ЛЕКЦИЯ 5

ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ниже рассматриваются несколько основных законов, составляющих необходимый аппарат для построения в дальнейшем статистических критериев и оценок, применяемых в математической статистике.

Для проверки статистических гипотез и построения доверительных интервалов необходимо ознакомиться с основными статистическими распределениями. Особый интерес к нормальному распределению связан, разумеется, с центральной предельной теоремой: почти всё в этом мире нормально (или близко к тому). В этой главе мы изучим новые распределения, связанные с нормальным, их основные свойства.

Нормальное распределение

Этот вид распределения является наиболее важным в связи с центральной предельной теоремой теории вероятностей: распределение суммы независимых случайных величин стремится к нормальному с увеличением их количества при произвольном законе распределения отдельных слагаемых, если слагаемые обладают конечной дисперсией. Кроме того, А.М. Ляпунов доказал, что распределение параметра стремится к нормальному, если на параметр оказывает влияние большое количество факторов и ни один из них не является превалирующим. Функция плотности нормального распределения (функция Гаусса)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty$$

– унимодальная, симметричная, аргумент x может принимать любые действительные значения.

Выясним, как будет меняться нормальная кривая при изменении параметров a и σ^2 (или σ). Если $\sigma = \text{const}$, и меняется параметр a ($a_1 < a_2 < a_3$), т.е. центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы (рис.1).

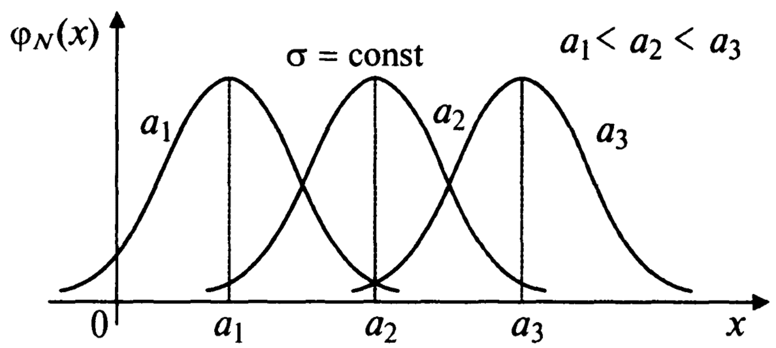


рис.1.

Если $a = \text{const}$ и меняется параметр σ^2 (или σ), то меняется ордината максимума кривой $f_{\max}(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При увеличении σ ордината максимума кривой уменьшается, но так как площадь под любой кривой распределения должна оставаться равной единице, то кривая становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ, напротив, нормальная кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков (рис.2).

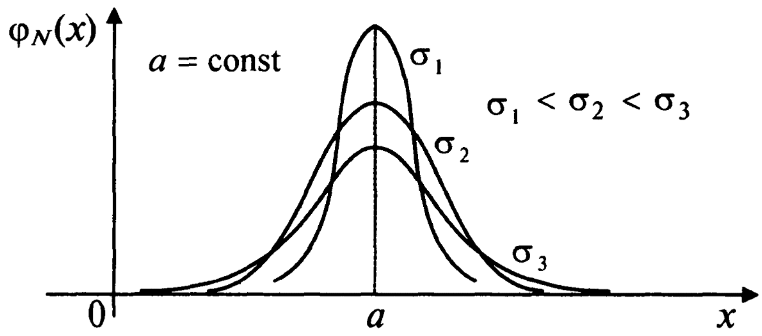


рис. 2.

Нормальный закон распределения случайной величины X с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, т.е. $X \sim N(0;1)$, называется ***стандартным*** или ***нормированным***, а соответствующая нормальная кривая — ***стандартной*** или ***нормированной***.

