

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

Кафедра информатики

В. Я. Анисимов, Л. И. Минченко

КРАТКИЙ КУРС ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие по курсу «Методы численного анализа»
для студентов специальности «Информатика»
для всех форм обучения

В двух частях
Часть 2

Минск 2007

УДК 518.11075.8
ББК 22.19 я 73
А 67

Р е ц е н з е н т:
д-р физ.-мат. наук, проф. Н. Н. Роговцов

Анисимов В.Я., Минченко Л.И.

М 57 Краткий курс численного анализа: учебно-методическое пособие по курсу «Методы численного анализа» для студ. спец. «Информатика» для всех форм обучения. **В двух частях** часть 2. В. Я. Анисимов, Л. И. Минченко. – Минск.: БГУИР, 2007. – ** с.: 54 ил.0
ISBN 978-985-488-230-7 (ч.2)

Настоящее пособие содержит краткий курс лекций по методам численного анализа для студентов специальности «Информатика».

УДК 681.3 (075.8)
ББК 22.19 я 73

ISBN 978-985-488-230-7 (ч.2)
ISBN 985 444-930-0

© Анисимов В. Я, Минченко Л.И., 2007
© «Белорусский Государственный Университет
Информатики и Радиоэлектроники» 2007

12. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

12.1. Разностные аппроксимации дифференциальных краевых задач

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию двух переменных $U=U(x,y)$ в области D (см. рис.12.1), лежащей на плоскости Oxy . Необходимо аппроксимировать ее частные производные

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

с помощью разностных производных.

Разобьем область D с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с шагом h и l соответственно. То есть, проведем прямые

$$x = x_i, \quad y = y_j, \quad \text{где}$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}$$

$$y_j = y_0 + jl, \quad j = \overline{0, m}.$$

Точки их пересечения образуют сетку на плоскости.

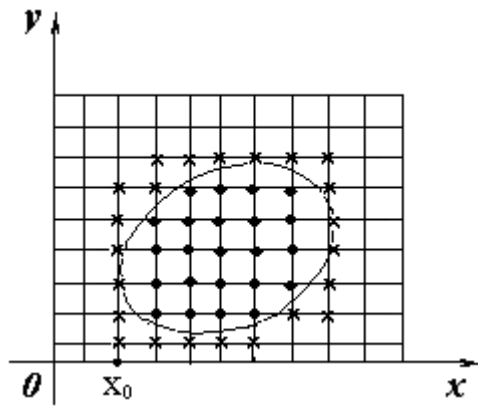


Рис. 12.1

Положим $U_{i,j} = U(x_i, y_j)$. Очевидно, возможны различные аппроксимации частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{2h} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i, y_j)}{h} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_i, y_j) \approx \frac{U(x_i, y_j + l) - U(x_i, y_j - l)}{2h} = \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h}.$$

Их называют соответственно левой, правой и центральной разностными производными.

Аналогично получаются аппроксимации для производной $\frac{\partial U}{\partial y}$. Для вторых производных можно ввести аппроксимации

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U(x_i + h, y_j) - 2U(x_i, y_j) + U(x_i - h, y_j)}{h^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)'_y \approx \left(\frac{U(x_i + h, y_j) - U(x_i - h, y_j)}{2h} \right)'_y \\ &\approx \frac{U(x_i + h, y_j + l) - U(x_i - h, y_j + l)}{2h} - \frac{U(x_i + h, y_j - l) - U(x_i - h, y_j - l)}{2h} = \\ &= \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{4hl}. \end{aligned}$$

Пусть $U=U(x,y)$. Рассмотрим в области D уравнение в частных производных вида:

$$a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{31} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{33} U = g(x, y)$$

(12.1)

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ – некоторые числовые коэффициенты, $g(x,y)$ – непрерывная в области D функция. Будем рассматривать уравнение (12.1) совместно с граничным условием

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (12.2)$$

где Γ – контур, ограничивающий область D .

Задачу (12.1), (12.2) будем называть дифференциальной краевой задачей и записывать коротко в виде

$$LU = f, \quad (12.3)$$

где

$$LU = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{33} U & \text{при } (x, y) \in D \\ U|_{\Gamma} & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} g(x, y) & \text{при } (x, y) \in D \\ \varphi(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$U = U(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных.

Заменяя частные производные во внутренних узлах сетки их разностными аппроксимациями, получим следующую разностную схему дифференциального уравнения (12.1)

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + a_{12} \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2lh} + \\ & + a_{22} \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} + a_{31} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + a_{32} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2l} + a_{33} U_{i,j} = g_{i,j} \end{aligned} \quad (12.4)$$

где $U_{i,j} = U(x_i, y_j)$, $g_{i,j} = g(x_i, y_j)$.

Каждый узел (x_i, y_j) , лежащий внутри области, будем называть внутренним и множество внутренних узлов обозначим D^* . Узлы, лежащие на контуре Γ (если они есть) и узлы, окаймляющие контур Γ извне, будем называть граничными и обозначим их совокупность Γ^* (см. рис. 12.1).

Аппроксимируем граничные условия (2), полагая

$$U_{ij} = \varphi_{ij}^* \text{ для } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \quad (12.5)$$

где φ_{ij}^* – значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Таким образом, мы получили разностную краевую задачу (12.4), (12.5), соответствующую дифференциальной краевой задаче (12.1), (12.2). Задачу

(12.4), (12.5) называют также разностной схемой задачи (12.1), (12.2). В ней неизвестными являются всевозможные значения U_{ij} , соответствующие внутренним узлам. Отметим, что по существу задача (12.4), (12.5) представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных U_{ij} .

Обычно выбирают $l = r(h)$, где r — некоторая функция, или $l = rh$, где r — постоянная. Совокупность всех узлов обозначим

$$D_h = D^* \cup \Gamma^*$$

и будем называть сеткой в области D .

Функцию $U^{(h)}$, определенную на сетке D_h , будем называть сеточной. Т.е. это функция, которая ставит в соответствие каждому узлу $(x_i, y_j) \in D_h$ число $U(x_i, y_j) = U_{ij}$.

Обозначим через U_h пространство всех сеточных функций на сетке D_h и введем в нем норму сеточной функции $U^{(h)}$, полагая

$$\|U^{(h)}\|_{U_h} = \max_{i,j} |U_{ij}^{(h)}|,$$

где максимум берется по всем узлам сетки D_h .

Для краткости будем записывать разностную схему (12.4), (12.5) дифференциальной краевой задачи (12.1), (12.2) в виде операторного уравнения

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}, \quad (12.6)$$

определенного на сетке D_h , где

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} a_{11} \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + a_{12} \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2lh} \\ + a_{22} \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} + a_{31} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + a_{32} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2l} + a_{33} U_{i,j} \\ \text{при } (x_i, y_j) \in D^* \\ U^{(h)}|_{\Gamma^*}, \quad \text{при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} g_{ij} = g(x_i, y_j), & \text{при } (x_i, y_j) \in D^* \\ \varphi_{ij}^*, & \text{при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

φ_{ij}^* — значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Для классификации разностных схем используется понятие

шаблона. Шаблоном разностной схемы называется геометрическое место узлов сетки, участвующих в разностном уравнении (4) (см. рис.12.2). В зависимости от разностного уравнения шаблон может быть полным и неполным.

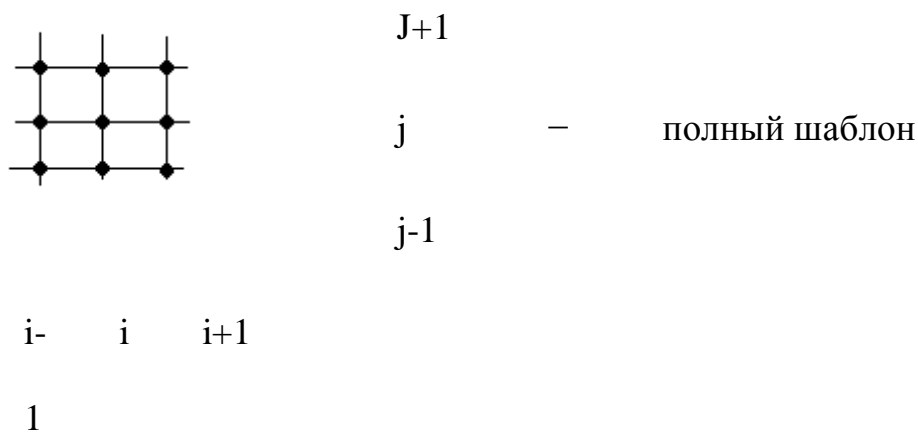


Рис. 12.2.

Возникают естественные вопросы: Существует ли решение краевой дифференциальной задачи (12.1), (12.2) и единственно ли оно, в случае, если существует? Существует ли решение разностной краевой разностной задачи (12.4), (12.5)? Если существует, будет ли оно единственным? Если разностная краевая задача имеет решение, будет ли оно сходиться при h и l стремящихся к нулю? Если оно сходится, то сходится ли к решению дифференциальной краевой задачи (12.1), (12.2)? Если оно сходится, то с какой скоростью?

Первый вопрос относится к теории дифференциальных уравнений.

Ответы на остальные вопросы дает численный анализ.

Рассмотрим отдельные примеры дифференциальных краевых задач в частных производных.

12.2. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим одномерный однородный стержень длины L . Пусть $U(x, t)$ — температура в точке стержня с абсциссой x в момент времени t . Из математической физики известно, что распределение температуры в точках стержня в зависимости от времени описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (12.7)$$

Добавим к уравнению естественные граничные условия:

$$U(0, t) = \varphi(t),$$

$$U(L, t) = \psi(t), \quad (12.8)$$

$$U(x, 0) = g(x),$$

которые описывают температуру, измеряемую на концах стержня и начальное распределение температуры в точках стержня.

Построим сетку $x_i = ih$, $i = \overline{0, n}$, $t_j = jl$, $j = \overline{0, m}$ в области D (см. рис.12.3)

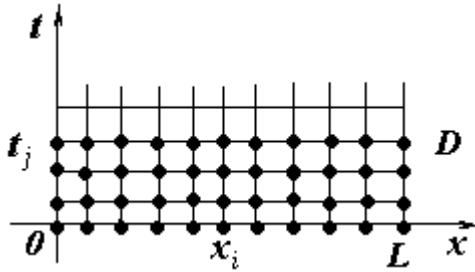


Рис. 12.3.

Заменяем в дифференциальном уравнении значения частных производных во внутренних узлах их разностными аппроксимациями:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}.$$

Получим разностное уравнение соответствующее исходному дифференциальному уравнению:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{l} = a^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2},$$

или

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + a^2 \frac{l}{h^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}). \quad (12.9)$$

Положим

$$g_i = g(x_i), \quad \varphi_j = \varphi(t_j), \quad \psi_j = \psi(t_j).$$

Тогда граничные условия аппроксимируются следующим образом

$$U_{i0} = g_i, \quad U_{0,j} = \varphi_j, \quad U_{nj} = \psi_j. \quad (12.10)$$

Зная значения U_{ij} на нижнем (нулевом) слое и на границе слева и справа, вычисляем $U_{i,1}$ для $i = \overline{1, n-1}$:

$$U_{i,1} = U_{i,0} + \frac{a^2 l}{h^2} (U_{i+1,0} - 2U_{i,0} + U_{i-1,0}).$$

Таким образом, мы получили разностную краевую задачу (12.9), (12.10), которая очевидно имеет решение, причем единственное.

Рассматривая уравнение (12.9), построим его шаблон (см. рис. 12.4):

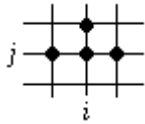


Рис. 12.4.

Вопрос сходимости к решению дифференциальной задачи зависит от соотношения между l и h в уравнении (12.7). Известно, что если

$$\frac{a^2 l}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad l \leq \frac{a^2 l}{h^2},$$

то имеет место сходимость.

Рассмотрим подробнее ситуацию:

$$\frac{a^2 l}{h^2} = \frac{1}{2}.$$

В этом случае уравнение (12.9) существенно упрощается и принимает вид:

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}).$$

На рис. 12.5 показан его шаблон.

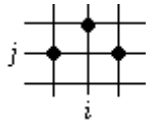


Рис. 12.5.

Пусть $U_{h,l}(x,t)$ - функция двух переменных, график которой построен на основе аппроксимации плоскостями найденных при решении задачи (12.9), (12.10) значений U_{ij} . Можно показать, что при выполнении условия $\frac{a^2 l}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ функция $U_{h,l}(x,t)$ будет сходиться к решению дифференциальной краевой задачи (7), (8) и скорость сходимости будет:

$$|(U_{h,l}(x,t) - U(x,y))| = O(h^2).$$

12.3. Волновое уравнение

Волновое уравнение – дифференциальное уравнение в частных производных 2-го порядка, описывающее процесс распространения колебаний в некоторой среде. Мы будем рассматривать малые колебания натянутой струны, закрепленной в двух точках на оси Ox .

Пусть $U(x, t)$ – отклонение точки струны с абсциссой x в момент времени t от положения равновесия. Тогда величина $U(x, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (12.11)$$

Добавим к уравнению граничные условия:

$$U(0, t) = 0, \quad U(L, t) = 0, \quad U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad (12.12)$$

которые отражают тот факт, что концы струны закреплены и дают величину начального отклонения точек струны от положения равновесия и их начальные скорости.

Построим сетку:

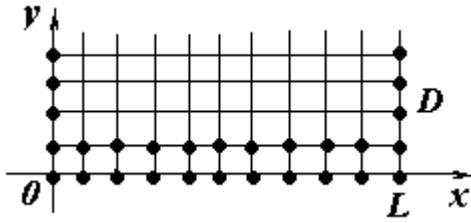


Рис. 12.6.

$$x_i = ih, \quad i = \overline{0, n}, \quad t_j = jl, \quad j = \overline{0, m}.$$

Заменяем значения производных во внутренних узлах сетки их разностными аппроксимациями:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2}.$$

Получим разностное уравнение, отвечающее уравнению

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{l^2} = a^2 \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$$

или

$$U_{i,j+1} = 2U_{i,j} - U_{i,j-1} + \lambda(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}),$$

$$\text{где } \lambda = \frac{a^2 l^2}{h^2}.$$

Запишем его окончательно в виде:

$$U_{i,j+1} = 2(1-\lambda)U_{i,j} - U_{i,j-1} + \lambda(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}). \quad (12.13)$$

Данное разностное уравнение имеет шаблон, изображенный на рисунке 12.7.

