

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
БЕЛАРУСЬ**

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

Кафедра информатики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к лабораторным работам по курсу “Методы численного
анализа”**

**для студентов специальности «Информатика» всех форм
обучения**

Минск 2007

УДК 681.3

Составители Минченко Л.И., Анисимов В.Я.
Методические указания к лабораторным работам по курсу
“Методы численного анализа”, для специальности
«Информатика» всех форм обучения. – Мн.: БГУИР, 2007. –

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. ... Задание 10. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	
2. ЗАДАНИЕ 11. Аппроксимации граничных условий второго рода в методе конечных разностей	
3. ЗАДАНИЕ 12 Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности.	17
4. ЗАДАНИЕ 13. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.	20
5. ЗАДАНИЕ 14. Метод сеток решения волнового уравнения.	22

ВВЕДЕНИЕ

При изучении курса «Численные методы» студенты должны освоить методы решения классических элементарных задач. С этой целью необходимо выполнить под руководством преподавателя на лабораторных занятиях предлагаемые индивидуальные задания, охватывающие основные задачи: Методы численного решения задач математической физики.

Решение задачи теплопроводности методом разностных аппроксимаций.

Решение волнового уравнения.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Основные понятия теории разностных схем

По результатам работы студентом должен быть представлен и защищен отчет. Содержание отчета включает:

1. Введение, содержащее постановку задачи, обзор имеющихся методов ее решения, их сравнительная характеристика.
2. Детальное описание и схема алгоритма выбранного метода.
3. Распечатку программы (каждый метод должен быть реализован в виде отдельной подпрограммы, в головной программе предусмотреть ввод исходных данных и обращение к подпрограмме), таблицы полученных результатов, графики сходимости приближенного решения к точному.
4. Анализ полученных результатов, включающий аналитическую оценку точности метода и ее сравнение с численно полученными результатами (т.е. оценку разности между точным и приближенным решением при различных параметрах метода).

Задание 10. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Отчет должен содержать следующие материалы по каждой задаче:

- 1) постановка задачи;
- 2) необходимый теоретический материал;
- 3) **тестовый** пример и результаты вычислительного эксперимента по тесту (если необходимо);
- 4) полученные результаты и их анализ;
- 5) графический материал (если необходимо);
- 6) тексты программ.

Варианты заданий к заданиям 2.1-2.6 даны в **ПРИЛОЖЕНИИ 2.А.**

Фрагмент решения задачи 2.1 дан в **ПРИЛОЖЕНИИ 2.В.**

Задание 10.1. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{du}{dx} \right) = f, \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Представить коэффициент теплопроводности $K(x)$ в виде функции двух переменных x и c : $K(x) = K(x, c)$, где c - параметр.
2. При заданных в индивидуальном варианте функциях $K(x)$ (что соответствует $K(x, 1)$), $f(x)$ и значениях UA , UB найти аналитическое решение задачи символьно (см. **ПРИЛОЖЕНИЯ 2.В** и **2.С**).
3. Изменяя значения параметра c в коэффициенте теплопроводности, найти решения задачи для наборов параметров 1-3 (см. таблицу ниже).
4. На одном чертеже построить графики найденных решений. Сравнить полученные результаты.
5. Аналогично п.2, найти аналитическое решение для набора параметров 4. На одном чертеже построить графики решений для

наборов 1 и 4. Сравнить полученные результаты.

6. Изменяя граничные условия UA , UB , построить решения для наборов параметров 5-7.

Таблица наборов параметров

Параметры	1 набор	2 набор	3 набор	4 набор	5 набор	6 набор	7 набор
c	1	2	0.1	1	1	1	1
$K(x)$	$k(x)$	$ck(x)$	$ck(x)$	$1/k(x)$	$k(x)$	$k(x)$	$k(x)$
UA	ua	ua	ua	ua	$-ua$	ua	$-ua$
UB	ub	ub	ub	ub	ub	$-ub$	$-ub$

Задание 10.2. Найти приближенное решение краевой задачи методом конечных разностей:

$$\begin{cases} u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = UA, & u(b) = UB. \end{cases}$$

с заданной точностью ε и построить его график.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Составить разностную схему второго порядка точности и выписать коэффициенты матрицы системы уравнений и коэффициенты правой части.

2. Подготовить тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

3. Для вычисления решения задачи с заданной точностью произвести расчет с начальным шагом h , затем уменьшить шаг вдвое. Вывести на экран два соседних приближенных решения и сравнить результаты. Если заданная точность не достигнута, то продолжить уменьшение шага.

4. Построить график найденного решения и указать шаг, при котором заданная точность достигается.

Задание 10.3. Методом конечных разностей найти приближенное решение указанной в индивидуальном варианте краевой задачи с точностью ε и построить его график. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Использовать разностную схему второго порядка точности. Для аппроксимации производных в граничных условиях воспользоваться разностными отношениями:

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} \quad \text{и}$$

$$y'_n = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}.$$

2. Организовать компактное хранение ненулевых элементов трехдиагональной матрицы системы разностных уравнений.

3. Подготовить самостоятельно тестовый пример и провести расчет для него. Построить на одном чертеже графики приближенного и точного решений для тестового примера. После проверки правильности работы программы перейти к решению основной задачи.

Задание 10.4. Промоделировать стационарные процессы теплопроводности стержня в зависимости от входных данных задачи – переменного коэффициента теплопроводности $k(x)$ и плотности источников тепла $f(x)$:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f, \\ u(a) = UA, \quad u(b) = UB. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Составить разностную схему второго порядка точности для решения указанной задачи.

1. Взять исходные данные из 1-го набора параметров для задачи 2.1.

2. Шаг сетки положить равным $h = (b - a)/150$.

3. Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от коэффициента $k(x)$:

3.1. Пусть стержень состоит из 2-х материалов с различными свойствами:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, a \leq x \leq 0.5 \cdot (b+a) \\ k_2, 0.5(b+a) < x \leq b \end{cases}, \quad \text{а) } k_1 < k_2, \quad \text{б) } k_1 > k_2.$$

3.2. Пусть стержень состоит из 3-х материалов с различными свойствами:

$$k(x) = \begin{cases} k_1, a \leq x \leq a + (b-a)/3 \\ k_2, a + (b-a)/3 \leq x \leq a + 2(b-a)/3 \\ k_3, a + 2(b-a)/3 < x \leq b \end{cases}$$

а) $k_1 < k_2 < k_3$, б) $k_1 > k_2 > k_3$,
в) $k_1 = k, k_2 = 2k, k_3 = k$, г) $k_1 = 20k, k_2 = k, k_3 = 20k$.

4. Промоделировать процесс теплопроводности в зависимости от правой части – функции $f(x)$, предполагая, что $f(x)$ – точечный источник тепла. Задать точечный источник тепла можно следующим образом:

$f(x) = c \cdot \delta(x - x_0)$, где c – некоторая константа (мощность источника), $\delta(x)$ – дельта-функция, x_0 – точка из отрезка $[a, b]$, в которую ставится источник.

Рассмотреть следующие варианты расположения источника:

- а) точечный источник поставлен в середину отрезка $[a, b]$;
- б) два одинаковых по мощности источника поставлены в разные точки отрезка, симметричные относительно середины отрезка;
- в) два различных по мощности источника поставлены симметрично;
- г) предложить свой вариант расположения источников.

Задание 10.5. Методом конечных разностей найти приближенное решение краевой задачи

$$\begin{cases} -(k(x)u')' + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ -k(a)u'(a) + 0.5u(a) = 0, \\ k(b)u'(b) + 0.5u(b) = 0. \end{cases}$$

с тремя верными значащими цифрами. Решение системы разностных уравнений найти, используя метод прогонки.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Использовать разностную схему второго порядка точности.
2. При аппроксимации производных в граничных условиях использовать метод баланса.

Задание 10.6. Промоделировать нестационарные процессы теплопроводности в зависимости от входных данных задачи - коэффициента теплопроводности $k(x)$ и начальной температуры $\phi(x)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x)(1 - e^{-t}), & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = UA, \quad u(l, t) = UB, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Найти приближенное решение задачи с шагами $\tau = 0.05$ и $h = 0.01$, используя явную разностную схему. Построить графики решений при значениях $t = 0.5\tau, 20\tau, 200\tau$.
2. Используя результаты задачи 2.1, экспериментально определить момент времени t , при котором происходит установление процесса (визуально).
3. Произвести анимацию процесса установления.
4. Исследовать, как влияет начальная температура на процесс установления, взяв

другие функции $\phi(x)$ (согласованные с граничными условиями).

Задание 10.7. Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & a < x < b, \quad 0 < t \leq T, \\ u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & a \leq x \leq b, \end{cases}$$

используя явную разностную схему. Взять $h = (b - a)/10$; шаг τ выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots, T$.