Функция плотности нормального распределения стандартизованной величины u имеет вид

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}, -\infty < u < +\infty.$$

Сложность непосредственного нахождения функции распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, связана с тем, что интеграл от функции Гаусса не берется в элементарных функциях. Поэтому ее выражают через функцию Лапласа (интеграл вероятностей), для которой составлены таблицы.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа Ф(x) по формуле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Вычисление значений функции распределения F(u) для стандартизованного неотрицательного аргумента u можно произвести с помощью полинома наилучшего приближения:

$$F(u) = 1 - 0{,}5(1 + 0{,}196854u + 0{,}115194u^2 + 0{,}000344u^3 + 0{,}019527u^4) - 4.$$

Такая аппроксимация обеспечивает абсолютную ошибку не более 0,00025. Для вычисления F(u) в области отрицательных значений стандартизованного аргумента (u<0) следует воспользоваться свойством симметрии нормального распределения.

Распределение χ^2 (хи-квадрат)

О п р е д е л е н и е . ***Распределением*** χ^2 ***(хи-квадрат) с k степенями свободы*** *называется распределение суммы квадратов k независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону*, т.е.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2,$$

где Z_i ($i = 1, 2, ..., k$) имеет нормальное распределение $N(0;1)$.

Функция плотности χ^2-распределения с k степенями свободы

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где x = χ^2,

где $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$ — гамма-функция Эйлера (для целых положительных значений $\Gamma(y) = (y-1)!$).

Функция плотности при k, равном одному или двум, – монотонная, а при k >2 – унимодальная, несимметричная, рис. 3.

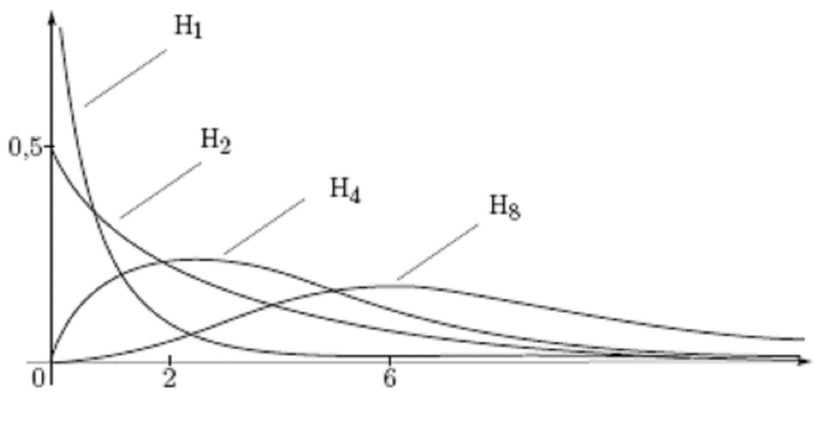


Рис. 3. Графики плотностей χ^2-распределения с различным числом степеней свободы (часто χ^2-распределение с k степенями свободы обозначается H_k)

Математическое ожидание и дисперсия величины χ^2 равны соответственно k и 2k. χ^2-распределение является частным случаем более общего гамма-распределения, а величина, равная корню квадратному из χ^2 с двумя степенями свободы, подчиняется распределению Рэлея.

С увеличением числа степеней свободы (k>30) χ^2-распределение приближается к нормальному распределению с математическим ожиданием k и дисперсией 2k (погрешность аппроксимации не превышает нескольких процентов).

При $k > 30$ распределение случайной величины $Z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2k-1}$ близко к стандартному нормальному закону, т.е. $N(0;1)$.

Распределение Стьюдента

Распределение Стьюдента (t-распределение) предложено в 1908 г. английским статистиком В. Госсетом, публиковавшим научные труды под псевдонимом Student.

Определение. ***Распределением Стьюдента*** (или ***t-распределением***) *называется распределение случайной величины*

$$t = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}},$$

где Z — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, т.е. $N(0;1)$;

χ^2 — независимая от Z случайная величина, имеющая χ^2-распределение с k степенями свободы.

Плотность вероятности распределения Стьюдента имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

Величина k характеризует количество степеней свободы. Плотность распределения – унимодальная и симметричная функция, похожая на нормальное распределение, рис. 4.

