Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра информатики

О.И.Костюкова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие
для студентов специальности Н.08.02.00 “Информатика”

В 2- х частях

Часть 1

ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Минск 2001

УДК 519.852 (075.8)
ББК 22.19 я 73
К 72

Рецензент: М.П. Дымков, доктор физ.-мат.наук, Ин-т математики НАНБ

К 72 Костюкова О.И.
Методы оптимизации: Учеб. пособие для студентов специальности Н.08.02.00“Информатика”. В 2 ч. Ч.1: Линейное и квадратичное программирование. – Мн.: БГУИР, 2001. 46 с.
ISBN 985-444-208-Х.

Учебное пособие содержит сведения об основных результатах и алгоритмах линейного и квадратичного программирования и составлено на основе базовой рабочей программы курса «Методы оптимизации».

ISBN 985-444-208-Х.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Создание Данцигом в конце 1940-х годов симплекс-метода стало началом современной эры в оптимизации. Этот метод позволил экономистам формулировать большие модели и систематически и эффективно анализировать их. Открытие Данцига совпало с появлением цифровых компьютеров, и симплекс-метод стал одним из первых примеров удачного использования этой новой революционной технологии. С тех пор реализация симплекс-метода постоянно совершенствуется. Сегодня линейное программирование и симплекс-метод – наиболее широко используемые средства оптимизации, и, несмотря на то что в настоящее время появились новые классы эффективных методов (например, метод внутренней точки), актуальность и важность симплекс-метода гарантированы в обозримом будущем.

1.1. Постановка задачи линейного программирования. Общая, нормальная и каноническая формы записи

Задача оптимизации, в которой требуется найти числа x_j, $j \in J$, обращающие в максимум (минимум) линейную форму

$$\sum_{j \in J} c_j x_j \longrightarrow \max \qquad (1.1)$$

при линейных ограничениях (типа равенств и неравенств)

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in K, \qquad (1.2)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I, \qquad (1.3)$$

называется *общей задачей линейного программирования* (ЛП). Здесь $J = \{1,2,..,n\}$, K, I – некоторые заданные конечные наборы индексов; c_j, a_{ij}, b_i, $j \in J$, $i \in K \cup I$ – заданные числа.

Задача, в которой требуется найти максимум линейной формы (1.1) при условиях (1.2) и условиях

$$x_j \ge 0, \quad j \in J, \qquad (1.4)$$

называется задачей линейного программирования *в нормальной форме*.

В матричном виде задача в нормальной форме записи имеет вид

$$c'x \longrightarrow \max,$$
$$Ax \le \beta, \quad x \ge 0, \qquad (1.5)$$

где $c = (c_j, j \in J)$, $x = (x_j, j \in J)$ – $|J|$-векторы; $\beta = (b_i, i \in K)$ – $|K|$- вектор; $A = (a_{ij}, i \in K, j \in J)$ – $|K| \times |J|$-матрица; символом $|J|$ обозначено количество элементов множества *J*; символом ` (штрих) обозначается операция транспонирования.

Задача, в которой максимизируется линейная форма (1.1) при условиях (1.3) и (1.4), называется задачей линейного программирования в *канонической форме* записи.

В матричном виде задача в канонической форме записывается следующим образом

$$c'x \longrightarrow \max,$$
$$Ax = b, \quad x \ge 0, \qquad (1.6)$$

где $A = (a_{ij}, i \in I, j \in J)$, $b = (b_i, i \in I)$ – $|I| \times |J|$ - матрица и $|I|$ - вектор.

В задачах (1.5), (1.6) ограничения $Ax \le \beta$ и $Ax = b$ называются *основными*, ограничения вида $x \ge 0$ – *прямыми*. Линейная форма *c'x* называется *целевой функцией*. Столбцы A_j матрицы $A = (A_j, j \in J)$ называются *векторами условий.*

Вектор $x = (x_j, j \in J)$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи линейного программирования, назовем ее *планом*. План $x^0 = (x_j^0, j \in J)$, обращающий в максимум линейную форму *c'x,* называется *оптимальным* планом или *решением* задачи линейного программирования.

Задачу линейного программирования, заданную в любой форме, можно свести к задаче в канонической форме записи.

Покажем на простых примерах, как задачу, заданную в общей форме, можно свести к канонической.

Пример 1. Привести к канонической форме записи задачу

$$x_1 + x_2 \longrightarrow \max,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$2x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_1 \ge 0.$$

Решение. Для того чтобы первое ограничение записать в форме равенства, введем неотрицательную переменную x_3 ($x_3 \ge 0$). Заменим переменную x_2, на значения которой не наложено требование отрицательности, разностью двух неотрицательных переменных

$$x_2 = x_2' - x_2'', \quad x_2' \ge 0, \quad x_2'' \ge 0.$$

После этих преобразований исходная задача запишется в канонической форме

$$x_1 + x_2' - x_2'' \longrightarrow \max,$$
$$x_1 - x_2' + x_2'' + x_3 = 1,$$
$$2x_1 + x_2' - x_2'' = 2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2' \ge 0, \quad x_2'' \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Пример 2. Привести к канонической форме задачу

$$x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \longrightarrow \min, \qquad (a)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \qquad (b)$$

$$-x_1 - x_4 \le 5, \qquad (c)$$

$$x_2 + x_3 \ge 10, \qquad (d)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \qquad (e)$$

Решение. Умножим коэффициенты целевой функции (a) на *(-1)*, в результате вместо задачи минимизации получим задачу максимизации:

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max. \qquad (f)$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$ и запишем ограничения (c) и (d) в виде

$$-x_1 - x_4 + x_5 = 5,$$

$$x_2 + x_3 - x_6 = 10. \qquad (g)$$

Исключим из задачи переменную x_4, на которую не наложено условие неотрицательности. Для этого из условия (b) выразим x_4 :

$$x_4 = 1 - x_1 + x_2 - x_3. \qquad (h)$$

Подставив (h) в (f), (g), получим каноническую форму задачи :

$$3 - 4x_1 + 4x_2 - x_3 \longrightarrow \max, \qquad (i)$$

$$-x_2 + x_3 + x_5 = 6,$$

$$x_2 + x_3 - x_6 = 10,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0.$$

Отметим что задача максимизации функции (i) эквивалентна максимизации функции

$$-4x_1 + 4x_2 - x_3 \longrightarrow \max.$$

Задача линейного программирования в нормальной форме записи (1.5) приводится к канонической форме путем добавления неотрицательных переменных $y = (y_i, i \in K)$. В результате получим эквивалентную задачу в канонической форме

$$c'x \longrightarrow \max,$$

$$Ax + Ey = \beta, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0. \qquad (1.7)$$

Здесь E – единичная $|K| \times |K|$-матрица.

Задание 1. Доказать, что 1) если (x^0, y^0) – решение задачи (1.7), то x^0 – решение задачи (1.5); 2) если x^* – решение задачи (1.5), то (x^*, y^*), где $y^* = \beta - Ax^*$ – решение задачи (1.7).

В общем случае для задачи линейного программирования может иметь место одна из трех ситуаций:

A. Множество планов задачи пусто, т.е. ограничения задачи несовместны.

B. Множество планов не пусто, но целевая функция не ограничена сверху на множестве планов.

C. Задача имеет решение.

Теорема. *Для того чтобы задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы множество ее планов было не пусто, а целевая функция ограничена сверху на множестве планов.*

Таким образом, для построения решения задачи линейного программирования надо определить, какая из ситуаций A, B или C имеет для нее место, и, если реализовалась ситуация C, то найти оптимальный план x^0.

1.2. Базисный план задачи линейного программирования

Выше показано, что любая задача линейного программирования может быть приведена к канонической форме. Поэтому далее основные теоремы и алгоритмы будут рассмотрены применительно к задаче (1.6), что не снижает общности рассмотрения.

Исследуем задачу линейного программирования в канонической форме (1.6), считая для определенности, что $J = \{1, 2,...,n\}$, $I = \{1, 2,...,m\}$.

В дальнейшем, вплоть до подразд. 1.6, мы будем предполагать, что

$$rank\ A = m \leq n. \tag{1.8}$$

Очевидно, что при нарушении условия (1.8) система $Ax = b$ либо несовместна, либо содержит линейно зависимые условия, которые можно исключить из рассмотрения (см. подразд. 1.6).

План $x = (x_j, j \in J)$ задачи (1.6) назовем *базисным планом*, если существует такое подмножество $J_Б$ множества индексов J, что 1) $| J_Б | = m$, 2) $x_j = 0$, $j \in J \setminus J_Б$, 3) $m \times m$ - матрица $A_Б$, построенная по правилу $A_Б = =(A_j, j \in J_Б)$, не вырождена.

Напомним, что A_j – это j-й столбец матрицы $A = (A_j, j \in J)$.

Множество $J_Б$ назовем *базисом* или *множеством* базисных *индексов*. Множество $J_Н = J \setminus J_Б$ будем называть *множеством небазисных индексов*, матрицу $A_Б$ – *базисной матрицей*.

Иногда базисный план удобно обозначать в виде пары $\{x, J_Б\}$, состоящей из плана x и соответствующего ему базиса $J_Б$.

Базисный план считается *невырожденным*, если

$$x_j > 0,\ j \in J_Б. \tag{1.9}$$

Отметим, что в общем случае плану x можно приписать несколько наборов базисных индексов $J_Б^{(1)}$, $J_Б^{(2)}$, …, $J_Б^{(s)}$, удовлетворяющих условиям 1) - 3). Базисному плану x соответствует единственный набор базисных индексов $J_Б$, если имеют место неравенства (1.9), т.е. базисный план является невырожденным.

Легко проверить, что по заданному набору базисных индексов $J_Б$ базисный план x восстанавливается однозначно по правилу

$$x_j = 0,\ j \in J_H,\ \ x_Б = (x_j, j \in J_Б) = A_Б^{-1} b\ .$$

Здесь $A_Б^{-1}$ – матрица, обратная к базисной матрице $A_Б$.

Далее будет показано, что симплекс-метод при решении задачи (1.6) генерирует последовательность планов x^k, $k = 1, 2, \ldots,$ каждый из которых является базисным планом. Поскольку наша цель – построить последовательность планов, сходящихся к решению задачи (1.6), то итерации симплекс -метода будут иметь смысл только в том случае, если

а) задача (1.6) имеет базисные планы;

б) существует оптимальный базисный план.

Оказывается, оба условия, а и б, верны при минимальных предположениях.

Теорема (**основная теорема ЛП**). *Если для задачи (1.6) существует план, то для нее существует и базисный план. Если задача (1.6) имеет оптимальные планы, то хотя бы один из них базисный.*

Задание 2. Найти базисы $J_Б$ для планов x, приведенных в условиях:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3}, \\ x = (1/2, 0, 1/2); \end{gathered} \qquad \begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,4}, \\ x = (1,0,0,0). \end{gathered}$$

Задание 3. По заданным базисным множествам $J_Б$ построить соответствующие базисные планы:

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ &x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ &x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,4}, \\ &J_Б = \{2,3\}; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ &x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,4}, \\ &J_Б = \{2,4\}. \end{aligned}$$

1.3. Исследование базисного плана на оптимальность

Пусть $x = (x_j, j \in J)$ – базисный план задачи (1.6) с базисом $J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\} \subset J$ и базисной матрицей $A_Б = (A_j, j \in J_Б)$. Сформируем m-вектор $c_Б = (c_j, j \in J_Б)$ и подсчитаем m-вектор потенциалов u по правилу

$$u' = c'_Б A_Б^{-1}.$$

Вычислим оценки

$$\Delta_j = u' A_j - c_j, \; j \in J.$$

Отметим, что по построению $\Delta_j = 0, j \in J_Б$.