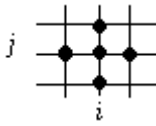


Рис. 12.7.

Получим аппроксимацию граничных условий (12.12):

$$U_{0,j} = 0, \quad U_{n,j} = 0, \quad \forall j = \overline{0, m} \quad (12.14)$$

$$U_{i,0} = \varphi_i, \quad \varphi_i = \varphi(x_0), \quad \psi_i = \varphi(x_i), \quad (12.15)$$

а также

$$\frac{U_{i,1} - U_{i,0}}{l} = \psi_i$$

или

$$U_{i,1} = U_{i,0} - l\psi_i. \quad (12.16)$$

Как легко видеть разностная схема (12.13)-(12.16) имеет единственное решение и легко реализуется последовательным вычислением значений

сеточной функции, начиная с нулевого и первого слоя. Можно показать, что приближенное решение $U_{h,l}(x,t)$, полученное из решения разностной схемы (12.13)-(12.16), будет сходиться к решению исходной дифференциальной краевой задачи, если

$$\frac{a^2 l^2}{h^2} \leq \frac{1}{2},$$

причем со скоростью $|(U_{h,l}(x,t) - U(x,y))| = O(h^2)$.

12.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Пусть D область на плоскости Oxy (см. рис.12.1), ограниченная замкнутым контуром Γ . Рассмотрим в этой области однородное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

с граничными условиями

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y).$$

Данную краевую задачу называют задачей Дирихле для уравнения Лапласа. Поскольку переменные x и y имеет одинаковый характер,

разобьем область с помощью вертикальных и горизонтальных прямых с одинаковым шагом $l=h$.

Для каждого внутреннего узла (x_i, y_j) составим разностное уравнение:

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2} = 0, \quad (12.17)$$

заменяя значения частных производных в дифференциальном уравнении их разностными аппроксимациями.

Аппроксимируем граничные условия, полагая

$$U_{ij} = \varphi_{ij}^* \quad \text{для } (x_i, y_j) \in \Gamma^*,$$

где Γ^* - совокупность граничных узлов (напомним, что это узлы, лежащие на контуре Γ и узлы, окаймляющие контур Γ извне, см.рис.12.1), φ_{ij}^* — значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Приводя подобные, получаем разностную схему

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}), \quad (12.18)$$

$$U_{ij} = \varphi_{ij}^* \quad (\text{в граничных узлах}). \quad (12.19)$$

Полученную разностную схему будем рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных U_{ij} во внутренних узлах.

При этом линейная система является неоднородной, поскольку некоторые уравнения будут содержать кроме неизвестных еще и определенные значения $U_{ij} = \varphi_{ij}^*$ в граничных узлах. Чтобы система линейных уравнений (12.18), (12.19) имела единственное решение, необходимо и

достаточно, чтобы соответствующая ей однородная система имела только нулевое решение. Но соответствующая однородная система линейных уравнений имеет вид

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}), \quad (12.20)$$

$$U_{i,j} = 0 \quad (\text{в граничных узлах}).$$

Допустим, что система (12.20) имеет ненулевое решение. Предположим, что хотя бы в некоторых узлах это решение принимает положительные значения, и положим

$$\overline{U}_{i,j} = \max U_{i,j} = U_{i_0,j_0},$$

где максимум берется по всем внутренним узлам.

Если подставить $i=i_0, j=j_0$ в уравнение (12.20), то максимальное значение U_{i_0,j_0} равно среднему арифметическому значений нашего решения в соседних узлах. Но это возможно только в случае, когда значения в соседних узлах совпадают с максимальным значением U_{i_0,j_0} . Подставим теперь в уравнение (12.20)

$$i=i_0+1, j=j_0 \quad (i=i_0, j=j_0+1; i=i_0-1, j=j_0; i=i_0, j=j_0-1)$$

и совершенно аналогично получим, что в соседних с данными узлами узлах решение U_{ij} должно принимать также максимальное значение. Поскольку через конечное число шагов мы придем к уравнению, в котором участвуют граничные узлы, получается, что и в граничных узлах значение решения уравнения (12.20) максимально и, следовательно, положительно. Последнее очевидно невозможно в виду нулевых граничных условий. Аналогично рассматривается и случай, когда решение уравнения (12.20) не положительно во всех узлах. Полученное противоречие говорит о том, что решение (12.20) должно быть нулевым.

Следовательно, система (12.18),(12.19) имеет решение, причем единственное.

13. СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Пусть D – область на плоскости Oxy , ограниченная контуром Γ . Рассмотрим дифференциальную краевую задачу

$$LU = f, \quad (13.1)$$

где

$$LU = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a_{13} \frac{\partial U}{\partial x} + a_{23} \frac{\partial U}{\partial y} + a_{33} U & \text{при } (x, y) \in D \\ U|_{\Gamma} & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} g(x, y) & \text{при } (x, y) \in D \\ \varphi(x, y) & \text{при } (x, y) \in \Gamma, \end{cases}$$

$U = U(x, y)$ – неизвестная функция двух переменных.

Разобьем область D с помощью прямых $x_i = x_0 + ih \quad i = \overline{0, n}$, $y_j = y_0 + jl \quad j = \overline{0, m}$. Каждый узел (x_i, y_j) , лежащий внутри области, будем называть внутренним и множество внутренних узлов обозначим D^* . Узлы, лежащие на контуре Γ (если они есть) и узлы, окаймляющие контур Γ извне, будем называть граничными и обозначим их совокупность Γ^* (см. рисунок 13.1).

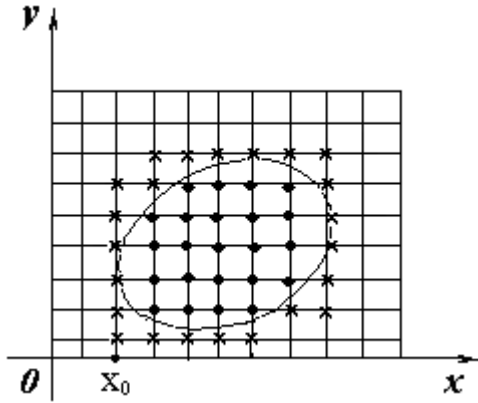


Рис. 13.1

Обычно выбирают $l = r(h)$, где r — некоторая функция, или $l = rh$, где r — постоянная. Совокупность всех узлов обозначают

$$D_h = D^* \cup \Gamma^*$$

и называют сеткой.

Функцию $U^{(h)}$, определенную на сетке D_h , будем называть сеточной. Т.е. это функция, которая ставит в соответствие каждому узлу $(x_i, y_j) \in D_h$ число $U(x_i, y_j) = u_{ij}$.

Обозначим через U_h пространство всех сеточных функций на сетке D_h и введем в нем норму сеточной функции $U^{(h)}$, положим

$$\|U^{(h)}\|_{U_h} = \max_{i,j} |u_{ij}^{(h)}|,$$

где максимум берется по всем узлам сетки D_h .

Построим для дифференциальной краевой задачи (13.1) разностную схему

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)}, \quad (13.2)$$

определенную на сетке D_h , где

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} \text{Разностная схема, соответствующая левой части} \\ \text{дифференциального уравнения из (1), при } (x_i, y_j) \in D^* \\ U^{(h)}|_{\Gamma^*}, \quad \text{при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} g_{ij} = g(x_i, y_j), \quad \text{при } (x_i, y_j) \in D^* \\ \varphi_{ij}^*, \quad \text{при } (x_i, y_j) \in \Gamma^*, \end{cases}$$

где φ_{ij}^* — значение функции $\varphi(x, y)$ в точке на контуре Γ , ближайшей к узлу $(x_i, y_j) \in \Gamma^*$.

Будем предполагать далее, что

- 1) дифференциальная краевая задача (13.1) имеет решение $U = U(x, y)$, причем единственное;
- 2) разностная краевая задача (13.2) имеет единственное решение при любом выборе шага h меньшего некоторого значения h_0 .

Определим сеточную функцию $[U]_h$, значения которой совпадают на сетке D_h со значениями решения $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1) в узлах сетки D_h .

Определение 1. Будем говорить, что разностная схема (13.2) сходится на решении $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1), если

$$\|U^{(h)} - [U]_h\|_{U_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

где $U^{(h)}$ – решение разностной краевой задачи (2). При этом, если

$$\|U^{(h)} - [U]_h\|_{U_h} \leq C_1 h^m,$$

где $C_1 = \text{const}$ не зависящая от h , то имеет место порядок сходимости $O(h^m)$.

Введем пространство сеточных функций F_h , элементами которого являются всевозможные сеточные функции $f^{(h)}$, определенные на сетке D_h . Норму в пространстве F_h определим как

$$\|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_{(x_i, y_j) \in \Gamma^*} |\varphi_{ij}| + \max_{(x_i, y_j) \in D^*} |g_{ij}|.$$

Введем невязку

$$\delta f^{(h)} = L_h[U]_h - f^{(h)},$$

соответствующую решению $U = U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1).

Определение 2. будем говорить, что разностная схема (13.2) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (13.1) на ее решении $U = U(x, y)$, если

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

При этом будем говорить, что имеет место порядок аппроксимации $O(h^m)$, если

$$\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq C_2 h^m,$$

где $C_2 = \text{const}$ не зависит от h .

По аналогии с §12 введем понятие устойчивости разностной схемы. (Отметим, что в данном параграфе мы имеем дело с линейными дифференциальными операторами LU).

Определение 3. Разностная схема (13.2) называется устойчивой, если существует число $h_0 > 0$ такое, что для любого $h < h_0$ разностная краевая задача (2) имеет единственное решение при любой правой части $f^{(h)}$, и это условие удовлетворяет условию

$$\|U^{(h)}\| \leq C \|f^{(h)}\|,$$

где $C = const$ не зависит от h и $f^{(h)}$.

Теорема 1. Пусть разностная схема (13.2) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (13.1) с порядком аппроксимации $O(h^m)$ и разностная схема (13.2) устойчива. Тогда разностная схема (13.2) сходится на решении $U(x, y)$ дифференциальной краевой задачи (13.1) с порядком сходимости $O(h^m)$.

Пример. Рассмотрим задачу теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T],$$

с граничными условиями

$$U(x, 0) = g(x), \quad U(0, t) = \varphi(t), \quad U(L, t) = \psi(t).$$

Введем сетку D_h , определенную прямыми

$$x_i = ih, \quad i = \overline{0, n}; \quad t_j = jl, \quad j = \overline{0, m},$$

где $n = L/h$, $m = T/l$, $l = \frac{h^2}{2a^2}$.

Составим разностную схему, соответствующую рассматриваемой дифференциальной краевой задаче в узлах сетки D_h . Получим

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{l} - a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = 0$$

или, полагая $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h^2} - \frac{1}{2} \frac{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}))}{h^2} = 0$$

откуда

$$\frac{u_{i,j+1} - \frac{1}{2}u_{i+1,j} - \frac{1}{2}u_{i-1,j}}{h^2} = 0.$$

Граничные условия будут иметь вид

$$u_{i,0} = g_i, \quad u_{0,j} = \varphi_j, \quad u_{n,j} = \psi_j,$$

где $g_i = g(x_i)$, $\varphi_j = \varphi(t_j)$, $\psi_j = \psi(t_j)$.

Таким образом, мы имеем разностную схему

$$L_h U^{(h)} = f^{(h)},$$

где

$$L_h U^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - \frac{1}{2}u_{i+1,j} - \frac{1}{2}u_{i-1,j}}{h^2} & \text{для } (i, j), \text{ соответствующих внутренним узлам} \\ u_{i,0} & \text{при } i = \overline{0, n} \\ u_{0,j} & \text{при } j = \overline{0, m} \\ u_{n,j} & \text{при } j = \overline{0, m}, \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} 0, & \text{для } (i, j), \text{ соответствующих внутренним узлам сетки} \\ \bar{g}_i, & i = \overline{0, n} \\ \bar{\varphi}_j, & j = \overline{0, m} \\ \bar{\psi}_j, & j = \overline{0, m}. \end{cases}$$

Покажем, что разностная схема сходится на решении $u(x, t)$ дифференциальной краевой задачи.

Порядок аппроксимации определить легко. Точность разностной аппроксимации производной $\frac{\partial U}{\partial t}$ определяется $O(l) = O(h^2)$, производной $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - O(h^2)$, граничные условия аппроксимируются точно. В итоге, разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$.

Покажем, что построенная разностная схема устойчива. Рассмотрим возмущенную краевую задачу

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)}$$

с произвольной правой частью

$$f^{(h)} = \begin{cases} f_{ij}, & \text{для всех } (i, j) \text{ соответствующих внутренним узлам } D_h \\ \bar{g}_i, & i = \overline{0, n} \\ \bar{\varphi}_j, & j = \overline{0, m} \\ \bar{\psi}_j, & j = \overline{0, m}, \end{cases}$$

где f_{ij} , \bar{g}_i , $\bar{\varphi}_j$, $\bar{\psi}_j$ — произвольные сеточные функции, определенные на внутренних и граничных узлах сетки.

Надо доказать, что возмущенная задача имеет

- 1) единственное решение $z^{(h)}$;
- 2) это решение удовлетворяет оценке

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|f^{(h)}\|_{F_h},$$

$$\text{где } \|z^{(h)}\|_{U_h} = \max_{i,j} |z_{ij}|, \quad \|f^{(h)}\|_{F_h} = \max\{\max_i |\bar{g}_i|, \max_j |\bar{\varphi}_j|, \max_j |\bar{\psi}_j|, \max_{i,j} |f_{ij}|\}.$$

Существование решения и его единственность вытекают из того, что значения $z^{(h)}$ на нулевом слое (при $j=0$) определяются граничными условиями, в первом слое ($j=1$) однозначно определяются из разностной схемы и т.д.