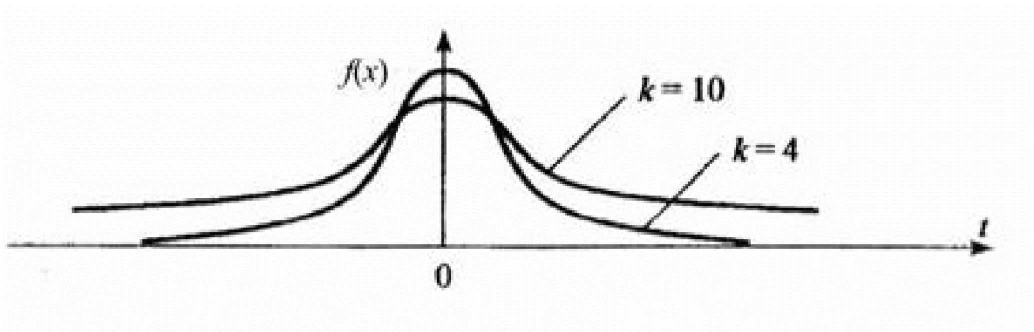
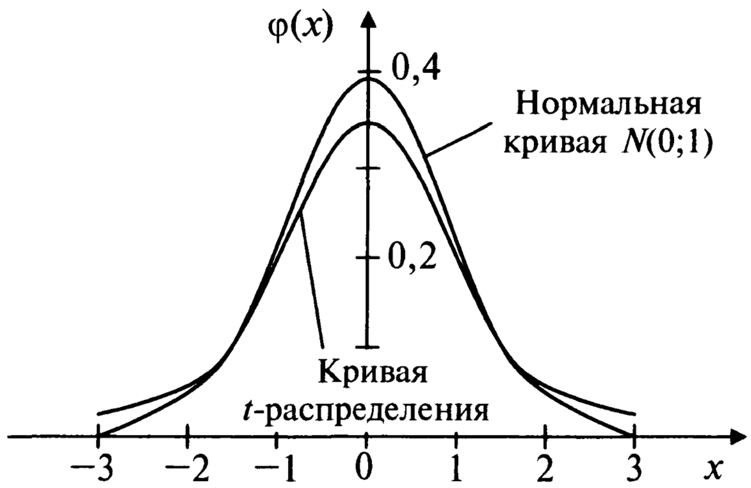


Рис. 4. Графики плотностей распределения Стьюдента с различным числом степеней свободы



где $\Gamma(y)$ — гамма-функция Эйлера в точке y.

На рис. 4.17 показана кривая распределения Стьюдента. Как и стандартная нормальная кривая, кривая t-распределения симметрична относительно оси ординат, но по сравнению с нормальной более пологая

Область изменения аргумента x от $-\infty$ до ∞. Математическое ожидание и дисперсия равны соответственно при k>2

$$M(t) = 0, \quad D(t) = \frac{k}{k-2}$$

По сравнению с нормальным распределение Стьюдента более пологое, оно имеет меньшую дисперсию. Это отличие заметно при небольших значениях k, что следует учитывать при проверке статистических гипотез. Распределение Стьюдента применяется для описания ошибок выборки при k < 30. При k, превышающем 100, данное распределение практически соответствует нормальному, для значений k из диапазона от 30 до 100 различия между распределением Стьюдента и нормальным распределением составляют несколько процентов. Поэтому относительно оценки ошибок малыми считаются выборки объемом не более 30 единиц, большими – объемом более 100 единиц.

Распределение Фишера

О п р е д е л е н и е. ***Распределением Фишера—Снедекора*** (или ***F-распределением***) *называется распределение случайной величины*

$$F = \frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)},$$

где $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$ — случайные величины, имеющие χ^2-распределение соответственно с k_1 и k_2 степенями свободы.