Для базисного плана x справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. (Признак оптимальности базисного плана.) *Базисный план x является решением задачи (1.6), если*

$$\Delta_j \geq 0, \; j \in J_H.$$

Утверждение 2. (Достаточное условие неограниченности сверху целевой функции.) *Если существует индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$ и все компоненты z_i, $i = \overline{1,m}$, вектора*

$$z = (z_i, \, i = \overline{1,m}) := A_Б^{-1} A_{j_0} \tag{1.10}$$

не положительны, то целевая функция задачи (1.6) не ограничена сверху на множестве планов.

Утверждение 3. (Возможность строгого улучшения плана.) *Пусть x — невырожденный базисный план задачи (1.6) и для некоторого $j_0 \in J_H$ справедливы соотношения*

$$\Delta_{j_0} < 0, \qquad \max_{i=1,m,} z_i > 0,$$

где вектор $z = (z_i, \; i = \overline{1,m})$ определен по формуле (1.10). Тогда существует базисный план $\bar{x}$, для которого $c'\bar{x} > c'x$.

Компоненты нового базисного плана $\bar{x} = (\bar{x}_j, \, j \in J)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ строятся по правилу

$$\bar{x}_j = 0, \; j \in J_H \setminus j_0, \; x_{j_0} = \Theta_0; \; \bar{x}_{j_i} = x_{j_i} - \Theta_0 z_i, \; i = \overline{1,m}; \tag{1.11}$$

$$\bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0,$$

где $\Theta_0 = \min\limits_{i=\overline{1,m}; z_i > 0} x_{j_i} / z_i$; s – любой индекс из множества

$$\{i \in \{1,2,...,m\} : z_i > 0, x_{j_i} / z_i = \Theta_0\}.$$

Пример 3. Исследовать на оптимальность план $x = (0,0,1,1)$ задачи

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 1,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Решение. В рассматриваемой задаче векторы условий $A_j, j = \overline{1,4}$, имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

План $x = (0,0,1,1)$ является невырожденным базисным планом с базисом $J_Б = \{3,4\}$. Данному базису соответствует базисная матрица

$$A_Б = (A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки плана x на оптимальность подсчитаем вектор потенциалов $u' = (u_1, u_2)$:

$$u' = (u_1, u_2) = c'_Б A_Б^{-1} = (2,3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (2,3)$$

и оценки $\Delta_j = u' A_j - c_j, \; j = \overline{1,4}$:

$$\Delta_1 = 0, \; \Delta_2 = 5, \; \Delta_3 = 0, \; \Delta_4 = 0.$$

Поскольку все оценки $\Delta_j \geq 0, \; j = \overline{1,4},$ то, согласно утверждению 1, план $x = (0,0,1,1)$ является оптимальным.

Задание 4. В задачах линейного программирования

$$x_1 + 4x_2 - 7x_3 \to \max,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 14x_3 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 0,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3},$$
$$x = (2,1,0);$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \to \max,$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 3,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5},$$
$$x = (1,1,1,0,0).$$

для заданного базисного плана x определить, какая из трех ситуаций имеет место:

а) план x оптимален;
б) целевая функция не ограничена сверху на множестве планов;
в) имеется возможность построить лучший базисный план.

1.4. Симплекс-метод. Общая итерация

Пусть x – некоторый базисный план задачи (1.6) с базисом $J_Б$. В результате исследования, основанного на утверждениях 1-3, выясняется либо 1) оптимальность плана x, либо 2) неразрешимость задачи (1.6) в силу неограниченности сверху целевой функции на множестве планов, либо 3) возможность перехода к новому базисному плану $\bar{x}$, для которого $c'\bar{x} \geq c'x$.

Последовательный переход от одного базисного плана к "лучшему" базисному плану вплоть до получения оптимального плана составляет основную идею симплекс-метода.

Для реализации симплекс-метода кроме исходных данных задачи (1.6) (векторов c, b и матрицы A) на каждой итерации необходимо знать следующие параметры:

текущий базисный план $x = (x_j, j \in J)$ (достаточно знать только его базисные компоненты x_j, $j \in J_Б$);

соответствующее плану x множество базисных индексов $J_Б = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$;

$m \times m$ – матрицу $B = A_Б^{-1}$, обратную к базисной матрице $A_Б = (A_j,\ j \in J_Б)$.

Опишем общую итерацию симплекс-метода по шагам.

Шаг 1. Вычислим вектор потенциалов $u' = c'_Б B$, где $c_Б = (c_j, j \in J_Б)$, и оценки $\Delta_j = u'A_j - c_j$, $j \in J_H = J \setminus J_Б$.

Шаг 2. Если $\Delta_j \geq 0,\ j \in J_H$, то STOP: вектор $x^0 = x$ является оптимальным планом задачи (1.6). В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Выберем индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$. Построим вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) := BA_{j_0}$. Если $z_i \leq 0,\ i = \overline{1,m}$, то STOP: задача (1.6) не имеет решения в силу неограниченности сверху целевой функции на множестве планов. В противном случае перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Найдем минимум

$$\Theta_0 = \min_{i=\overline{1,m};\, z_i > 0} x_{j_i} / z_i$$

и выберем индекс $s,\ 1 \leq s \leq m$, для которого $z_s > 0,\ x_{j_s} / z_s = \Theta_0$.

Шаг 5. Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J)$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам

$$\bar{x}_j = 0,\ \ j \in J_H \setminus j_0;\ \ \bar{x}_{j0} = \Theta_0;\ \ \bar{x}_{ji} = x_{ji} - \Theta_0 z_i;$$

$$\bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0 = \{j_1, \ldots, j_{s-1}, j_0, j_{s+1}, \ldots, j_m\}.$$

Шаг 6. Вычислим матрицу $\bar{B}$, обратную к новой базисной матрице $\bar{A}_Б = (A_j, j \in \bar{J}_Б)$, по формуле $\bar{B} = MB$, где матрица $M \in R^{m \times m}$, отличается от единичной $m \times m$-матрицы только s-м столбцом, который имеет вид

$d_s = -(z_1, z_2, ..., z_{s-1}, -1, z_{s+1}, ..., z_m) / z_s$, e_i – единичный m-вектор с единицей на i-м месте.

Переходим к следующей итерации, исходя из новых плана $\bar{x}$, базиса $\bar{J}_Б$ и матрицы $\bar{B}$, обратной к новой базисной матрице $\bar{A}_Б$.

Замечания. 1. На шаге 3 выбирается индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$. В общем случае существует несколько индексов, удовлетворяющих этому условию. При численной реализации симплекс-метода для выбора j_0 можно использовать дополнительные «уточняющие» правила, например, следующие:

а) $|\Delta_{j_0}| = \max\limits_{j \in J_{Н}, \Delta_j < 0} |\Delta_j|$ либо

б) $j_0 = \min\{j \in J : \Delta_j < 0\}$.

2. На шаге 4 выбирается индекс $j_s \in J_Б$ или $1 \le s \le m$, для которого $z_s > 0,\ x_{j_s} / z_s = \Theta_0$. В общем случае этот выбор может оказаться неоднозначным. Можно использовать дополнительные уточняющие правила, например, следующие:

а) $s = \min\{i \in \{1,...,m\} : z_i > 0,\ x_{j_i} / z_i = \Theta_0\}$ либо

б) $j_s = \min\{j_i \in J_Б : z_i > 0, x_{j_i} / z_i = \Theta_0\}$.

3. В современных версиях симплекс-метода для нахождения вектора потенциалов u (см. шаг 1) и вектора z (см. шаг 3) решаются системы $u'A_Б = c'_Б$ и $A_Б z = A_{j_0}$, соответственно. Для эффективного решения последних используется LU-разложение базисной матрицы $A_Б$.

4. Легко подсчитать, что приращение целевой функции при переходе от начального базисного плана x к новому базисному плану $\bar{x}$ равно: $c'\bar{x} - c'x = \Theta_0 |\Delta_{j_0}|$. По построению, $\Delta_{j_0} < 0,\ \Theta_0 \ge 0$. Следовательно, при $\Theta_0 > 0$ происходит «строгое улучшение» плана: $c'\bar{x} > c'x$. Из описания шага 4 видно, что в случае невырожденности начального базисного плана $\{x, J_Б\}$ всегда верно неравенство $\Theta_0 > 0$.

В случае, когда базисный план x (с базисом $J_Б$) является вырожденным, может реализоваться ситуация: $\Theta_0 = 0$. При этом мы получаем $\bar{x} = x,\ \bar{J}_Б \ne J_Б$. В этом случае не происходит улучшения целевой функции, но итерация может оказаться полезной, так как изменяется базис и новый базис может быть ближе к оптимальному базису, чем старый.

Пример 4. Решить задачу ЛП симплекс-методом

$$x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 1,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Решение. Для данной задачи $m = 2$, $n = 4$, а векторы *c, b* и матрица $A = (A_j, j = \overline{1,4})$ имеют вид c'=(1,4,1,-1);

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального базисного плана возьмем вектор $x = (0,0,1,1)$, которому соответствует базисное множество $J_Б = \{3,4\}$ и базисная матрица $A_Б = (A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что $B = A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Используя $x,\ J_Б = \{j_1 = 3, j_2 = 4\}$, B, осуществим первую итерацию симплекс-метода.

Шаг 1. Вычислим вектор потенциалов

$$u' = c'_Б B = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,-1)$$

и оценки $\Delta_j = u' A_j - c_j$, $j = \overline{1,4}$:

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = -1,\ \Delta_3 = 0,\ \Delta_4 = 0.$$

Шаг 2. Поскольку среди оценок Δ_j, $j = \overline{1,4}$, есть отрицательные, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Выберем в качестве индекса $j_0 \in J_H = \{1,2\}$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$, индекс 2, т.е. $j_0 = 2$. Построим вектор $z = (z_1, z_2, ..., z_m) = BA_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Поскольку среди компонент вектора z есть положительные, то перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Найдем минимум

$$\Theta_0 = \min_{i=1,2;\, z_i > 0} x_{j_i} / z_i = x_{j_1} / z_1 = 1/1 = 1.$$

Очевидно, что в данном примере в качестве индекса $s,\ 1 \le s \le m$, для которого $z_s > 0,\ x_{j_s} / z_s = \Theta_0$, можно взять только индекс 1, т.е. $s = 1$, $j_s = j_1 = 3$.

