$ будет как угодно близка к 1, если число случайных величин достаточно велико. Иначе говоря,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (7.10)$$

**Вывод:** среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин принимает значения, близкие к сумме их математических ожиданий, то есть как угодно мало отличается от неслучайной величины. Например, если проводится серия измерений какой-либо физической величины, причем:

а) результат каждого измерения не зависит от результатов остальных, то есть все результаты представляют собой попарно независимые случайные величины;

б) измерения производятся без систематических ошибок (их математические ожидания равны между собой и равны истинному значению а измеряемой величины);

в) обеспечена определенная точность измерений, следовательно, дисперсии рассматриваемых случайных величин равномерно ограничены;

то при достаточно большом числе измерений их среднее арифметическое окажется сколь угодно близким к истинному значению измеряемой величины.

Теорема Чебышева и ее следствие имеют большое практическое значение в актуарной математике (математические методы оценки рисков, расчетов финансовых угроз, долгосрочного страхования). Например, страховой компании необходимо установить размер страхового взноса, который должен уплачивать страхователь; при этом страховая компания обязуется выплатить при наступлении страхового случая определенную страховую сумму. Рассматривая частоту (убытки страхователя) при наступлении страхового случая как величину случайную и обладая известной статистикой таких случаев, можно определить среднее число (средние убытки) при наступлении страховых случаев, которое на основании теоремы Чебышева с большой степенью уверенности можно считать величиной почти неслучайной. Тогда на основании этих данных и предполагаемой страховой суммы определяется размер страхового взноса. Без учета действия закона больших чисел (теоремы Чебышева) возможны существенные убытки страховой компании (при занижении размера страхового взноса) или потеря привлекательности страховых услуг (при завышении размера взноса).

Пример 5. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднеквадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

По условию $n=1000$, $\varepsilon=0{,}5$, $C=5^2=25$. Итак, искомая вероятность

$$P\left(\left|\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}X_i-\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}M\left(X_i\right)\right|<0{,}5\right)\geq 1-\frac{25}{1000\cdot 0{,}25}=0{,}9.$$

Ответ: $P\geq 0{,}9$.

**Теорема 3** (теорема Бернулли). Частость события в $n$ повторных независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью $p$, при неограниченном увеличении числа $n$ сходится по вероятности к вероятности $p$ этого события в отдельном испытании:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (7.11)$$

или

$$\frac{n_A}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}p \qquad (7.12)$$

❑ Введем с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ следующим образом: $X_i = 1$, если в $i$-м испытании появилось событие $A$, а если не появилось, то $X_i = 0$. Тогда число $n_A$ (число успехов) можно представить в виде

$$n_A = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

М. о. и дисперсия с. в. $X_i$ равны: $MX_i = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$, $DX_i = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p) = pq$. Закон распределения с. в. $X_i$ имеет вид

| $X_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $1-p$ | $p$, |

при любом $i$. Таким образом, с. в. $X_i$ независимы, их дисперсии ограничены одним и тем же числом $\frac{1}{4}$, так как

$$p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Поэтому к этим с. в. можно применить теорему Чебышева (5.7):

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Но

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n_A}{n}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = \frac{1}{n} \cdot np = p.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

**Замечание.** Для индикаторов события $A$ справедлива оценка (7.7), которая приводит к часто применяемой на практике оценке

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (7.13)$$

Пример 6. При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 15 шт. из 100 оказывается с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 400 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли не более чем на 0,05.

Решение. Воспользуемся неравенством (7.13).По условию $n = 400$, $\varepsilon = 0{,}05$. В качестве р возьмем величину, полученную при проверке для доли брака $p = \frac{15}{100} = 0{,}15$.

Итак, $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{400 \cdot 0{,}05^2} = 0{,}8725$.

Ответ: $P \geq 0{,}8725$.

Пример 7. Вероятность того, что изделие является качественным, равна 0,9. Сколько следует проверить изделий, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения доли качественных изделий от 0,9 не превысит 0,01?

Решение. Воспользуемся неравенством (7.13).По условию $p = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$. Подставим в правую часть вышеприведенного неравенства эти значения:

$$1 - \frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{n \cdot 0{,}0001} \geq 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{900}{n} \leq 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 18\,000.$$

Ответ: $n \geq 18\,000$.

## ЦПТ

Еще один вид предельного перехода лишь косвенно связан со случайными величинами. Это слабая сходимость вероятностных распределений. Мы ограничимся обсуждением одномерного случая, в котором можно обойтись соответствующими функциями распределения.

Говорят, что последовательность $\{F_n(x)\}$ функций распределения слабо сходится к функции распределения $F(x)$, если для каждой точки $x \in \mathbb{R}$ в которой $F(x)$ непрерывна,

$$F_n(x) \Rightarrow F(x), \quad n \to \infty.$$

"Слабость" здесь следует понимать по отношению к поточечной сходимости не в каждой точке, а лишь в точках непрерывности предельной функции.

