5.5. Метод конечных разностей решения многомерных задач математической физики. Методы расщепления

При численном решении многомерных задач математической физики исключительно важным является вопрос об *экономичности* используемых методов.

Конечно - разностную схему будем называть экономичной, если число выполняемых операций (операций типа умножения) пропорционально числу узлов сетки.

За последние 50 лет разработано значительное количество экономичных разностных схем численного решения многомерных задач математической физики, основанных на *расщеплении* пространственных дифференциальных операторов по координатным направлениям и использовании метода скалярной прогонки вдоль этих направлений.

Из экономичных конечно-разностных схем, получивших наибольшее распространение, в данном разделе рассматриваются схема *метода переменных направлений* и схема *метода дробных шагов*. Все эти методы будем называть общим термином - *методы расщепления*.

Рассмотрим эти методы на примере задачи для двумерного уравнения параболического типа в прямоугольнике со сторонами ℓ_1, ℓ_2 и граничными условиями I-го рода.

Для пространственно-временной области

$\bar{G}_T = \bar{G} \times [0,T]$, $t \in [0,T]$, $\bar{G} = G + \Gamma$, $G = \ell_1 \times \ell_2$ рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \quad x \in (0,\ell_1), \quad y \in (0,\ell_2), \quad t > 0 \;; \tag{5.71}$$

$$u(x,0,t) = \varphi_1(x,t), \; x \in [0,\ell_1], \; y = 0, \; t > 0 \;; \tag{5.72}$$

$$u(x,\ell_2,t) = \varphi_2(x,t), \; x \in [0,\ell_1], \; y = \ell_2, \; t > 0 \;; \tag{5.73}$$

$$u(0,y,t) = \varphi_3(y,t), \; x = 0, \; y \in [0,\ell_2], t > 0; \tag{5.74}$$

$$u(\ell_1,y,t) = \varphi_4(y,t), \; x = \ell_1, \; y \in [0,\ell_2], \quad t > 0 \;; \tag{5.75}$$

$$u(x,y,0) = \psi(x,y), \; x \in [0,\ell_1], \; y \in [0,\ell_2], \; t = 0. \tag{5.76}$$

Введем пространственно-временную сетку с шагами h_1, h_2, τ соответственно по переменным $x,\ y,\ t$:

$$\omega^{\tau}_{h_1h_2} = \left\{x_i = ih_1, i=\overline{0,I};\ x_j = jh_2, j=\overline{0,J}\ ;\ t^k = k\tau\ ,\ k=0,1,2,\ldots\right\} \qquad (5.77)$$

и на этой сетке будем аппроксимировать дифференциальную задачу (5.71)-(5.76) методом конечных разностей.

Метод переменных направлений

В схеме метода переменных направлений (МПН), как и во всех методах расщепления, шаг по времени τ разбивается на число независимых пространственных переменных (в двумерном случае - на два). На каждом дробном временном слое один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно (по соответствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогонки), а остальные явно. На следующем дробном шаге следующий по порядку дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а остальные – явно и т.д. В двумерном случае схема метода переменных направлений для задачи (5.71)-(5.76) имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^{k}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}\right) + \frac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k} - 2u_{ij}^{k} + u_{ij-1}^{k}\right) + f_{ij}^{k+1/2}, \qquad (5.78)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1j}^{k+1/2}\right) + \frac{a}{h_2^2}\left(u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}\right) + f_{ij}^{k+1/2}. \qquad (5.79)$$

В подсхеме (5.78) на первом дробном шаге $\tau/2$ оператор $a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ аппроксимируется неявно, а оператор $a\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ □ явно (в результате весь конечно-разностный оператор по переменной y переходит в правые части, поскольку u_{ij}^{k} известно). С помощью скалярных прогонок в количестве, равном числу *J-1*, в направлении переменной x получаем распределение сеточной функции $u_{ij}^{k+1/2}$, $i=\overline{1,I-1}$, $j=\overline{1,J-1}$ на первом временном полуслое $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$.

В подсхеме (5.79) оператор $a\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ аппроксимируется неявно на верхнем временном слое $t^{k+1}=(k+1)\tau$, а оператор $a\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\square$ явно в момент времени $t^{k+1/2}=t^k+\tau/2$ (конечно-разностный аналог этого оператора переходит в правые части). С помощью скалярных прогонок в направлении переменной y в количестве, равном числу $I\square 1$ получаем распределение сеточной функции u_{ij}^{k+1}, $i=\overline{1,I-1}$, $j=\overline{1,J-1}$ на втором полуслое $t^{k+1}=t^{k+1/2}+\tau/2$. Шаблон схемы МПН представлен на рис. 5.7.