Шаг 5. Построим новый базисный план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j = \overline{1,4})$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам

$$\bar{x}_1 = 0,\quad \bar{x}_2 = \Theta_0 = 1,\quad \bar{x}_3 = 0,\quad \bar{x}_4 = 3,$$
$$\bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0 = \{2,4\}.$$

Шаг 6. Построим матрицу $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и найдем матрицу $\overline{B} = MB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,обратную к новой базисной матрице $\overline{A}_Б = (A_j, j \in \overline{J}_Б) = \ = (A_2, A_4)$. Переходим ко второй итерации, исходя из новых плана $\overline{x}$, базиса $\overline{J}_Б = \{\bar{j}_1 = 2, \bar{j}_2 = 4\}$ и матрицы $\overline{B}$.

Осуществим вторую итерацию.

Шаг 1. Вычислим вектор потенциалов

$$\overline{u}' = \overline{c}'_Б \overline{B} = (4,-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (2,-1)$$

и оценки $\overline{\Delta}_j = u'A_j - c_j$, $j = \overline{1,4}$:

$$\overline{\Delta}_1 = 4,\ \overline{\Delta}_2 = 0,\ \overline{\Delta}_3 = 1,\ \overline{\Delta}_4 = 0.$$

Шаг 2. Поскольку все оценки $\overline{\Delta}_j$, $j = \overline{1,4}$, неотрицательны, то алгоритм заканчивает свою работу: вектор $x^0 = \overline{x} = (0,1,0,3)$ является оптимальным планом рассматриваемой задачи.

Задание 5. Решить задачи ЛП, рассматривая в качестве начального базисного плана план $x^{(0)}$, приведенный в условиях.

$$\begin{aligned} & x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max, \\ & x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ & x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \\ & x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}, \\ & x^{(0)} = (1,0,1,0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max, \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ & 2x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ & x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}, \\ & x^{(0)} = (0,1,0,1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 + x_6 \to \max, \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 + 3x_6 = 15, \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 5, \\ & x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6}, \\ & x^{(0)} = (1,0,0,0,0,4). \end{aligned}$$

1.5. Зацикливание. Конечные модификации симплекс- метода

Итерацию $\{x, J_Б\} \ \to \{\overline{x}, \overline{J}_Б\}$ симплекс-метода назовем *невырожденной,* если $c'\overline{x} > c'x$.

Ясно, что итерация $\{x, J_Б\} \to \{\bar{x}, \bar{J}_Б\}$ может оказаться вырожденной только в том случае, если базисный план $\{x, J_Б\}$ вырожденный, причем в случае вырожденности итерации справедливы соотношения: $x = \bar{x}$, $J_Б \neq \bar{J}_Б$.

Теорема. *При любом выборе начального базисного плана* $\{x, J_Б\}$ *симплекс-метод за конечное число итераций строит оптимальный базисный план задачи (1.6) либо обнаруживает неограниченность сверху ее целевой функции на множестве планов, если в процессе его реализации не встречаются вырожденные итерации.*

При наличии вырожденных итераций при реализации симплекс-метода может возникнуть такая ситуация, когда начиная с некоторого вырожденного базисного плана $\{x, J_Б\}$ мы осуществляем последовательность вырожденных итераций

$$\{x, J_Б\} \to \{x, J_Б^{(1)}\} \to \{x, J_Б^{(2)}\} \to \dots \to \{x, J_Б^{(s)}\}, \qquad (1.12)$$

в которых меняются только базисы $J_Б^{(i)}$ базисного плана x, причем при некотором конечном $s > 1$ имеет место равенство $J_Б^{(s)} = J_Б$. Очевидно, что если мы продолжим операции симплекс-метода исходя из $\{x, J_Б^{(s)}\}$, то опять получим ту же последовательность итерации (1.12) и т. д. Такое явление получило название *зацикливания.*

Первоначально считалось, что зацикливание – крайне редкое явление. Однако позже было замечено, что вероятность возникновения зацикливания увеличивается с ростом размеров задачи. Кроме того, зацикливание является типичным явлением для задач ЛП, возникающих при аппроксимации задач целочисленного программирования. В связи с этим возникла необходимость в разработке специальных приемов борьбы с зацикливанием. К настоящему времени известно много таких приемов. Опишем два из них.

1. Стратегия возмущения (метод Чарнса). Предположим, что в задаче (1.6) мы возмутили вектор правых частей b, заменив его на $b(\varepsilon)$:

$$b(\varepsilon) = b + C\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \dots \\ \varepsilon^m \end{pmatrix},$$

где $C = (C_1, C_2, \dots , C_m)$ – некоторая невырожденная $m \times m$ - матрица со столбцами C_i; $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Возмущения в векторе $b(\varepsilon)$ вызовут возмущения в базисных компонентах $x_Б = (x_j, j \in J_Б)$ каждого базисного плана следующим образом:

$$x_Б(\varepsilon) = x_Б + A_Б^{-1} C \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \dots \\ \varepsilon^m \end{pmatrix} = x_Б + \sum_{i=1}^{m} \left(A_Б^{-1} C_i\right) \varepsilon^i. \qquad (1.13)$$

Матрица C должна быть такой, что на первой итерации вектор $x_Б(\varepsilon)$ должен быть строго положительным при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Для этого достаточно положить $C = (A_Б)_{нач}$, где $(A_Б)_{нач}$ – базисная матрица, соответствующая начальному базису $J_Б^{нач}$. Тогда для начального базисного плана имеем

$$x_Б^{нач}(\varepsilon) = x_Б^{нач} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \dots \\ \varepsilon^m \end{pmatrix} > 0.$$

Предположим, что на текущей итерации имеется базисный план $\{x(\varepsilon), J_Б\}$ возмущенной задачи, для которого справедливы неравенства $x_Б(\varepsilon) > 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Согласно данным подразд. 1.4, новый базисный план $\{\bar{x}(\varepsilon), \bar{J}_Б\}$, построенный в результате одной итерации симплекс-метода из $\{x(\varepsilon), J_Б\}$, будет также невырожденным, если не существует таких двух базисных индексов j_s, $j_k \in J_Б$, что $z_s > 0$, $z_k > 0$ и

$$x_{j_s}(\varepsilon)/z_s = x_{j_k}(\varepsilon)/z_k \qquad (1.14)$$

для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Последние соотношения могут иметь место только в том случае, если k–я и s–я строки матрицы $A_Б^{-1}C$ линейно зависимы. Однако это противоречит тому, что $det\ A_Б \neq 0$, $det\ C \neq 0$. Значит, соотношения (1.14) не могут иметь места и, следовательно, новый базисный план $\{\bar{x}(\varepsilon), \bar{J}_Б\}$ возмущенной задачи будет невырожденным при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Таким образом, мы показали, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ все итерации симплекс-метода для задачи с возмущенным вектором $b(\varepsilon\ )$ будут невырожденными и, следовательно, для возмущенной задачи симплекс- метод будет конечным. Кроме того справедлива следующая теорема.

Теорема. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ каждому базисному плану возмущенной задачи, порожденному базисом $J_Б$, соответствует базисный план (невозмущенной) исходной задачи, порожденный тем же базисом $J_Б$, а из оптимальности базиса $J_Б^0$ в возмущенной задаче следует его оптимальность в исходной задаче.*

Покажем, как описанные выше результаты можно использовать для предотвращения зацикливания в исходной задаче (1.6).

Недостатком описанных выше рассуждений является то, что они верны только при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и заранее невозможно указать конкретное значение ε_0. Однако существуют правила (лексико-графическая стратегия), которые позволяют «мысленно» осуществить процедуру решения возмущенной задачи без явного выбора значения параметра ε.

Пусть в начале текущей итерации для исходной задачи есть базисный план $x = (x_Б , x_Н = 0)$, базис $J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$ и соответствующая ему базисная матрица $A_Б$. Очевидно, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ базис $J_Б$ порождает базисный план $x(\varepsilon)= (x_Б(\varepsilon), x_Н(\varepsilon) = 0)$, где $x_Б(\varepsilon)$ имеет вид (1.13), возмущенной задачи. Предположим, что мы осуществляем итерацию симплекс-метода для исходной и возмущенной задач, исходя из базисных планов $\{x, J_Б\}$ и $\{x(\varepsilon), J_Б\}$. Ясно, что для обеих задач шаги 1–3 итерации будут полностью совпадать. Значит, совпадут и индексы $j_0 \in J_Н$, подлежащие вводу в базис. Перейдем к шагу 4, на котором определяется индекс j_s, подлежащий выводу из базиса $J_Б$. Для возмущенной задачи индекс j_s однозначно определяется из соотношений

$$\Theta_0(\varepsilon) = \min_{\substack{i=\overline{1,m} \\ z_i > 0}} x_{j_i}(\varepsilon)/z_i = x_{j_s}(\varepsilon)/z_s, \tag{1.15}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Легко проверить, что найти единственный индекс $j_s \in J_Б$, определяемый условием (1.15), можно по следующему правилу.

Положим

$$\Delta I^0 = \{s \in \{1, 2, ..., m\} : z_s > 0,\ x_{j_s} / z_s = \min_{\substack{i=\overline{1,m},\\ z_i > 0}} x_{j_i} / z_i\}$$ (1.16)

и построим множества $\Delta I^l,\ l = \overline{1, m}$, по рекуррентным правилам

$$\Delta I^l = \{s \in \Delta I^{l-1} : \tilde{c}_{sl} / z_s = \min_{i \in \Delta I^{l-1}} \tilde{c}_{il} / z_i\},\quad l = 1, 2, ..., m, \qquad (1.17)$$

где $(\tilde{c}_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m}) = A_Б^{-1} C$.
По построению,

$$\Delta I^l \subset \Delta I^{l-1},\ l = \overline{1, m};\quad |\Delta I^m| = 1. \qquad (1.18)$$

Обозначим через l_0 наименьший индекс $0 \le l \le m$, при котором $|\Delta I^{l_0}| = 1$:

$$l_0 = \min l,\quad l \in \{i \in \{0, 1,\ 2, ..., m\} : |\Delta I^i| = 1\}. \qquad (1.19)$$

Пусть $\Delta I^{l_0} = \{s\}$. Тогда индекс $j_s \in J_Б$ совпадает с индексом, определяемым соотношениями (1.15).

Ясно, что для исходной задачи любой индекс вида j_i, где $i \in \Delta I^0$, можно взять в качестве индекса, выводимого из базиса. Согласно (1.18) $s \in \Delta I^0$, следовательно, индекс j_s можно выводить из базиса в исходной задаче. Таким образом, в качестве нового базиса для исходной задачи можно взять базис

$$\bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0, \qquad (1.20)$$

где индекс j_s однозначно определяется по правилам (1.16)–(1.19). (Для возмущенной задачи новый базис (1.20) является единственно возможным).

Из сказанного выше следует, что симплекс-метод будет конечным и для исходной задачи (1.6), если на шаге 4 индекс j_s, подлежащий выводу из базиса, определять по правилам (1.16), (1.17), (1.19).

2. Правило Блэнда. В 1977 г. Р. Блэнд предложил очень простое правило предотвращения зацикливания в симплекс- методе. Это правило сводится к следующему.