УКАЗАНИЕ. Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид $\tau \leq 0.5(h^2 / k)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.A

Схема вариантов к лабораторной работе 10

N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи	N	Выполняемые задачи
1	2.1.1, 2.2.1, 2.4.1, 2.5.1, 2.6.1	11	2.1.11, 2.2.6, 2.4.11, 2.5.11, 2.6.11	21	2.1.21, 2.2.11, 2.4.21, 2.5.21, 2.6.21
2	2.1.2, 2.3.1, 2.4.2, 2.5.2, 2.6.2	12	2.1.12, 2.3.6, 2.4.12, 2.5.12, 2.6.12	22	2.1.22, 2.3.12, 2.4.22, 2.5.22, 2.6.22
3	2.1.3, 2.2.2, 2.4.3, 2.5.3, 2.6.3	13	2.1.13, 2.2.7, 2.4.13, 2.5.13, 2.6.13	23	2.1.23, 2.2.12, 2.4.23, 2.5.23, 2.6.23
4	2.1.4, 2.3.2, 2.4.4, 2.5.4, 2.6.4	14	2.1.14, 2.3.7, 2.4.14, 2.5.14, 2.6.14	24	2.1.24, 2.3.12, 2.4.24, 2.5.24, 2.6.24
5	2.1.5, 2.2.3, 2.4.5, 2.5.5, 2.6.5	15	2.1.15, 2.2.8, 2.4.15, 2.5.15, 2.6.15	25	2.1.25, 2.2.13, 2.4.25, 2.5.25, 2.6.25
6	2.1.6, 2.3.3, 2.4.6, 2.5.6, 2.6.6	16	2.1.16, 2.3.8, 2.4.16, 2.5.16, 2.6.16	26	2.1.26, 2.3.13, 2.4.26, 2.5.26, 2.6.26
7	2.1.7, 2.2.4, 2.4.7, 2.5.7, 2.6.7	17	2.1.17, 2.2.9, 2.4.17, 2.5.17, 2.6.17	27	2.1.27, 2.2.14, 2.4.27, 2.5.27, 2.6.27
8	2.1.8, 2.3.4, 2.4.8, 2.5.8, 2.6.8	18	2.1.18, 2.3.9, 2.4.18, 2.5.18, 2.6.18	28	2.1.28, 2.3.14, 2.4.28, 2.5.28, 2.6.28
9	2.1.9, 2.2.5, 2.4.9, 2.5.9, 2.6.9	19	2.1.19, 2.2.2, 2.4.19, 2.5.19, 2.6.19	29	2.1.29, 2.2.15, 2.4.29, 2.5.29, 2.6.29
2	2.1.2, 2.3.5, 2.4.2, 2.5.2, 2.6.2	20	2.1.20, 2.3.2, 2.4.20, 2.5.20, 2.6.20	30	2.1.30, 2.3.15, 2.4.30, 2.5.30, 2.6.30

Таблица к задаче 10.1

№	$k(x)$	$f(x)$	a	UA	b	UB
2.1.1	x^3	$10x^{1/4}$	1	3	2	0
2.1.2	x	$\sqrt{x} + 4$	0.5	0	1.5	5
2.1.3	x^{-2}	$-2x^2 - 2x$	0.5	2	1.5	6
2.1.4	x^3	$1 + x^{1/3}$	0.2	4	1.2	1
2.1.5	x	$x^3 + 2$	0.1	2	1.1	4
2.1.6	e^x	e^{2x}	0.5	1	1.5	5
2.1.7	x	$3x + x^2$	1	3	2	3
2.1.8	x	$x + x^{\frac{1}{3}}$	0.1	6	0.8	0.6
2.1.9	$\cos(x)$	$10\sin(x)$	0.1	3	0.8	1
2.1.2	x	$\ln(x)$	0.1	1	0.6	5
2.1.11	$\cos(x)$	$10\cos(x)$	1	2	1.5	1
2.1.12	x	x^{-1}	1	3	2	3
2.1.13	x^{-2}	$6x^2 - 3x$	1	-2	2.2	2
2.1.14	e^x	$x + e^x$	1	2	2.5	-2

Окончание таблицы к задаче 10.1

2.1.15	$x^{-1/3}$	$x + \sqrt{x}$	1.5	3	2.5	-3
2.1.16	x^3	$10x^{-1/4}$	0.1	3	1.1	0
2.1.17	x^{-1}	$4 - \sqrt{x}$	1.5	-2	2.5	-4
2.1.18	x^2	$2x^2 + 2x$	0.5	2	1.6	6
2.1.19	x^{-3}	$4x^3 + 6$	0.2	4	1.2	1
2.1.20	x^{-2}	$5x^4 - 5$	1.5	-1	2.5	4
2.1.21	e^x	$2 - e^{2x}$	0.3	-1	2.3	1

2.1.22	x^{-1}	x	1	3	2	3
2.1.23	$1/\cos(x)$	$5\sin(x)$	0.5	1	1.5	1
2.1.24	$1/\cos^2(x)$	$6\cos^3(x)$	0.5	2	1.3	2
2.1.25	$1/\sin^2(x)$	$15\sin^3(x)$	0.2	-1	1.2	-1
2.1.26	x^{-1}	$3\ln(x)$	0.3	3	2.3	1
2.1.27	x^{-1}	$2x^2 - x$	2	-4	3	2
2.1.28	x^{-2}	$3x^2 + 4$	1.2	-4	2.4	1
2.1.29	$x^{1/2}$	$15(x - \sqrt{x})$	0.5	1	1.5	1
2.1.30	e^{-x}	$3 + e^{3x}$	0.3	3	2.3	1

Таблица к задаче 10.2

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	a	b	UA	UB	ε
2.2.1	$0.5 + \sin^2 x$	$2(1 + x^2)$	$10(1 + \sin^2 x)$	0	2	0	4	0.02
2.2.2	e^{-x^2}	$5(2 + \sin 2x)$	$e^x(1 + \sin 2x)$	0	2	0	5	0.05
2.2.3	$e^{-(x^2+1)}$	$10(1 + e^{-x})$	$e^{2.5x}(0.5 + x)$	0	1	4	0	0.03
2.2.4	e^{-2x}	$16/(1 + x^2)$	$e^{3x}(2 - x^2)$	0	1	1	3	0.05
2.2.5	$\ln(1 + x)$	$10/(1 + x)$	$x + 9/(1 + x)$	0	2	5	0	0.01
2.2.6	$\cos^2(x)$	$\frac{10}{1 + \sin^2(x)}$	$e^{-0.5x}(12 - x^2)$	0	2	3	0	0.05
2.2.7	$\ln(1 + x^2)$	$e^{-x}(8 + x^2)$	$8 - x^2$	0	2	4	0	0.01
2.2.8	$1 + \cos^2(x)$	$x^2 + 1$	$(x^2 + 1)\cos(x)$	1	3	-1	4	0.05
2.2.9	$0.5(1.5 - x^2)$	$e^x(4 - x)$	$5x^2e^{-x}$	1	2	0	3.5	0.02
2.2.2	$\sin(2x)$	$8(1 + \sin^2 x)$	$10\cos x$	1	3	0	0	0.05
2.2.11	$0.25(1 - x^2)$	$5(1 + \cos^2(x))$	$15\cos x$	0	2	0	4	0.02
2.2.12	$-0.5 + \sin x$	$\frac{8}{1 + 0.25x^2}$	$5(1 - x^2)$	0	2	0	0	0.01
2.2.13	$\sin(x - 2)$	$5(x + 1/x)$	8	1	3	0	5	0.04
2.2.14	$1/(1 + x^2)$	$10 - x$	$e^{1.5x}(1 + x^2)$	0	2	0	5	0.05
2.2.15	$0.5e^{-x}$	$10(1 + \sin^2 x)$	12	0	1	-1	4	0.02
2.2.16	$0.5(1 - 0.4x^2)$	$e^{-x}(9 + x)$	$10\sin x$	0	1.	0	4	0.03

					5			
2.2.17	$0.5 \sin x$	$7(1 + \sin^2 x)$	$6(1 + x^2)$	0	2	4	0	0.05
2.2.18	$0.4\sqrt{1+x^2}$	$4(1+x^2)$	$20e^{-x}$	0	2.5	0	0	0.05
2.2.19	$0.3\sqrt{4-x^2}$	$5(1+x^2)$	$8e^{0.5x}$	0	2	-1	3	0.1
2.2.20	$0.5/(1+x^2)$	$7(1+\sin^2 x)$	$20/(1+0.5x^2)$	0	1.5	2	-1	0.005
2.2.21	$\sin x$	$4(1+x^2)$	$6e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.05
2.2.22	$\sin x$	$6\sqrt{1+x^2}$	$7(1+\sin^2 x)$	0	2	0	0	0.05
2.2.23	$\cos(x)$	$5(1+\cos^2 x)$	$10/(1+0.5x^2)$	0	1.5	5	0	0.05
2.2.24	$\cos(x)$	$5(1+\sin^2 x)$	$4e^{0.5x}$	0	2	0	4	0.02
2.2.25	e^{-x}	$8(1+\sin^2 x)$	$20-x^2$	1	3	0	0	0.01
2.2.26	$0.5e^x$	$5(1+\sin^2 x)$	2	0	1	1	4	0.02
2.2.27	$2/(1+x^2)$	$2-x$	$e^{1.5x}(1+x^2)$	0	2	2	5	0.05
2.2.28	$\ln(1+x)$	$5/(1+x)$	$5/(1+x)$	0	2	5	0	0.05
2.2.29	$5\sin x$	$5(1+x^2)$	$5e^{0.5x}$	0	2	0	5	0.2
2.2.30	$0.5\sqrt{1+x^2}$	$5(1+x^2)$	$10e^{-x}$	0	2.5	0	0	0.2