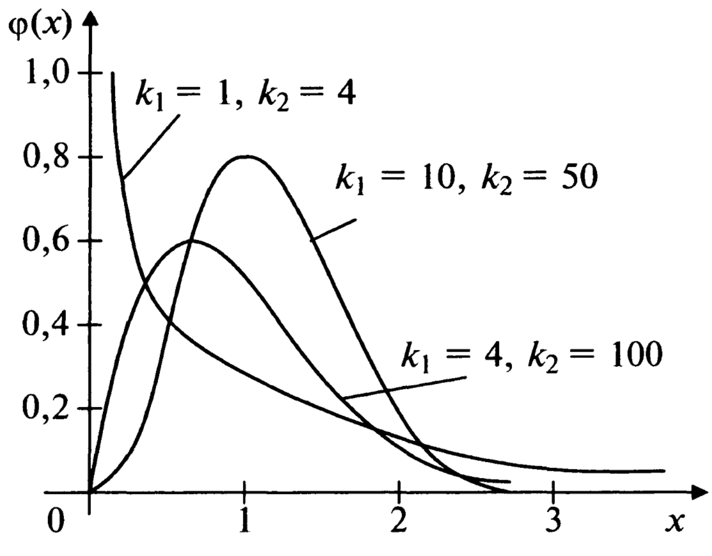
Плотность вероятности F-распределения имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{\frac{k_1}{2}}\,k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}x^{\frac{k_1}{2}-1}\left(k_1x+k_2\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}},$$

В этом выражении k_1 обозначает число степеней свободы величины с большей дисперсией, k_2 – число степеней свободы величины с меньшей дисперсией.

где $\Gamma(y)$ — гамма-функция Эйлера в точке y.

На рис. 4.18 показаны кривые F-распределения при некоторых значениях числа степеней свободы k_1 и k_2. При $n \to \infty$ F-распределение приближается к нормальному закону.



Область изменения аргумента x от 0 до ∞. Плотность распределения– унимодальная, несимметричная.

При $k_1 > 30$ и $k_2 > 30$ величина x распределена приближенно нормально с центром распределения $(k_1 - k_2)/(2\,k_1\,k_2)$ и дисперсией $(k_1 + k_2)/(2\,k_1\,k_2)$.

Виду сложных аналитических выражений для функций плотности распределения вероятностей все приведенные распределения затабулированы.

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

С теорией статистического оценивания параметров тесно связана проверка статистических гипотез. Она используется в том случае, когда необходим обоснованный вывод о преимуществах того или иного способа вложения инвестиций, об уровне доходности ценных бумаг, об эффективности лекарственных препаратов, о значимости построенной математической модели и т.д.

При изучении многих статистических данных необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен и есть основания предположить, что он имеет определенный вид (например, А), то выдвигают гипотезу: генеральная совокупность распределена по закону А. В данной гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр θ равен определенному значению θ_0, то выдвигают гипотезу: $\theta = \theta_0$. Здесь речь идет о предполагаемой величине параметра одного известного распределения. Возможны гипотезы о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и др.

Все выводы, которые делаются в МС, вообще говоря, являются гипотезами, т.е. предположениями о неизвестных параметрах известных распределений, об общем виде неизвестного теоретического распределения или функции распределения изучаемой СВ. Такие гипотезы называют статистическими гипотезами.

Различают простые и сложные, параметрические и непараметрические статистические гипотезы.

Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения СВ. Сложной называют гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, гипотезы "вероятность появления события A в схеме Бернулли равна $1/3$", "закон распределения СВ – нормальный с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$" являются простыми в отличие от сложных гипотез: "вероятность появления события A в схеме Бернулли заключена между $1/3$ и $1/2$", "закон распределения СВ не является нормальным". Гипотеза называется параметрической, если в ней содержится некоторое условие о значении параметра известного распределения. Гипотезу, в которой сформулированы предположения относительно вида распределения, называют непараметрической.

Если исследовать всю генеральную совокупность, то, естественно, можно было бы наиболее точно установить справедливость выдвигаемой гипотезы.

Однако такое исследование не всегда возможно, и суждение об истинности статистических гипотез проверяется на основании выборки.