С другой стороны

$$|z_{i,0}| \leq |\bar{g}_i| \leq \|f^{(h)}\|, \quad i = \overline{0, n}.$$

Далее

$$|z_{i,1}| \leq \frac{1}{2} |z_{i+1,0}| + \frac{1}{2} |z_{i-1,0}| + h^2 |f_{i1}| \leq \frac{1}{2} |\bar{g}_i| + \frac{1}{2} |\bar{g}_i| + h^2 |f_{i1}| \leq \|f^{(h)}\| + h^2 |f_{i1}|, \quad i = \overline{0, n}.$$

Отсюда

$$|z_{i,1}| \leq (1 + h^2) \|f^{(h)}\|, \quad i = \overline{0, n}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЙ КУРС ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА	1
ВВЕДЕНИЕ.....	25
1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	26
1.1. Связь метод конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов.	26
1.2. Пример решения одномерной задачи	27
1.3. Конечные элементы для многомерных областей.....	29
1.4 Аппроксимирующие функции элементов	36
1.5 . Объединение конечных элементов в ансамбль.	39
1.6. Определение вектора узловых значений функций.	41
1.7. Двухмерные финитные функции на треугольной сетке.....	44
1.8.. Решение двухмерной задачи Дирихле на треугольной сетке.....	46
2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ	48
2.1. Теоретические основы вариационных методов	48
2.2. Примеры решения задач методом Галеркина	51
2.2.1. Одномерная краевая задача Дирихле	51
2.2.2. Двухмерная краевая задача Дирихле	52
2.2.3. Сведение задачи для ДУ в частных производных к решению задачи для системы ОДУ методом Канторовича	52
ПРИЛОЖЕНИЕ. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ.....	54
ЗАДАНИЕ 11. Решение краевых задач. Методы коллокаций, наименьших квадратов и Галеркина.	Ошибка! Закладка не определена.
ЗАДАНИЕ 12. Решение краевых задач методом разностных аппроксимаций.	Ошибка! Закладка не определена.
ЗАДАНИЕ 13. Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности.	54
ЛИТЕРАТУРА.....	63

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Методы численного анализа» предполагает освоение методов решения классических задач вычислительной математики с помощью компьютерной техники. В первой части пособия изложены основные понятия, определения и алгоритмы методов численного анализа, рассмотрены основные методы решения систем линейных уравнений, нахождения собственных значений и собственных векторов, численного решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, а также излагаются основные методы аппроксимации и интерполяции функций, методы численного дифференцирования и интегрирования функций, численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Во второй части пособия изложены основные понятия, определения и алгоритмы методов численного анализа. Рассмотрены методы конечных элементов, вариационного исчисления, численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Цель данного пособия: познакомить студентов с основными методами численного анализа, а также научить численному решению типичных задач вычислительной математики, достаточно сложных в вычислительном отношении и требующих применения ПЭВМ.

1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

1.1 Связь метода конечных элементов (МКЭ) и метода конечных разностей (МКР).

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области – узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе нелинейных в общем случае алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функций.

В общем случае алгоритм метода сеток состоит из трех этапов.

Шаг 1. Построение сетки в заданной области (дискретизация задачи).

Шаг 2. Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи).

Шаг 3. Решение полученной системы алгебраических уравнений.

Метод сеток разделяется на два метода: 1) метод конечных элементов (МКЭ); 2) метод конечных разностей (МКР). Эти методы отличаются друг от друга на шагах 1 и 2 алгоритма. На шаге 3 методы практически идентичны.

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в САПР. В математическом отношении метод относится к группе вариационно-разностных. Строгое доказательство таких важных свойств, как устойчивость, сходимость и точность метода, проводится в соответствующих разделах математики и часто представляет собой непростую проблему. Тем не менее МКЭ активно развивается, с его помощью и без строгого математического обоснования используемых приемов успешно решаются сложные технические проблемы. Правильность же работы созданных алгоритмов и программ, реализующих МКЭ, проверяют на известных точных решениях. Начав развиваться как метод решения задач строительной механики, МКЭ быстро завоевал такие сферы инженерной деятельности, как проектирование самолетов и автомобилей, космических ракет, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

Теоретическое обоснование этого метода было в основном завершено в 70-е годы прошлого столетия, а с появлением высокопроизводительной вычислительной техники он стал важным инструментом исследований в науке и технике. Появилось множество пакетов прикладных программ, как коммерческих, так и общедоступных, позволяющих решать разнообразные задачи – теплопроводности, электродинамики, механики деформируемого твердого тела, гидродинамики и др. МКЭ представляет собой синтез метода

сеток и проекционного метода Галеркина с выбором базиса из финитных функций, носители которых (конечные элементы) покрывают каждый узел сетки. В результате применения к такому базису проекционной процедуры для коэффициентов разложения искомого решения получается система алгебраических уравнений, аналогичная той, к которой приводят сеточные методы, – матрица ленточная, количество неизвестных равно количеству узлов сетки. К тому же при определенном выборе финитных функций, например в виде искомых коэффициентов, являются приближенными значениями решения в узлах сетки.

Поэтому можно сказать, что МКЭ – это тот же классический метод сеток, в котором конечно-разностная схема получается в результате применения проекционной процедуры к базису из финитных функций, привязанных к каждому узлу сетки. Такой способ получения конечно-разностной схемы позволил избавиться от основного недостатка классического метода сеток – привязки узлов сетки к координатным линиям, что позволило в случае многомерных задач гибко адаптировать сетку к произвольной форме границ и особенностям искомого решения.

1.2. Пример решения одномерной задачи

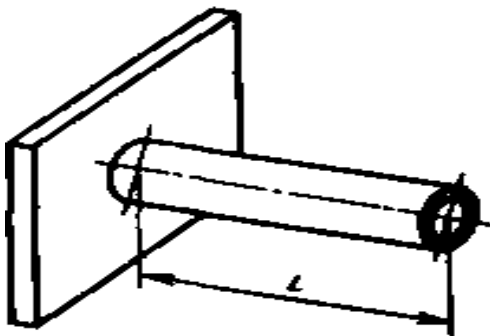


Рис. 1.1. Однородный стержень, находящийся под воздействием теплового потока.

● Пусть имеется стержень длиной L и площадью поперечного сечения S (рис. 1.1). Один конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток q заданной интенсивности. На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Известны коэффициент теплообмена α и температура окружающей среды T_* . Вдоль боковой поверхности стержень теплоизолирован.

Температурное поле в неоднородном стержне описывается уравнением теплопроводности, которое в одномерном

приближении имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x) \quad ,$$

Краевые условия определяются уравнениями:

$$\lambda_x (\partial T / \partial x) + q = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$\lambda_x (\partial T / \partial x) + \alpha (T - T_x) = 0 \quad \text{при } x = L .$$

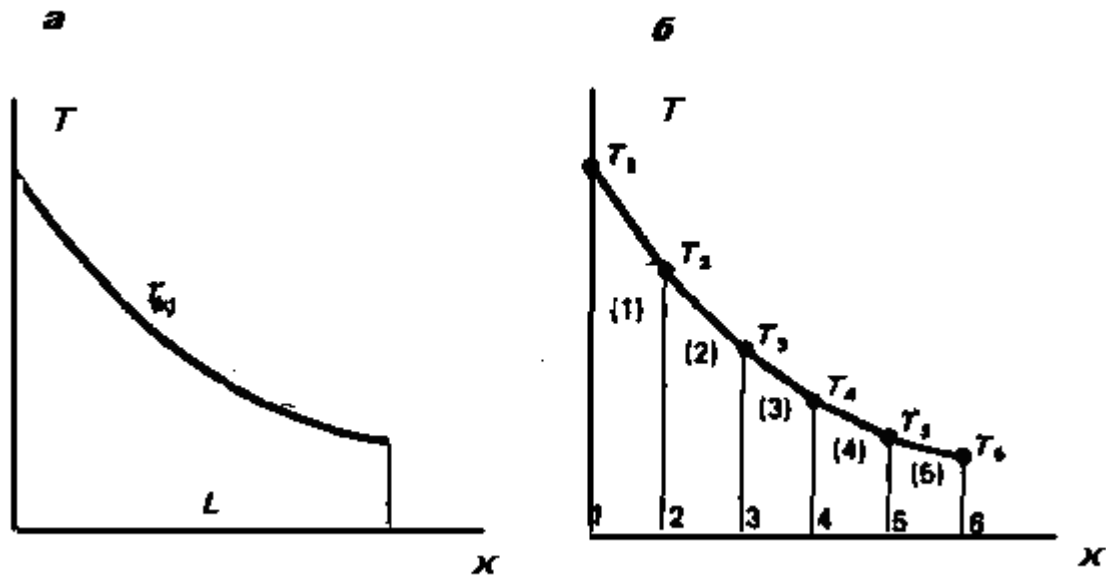


Рис. 1.2. Расчет одномерного температурного поля в однородном стержне методом МКЭ.

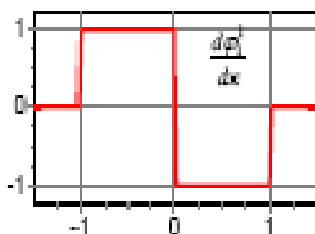
Искомое температурное поле является непрерывной функцией координаты x (рис. 1.2, а). В МКЭ стержень разбивается произвольным образом на конечные элементы, которые в данном случае являются отрезками неравной длины. На каждом элементе непрерывная функция $T(x)$ аппроксимируется некоторой линейной зависимостью, как показано на рис. 1.2,б (в скобках указаны номера элементов). Аппроксимирующая кусочно-линейная функция определяется через узловые значения $T_1 - T_6$, которые в общем случае сначала неизвестны и подлежат определению в МКЭ. Рассмотрим реализацию МКЭ на примере решения простейшей задачи :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x) \quad u(0) = \alpha ; u(b) = \beta .$$

Выбираем равномерную сетку $\omega_n = \{x_i = (i-1)h, i=1 \dots N=n+1\}$ и ищем решение в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k = \varphi_1 \left(\frac{x - (k-1)h}{h} \right).$$

Здесь обозначено $a_k = \bar{u}_k$. Заметим, что $\bar{u}_1 = \alpha$, $\bar{u}_N = \beta$ в силу граничных условий. Производная от функции-крышки также финитная функция:



$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & -1 \leq |x| \leq 0, \\ -1, & 0 \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Используем проекционные уравнения

$$\sum_{k=1}^N \left(g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) a_k = f_i; i = 1 \dots N.$$

Ввиду ограниченности функций каждое i -е уравнение содержит только три члена:

$$-\bar{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx + \bar{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g}{h^2} dx - \bar{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g}{h^2} dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx.$$

Обозначим

$$g_{i-1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g dx, \quad g_{i+1/2} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g dx, \quad f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx.$$

Получаем конечно-разностную схему,:

$$\frac{g_{i-1/2}}{h^2} \bar{u}_{i-1} - \left(\frac{g_{i-1/2} + g_{i+1/2}}{h^2} \right) \bar{u}_i + \frac{g_{i+1/2}}{h^2} \bar{u}_{i+1} = f_i, i = 2 \dots n, \bar{u}_1 = \alpha, \bar{u}_n = \beta.$$

Как видим, технология МКЭ для одномерного уравнения приводит практически к той же конечно-разностной схеме с трехдиагональной матрицей, что и классический метод сеток. Имеются, однако, некоторые отличия в вычислении коэффициентов: в МКЭ коэффициенты $g_{i\pm 1/2}$ вычисляются через интегралы по соответствующим участкам сетки. Это значит, что технология МКЭ приводит к так называемым однородным конечно-разностным схемам, т.е. таким, которые позволяют проводить расчеты ДУ с разрывными коэффициентами. Программная реализация алгоритма решения методом прогонки.

1. 3. Конечные элементы для многомерных областей

Аналогичный подход может быть и в случае двух- и трехмерных областей определения искомой функции.

Для двумерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как прямо, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее употребимы элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь прямолинейные и криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех шагов.

Шаг 1. Выделение конечных элементов (разбиение заданной области на конечные элементы).

Шаг 2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции $\varphi^{(e)}$ в произвольной точке e – го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)} R + A_0, \quad (1.1)$$

где $A^{(e)}$ – вектор-строка коэффициентов полинома; A_0 – свободный член; $R = (x, y, z)$ – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора $A^{(e)}$ и свободного члена A_0 . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор $\Phi^{(e)}$ узловых значений функции и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)} \Phi^{(e)}, \quad (1.2)$$

где $N^{(e)}$ – матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Шаг 3. Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (1.2), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = N\Phi. \quad (1.3)$$

Система (1.3) является моделью искомой непрерывной функции.

Шаг 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор Φ в (1.3) вначале неизвестен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора Φ . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих этапов:

Шаг 1. Выбор функционала F , зависящего для стационарных задач от искомой функции φ и ее частных производных $\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z$, по вектору пространственных координат:

$$F = \int_V f(\varphi, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z) dV, \quad (1.4)$$

где V – объем.

Функционал F представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам:

$$F = \sum_{e=1}^N F^{(e)} = \sum_{e=1}^N \int_{V^{(e)}} f(\varphi^{(e)}, \dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}) dV^{(e)}, \quad (1.5)$$

где N – число элементов.

Шаг 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (1.2) в (1.5) и вычисление производных $\dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}$ по формулам вида

$$\dot{\varphi}_x^{(e)} = \partial \varphi^{(e)} / \partial x = (\partial N^{(e)} / \partial x) \Phi^{(e)}.$$

Шаг 3. Минимизация по вектору Φ функционала F . Для этого составляются уравнения

$$\partial F^{(e)} / \partial \Phi^{(e)} = 0. \quad (1.6)$$

Суммирование выражений (1.6) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

$$K\Phi = B, \quad (1.7)$$

где K – матрица коэффициентов, так называемая, – матрица жесткости; B – вектор нагрузки.

Шаг 4. Решение системы (1.7), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

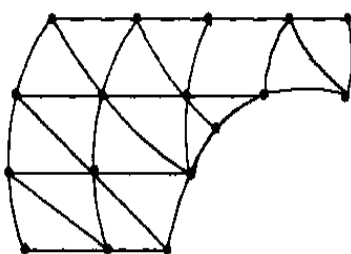
Найденные значения вектора Φ подставляют в (1.3), после чего значение функции φ легко вычисляется в любой точке заданной области.