При реализации итерации симплекс-метода на шаге 3 индекс $j_0 \in J_H$, подлежащий вводу в новый базис, однозначно определяется по правилу

$$j_0 = \min j,\ j \in J_H,\ \Delta_j < 0, \qquad (1.21)$$

а на шаге 4 индекс $j_s \in J_Б$, подлежащий выводу из базиса, однозначно определяется соотношениями

$$j_s = \min_{i \in \Delta I^0} j_i, \text{ где } \Delta I^0 = \{i \in \{1,2,\dots,m\} : z_i > 0,\ x_{j_i} / z_i = \Theta_0\}. \qquad (1.22)$$

При использовании дополнительных правил (1.21), (1.22) симплекс-метод для любой задачи ЛП (с заданным начальным базисным планом) за конечное число итераций строит оптимальный базисный план либо обнаруживает неограниченность сверху целевой функции на множестве планов.

1.6. Первая фаза симплекс-метода

Все предыдущие утверждения и операции симплекс-метода были справедливы в предположении, что для задачи в канонической форме (1.6) выполнено условие (1.8).

Понятно, что для произвольной задачи (1.6) это условие может нарушаться. Поэтому, прежде чем применять описанный симплекс-метод необходимо исходную задачу (1.6) привести к такому виду, для которого выполняются соотношения (1.8).

Кроме того, из описания общей итерации симплекс-метода видно, что для начала его работы необходимо знать начальный базисный план x и начальный набор базисных индексов $J_Б$, для которых выполняются соотношения:

$$x_j = 0,\ j \in J \setminus J_Б; \quad Ax = b;$$
$$\det A_Б \neq 0,\ A_Б = (A_j,\ j \in J_Б).$$

Проблема нахождения такой начальной информации может оказаться нетривиальной. Действительно, в общем случае по трудоемкости это проблема эквивалентна построению решения некоторой задачи линейного программирования. Для преодоления указанной трудности используется двухфазный симплекс-метод, общая схема которого состоит в следующем.

На первой фазе формируется вспомогательная задача ЛП, которая отличается от исходной задачи (1.6). Вспомогательная задача строится таким образом, что для нее выполняется условие (1.8), легко строится начальный базисный план и она имеет решение. Анализ решения вспомогательной задачи позволяет:

1) определить, совместны ли ограничения исходной задачи (1.6);

2) проверить, выполняется ли условие (1.8) для исходной задачи (1.6) и в случае его нарушения обнаружить линейно зависимые основные ограничения и удалить их из условий задачи;

3) в случае совместности ограничений задачи (1.6) построить для нее начальный базисный план x и базис $J_Б$.

Если анализ решения вспомогательной задачи закончился построением начального базисного плана для исходной задачи, то переходим ко второй фазе алгоритма. Вторая фаза состоит в решении исходной задачи описанным выше симплекс-методом, при этом в качестве начальной используется информация, полученная на первой фазе.

Опишем подробнее первую фазу алгоритма. Без ограничения общности будем считать, что в задаче (1.6) вектор b удовлетворяет неравенству $b \ge 0$. Тогда задачу первой фазы можно записать в виде

$$-e'x_u \to \max_{x, x_u} \qquad (1.23)$$
$$Ax + Ex_u = b,\ x \ge 0,\ x_u \ge 0,$$

где $x = (x_j,\ j \in J)$ – исходные переменные, $x_u = (x_j,\ j \in J_u)$ – искусственные переменные, $J = \{1,2,\ldots,n\}$, $J_u = \{n+1, n+2,\ldots,n+m\}$, $E \in R^{m\times m}$ – единичная матрица, $e = (1,1,\ldots,1),\ e \in R^m$.

Легко проверить, что вектор (x, x_u) с компонентами

$$x = 0, \quad x_u = b \ge 0 \qquad (1.24)$$

является базисным планом задачи (1.23) с базисом

$$J_Б = J_u \subset J \cup J_u \qquad (1.25)$$

и базисной матрицей $A_Б = E$.

Решим задачу (1.23) симплекс-методом, описанным в подразд. 1.4, используя в качестве начального базисный план (1.24). Поскольку целевая функция задачи (1.23) ограничена сверху на множестве ее планов $(-e'x_u \le 0)$, то через конечное число итераций будет построен оптимальный базисный план (x^*, x_u^*) задачи (1.23) и соответствующий ему базис $J_Б^* \subset J \cup J_u$, $|J_Б^*| = m$.

Справедлива следующая теорема

Теорема. *Ограничения исходной задачи (1.6) совместны тогда и только тогда, когда компонента* x_u^* *оптимального базисного плана задачи (1.23) равна нулю.*

Проведем анализ решения задачи (1.23). Возможны случаи:

1) $x_u^* \ne 0$;

2) $x_u^* = 0, J_Б^* \cap J_u = \varnothing$;

3) $x_u^* = 0, J_Б^* \cap J_u \neq \varnothing$.

Пусть реализовался случай 1. Прекращаем исследование исходной задачи (1.6), так как согласно теореме она не имеет планов.

Рассмотрим случай 2. Легко проверить, что вектор x^* с базисным множеством $J_Б^*$ является базисным планом задачи (1.6). Переходим ко второй фазе алгоритма, исходя из этого плана.

Исследуем случай 3. Ясно, что вектор x^* является планом задачи (1.6), но множество $J_Б^*$ не является его базисом для задачи (1.6). Попытаемся построить базис для плана x^* в задаче (1.6).

Пусть $J_Б^* = \{j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots, j_m\}$ и $j_k \in J_u$. Обозначим

$$A_j := e_{j-n},\ j \in J_u; \quad A_Б^* = (A_j,\ j \in J_Б^*); \qquad \alpha_j = e'_k (A_Б^*)^{-1} A_j, \quad j \in J \setminus J_Б^*.$$

Возможны подслучаи:

а) $\exists j_0 \in J \setminus J_Б^*, \alpha_{j_0} \neq 0$; б) $\alpha_j = 0, j \in J \setminus J_Б^*$.

Если реализовался подслучай а, то оптимальному плану (x^*, x_u^*) задачи (1.23) припишем новый базис

$$\bar{J}_Б^* = (J_Б^* \setminus j_k) \cup j_0. \qquad (1.26)$$

Очевидно, что по построению, $|\bar{J}_Б^* \cap J_u| = |J_Б^* \cap J_u| - 1$. Снова проверяем, какая из ситуаций, 2 или 3, имеет место для оптимального плана (x^*, x_u^*) задачи (1.23) и нового базиса (1.26).

Подслучай б означает, что в исходной задаче (1.6) основное ограничение с индексом $i_0 := j_k - m \in I$ является линейно зависимым с остальными основными ограничениями этой задачи. Множество планов задачи (1.6) не изменится, если мы удалим это ограничение, т.е. заменим множество индексов I на $\tilde{I} = I \setminus i_0$. Для преобразованной задачи (1.6) вспомогательная задача первой фазы получится из задачи (1.23) после удаления ограничения с индексом $i_0 \in I$ и искусственной переменной $x_{j_k}^* = 0,\ \ j_k \in J_u$, т.е. заменой множеств I и J_u на $\tilde{I} = I \setminus i_0$ и $\tilde{J}_u = J_u \setminus j_k$. Очевидно, что для новой задачи первой фазы вектор $(x_j^*, j \in J \cup \tilde{J}_u)$ является оптимальным базисным планом с базисом $\tilde{J}_Б^* = J_Б^* \setminus j_k$, для которого $|\tilde{J}_Б^*| = |\tilde{I}| = m - 1$, $|\tilde{J}_Б^* \cap \tilde{J}_u| = |J_Б^* \cap J_u| - 1$. Для плана $(x_j^*, j \in J \cup \tilde{J}_u)$ и новых множеств $\tilde{J}_Б^*$, $\tilde{J}_u$ вновь проверяем, какая из ситуаций, 2 или 3, имеет место.

Ясно, что не более чем через m шагов из основных ограничений задачи (1.6) будут исключены все линейно зависимые ограничения и она будет сведена к задаче

$$c'x \to \max,$$
$$\overline{A}x = b, \quad x \geq 0, \tag{1.27}$$

где $\overline{A} = (a_{ij}, i \in \overline{I}, \ j \in J), \quad \overline{b} = (b_i, i \in \overline{I}), \quad \overline{I} \subset I, \quad rank\,\overline{A} = \overline{m} \leq |J|, \quad \overline{m} = |\overline{I}|.$
При этом для задачи (1.27) будет построен базисный план x^* с некоторым базисом $J_Б \subset J, \quad |J_Б| = \overline{m}.$

Дальнейшее решение задачи (1.27) осуществляем симплекс-методом, описанным в подразд. 1.4, используя в качестве начальных построений базисный план x^* с базисом $J_Б$.

Задание 6. Решить задачи ЛП, определяя начальный базисный план с помощью первой фазы симплекс-метода.

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max, \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ & x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \\ & x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max, \\ & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ & 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ & x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 \to \max, \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 7, \\ & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 10, \\ & x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}. \end{aligned}$$

2. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

2.1. Определение двойственной задачи. Соотношения двойственности

Рассмотрим задачу линейного программирования, заданную в произвольной форме записи:

$$\sum_{j \in J} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i \in K, \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j = b_i, \ \ i \in I; \ \ x_j \ge 0, \ \ j \in J_* \subset J,$$

где J, K, I – некоторые конечные множества индексов.

Задачу линейного программирования

$$\sum_{i\in K\cup I} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{i\in K\cup I} a_{ij} y_i \ge c_j, \ \ j \in J_*, \qquad (2.2)$$

$$\sum_{i\in K\cup I} a_{ij} y_i = c_j, \ \ j \in J \setminus J_*, \ \ y_i \ge 0, \ \ i \in K,$$

назовем *двойственной* по отношению к задаче (2.1). При этом задача (2.1) считается *прямой.*

Из приведенного определения следует, что для задачи линейного программирования в нормальной форме

$$c'x \to \max, \ \ Ax \le \beta, \ \ x \ge 0, \qquad (2.3)$$

двойственной является задача

$$\beta'y \to \min, \ \ A'y \ge c, \ \ y \ge 0, \qquad (2.4)$$

а для задачи в канонической форме

$$c'x \to \max, \ \ Ax = b, \ \ x \ge 0, \qquad (2.5)$$

двойственная задача имеет вид

$$b'y \to \min, \ \ A'y \ge b. \qquad (2.6)$$

Легко проверить, что если в качестве исходной взять задачу линейного программирования (2.2), то двойственной к ней будет задача (2.1).

Сравнивая пары двойственных задач (2.1) и (2.2), приходим к следующему правилу построения двойственной задачи:

1. Двойственная задача является задачей минимизации линейной формы, коэффициенты которой совпадают с коэффициентами вектора условий прямой задачи.

2. Каждому i-му основному ограничению прямой задачи соответствует i-я переменная y_i двойственной задачи. При этом для i-й переменной y_i двойственной задачи выполняются соотношения:

а) она не имеет ограничений на знак, если i-е основное ограничение прямой задачи имело вид равенства;

б) $y_i \ge 0$ ($y_i \le 0$), если i-е основное ограничение прямой задачи имело вид неравенства ≤ (≥).

