

30. Схема переменных направлений.

20. Схема переменных направлений.

(продольно-поперечная схема Писмена-Рэкфорда)

20.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где $p(x, y)$, $q(x, y)$ — достаточно гладкие функции в рассматриваемой области и такие что $0 < c_1 \leq p(x, y) \leq c_2$, $0 < d_1 \leq q(x, y) \leq d_2$, c_1 , c_2 , d_1 , d_2 — постоянные.

Обозначим $A = \max(c_2, d_2)$.

Пусть $\bar{G} = \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ — прямоугольник со сторонами l_x , l_y , Γ — его граница, $\bar{G} = G + \Gamma$.

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (3)$$

Зададим N_x и N_y — число разбиений по x и y . В области \bar{G} построим равномерную сетку $\bar{\omega}_{h_x h_y}$ с шагами $h_x = l_x/N_x$ и $h_y = l_y/N_y$

$$\bar{\omega}_{h_x h_y} = \{(x_i, y_j), \quad x_i = ih_x, \quad y_j = jh_y, \quad 0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y\}.$$

Обозначим:

$$L_1 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad L_2 u = \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4)$$

так что

$$Lu = L_1 u + L_2 u.$$

Операторы L_1 и L_2 заменим разностными операторами Λ_1 и Λ_2

$$\Lambda_1 u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x^2}, \quad \Lambda_2 u_{ij} = q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_y^2}. \quad (5)$$

Обозначим

$$\Lambda u_{ij} = \Lambda_1 u_{ij} + \Lambda_2 u_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

Пусть M — количество разбиений по t , длина частичного разбиения $\tau = T/M$ и точки разбиения $t_k = k\tau$. Обозначим $u_{ij}^k \approx u(x_i, y_j, t_k)$.

Рассмотрим вначале разностную схему, с помощью которой могла бы решаться задача (1)–(3), но на практике ее не применяют по указанным в п. 20.2 причинам.

20.2. Двухслойная схема с весами

Аппроксимируем задачу (1)-(3) разностной схемой

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \Lambda(\sigma u_{ij}^{k+1} + (1 - \sigma)u_{ij}^k) + f(x_i, y_j, t_k), \quad (6)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 0 \leq k \leq M - 1.$$

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+1} = \mu(x_i, 0, t_{k+1}), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+1} = \mu(x_i, l_y, t_{k+1}), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j, t_{k+1}), & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j, t_{k+1}), & 1 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (7)$$

При достаточной гладкости функций $u(x, y, t)$, $\mu(x, y, t)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ схема (6)-(7) аппроксимирует исходную задачу (1)-(3) с порядком $O(|h|^2 + \tau)$. Решение при $k = 0$ находится из условия (3):

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x; \quad 0 \leq j \leq N_y.$$

Рассмотрим два варианта значений параметра σ .

- а) При $\sigma = 0$ получаем явную схему и решение во внутренних узлах сетки вычисляется по формуле

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \tau(\Lambda_1 u_{ij}^k + \Lambda_2 u_{ij}^k) + \tau f(x_i, y_j, t_k), \quad (8)$$

$$i = 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad j = 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad k = 0 \leq k \leq M - 1.$$

Схема (8) условно устойчива при $\tau \leq \frac{\Lambda h^2}{4}$. Общее число действий при переходе со слоя на слой пропорционально числу узлов сетки h , т.е. $O(1/h^2)$ — схема экономичная.

- б) При $\sigma = 1$ получаем неявную схему. Она устойчива при любых h и τ . Для определения u_{ij}^{k+1} получаем на каждом слое линейную систему

$$u_{ij}^{k+1} - \tau(\Lambda_1 u_{ij}^{k+1} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1}) = u_{ij}^k + \tau f(x_i, y_j, t_{k+1}), \quad (9)$$

$$i = 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad j = 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad k = 0 \leq k \leq M - 1.$$

Матрица этой системы пятидиагональная и решать систему можно методом матричной прогонки или методом исключения Гаусса, который при учете специального вида матрицы требует $O(N_x^2 N_y^2)$ действий, т.е. схема не является экономичной.

20.3. Схема переменных направлений

Эта схема сочетает лучшие качества явной схемы — экономичность и неявной — устойчивость. Наряду с основными значениями u_{ij}^k и u_{ij}^{k+1} вводится промежуточное значение $u_{ij}^{k+1/2}$, которое формально можно рассматривать как значение при $t = t_{k+1/2} = t_k + \frac{\tau}{2}$. Решение задачи в этом случае сводится к решению двух систем с трехдиагональными матрицами вида (10)-(11).

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j, t_{k+1/2}), \quad (10)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 0 \leq k \leq M - 1.$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1} + f(x_i, y_j, t_{k+1/2}), \quad (11)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \quad 0 \leq k \leq M - 1.$$

В граничных узлах решение должно принимать заданные в (2) значения при $t = (k + \frac{1}{2})\tau$ и $t = (k + 1)\tau$, так что к системе (10) добавляются условия:

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(x_i, 0, t_{k+\frac{1}{2}}), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(x_i, l_y, t_{k+\frac{1}{2}}), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(0, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}), & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(l_x, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}), & 1 \leq j \leq N_y - 1, \end{cases} \quad (12)$$

а к системе (11) соответственно:

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+1} = \mu(x_i, 0, t_{k+1}), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+1} = \mu(x_i, l_y, t_{k+1}), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j, t_{k+1}), & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j, t_{k+1}), & 1 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (13)$$

Схема (10),(12) неявна по направлению x и явна по направлению y , а схема (11), (13) явна по направлению x и неявна по направлению y , что позволяет использовать для нахождения решения одномерные прогонки. При достаточной гладкости функций $u(x, y, t)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ схема (10)-(13) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(|h|^2 + \tau^2)$.

Система (10) может быть записана в виде

$$\overline{A}_{ij} u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} - \overline{B}_{ij} u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \overline{C}_{ij} u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} = \overline{G}_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

где

$$\overline{G}_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = -u_{ij}^k - \frac{\tau}{2} (\Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j, t_{k+1/2})), \quad 1 \leq i \leq N_x - 1; \quad 1 \leq j \leq N_y - 1; \quad 0 \leq k \leq M - 1.$$

В граничных узлах решение находим из (10). Прогонки осуществляются вдоль строк (рис. 1).

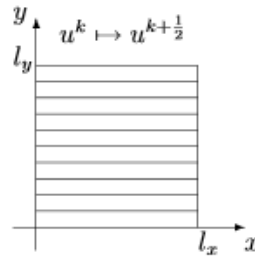


Рис. 1 3

Схема (11) может быть записана в следующем виде:

$$\overline{\overline{A}}_{ij} u_{ij-1}^{k+1} - \overline{\overline{B}}_{ij} u_{ij}^{k+1} + \overline{\overline{C}}_{ij} u_{ij+1}^{k+1} = \overline{\overline{G}}_{ij}^{k+1}, \quad (15)$$

где

$$\overline{\overline{G}}_{ij}^{k+1} = -u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} (\Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + f(x_i, y_j, t_{k+1/2})), \quad 1 \leq i \leq N_x - 1; \quad 1 \leq j \leq N_y - 1; \quad 0 \leq k \leq M - 1.$$

В граничных точках решение находим из (13). Прогонки осуществляются вдоль столбцов (рис. 2).

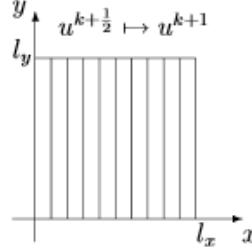


Рис. 2

Очевидно, что в простейшей задаче ($p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$, $hx = hy = h$)

$$\overline{A}_{ij} = \overline{\overline{A}}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}, \quad \overline{B}_{ij} = \overline{\overline{B}}_{ij} = \frac{\tau}{h^2} + 1, \quad \overline{C}_{ij} = \overline{\overline{C}}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}.$$

Итак, рассмотрим алгоритм метода переменных направлений.