Каждый из четырех шагов приведенного алгоритма МКЭ при реализации в САПР обладает особенностями, которые подробно рассматриваются ниже.

Выделение конечных элементов. Разбиение области на элементы – важный этап в МКЭ. От качества разбиения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы.

Возможность легко варьировать размерами элементов – важное свойство МКЭ (последнее позволяет без труда учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т. д.).

Разбиение области на элементы обычно начинают от ее границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится разбиение внутренних областей. Часто разбиение области на элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на



достаточно крупные подобласти (подконструкции), границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать. На рис. 1.3 приведен пример разбиения двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

Рис. 1.3. Разбиение двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов) – следующая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумерации имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений. Дело в том, что матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, – сильно разреженная матрица ленточной структуры.

Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали. Целое число L , представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется шириной полосы. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем ОП требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затраты машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит в свою очередь от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних. Под числом степеней свободы понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двухмерных задач гидравлики в каждом узле определяют три переменные: давление и составляющие скорости по осям X и Y .

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить N , а число степеней свободы – M , то ширина полосы равна $L = (N + 1)M$.

В некоторых случаях уменьшение числа N может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области. На рис. 1.4 приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на конечные элементы. При первом способе (рис. 1.4, а) $N = 14$, при втором (рис. 1.4, б) $N = 5$. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной соответственно 15 и 6; при двух степенях свободы — 30 и 12. Рациональная нумерация в случае рис. 1.4, б сокращает необходимый объем памяти почти в три раза по сравнению со случаем на (рис. 1.4, а).

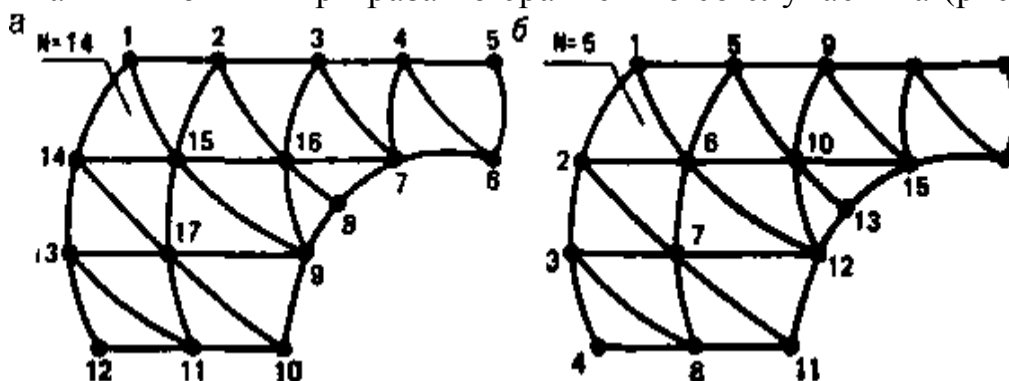


Рис. 1.4. Способы нумерации узлов при разбиении двухмерной области на конечные элементы

Информация о способе разбиения области на конечные элементы и нумерации узлов является исходной для всех следующих этапов алгоритмов

МКЭ при реализации метода в САПР. При этом требуется указывать не только номер, но и координаты каждого узла и его принадлежность к определенным конечным элементам. Такого рода информация называется топологической и обычно содержит примерно в 6 раз больше чисел, чем количество узлов системы.

При описании области, разбитой на конечные элементы, необходимо задавать: тип конечного элемента; его порядковый номер; номера узлов элемента; координаты узлов, информацию о соединении элементов между собой; значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Так, промышленная эксплуатация программной системы долгое время тормозилась именно сложностью подготовки исходных данных, объем которых в некоторых случаях достигал нескольких сотен тысяч.

При решении задач методом конечных элементов область определения искомой функции разбивается на несколько тысяч элементов примерно с таким же количеством узлов. В связи с этим возникают проблемы, связанные со сложностью подготовки столь большого количества исходной информации и с трудностью ее проверки и корректировки, так как при ручной подготовке такого объема исходных данных неизбежно появление ошибок.

Поэтому усилия разработчиков программ МКЭ в составе САПР в последние годы были направлены на создание подсистем автоматизированной подготовки топологической информации, основу которых составляют специальные программы, называемые препроцессорами. Препроцессоры либо непосредственно включаются в состав программных комплексов, реализующих МКЭ, либо существуют в виде автономных программ.

Алгоритм работы препроцессора, как правило, состоит из следующих этапов:

Шаг 1. Нанесение на заданную область некоторого множества узлов.

Шаг 2. Формирование узловых связей с целью заполнения области конечными элементами «наилучшей» формы.

Шаг 3. Нумерация узлов, минимизирующая ширину полосы в матрице коэффициентов системы уравнений.

Последняя процедура поддается алгоритмизации особенно просто и реализована практически во всех крупных программных комплексах на основе МКЭ. При автоматическом нанесении на исходную область множества узлов должен выдерживаться ряд требований. Так, узлы должны сгущаться в зонах, где ожидаются высокие концентрации напряжений или градиенты температур. При этом изменение густоты узлов не должно быть скачкообразным. Эти требования удастся обеспечить, если в качестве координат узлов брать случайные числа с заданным законом распределения. Тогда в программных реализациях координаты узлов генерируются датчиком случайных чисел. Алгоритмы формирования межузловых связей строятся на основе различных подходов. При этом в первую очередь стараются, если это возможно, использовать упрощающие предположения. Так, регулярность

области, очевидно, удобно использовать для построения однородной сетки, шаг которой меняется по несложному закону. Криволинейные границы области часто аппроксимируют с помощью отрезков прямой, параболы или дуги.

В основу разбиения области произвольной формы на треугольные конечные элементы может быть положен следующий алгоритм:

Шаг 1. Аппроксимация границы области совокупностью отрезков, представляемых номерами узлов.

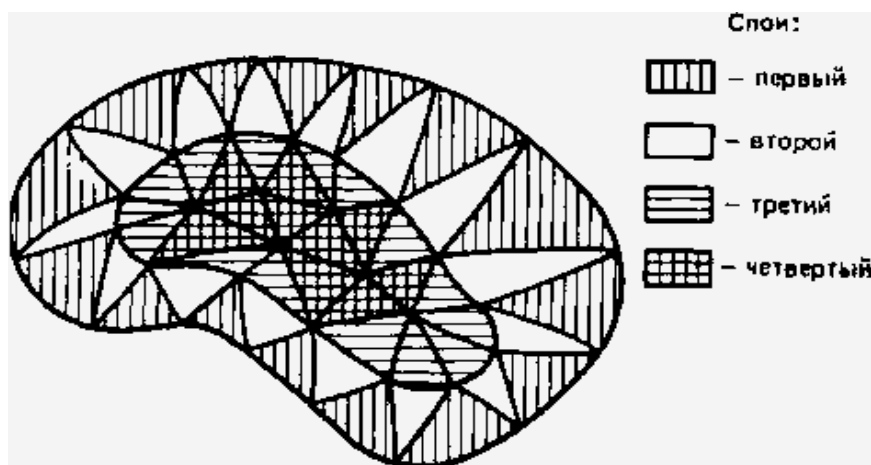


Рис. 1.5. Пример использования алгоритма автоматического разбиения произвольной области на треугольные конечные элементы

Шаг 2. Выбор вершин треугольников, основаниями которых служат полученные на шаге 1 отрезки (при этом выбор вершин разрешен только с одной вполне определенной стороны).

Шаг 3. Соединение основания с выбранной вершиной отрезками, которые на следующем шаге сами будут рассматриваться как основания новых треугольников.

Алгоритм повторяется до тех пор, пока остается возможным строить новые элементы на базе проведенных отрезков, т. е. до полного заполнения области элементами.

Пример такого «послойного» заполнения области элементами приведен на рис. 1.5. При построении очередного треугольника для анализа выбираются вначале два ближайших к основанию узла с «разрешенной» стороны. На выбранных узлах строится прямоугольник. Далее проводится топологический анализ, использующий информацию об уже построенных элементах. Целью анализа является исключение возможности попадания какого-либо узла внутрь построенного треугольника. На основании анализа выбирается одна из двух возможных вершин и четырехугольник делится на треугольники одним из двух возможных способов.

Примером другого подхода к автоматическому разбиению области на элементы служит следующий алгоритм:

Шаг 1. Определение граничных узлов области.

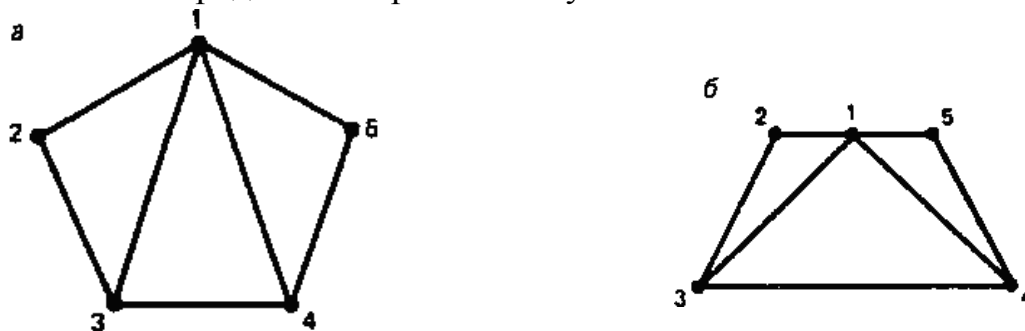


Рис. 1.6. Пример автоматического разбиения области с пятью граничными узлами на треугольные элементы: а — регулярная сетка; б — сетка в заданной области

Шаг 2. Построение регулярной сетки с тем же числом узлов, что и в заданной области.

Шаг 3. Использование полученной схемы соединения узлов для области произвольной формы.

На рис. 1.6 приведен пример разбиения на треугольные конечные элементы области с пятью граничными узлами.

Для построения регулярной сетки используется следующий алгоритм:

Шаг 1. Окружение исходной точки кольцом равносторонних треугольников так, чтобы число внешних узлов было предельно близким к заданному числу граничных узлов.

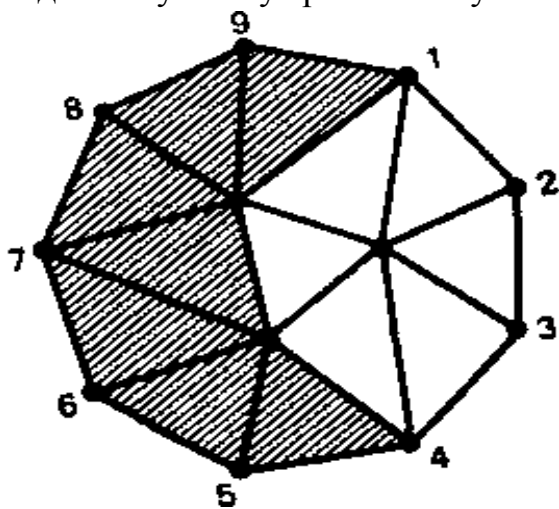


Рис. 1.7 Пример использования алгоритма автоматического построения сетки наилучшего вида в области с десятью граничными узлами

Шаг 2. Если желаемый результат не достигнут, добавление еще одного ряда колец.

На рис. 1.7. проиллюстрировано использование приведенного алгоритма для построения регулярной сетки «наилучшего» вида для границы с девятью узлами. Полученная в результате проведенного построения схема соединения узлов позволяет получить координаты всех внутренних точек области. Если в

результате выполнения алгоритма вид конечных элементов оказывается неудовлетворительным, то исходная область разбивается на подобласти и все повторяется сначала.

1.4. Аппроксимирующие функции элементов

Определение аппроксимирующей функции элементов. Эту процедуру можно выполнить один раз для типичного элемента области безотносительно к его топологическому положению в ней. Полученная функция используется далее для всех остальных элементов области того же вида. Эта особенность является важным аспектом МКЭ. Благодаря ей элементы с однажды определенными функциями легко включаются в библиотеку элементов соответствующего программного комплекса. Далее эти элементы применяются для решения разнообразных краевых задач.

Выше отмечалось, что в качестве аппроксимирующих функций элементов чаще всего используются полиномы. В зависимости от степени последних конечные элементы делятся на симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы. Полиномы симплекс-элементов содержат константы и линейные члены; полиномы комплекс-элементов — константы, линейные члены, а также члены более высоких степеней. Комплекс-элементы, как правило, кроме граничных имеют дополнительные внутренние узлы. Полиномы мультиплекс-элементов также содержат члены более высоких степеней. Однако на мультиплекс-элементы накладывается дополнительно еще одно условие: их границы должны быть параллельны координатным осям.

Одномерный симплекс-элемент представляет собой отрезок, изображенный на рис. 1.8.

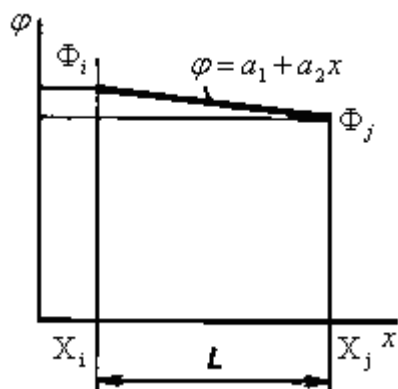


Рис. 1.8. Одномерный симплекс-элемент

При определении функции этого элемента для простоты будем считать, что узловые значения искомой непрерывной функции, определенные на концах отрезка, известны. По длине отрезка значение функции аппроксимируется полиномом:

$$\varphi = a_1 + a_2 x. \quad (1.8)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются через узловые значения функции Φ_i , Φ_j в соответствии с условием непрерывности:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_i \text{ при } x = X_i; \\ \varphi &= \Phi_j \text{ при } x = X_j; \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставив (1.9) в (1.8), получим

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i; \quad \Phi_j = a_1 + a_2 X_j. \quad (1.10)$$

Решим систему (1.10) относительно a_1 и a_2

$$a_1 = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L; \quad a_2 = (\Phi_j - \Phi_i) / L.$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в (1.8), получим

$$\varphi = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L + [(\Phi_j - \Phi_i) / L] x. \quad (1.11)$$

Проведя эквивалентные преобразования правой части уравнения (1.11), представим его в форме

$$\varphi = [(X_j - x) / L] \Phi_i + [(x - X_i) / L] \Phi_j. \quad (1.12)$$

Члены уравнения (1.12), заключенные в скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

$$N_i = (X_j - x) / L; \quad N_j = (x - X_i) / L; \quad (1.13)$$

С учетом обозначений (1.13) уравнение (1.12) принимает вид

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \quad (1.14)$$

или в матричной форме

$$\varphi = N \Phi, \quad (1.15)$$

где

$$N = [N_i, N_j] - \text{матрица-строка}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} \text{ вектор-столбец.}$$

Функции формы обладают следующим свойством: функция формы с номером i равна 1 в узле с соответствующим номером и равна 0 во всех других узлах. Нетрудно убедиться в наличии этого свойства у функций формы (1.13).