Таблица к задаче 10.3

№	Задача	ε	№	Задача	ε
2.3.1	$u'' - xu' + 0.2u = x+1$ $u(0.9) - 0.5u'(0.9) = 2$ $u(2.9) = 1$	0.04	2.3.11	$u'' + u' + 2xu = x^2 + 1$ $u(0.3) + 0.5u'(0.3) = 3$ $u(2.7) = 1$	0.03
2.3.2	$u'' - 0.5xu' + u = 2$ $u(0.4) = 1.2$ $u(1.4) + 2u'(1.4) = 3.2$	0.005	2.3.12	$u'' - xu = 2x$ $u(1.5) - 2u'(1.5) = 4.5$ $u'(3.5) = 3$	0.1
2.3.3	$u'' - 0.5u' + 0.5xu = 2x$ $u'(1) = 0.5$ $2u(3) - u'(3) = 2$	0.05	2.3.13	$u'' + xu' - u = x$ $u'(3) = 6$ $u(4) + u'(4) = 2$	0.1
2.3.4	$u'' - xu' + 2xu = 2.8$ $u(1.2) - 0.2u'(1.2) = 0.2$ $u'(2.2) = 4$	0.07	2.3.14	$u'' - u'/x + u = 2x$ $u(1.5) + 0.5u'(1.5) = 1.5$ $u'(4.5) = 5$	0.05
2.3.5	$u'' - u' + 2xu = x+1$ $u(1.3) = 1$ $u(2.4) + u'(2.4) = 3.2$	0.1	2.3.15	$u'' - xu' + 2xu = x^2 + 1$ $u(1.2) + 10u'(1.2) = 2.2$ $u(3.6) = 1$	0.03
2.3.6	$u'' - 4xu' + 5u = 2x$ $u'(2) = 0$ $u(4) - 3u'(4) = 2$	0.07	2.3.16	$u'' - \cos(x^2)u = 2x+1$ $u'(1) - 3u(1) = 1$	0.02

				$u(3) = 10$	
2.3.7	$u'' - 3u' + 8xu = 8$ $u(1.8) - 0.5u'(1.8) = 2$ $u(3.8) = 5$	0.1	2.3.17	$u'' + u' - x^2u = 2$ $u(1) + 0.5u'(1) = 2$ $u(4) = 4$	0.02
2.3.8	$u'' - 6xu' + 0.5u = -3$ $u(2.2) + 0.1u'(2.2) = 0.2$ $u'(4.2) = 4$	0.03	2.3.18	$u'' - 5u = e^x$ $u'(2) = 0$ $u(4) = 2$	0.2
2.3.9	$u'' - 1.5u' - 5xu = 0.5$ $2u(1.3) - 0.5u'(1.3) = 1$ $u(3.9) = 4$	0.05	2.3.19	$u'' + 2u' - 1.5xu = 2/x$ $u'(0.8) = 1$ $u(3.8) + 2u'(3.8) = 1$	0.1
2.3.2	$u'' - 3u'/x + xu = 3$ $u'(0.7) = 0.2$ $u'(3.6) + 20u(3.6) = 4$	0.03	2.3.20	$u'' - u'/4 + 2u/x = x/2$ $1.5u(1.3) - u'(1.3) = 0.6$ $u(2.6) = 2$	0.03

Таблица к задаче 10.5

№	a	b	c	k(x)		q(x)		f(x)
				$a < x < c$	$c < x < b$	$a < x < c$	$c < x < b$	
2.5.1	0	1.5	1.125	0.5	1.4	3.2	8.5	$8x^2(2-x)$
2.5.2	0	1.8	1.275	0.4	1.4	3.2	12	$8x(2-x^2)$
2.5.3	0	2.0	1.515	0.5	1.8	3.5	8.2	$10x(2.5-x)$
2.5.4	0	2.3	1.875	0.4	1.8	3.5	12.8	$10x(1.2-x^2)$
2.5.5	0	2.5	1.875	1.2	0.5	8.3	3.5	$9/(1+0.5x^2)$
2.5.6	0	2.8	1.875	1.2	0.4	8.3	2.8	$9/(2+0.3x^2)$
2.5.7	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$
2.5.8	0	1.5	0.925	1.5	0.4	7.5	12	$7e^{-x}$
2.5.9	0	1.7	0.925	1.8	0.4	7.0	12	$8x/(2+x^3)$
2.5.2	0	2	1.125	1.8	0.6	6.5	7.8	$8x(2.5-x)$
2.5.11	0	2.2	1.125	0.5	1.8	3.5	7.8	$10x^2(2.5-x)$
2.5.12	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5-0.3x^2)$
2.5.13	0	2.7	1.815	0.5	1.2	5.6	12.3	$9(x+1/(1+x^3))$
2.5.14	0	3	1.815	0.3	1.2	5.6	2	$9x(3.5-x)$
2.5.15	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5-x)$
2.5.16	0	1.8	1.215	0.4	1.2	3.2	8.5	$8x(2-x)$
2.5.17	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5-0.5x^2)$
2.5.18	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5-x)$
2.5.19	0	2.5	1.725	0.5	1.5	3.5	12.08	$10x(1.3-0.2x^2)$

2.5.20	0	2.8	1.725	1.5	0.4	8.3	3.5	$9e^{-x}$
2.5.21	0	3.0	2.015	1.5	0.5	8.3	2.8	$8/(1+x^2)$
2.5.22	0	1.5	0.925	1.2	0.4	8.3	12	$7(x+1/(x+0.5))$
2.5.23	0	1.7	0.925	1.2	0.5	7.5	12	$7e^{-x}$
2.5.24	0	2.0	1.215	1.8	0.4	7.0	12	$8x(2.5-x)$
2.5.25	0	2.2	1.215	1.8	0.5	6.5	12	$8x(1.5+0.2x^2)$
2.5.26	0	2.5	1.515	0.3	1.8	3.5	8.3	$10x(1.5-0.3x^2)$
2.5.27	0	3.0	1.875	1.5	0.6	8.3	12	$7e^{-0.5x}$
2.5.28	0	1.5	0.875	0.5	1.8	5.6	8.5	$9x(3.5-x)$
2.5.29	0	2	1.215	0.4	1.5	3.2	12	$8x(1.5-0.5x^2)$
2.5.30	0	2.3	1.725	0.5	1.2	3.5	8.2	$10x(2.5-x)$

Таблица к задаче 10.6

В задаче 2.6 взять входные данные $k(x)$, $f(x)$, ua ,
 ub из задачи 2.1, $\phi(x) = (ub - ua)(x - a)/l + ua$,
 $l = b - a$.

Таблица к задаче 2.7

№	a	b	k	T	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x, t)$
1	0	1	1	0.05	0	0	0	x
2	-1	1	0.5	0.4	$ x $	1	1	0
3	0	1	0.1	0.5	$x(1-x)$	$5t$	$5t$	0
4	0	2	1	0.2	0	0	0	x
5	0	1	0.1	0.5	x	$2\sin(t)$	$\cos(t)$	0
6	-1	1	2	0.1	x^2	1	1	0
7	0	1	2	0.02	0	0	$\sin(10t)$	$x(1-x)$
8	-1	1	0.5	0.4	$1-x^2$	0	0	x
9	0	1	0.1	0.5	x^2	0	1	t
10	-1	1	0.2	1	0	0	0	$1-x^2$
11	0	1	1	0.05	$ x-0.5 $	0.5	0.5	0
12	-1	1	0.5	0.4	x^2	1	1	x
13	0	1	0.2	0.25	$\sin(x)$	0	$\sin(1+2t)$	$1-x$
14	0	2	1	0.2	$\sin(x)$	0	$\sin(2)$	$2-x$
15	0	1	1	0.05	1	e^t	e^{10t}	0
16	0	2	1	0.2	1	e^{10t}	e^t	0
17	0	1	0.5	0.1	1	e^{-t}	e^{-10t}	2
18	0	2	0.5	0.4	1	e^{-t}	e^{-5t}	2
19	0	1	0.2	0.2	$1-x^2$	1	0	0
20	0	2	2	0.1	0	0	$10t$	1