1. Из начального условия (3) получаем решение при $k = 0$ во всех точках сетки

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y.$$

2. Полагая $k = 0$, решаем методом прогонки при каждом $1 \leq j \leq N_y - 1$ систему (10) при граничных условиях

$$\begin{cases} u_{0j} = \mu(0, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}), \\ u_{N_x j} = \mu(l_x, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Решение при $j = 0$ и $j = N_y$ находится из граничных условий (12). Тем самым найдено решение $u_{ij}^{\frac{1}{2}}$ на промежуточном слое $\frac{1}{2}$ во всех точках сетки.

3. Полагая $k = 0$ решаем методом прогонки при каждом $1 \leq i \leq N_x - 1$ систему (11) при граничных условиях

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0, t_{k+1}), \\ u_{iN_y} = \mu(x_i, l_y, t_{k+1}). \end{cases}$$

Решение при $i = 0$ и $i = N_x$ находится из граничных условий (13). Тем самым найдено решение u_{ij}^1 на слое $k = 1$ во всех точках сетки.

4. Вычислив характеристики полученного решения, увеличиваем номер слоя на единицу ($k = k + 1$) и повторяем пункты 2 и 3 пока номер слоя не достигнет заданного значения или не будет выполнен другой критерий окончания счета.

31. Схемы расщеплений по пространственным переменным.

Основой построения рассматриваемых схем является разбиение расчета на одном шаге по времени, т.е. перехода от k -ого к $(k + 1)$ -ому слою на отдельные этапы. Такие схемы называют **схемами расщепления** или **схемами дробных шагов**. Они сохраняют преимущества как явных схем (простой вычислительный алгоритм), так и неявных (возможность счета с большими значениями шага по времени) и лишены присущих этим схемам недостатков.

Одной из таких схем, используемых для решения задач с двумя пространственными переменными, является *схема переменных направлений* (в литературе можно встретить также название *продольно-поперечная схема*). Суть этой схемы состоит в том, что шаг по времени τ делится на два полушага. Первый из них проводится со слоя k до промежуточного слоя $t = t_k + \tau/2$, который обозначается полуцелым индексом $k + 1/2$. Второй полушаг проводится со слоя $k + 1/2$ до слоя $k + 1$.

На первом полушаге вторая производная по одной из координат, например $\nabla^2 U / \nabla x^2$, аппроксимируется на слое $k + 1/2$, а вторая производная по другой координате, $\nabla^2 U / \nabla y^2$, - на слое k :

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2}. \quad (2.84)$$

Получившееся разностное уравнение приводит к неявной схеме для нахождения значений $u_{ij}^{k+1/2}$. На втором полушаге, наоборот, приводящая к неявной схеме аппроксимация используется только по направлению y , т. е. $\nabla^2 U / \nabla y^2$ аппроксимируется на слое $k + 1$, а $\nabla^2 U / \nabla x^2$ - по-прежнему на слое $k+1/2$:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1/2} - 2u_{ij}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2}. \quad (2.85)$$

Таким образом, вместо разностного уравнения (2.82) в чисто неявной схеме мы получили два уравнения, каждое из которых, по существу, соответствует неявной схеме по одному из координатных направлений.

Уравнения (2.84), (2.85) можно переписать в виде систем линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций соответственно в узлах $(k + 1/2)$ -ого и $(k + 1)$ -ого слоев:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_{i-1,j}^{k+1/2} - (1 + 2\lambda_1) u_{ij}^{k+1/2} + \lambda_1 u_{i+1,j}^{k+1/2} = \\ = (2\lambda_2 - 1) u_{ij}^k - \lambda_2 (u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k), \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 u_{i,j-1}^{k+1} - (1 + 2\lambda_2) u_{ij}^{k+1} + \lambda_2 u_{i,j+1}^{k+1} = \\ = (2\lambda_1 - 1) u_{ij}^{k+1/2} - \lambda_1 (u_{i+1,j}^{k+1/2} + u_{i-1,j}^{k+1/2}), \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\lambda_1 = \tau / (2h_1^2), \quad \lambda_2 = \tau / (2h_2^2), \quad i = 1, 2, \dots, I - 1, \quad j = 1, 2, \dots, J - 1.$$

К этим системам уравнений необходимо добавить начальные условия в виде (2.81), а также граничные условия на каждом из этих дробных по времени шагов.

Матрицы систем (2.86) и (2.87) трехдиагональные, и для решения этих систем может быть использован метод прогонки. При этом сначала необходимо решить систему уравнений (2.86), из которой находятся значения сеточной функции $u_{ij}^{k+1/2}$. Эти значения используют затем для вычисления искомых значений u_{ij}^{k+1} из системы (2.87).

Заметим, что диагональные элементы матриц систем (2.86) и (2.87) преобладают, поэтому выполняются условия устойчивости прогонки.

Это также обеспечивает существование и единственность решения данных систем, т.е. разностного решения. Приведенная схема переменных направлений безусловно устойчива, она сходится со скоростью $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$.

Как уже отмечалось, рассмотренная схема весьма эффективна для случая двух пространственных переменных. Однако на случай трех и более переменных она непосредственно не обобщается.

Рассмотрим другой тип схем — *локально-одномерные схемы*. Их построение основано на введении на каждом шаге по времени промежуточных этапов, на каждом из которых записывается одномерная аппроксимация по одному из пространственных направлений. Многомерная задача «расщепляется» на последовательность одномерных задач по каждой из координат. Поэтому такие схемы называют *схемами расщепления по координатам*.

Заметим, что в подобных схемах отсутствует аппроксимация на каждом промежуточном этапе, т.е. на промежуточных этапах используемые одномерные разностные схемы не аппроксимируют исходное уравнение. Здесь имеет место лишь суммарная аппроксимация на слоях с целыми номерами. Погрешности аппроксимаций промежуточных слоев при суммировании уничтожаются. Такие схемы с суммарной аппроксимацией называются *аддитивными*.

Схема расщепления по координатам для двумерного уравнения теплопроводности может быть записана в виде

$$\frac{\tilde{u}_{ij} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1^2},$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - \tilde{u}_{ij}}{\tau} = \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2},$$

$$i = 1, 2, \dots, I-1, \quad j = 1, 2, \dots, J-1.$$

Она фактически представляет собой двукратную неявную схему для одномерного уравнения теплопроводности: на первом этапе находятся вспомогательные значения \tilde{u}_{ij} , на втором — искомые значения сеточной функции u_{ij}^{k+1} . Получающиеся системы уравнений имеют трехдиагональные матрицы и могут быть решены с помощью метода прогонки. Схема безусловно устойчива, она сходится со скоростью $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau)$.

Из построения локально-одномерной схемы ясно, что она легко обобщается на случай произвольного числа переменных. При этом каждая новая переменная требует введения одного промежуточного этапа на каждом шаге по времени.

Другая группа методов расщепления основана на расщеплении задачи по физическим процессам. На каждом шаге по времени исходная сложная задача, описывающая некоторый физический процесс при наличии нескольких влияющих на него факторов, расщепляется на более простые задачи.

В настоящее время имеется несколько *схем расщепления по физическим процессам* в вычислительной аэродинамике. Например, при исследовании течений сжимаемого газа каждый шаг по времени можно проводить в два этапа. На первом из них определяется изменение параметров течения под влиянием только давления без учета процессов переноса. Второй этап состоит в пересчете полученных на первом шаге промежуточных результатов с учетом процессов переноса. Изложение вопросов, связанных с построением указанных схем, можно найти в специальной литературе.