Двухмерный симплекс-элемент представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами, уже использовавшийся выше для дискретизации произвольной двухмерной области. Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию φ внутри треугольного симплекс-элемента, имеет вид

$$\varphi = a_1 + a_2 x + a_3 y. \quad (1.16)$$

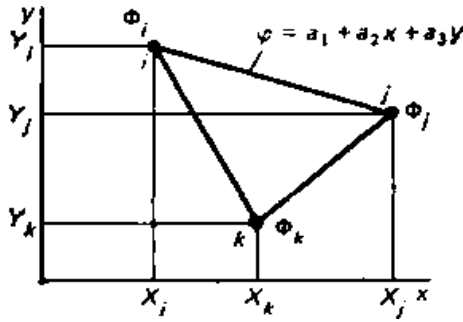


Рис. 1.9. Функция двухмерного симплекс-элемента

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами i, j, k , начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис.1.9). Узловые значения Φ_i, Φ_j, Φ_k будем по-прежнему считать известными.

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i;$$

$$\Phi_j = a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j;$$

$$\Phi_k = a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k,$$

разрешая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,5/S)[(X_j Y_k - X_k Y_j)\Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\Phi_k]; \\ a_2 &= (0,5/S)[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k]; \\ a_3 &= (0,5/S)[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k], \end{aligned} \quad (1.17)$$

где S - площадь элемента, вычисляемая по формуле

$$S = 0,5[X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)].$$

Подставив (1.17) в (1.16) и проделав преобразования, аналогичные предыдущему случаю, найдем

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y); \\ N_j &= (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y); \\ N_k &= (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (1.19)$$

и

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j; & a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k; & a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i; \\ b_i &= Y_j - Y_k; & b_j &= Y_k - Y_i; & b_k &= Y_i - Y_j; \\ c_i &= X_k - X_j; & c_j &= X_i - X_k; & c_k &= X_j - X_i. \end{aligned}$$

Вычисляя значения функций формы N_i, N_j, N_k , нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

Заметим, что функции (1.14) для одномерного и (1.18) для двухмерного симплекс-элементов были получены для типичных элементов

безотносительно к их положению в области. Поэтому они удовлетворяют всем элементам данного типа, что, как отмечалось выше, позволяет создавать обширные библиотеки элементов в САПР.

1.5. Объединение конечных элементов в ансамбль

Основу этой процедуры составляет замена произвольно назначенных выше номеров узлов i, j, k на номера, присвоенные узлам в процессе разбиения рассматриваемой области. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений, позволяющей при известных узловых значениях искомой функции получить значение последней в любой точке области.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов для сформулированной выше задачи о нахождении поля температур в стержне (см. рис. 1.2, а). Кусочно-элементная модель области приведена на рис. 1.2, б, а функция отдельного элемента определяется уравнением (1.14).

Можно написать следующее соответствие между произвольными номерами i, j , фигурирующими в уравнении (1.14), и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели:

$$\text{для элемента 1 } i = 1; \quad j = 2; \quad (1.21a)$$

$$\text{элемента 2 } i = 2; \quad j = 3; \quad (1.21б)$$

$$\text{элемента 3 } i = 3; \quad j = 4; \quad (1.21в)$$

$$\text{элемента 4 } i = 4; \quad j = 5; \quad (1.21г)$$

$$\text{элемента 5 } i = 5; \quad j = 6. \quad (1.21д)$$

Подставив значения номеров узлов (1.21) в (1.14), получим

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} T_1 + N_2^{(1)} T_2; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)} T_2 + N_3^{(2)} T_3; \\ \varphi^{(3)} &= N_3^{(3)} T_3 + N_4^{(3)} T_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)} T_4 + N_5^{(4)} T_5; \\ \varphi^{(5)} &= N_5^{(5)} T_5 + N_6^{(5)} T_6; \end{aligned} \quad (1.22)$$

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

В выражениях для функций формы элемента (1.14) значения произвольных номеров i, j также следует изменить в соответствии с (1.21). Тогда значения $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$, например, определяются по формулам

$$N_3^{(2)} = (x - X_2) / L^{(2)};$$

$$N_3^{(3)} = (X_4 - x) / L^{(3)}.$$

Очевидно, что $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$ не равны друг другу даже в случае равенства длин элементов $L^{(2)}$ и $L^{(3)}$. При известных значениях узловых величин $T_1 - T_6$

уравнения (1.22) позволяют определить значение температуры в любой точке стержня.

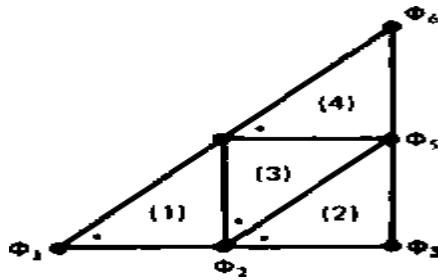


Рис. 1.10. Пример составления ансамбля конечных элементов для двухмерной треугольной области

Рассмотрим еще один пример объединения элементов двухмерной области в ансамбль, который потребуется для иллюстрации дальнейших этапов МКЭ.

Треугольная область разбита на элементы треугольной формы, как показано на рис. 1.10. Для обозначения узлов отдельных элементов по

прежнему используются номера i, j, k , начиная с произвольного узла (на рисунке отмеченного звездочкой) против часовой стрелки. Соответствие между этими обозначениями и глобальными номерами узлов следующее:

$$\text{элемента 1 } i = 1; \quad j = 2; \quad k = 4; \quad (1.23a)$$

$$\text{элемента 2 } i = 2; \quad j = 3; \quad k = 5; \quad (1.23б)$$

$$\text{элемента 3 } i = 2; \quad j = 5; \quad k = 4; \quad (1.23в)$$

$$\text{элемента 4 } i = 4; \quad j = 5; \quad k = 6. \quad (1.23г)$$

Подставляя значения (1.23) и (1.18), получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} \Phi_1 + N_2^{(1)} \Phi_2 + N_4^{(1)} \Phi_4; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)} \Phi_2 + N_3^{(2)} \Phi_3 + N_4^{(2)} \Phi_4; \\ \varphi^{(3)} &= N_2^{(3)} \Phi_2 + N_5^{(3)} \Phi_5 + N_4^{(3)} \Phi_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)} \Phi_4 + N_5^{(4)} \Phi_5 + N_6^{(4)} \Phi_6. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Аналогичную замену номеров необходимо проделать в (1.4.19) при вычислении функций формы элементов. Система (1.24) – сокращенная форма математического описания модели. Расширенная форма имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} \Phi_1 + N_2^{(1)} \Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(1)} \Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(2)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(2)} \Phi_2 + N_3^{(2)} \Phi_3 + 0\Phi_4 + N_4^{(2)} \Phi_4 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(3)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(3)} \Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)} \Phi_4 + N_5^{(3)} \Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(4)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(4)} \Phi_4 + N_5^{(4)} \Phi_5 + N_6^{(4)} \Phi_6, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\varphi = N\Phi. \quad (1.25)$$

В САПР с целью уменьшения объема памяти чаще используют сокращенную форму описания моделей (1.24). Расширенная форма описания моделей имеет некоторые преимущества при реализации следующих этапов алгоритма МКЭ.

1.6. Определение вектора узловых значений функций

Для этой цели, как отмечалось выше, используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некоторого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

• Пример минимизации функционала в задаче о нахождении распределения температуры в стержне. При указанном методе минимизируется функционал

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S [qT + 0,5\alpha(T - T_*)^2] dS, \quad (1.26)$$

где V - объем тела; S - площадь границы.

В функционал F входят оба граничных условия. При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать, что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно). Тогда

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \quad (1.27)$$

Функционал (1.26) удобно представить в виде

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dY + \int_{S_1} qT dS_1 + \int_{S_2} 0,5\alpha(T - T_*)^2 dS_2, \quad (1.28)$$

где S_1 и S_2 - площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия (1.1 а) и (1.1б) соответственно.

Для вычисления объемного интеграла в (1.28) его необходимо разбить на два слагаемых в соответствии с принятой конечно-элементной моделью:

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dY = \int_{V_1} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(1)}}{dx} \right)^2 dV_1 + \int_{V_2} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(2)}}{dx} \right)^2 dV_2. \quad (1.29)$$

Производные в (1.29) вычисляются с учетом (1.27) :

$$dT^{(1)} / dx = (-T_1 + T_2) / L^{(1)}; \quad dT^{(2)} / dx = (-T_2 + T_3) / L^{(2)}. \quad (1.30)$$

Подставив (1.30) в (1.29) и считая, что $dV^{(e)} = S^{(e)} dx$, получим

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dY = 0,5 \frac{\lambda_x S^{(1)}}{L^{(1)}} \cdot (-T_1 + T_2)^2 + 0,5 \frac{\lambda_x S^{(2)}}{L^{(2)}} \cdot (-T_2 + T_3)^2. \quad (1.31)$$

Второе и третье слагаемые в (1.28) вычисляются просто, так как подинтегральным функциям соответствуют узловые значения T_1 и T_3 :

$$\int_{S_2} qT dS_1 = qT_1 S_1; \quad (1.32)$$

$$\int_{S_2} 0,5\alpha(T - T_*)^2 dS_2 = 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_* T_3 + T_*^2), \quad (1.33)$$

где S_1 и S_2 - площади поверхностей, на которых заданы q и α (для рассматриваемого примера $S_1 = S^{(1)}$ и $S_2 = S^{(2)}$).

Значение функционала F вычисляется простым суммированием выражений (1.32), (1.33):

$$F = 0,5C^{(1)}(T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2) + 0,5C^{(2)}(T_2^2 - 2T_2 T_3 + T_3^2) + qS_1 T_1 + 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_* T_3 + T_*^2), \quad (1.34)$$

где

$$C^{(1)} = S^{(1)} \lambda_x^{(1)} / L^{(1)} \text{ и } C^{(2)} = S^{(2)} \lambda_x^{(2)} / L^{(2)}.$$

Для минимизации функционала F необходимо выполнение условий

$$dF / dT_1 = C^{(1)} T_1 + C^{(1)} T_2 + qS_1 = 0;$$

$$dF / dT_2 = -C^{(1)} T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}] T_2 - qC^{(2)} T_3 = 0;$$

$$dF / dT_3 = -C^{(2)} T_2 + [C^{(2)} + \alpha S_2] T_3 - \alpha S_2 T_* = 0,$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \\ \alpha S_2 T_* \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

В общем виде (1.35) можно представить так:

$$KT = B,$$

что соответствует (1.18).

Примечание. Матрица коэффициентов K в (1.35) по-прежнему называется матрицей жесткости, хотя по физическому смыслу в данной задаче ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Такое название матрицы K пришло из строительной механики, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях техники.

Зная характеристики материала, из системы (1.35) можно определить узловые значения T_1, T_2, T_3 .

Из (1.34) и (1.35) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определенного типа в матрицу жесткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях.

Метод Галеркина — другой широко известный метод вычисления вектора узловых значений — представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этого метода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение. Поэтому метод Галеркина с успехом

применяется при решении задач, для которых не удается подобрать функционал для минимизации (например задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье-Стокса).

Метод Галеркина основан на минимизации ошибки $\varepsilon = Lu - f$ приближенного решения и исходного дифференциального уравнения $L_\varphi - f = 0$, где L — дифференциальный оператор.

Для минимизации ε в заданной области G требуется выполнение равенства $\int_G N_i \varepsilon dG = 0$ для каждой из функций N_i .

Сочетание метода Галеркина с МКЭ приводит к системе уравнений:

$$\int_G N_\beta L(\varphi) dG = 0 \text{ при } \beta = i, j, k, \dots,$$

где $L(\varphi)$ — левая часть исходного дифференциального уравнения, описывающего непрерывную функцию φ .

Технику получения разрешающей системы уравнений методом Галеркина легко проиллюстрировать на примере уже решенной выше задачи об отыскании температурного поля в однородном стержне, конечно-элементная модель которого представлена ранее.

Применив метод Галеркина, получим

$$\int_V N^t \lambda_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV = 0 \quad (1.36)$$

Подставим в (1.36) формулу дифференцирования произведений:

$$\int_V N^t \lambda_x \frac{d^2 T}{dx^2} dV = \int_V \frac{d}{dx} \left(N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dV - \int_V \frac{dN^t}{dx} \lambda_x \frac{dT}{dx} dV \quad (1.37)$$

Интерполяционная функция T не сохраняет постоянства по длине стержня, поэтому интеграл в (1.37) можно представить суммой соответствующих интегралов для отдельных элементов. Так, второй интеграл в (1.37) можно представить в виде

$$\int_V \frac{dN^t}{dx} \lambda_x \frac{dT}{dx} dV = \sum_{e=1}^2 \int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)}. \quad (1.38)$$

Вычислим в (1.38) интегралы, относящиеся к отдельным элементам:

$$\frac{dN^{(e)t}}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{X_j - x}{L^{(e)}} \right] = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (1.39)$$

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{d}{dx} N^{(e)} T^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} [-1, 1] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

С учетом (1.39) и (1.40)

$$\int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{\lambda_x^{(e)}}{L^{(e)} L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Первый интеграл в (1.37) на основании теоремы Остроградского—Гаусса преобразуется к виду:

$$\int_V \frac{d}{dx} \left(N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dV = \int_S N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} l_x dS, \quad (1.42)$$

где $l_x (dT/dx) = dT/dn$; n — внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности.