21	0	1	0.5	0.1	0	0	$10t$	t
22	0	2	1	0.2	1	e^{-5t}	$\cos(t)$	1
23	0	1	0.4	0.1	x	0	1	1
24	-1	1	1	0.2	$1-x^2$	0	$5t$	0
25	0	1	0.4	0.1	$1-x$	1	0	2
26	0	2	1	0.2	x	0	2	x
27	0	1	0.25	0.2	x^3	0	1	5
28	0	2	1	0.2	x	0	2	x
29	0	1	0.5	0.1	0	0	$e^{10t}-1$	1
30	-1	1	0.2	1	$1- x $	0	0	1

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.В

Для нахождения решения стационарного уравнения теплопроводности

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x,c)\frac{du}{dx}\right)=f(x) \text{ дважды проинтегрируем}$$

его. Первое интегрирование дает такой результат

$$u'(x)=-\frac{1}{k(x,c)}\int f(x)dx+c_1.$$

Проинтегрируем полученное соотношение еще раз получим:

$$u(x)=-\int\left(\frac{\int f(x)dx}{k(x,c)}\right)dx+c_1x+c_2.$$

Константы c_1, c_2 находятся из граничных условий:

$$u(a)=ua, \quad u(b)=ub.$$

Пример решения задачи 2.1. Пусть $k(x,c)=cx$.

$$-\frac{d}{dx}\left(cx\frac{du}{dx}\right)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}},$$

$$u(0.5)=1, \quad u(1)=2.$$

Проинтегрируем уравнение: $cxu' = -x^{\frac{4}{3}} + c_1$.

Повторное интегрирование дает соотношение:

$$u(x) = -\frac{3}{4c}x^{\frac{4}{3}} + \frac{c_1}{c}\ln x + c_2.$$

Найдем константы c_1 и c_2 , при условии, что

$$c = 1: u(1) = -\frac{3}{4} + c_2 = 2; \quad c_2 = 2.75$$

$$u(0.5) = -\frac{3}{4}(0.5)^{4/3} + c_1 \cdot \ln(0.5) + 2.75 = 1,$$

поэтому $c_1 = 1.780827$.

Окончательно, решение примет вид:

$$u(x, k(x, 1)) = -\frac{3}{4}x^{4/3} + 1.780827\ln x + 2.75.$$

Для проверки можно подставить найденное решение в исходное уравнение и проверить выполнение граничных условий.

ЗАДАНИЕ 11. Аппроксимации граничных условий второго рода в методе конечных разностей

Оглавление

1. [Введение](#)
 - 1.1. [Постановка задачи](#)
 - 1.2. [Способы реализации ГУ второго рода](#)
2. [Краткое описание программы](#)
 - 2.1. [Возможности программы](#)
3. [Практическая часть](#)
4. [Отчёт](#)

1. Введение

Цель работы - знакомство с наиболее часто применяемыми способами аппроксимации граничных условий второго рода (граничных условий Неймана) в методе конечных разностей (на примере ГУ для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности).

1.1. Постановка задачи

Задачи, которые будут использоваться для анализа свойств численных решений с ГУ второго рода, формулируются так: в стержне длиной L с *теплоизолированной* боковой поверхностью торец $x=0$ *поддерживается* при *постоянной* температуре T_0 (ГУ первого рода), а торец $x=L$ – *теплоизолирован* (ГУ второго рода); температуропроводность материала стержня постоянна и равна a ; в начальный момент времени $t=0$ стержень нагрет до температуры $T_{\text{нач}}(x)$ (координата x отсчитывается от левого торца стержня; см. рис.1). Найти распределение температуры по стержню в любой момент времени, т.е. найти функцию $T(x,t)$ для $0 < x \leq L$ и $t > 0$.

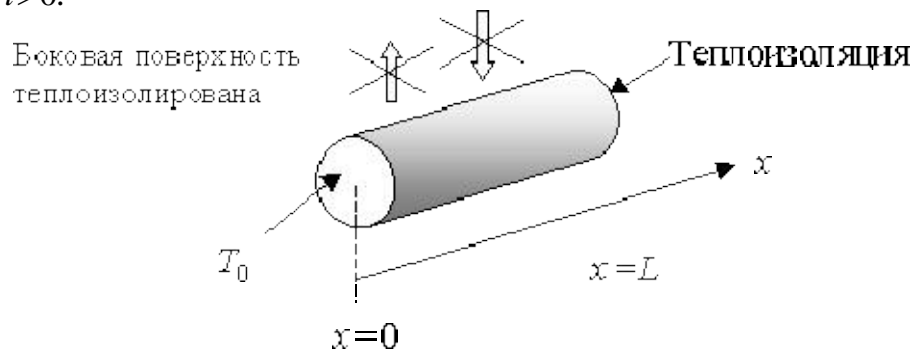


Рис. 1. Система координат и обозначения. (Стержень круглого сечения нарисован условно – сечение может иметь любую форму и если боковая поверхность теплоизолирована, то температура любой точки стержня может зависеть только от координаты x и не будет зависеть от координаты поперек стержня).

Искомая функция $T(x,t)$ является решением одномерного уравнения теплопроводности, которое в безразмерных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

(См. описание работы 1; в дальнейшем ссылка на него будет обозначаться [P1](#)).

Граничные условия:

$$\begin{cases} T(0,t) = T_0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad \text{при } 0 < t < \infty$$

(на границе $x=0$ граничное условие первого рода, а при $x=L$ – второго).

Начальные условия: $T(x,0)=T_{\text{нач}}(x)$ при $0 \leq x \leq 1$.

1.2. Способы реализации ГУ второго рода

Методы конечных разностей, применяемые для численного решения задач с граничными условиями второго (и третьего) рода, не имеют *никаких принципиальных отличий* от методов, применяемых для задач с ГУ первого рода.

Для решения поставленной задачи методом конечных разностей необходимо представить граничное условие второго рода в "естественном" для этого метода виде, т.е. с

использованием численного решения (величин T_i^n). Иными словами, производную в граничном условии надо заменить её разностной аппроксимацией, а это можно сделать многими способами.

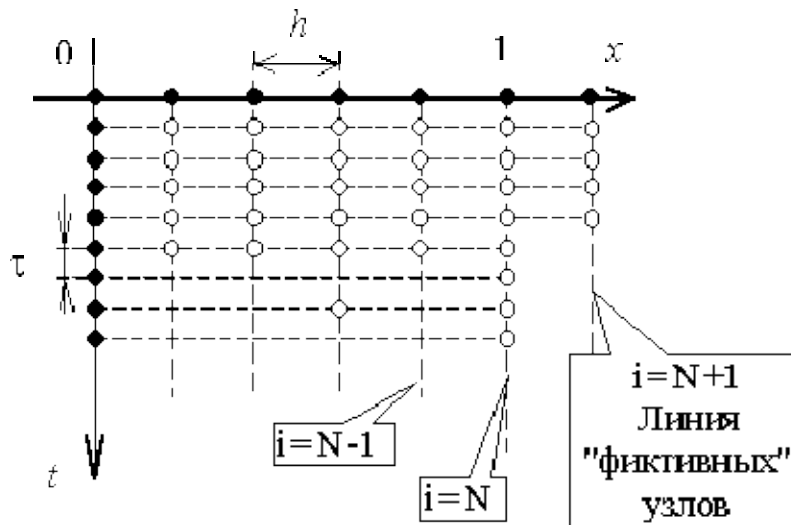


Рис. 2.

Рассмотрим только два способа реализации ГУ второго рода, которые будут использованы в расчётах. При рассмотрении используем ту же равномерную сетку, что и в Р1 (показана на рис.2).

Первый способ. Приблизненно значение производной при $x=1$ можно записать, используя аппроксимацию производной по x левой разностью:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} \approx \frac{T_N^n - T_{N-1}^n}{h} \quad (1)$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_N^n = T_{N-1}^n \quad (2)$$

Численное решение ДУ с граничным условием второго рода при $x=1$ происходит почти так же, как и с ГУ первого рода: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все T_i^n при $1 \leq i \leq N-1$, а значение T_N^n (на границе) вычисляется по формуле (2). Это и есть первый способ реализации граничного условия второго рода. Обратите внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной левой разностью (ф-ла (1)) имеет первый порядок точности по h , т.е. $O(h)$. Второй способ можно пояснить на примере явной разностной схемы аппроксимации уравнения теплопроводности. Алгоритм явной схемы можно записать так:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\tau}{h^2} (T_{i+1}^n - 2 \cdot T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (3)$$

Из этого выражения следует, что для вычисления величины T_1^0 требуется какая-то величина T_{N+1}^n , которая *не входит* в расчетную область. Однако её можно вычислить, используя аппроксимацию производной в граничном условии центральной разностью:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} \approx \frac{T_{N+1}^n - T_{N-1}^n}{2h} \quad (4)$$

а поскольку значение этой производной в рассматриваемой задаче равно нулю, то аппроксимация граничного условия выглядит так:

$$T_{N+1}^n = T_{N-1}^n \quad (5)$$

Способ реализации граничного условия здесь несколько иной: на каждом шаге по времени с помощью разностной схемы вычисляются все T_i^{n+1} при $1 \leq i \leq N-1$, а при вычислении T_1^0 в разностной схеме заменяются T_{N+1}^n на T_{N-1}^n (используется равенство (5)).