32. Редукция краевой задачи к вариационной задаче.

33. Метод Ритца.

Самым универсальным и во многих случаях единственным способом нахождения минимума функционала общего вида $J[u]$ является **метод Ритца**. Чаще всего этот метод реализуется следующим образом. Выбираем в области определения $R(L)$ оператора L (например, в классе дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям) некоторой **базис**, т.е. набор функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$, обладающих **свойством полноты**: любая функция $u(x)$ из области решений может быть представлена в виде

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x).$$

Будем искать приближение к функции, доставляющей минимум функционала $J[u]$ в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x).$$

После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$$

в функционал $J[u]$ получим функцию N переменных:

$$F(a_1, a_2, \dots, a_N) = J[u^N] = J\left[\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)\right].$$

Неизвестные значения коэффициентов разложения a_1, a_2, \dots, a_N искомого решения по функциям базиса будем находить из условия

$$\min_{a_1, \dots, a_n} F(a_1, a_2, \dots, a_N).$$

Таким образом, задача вариационного исчисления сводится к нахождению минимума функции N переменных.

Алгоритмы решения этой задачи для небольшого числа N хорошо разработаны. Для случая квадратичных функционалов с линейным дифференциальным

оператором Lu , нахождение a_1, a_2, \dots, a_N сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующим образом. После подстановки

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$$

получим

$$F = \left(L \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x), \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x) \right) - 2(f, \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_k a_i (L\varphi_k, \varphi_i) - 2 \sum_{i=1}^N a_i (f, \varphi_i).$$

Воспользуемся необходимым условием минимума и составим N уравнений вида

$$\frac{\partial F(a_1, \dots, a_N)}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^N a_k (L\varphi_k, \varphi_i) - 2(f, \varphi_i) = 0; \quad i = 1 \dots N.$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений для нахождения a_k может быть переписана в виде

$$(L \sum a_k \varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \text{ или } (Lu^N, \varphi_i) = (f, \varphi_i),$$

то есть можно заметить, что эта система получается из исходной краевой задачи простой подстановкой u^N вместо u и последующим умножением скалярно на каждую функцию базиса. Ввиду того, что такое скалярное произведение называется проекцией на базисную функцию, то полученная система носит название **системы проекционных уравнений**. В наиболее общем случае при построении проекционной системы уравнений выбирают два базиса $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\}$ и $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_N(x)\}$ и некоторый дифференциальный оператор K и проецируют исходную краевую задачу на систему функций $K\psi_i$:

$$\left(L \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k, K\psi_i \right) = (f, K\psi_i); \quad i = 1 \dots N.$$

Как видим, получение определяющих уравнений совершенно не связано с необходимостью предварительного получения функционала, а обоснование сходимости полученного решения u^N к u следует из теоремы о сходимости к нулю невязки

$$r_n(x) = Lu^N - f,$$

если равны нулю ее проекции на базисные функции:

$$(r_n, K\psi_i) = 0.$$

Впервые идею такого решения ДУ (не обращаясь к вариационной задаче) предложил в 1915 г. Б.Г. Галеркин. В зависимости от выбора в функций φ_i, ψ_i и оператора K эти методы имеют свои названия:

метод Бубнова-Галеркина:

$$K = I \quad (\text{тождественный}),$$

$$K = I \quad \psi_i = \varphi_i, \varphi_i \in R(L),$$

оператор L может быть несимметричным и необязательно положительно определенным.

метод Галеркина-Петрова:

$$K = I, \varphi_i \neq \psi_i, \varphi_i \in R(L), \psi_i \in H(L).$$

$H(L)$ - область значений оператора L , и L - имеет ограниченный обратный оператор L^{-1} ;

метод наименьших квадратов:

$$K = L, \psi_i = \varphi_i,$$

при условии существования ограниченного оператора L^{-1} доказана сходимость метода;

метод моментов:

$$K \neq I, \psi_i = \varphi_i$$

При выполнении условий на оператор K вида

$$(Lu, Ku) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \quad \text{и} \quad (Lu, Ku) \geq \beta^2 \|Ku\|^2 \quad \text{доказана сходимость метода.}$$

Следует отметить, что в каждом конкретном случае от выбора удачной модификации проекционного метода зависит эффективность решения задачи

1 Метод Ритца

Выделяют два основных типа методов решения вариационных задач. К первому типу относятся методы, сводящие исходную задачу к решению дифференциальных уравнений. Эти методы очень хорошо развиты и им будет посвящено основное время на лекциях. Альтернативой являются так называемые прямые методы. Эти методы тем или иным способом решают исходную задачу по поиску функции в заданном классе которая доставляла бы экстремальное значение заданному функционалу. Один из самых популярных методов этого класса — метод Ритца (также называемый методом Рэлея-Ритца).

В основе метода Ритца лежит построение минимизирующей последовательности функций. Пусть, например, необходимо найти минимум функционала $V[y]$ в классе функций M . Чтобы задача имела смысл, потребуем, чтобы существовал конечный инфимум μ значений функционала и в классе допустимых функций существовали функции, на которых функционал принимает конечные значения. Тогда по определению инфимума существует минимизирующая последовательность функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n] = \mu .$$

Если существует предел y^* этой последовательности, она и будет решением исходной задачи, так как будет закончен предельный переход

$$V[y^*] = \lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n] .$$

Каким же образом строится эта минимизирующая последовательность в методе Ритца? Сначала изложим общую идею, а потом рассмотрим ее конкретную реализацию для одного типа вариационных задач. Итак, сначала необходимо выбрать некоторую систему функций, которую мы назовем базисной:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

К функциям φ_n выдвигаются два требования. Во-первых, сами эти функции принадлежат классу M , а во-вторых — любая конечная линейная комбинация этих функций вида

$$y_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$$

принадлежит тому же классу M . Исходная задача заменяется следующей:

$$\min_{c_1, \dots, c_n} V[c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n]$$

Решая эту задачу известными (из курса «Методов оптимизации», например) методами, получаем некоторое минимальное значение μ_n . Поскольку при увеличении числа составляемых мы только расширяем множество функций, на котором ищется минимум, будет справедлива цепочка неравенств $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_n \geq \mu_{n+1} \geq \dots$. Можно доказать, что при некоторых условиях эта последовательность значений сходится к μ .

Теорема. Если функционал $V[y]$ непрерывен (в смысле метрики пространства, в котором он рассматривается) и система функций φ_n полная, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu ,$$

где μ — минимум функционала $V[y]$.

Замечание. Быстрота сходимости метода Рунца сильно зависит от выбора системы базисных функций. Однако при удачном выборе для достижения приемлемой точности часто бывает достаточно 3-4 слагаемых в линейной комбинации.

Применим изложенную идею к достаточно часто встречающейся вариационной задаче. Итак, пусть необходимо минимизировать значение функционала

$$V[y] = \int_0^1 \left[p(x) (y'(x))^2 + q(x) y^2(x) - 2f(x) y(x) \right] dx$$

на множестве функций $M = \left\{ y(x) \mid y(x) \in C_{[0,1]}^2, y(0) = y(1) = 0 \right\}$. Зафиксируем теперь некоторую конечную систему линейно-независимых функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, которые удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Вместо исходной задачи будем решать значительно более узкую задачу минимизации функционала на множестве линейных комбинаций

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x).$$

Подставим эту линейную комбинацию в функционал:

$$\begin{aligned} V[\varphi(x)] &= V \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right] = \\ &= \int_0^1 \left\{ p(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'(x) \right]^2 + q(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right]^2 - 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right\} dx. \end{aligned}$$

Чтобы найти минимум функционала, воспользуемся необходимым условием экстремума:

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Дифференцирование функционала по c_j дает

$$\frac{\partial V}{\partial c_j} = \int_0^1 \left\{ 2p(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + 2q(x) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \varphi_j(x) - 2f(x) \varphi_j(x) \right\} dx.$$

После очевидных преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов линейной комбинации:

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 (p(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) dx \right] c_i - \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

В матричной форме эта система запишется в виде $Ac = b$, где

$$a_{ij} = \int_0^1 (p(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) dx,$$

$$b_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

Рассмотрим теперь вопрос выбора базисных функций.