Выдвигаемую (проверяемую) гипотезу называют основной или нулевой гипотезой H_0. Если, например, по полигону или гистограмме частот, построенным по некоторой выборке, можно предположить, что СВ распределена по нормальному закону, то может быть выдвинута гипотеза $H_0 : a = a_0, \sigma = \sigma_0$. Одновременно с гипотезой H_0 выдвигается альтернативная (конкурирующая) гипотеза H_1. Если гипотеза H_0 будет отвергнута, то имеет место конкурирующая ей гипотеза.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, являющуюся логическим отрицанием H_0. Нулевая H_0 и альтернативная H_1 гипотезы представляют собой две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез. Например, если $H_0 : \theta = \theta_0$, то альтернативная гипотеза может иметь вид $H_1 : \theta \neq \theta_0$, $H_1 : \theta > \theta_0$, или $H_1 : \theta < \theta_0$.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, в связи с чем возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку осуществляют статистическими методами, ее называют статистической проверкой или тестом.

В результате статистической проверки гипотезы неправильное решение может быть принято в двух случаях:

1) с одной стороны, на основании результатов опыта можно отвергнуть правильную гипотезу;

2) с другой – можно принять неверную гипотезу. Очевидно, последствия этих ошибок могут оказаться различными.

Отметим, что правильное решение может быть принято также в двух случаях:

1) гипотеза принимается, и она в действительности является правильной;
2) гипотеза отвергается, и она в действительности не верна.

По полученным значениям статистики основная гипотеза принимается или отклоняется. При этом, так как выборка носит случайный характер, могут быть допущены два вида ошибок:

–может быть отвергнута правильная гипотеза, в этом случае допускается ошибка первого рода,

–может быть принята неверная гипотеза, тогда допускается ошибка второго рода (см. табл. 1).

При проверке гипотезы возможны четыре варианта исходов, табл. 1.

Таблица 1.

Гипотеза H_0	Решение	Вероятность	примечание
Верна	Принимается	$1-\alpha$	Доверительная вероятность

	Отвергается ошибка I рода	α	Вероятность ошибки первого рада
Неверна	Принимается ошибка II рода	β	Вероятность ошибки второго рода
	Отвергается	$1\text{-}\beta$	Мощность критерия

О п р е д е л е н и е 1. Вероятность α совершить ошибку I рода, т.е. отвергнуть гипотезу H_0, когда она верна, называется уровнем значимости критерия.

Обычно принимают $\alpha = 0.1, 0.05, \cdots, 0.01$. Смысл α: при $\alpha = 0.05$ в 5 случаях из 100 имеется риск допустить ошибку I рода, т.е. отвергнуть правильную гипотезу.

Вероятность допустить ошибку II рода, т.е. принять гипотезу H_0, когда она неверна, обозначают β.

О п р е д е л е н и е 2. Вероятность $1-\beta$ не допустить ошибку II рода, т.е. отвергнуть гипотезу H_0, когда она ошибочна, называется мощностью критерия.

Используя терминологию статистического контроля качества продукции можно сказать, что вероятность α представляет "риск поставщика" (или "риск производителя"), связанный с вероятностью признать негодной по результатам выборочного контроля всю партию годных изделий, удовлетворяющих стандарту, а вероятность β – "риск потребителя", связанный с вероятностью принять по анализу выборки негодную партию, не удовлетворяющую стандарту. В некоторых прикладных исследованиях ошибка I рода α означает вероятность того, что сигнал, предназначенный наблюдателю, не будет принят, а ошибка II рода β – вероятность того, что наблюдатель примет ложный сигнал.

Для проверки справедливости нулевой гипотезы H_0 используют специально подобранную СВ K, точное или приближенное распределение которой известно. Эту СВ K, которая служит для проверки нулевой гипотезы H_0, называют статистическим критерием (или просто критерием).

Для проверки статистической гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и получают частное (наблюдаемое) значение критерия $K_{набл}$), его значение является функцией от элементов выборки, т.е. $K_{набл} = K(x_1, x_2, \dots x_n)$.

После выбора определенного статистического критерия для решения вопроса о принятии или непринятии гипотезы множество его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества, одно из которых называется областью принятия гипотезы (или областью допустимых значений критерия), а второе – критической областью.