3. Каждой j-й переменной x_j прямой задачи соответствует j-е основное ограничение двойственной задачи. При этом вид j-го основного ограничения двойственной задачи определяется условиями:

а) оно имеет вид равенства, если переменная x_j в прямой задаче не имеет ограничений на знак;

б) оно имеет вид неравенства ≥ (≤), если в прямой задаче переменная x_j имела ограничение $x_j \ge 0$ ($x_j \le 0$) на знак.

Рассмотрим общую задачу линейного программирования (2.1) и двойственную к ней задачу (2.2). Назовем эти задачи *парой двойственных задач.*

Теорема. *Если одна из задач двойственной пары имеет решение, то другая задача также имеет решение. При этом для любых оптимальных планов* $x^0 = (x_j^0, j \in J)$ *и* $y^0 = (y_i^0, i \in K \cup I)$ *имеет место равенство*

$$\sum_{j \in J} c_j x_j^0 = \sum_{i \in K \cup I} b_i y_i^0 .$$

Следствие 1. *Для разрешимости одной из задач двойственной пары необходимо и достаточно, чтобы каждая из задач этой пары имела хотя бы один план.*

Следствие 2. *Для того чтобы одна из задач двойственной пары имела планы, а множество планов другой задачи было пусто, необходимо и достаточно, чтобы целевая функция первой задачи была не ограничена на множестве ее планов.*

Следствие 3. *Для любых планов* $x = (x_j, j \in J)$, $y = (y_i, i \in K \cup I)$ *задач двойственной пары справедливо неравенство*

$$\sum_{j \in J} c_j x_j < \sum_{i \in K \cup I} b_i y_i .$$

Следствие 4. *Для оптимальности планов* $x = (x_j, j \in J)$, $y = (y_i, i \in K \cup I)$ *задач двойственной пары необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$\sum_{j \in J} c_j x_j = \sum_{i \in K \cup I} b_i y_i .$$

Пример 1. Записать задачу, двойственную к данной

$$x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \to \max,$$
$$2x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \ge 4,$$
$$x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_1 - x_3 + 2x_5 \geq 3,$$

Решение. Чтобы записать задачу, двойственную к данной, приведем систему к виду (2.1)

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \leq -4, \\ -x_1 + x_3 - 2x_5 \leq -3, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_i \geq 0, \quad i \in J_* = \{1,3\}. \end{gathered}$$

Теперь воспользуемся определением (2.2) и запишем задачу, двойственную к данной

$$\begin{gathered} 2y_1 - y_2 - y_3 \geq 1, \\ -y_1 + y_2 + y_4 = -10, \\ -2y_2 + y_3 + y_4 \geq 2, \\ y_2 - y_4 = -1, \\ -y_2 - 2y_3 = 7, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{gathered}$$

Задание 1. Исходя из определения, записать задачу, двойственную к данной задаче ЛП

$$\begin{gathered} x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 2, \\ x_2 \leq 0; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \leq 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \leq 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \leq 0, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}. \end{gathered}$$

2.2. Базисный двойственный базисный план

Далее для определенности будем рассматривать пару двойственных задач (2.5), (2.6), в которой прямая задача имеет каноническую форму записи (2.5) с матрицей $A = (a_{ij} \ ,i \in I, \ j \in J)$, $rank\ A = m, \ m = |I|$.

Вектор $y \ = (y_i \ ,i \in I)$ назовем *двойственным планом,* если $A'y \geq c$.

Двойственный план y называется *базисным* двойственным планом, если существует такое множество $J_Б \subset J$, что

$$1) \ |J_Б| = m, \quad 2) \ A'_j y = c_j, \ \ j \in J_Б, \quad 3) \ \det \ A_Б \neq 0, \ \ где \ \ A_Б = (A_j, j \in J_Б).$$

Как и раньше, множество $J_Б$ будем называть базисом или множеством базисных индексов, матрицу $A_Б$ – базисной матрицей.

Отметим, что двойственный базисный план однозначно восстанавливается по заданному базису: $y' = c'_Б A_Б^{-1}$, где $c_Б = (c_j, j \in J_Б)$.

Базисный двойственный план y считается *невырожденным*, если $A'_j y > c_j, j \in J_H = J \setminus J_Б$.

Пусть y – базисный двойственный план с базисом $J_Б$. n-вектор $\aleph = (\aleph_j, j \in J)$ с компонентами, построенными по правилу $\aleph_j = 0, j \in J_{\text{Н}}; \aleph_Б = (\aleph_j, j \in J_Б) = A_Б^{-1} b$, назовем *псевдопланом* задачи (2.5), соответствующим базису $J_Б$.

Утверждение 1. *Если среди базисных компонент псевдоплана $\aleph$ нет отрицательных, т. е. $\aleph_j \geq 0, j \in J_Б$, то псевдоплан $\aleph$ – оптимальный план задачи (2.5). При этом базисный двойственный план y, определяющий псевдоплан $\aleph$, является решением задачи (2.6).*

Утверждение 2. *Пусть среди базисных компонент $\aleph_j, j \in J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, псевдоплана $\aleph$ имеется отрицательная компонента $\aleph_{j_s} < 0$ и выполняются неравенства*

$$\mu_j = e'_s A_Б^{-1} A_j \geq 0, j \in J_H. \tag{2.7}$$

Тогда целевая функция двойственной задачи не ограничена снизу на множестве своих планов, а ограничения прямой задачи несовместны.

Утверждение 3. *Пусть базисный двойственный план y (с базисом $J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$) является невырожденным. Если среди базисных компонент псевдоплана $\aleph$, построенного по $J_Б$, есть отрицательная компонента $\aleph_{j_s}$, для которой $\min\limits_{j \in J_H} \mu_j < 0,$ то можно перейти к новому базисному двойственному плану $\bar{y}$ с лучшим значением двойственной целевой функции: $b'\bar{y} < b'y$.*

Новый базисный двойственный план $\bar{y}$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ строятся по плану

$$\bar{y} = y + \sigma_0 \Delta y, \quad \bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0,$$

где $\Delta y' = e'_s A_Б^{-1}, \sigma_0 = \min\limits_{j \in J_H, \mu_j < 0} (c_j - A'_j y)/\mu_j$, j_0 – произвольный индекс из множества $\{j \in J_H : \mu_j < 0, (c_j - A'_j y)/\mu_j = \sigma_0\}$, e_i – единичный m-вектор с единицей на i-м месте.

2.3. Двойственный симплекс-метод

Метод решения канонической задачи линейного программирования, рассмотренный в разд. 1, впредь будем называть прямым симплекс-методом.

Опишем двойственный симплекс-метод, который является специальным алгоритмом построения оптимального плана задачи линейного программирования (2.5) посредством преобразования планов двойственной задачи (2.6).

Для решения задачи (2.5) двойственным симплекс-методом, кроме исходных данных *c, b, A*, на каждой итерации необходимо знать следующие параметры:

1) текущий базисный двойственный план *y*;
2) соответствующий двойственному плану *y* базис $J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$;
3) $m \times m$-матрицу $B = A_Б^{-1}$, обратную к базисной матрице $A_Б = (A_j, j \in J_Б)$.

Опишем общую итерацию двойственного симплекс-метода по шагам.

Шаг 1. Найдем базисные компоненты псевдоплана $\aleph$, соответствующего базису $J_Б$: $\aleph_Б = (\aleph_j, j \in J_Б) = Bb$.

Шаг 2. Если выполняются неравенства $\aleph_j \geq 0, j \in J_Б$, то STOP: вектор $\aleph = (\aleph_Б, \aleph_Н = 0)$ является оптимальным планом задачи (2.5), а вектор *y* – оптимальным планом задачи (2.6). В противном случае перейдем к шагу 3.

Шаг 3. Среди базисных индексов $J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$ выберем индекс j_s, для которого $\aleph_{j_s} < 0$. Подставим *m*-вектор Δy и числа $\mu_j, j \in J_Н = J \setminus J_Б$, по правилам

$$\Delta y' = e_s' B; \quad \mu_j = \Delta y' A_j, j \in J_Н.$$

Если $\mu_j \geq 0, j \in J_Н$, то STOP: ограничения исходной задачи (2.5) несовместны, а целевая функция двойственной задачи (2.6) не ограничена снизу на множестве ее планов. В противном случае перейдем к шагу 4.

Шаг 4. Найдем минимум

$$\sigma_0 = \min_{j \in J_{Н,}\ \mu_j < 0} (c_j - A_j' y) / \mu_j$$

и выберем в качестве индекса j_0 любой элемент из множества $\{j \in J_Н : \mu_j < 0, (c_j - A_j' y)/\mu_j = \sigma_0\}$.

Шаг 5. Построим новый базисный двойственный план $\bar{y}$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам

$$\bar{y} = y + \sigma_0 \Delta y; \quad \bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0 = \{j_1, ..., j_{s-1}, j_0, j_{s+1}, ..., j_m\}.$$

Шаг 6. Вычислим матрицу $\bar{B}$, обратную к новой базисной матрице $\bar{A}_Б = (A_j, j \in \bar{J}_Б)$, по правилам, описанным на шаге 6 итерации прямого симплекс-метода (см. подразд. 1.4).

Переходим к следующей итерации, исходя из новых значений для базисного двойственного плана $\bar{y}$, базиса $\bar{J}_Б$ и матрицы $\bar{B}$.

Замечания. 1. На шаге 3 выбор индекса $j_s \in J_Б$ и на шаге 4 выбор индекса $j_0 \in J_H$ могут оказаться неоднозначным. Как и в прямом симплекс-методе, это может привести к зацикливанию алгоритма. Для предотвращения зацикливания рекомендуется использовать дополнительные правила, аналогичные приведенным в подразд. 1.6. Например, правило Блэнда для двойственного симплекс-метода сводится к следующему:
на шаге 3 индекс j_s однозначно определяется условием

$$j_s = \min j_i, \quad i \in \{k \in \{1,2,...,m\} : \aleph_{j_k} < 0\},$$

а на шаге 4 индекс j_0 однозначно определяется соотношением

$$j_0 = \min j,\ j \in \{j \in J_H : \mu_j < 0, (c_j - A'_j y)/\mu_j = \sigma_0\}.$$

2. Легко проверить, что если базисный двойственный план $\{y, J_Б\}$ является невырожденным, то для нового базисного плана $\{\bar{y}, \bar{J}_Б\}$ справедливо неравенство $b'\bar{y} < b'y$. (В общем случае верно неравенство $b'\bar{y} \le b'y$.)

3. Проблема построения начального базисного двойственного плана $\{y, J_Б\}$ является нетривиальной. Для ее решения по аналогии с разделом 1 можно разработать двухфазный двойственный симплекс-метод.

Пример 2. Решить задачу ЛП двойственным симплекс-методом

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \max, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 6x_4 = 9, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}, \end{gathered}$$

приняв в качестве начального базисного двойственного плана вектор $y = (3/2, -1/2)$ и базисное множество $J_Б = \{1,2\}$.