Обратите внимание на то, что разностная аппроксимация первой производной центральной разностью (ф-ла (4)) имеет второй порядок точности по h , т.е. $O(h^2)$.

Рассмотренному выше второму способу реализации ГУ второго рода можно дать другую интерпретацию, которая может оказаться более наглядной и полезной в сложных задачах. Эта другая интерпретация связана с введением "фиктивных" узлов (узлов вне зоны расчета). На рис.2 показаны такие узлы (линия узлов, находящихся на расстоянии h от границы, на которой поставлено ГУ второго рода). Если температуру в этих узлах задавать равной значениям температуры в соответствующих симметричных относительно границы узлах (согласно равенству (5)), то для расчета будет использоваться *одна и та же* разностная схема для всех узлов (включая и узлы при $i=N$).

2. Краткое описание программы

2.1. Возможности программы

В работе должна быть предусмотрена возможность численного решения уравнения теплопроводности с помощью неявной и явной разностных схем. Возможность использования различных граничных и начальных условий ограничена задачами, которые позволяют в достаточной мере познакомиться с основными способами реализации ГУ второго рода и их свойствами.

Предусмотрена возможность задания только синусоидального начального распределения $T_{нач}(x)=A\sin(\pi x/2)$, а на границе $x=0$ используется только нулевое ГУ первого рода. На границе $x=1$ можно использовать и первый и второй способы реализации ГУ второго рода (аппроксимации и первого и второго порядка точности).

Шаги сетки выбираются аналогично [Р1](#). Расчетная область по времени, реализованная в программе, составляет во всех случаях $[0, 1]$. Результаты расчета выводятся в виде такой же как и в Р1 таблицы. После расчета программа может построить такие же как в Р1 графики.

3. Практическая часть

- Для обеих разностных схем выполните расчеты, результаты которых позволят определить порядок сходимости для первого способа реализации ГУ второго рода. Результаты расчетов для *каждой* схемы запишите в таблицу вида:

N	τ	$s(t=t_{n1})$	$s(t=t_{n2})$	Макс. мод. при $t=t_{n1}$	Макс. мод. при $t=t_{n2}$

В двух первых колонках – задаваемые Вами параметры сетки, а в остальных – числа из таблиц результатов расчета. *Учтите замечания*, приведенные в 3.1.1. описания [P1](#).

- Кроме указанных расчетов, дополнительно сделайте такие же расчеты для явной схемы при выполнении соотношения $\tau = h^2/6$.
- По результатам всех расчетов определите порядки сходимости по h и τ применённых разностных схем. Постройте в логарифмическом масштабе графики зависимостей ошибки численных решений от h или τ . (Пример – рис.5 в P1).
- Повторите все предыдущие расчёты и задания для аппроксимации ГУ второго рода вторым способом. Обратите внимание на то, как сильно влияет на точность решения понижение порядка точности аппроксимации *лишь в одном* (граничном) узле сетки. (Вспомните, что и явная и неявная схемы имеют второй порядок сходимости по h). По результатам всех этих расчетов проанализируйте влияние порядка точности аппроксимации ГУ второго рода на порядок сходимости.

4. Отчёт

В отчёте должны быть таблицы расчётов (их вид в разделе 3), построенные Вами графики для определения порядка сходимости и сделаны соответствующие выводы о свойствах применённых способов аппроксимации ГУ второго рода (с точки зрения их влияния на порядок сходимости и точность численного решения).

Литература

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Пер. с англ.: В двух томах. -М.: Мир, 1990. - 728 с.

2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Пер. с англ. В двух томах. -М.: Мир, 1991. -504+552 с.
3. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. Пер. с англ. -М., Мир, 1990. -660 с.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Пер. с англ. -М.: Мир, 1980. -616 с.

ЗАДАНИЕ 12. Метод сеток решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности.

Задача по теме “Численное решение задачи теплопроводности”

Задание Найти приближенное решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & a < x < b, & 0 < t \leq T, \\ u(a, t) = g_1(t), & u(b, t) = g_2(t), & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & a \leq x \leq b, \end{cases}$$

используя явную разностную схему. Взять $h = (b - a)/10$; шаг τ выбрать из условия устойчивости. Изобразить графики зависимости приближенного решения от x при $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots, T$.

УКАЗАНИЕ. Условие устойчивости для явной разностной схемы имеет вид $\tau \leq 0.5(h^2 / k)$.

Таблица к

задаче 22

№	a	b	k	T	$\varphi(x)$	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$f(x, t)$
1	0	1	1	0.05	0	0	0	x
2	-1	1	0.5	0.4	$ x $	1	1	0
3	0	1	0.1	0.5	$x(1-x)$	$5t$	$5t$	0
4	0	2	1	0.2	0	0	0	x
5	0	1	0.1	0.5	x	$2\sin(t)$	$\cos(t)$	0
6	-1	1	2	0.1	x^2	1	1	0
7	0	1	2	0.02	0	0	$\sin(10t)$	$x(1-x)$
8	-1	1	0.5	0.4	$1-x^2$	0	0	x
9	0	1	0.1	0.5	x^2	0	1	t

10	-1	1	0.2	1	0	0	0	$1 - x^2$
11	0	1	1	0.05	$ x - 0.5 $	0.5	0.5	0
12	-1	1	0.5	0.4	x^2	1	1	x
13	0	1	0.2	0.25	$\sin(x)$	0	$\sin(1 + 2t)$	$1 - x$
14	0	2	1	0.2	$\sin(x)$	0	$\sin(2)$	$2 - x$
15	0	1	1	0.05	1	e^t	e^{10t}	0
16	0	2	1	0.2	1	e^{10t}	e^t	0
17	0	1	0.5	0.1	1	e^{-t}	e^{-10t}	2
18	0	2	0.5	0.4	1	e^{-t}	e^{-5t}	2
19	0	1	0.2	0.2	$1 - x^2$	1	0	0
20	0	2	2	0.1	0	0	$10t$	1
21	0	1	0.5	0.1	0	0	$10t$	t
22	0	2	1	0.2	1	e^{-5t}	$\cos(t)$	1
23	0	1	0.4	0.1	x	0	1	1
24	-1	1	1	0.2	$1 - x^2$	0	$5t$	0
25	0	1	0.4	0.1	$1 - x$	1	0	2
26	0	2	1	0.2	x	0	2	x
27	0	1	0.25	0.2	x^3	0	1	5
28	0	2	1	0.2	x	0	2	x
29	0	1	0.5	0.1	0	0	$e^{10t} - 1$	1
30	-1	1	0.2	1	$1 - x $	0	0	1

ЗАДАНИЕ 13. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Цель выполнения задания:

- изучить метод разностных аппроксимаций для уравнения Пуассона,
- составить алгоритмы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом сеток применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
- получить численное решение заданной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Краткие теоретические сведения.

Пусть $D = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ — открытый квадрат, Γ — его граница, $\bar{D} = D \cup \Gamma$ — замкнутый квадрат, $f(x, y)$ — заданная на \bar{D} достаточно гладкая функция. Задача Дирихле состоит в следующем. Требуется найти непрерывную на \bar{D} функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую на открытом квадрате D уравнению Пуассона

$$-\Delta u \equiv -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y) \quad (1)$$

и обращающуюся на границе квадрата в нуль, т. е.

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (2)$$

Задача Дирихле (1), (2) имеет единственное решение $u(x, y)$.

Положим $h = 1/N$, $x_k = kh$, $y_m = mh$, $f_{km} = f(x_k, y_m)$. Построим сетки

$$\omega_h = \{(x_k, y_m): k, m = 0, 1, \dots, N\},$$

$$\omega'_h = \{(x_k, y_m): k, m = 1, 2, \dots, N-1\},$$

$$\omega_h^* = \omega_h \setminus \omega'_h \quad (\omega_h^* \text{ — множество узлов, лежащих на } \Gamma).$$

Зададим нормы

$$\|v\|_h = \max_{\omega_h} |v_{km}|, \quad \|v\|'_h = \max_{\omega'_h} |v_{km}|.$$

Разностная схема:

$$\Lambda v_{km} = f_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$v_{km} = 0 \quad \text{на } \omega_h^*, \quad (4)$$

Разностное уравнение (3) в более подробной записи имеет вид

$$-\frac{v_{k-1,m} - 2v_{km} + v_{k+1,m}}{h^2} - \frac{v_{k,m-1} - 2v_{km} + v_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}. \quad (3^*)$$

Его шаблон изображен на рис. 4.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \circ \\ y_{m+1} & & & & \\ & \circ & & \circ & \circ \\ y_m & & & & \\ & & \circ & & \\ y_{m-1} & & & & \\ & x_{k-1} & x_k & x_{k+1} & \end{array}$$

Рис. 4.