О п р е д е л е н и е 3. Критической областью называется совокупность значений статистического критерия K, при которых нулевую гипотезу H_0 отвергают.

О п р е д е л е н и е 4. Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений критерия) называется совокупность значений статистического критерия K, при которых нулевую гипотезу H_0 принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез. Если наблюдаемое значение $K_{набл}$ статистического критерия K принадлежит критической области, то основная гипотеза отвергается в пользу альтернативной; если оно принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.

Поскольку статистический критерий K – одномерная СВ, то все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Следовательно, и критическая область, и область принятия гипотезы – также интервалы. Тогда должны существовать точки, их разделяющие.

О п р е д е л е н и е 5. Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю и левостороннюю) и двустороннюю критические области.

О п р е д е л е н и е 6. Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$.

О п р е д е л е н и е 7. Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр} < 0$.

О п р е д е л е н и е 8. Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$.

Если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенствами $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$ или, что равносильно, $|K| > k_{кр}$.

Как найти критическую область? Пусть $K = K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – статистический критерий, выбранный для проверки нулевой гипотезы H_0, k_0 – некоторое число, $k_0 \in R$. Найдем правостороннюю критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр} > 0$. Для ее отыскания достаточно найти критическую точку $k_{кр}$. Рассмотрим вероятность $P(K > k_0)$ в предположении, что гипотеза H_0 верна. Очевидно, что с ростом k_0 вероятность $P(K > k_0)$ уменьшается. Тогда k_0 можно выбрать настолько большим, что вероятность $P(K > k_0)$ станет ничтожно малой. Другими словами, при заданном уровне значимости α можно определить критическое значение $k_{кр}$ из неравенства $P(K > k_{кр}) = \alpha$.

Критическую точку $k_{кр}$ ищут из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы H_0 вероятность того, что критерий K примет значение, большее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости α:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha. \qquad (1)$$

Для каждого из известных статистических критериев (нормального, Стьюдента, критерия Пирсона χ^2, Фишера-Снедекора, Кочрена и др.) имеются соответствующие таблицы, по которым находят $k_{кр}$, удовлетворяющее этим требованиям. После нахождения $k_{кр}$ по данным выборок вычисляют реализовавшееся (наблюдаемое) значение $K_{набл}$ критерия K. Если окажется, что $K_{набл} > k_{кр}$, (т.е. реализовалось маловероятное событие), то нулевая гипотеза H_0 отвергается. Следовательно, принимается конкурирующая гипотеза H_1. Если же $K_{набл} < k_{кр}$, то в этом случае нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу H_0. Следовательно, гипотеза H_0 принимается. Другими словами, выдвинутая статистическая гипотеза согласуется с результатами эксперимента (выборочными данными).

Левосторонняя критическая область определяется неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр} < 0$. Критическую точку $k_{кр}$ находят из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы H_0 вероятность того, что критерий K примет значение, меньшее $k_{кр}$, была равна принятому уровню значимости α:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha. \qquad (2)$$

Двусторонняя критическая область определяется неравенствами $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. Критические точки k_1, k_2 находят из требования, чтобы при условии справедливости нулевой гипотезы H_0 сумма вероятностей того, что критерий K примет значение, меньшее k_1 или большее k_2, была равна принятому уровню значимости α:

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha. \qquad (3)$$

Если распределение критерия симметрично относительно нуля, и для увеличения его мощности выбрать симметричные относительно нуля точки $-k_{кр}$ и $k_{кр}$, $k_{кр} > 0$, то $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$, и из $P(K < k_1)$ $+ P(K > k_2) = \alpha$ следует

$$P(K > k_{кр}) = \alpha/2. \qquad (4)$$

Это соотношение и служит для отыскания критических точек двусторонней критической области.

При проверке статистических гипотез возможна двойная ошибка (как I рода α, так и II рода β). Вероятности оценок I и II рода (α и β) однозначно определяются выбором критической области. Какими принципами следует руководствоваться при построении критической области?