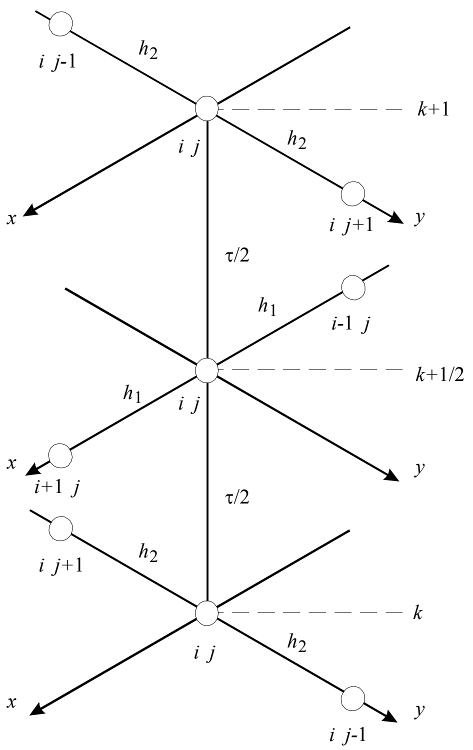

Рис. 5.7 Шаблон схемы метода переменных направлений

Можно показать, что в двумерном случае схема МПН абсолютна устойчива. К *достоинствам* метода переменных направлений можно отнести высокую точность, поскольку метод имеет второй порядок точности по времени. К *недостаткам* можно отнести условную устойчивость при числе пространственных переменных больше двух. Кроме этого, МПН условно устойчив в задачах со смешанными производными уже в двумерном случае.

Метод дробных шагов

В отличие от МПН метод дробных шагов (МДШ) использует только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанные производные. Он обладает довольно значительным запасом устойчивости и в задачах со смешанными производными.

Для задачи (5.71) - (5.76) схема МДШ имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2}-u_{ij}^{k}}{\tau}=\frac{a}{h_1^2}\left(u_{i+1j}^{k+1/2}-2u_{ij}^{k+1/2}+u_{i-1j}^{k+1/2}\right)+\frac{f_{ij}^{k}}{2}\,, \qquad (5.80)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} = \frac{a}{h_2^2}\left(u_{i\,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i\,j-1}^{k+1}\right) + \frac{f_{ij}^{k+1}}{2} \quad . \tag{5.81}$$

С помощью чисто неявной подсхемы (5.80) осуществляются скалярные прогонки в направлении оси x в количестве, равном $J-1$, в результате чего получаем сеточную функцию $u_{ij}^{k+1/2}$. На втором дробном шаге по времени с помощью подсхемы (5.81) осуществляются скалярные прогонки в направлении оси y в количестве, равном $I-1$, в результате чего получаем сеточную функцию u_{ij}^{k+1}. Шаблон схемы МДШ приведен на рис.7.2.

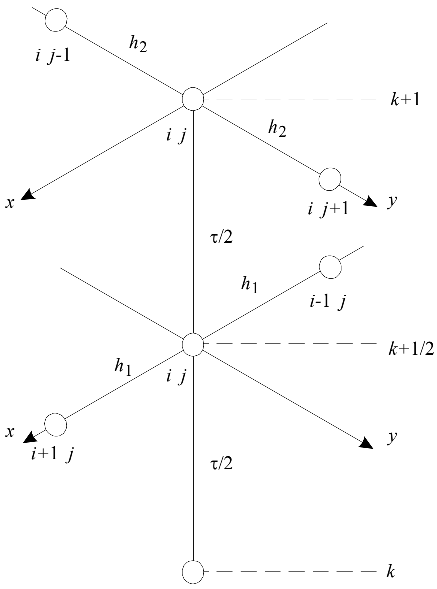

Рис.5.8. Шаблон схемы метода дробных шагов

Схема МДШ имеет порядок $O(\tau + |h|^2)$, т.е. первый порядок по времени и второй – по переменным x и y.

В литературе МДШ называют также методом покоординатного расщепления и локально-одномерным методом.

К достоинствам схемы МДШ можно отнести простоту в алгоритмизации и программировании и абсолютную устойчивость с большим запасом устойчивости даже для задач, содержащих смешанные производные.

К недостаткам МДШ относятся следующие: на каждом дробном шаге достигается частичная аппроксимация, полная аппроксимация достигается на последнем дробном шаге, т.е. имеет место суммарная аппроксимация; схема имеет первый порядок точности по времени.

Методы расщепления численного решения эллиптических задач

Для стационарных многомерных задач математической физики искомая функция в задаче (5.71)□(5.76) не зависит от времени и, следовательно, уравнение (5.71) становится уравнением эллиптического типа (нет производной $\frac{\partial u}{\partial t}$) , т.е. уравнением Лапласа или Пуассона, а поскольку и начальное условие (5.76) отсутствует, то рассмотренные выше методы приходится несколько видоизменить.

Однако, если при решении задач для уравнений Лапласа или Пуассона используется метод установления, то стационарное уравнение Лапласа или Пуассона трансформируется в нестационарное уравнение (5.71), являющееся уже уравнением параболического типа, с введением однородного начального условия (5.76), т.е. $\psi(x, y) \equiv 0$. В этом случае все выше рассмотренные методы применяются без изменения.

Методы расщепления напрямую можно применять также и к решению стационарных задач, *заменив номер временного слоя номером итерации*. При этом в соответствующем конечно-разностном методе конечно-разностная производная по времени $\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{\tau}$ будет отсутствовать.

В качестве начального приближения на нулевой итерации можно использовать линейную интерполяцию краевых условий (5.72)-(5.75) так, как это делалось в разностно-итерационном методе Либмана (см. разд. 5.3).