В этом определении вообще не фигурируют случайные величины, порождающие рассматриваемые законы распределения. Для случайных величин никакой сходимости не предполагается (формально, они могут даже иметь совершенно разные области определения), более того, в типичных для приложений случаях сходимости случайных величин и не будет. Тем не менее, условно говорят, что эти величины сходятся по распределению. Иногда слабая сходимость обозначается так: $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x), \quad n \to \infty$ (weak слабый).

В доказательстве ЦПТ используется понятие характеристической функции СВ.

Введем комплексную СВ $Y = e^{itX}$, где X–действительная СВ с известным законом распределения $f(x)$, параметр $t \in \mathbb{R}$.

Характеристической функцией СВ $X$ называют математическое ожидание комплексной СВ $У$:

$\varphi_X(t) = M(Y) = M(e^{itX})$ .

Для ДСВ X, принимающей значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi_X(t) = M(Y) = M(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{itx_k}$$

Для НСВ $X$ с функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$ характеристическая функция имеет вид:

$\varphi_X(t) = M(Y) = M(e^{itX}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx$, что, как известно из курса математического анализа, является преобразованием Фурье (или интегралом Фурье). По известной характеристической функции функцию плотности распределения вероятности можно восстановить с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) e^{-itx} dt$$

Характеристическая функция обладает рядом свойств:

1.Характеристическая функция неслучайной величины $a$ равна $\varphi_a(t) = M(e^{ita}) = e^{ita}$

2. Характеристическая функция случайной величины $aX+в$ равна

$\varphi_{aX+b}(t) = M(e^{it(aX+b)}) = M(e^{itaX} e^{itb}) = e^{itb} M(e^{itaX}) = e^{itb} \varphi_{aX}(t)$

3. Характеристическая функция суммы *независимых* случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ равна произведению их характеристических функций $\varphi_{X_k}(t)$:

$\varphi_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = M(e^{it(X_1+X_2+...+X_n)}) = M(e^{itX_1} e^{itX_2} \cdot ... \cdot e^{itX_n}) =$

$= M(e^{itX_1}) M(e^{itX_2}) ... M(e^{itX_n}) = \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t) ... \varphi_{X_n}(t)$

4. $\varphi_X(0) = M(1) = 1 = \alpha_0(x)$;

$$\varphi'_X(t) = \left(M(e^{itX})\right)' = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx\right)' = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(e^{itx}\right)' dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ixf(x) e^{itx} dx;$$

$$\varphi'_X(0) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = iM(X) = i\alpha(x);$$

$$\varphi''_X(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx\right)'' = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \left(e^{itx}\right)' dx = i^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) e^{itx} dx;$$

$$\varphi''_X(0) = i^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = i^2 M(X^2) = i^2 \alpha_2(x);$$

…

$$\varphi_X{}^{(k)}(t) = i^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) e^{itx} dx;$$

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx = i^k M(X^k) = i^k \alpha_k(x);$$

Т.о. если *начальный* момент $k$–го порядка случайной величины $X$ существует, то

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \alpha_k(x);, \qquad (7.14)$$

где $\varphi_X^{(k)}(0)$ - значение $k$–й производной характеристической функции случайной величины $X$ при $t = 0$.

5. **Теорема Леви о непрерывном соответствии.** Случайные величины $X_n$ слабо сходятся к случайной величине $X$ тогда и только тогда, когда для любого $t$ характеристические функции $\varphi_{X_n}(t)$ сходятся к характеристической функции $\varphi_X(t)$.

Сформулированная теорема устанавливает непрерывное соответствие между классами $\langle F_X, \Rightarrow \rangle$ функций распределения со слабой сходимостью и $\langle \varphi_X, \rightarrow \rangle$ характеристических функций со сходимостью в каждой точке. "Непрерывность" этого соответствия в том, что пределу в одном классе относительно заданной в этом классе сходимости соответствует предел в другом классе относительно сходимости, заданной в этом другом классе.

**Теорема 5.5.** **Пусть с. в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание $MX_i = a$ и дисперсию $DX_i = \sigma^2$, $i = \overline{1,n}$. Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих случайных величин стремится при $n \to \infty$ к функции распределения стандартной нормальной случайной величины:**

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}},$$

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \qquad (5.13)$$

Из соотношения (5.13) следует, что при достаточно большом $n$ сумма $Z_n$ приближенно распределена по нормальному закону: $Z_n \sim N(0,1)$. Это означает, что сумма $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ приближенно распределена по нормальному закону: $S_n \sim N(na, \sqrt{n}\sigma)$. Говорят, что при $n \to \infty$ с. в. $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ *асимптотически нормальна.*

**Доказательство.**

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечной и ненулевой дисперсией. Обозначим через $a$ математическое ожидание $M(X_1)$ и через $\sigma^2$ — дисперсию $D(X_1)$. Требуется доказать, что