Предположим, что используемая для проверки (тестирования) нулевой гипотезы H_0 статистика критерия $\tilde{\theta}_n$ имеет нормальный закон распределения $N(a_0;\ \sigma^2)$. В качестве критической области, отвечающей уровню значимости $\alpha = 0{,}05$, можно взять множество областей — таких, что площадь соответствующих им криволинейных трапеций под кривой распределения составляет 5/100 от общей площади под кривой распределения. Например (рис. 10.1): [I] — область больших положительных отклонений (при $\tilde{\theta}_n > \theta_{\text{кр.1}}$); [II] —

Предположим, что используемая для проверки (тестирования) нулевой гипотезы H_0 статистика критерия $\tilde{\theta}_n$ имеет нормальный закон распределения $N(a_0;\ \sigma^2)$. В качестве критической области, отвечающей уровню значимости $\alpha = 0{,}05$, можно взять множество областей — таких, что площадь соответствующих им криволинейных трапеций под кривой распределения составляет 5/100 от общей площади под кривой распределения. Например (рис. 10.1): [I] — область больших положительных отклонений (при $\tilde{\theta}_n > \theta_{\text{кр.1}}$); [II] — область больших отрицательных отклонений (при $\tilde{\theta}_n < \theta_{\text{кр.2}}$); [III] — область больших по абсолютной величине отклонений (при $\tilde{\theta}_n < \theta'_{\text{кр.3}}$, $\tilde{\theta}_n > \tilde{\theta}''_{\text{кр.3}}$); [IV] — область малых по абсолютной величине отклонений (при $\theta'_{\text{кр.4}} < \tilde{\theta}_n < \theta''_{\text{кр.4}}$) и т.д.

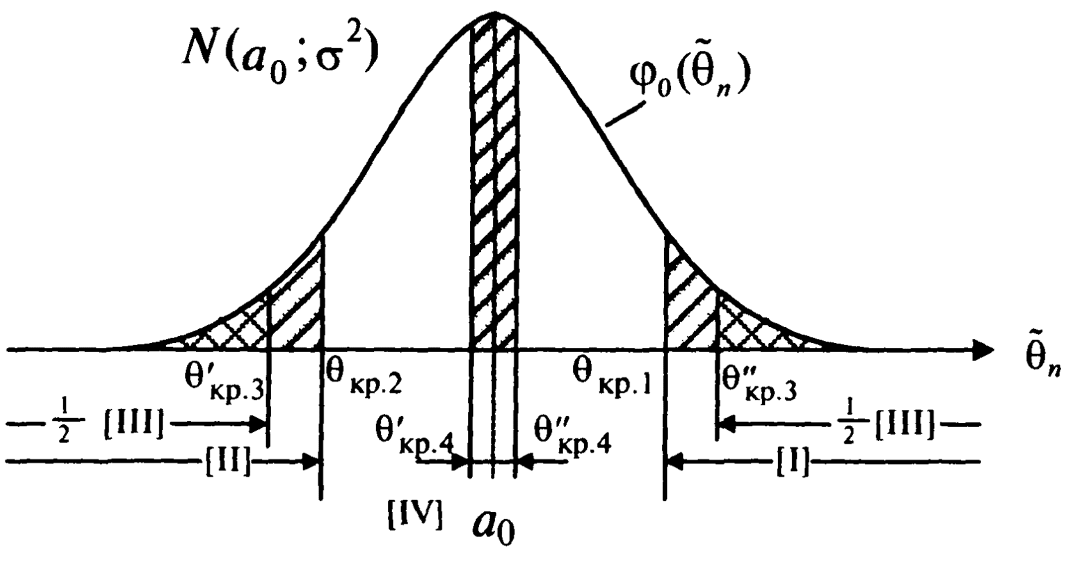


рис.1.

Какую из этих областей предпочесть в качестве критической? Возможно ли осуществить естественное желание сделать α и β сколь угодно малыми?