Решение v разностной задачи Дирихле (3), (4) находится методом последовательных приближений по схеме переменных направлений, (33.9), где $f_{km}^{v-1/2} = f(x_k, y_m)$, v_{km}^0 — произвольные. Можно доказать, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} v_{km}^v = v_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, N-1,$$

при любых начальных приближениях v_{km}^0 , причем наибольшая скорость сходимости достигается при $\tau \approx h/\pi$. Здесь положена в основу идея о стабилизации при $t \rightarrow +\infty$ решения уравнения теплопроводности к решению уравнения Пуассона, если f не зависит от t . Разностная схема (3), (4) устойчива по правой части, т. е. разностная задача

$$\Lambda z_{km} = \xi_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$z_{km} = 0 \quad \text{на } \omega^*$$

при любом $h = 1/N$, $N \geq 2$, имеет единственное решение z , и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|z\|_h \leq c \|\xi\|_h', \quad (5)$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от h и сеточной функции ξ .

Предположим, что решение задачи Дирихле (1), (2) достаточно гладкое на замкнутом квадрате \bar{D} , а именно, $u(x, y) \in C_4(\bar{D})$. Тогда разностное уравнение (3) аппроксимирует дифференциальное уравнение (2) на решении u задачи (1), (2) со вторым порядком относительно h , т.е.

$$\|\psi\|_h' = O(h^2), \quad (6)$$

где

$$\psi_{km} = \Lambda u_{km} - f_{km}, \quad (7)$$

есть невязка u для разностного уравнения.

При получении оценки (6) используется тот факт, что частным производным u''_{xx} и u''_{yy} , входящим в уравнение (1), в разностном уравнении (3*) отвечают вторые разностные производные, аппроксимирующие на основании (10.3) указанные частные производные с точностью $O(h^2)$. Более подробно аналогичные оценки невязок проводятся в §§ 30, 31.

Поскольку краевое условие (2) аппроксимируется на сетке ω_h^* согласно (4) точно, то из (6) и устойчивости разностной схемы (3), (4) по правой части вытекает сходимость ее решения v к решению $u \in C_4(\bar{D})$ задачи (1), (2) со вторым порядком относительно h , т. е.

$$\|u - v\|_h = O(h^2). \quad (8)$$

Действительно, из уравнения (3), равенства (7) и условий (2), (4) вытекает, что погрешность $r = u - v$ на сетке ω_h

является решением разностной задачи

$$\Lambda r_{km} = \psi_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$r_{km} = 0 \quad \text{на } \omega_h^*.$$

Отсюда и из (5), (6) следует (8).

Разностная схема (3), (4) обладает вторым порядком точности.

Случай произвольной области. Рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta u = f(x, y) \quad \text{на } G, \quad (9)$$

$$u = \varphi \quad \text{на } \Gamma, \quad (10)$$

где G — некоторая конечная область (рис. 27), Γ — граница области G , $f(x, y)$ — заданная на области G функция, φ — заданная на границе Γ функция.

Строится, как и выше, квадратная сетка с шагом h . Во всех расположенных в области G узлах сетки, которые можно соединить с четырьмя ближайшими узлами отрезками прямых, не пересекая границу Γ , разностное уравнение задается в следующем виде:

$$\Lambda v_{km} = f_{km}, \quad (11)$$

где Λ — оператор (3*). Указанные узлы обозначены на рис. 5 кружками. Шаблон разностного уравнения (11) показан на рис. 4.

В узлах, находящихся в области G вблизи ее границы Γ (отмеченных на рис. 5 треугольниками), для задания разностных уравнений применяется линейная интерполяция в направлении оси x или оси y . Например, в точке с номером 0 уравнение имеет вид

$$v_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} v_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \varphi_1, \quad (12)$$

где ρ_1 — расстояние от точки 0 до точки 1 на границе Γ , в которой берется заданное значение функции φ , обозначенное через φ_1 ;
 v_0, v_2 — неизвестные в точках 0, 2; $\rho_2 = h$ — расстояние между этими точками. Здесь для простоты используется один индекс. Формула (12) означает линейную интерполяцию между точками 1, 2 в точку 0. Аналогично разностные уравнения

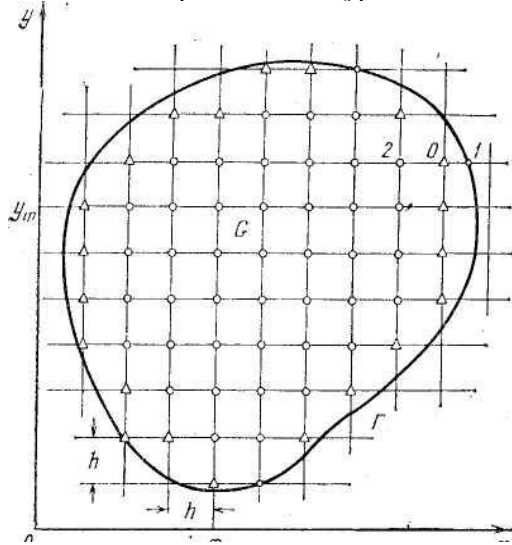


Рис. 4.

задаются в остальных узлах, обозначенных треугольниками. При этом расстояния от точки, в которую производится интерполяция, до обеих крайних точек не должны превышать h и одна или обе крайние точки должны лежать на границе Γ . Уравнения (11), имеющие более подробную запись (3*), разрешим относительно v_{km} :

$$v_{km} = \frac{v_{k-1,m} + v_{k+1,m} + v_{k,m-1} + v_{k,m+1}}{4} + \frac{h^2}{4} f_{km}. \quad (13)$$

Итак, в каждом узле, обозначенном кружком, задано уравнение (13), а в каждом узле, отмеченном треугольником, уравнение имеет вид (12). Общее число уравнений совпадает с числом неизвестных. Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение v , для нахождения которого могут быть применены методы простых итераций и Зейделя, изложенные в § 21.

Если решение задачи Дирихле (9), (10) $u(x, y) \in C_4(\bar{G})$, то справедлива оценка

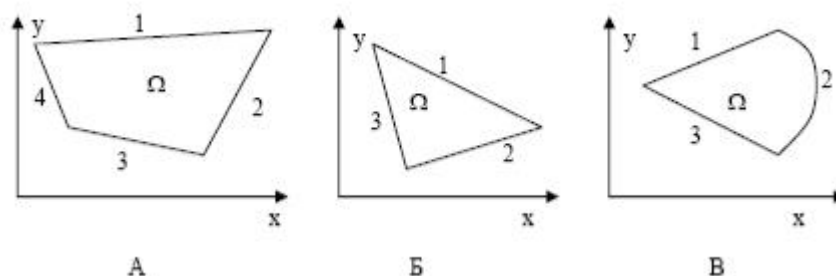
$$\max_{G_h} |u - v| = O(h^2), \quad (14)$$

где G_h — множество всех узлов, обозначенных кружками и треугольниками. Решение $u(x, y)$ принадлежит классу $C_4(\bar{G})$, например, если граница Γ обладает трижды непрерывно дифференцируемой кривизной, функция φ длины s дуги границы Γ имеет ограниченную пятую производную, а $f(x, y) \in C_3(\bar{G})$.

Задание. Решить двумерное стационарное уравнение Пуассона

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y)$$

Область Ω представляет собой либо четырехугольник (А), либо треугольник (Б), либо сектор (В).



Участки границы Γ_i обозначим номерами 1,2,3,4. На границах Γ_i заданы следующие условия:

$$q^i \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha^i U \Big|_{\Gamma^i} = \beta^i$$

Требуется в соответствии с выбранным вариантом,

1) Построить область, задав ее координатами вершин (выбрать самостоятельно).

2) Решить уравнение, используя последовательность сгущающихся сеток (три раза), проанализировать сходимость метода и погрешность решения.