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{w} N_{0;1}$$

Введем стандартизированные случайные величины $\tilde{X}_i = \dfrac{X_i - a}{\sigma}$ — независимые с.в. с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Пусть $Z_n$ есть их сумма $Z_n = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_n = \dfrac{S_n - na}{\sigma}$. Требуется доказать, что

$$\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{w} N_{0;1}$$

Характеристическая функция величины $\dfrac{Z_n}{\sqrt{n}}$ равна

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{Z_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\varphi_{\tilde{X}_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Разложим функцию $\varphi_{\tilde{X}_1}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)$ в окрестности точки $t$=0 в ряд Маклорена с тремя членами:

$$\varphi_{\tilde{X}_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_{\tilde{X}_1}(0) + \varphi'_{\tilde{X}_1}(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\varphi''_{\tilde{X}_1}(0)}{2}\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \qquad (*)$$

где производные берутся по $t$; $o\left(\dfrac{t^2}{n}\right) \to 0$ при $t \to 0$.

Используя свойство (7.15) характеристических функций определим значения

$\varphi_{\tilde{X}_1}(0) = \alpha_0(x) i^0 = 1$,

$\varphi'_{\tilde{X}_1}(0) = \alpha_1(x) i^1 = 0 \cdot i = 0$,

$\varphi''_{\tilde{X}_1}(0) = \alpha_2(x) i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$.

Подставив их в разложение (*) получим

$$\varphi_{\tilde{X}_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

Откуда

$$\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}(t)=\varphi_{Z_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})=\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n$$

Используя второй замечательный предел при $n\to\infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Откуда $\varphi_{\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}(t)\to e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n\to\infty$.

Вспоминая, что характеристическая функция нормальной случайной величины с параметрами $m$ и $\sigma$ равна $\varphi_X(t)=e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$, в пределе получили характеристическую функцию стандартного нормального закона. По теореме о непрерывном соответствии можно сделать вывод о том, что СВ $\frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ сходится к стандартному нормальному распределению, что и утверждается в ЦПТ.

Более общую форму центральной предельной теоремы мы приведем без доказательства.

**Теорема Ляпунова.** Если $X_1 \ldots X_n$– независимые случайные величины, имеющие примерно одинаковые дисперсии $D_i \approx D$ для $\forall i$, то при неограниченном увеличении $n$ ($n\to\infty$) закон распределения их суммы $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ неограниченно приближается к нормальному закону с параметрами $m_Y=\sum_{i=1}^{n}m_i,\ \sigma_Y=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D_i}$.

Требование $D_i \approx D, \forall i$ означает, что ни одно из слагаемых не носит доминирующего характера (влияние всех $X_i$ на сумму $Y$ приблизительно одинаково).

Таким образом, нормальное распределение возникает тогда, когда суммируется много независимых (или слабо зависимых) случайных величин, сравнимых по порядку своего влияния на рассеивание суммы. На практике такая обстановка встречается нередко. Пусть рассматривается отклонение Y какого-то параметра, например, радиоэлектронного устройства от номинала. Это отклонение (при известных допущениях) может быть представлено как сумма $n$ элементарных отклонений, связанных с отдельными причинами:

$$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

где, например:

$X_1$ — отклонение, вызванное влиянием температуры;

$X_2$— отклонение, вызванное влиянием влажности воздуха;

…………………………………………………….

$X_n$ — отклонение, вызнанное недостаточной чистотой материала изделия;

Число $n$ этих элементарных отклонении весьма велико, как и число $n$ причин, вызывающих суммарное отклонение $Y$. Обычно слагаемые $X_1, X_2, \ldots, X_n$ сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы. Действительно, если бы какая-то из случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ оказывала существенно большее влияние на рассеивание суммы, чем все остальные, было бы естественно принять специальные меры для того, чтобы устранить главную причину рассеивания; поскольку такие меры не предпринимаются, можно предположить, что оставшиеся случайные слагаемые сравнимы по порядку своего (равномерно малого) влияния на рассеивание суммы.

Нормальный закон широко распространен в технике; в большинстве случаев ошибки измерения параметров, ошибки выполнения команд, ошибки ввода различных величин в техническое устройство распределены по нормальному (или близкому к нормальному) закону; такая ошибка обычно может быть представлена в виде суммы многих «элементарных ошибок» $X_i$, каждая из которых связана с отдельной, практически независимой от других причиной. Именно в применении к теории ошибок был впервые обоснован Лапласом и Гауссом нормальный закон.

На практике при суммировании величин с одинаковым законом распределения закон распределения суммы можно считать нормальным, если $n$>10.

**Центральная предельная теорема (ЦПТ) представляет собой вторую группу предельных теорем, которые устанавливают связь между законом распределения суммы с. в. и его предельной формой — нормальным законом распределения.**