С учетом краевого условия в точке $x = 0$ для первого элемента интеграл (1.42) принимает вид

$$\int_S N^{(1)t} \lambda_x \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} X_2 \\ L^{(1)} \\ X_1 \\ -L^{(1)} \end{bmatrix} (-q) dS. \quad (1.43)$$

Подставив значения $X_1 = 0$, $X_2 = L^{(1)}$ в (1.43), получим:

$$\int_S N^{(1)t} \lambda_x^{(1)} \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

С учетом краевого условия в точке $x = L$ для второго элемента интеграл (1.42) запишется так:

$$\int_S N^{(2)t} \lambda_x^{(2)} \frac{dT^{(2)}}{dx} dS = \int_S \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-\alpha(T_3 - T_*)] dS = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-\alpha T_3 + \alpha T_*). \quad (1.45)$$

Просуммировав выражения вида (1.45) для первого и второго элементов и выражения (1.43) и (1.44) и приравняв сумму нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} C^{(1)} & +C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} C^{(2)} & +\alpha S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qS_1 \\ 0 \\ -\alpha S_2 T_* \end{bmatrix} = 0, \quad (1.46)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)} \lambda_x^{(1)} / L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)} \lambda_x^{(2)} / L^{(2)}$.

Система (1.46) идентична системе (1.35), определенной путем минимизации соответствующим образом подобранного функционала. Завершающим шагом этапа определения вектора узловых значений Φ является решение системы линейных алгебраических уравнений.

■ **Примечание.** Основные особенности этого шага — большая размерность и сильная разреженность матрицы коэффициентов системы. В связи с этим для реализации МКЭ в САПР разработаны специальные способы хранения матрицы жесткости, позволяющие уменьшить необходимый для этого объем ОП. Для нахождения узловых значений функций применяются методы преобразования и решения системы, направленные на снижение затрат машинного времени.

1.7. Двухмерные финитные функции на треугольной сетке

Коэффициенты этой функции находятся из решения системы трех линейных уравнений:

$$1 + \alpha_k^{ijl}(x_i - x_k) + \beta_k^{ijl}(y_i - y_k) + \gamma_k^{ijl}(z_i - z_k) = 0;$$

$$1 + \alpha_k^{ijl}(x_j - x_k) + \beta_k^{ijl}(y_j - y_k) + \gamma_k^{ijl}(z_j - z_k) = 0;$$

$$1 + \alpha_k^{ijl}(x_l - x_k) + \beta_k^{ijl}(y_l - y_k) + \gamma_k^{ijl}(z_l - z_k) = 0.$$

. Решение двумерной задачи Дирихле на треугольной сетке

Проиллюстрируем технологию МКЭ на примере решения задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f;$$

$$u|_{\Gamma} = \alpha(\Gamma).$$

Допустим, что область Ω , на которой необходимо получить решение, покрыта треугольной сеткой и представлена на рис. 1.13. Решение ищем в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k \varphi_k(x, y),$$

где φ_k - набор финитных функций, привязанных к внутренним узлам сетки $P_k \notin \Gamma$. Следует отметить, что построение треугольной сетки для произвольной области, учитывающей особенности получаемого решения, является зачастую наиболее трудоемкой задачей при использовании МКЭ.

Результатом триангуляции являются список узлов $P_k(x_k, y_k, z_k)$,

где $k = 1 \dots N_0, N_0 + 1, \dots, N(1 \dots N_0$ - номера внутренних узлов, $N_0 + 1, \dots, N$ - номера граничных узлов) и список треугольников $\Delta_{kij}^m, m = 1 \dots M$, содержащий номера соответствующих m -му треугольнику узлов-вершин. Зная координаты вершин и список треугольников, легко построить список конечных элементов Ω_k , связанных с каждым узлом сетки, вычислить параметры $\alpha_k^{ij}, \beta_k^{ij}$ соответствующих финитных функций φ_k , а также всю необходимую информацию – площади треугольников S_{kij}^m , координаты их центров тяжести C_{kij}^m и др.

При построении конечно-разностной схемы воспользуемся проекционным соотношением для внутренних узлов:

$$\sum_{j=1}^N \bar{u}_j \left[\iint_{\Omega_k} g \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] = f_k, \quad k = 1 \dots N_0.$$

Ввиду линейности финитных функций φ_j, φ_k на каждом треугольнике значения производных, входящих в f_k постоянны. Кроме того, как видно из рисунка, в каждом уравнении имеется только $m_k + 1$ отличных от нуля матричных

элементов (заметим, что количество вершин m_k у разных элементов Ω_k может отличаться):

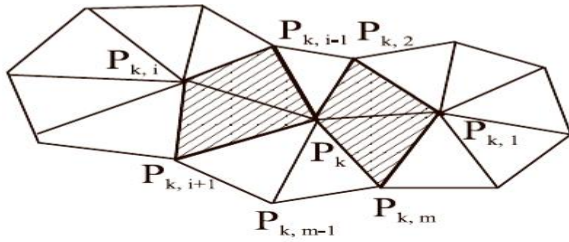


Рис. 1.13

$$\bar{u}_k g_k + \bar{u}_{k_1} g_{k_1} + \dots + \bar{u}_{k_m} g_{k_m} = \hat{f}_k;$$

$$k = 1 \dots N_0; \bar{u}_{N_0+1} \dots \bar{u}_N = \alpha_{N_0+1} \dots \alpha_N.$$

Причем

$$g_k = - \sum_{i=1}^{m_k} g_{k_i},$$

а элементы g_{k_i} вычисляются как интегралы по двум смежным треугольникам:

$$g_{k_i} = \left(\alpha_k^{k_{i-1}k_i} \alpha_{k_i}^{k_{i-1}k} + \beta_k^{k_{i-1}k_i} \beta_{k_i}^{k_{i-1}k} \right) \iint_{\Delta k k_{i-1} k_i} g dS + \left(\alpha_k^{k_i k_{i+1}} \alpha_{k_i}^{k_{i+1}k} + \beta_k^{k_i k_{i+1}} \beta_{k_i}^{k_{i+1}k} \right) \iint_{\Delta k k_i k_{i+1}} g dS.$$

При вычислении интегралов ввиду малости Δ для случая непрерывных $g(xy)$ обычно используют формулу средних

$$\iint_{\Delta k_{ij}} g dS = g(C_{kij}) S_{kij},$$

где C_{kij} — точка пересечения медиан. Решается система методом простой итерации или Зейделя с использованием релаксации:

$$\bar{u}_k^{s+1} = (1 - \omega_r) \bar{u}_k^s + \omega_r \frac{1}{g_k} \left(\hat{f}_k - \sum_{i=1}^{m_k} \bar{u}_{k_i}^s g_{k_i} \right).$$

Эффективность метода во многом зависит от удачной программной реализации итерационного процесса.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие МКЭ от классического метода сеток?
2. Как построить конечно-разностную схему по МКЭ задачи Дирихле для одномерного уравнения второго порядка?
3. Каким образом строится конечно-разностная схема для двухмерной области на основе треугольной сетки?
4. Какие результаты триангуляции области являются исходными данными для построения конечно-разностной схемы по технологии МКЭ?

2. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

2.1. Теоретические основы вариационных методов

Основной задачей классического вариационного исчисления является следующая: среди всех непрерывных функций $u = u(x)$, $a \leq x \leq b$, имеющих кусочно-непрерывные производные и удовлетворяющих граничным условиям

$$u(a) = \alpha; u(b) = \beta$$

найти такую, которая доставляет минимальное значение функционала:

$$J[u] = \int_a^b \Phi(x, u, u') dx; \quad \left(u' = \frac{du}{dx} \right).$$

В общем случае функция u может быть функцией нескольких переменных $u(x, y, z, \dots)$, в функционал Φ входят частные производные, а интеграл берется по некоторой области Ω .

Содержание одной из центральных теорем классического вариационного исчисления заключается в том, что дважды дифференцируемая функция $u(x)$, доставляющая минимум функционала Φ , является решением краевой задачи для дифференциального уравнения Эйлера с теми же граничными условиями:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) = 0.$$

Справедливо также обратное утверждение: решение краевой задачи для дифференциального уравнения (в общем случае ДУ в частных производных) при определенных условиях является также решением соответствующей задачи вариационного исчисления. Таким образом, имеется возможность одни и те же задачи сводить либо к решению краевой задачи для дифференциального уравнения, либо к нахождению минимума некоторого функционала, т.е. к решению задачи вариационного исчисления. Это позволяет при решении краевой задачи для ДУ, сводя ее к вариационной, применять специфические вариационные методы. Проиллюстрируем технику такого решения. Запишем краевую задачу для ДУ в общем виде как

$$Lu = f; \quad u|_{\Gamma} = \alpha(\Gamma)$$

Область определения функции $u: R(u) = \Omega$; где Γ – граница области Ω . Тогда соответствующий функционал (заметим, что это один из возможных), минимум которого достигается на решении, имеет вид

$$(Lu, u) - 2(f, u).$$

Здесь посредством скобок (\dots) обозначено скалярное произведение в общем случае в многомерном гильбертовом пространстве $L_2[\Omega]$.

Самым универсальным и во многих случаях единственным способом нахождения минимума функционала общего вида $J[u]$ является **метод Рунца**

Чаще всего этот метод реализуется следующим образом. Выбираем в области определения $R(L)$ оператора L (например, в классе дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям) некоторый **базис**, т.е. набор функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$, обладающих **свойством полноты**: любая функция $u(x)$ из области решений может быть представлена в виде

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x).$$

Будем искать приближение к функции, доставляющей минимум функционала $J[u]$ в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x).$$

После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$$

в функционал $J[u]$ получим функцию N переменных:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_N) = J[u^N] = J\left[\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)\right].$$

Неизвестные значения коэффициентов разложения a_1, a_2, \dots, a_N искомого решения по функциям базиса будем находить из условия

$$\min_{a_1, \dots, a_N} F(a_1, a_2, \dots, a_N).$$

Таким образом, задача вариационного исчисления сводится к нахождению минимума функции N переменных.

Алгоритмы решения этой задачи для небольшого числа N хорошо разработаны. Для случая квадратичных функционалов с линейным дифференциальным оператором Lu , нахождение a_1, a_2, \dots, a_N сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующим образом. После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$$

получим

$$F = \left(L \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x), \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x) \right) - 2(f, \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_k a_i (L \varphi_k, \varphi_i) - 2 \sum_{i=1}^N a_i (f, \varphi_i).$$

Воспользуемся необходимым условием минимума и составим N уравнений вида

$$\frac{\partial F(a_1, \dots, a_N)}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^N a_k (L \varphi_k, \varphi_i) - 2(f, \varphi_i) = 0; \quad i = 1 \dots N.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений для нахождения a_k может быть переписана в виде

$$(L \sum a_k \varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \text{ или } (Lu^N, \varphi_i) = (f, \varphi_i),$$

то есть можно заметить, что эта система получается из исходной краевой задачи простой подстановкой u^N вместо u и последующим умножением скалярно на каждую функцию базиса. Ввиду того что такое скалярное произведение называется проекцией на функцию базиса, то полученная система носит название **системы проекционных уравнений**. В наиболее общем случае при построении проекционной системы уравнений выбирают два базиса $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$ и $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_N(x)\}$ и некоторый дифференциальный оператор K :

$$\left(L \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k, K \psi_i \right) = (f, K \psi_i); \quad i = 1 \dots N.$$

Как видим, полученное уравнение совершенно не связано с необходимостью предварительного получения функционала, а обоснование сходимости полученного решения u^N к u следует из теоремы о сходимости к нулю невязки

$$r_n(x) = Lu^N - f,$$

если равны нулю ее проекции на базисные функции:

$$(r_n, K \psi_i) = 0.$$

Впервые идею такого решения ДУ (не обращаясь к вариационной задаче) предложил в 1915 году Б. Г. Галеркин. В зависимости от выбора в функций φ_i, ψ_i и оператора K эти методы имеют свои названия:

метод Бубнова-Галеркина:

$$K = I \quad (\text{тождественный}),$$

$$K = I \quad \psi_i = \varphi_i, \quad \varphi_i \in R(L),$$

оператор L может быть несимметричным и необязательно положительно определенным.

метод Галеркина-Петрова:

$$K = I, \quad \varphi_i \neq \psi_i, \quad \varphi_i \in R(L), \quad \psi_i \in H(L),$$

где $H(L)$ - область значений оператора L , имеющего ограниченный обратный оператор L^{-1} ;

метод наименьших квадратов:

$$K = L, \quad \psi_i = \varphi_i,$$

при условии существования ограниченного оператора L^{-1} доказана сходимость метода;

метод моментов:

$$K \neq I, \quad \psi_i = \varphi_i$$

При выполнении условий на оператор K вида $(Lu, Ku) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ и $(Lu, Ku) \geq \beta^2 \|Ku\|^2$ доказана сходимость метода. Следует отметить, что в каждом конкретном

случае от выбора удачной модификации проекционного метода зависит эффективность решения задачи.

2.2. Примеры решения задач методом Галеркина

2.2.1. Одномерная краевая задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x); \quad u(0) = \alpha; \quad u(1) = \beta; \quad \Omega = [0,1]; \quad \Gamma = [0], [1].$$

Выберем базис вида

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2, \dots, \varphi_N(x); \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0; \psi_i = \varphi_i\}.$$

Функции базиса удовлетворяют нулевым граничным условиям, а сам базис является полным в классе функций, обращающихся в ноль на границах, например $\{\varphi_k = \sin(k\pi x), k = 1 \dots N\}$. Решение будем искать в виде

$$u^N(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x).$$

Здесь $\varphi_0(x)$ выбирается такой, чтобы u^N удовлетворяло заданным граничным условиям, например, можно положить $\varphi_0 = \alpha + (\beta - \alpha)x$. Если известна некоторая информация об искомом решении, то ее можно учесть в функции φ_0 .