х хху уу1 2 3 4 1231 2 3 **Рис.3.1** А Б В Ω Ω Ω

Варианты заданий

№	Ω	$g(x, y)$	$f(x, y)$	q_1^1	q_2^2	q_3^3	q_4^4
				α_1^1	α_2^2	α_3^3	α_4^4
				β_1^1	β_2^2	β_3^3	β_4^4

1	A	$1+x+y$	x^2+y^2	0 1 1	0 1 1	1 0.5 0.8	1 0 -0.5
2	Б	$1+x+y$	x^2+y^2	0 1 1	0 1 1	1 0.5 0.8	-
3	Б	$1+x+y$	x^2+y^2	0 1 1	0 1 1	1 0.5 0.8	-
4	A	$1+\sin^2(x+y)$	$x-y$	0 1 2	0 1 2	1 -0.2 -0.6	1 0 0.5
5	Б	$1+\sin^2(x+y)$	$x-y$	0 1 2	0 1 2	1 -0.2 -0.6	-
6	Б	$1+\sin^2(x+y)$	$x-y$	0 1 2	0 1 2	1 -0.2 -0.6	-
7	A	$1+0.5\cos(x+y)$	$x+y$	0 1 3	0 1 3	1 0.5 0.2	1 0 -0.8
8	Б	$1+0.5\cos(x+y)$	$x+y$	0 1 3	0 1 3	1 0.5 0.2	-
9	Б	$1+0.5\cos(x+y)$	$x+y$	0 1 3	0 1 3	1 0.5 0.2	-
10	A	$\exp(-(x-x_c)^2)$	$\sin(x+y)$	0 1 -1	0 1 -1	1 0.5 0.8	1 0 0.2
11	Б	$\exp(-(x-x_c)^2)$	$\sin(x+y)$	0 1 -1	0 1 -1	1 0.5 0.8	-
12	Б	$\exp(-(x-x_c)^2)$	$\sin(x+y)$	0 1 -1	0 1 -1	1 0.5 0.8	-

13	A	$1+0.5\cos(x+y)$	$\exp(-(y-y_c)^2)$	0	0	1	1
				1	1	-0.5	0
				-2	-2	-0.8	-0.2

ЗАДАНИЕ 14. Метод сеток решения волнового уравнения.

Цель выполнения задания:

- изучить метод разностных аппроксимаций для волнового уравнения составить алгоритмы решения волнового уравнения методом сеток применимыми для организации вычислений на ПЭВМ;
- составить программы волнового уравнения по разработанным алгоритмам;
- выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программ.
- получить численное решение волнового уравнения.

Краткие теоретические сведения.

Волновое уравнение

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \rho(x), \quad u'_t(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $f(x, t)$, $\rho(x)$, $q(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\rho(0) = \rho(1) = q(0) = q(1) = 0$.

Будем предполагать, что задача (1) — (3) имеет решение $u(x, t) \in C_4(\bar{D})$, $\bar{D} = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ — замкнутый прямоугольник. Это решение единственно.

Разностная схема.

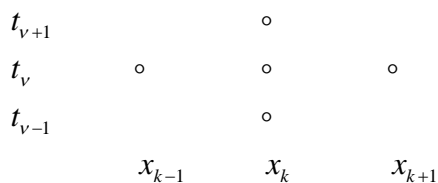


Рис. 25.

Будем использовать сетки, построенные на замкнутом прямоугольнике \bar{D} в § 31, и соответствующие обозначения сеточных функций. Заменяем в уравнении (1) частную производную u''_{tt} приближенно второй разностной производной в направлении t , частную производную — u''_{xx}

аппроксимируем с помощью разностного оператора (31.5) и, переобозначив u на y , приходим к разностному уравнению

$$\frac{y_k^{v+1} - 2y_k^v + y_k^{v-1}}{\tau^2} + \Lambda y_k^v = f_k^v, \quad (4)$$

$k = 1, 2, \dots, N-1, v = 1, 2, \dots, M-1$.

Шаблон разностного уравнения (4) показан на рис. 25. Это уравнение можно разрешить явно относительно y_k^{v+1} . Но для того, чтобы находить значения разностного решения на $(v+1)$ -м слое, требуется иметь уже вычисленные значения искомого решения на двух предыдущих слоях. Поэтому нужно получить разностное решение сначала отдельно на слоях, отвечающих значениям $v = 0$ и $v = 1$. В этом нам помогут начальные условия (2).

Прежде всего, используя первое начальное условие (2), задаем

$$y_k^0 = \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5)$$

Кроме того, полагаем при $k = 1, 2, \dots, N-1$

$$y_k^1 = \rho_k + \tau q_k + \frac{\tau^2}{2} (f_k^0 - \Lambda \rho_k). \quad (6)$$

Правая часть формулы (6) аппроксимирует многочлен

Тейлора $u(x_k, 0) + \tau u'_t(x_k, 0) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(x_k, 0)$, поскольку согласно (2)

$u(x_k, 0) = \rho_k$, $u'_t(x_k, 0) = q_k$, а из уравнения (1) для частных производных решения задачи (1) — (3) вытекает связь $u''_{tt}(x_k, 0) = f(x_k, 0) + u''_{xx}(x_k, 0)$. Для аппроксимации $-u''_{xx}(x_k, 0) = -\rho''(x_k)$ используется оператор (31.5).

Наконец, согласно краевым условиям (3) имеем

$$y_0^v = 0, \quad y_N^v = 0, \quad v = 0, 1, \dots, M. \quad (7)$$

Теперь разностная схема (4) — (7) полностью определена.

Эта схема явная трехслойная (см. шаблон на рис. 25),

условно устойчивая в некоторых естественных нормах.

Если $h \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, причем $\tau/h \leq c < 1$, $c = \text{const}$, то решение y разностной схемы (4) — (7) сходится к рассматриваемому решению u задачи (1) — (3) в следующем смысле:

$$\|u - y\|_h = O(h^2 + \tau^2). \quad (8)$$

где $\|u - y\|_h = \max_{0 \leq v \leq M} \left(h \sum_{k=1}^{N-1} (u_k^v - y_k^v)^2 \right)^{1/2}$. Схема (4) — (7) имеет

второй порядок точности и по h , и по τ .

Понятие о методе прямых. Если в задаче (1) — (3) ввести дискретность только по x , то мы приходим к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} - \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2} = f(x_k, t), \quad (9)$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1,$$

с начальными условиями

$$y_k(0) = \rho_k, \quad y'_k(0) = q_k, \quad (10)$$

причем $y_0(t) \equiv y_N(t) \equiv 0$.

При сделанном предположении относительно гладкости решения и задачи (1) — (3) имеем

$$\|u - y\|_h = O(h^2), \quad (11)$$

$$\text{где } \|u - y\|_h = \max_{0 \leq t \leq T} \left(h \sum_{k=1}^{N-1} (u(x_k, t) - y_k(t))^2 \right)^{1/2}, \quad y_1(t), y_2(t), \dots, y_{N-1}(t)$$

— решение задачи Коши (9), (10).

Данный метод называется *методом прямых*, поскольку приближенное решение задачи (1) — (3) ищется на прямых $x = x_k, k = 1, 2, \dots, N-1$, расположенных в плоскости xt .

Разностный же метод часто называется *методом сеток*.

Задание

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h .

1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 > 0,$$

$$u(0, t) = -\sin(at),$$

$$u(\pi, t) = \sin(at),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

$$u_t(x, 0) = -a \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin(x - at)$

2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 > 0,$$

$$u_x(0, t) - u(0, t) = 0,$$

$$u_x(\pi, t) - u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \sin x + \cos x,$$

$$u_t(x, 0) = -a(\sin x + \cos x).$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin(x - at) + \cos(x + at)$

3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u,$$

$$u(0, t) = \sin(2t),$$

$$u(\pi, t) = -\sin(2t),$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = 2 \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \cos x \sin(2t)$

4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u,$$

$$u_x(0, t) - 2u(0, t) = 0,$$

$$u_x(1, t) - 2u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(2x),$$

$$u_t(x, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(2x) \cos t$

5.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \exp(-x) \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = 0.5 \exp(-x) \sin x \sin(2t)$

6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2u,$$

$$u(0, t) = \cos(2t),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u_t(x, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-x) \cos x \cos(2t)$

7.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$u(0, t) = \exp(-t) \cos(2t),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u_t(x, 0) = -\exp(-x) \cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t - x) \cos x \cos(2t)$

8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3u,$$

$$u(0, t) = 0,$$

$$u(\pi, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = 2 \exp(-x) \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t - x) \sin x \sin(2t)$

9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u + \sin x \exp(-t),$$

$$u(0, t) = \exp(-t),$$

$$u(\pi, t) = -\exp(-t),$$

$$u(x, 0) = \cos x,$$

$$u_t(x, 0) = -\cos x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t) \cos x.$

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u - \cos x \exp(-t),$$

$$u_x(0, t) = \exp(-t),$$

$$u_x(\pi, t) = -\exp(-t),$$

$$u(x, 0) = \sin x,$$

$$u_t(x, 0) = -\sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \exp(-t) \sin x.$

Лабораторная работа №15

«Моделирование параболических уравнений в частных производных используя методы расщепления»

Цель работы: научиться строить алгоритмы для решения параболических уравнений в частных производных используя методы расщепления

Теоретическое введение.

Математическая формулировка таких задач обычно включает уравнение в частных производных параболического типа, а также постановку начальных и граничных условий.

За последние 50 лет разработано значительное количество экономических разностных схем численного решения многомерных задач математической физики, основанных на *расщеплении* пространственных дифференциальных операторов по координатным направлениям и использовании метода скалярной прогонки вдоль этих направлений.