Решение. Базису $J_Б = \{1,2\}$ соответствует базисная матрица $A_Б = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Построим матрицу $B = A_Б^{-1} = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Используя $y, J_Б = \{j_1 = 1, j_2 = 2\}$ и B, осуществим первую итерацию.

Шаг 1. Найдем базисные компоненты псевдоплана $\aleph$, соответствующего базису $J_Б$:

$$\aleph_Б = (\aleph_1,\ \aleph_2) = Bb = 1/4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Условие $\aleph_j \ge 0,\ j \in J_Б$, не выполняется, следовательно, переходим к шагу 3.

Шаг 3. В качестве индекса $j_S \in J_Б = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, для которого $\aleph_{j_s} < 0$, выберем индекс $j_s = j_2 = 2.$ Подсчитаем вектор Δy и числа $\mu_j = \Delta y' A_j$, $j \in J_H = \{3,4\}$:

$$\Delta y' = e_2' B = 1/4 \cdot (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (1/4, -1/4);\ \mu_3 = -2,\ \mu_4 = 1.$$

Поскольку среди чисел $\mu_3,\ \mu_4$ есть отрицательные, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Найдем минимум

$$\sigma_0 = \min_{j \in J_{H,}\ \mu_j < 0} (c_j - A_j' y)/\mu_j = (c_3 - A_3' y)/2 = 1/2.$$

В данном примере в качестве индекса j_0 можно выбрать только индекс $j_0 = 3$.

Шаг 5. Построим новый базисный двойственный план $\bar{y}$ и соответствующий ему базис $\bar{J}_Б$ по правилам

$$\bar{y} = y + \sigma_0 \Delta y = 1/8 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix};\quad \bar{J}_Б = (J_Б \setminus j_s) \cup j_0 = \{1,3\}.$$

Шаг 6. По правилам, описанным на шаге 6 прямого симплекс-метода, вычислим матрицу $\bar{B} = 1/8 \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, обратную к новой базисной матрице

$$\bar{A}_Б = (A_1,\ A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Переходим ко второй итерации, исходя из новых значений для базисного двойственного плана $\bar{y}$, базиса $\bar{J}_Б = \{\bar{j}_1 = 1, \bar{j}_2 = 3\}$ и матрицы $\bar{B}$.

Осуществим вторую итерацию.

Шаг 1. Найдем базисные компоненты псевдоплана $\bar{\aleph}$, соответствующего базису $\bar{J}_Б$:

$$\bar{\aleph}_Б = (\bar{\aleph}_1,\ \bar{\aleph}_3) = \bar{B} b = 1/8 \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Поскольку среди компонент $\bar{\aleph}_j \geq 0,\ j \in \bar{J}_Б$, есть отрицательные, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. На данной итерации в качестве индекса $\bar{j}_S \in \bar{J}_Б$, для которого $\bar{\aleph}_{\bar{j}_s} < 0$, можно выбрать только индекс $\bar{j}_s = \bar{j}_1 = 1.$ Найдем

$$\Delta\bar{y}' = e_1'\bar{B} = 1/8\cdot(11,-3) \text{ и } \mu_2 = \Delta\bar{y}' A_2 = 1/2, \quad \mu_4 = \Delta\bar{y}' A_4 = -1/2.$$

Поскольку среди чисел $\mu_2,\ \mu_4$ есть отрицательные, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Найдем

$$\sigma_0 = (c_4 - A_4'\bar{y})/\mu_4 = 7.$$

В качестве индекса $\bar{j}_0$ можно выбрать только индекс $\bar{j}_0$=4.

Шаг 5. Построим новый базисный двойственный план $\tilde{y}$ и соответствующий ему базис $\tilde{J}_Б$:

$$\tilde{y} = \bar{y} + \sigma_0\Delta\bar{y} = 1/8\cdot\begin{pmatrix}90\\-26\end{pmatrix}; \quad \tilde{J}_Б = (\bar{J}_Б \setminus \bar{j}_s)\cup\bar{j}_0 = \{4,3\}.$$

Шаг 6. Вычислим матрицу $\tilde{B} = \begin{pmatrix}-11/4 & 3/4\\ -3/2 & 1/2\end{pmatrix}$, обратную к новой базисной матрице $\tilde{A}_Б = (A_4, A_3)$.

Переходим к третьей итерации, исходя из новых значений для базисного двойственного плана $\bar{y}$, базиса $\bar{J}_Б = \{\bar{j}_1 = 1, \bar{j}_2 = 3\}$ и матрицы $\bar{B}$.

Опишем третью итерацию.

Шаг 1. Найдем базисные компоненты псевдоплана $\tilde{\aleph}$, соответствующего базису $\tilde{J}_Б$:

$$\tilde{\aleph}_Б = (\tilde{\aleph}_4,\ \tilde{\aleph}_3) = \tilde{B}b = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Все компоненты $\tilde{\aleph}_j,\ j\in\tilde{J}_Б$, положительны, следовательно, вектор $\tilde{\aleph} = (\tilde{\aleph}_Б, \tilde{\aleph}_H = 0) = (0,0,3,4)$ является оптимальным планом рассматриваемой задачи, а вектор $\tilde{y}$ – ее оптимальным двойственным планом. Задача решена.

Задание 2. Решить задачи двойственным симплекс-методом, приняв в качестве исходного базисный план, построенный по указанному в условиях базису.

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max,\\
&x_1 + x_2 - 3x_3 = 0,\\
&x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,\\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3},\\
&J_Б = \{1,2\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \to \max,\\
&x_1 + x_2 - 4x_4 + 2x_5 = -2,\\
&x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -2,\\
&x_1 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2,\\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5},\\
&J_Б = \{1,2,3\};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 - 10x_6 \to \max,\\
&x_1 + 8x_2 - x_3 + 10x_4 + 14x_5 24x_6 = 4,\\
&x_2 - 7x_3 + 8x_4 - 5x_5 + 3x_6 = 28,\\
&x_3 - x_4 = x_5 = -4,\\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6},\\
&J_Б = \{1,2,3\}.
\end{aligned}
$$

3. ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данном разделе рассматривается задача квадратичного программирования (КП). Интерес к подобным задачам можно объяснить, по крайней мере, двумя фактами. Во-первых, квадратичные модели широко распространены в приложениях. Во-вторых, во многих методах нелинейного программирования направление спуска на каждой итерации определяется как решение квадратичной задачи.

3.1. Постановка задачи. Определения

Задача квадратичного программирования в канонической форме состоит в минимизации квадратичной функции

$$f(x) := c'x + 1/2x'Dx \to \min, \tag{3.1}$$

при линейных ограничениях

$$Ax = b, \quad x \ge 0. \tag{3.2}$$

Здесь $A = (A_j, j \in J)$ – $m \times m$-матрица со столбцами A_j, $j \in J = \{1,2,\dots,n\}$; x и c – n-векторы, b – m-вектор, D – симметричная ($D=D'$) положительно полуопределенная ($D \ge 0$) $n \times n$-матрица.

Напомним, что матрица $D \in R^{n \times n}$ называется *положительно полуопределенной,* если $l'Dl \ge 0$ для любого $l \in R^n$.

В дальнейшем элементы матрицы D будем обозначать через d_{ij}, т.е. $D = (d_{ij}, i \in J, j \in J)$.

В задачах квадратичного программирования, как и в задачах линейного программирования, вместо линейных ограничений в канонической форме (3.2) можно рассматривать ограничения более общего вида (см. формулы (1.2), (1.3)). При этом, используя приемы, описанные в подразд. 1.1, эти ограничения всегда можно свести к ограничениям в канонической форме (3.2).

Без ограничения общности будем считать, что $rank\ A = m \le n$.

Вектор $x = (x_j, j \in J)$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи (3.1), (3.2), назовем *планом.*

Множество индексов $J_{оп} \subset J$ назовем *опорой ограничений,* если

$$|J_{on}| = m, \ \det A_{on} \neq 0, \quad где\ A_{on} = (A_j, j \in J_{on}). \qquad (3.3)$$

Пара $\{x, J_{on}\}$ из плана и опоры ограничений называется *опорным планом.*

Рассмотрим опорный план $\{x, J_{on}\}$. Обозначим $c(x) = (c_j(x), \ j \in J) = c + Dx$. Найдем *m*-вектор потенциалов *u(x)*

$$u'(x) = -c'_{on}(x) A_{on}^{-1}, \text{где} \quad c_{on}(x) = (c_j(x), j \in J_{on}) \qquad (3.4)$$

и оценки

$$\Delta_j(x) = u'(x) A_j + c_j(x), \ \ j \in J.$$

Отметим, что, по построению, $\Delta_j(x) = 0, \ j \in J_{on}$.

Опорный план $\{x, J_{on}\}$ называется *правильным опорным планом*, если существует такое множество J_*, что

$$J_{on} \subset J_* \subset \{ \ j \in J : \Delta_j(x) = 0 \ \}; \ \ x_j = 0, j \in J_H = J \setminus J_*; \qquad (3.5)$$

$$\det \begin{pmatrix} D_* & A'_* \\ A_* & 0 \end{pmatrix} \neq 0. \qquad (3.6)$$

Здесь $A_* = (A_j, j \in J_*), \quad D_* = (d_{ij}, i \in J_*, j \in J_*)$ – $|J_*| \times |J_*|$-подматрица матрицы D .

Множество J_* назовем *расширенной опорой*.

Отметим, что при необходимости всегда можно считать, что

$$x_j > 0, \ \ j \in J_* \setminus J_{on}, \qquad (3.7)$$

ибо в противном случае можно множество J_* заменить на множество $\overline{J_*} = \{ j \in J_* \setminus J_{on} : \ x_j > 0 \} \cup J_{on}$, для которого будут выполняться соотношения (3.5)-(3.7).

Правильный опорный план считается *невырожденным*, если $x_j > 0, \ j \in J_{on}$.

Покажем, что понятие правильного опорного плана обобщает понятие базисного плана, введенное в подразд. 1.2 и включает его как частный случай. Действительно, пусть x – базисный план с базисом $J_Б$. Очевидно, что пара $\{x, J_{on}\}$, где $J_{on} = J_Б$, является опорным планом. Кроме того, легко проверить, что эта пара будет и правильным опорным планом, так как при $J_* = J_Б$ выполняются соотношения (3.5), (3.6). Следовательно, любой базисный план является правильным опорным планом. Обратное утверждение неверно.

В отличие от задачи линейного программирования в задаче квадратичного программирования (3.1), (3.2) среди ее оптимальных планов может не оказаться базисных планов. Поэтому мы не можем ограничиться рассмотрением только базисных планов при решении задачи квадратичного программирования. Однако можно показать, что если задача (3.1), (3.2) имеет решение, то среди ее оптимальных планов всегда найдется правильный опорный план. В силу этого далее будем рассматривать только правильные опорные планы.

В дальнейшем правильный опорный план будем обозначать через $\{x, J_{on}, J_*\}$, подразумевая, что кроме $\{x, J_{on}\}$ задано и множество J_*.