1.1 Кусочно-линейный базис

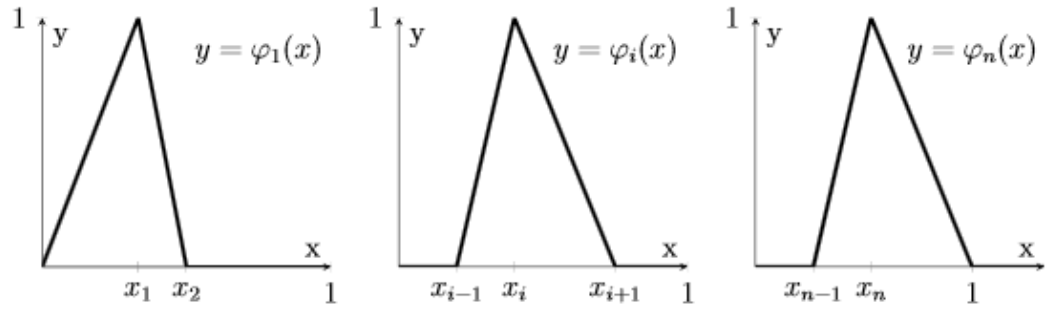
Простейшим вариантом выбора базиса является система кусочно-линейных функций. Чтобы ее построить, необходимо вначале задать разбиение отрезка $[0, 1]$ на n отрезков:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1 .$$

Полагая $h_i = x_{i+1} - x_i$, определим следующие функции:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}(x - x_{i-1}), & \text{если } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ \frac{1}{h_i}(x_{i+1} - x), & \text{если } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{если } x_{i+1} < x < 1 . \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}$$

Ниже на рисунке приведены схематические графики этих базисных функций.



Производные базисных функций будут кусочно-постоянными функциями и их нетрудно найти:

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{если } x_{i-1} < x \leq x_i, \\ -\frac{1}{h_i}, & \text{если } x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{если } x_{i+1} < x < 1 . \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}$$

Поскольку i -ая функция отлична от нуля только на промежутке $(x_{i-1}, x_{i+1}]$, то справедливы равенства

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'_i(x)\varphi'_j(x) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad j \neq i-1, j \neq i, j \neq i+1.$$

Последнее означает, что матрица системы уравнений для c_j при таком выборе базисных функций будет трехдиагональной. А именно, ненулевыми будут элементы:

$$\begin{aligned} a_{i,i+1} &= \int_0^1 [p(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+1}(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)] dx = \\ &= -\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx + \underbrace{\left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x)dx}_{I_{1,i}}, \quad i = \overline{1, n-1} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= \int_0^1 \left[p(x) (\varphi'_i(x))^2 + q(x) \varphi_i^2(x) \right] dx = \\
&= \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx + \left(\frac{1}{h_i} \right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx + \\
&+ \underbrace{\left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 q(x) dx}_{I_{2,i}} + \underbrace{\left(\frac{1}{h_i} \right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx}_{I_{3,i}}, \quad i = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{i,i-1} &= \int_0^1 \left[p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_{i-1}(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_{i-1}(x) \right] dx = \\
&= - \underbrace{\left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx}_{I_{4,i}} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} \right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) (x - x_{i-1}) q(x) dx, \quad i = \overline{2, n},
\end{aligned}$$

Столбец правых частей будет состоять из элементов вида

$$b_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx = \underbrace{\frac{1}{h_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x) dx}_{I_{5,i}} + \underbrace{\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x) dx}_{I_{6,i}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Используя введенные выше обозначения для некоторых интегралов, эти же выражения можно кратко записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{ii} &= I_{4,i} + I_{4,i+1} + I_{2,i} + I_{3,i}, \quad i = \overline{2, n}, \\
a_{i,i+1} &= -I_{4,i+1} + I_{1,i}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\
a_{i,i-1} &= -I_{4,i} + I_{1,i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \\
b_i &= I_{5,i} + I_{6,i}, \quad i = \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Итак, чтобы построить трехдиагональную систему линейных уравнений, необходимо вычислить $6n$ интегралов. Для некоторых задач это можно сделать аналитически, но чаще приходится прибегать к численным методам интегрирования (например, можно использовать правило Симпсона, см. Приложение А).

Запишем теперь формальный алгоритм метода Рунге с кусочно-линейным базисом.

Метод Ритца

Решение задачи $\mathcal{A}u = f$ эквивалентно поиску минимума функционала $I[u] = (\mathcal{A}u, u) - 2(u, f)$ в том случае, если \mathcal{A} — самосопряженный $((\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}v))$ и положительно определенный $((\mathcal{A}u, u) > 0)$ линейный оператор в гильбертовом пространстве \mathbb{H} . Введем последовательность конечномерных пространств \mathbb{V}_n с базисными функциями $\{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$. Будем искать приближение $u_n \in \mathbb{V}_n$ к искомому решению u так, чтобы оно доставляло минимум функционалу $I[u]$ в \mathbb{V}_n . Будем искать u_n в виде

$$u_n = \sum_{j=1}^n y_j \varphi_j,$$

тогда функционал $I[u_n]$ в \mathbb{V}_n будет иметь вид

$$\begin{aligned} I[u_n] &= \left(\mathcal{A} \sum_{j=1}^n y_j \varphi_j, \sum_{k=1}^n y_k \varphi_k \right) - 2 \left(\sum_{l=1}^n y_l \varphi_l, f \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n y_j y_k (\mathcal{A} \varphi_j, \varphi_k) - 2 \sum_{l=1}^n y_l (\varphi_l, f) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} y_j y_k - 2 \sum_{l=1}^n \beta_l y_l, \end{aligned}$$

где $\alpha_{j,k} = (\mathcal{A} \varphi_j, \varphi_k)$; $\beta_l = (\varphi_l, f)$, причем $\alpha_{j,k} = \alpha_{k,j}$, поскольку \mathcal{A} — самосопряжен. Учитывая этот факт получаем для y_i n уравнений

$$\frac{\partial I[u_n]}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j - \beta_i = 0.$$

Построим методом Ритца разностную схему для задачи

$$(ku')' - qu = -f(x), x \in [0, 1], u(0) = u(1) = 0.$$

Т.е. $\mathcal{A}u = -(ku')' + qu$.