Из экономических конечно-разностных схем, получивших наибольшее распространение, в данном разделе рассматриваются схема *метода переменных направлений* и схема *метода дробных шагов*. Все эти методы будем называть общим термином - *методы расщепления*.

Рассмотрим эти методы на примере задачи для двумерного уравнения параболического типа в прямоугольнике со сторонами ℓ_1, ℓ_2 и граничными условиями I-го рода.

Для пространственно-временной области

$\bar{G}_T = \bar{G} \times [0, T], t \in [0, T], \bar{G} = G + \Gamma, G = \ell_1 \times \ell_2$ рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad x \in (0, \ell_1), \quad y \in (0, \ell_2), \quad t > 0; \quad (5.71)$$

$$u(x, 0, t) = \varphi_1(x, t), \quad x \in [0, \ell_1], \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (5.72)$$

$$u(x, \ell_2, t) = \varphi_2(x, t), \quad x \in [0, \ell_1], \quad y = \ell_2, \quad t > 0; \quad (5.73)$$

$$u(0, y, t) = \varphi_3(y, t), \quad x = 0, \quad y \in [0, \ell_2], \quad t > 0; \quad (5.74)$$

$$u(\ell_1, y, t) = \varphi_4(y, t), \quad x = \ell_1, \quad y \in [0, \ell_2], \quad t > 0; \quad (5.75)$$

$$u(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad x \in [0, \ell_1], \quad y \in [0, \ell_2], \quad t = 0. \quad (5.76)$$

Введем пространственно-временную сетку с шагами h_1, h_2, τ соответственно по переменным x, y, t :

$$\omega_{h_1 h_2}^t = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, I}; x_j = jh_2, j = \overline{0, J}; t^k = k\tau, k = 0, 1, 2, \dots\} \quad (5.77)$$

и на этой сетке будем аппроксимировать дифференциальную задачу (5.71)-(5.76) методом конечных разностей.

Метод переменных направлений

В схеме метода переменных направлений (МПН), как и во всех методах расщепления, шаг по времени τ разбивается на число независимых пространственных переменных (в двумерном случае - на два). На каждом дробном временном слое один

пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно (по соответствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогоны), остальные явно. На следующем дробном шаге следующий по порядку дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а остальные – явно и т.д. В двумерном случае схема метода переменных направлений для задачи (5.71)-(5.76) имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}) + \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{ij-1}^k) + f_{ij}^{k+1/2}, \quad (5.78)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}) + \frac{a}{h_2^2} (u_{ij+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij-1}^{k+1}) + f_{ij}^{k+1/2}. \quad (5.79)$$

В подсхеме (5.78) на первом дробном шаге $\tau/2$ оператор $a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ аппроксимируется неявно, а оператор $a \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – явно (в результате весь конечно-разностный оператор переменной y переходит в правые части, поскольку u_{ij}^k известно). С помощью скалярных прогонок в количестве, равном числу $J-1$, в направлении переменной x получаем распределение сеточной функции $u_{ij}^{k+1/2}$, $i = \overline{1, I-1}$, $j = \overline{1, J-1}$ на первом временном полушаге $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$.

В подсхеме (5.79) оператор $a \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ аппроксимируется неявно на верхнем временном

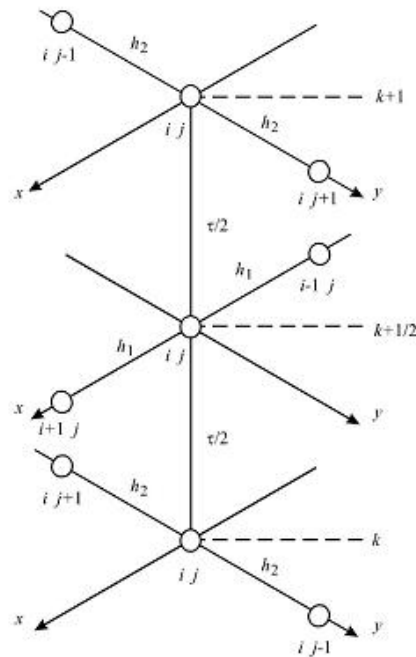


Рис. 5.7 Шаблон схемы метода переменных направлений

слое $t^{k+1} = (k+1)\tau$, а оператор $a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – явно в момент времени $t^{k+1/2} = t^k + \tau/2$ (конечно-разностный аналог этого оператора переходит в правые части). С помощью скалярных прогонок в направлении переменной y в количестве, равном числу $J-1$, получаем распределение сеточной функции u_{ij}^{k+1} , $i = \overline{1, I-1}$, $j = \overline{1, J-1}$ на втором полушаге $t^{k+1} = t^{k+1/2} + \tau/2$. Шаблон схемы МПН представлен на рис. 5.7.

Можно показать, что в двумерном случае схема МПН абсолютна устойчива. К достоинствам метода

переменных направлений можно отнести высокую точность, поскольку метод имеет второй порядок точности по времени. К недостаткам можно отнести условную устойчивость по числу пространственных переменных больше двух. Кроме этого, МПН условно устойчив в задачах со смешанными производными уже в двумерном случае.

Метод дробных шагов

В отличие от МПН метод дробных шагов (МДШ) использует только неявные конечные разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанные производные. Он обладает довольно значительным запасом устойчивости и в задачах со смешанными производными.

Для задачи (5.71) - (5.76) схема МДШ имеет вид

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{a}{h_1^2} (u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}) + \frac{f_{ij}^k}{2}, \quad (5.80)$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau} = \frac{a}{h_2^2} (u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}) + \frac{f_{ij}^{k+1}}{2}. \quad (5.81)$$

С помощью чисто неявной подсхемы (5.80) осуществляются скалярные прогонки в направлении оси x в количестве, равном $J-1$, в результате чего получаем сеточную функцию $u_{ij}^{k+1/2}$. На втором дробном шаге по времени с помощью подсхемы (5.81) осуществляются скалярные прогонки в направлении оси y в количестве, равном $I-1$, в результате чего получаем сеточную функцию u_{ij}^{k+1} . Шаблон схемы МДШ приведен на рис.7.2.

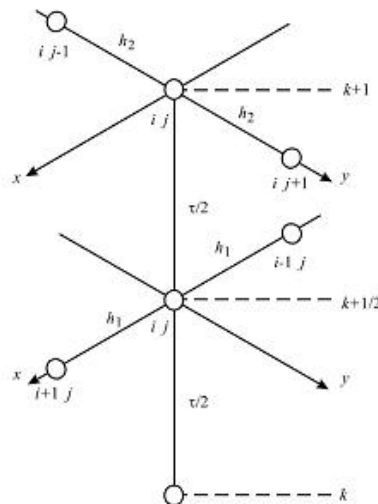


Рис.5.8. Шаблон схемы метода дробных шагов

Схема МДШ имеет порядок $O(\tau + |h|^2)$, т.е. первый порядок по времени и второй – по переменным x и y .

В литературе МДШ называют также методом координатного расщепления и локально-одномерным методом.

К достоинствам схемы МДШ можно отнести простоту в алгоритмизации и программировании, абсолютную устойчивость с большим запасом устойчивости даже для задач, содержащих смешанные производные.

К недостаткам МДШ относятся следующие: на каждом дробном шаге достигается частичная аппроксимация, полная аппроксимация достигается на последнем дробном шаге, т.е. имеет место суммарная аппроксимация; схема имеет первый порядок точности по времени.

Задание

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа для прямоугольной пластины. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y .

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(\pi, y, t) = (-1)^{\mu_1} \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, \pi, t) = (-1)^{\mu_2} \cos(\mu_1 x) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y).$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at).$$

$$1). \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1.$$

$$2). \quad \mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 1.$$

$$3). \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 2.$$

2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y, t\right) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}, t\right) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y).$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at).$$

$$1). \mu_1 = 1, \mu_2 = 1.$$

$$2). \mu_1 = 2, \mu_2 = 1.$$

$$3). \mu_1 = 1, \mu_2 = 2.$$

3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cosh(y) \exp(-3at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{4}, y, t\right) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = \frac{5}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \cosh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \cosh(y) \exp(-3at).$

4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cosh(y) \exp(-3at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{4}, y, t\right) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \cosh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \cosh(y) \exp(-3at).$

5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y, t\right) = -\sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \sinh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \sinh(y) \exp(-3at).$

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u_x\left(\frac{\pi}{4}, y, t\right) = -2 \sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \sinh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \sinh(y) \exp(-3at)$.

7.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy \sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) = y \cos t,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) = x \cos t,$$

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy \cos t$.

8.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy \sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) - u_x(1, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) - u_y(x, 1, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy \cos t$.

9.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y (\mu \cos \mu t + (a + b) \sin \mu t),$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y, t\right) = \sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

- 1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.
- 2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.
- 3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.
- 4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.

10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y (\mu \cos \mu t + (a + b) \sin \mu t),$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u_x(\pi, y, t) = -\sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

- 1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.
- 2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.
- 3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.
- 4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.