Задание 1. Пусть $x = (1,1,1,0,0)$, $J_{on} = \{1,2\}$, $J_* = \{1,2,3\}$. Проверить, является ли совокупность $\{x,\ J_{on},\ J_*\}$ правильным опорным планом в задаче квадратичного программирования

$$
\begin{aligned}
& -3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_1^2/2 + x_2^2 + x_3^2/2 + x_4^2 + x_5^2/2 \to \min, \\
& x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1, \\
& x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 1, \\
& x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

3.2. Свойства задачи квадратичного программирования

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть для правильного опорного плана* $\{x, J_{on}, J_*\}$ *выполняются неравенства* $\Delta_j(x) \ge 0,\ \ j \in J_H = J \setminus J_*$. *Тогда x – оптимальный план задачи (3.1), (3.2).*

Из условий (3.3),(3.6) следует, что при любом $j_0 \in J_H$ система

$$
\begin{aligned}
& D_* l_* + A'_* y + D_{*j_0} = 0, \\
& A_* l_* + A_{j_0} = 0
\end{aligned}
\qquad (3.8)
$$

имеет единственное решение $l_* = (l_j,\ \ j \in J_*), \quad y = (y_i, i = \overline{1,m})$.
Здесь $D_{*j_0} - |J_*|$-вектор с компонентами

$$
D_{*j_0} = (d_{ij_0}, \quad i \in J_*). \qquad (3.9)
$$

Утверждение 2. *Пусть для правильного опорного плана* $\{x, J_{on}, J_*\}$ *найдется такой индекс* $j_0 \in J_H$, *что* $\Delta_{j_0}(x) < 0$ *и для решения системы (3.8) выполняются соотношения* $l_* \ge 0,\ \ \delta := D'_{*j_0} l_* + A'_{j_0} y + d_{j_0 j_0} = 0$. *Тогда значение целевой функции задачи (3.1), (3.2) не ограничено снизу на множестве ее планов.*

Утверждение 3. *Пусть для невырожденного правильного опорного плана* $\{x, J_{on}, J_*\}$ *найдется такой индекс* $j_0 \in J_H$, *что* $\Delta_{j_0}(x) < 0$ *и для решения системы*

(3.8) выполняется неравенство $\min\{l_j,\ j \in J_*,\ \ -\delta\} < 0.$ *Тогда существует другой правильный опорный план* $\{\bar{x}, \bar{J}_{on}, \bar{J}_*\}$ *с меньшим значением целевой функции:* $f(\bar{x}) < f(x).$

Отметим, что если матрица D является положительно определенной (т.е. $l'Dl > 0$ при $\forall l \in R^n,\ \ l \neq 0$), то целевая функция задачи (3.1), (3.2) всегда ограничена снизу на множестве планов и в определении правильного опорного плана условие (3.6) можно опустить, так как оно следует из (3.3).

Задание 2. Пусть даны задача квадратичного программирования

$$
\begin{aligned}
&-4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 10x_5 - 10x_6 + 1/2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) \to \min,\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 10x_5 + 8x_6 = 4,\\
&\quad x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 6x_5 + 4x_6 = 2,\\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6},
\end{aligned}
$$

и ее правильный опорный план $\{x,\ J_{on},\ J_*\}$, где $x = (1,1,1,1,0,0),\ J_{on} = \{2,3\},\ J_* = \{1,2,3,4\}.$ Исследовать, какая из ситуаций имеет место:

а) план x оптимален;

б) целевая функция не ограничена снизу на множестве планов;

г) план x можно улучшить.

3.3. Алгоритм решения задачи квадратичного программирования

Пусть известны параметры c, b, A, D, определяющие задачу (3.1), (3.2). Для реализации итерации метода необходимо знать текущий правильный опорный план $\{x, J_{on}, J_*\}$.

Опишем итерацию метода по шагам.

Шаг 1. Сформируем вектор $c(x) = c + Dx$ и подсчитаем вектор потенциалов

$$u'(x) = -c_{on}(x)A_{on}^{-1}, \quad \text{где} \quad c_{on}(x) = (c_j(x),\ j \in J_{on}),\ A_{on} = (A_j,\ j \in J_{on})$$

и оценки

$$\Delta_j = u'(x)A_j + c_j(x),\ j \in J_H = J \setminus J_*.$$

Шаг 2. Если $\Delta_j \geq 0,\ j \in J_H$, то STOP: вектор x – решение задачи (3.1), (3.2). В противном случае перейдем к шагу 3.

Шаг 3. Выберем индекс $j_0 \in J_H$, для которого $\Delta_{j_0} < 0$.

Шаг 4. По заданным множеству J_* и индексу j_0 сформируем систему (3.8) и найдем ее решение $(l_*,\ y)$, $l_* = (l_j,\ j \in J_*)$, $y \in R^m$. Положим $\delta := D'_{*j_0} l_* + A'_{j_0} y + d_{j_0 j_0}$.

Шаг 5. Вычислим

$\Theta_j = - x_j / l_j$ при $l_j < 0$, $\Theta_j = \infty$ при $l_j \geq 0, j \in J_*$;
$\Theta_{j_0} = | \Delta_{j_0} / \delta |$ при $\delta \neq 0$, $\Theta_{j_0} = \infty$ при $\delta = 0$.

Найдем $\Theta_0 = min\ \Theta_j, j \in J_* \cup j_0$. Если $\Theta_0 = \infty$, то STOP: задача (3.1), (3.2) не имеет решения в силу неограниченности снизу целевой функции на множестве планов. В противном случае выберем индекс $j_* \in J_* \cup j_0$, для которого $\Theta_0 = \Theta_{j_*}$, и перейдем к шагу 6.

Шаг 6. Построим новый план $\bar{x} = (\bar{x}_j, j \in J)$ по правилам:

$$\bar{x}_j = x_j + \Theta_0 l_j,\ j \in J_*;\ \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \Theta_0,\ \bar{x}_j = 0,\ j \in J_H \setminus j_0. \qquad (3.10)$$

Шаг 7. Предполагается, что множество индексов J_{on} имеет вид $J_{on} = \{j_1, j_2, ..., j_s, ..., j_m\}$. Возможны случаи:

а) $j_* = j_0$;
б) $j_* \in J_* \setminus J_{on}$;
в) $j_* = j_s \in J_{on}$ и существует такой индекс $j_+ \in J_* \setminus J_{on}$, что $e_s' A_{on}^{-1} A_{j+} \neq 0$;
г) $j_* = j_s \in J_{on}$ и $e_s' A_{on}^{-1} A_j = 0, j \in J_* \setminus J_{on}$, либо $J_* = J_{on}$.

В случае а полагаем

$$\bar{J}_{on} = J_{on},\ \bar{J}_* = J_* \cup j_0$$

и переходим к новой итерации, т.е. к шагу 1, используя найденные данные $\bar{x}, \bar{J}_{on}, \bar{J}_*$.

В случае б полагаем

$$\bar{J}_{on} = J_{on},\ \bar{J}_* = J_* \setminus j_*,\quad \bar{j}_0 = j_0,\ \bar{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \Theta_0 \delta$$

и переходим к шагу 4, используя далее данные $\bar{x}, \bar{J}_{on}, \bar{J}_*, \bar{j}_0, \bar{\Delta}_{\bar{j}_0}$ вместо $x, J_{on}, J_*, j_0, \Delta_{j_0}$.

В случае в полагаем

$$\bar{J}_{on} = (J_{on} \setminus j_*) \cup j_+,\ \bar{J}_* = J_* \setminus j_*,\ \bar{j}_0 = j_0,\ \bar{\Delta}_{j_0} = \Delta_{j_0} + \Theta_0 \delta$$

и переходим к шагу 4, используя обновленные данные $\bar{x}, \bar{J}_{on}, \bar{J}_*, \bar{j}_0, \bar{\Delta}_{\bar{j}_0}$ вместо $x, J_{on}, J_*, j_0, \Delta_{j_0}$.

В случае г полагаем

$$\bar{J}_{on} = (J_{on} \setminus j_*) \cup j_0,\ \bar{J}_* = (J_* \setminus j_*) \cup j_0$$

и переходим к новой итерации (т.е. к шагу 1), используя новые данные $\bar{x}, \bar{J}_{on}, \bar{J}_*$.

Замечания. 1. Построение матрицы $\bar{A}_{on}^{-1}$, обратной к новой матрице $\bar{A}_{on} = (A_j, j \in \bar{J}_{on})$, осуществляется по правилам, описанным на шаге 6 симплекс-метода, с использованием матрицы A_{on}^{-1}.

2. По аналогии с ЛП решение системы (3.8) можно строить с помощью матрицы H_*^{-1}, обратной к матрице

$$H_* = \begin{pmatrix} D_* & A_*' \\ A_* & 0 \end{pmatrix} \in R^{(k+m)\times(k+m)},$$

по правилу

$$\begin{pmatrix} l_* \\ y \end{pmatrix} := -H_*^{-1} h_{j_0}, \qquad (3.11) \qquad \text{где } h_{j_0} := \begin{pmatrix} D_{*j_0} \\ A_{j_0} \end{pmatrix} \in R^{k+m}, \; k := |J_*|.$$

При этом нетрудно получить простые формулы построения новой матрицы $\bar{H}_*^{-1}$, зная H_*^{-1}. Действительно, матрица H_* полностью задается множеством индексов J_*. В результате итерации $\{x, J_{on}, J_*\} \to \{\bar{x}, \bar{J}_{on}, \bar{J}_*\}$ множество J_* может измениться по одному из следующих правил:

а) $\bar{J}_* = J_* \cup j_0$, б) $\bar{J}_* = J_* \setminus j_*$, в) $\bar{J}_* = (J_* \setminus j_*) \cup j_0$.

Пусть для определенности $J_* = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$, $k \geq m$, $j_* = j_s$, $s \leq k$. Тогда матрица $\bar{H}_*^{-1}$, обратная к матрице

$$\bar{H}_* := \begin{pmatrix} \bar{D}_* & \bar{A}_*' \\ \bar{A}_* & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \bar{A}_* := (A_j, j \in \bar{J}_*), \quad \bar{D}_* = (d_{ij}, j \in \bar{J}_*, i \in \bar{J}_*),$$

строится следующим образом.

В случае а полагаем $\overline{H}_*^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_* & h_*/\delta \\ h_*'/\delta & 1/\delta \end{pmatrix}$, где $h_*' = (l_*', y')$,

$\tilde{H}_* = H_*^{-1} + h_* h_*'/\delta$.

В случае б матрица $\overline{H}_*^{-1}$ строится по формуле

$$\overline{H}_*^{-1} = \breve{H}_* - \breve{h}_* \breve{h}_*' / \breve{h}_{ss},$$

где матрица $\breve{H}_*$ получается из матрицы H_*^{-1} удалением s-й строки и s-го столбца; вектор $\breve{h}_*$ получается из s-го столбца матрицы H_*^{-1} удалением s-го элемента; $\breve{h}_{ss}$ – (s,s)-й элемент матрицы H_*^{-1}.