Примечание. В случае, если $u(0) = a, u(1) = b$ сделаем замену переменных $v(x) = u(x) + \xi x + \psi$ и потребуем $v(0) = 0, v(1) = 0$, т.е. $u(0) + \psi = 0$ и $u(1) + \xi + \psi = 0$. В результате $\psi = -a, \xi = a - b$ и $v(x) = u(x) + (a - b)x - a$. Подставляя $u(x) = v(x) + (b - a)x + a$ в исходный оператор получаем эквивалентную краевую задачу

$$\mathcal{A}v = (kv')' - qv = -f(x) + (a - b)k' + q((b - a)x + a), x \in [0, 1], v(0) = v(1) = 0.$$

В качестве базисных выберем следующие функции

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, x \leq x_{i-1} \text{ или } x \geq x_{i+1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h}, x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, x_i < x < x_{i+1} \end{cases} \quad \varphi'_i(x) = \begin{cases} 0, x \leq x_{i-1} \text{ или } x \geq x_{i+1} \\ \frac{1}{h}, x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{1}{h}, x_i < x < x_{i+1} \end{cases}.$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$\alpha_{ij} = \int_0^1 (-(k\varphi_i')' + q\varphi_i) \varphi_j dx = -(k\varphi_i'\varphi_j)|_0^1 + \int_0^1 (k\varphi_i'\varphi_j' + q\varphi_i\varphi_j) dx.$$

$$\alpha_{ii} = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (k\varphi_i')' \varphi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q\varphi_i^2 dx = -(k\varphi_i)|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} k\varphi_i' dx = \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} k dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} k dx \right].$$

$$\alpha_{i,i-1} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (k\varphi_i')' \varphi_{i-1} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q\varphi_i\varphi_{i-1} dx = \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) k' dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x - x_i) q dx \right]$$

$$\alpha_{i,i+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (k\varphi_i')' \varphi_{i+1} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q\varphi_i\varphi_{i+1} dx = \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1}) k' dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})(x - x_i) q dx \right]$$

Если $|i - j| \geq 2$, то $\alpha_{ij} = 0$.

$$\beta_i = \int_0^1 \varphi_i f dx = \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x) f(x) dx \right].$$

$$\alpha_{i,i-1}y_{i-1} + \alpha_{ii}y_i + \alpha_{i,i+1}y_{i+1} = \beta_i, i = 1, \dots, N-1.$$

Задача. При каких c для решения задачи применим метод Рунта?

$$\frac{d^2u}{dx^2} + cu = f(x); x \in [0, 1]; u(0) = u(1) = 0.$$

Решение. Условия применимости метода Рунта: 1) самосопряженность $((\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v))$ и 2) положительная определенность $((\mathcal{L}u, u) \geq 0)$ дифференциального оператора $\mathcal{L}u = -u'' - cu$.

$$1. (\mathcal{L}u, v) = \int_0^1 \left(-\frac{d^2u}{dx^2} - cu \right) v = \left[-\frac{du}{dx} v \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - c \int_0^1 uv dx = \left[-u \frac{dv}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 u \frac{d^2v}{dx^2} dx - c \int_0^1 uv dx = (u, \mathcal{L}v). \text{ Т.е. оператор является самосопряженным для } \forall c.$$

2. Решение дифференциальной задачи $u = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \tilde{u}$ — ограниченная на отрезке $[0, 1]$ функция (\tilde{u} — частное решение неоднородной задачи). Разложим ее в ряд Фурье

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos \pi k x + b_k \sin \pi k x].$$

Поскольку рассматриваются функции для которых $u(0) = u(1) = 0$, то $a_k = 0, k = 0, \dots, +\infty$ и решение следует искать в виде

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin \pi k x.$$

$$\mathcal{L}u = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k (\pi^2 k^2 - c) \sin \pi k x.$$

Т.к. $\int_0^1 \sin \pi kx \sin \pi jx dx = \delta_{j,k}$, то $(\mathcal{L}u, u) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\pi^2 k^2 - c) b_k^2$. Поскольку коэффициенты ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю, то условие положительной определенности: $c < \pi^2$.

Метод Ритца — прямой метод нахождения приближительного решения [краевых задач](#) вариационного исчисления. Метод назван в честь [Вальтера Ритца](#), который предложил его в [1909 году](#)^[1].

Метод предусматривает выбор пробной функции, которая должна минимизировать определенный функционал, в виде суперпозиций известных функций, которые удовлетворяют граничным условиям. Тогда задача сводится к поиску неизвестных коэффициентов суперпозиции. Пространственный оператор в операторном уравнении, который описывает краевую задачу, должен быть линейным, симметрическим и положительно-определенным.

Метод Ритца часто причисляют к проекционным, наряду с методами Галёркина.

34.МКЭ в одномерном случае двухточечная краевая задача.

Лекция 5. МКЭ в одномерном случае

Метод конечных элементов на примере двухточечной краевой задачи будет излагаться в течение трех лекций, причем в них будет применяться сквозная нумерация формул, лемм и теорем.

Двухточечная краевая задача

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) \cdot u(x) = f(x), \quad x \in \Omega = (0, 1), \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du(1)}{dx} = 0 \text{ – краевые условия,} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p(x) &\in C^1[0, 1]: 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1; \\ q(x) &\in C[0, 1]: 0 \leq q_0 \leq q(x) \leq q_1; \\ f(x) &\in C[0, 1] \subset L_2(0, 1) \text{ – заданные функции.} \end{aligned} \quad (3)$$

Область определения оператора L : $D(L) = \{v \in C^2[0, 1]: v(0) = v'(1) = 0\}$.

Симметричность оператора L :

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_0^1 (-[pu']' + qu) \cdot v \, dx = -[pu'] \cdot v \Big|_0^1 + \int_0^1 (p \cdot u' v' + q \cdot u v) \, dx = \\ &= \int_0^1 (u' \cdot [p v'] + q \cdot u v) \, dx = u \cdot [p v'] \Big|_0^1 + \int_0^1 u \cdot (-[p v']' + q \cdot u v) \, dx = (u, Lv). \end{aligned}$$

Положительная определенность оператора L :

$$(Lv, v) = \int_0^1 (p |v'|^2 + q |v|^2) \, dx \geq p_0 \int_0^1 |v'|^2 \, dx \geq \frac{p_0}{c} \int_0^1 |v|^2 \, dx \equiv \gamma \|v\|^2,$$

где $c > 0$ – постоянная обобщенного неравенства Фридрихса:

$$\int_0^1 |v|^2 \, dx \leq c \cdot \left(\int_0^1 |v'|^2 \, dx + |v(0)|^2 \right).$$

$c = 2$, так как, интегрируя по x от 0 до 1 левую и правую части неравенств

$$\begin{aligned} [v(x)]^2 &\equiv [v(0) + \int_0^x v'(y) \, dy]^2 \leq 2 \cdot v^2(0) + 2 \cdot \left[\int_0^x v'(y) \, dy \right]^2 \leq \\ &\leq 2 \cdot v^2(0) + 2x \cdot \int_0^x [v'(y)]^2 \, dy \leq 2 \cdot [v^2(0) + \int_0^1 [v'(y)]^2 \, dy], \end{aligned}$$

получим $\int_0^1 |v|^2 dx \leq 2 \cdot (\int_0^1 |v'|^2 dx + |v(0)|^2)$.

Энергетическое пространство оператора $A = L : D(L) \subset L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1)$

– пополнение H_A линейного множества $D(L)$ в норме $\|v\|_A = \sqrt{(v,v)_A}$, где

$$(u,v)_A = (Lu,v) = \int_0^1 (p \cdot u'v' + q \cdot uv) dx \quad \forall u,v \in D(L), \quad (4)$$

– функции из $W_2^1(0,1)$, равные нулю при $x = 0$ (главное краевое условие) и принимающие любое значение при $x = 1$ (естественное краевое условие).