Рассмотрим в качестве примера выборку объёма n = 1 из нормального распределения N(a; 1) и две простые гипотезы $H_0 = \{a = 0\}$ и $H_1 = \{a = 1\}$. Рассмотрим при некотором $b \in \mathbb{R}$ следующий критерий:

$$K(x) = \begin{cases} H_0, & если \ x \le b \\ H_1, & если \ x > b \end{cases}$$

Изобразим на графике соответствующие гипотезам плотности распределений и вероятности ошибок первого и второго рода критерия соответственно

$$\alpha = \alpha_1 = P_{H_0}(x > b) \text{ и } \beta = \alpha_2 = P_{H_1}(x \le b).$$

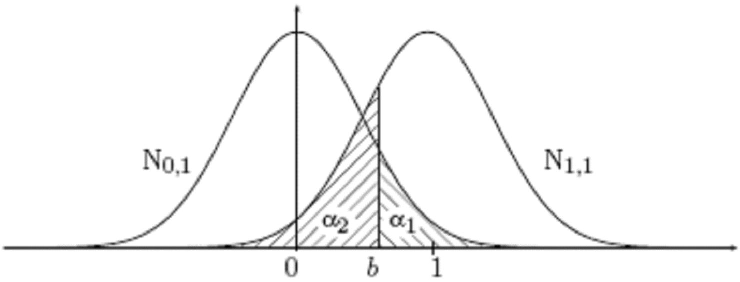


рис. 2.

Видим, что с ростом числа b вероятность ошибки первого рода $\alpha = \alpha_1$ уменьшается, но вероятность ошибки второго рода $\beta = \alpha_2$ растёт.

Естественное желание сделать α и β сколь угодно малыми являются противоречивыми требованиями, ибо при фиксированном объеме выборки можно сделать сколь угодно малой лишь одну из величин – α или β, что, как правило, сопряжено с неизбежным увеличением другой.

Одновременное уменьшение вероятностей α и β возможно лишь при увеличении объема выборки. При разработке статистических критериев необходимо пытаться уменьшить как ошибку I рода, так и ошибку II рода.

Поскольку на одной выборке одновременное уменьшение ошибок I и II рода невозможно, то при нахождении критических областей для данной статистики уровень значимости задают, стараясь подобрать такой критерий, чтобы вероятность ошибки II рода была наименьшей.

Другими словами, критическая область должна быть такой, чтобы при заданном уровне значимости α мощность критерия 1-β была максимальной.

Принцип проверки статистической гипотезы не дает логического доказательства ее верности или неверности. Принятие гипотезы H_0 в сравнении с альтернативной H_1 не означает, что мы уверены в абсолютной правильности H_0 или что высказанное в гипотезе H_0 утверждение является наилучшим, единственно подходящим; просто гипотеза H_0 не противоречит имеющимся у нас выборочным данным, таким же свойством наряду с H_0 могут обладать и другие гипотезы. Более того, возможно, что при увеличении объема выборки n либо при испытании H_0 против другой альтернативной гипотезы H_2 гипотеза H_0 будет отвергнута. Так что *принятие гипотезы H_0 следует расценивать не как раз и навсегда установленный, абсолютно верный содержащийся в ней факт, а лишь как достаточно правдоподобное, не противоречащее опыту утверждение.*

Если проверка статистических гипотез основана на предположении об известном законе распределения генеральной совокупности, из которого следует определенное распределение критерия, то критерии проверки таких гипотез называют параметрическими критериями. Если закон распределения генеральной совокупности неизвестен, то соответствующие критерии называются непараметрическими. Понятно, что непараметрические критерии обладают значительно меньшей мощностью, чем параметрические. Отсюда следует, что для сохранения той же мощности при использовании непараметрического критерия по сравнению с параметрическим необходимо иметь значительно больший объем наблюдений.

В зависимости от сущности проверяемой гипотезы и используемых мер расхождения оценки характеристики от ее теоретического значения применяют различные критерии.

К числу наиболее часто применяемых критериев для проверки гипотез о виде распределения генеральной совокупности (т.е. непараметрических критериев) относят критерии χ^2-квадрат Пирсона, Колмогорова, Мизеса, о значениях параметров – критерии Фишера, Стьюдента.