В случае в матрица $\overline{H}_*^{-1}$ находится по формуле

$$\overline{H}_*^{-1} = M H_*^{-1} \overline{M}',$$

где $M = (e_1, \ldots, e_{s-1}, d_s, e_{s+1}, \ldots, e_{k+m})$; $\overline{M} = (e_1, \ldots, e_{s-1}, \overline{d}_s, e_{s+1}, \ldots, e_{k+m})$; $e_i \in R^{k+m}$ — единичный вектор с единицей на i-м месте; $d_s = e_s + (e_s - h_*)/\alpha$, $\overline{d}_s = e_s + (e_s - Mh_*)/\overline{\alpha}$, $\alpha = e_s' h_*$, $\overline{\alpha} = e_s' Mh_*$.

Итерацию $\{x, J_{on}, J_*\} \to \{\overline{x}, \overline{J}_{on}, \overline{J}_*\}$ назовем *невырожденной*, если $\Theta_0 > 0$.

Теорема. *Описанный выше алгоритм решает задачу (3.1), (3.2) за конечное число итераций, если в процессе его реализации не встречаются вырожденные итерации.*

По аналогии с подразд. 1.5 можно ввести в алгоритм дополнительные правила определения индексов $j_0 \in J_H$, $j_* \in J_* \cup j_0$, гарантирующие конечность описанного алгоритма без требования невырожденности итераций.

Как видно из описания алгоритма, для начала его работы необходимо знать начальный правильный опорный план. Выше отмечалось, что любой базисный план является правильным опорным планом. Следовательно, для построения информации, необходимой для начала работы данного алгоритма можно воспользоваться первой фазой симплекс-метода, описанной в подразд. 1.6. При этом, как и в задаче линейного программирования, можно отказаться от предположения о том, что $rank\ A = m \le n$, ибо при реализации первой фазы будут обнаружены и удалены все линейно зависимые основные ограничения.

Замечание. При $D = 0$ задача квадратичного программирования (3.1), (3.2) совпадает с задачей линейного программирования (3.6) из разд. 1. Нетрудно проверить, что в этом случае метод, описанный в данном параграфе, совпадает с симплекс-методом, описанном в разд. 1.

Пример 1. Решить следующую задачу КП

$$-8x_1-6x_2-4x_3-6x_4+1/2(2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3)\to\min,$$
$$x_1+2x_3+x_4=2,$$
$$x_2-x_3+2x_4=3,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

Решение. Для данной задачи векторы c,b и матрицы A,D имеют вид

$$c=\begin{pmatrix}-8\\-6\\-4\\-6\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\ A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

В качестве начального правильного опорного плана $\{x, J_{on}, J_*\}$ возьмем вектор $x'=(2,3,0,0)$ и множества $J_{on}=J_*=\{1,2\}$.

Используя данные x, J_{on}, J_*, осуществим первую итерацию.

Шаг 1. Подсчитаем векторы

$$c(x)=c+Dx=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\\-6\end{pmatrix};\ u'(x)=-c'_{on}(x)A_{on}^{-1}=-(-1,-1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=(1,1);$$

$$\Delta=A'u(x)+c(x)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Поскольку $\Delta_3=-1<0,\ \Delta_4=-3<0,$ то условия оптимальности не выполняются. Переходим к следующему шагу.

Шаг 3. В качестве индекса j_0 выберем индекс 3 : $j_0=3$.

Шаг 4. Используя имеющиеся множество J_* и индекс j_0, сформируем систему (3.8), в которой

$$D_*=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\quad A_*=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ A_{j_0}=A_3=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ D_{*j_0}=D_{*3}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Система (3.8), соответствующая этим данным, имеет решение

$$l_*=(l_1=-2,l_2=1),\ \ y=(2,1).$$

Подсчитаем

$$\delta=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+1=2.$$

Шаг 5. Найдем

$$\Theta_1=2/2,\quad \Theta_2=\infty,\quad \Theta_3=|-1/2|=1/2;$$

$$\Theta_0 = \min_{j=\overline{1,3}} \Theta_j = \Theta_3 = 1/2 < \infty.$$

В качестве индекса $j_* \in J_* \cup j_0$, для которого $\Theta_0 = \Theta_{j_*}$, возьмем индекс 3 : $j_* = 3$.

Шаг 6. Построим новый план $\bar{x} = (\bar{x}_i, i = \overline{1,4})$ по правилам (3.10):

$$\bar{x}' = (1,\ 7/2,\ 1/2,\ 0).$$

Шаг 7. Поскольку $j_0 = j_* = 3$, то имеет место случай а. Полагаем

$$\bar{J}_{on} = J_{on} = \{1,2\},\quad \bar{J}_* = J_* \cup j_0 = \{1,2,3\}$$

и переходим ко второй итерации, используя новые данные $\bar{x}$, $\bar{J}_{on}$, $\bar{J}_*$.

Осуществим вторую итерацию.

Шаг 1. Сформируем векторы

$$c(\bar{x}) = c + D\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3/2 \\ -5/2 \\ -6 \end{pmatrix};\ u'(\bar{x}) = -\bar{c}'_{on}(\bar{x})\bar{A}_{on}^{-1} = (2,\ 3/2);\ \bar{\Delta} = A'u(\bar{x}) + c(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Поскольку $\bar{\Delta}_4 = -1 < 0$, то для плана $\bar{x}$ условия оптимальности не выполняются. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. В качестве индекса $\bar{j}_0$, для которого $\bar{\Delta}_{\bar{j}_0} < 0$, берем индекс $\bar{j}_0 = 4$.

Шаг 4. По множеству $\bar{J}_*$ и индексу $\bar{j}_0 = 4$ сформируем систему (3.8), где

$$\bar{D}_* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \bar{A}_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};\ \bar{D}_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Система (3.8), соответствующая этим данным, имеет решение $\bar{l}'_* = (\bar{l}_1 = 3, \bar{l}_2 = -4, \bar{l}_3 = -2)$, $\bar{y}' = (0,1)$. Подсчитаем $\bar{\delta} = (0,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$.

Шаг 5. Найдем

$$\Theta_1=\infty,\ \ \Theta_2=7/2:4=7/8,\ \ \Theta_3=1/2:2=1/4,\ \ \Theta_4=|-1/2|=1/2,$$
$$\Theta_0=\min_{i=\overline{1,4}}\Theta_i=\Theta_3=1/4.$$

Полагаем $\bar{j}_*=3$.

Шаг 6. Строим новый план $\tilde{x}$ по правилам (3.10):

$$\tilde{x}'=(7/4,5/2,\ 0,\ 1/4). \qquad (3.12)$$

Шаг 7. Поскольку $\bar{j}_*=3\in\bar{J}_*\setminus\bar{J}_{on}$, то имеет место случай б. Полагаем

$$\tilde{J}_{on}=\bar{J}_{on}=\{1,2\},\ \ \tilde{J}_*=\bar{J}_*\setminus\bar{j}_*=\{1,2\},\ \tilde{j}_0=4,\ \ \tilde{\Delta}_4=-1+1/2=-1/2. \quad (3.13)$$

Переходим к шагу 4 с обновленными данными.

Шаг 4′. Сформируем систему (3.8), соответствующую множеству $\tilde{J}_*$ и индексу $\tilde{j}_0=4$. Эта система имеет решение $\tilde{l}_*'=(\tilde{l}_1=-1,\ \tilde{l}_2=-2),\ \ \tilde{y}'=(4,3)$. Подсчитаем $\tilde{\delta}=(4\ \ 3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=10$.

Шаг 5′. Найдем

$$\Theta_1=7/4:1=7/4,\ \ \Theta_2=5/2:2=5/4,\ \ \Theta_4=|\tilde{\Delta}_4/\tilde{\delta}|=1/20,$$
$$\Theta_0=\Theta_4=1/20.$$

В качестве индекса $\tilde{j}_*$ выберем индекс 4: $\tilde{j}_*=4$.

Шаг 6′. По правилам (3.10) построим новый план $\overset{\llcorner}{x}$:

$$\overset{\llcorner}{x}'=(17/10,\ 12/5,\ 0,\ 3/10).$$

Шаг 7′. Поскольку $\tilde{j}_0=\tilde{j}_*=4$, то имеет место случай а. Строим новое множество

$$\overset{\sqcup}{J}_{on}=\tilde{J}_{on}=\{1,2\},\quad \overset{\sqcup}{J}_*=\tilde{J}_*\cup\tilde{j}_0=\{1,2,4\}.$$

Используя данные $\overset{\#}{x},\ \ \overset{\#}{J}_{on},\ \ \overset{\sqcup}{J}_*$, переходим к третьей итерации.

Опишем третью итерацию.

Шаг 1. Подсчитаем векторы

$$c(\overset{\#}{x})=c+D\overset{\#}{x},\ u'(\overset{\#}{x})=(11/5,\ 19/10),\ \ \overset{\#}{\Delta}=A'u(\overset{\#}{x})+c(\overset{\square}{x})=\begin{pmatrix}0\\0\\1/5\\0\end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Поскольку все компоненты вектора $\overset{\llcorner}{\Delta}$ неотрицательны, то план $\overset{\llcorner}{x}$ является оптимальным планом. Задача решена.

Задание 3. Используя заданный начальный правильный опорный план, решить следующие задачи квадратичного программирования

$$
\begin{gathered}
1/2(4x_1^2+3x_2^2+x_3^2+x_4^2)\to\min,\\
2x_1-2x_2+14x_3+x_4=2,\\
x_1-2x_2+10x_3+2x_4=0,\\
x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,4},\\
x=(2,1,0,0),\quad J_{on}=J_*=\{1,2\};
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
1/2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+4x_5^2+x_6^2+4x_4x_5+4x_5x_6+2x_4x_6)\to\min,\\
x_2+x_3+x_4-2x_5+x_6=4,\\
x_1+x_3+x_4+x_5+2x_6=3,\\
x_1+x_2+x_4-x_5+x_6=3,\\
x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,6},\\
x=(1,2,2,0,0),\quad J_{on}=J_*=\{1,2,3\};
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
7x_1+9x_4-9x_5+\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}x_ix_j\to\min,\\
x_1+7x_2-x_3+7x_4-8x_5=14,\\
x_2+8x_3+9x_4+7x_5=18,\\
x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=2,\\
x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5},\\
x=(1,1,1,1,0);\ J_{on}=\{1,2,3\},\ J_*=\{1,2,3,4\}.
\end{gathered}
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации: Учеб. пособие. Мн.: Изд-во БГУ, 1981.
2. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столяров Е.М. Методы оптимизации: Учеб. пособие. М.: Наука, 1978.
3. Ашманов С.А. Линейное программирование: Учеб. пособие. М. : Наука, 1981.
4. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. М.: Наука, 1980.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие. М.: Наука, 1980.
6. Nocedal J., Wright S.J. Numerical Optimization. Spriger-Verlag New York, 1999. 636 p.
7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
8. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.
9. Полак Э. Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1974.

Св. план 2000, поз. (36)

Учебное издание

Автор: Костюкова Ольга Ивановна

Учебное пособие

для студентов специальности Н.08.02.00 « Информатика»

В 2-х частях

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Часть I

ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная Усл.печ. л.
Уч.-изд. л. 2,5 Тираж 100 экз. Заказ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Отпечатано в БГУИР. Лицензия ЛП N 156.220013, Минск, П.Бровки, 6