Лемма 1. В $H_A = \{v \in W_2^1(0,1) : v(0) = 0\}$ нормы $\|v\|_A = \sqrt{(v,v)_A}$ и

$$\|v\|_1 = \sqrt{\int_0^1 (|v'(x)|^2 + |v(x)|^2) dx}$$
 эквивалентны:

$$\gamma_0 \cdot (v,v)_1 \leq (v,v)_A \leq \gamma_1 \cdot (v,v)_1 \quad \forall v \in H_A$$

$$\gamma_0 = p_0 / 2, \quad \gamma_1 = \max\{p_1; 1 + q_1\}.$$

Док-во. Легко убедиться в справедливости следующих выкладок $\forall v \in H_A$.

$$\begin{aligned} (v,v)_A &= \int_0^1 (p \cdot |v'|^2 + q \cdot |v|^2) dx \geq p_0 \cdot \int_0^1 |v'|^2 dx = \\ &= \frac{p_0}{2} \cdot \int_0^1 |v'|^2 dx + \frac{p_0}{2} \cdot \int_0^1 |v'|^2 dx \geq \frac{p_0}{2} \cdot \int_0^1 |v'|^2 dx + \frac{p_0}{2c} \cdot \int_0^1 |v|^2 dx, \end{aligned}$$

где $c = 2$ – постоянная обобщенного неравенства Фридрихса.

$$\text{Следовательно, } (v,v)_A \geq \frac{p_0}{2} \cdot [\int_0^1 |v'|^2 dx + \int_0^1 |v|^2 dx], \text{ т.е. } \gamma_0 = p_0 / 2.$$

Далее,

$$\begin{aligned} (v,v)_A &= \int_0^1 (p \cdot |v'|^2 + q \cdot |v|^2) dx \leq p_1 \cdot \int_0^1 |v'|^2 dx + (1 + q_1) \cdot \int_0^1 |v|^2 dx \leq \\ &\leq \max\{p_1; 1 + q_1\} \cdot [\int_0^1 |v'|^2 dx + \int_0^1 |v|^2 dx], \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \gamma_1 = \max\{p_1; 1 + q_1\},$$

что и требовалось доказать.

Проекционная формулировка задачи (1) – (2):

$$u \in H_A : (u, v)_A = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx \equiv f(v) \quad \forall v \in H_A. \quad (5)$$

Лемма 2. $\forall f \in L_2(0,1)$ функционал $f(v) = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx$ линейен и ограничен в $H_A = \{v \in W_2^1(0,1) : v(0) = 0\}$. **(Доказать.)**

Приближенная проекционная задача:

$$u^{(n)} \in V_n : (u^{(n)}, v)_A = \int_0^1 f \cdot v dx \equiv f(v) \quad \forall v \in V_n, \quad (6)$$

где $V_n \subset H_A$ – n –мерное подпространство.

По лемме Вишика–Сea (лекция 4) $\|u - u^{(n)}\|_A = \inf_{v \in V_n} \|u - v\|_A$, т.е. размерность и само подпространство V_n нужно выбирать так, чтобы решение u задачи (5) можно было приблизить с заданной точностью функцией из V_n .

Подпространство кусочно–линейных восполнений

Лемма 3. Функция $v \in H_A = \{v \in W_2^1(0,1) : v(0) = 0\}$ непрерывна.

Док–во.

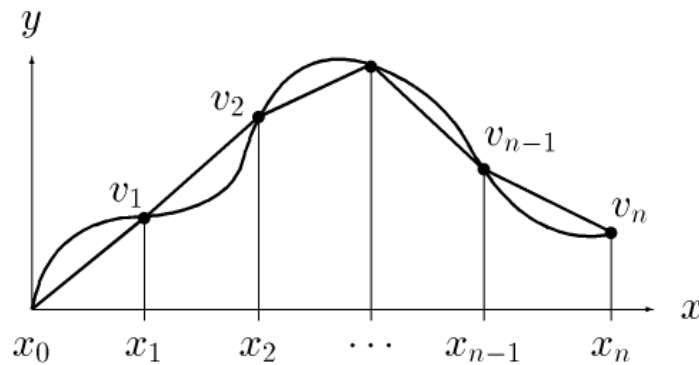
$$\forall x \in [0,1] \quad |v(x)| = \left| \int_0^x v'(x) dx \right| \leq \sqrt{x} \cdot \sqrt{\int_0^x |v'(x)|^2 dx} \leq \frac{1}{p_0} \|v\|_A$$

$\Rightarrow \|v\|_{C[0,1]} \leq p_0^{-1} \|v\|_A$, тогда фундаментальная в H_A последовательность будет фундаментальной в $C[0,1]$, следовательно ее предел – непрерывная функция.

Разобьем интервал $[0, 1]$ на n частей (элементов) узлами $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, на каждом элементе $[x_k, x_{k+1}]$ функцию $v(x) \in H_A$ приблизим линейной функцией:

$$\tilde{v}(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h_{k+1}} v(x_k) + \frac{x - x_k}{h_{k+1}} v(x_{k+1}), \quad h_{k+1} = x_{k+1} - x_k. \quad (7)$$

Очевидно, что $\tilde{v}(x)$ непрерывна, суммируема в квадрате и имеет суммируемую в квадрате первую производную, т.е. $\tilde{v}(x) \in H_A$, и однозначно определяется условием $v(x_0) = 0$ и произвольными значениями $v_1 = v(x_1), \dots, v_n = v(x_n)$.



Определение. Множество таких функций называется подпространством кусочно-линейных восполнений $V_n \subset H_A$ на сетке $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$.

Теорема 1. Пусть $\tilde{v}(x)$ – кусочно-линейное восполнение на сетке

$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ функции $v(x) \in C^2[0, 1]$, тогда

$$\|v - \tilde{v}\|_1 \leq h \sqrt{1 + h^2} \cdot \|v''\|, \quad h = \max_{k=1, \dots, n} h_k. \quad (8)$$

Док-во. На каждом элементе $[x_k, x_{k+1}]$ имеем

$$|v(x) - \tilde{v}(x)|^2 = \left| \int_{x_k}^x [v(t) - \tilde{v}(t)]' dt \right|^2 \leq h_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(t) - \tilde{v}'(t)|^2 dt,$$

$$\begin{aligned} |v'(x) - \tilde{v}'(x)|^2 &= \left| \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} v'(x) dt - \frac{v(x_{k+1}) - v(x_k)}{h_{k+1}} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [v'(x) - v'(t)] dt \right|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1 \cdot \left[\int_t^x v''(z) dz \right] dt \right|^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{h_{k+1}^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1^2 dt \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\int_t^x v''(z) dz \right]^2 dt = \\
&= \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\int_t^x 1 \cdot v''(z) dz \right]^2 dt \leq \\
&\leq \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\int_t^x |v''(z)|^2 dz \right] dt \leq \\
&\leq \frac{1}{h_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[h_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2 dz \right] dt \leq \\
&\leq h_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2 dz.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(x) - \tilde{v}'(x)|^2 dx \leq h_{k+1}^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2 dz, \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v(x) - \tilde{v}(x)|^2 dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[h_{k+1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v'(t) - \tilde{v}'(t)|^2 dt \right] dx \leq \\ \leq h_{k+1}^4 \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2 dz. \end{cases}$$

Если просуммировать эти неравенства по всем ячейкам, то получим

$$\|v - \tilde{v}\|_1^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (h_{k+1}^2 + h_{k+1}^4) \int_{x_k}^{x_{k+1}} |v''(z)|^2 dz \leq h^2(1 + h^2) \|v''\|^2$$

или $\|v - \tilde{v}\|_1 \leq h\sqrt{1 + h^2} \cdot \|v''\|^2$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Последовательность подпространств $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ кусочно-линейных
восполнений на семействе сеток:

$$\omega_n \equiv \{0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} = 1\} - \text{множество узлов сетки,}$$

$$h_k^{(n)} = x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} - k\text{-й шаг сетки, } h^{(n)} = \max_k h_k^{(n)} \rightarrow 0^1,$$

предельно плотна в H_A .

¹ Верхний индекс в обозначениях узлов и шагов сетки чаще всего мы будем опускать, т.е. вместо $x_k^{(n)}$, $h_k^{(n)}$ будем использовать x_k , h_k .