Составим проекционные уравнения:

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial (\varphi_0 + \sum a_k \varphi_k)}{\partial x} \right) \varphi_i dx = \int_0^1 f \varphi_i dx; \quad i = 1 \dots N.$$

В левой части уравнения применим формулу интегрирования по частям и, воспользовавшись тем, что $\varphi_i|_{\Gamma} = 0$, получим

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} g \frac{\partial (\varphi_0 + \sum a_k \varphi_k)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx = \int_0^1 f \varphi_i dx.$$

После очевидных преобразований имеем

$$\sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx = - \int_0^1 \left(f + g \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) \varphi_i dx.$$

Или в принятых выше обозначениях

$$\sum_{k=1}^N \left(g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) a_k = \hat{f}_i; \quad i = 1 \dots N.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет симметричную, положительно определенную матрицу, и ее решение находится эффективным методом квадратного корня. Следует однако отметить, что с увеличением N система становится плохо обусловленной. Если коэффициенты $g(x), f(x)$ имеют особенности (например разрывы), то для увеличения точности полезно эти особенности выделить и учесть в функции $\varphi_0(x)$. В этом случае удастся значительно ускорить сходимость ряда. Из вида системы следует, что для получения решения базисные функции могут не иметь второй производной (достаточно только первой). В этом случае полученное решение не является в

обычном смысле решением исходного дифференциального уравнения и говорят, что оно является *обобщенным решением*.

2.2.2. Двухмерная краевая задача Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y); u|_{\Gamma} = \alpha(\Gamma); x, y \in \Omega.$$

Выбираем базис $\{\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \dots, \varphi_N(x, y)\}$, полный во множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям и имеющих первую производную. Решение ищем в виде

$$u^N = \sum_{k=0}^N a_k \varphi_k(x, y).$$

Составляем проекционные уравнения:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u^N}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial u^N}{\partial y} \right) \right] \varphi_k d\Omega = f \varphi_k d\Omega.$$

Чтобы избавиться от второй производной, воспользуемся интегрированием по частям, который для двухмерного случая имеет вид (здесь $\vec{n} = (n_x, n_y)$ - единичный вектор нормали к границе):

$$\iint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega = - \iint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} u v n_x d\Gamma,$$

$$\iint_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega = - \iint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} u v n_y d\Gamma.$$

После подстановки получаем систему проекционных уравнений для нахождения неизвестных $a_0 \dots a_N$:

$$\sum_{k=0}^N a_k \left[\iint_{\Omega} g \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} n_y \right) \varphi_i d\Gamma \right] = \hat{f}_i.$$

Заметим, что если удастся подобрать функции φ_k с нулевыми значениями на Γ , то второй интеграл в обращается в ноль; иногда удастся подобрать $\varphi_0|_{\Gamma} = \alpha$, $\varphi_{k \geq 1}|_{\Gamma} = 0$, тогда, выбрав $a_0 = 1$, этот интеграл переносится в правую часть и входит в \hat{f}_i , как в предыдущем примере.

2.2.3. Сведение задачи для ДУ в частных производных к решению задачи для системы ОДУ методом Канторовича

Предположим, что задана краевая задача в цилиндрической области вида

$$Lu(xyz) = f; u|_{z=0} = \alpha(xy); u|_{z=L} = \beta(xy); u|_{\Gamma} = 0,$$

где L - дифференциальный оператор 2-го порядка по z ; Γ - граница области поперечного сечения $\Omega_{\Gamma}, x, y \in \Omega_{\Gamma}$. Выберем базис из функций, определенных на Ω_{Γ} $\{\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_N(x, y)\}$ и обращающихся в ноль на границе $\varphi_k|_{\Gamma} = 0$. Решение будем искать в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^N a_k(z) \varphi_k(x, y),$$

т.е. коэффициенты разложения $a_k(z)$ зависят от третьей координаты z .

Составим проекционные уравнения:

$$\iint_{\Omega_T} \left[\left(L \sum_{k=1}^N a_k(z) \varphi_k(x, y) \right) \varphi_i(x, y) \right] dx dy = \iint_{\Omega_T} f(x, y, z) \varphi_i(x, y) dx dy.$$

После интегрирования получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для неизвестных коэффициентов с граничными условиями $a_k(0) = \alpha_k$; $a_k(L) = \beta_k$. Значения α_k, β_k находятся из решения двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_k a_k \iint_{\Omega_T} \varphi_k \varphi_i dx dy = \iint_{\Omega_T} \alpha \varphi_i dx dy; \quad \sum_k \beta_k \iint_{\Omega_T} \varphi_k \varphi_i dx dy = \iint_{\Omega_T} \beta \varphi_i dx dy.$$

Заметим, что решение задачи значительно упрощается, если функции выбранного базиса оказываются ортогональными, т.е.

$$\iint_{\Omega_T} \varphi_i dx dy = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \|\varphi_k\|_{L_2}^2, & i = k \end{cases}$$

В этом случае

$$\alpha_k = \iint_{\Omega_T} \alpha \varphi_k dx dy / \|\varphi_k\|_{L_2}^2; \quad \beta_k = \iint_{\Omega_T} \beta \varphi_k dx dy / \|\varphi_k\|_{L_2}^2.$$

Такое сведение к системе ОДУ обычно используют при решении задач распространения волн в нерегулярных волноводах, а базис получают как набор собственных функций из решения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля.

Контрольные вопросы

1. Как ставится основная задача вариационного исчисления?
2. Сформулируйте метод Ритца для нахождения минимума функционала.
3. Как получаются проекционные уравнения при решении краевой задачи для дифференциальных уравнений?
4. В чем разница между методами Бубнова-Галеркина, Галеркина-Петрова, методом наименьших квадратов и методом моментов?

ПРИЛОЖЕНИЕ. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

ЗАДАНИЕ 13.

Метод сеток для решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности.

Цель:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения теплопроводности,
- составить алгоритмы решения **уравнения теплопроводности** методом сеток применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения **уравнения теплопроводности** по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
- получить численное решение заданного **уравнения теплопроводности**.

Краткие теоретические сведения

Требуется найти непрерывную на замкнутом прямоугольнике \bar{D} функцию $u(x, t)$, которая на D' удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (П. 1)$$

при $t = 0$ удовлетворяет начальному условию

$$u(x, 0) = s(x), \quad (П. 2)$$

а при $x = 0$ и $x = 1$ подчиняется краевым условиям

$$u(0, t) = p(t), \quad u(1, t) = q(t), \quad (П. 3)$$

где $f(x, t)$, $s(x)$, $p(t)$, $q(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $s(0) = p(0)$, $s(1) = q(0)$.

Задача (1) — (3) называется смешанной, поскольку она содержит как начальное условие, так и краевые условия. Известно, что у поставленной задачи существует единственное решение $u(x, t)$. Мы будем предполагать, что это решение имеет на замкнутом прямоугольнике \bar{D} непрерывные частные производные $\partial u / \partial t$, $\partial^2 u / \partial t^2$, $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^4 u / \partial x^4$.

Сетки и нормы. Пусть $h = 1/N$, $\tau = T/M$ — шаги по x и t , где N, M — натуральные, $x_k = kh$, $t_v = v\tau$, $u_k^v = u(x_k, t_v)$. Построим сетки (рис. 1)

$$\omega_h = \{ (x_k, t_v) : k = 0, 1, \dots, N, v = 0, 1, \dots, M \},$$

$$\omega'_h = \{ (x_k, t_v) : k = 1, 2, \dots, N-1, v = 1, 2, \dots, M \},$$

$$\omega_h^* = \omega_h \setminus \omega'_h.$$

Сетка ω_h^* состоит из узлов сетки ω_h , обозначенных на рис. П.1 крестиками. Эти узлы расположены на трех сторонах прямоугольника \bar{D} , на которых заданы начальное и краевые условия. Сетка ω'_h состоит из остальных

узлов сетки ω_h . Зададим для сеточных функций, определенных на ω_h или на ω'_h , следующие нормы:

$$\|y\|_h = \max_{\omega_h} |y_k^v|, \quad \|y\|'_h = \max_{\omega'_h} |y_k^v|. \quad (\text{П. 4})$$

Разностные схемы. Введем разностный оператор Λ :

$$\Lambda y_k^v = -\frac{y_{k-1}^v - 2y_k^v + y_{k+1}^v}{h^2}. \quad (\text{П. 5})$$

Здесь под выражением Λy_k^v подразумевается значение сеточной функции Λy в точке (x_k, t_v) , т. е. $(\Lambda y)_k^v$.

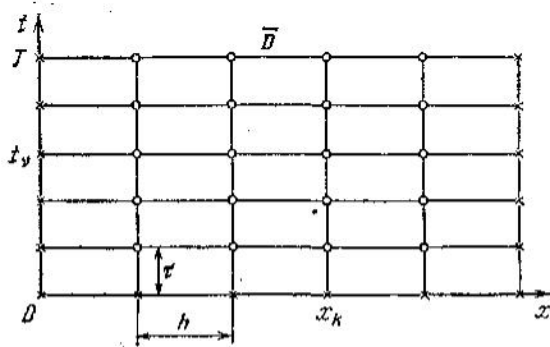


Рис. П.1

Скобки опущены для упрощения записи. Аналогичные упрощения в записи будем допускать и при введении других операторов. Зададим на сетке ω_h^* тождественный оператор

$$l^h y \equiv y \quad (\text{П. 6})$$

и сеточную функцию

$$\begin{aligned} \xi \quad & \begin{matrix} s & x & t & k \\ = x_k, & = 0, & = 1, & 2, \dots, N-1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} p & x & t & v \\ = 0, & = t_v, & = 0, & 1, \dots, M, \end{matrix} \\ & \begin{matrix} q & x & t & v \\ = 1, & = t_v, & = 0, & 1, \dots, M. \end{matrix} \end{aligned} \quad (\text{П. 7})$$

Рассмотрим две разностные схемы:

$$L_1^h y_k^v \equiv \frac{y_k^v - y_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda y_k^{v-1} = f_k^{v-1}, \quad (\text{П. 8})$$

$$l^h y = g, \quad (\text{П. 9})$$

и

$$L_2^h y_k^v \equiv \frac{y_k^v - y_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda y_k^v = f_k^v, \quad (\text{П. 10})$$

$$l^h y = g. \quad (\text{П. 11})$$

Здесь и далее индекс k изменяется от 1 до $N-I$, $v = 1, 2, \dots, M$. Шаблоны разностных уравнений (8) и (10) представлены соответственно на рис.П.2 и П.3. Обе разностные

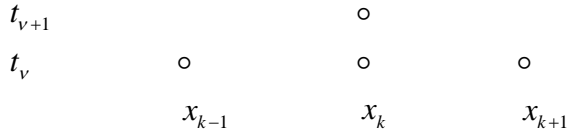


Рис. П.2

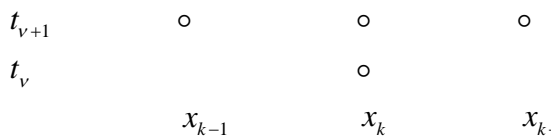


Рис. П.3

схемы (8), (9) и (10), (11) называются двухслойными, так как шаблоны разностных уравнений (8) и (10) содержат узлы, лежащие только на двух слоях — подмножествах сетки ω_h , отвечающих значениям времени $t = t_{v-1}$ и $t = t_v$. Слой, находящийся на горизонтальной прямой $t = t_{v-1}$, называется нижним, а другой — верхним. Разностные схемы (8)–(11) отличаются тем, что в уравнении (8) оператор Λ действует на нижнем слое, а в уравнении (10) оператор Λ вынесен на верхний слой, и, кроме того, значения правой части $f_k^{v-1} = f(x_k, t_{v-1})$ и $f_k^v = f(x_k, t_v)$ берутся на разных слоях. Ограничимся пока сделанным формальным описанием двух разностных схем. Их качественное различие выяснится ниже.

Аппроксимация. Сопоставляя, с одной стороны, дифференциальное уравнение (1), а с другой — разностные уравнения (8) и (10), видим, что частной производной u'_t отвечает разностная производная $\frac{y_k^v - y_k^{v-1}}{\tau}$, а частной производной $-u''_{xx}$ соответствует разностная производная второго порядка в направлении x , образуемая с противоположным знаком с помощью оператора Λ (5).

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1) — (3). Поскольку его частные производные $\partial^2 u / \partial t^2$ и $\partial^4 u / \partial x^4$ по предположению непрерывны и, следовательно, ограничены на замкнутом прямоугольнике \bar{D} , то согласно (5),

$$\Lambda y_k^{v-1} = -u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) + r_k^v, \quad (\text{П.} \quad (12)$$

$$\frac{u_k^v - u_k^{v-1}}{\tau} = u'_t(x_k, t_{v-1}) + \rho_k^v, \quad (П. 13)$$

где $k = 1, 2, \dots, M-1, v = 1, 2, \dots, N$,

$$|r_k^v| \leq c_1 h^2, \quad |\rho_k^v| \leq c_2 \tau, \quad (П. 14)$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные, не зависящие от h, τ, k, v . В силу непрерывности частных производных u'_t и u''_{xx} , на \bar{D} решение задачи (1) — (3) удовлетворяет уравнению (1) на замкнутом прямоугольнике \bar{D} . Следовательно, выполняется равенство

$$u'_t(x_k, t_{v-1}) - u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) = f_k^{v-1} \quad (П. 15)$$

для $k = 1, 2, \dots, N-1, v = 1, 2, \dots, M$, т. е., в частности, и для $t_{v-1} = 0$.

Согласно (12), (13), (15) невязка ψ_1 решения u задачи (1) — (3) для разностного уравнения (8) имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi_{1k}^v &= L_1^h y_k^v - f_k^{v-1} = \frac{u_k^v - y_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda y_k^{v-1} - f_k^{v-1} = \\ &= u'_t(x_k, t_{v-1}) + \rho_k^v - u''_{xx}(x_k, t_{v-1}) + r_k^v - f_k^{v-1} = r_k^v + \rho_k^v. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (14) получаем

$$\|\Psi_1\|'_h = \max_{\omega_h^*} |\Psi_{1k}^v| = \max_{1 \leq v \leq M} \max_{1 \leq k \leq N-1} |r_k^v + \rho_k^v| = O(h^2 + \tau). \quad (П. 16)$$

Аналогично находим

$$\|\Psi_2\|'_h = O(h^2 + \tau), \quad (П. 17)$$

где Ψ_2 — невязка решения u задачи (1) — (3) для разностного уравнения (10).