Док–во. Пусть $v \in H_A$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_\varepsilon(x) \in C^2[0,1], v_\varepsilon(0) = 0: \|v - v_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon/2.$$

Пусть $n: h^{(n)}(1+h^{(n)}) \|v''_\varepsilon\| \leq \varepsilon/2$ и $\tilde{v}_{\varepsilon,n} \in V_n$ – интерполянт v_ε ,

тогда по теореме 1 имеем $\|v_\varepsilon - \tilde{v}_{\varepsilon,n}\|_1 \leq \varepsilon/2$.

Используя неравенство треугольника, получим

$$\|v - \tilde{v}_{\varepsilon,n}\|_1 \leq \|v - v_\varepsilon\|_1 + \|v_\varepsilon - \tilde{v}_{\varepsilon,n}\|_1 \leq \varepsilon,$$

т.е. $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ плотна в H_A , т.к. $\|v\|_1 \sim \|v\|_A$.

Из этой теоремы и леммы Вишика–Сеза следует

Теорема 3. Если решение задачи (5):

$$u \in H_A: (u, v)_A = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx \equiv f(v) \quad \forall v \in H_A,$$

принадлежит $W_2^2(0,1)$, то последовательность метода Галеркина (6):

$$u^{(n)} \in V_n: (u^{(n)}, v)_A = \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx \equiv f(v) \quad \forall v \in V_n,$$

где $V_n \subset H_A$ – n -мерное подпространство кусочно-линейных восполнений, сходится к нему и имеет место оценка:

$$\|u - u^{(n)}\|_1 \leq h\sqrt{1+h^2} \sqrt{\gamma_1/\gamma_0} \|u''\|, \quad (9)$$

где γ_0 и γ_1 – постоянные эквивалентности норм $\|v\|_A$ и $\|v\|_1$.

35. Пример решения одномерной задачи для стержня методом конечных элементов

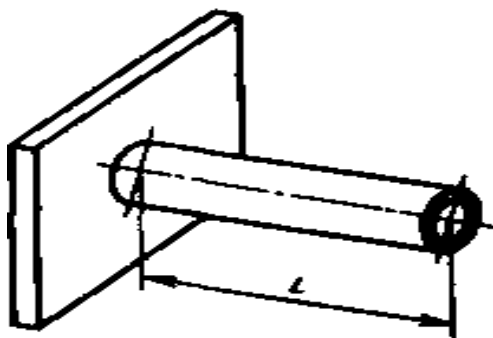


Рис. 1.1. Однородный стержень, находящийся под воздействием тепло-
теплоизолирован.

●Рассмотрим пример использования МКЭ для расчета одномерного температурного поля в неоднородном стержне. Пусть имеется стержень длиной L и площадью поперечного сечения S (рис. 1.1). Один конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток q заданной интенсивности. На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Известны коэффициент теплообмена α и температура окружающей среды T_* . Вдоль боковой поверхности стержень

Температурное поле в неоднородном стержне описывается уравнением теплопроводности, которое в одномерном приближении имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x)$$

Краевые условия определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \lambda_x (\partial u / \partial x) + q &= 0 & \text{при } x = 0; \\ \lambda_x (\partial u / \partial x) + \alpha(T - T_*) &= 0 & \text{при } x = L \end{aligned}$$

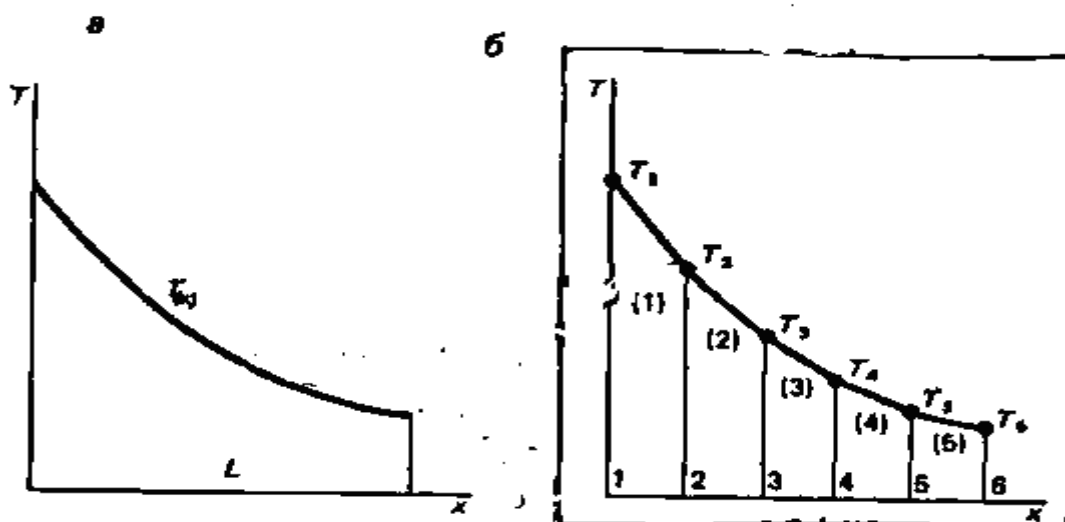


Рис. 1.2. Расчет одномерного температурного поля в однородном стержне методом МКЭ.

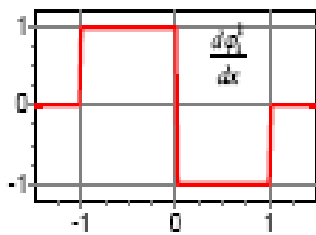
Искомое температурное поле является непрерывной функцией координаты x (рис. 1.2, а). В МКЭ стержень разбивается произвольным образом на конечные элементы, которые в данном случае являются отрезками неравной длины. На каждом элементе непрерывная функция $T(x)$ аппроксимируется некоторой линейной зависимостью, как показано на рис. 1.2,б (в скобках указаны номера элементов). Аппроксимирующая кусочно-линейная функция определяется через узловые значения $T_1 - T_6$, которые в общем случае неизвестны и подлежат определению в МКЭ. Рассмотрим реализацию МКЭ на решении простейшей задачи, :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x) \quad u(0) = \alpha; u(b) = \beta$$

Выбираем равномерную сетку $\omega_n = \{x_i = (i-1)h, i=1 \dots N=n+1\}$ и ищем решение в виде

$$u^N(x) = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k = \varphi_k^1 \left(\frac{x - (k-1)h}{h} \right).$$

Мы здесь обозначили $a_k = \bar{u}_k$. Заметим, что, $\bar{u}_1 = \alpha$, $\bar{u}_N = \beta$ в силу граничных условий. Производная от функции-крышки также финитная функция:



$$\frac{\partial \varphi_1^1}{\partial x} = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Используем проекционные уравнения -

$$\sum_{k=1}^N \left(g \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) a_k = f_i; \quad i=1 \dots N.$$

Ввиду ограниченности функций каждое i -е уравнение содержит только три члена:

$$-\bar{u}_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{g(x)}{h^2} dx + \bar{u}_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{g(x)}{h^2} dx - \bar{u}_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g(x)}{h^2} dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx.$$

Обозначим

$$g_{i-1/2} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) dx, \quad g_{i+1/2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) dx, \quad f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx.$$

Получаем конечно-разностную схему,:

$$\frac{g_{i-1/2}}{h^2} \bar{u}_{i-1} - \left(\frac{g_{i-1/2} + g_{i+1/2}}{h^2} \right) \bar{u}_i + \frac{g_{i+1/2}}{h^2} \bar{u}_{i+1} = f_i, \quad i=2 \dots n, \bar{u}_1 = \alpha, \bar{u}_N = \beta.$$

Как видим, технология МКЭ для одномерного уравнения приводит практически к той же конечно-разностной схеме с трехдиагональной матрицей, что и классический метод сеток. Имеются, однако, некоторые отличия в вычислении коэффициентов. А именно, в МКЭ коэффициенты $g_{i\pm 1/2}$ вычисляются через интегралы по соответствующим участкам сетки. Это значит, что технология МКЭ приводит к так называемым однородным

конечно-разностным схемам, т.е. таким, которые позволяют проводить расчеты ДУ с разрывными коэффициентами. Программная реализация алгоритма решения метод прогонки.