Таким образом, оба разностных уравнения (8) и (10) аппроксимируют дифференциальное уравнение (1) на решении u задачи (1) — (3) со вторым порядком по h и с первым порядком по τ .

Дополнительные условия, т. е. начальное условие (2) и краевые условия (3), аппроксимируются на сетке ω_h^* с помощью тождественного оператора l^h условиями (9) или соответственно условиями (11) точно, т. е. невязка решения u задачи (1) — (3) для условий (9), а также для (11) равна нулю на сетке ω_h^* .

Итак, обе разностные схемы (8), (9) и (10), (11) с точки зрения аппроксимации задачи (1) — (3) обладают по порядку относительно h и τ одинаковой гарантируемой точностью.

Вычислительные алгоритмы. Разрешив разностное уравнение (8) относительно y_k^v , получим

$$y_k^v = \frac{\tau}{h^2} y_{k-1}^{v-1} + (1 - \frac{2\tau}{h^2}) y_k^{v-1} + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1}^{v-1} + g_k^{v-1}. \quad (П. 18)$$

Поскольку $y_k^0, y_0^v, y_N^v, k = 1, 2, \dots, N-1, v = 0, 1, \dots, M$ известны (они задаются на ω_h^* условием (9)), решение разностной схемы (8), (9) находится по

формуле (18) явно, слой за слоем. Разностная схема (8), (9) называется поэтому явной.

Разностное уравнение (10) с учетом (5) может быть записано в виде

$$\frac{\tau}{h^2} y_{k-1}^v - (1 + \frac{2\tau}{h^2}) y_k^v + \frac{\tau}{h^2} y_{k+1}^v = -y_k^{v-1} - \mathcal{F}_k^v. \quad (\text{П.} \quad 19)$$

Согласно (6), (7), (11) имеем также

$$y_0^v = \rho_v, \quad y_N^v = q_v. \quad (\text{П.} \quad 20)$$

Таким образом, если y_k^{v-1} , $k = 1, 2, \dots, N-1$, известны (в частности, y_k^0 , $k = 1, 2, \dots, N-1$, заданы условием (11)), то для нахождения решения разностной схемы (10), (11) на следующем v -м слое нужно решить трехточечное разностное уравнение (19) с краевыми условиями первого рода (20), т. е. разностную краевую задачу вида (П.1), (П.2). Поэтому разностная схема (10), (11) называется неявной.

Для нахождения разностного решения на v -м слое может быть применен метод прогонки, поскольку для задачи (19), (20) условия преобразования выполнены (проверьте, положив $k = j$, $y_k^v = z_j$, $y_{k\pm 1}^v = z_{j\pm 1}$, $-y_k^{v-1} - \mathcal{F}_k^v = F_j$). При этом число выполняемых арифметических действий для нахождения разностного решения на одном слое имеет величину $O(N)$, т. е. по порядку относительно N не больше, чем при применении явной формулы (18) для схемы (8), (9).

Устойчивость и сходимость. Так как дополнительные условия (2), (3) аппроксимируются в разностных схемах (8) - (11) на сетке ω_h^* точно, то нам будет достаточно исследовать устойчивость только по правой части. Остановимся сначала на разностной схеме (8), (9). Для исследования ее устойчивости по правой части нужно рассмотреть решение z вспомогательной разностной задачи

$$L_1^h z_k^v \equiv \frac{z_k^v - z_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda z_k^{v-1} = \xi_k^v, \quad (\text{П.} \quad 21)$$

$$l^h z = 0, \quad (\text{П.} \quad 22)$$

где ξ — произвольная заданная на ω_h' сеточная функция. Разрешив разностное уравнение (21) относительно z_k^v , аналогично (18) получаем

$$z_k^v = \frac{\tau}{h^2} z_{k-1}^{v-1} + (1 - \frac{2\tau}{h^2}) z_k^{v-1} + \frac{\tau}{h^2} z_{k+1}^{v-1} + \tau \xi_k^v, \quad (\text{П.} \quad 23)$$

$k = 1, 2, \dots, N-1$, $v = 1, 2, \dots, M$.

Кроме того, в соответствии с (22) имеем

$$\begin{aligned} z_k^0 &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \\ z_0^v &= z_N^v = 0, \quad v = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (\text{П.} \quad 24)$$

Предположим, что τ и h удовлетворяют следующему условию:

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (П. 25)$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{\tau}{h^2} + \left| 1 - \frac{2\tau}{h^2} \right| + \frac{\tau}{h^2} = 1.$$

Отсюда и из (23), (24) вытекает неравенство

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v| \leq \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^{v-1}| + \tau \max_{1 \leq k \leq N-1} |\xi_k^v|, \quad (П. 26)$$

и поскольку $\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^0| = 0$, то

$$\max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v| \leq v\tau \|\xi\|'_h.$$

Следовательно,

$$\|z\|_h = \max_{0 \leq v \leq M} \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v| \leq M\tau \|\xi\|'_h = T \|\xi\|'_h$$

или, окончательно,

$$\|z\|_h \leq T \|\xi\|'_h. \quad (П. 27)$$

Полученное неравенство (27) для решения задачи (21), (22), в котором постоянная T не зависит от h и τ , а также от функции ξ , и означает устойчивость разностной схемы (8), (9) по правой части при условии (25). Можно доказать, что нарушение условия (25) может привести к нарушению устойчивости разностной схемы (8), (9). В частности, если $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, $\tau/h^2 \geq \text{const} > 1/2$, то разностная схема (8), (9) неустойчива.

Для исследования устойчивости разностной схемы (10), (11) зададим на ω'_h произвольную сеточную функцию ξ и рассмотрим разностную задачу

$$L_2^h z_k^v \equiv \frac{z_k^v - z_k^{v-1}}{\tau} + \Lambda z_k^v = \xi_k^v, \quad (П. 28)$$

$$l^h z = 0, \quad (П. 29)$$

причем не накладывая никаких ограничений на соотношение шагов τ и h . Задачу (28), (29) можно аналогично (19), (20) записать в следующем виде:

$$\frac{\tau}{h^2} z_{k-1}^v - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) z_k^v + \frac{\tau}{h^2} z_{k+1}^v = -z_k^{v-1} - \tau \xi_k^v, \quad (П. 30)$$

$$z_0^v = 0, \quad z_N^v = 0. \quad (П. 31)$$

Если z_k^{v-1} , $k = 1, 2, \dots, N-1$, известны (в частности, по условию (29) $z_k^0 = 0$, $k = 0, 1, \dots, N$), то, как отмечалось выше, для разностной задачи (30), (31), где v фиксировано, выполнены условия преобладания. Следовательно, эта задача однозначно разрешима на v -м слое.

Очевидно, имеется такое k' , $0 < k' < N$, что

$$|z_{k'}^v| = \max_{0 \leq k \leq N} |z_k^v|. \quad (\text{П.} \quad 32)$$

Так как $|z_{k'-1}^v| \leq |z_{k'}^v|$, $|z_{k'+1}^v| \leq |z_{k'}^v|$, то

$$|z_{k'}^v| \leq \left| z_{k'}^v \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} \right) - \frac{\tau}{h^2} (z_{k'-1}^v + z_{k'+1}^v) \right|$$

и, следовательно, согласно (30)

$$|z_{k'}^v| \leq |z_{k'}^{v-1}| + \tau |\xi_{k'}^v|.$$

Из полученного неравенства с учетом (32) вытекает неравенство (26) и в конечном счете оценка (27), что и означает устойчивость по правой части разностной схемы (10), (11) при любом соотношении шагов τ и h .

Итак, поскольку дополнительные условия (2), (3) аппроксимируются на ω_h^* точно, то из аппроксимации (см. (16), (17)) и установленной устойчивости по правой части в силу основной теоремы теории разностных схем вытекает сходимость решений разностных схем (8-11) к решению задачи (1) — (3) со вторым порядком сходимости по h и с первым порядком по τ , т. е.

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau). \quad (\text{П.} \quad 33)$$

При этом в случае явной схемы (8), (9) предполагается выполнение ограничения (25).

Определение. Разностная схема, устойчивая при любом соотношении шагов τ и h , называется абсолютно устойчивой, а устойчивая при ограничениях на τ и h — условно устойчивой.

Недостатком разностной схемы (8), (9) является ее условная устойчивость (ограничение (25) является жестким для шага τ по времени). Преимущество — простота счета по явной формуле (18) и возможность распространения на задачу Коши (когда условие (2) задано на всей оси x , а краевые условия (3) отсутствуют). В случае смешанной задачи (1) — (3) предпочтение отдают неявной абсолютно устойчивой разностной схеме (10), (11). Разностная краевая задача (19), (20) при переходе на каждый следующий слой решается методом прогонки весьма эффективно.

Тестовый пример

Решим задачу для уравнения теплопроводности с начальным условием $U(x, 0) = 2 + x$:

и граничными условиями

$$U(0, t) = 2 + t$$

$$U(1, t) = 3 + 2t$$

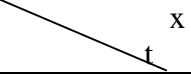
при $t \in [0; 0,2]$, $x \in [0,1]$, то есть полагая $a = 1$.

Выберем $N = 5$, тогда $h = 0,2$, а $m = 10$, и следовательно

$$\lambda = \frac{T}{h^2 m} = \frac{0,2}{0,2^2 * 10} = \frac{1}{2}; \quad \tau = \frac{T}{m} = \frac{0,2}{10} = 0,02.$$

Последовательно заполняем таблицу для данных нашей задачи.

Т а б л и ц а (П . 2)

j	i	0	1	2	3
		0	0.2	0.4	0.6
I	2	3	4	5	6
0	0	2.0	2.2	2.4	2.6
1	0.02	2.02	2.2	2.4	2.6
2	0.04	2.04	2.21	2.4	2.6
3	0.06	2.06	2.22	2.405	2.61
4	0.08	2.08	2.2325	2.415	2.6225
5	0.10	2.10	2.2475	2.4275	2.64
6	0.12	2.12	2.2637	2.4437	2.6593
7	0.14	2.14	2.2818	2.4615	2.6818
8	0.16	2.16	2.3007	2.4818	2.7055

ЗАДАНИЕ

Найти численное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности с точностью 0,001.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

с начальным условием

$$U(X,0) = f(X)$$

и граничными условиями

$$U(0,t) = a, \quad U(1,t) = b.$$

Варианты заданий

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	<p>Graph of a piecewise linear function on the interval $[0, 1]$. The function is constant at $y=a$ for $x \in [0, c]$ and then increases linearly to $y=b$ at $x=1$. The equation for the linear part is $y = \frac{a-b}{c-1}x + \frac{bc-a}{c-1}$.</p>	1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0	3.0 3.5 4.0 4.5 5.0 5.5 6.0 6.5 7.0 8.0	0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.95	
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	<p>Graph of a piecewise linear function on the interval $[0, 1]$. The function starts at $y=a$, increases linearly to $y=c$ at $x=d$, and then decreases linearly to $y=b$ at $x=1$. The equations for the linear parts are $y = \frac{c-a}{d}x + a$ and $y = \frac{c-b}{d-1}x + \frac{bd-c}{d-1}$.</p>	8.0 9.0 10.0 11.0 12.0 13.0 14.0 15.0 16.0 17.0	3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0 12.0	20.00 21.00 22.00 23.00 24.00 25.00 26.00 27.00 28.00 29.00	0.15 0.05 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.95
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	<p>Graph of a piecewise linear function on the interval $[0, 1]$. The function starts at $y=a$, decreases linearly to $y=0$ at $x=c$, remains at $y=0$ until $x=d$, and then increases linearly to $y=b$ at $x=1$. The equations for the linear parts are $y = -\frac{a}{c}x + a$ and $y = \frac{b}{d-1}x + \frac{bd}{d-1}$.</p>	10.0 11.1 8.0 7.0 6.0 5.0 4.0 3.0 2.0 1.0	14.0 14.5 15.0 15.5 16.0 17.0 17.5 18.0 19.0 19.5	0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35 0.40 0.45 0.50	0.30 0.35 0.40 0.45 0.50 0.55 0.60 0.65 0.70 0.75

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков., Г.М. Кобельков. – М: БИНОМ, 2004. – 636 с.
2. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений / И.П. Мысовских. – М.: Наука, 1993. – 496 с.
3. Калитин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калитин.– М : Наука, 1978. – 612 с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов – М : Наука, 1976. – 632 с.
5. Численные методы анализа / В.П. Демидович [и др.]. –М: Физматгиз, 1963. – 400 с.
6. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – М: Наука, 1982. – 255 с.
7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд .– М: Мир, 1979. – 392с.
8. Крылов В.И. Вычислительные методы высшей математики . В 2 т. / В.И. Крылов [и др.] – Минск : Выш шк., 1972. – Т. 1– 684 с.; 1976. –Т.2 – 672 с.
9. Машинные методы математических вычислений/ Дж. Форсайт [и др.]. – М : Мир, 1980. – 280 с.
- 10.Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ./Т. Шуп – М: Мир, 1982. – 238 с.
- 11.Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем./ А.А. Самарский – М.: Наука, 1971. – 552 с.
- 12.Сборник задач по методам вычислений / Под ред. П.И. Монастырного – М: Наука, 1994. – 318 с.
- 13.Самарский А.А. Введение в численные методы. / А.А. Самарский – М: Наука, 1987. – 288 с.
- 14.Березин И.С. , Жидков Н.П. Методы вычислений/ И.С. Березин, Н.П. Жидков В 2 т. Т.1. – М: Физматгиз, 1962. – 464 с.

Учебное издание

Анисимов Владимир Яковлевич

Минченко Леонид Иванович

КРАТКИЙ КУРС ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Учебно-методическое пособие по курсу «Методы численного анализа» для студентов специальности «Информатика» всех форм обучения

В 2-х частях
Часть 2

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16	Бумага офсетная
Гарнитура «Таймс»	Печать офсетная	Усл.-печ.л.
Уч.-изд.л. 3,0	Тираж 100 экз.	Заказ 426

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Лицензия на осуществление издательской деятельности № 02330/0056964 от 01.04.2004.

Лицензия на осуществление полиграфической деятельности № 02330/0131518 от 30.04.2004.

220013, Минск, П.Бровки, 6