36.Конечные элементы для многомерных областей

Аналогичный подход может быть и в случае двух- и трехмерных областей определения искомой функции.

Для двумерных областей наиболее часто используются элементы в форме треугольников и четырехугольников. При этом элементы могут иметь как пря-мо, так и криволинейные границы, что позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать границу любой формы.

Для трехмерных областей наиболее употребимы элементы в форме тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь прямолинейные и (или) криволинейные границы.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов.

Э т а п 1 . Выделение конечных элементов (т. е. разбиение заданной области на конечные элементы).

Э т а п 2 . Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции $\varphi^{(e)}$ в произвольной точке (e) – го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)}R + A_0, \quad (1.3.1)$$

где $A^{(e)}$ – вектор-строка коэффициентов полинома; A_0 – свободный член; $R = (x, y, z)$ – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора $A^{(e)}$ и свободного члена A_0 . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор $\hat{O}^{(e)}$ узловых значений функции и координаты узлов. Проведя эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)}\hat{O}^{(e)}, \quad (1.3.2)$$

где $N^{(e)}$ – матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Э т а п 3 . Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (1.3.2), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = N\hat{O}. \quad (1.3.3)$$

Система (1.3.3) является моделью искомой непрерывной функции.

Этап 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор \hat{O} в (1.3.3) вначале неизвестен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора \hat{O} . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих этапов:

Этап 1. Выбор функционала F , зависящего для стационарных задач от искомой функции φ и ее частных производных $\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z$, по вектору пространственных координат:

$$F = \int_V f(\varphi, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z) dV, \quad (1.3.4)$$

где V – объем заданной области. Функционал F представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам V_e :

$$F = \sum_{e=1}^N F^{(e)} = \sum_{e=1}^N \int_{V^{(e)}} f(\varphi^{(e)}, \dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}) dV^{(e)}, \quad (1.3.5)$$

где N – число элементов.

Этап 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (1.3.2) в (1.3.5) и вычисление производных $\dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}$ по формулам вида

$$\dot{\varphi}_x^{(e)} = \partial \varphi^{(e)} / \partial x = (\partial N^{(e)} / \partial x) \hat{O}^{(e)}.$$

Этап 3. Минимизация по вектору \hat{O} функционала F . Для этого составляются уравнения

$$\partial F^{(e)} / \partial \hat{O}^{(e)} = 0. \quad (1.3.6)$$

Суммирование выражений (1.3.6) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

$$K\hat{O} = B, \quad (1.3.8)$$

где K – матрица коэффициентов, так называемая, – матрица жесткости; B – вектор нагрузки.

Этап 4. Решение системы (1.3.8), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

Найденные значения вектора \hat{O} подставляют в (1.3.3), после чего значение функции φ легко вычисляется в любой точке заданной области.

Каждый из четырех этапов приведенного алгоритма МКЭ при реализации в САПР обладает особенностями, которые подробно рассматриваются ниже.

Разбиение области на элементы

Выделение конечных элементов. Разбиение области на элементы – важный этап в МКЭ. От качества разбиения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие

результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы. Возможность легко варьировать размерами элементов – важное свойство МКЭ (последнее позволяет без труда учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т. д.). Разбиение области на элементы обычно начинают от ее границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится разбиение внутренних областей. Часто разбиение области на элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на достаточно крупные подобласти (под конструкции), границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать. На рис. 1.3 приведен пример разбиения двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

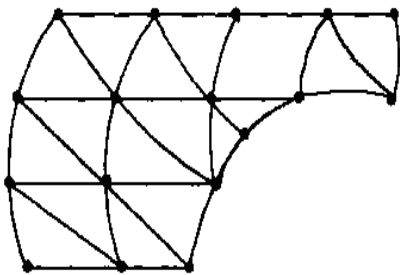


Рис. 1.3. Разбиение двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов)

– следующая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумерации имеет в данном случае существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений. Дело в том, что матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, – сильно разреженная матрица ленточной структуры.

Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали. Целое число L , представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется шириной полосы. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем ОП требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затраты машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит, в свою очередь, от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних. Под числом степеней свободы понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двумерных задач гидравлики в каждом узле определяют три переменные: давление и составляющие скорости по осям X и Y .

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить N , а число степеней свободы – M , то ширина полосы равна

$$L = (N + 1)M.$$

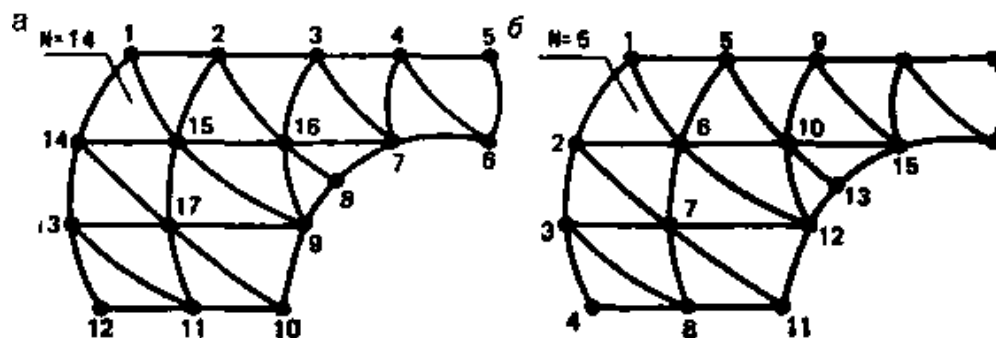


Рис. 1.4. Способы нумерации узлов при разбиении двухмерной области на конечные элементы

В некоторых случаях уменьшение числа N может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области. На рис. 1.4. приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на конечные элементы. При первом способе (рис. 1.4, а) $N=14$, при втором (рис. 1.4, б) $N=5$. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной соответственно 15 и 6; при двух степенях свободы — 30 и 12. Рациональная нумерация в случае рис. 1.4, б сокращает необходимый объем памяти почти в три раза по сравнению со случаем рис. 1.4, а.

Информация о способе разбиения области на конечные элементы и нумерации узлов является исходной для всех следующих этапов алгоритмов МКЭ при реализации метода в САПР. При этом требуется указывать не только номер, но и координаты каждого узла и его принадлежность к определенным конечным элементам. Такого рода информация называется топологической и обычно содержит примерно в 6 раз больше чисел, чем количество узлов системы.

При описании области, разбитой на конечные элементы, необходимо задавать: тип конечного элемента; его порядковый номер; номера узлов элемента; координаты узлов, информацию о соединении элементов между собой; значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Так, промышленная эксплуатация программной системы долгое время тормозилась именно сложностью подготовки исходных данных, объем которых в некоторых случаях достигал нескольких сотен тысяч.

При решении задач методом конечных элементов область определения искомой функции разбивается на несколько тысяч элементов примерно с таким же количеством узлов. В связи с этим возникают проблемы, связанные со сложностью подготовки столь большого количества исходной информации и с трудностью ее проверки и корректировки, так как при ручной подготовке такого объема исходных данных неизбежно появление ошибок.

Поэтому усилия разработчиков программ МКЭ в составе САПР в последние годы были направлены на создание подсистем автоматизированной подготовки топологической информации, основу

которых составляют специальные программы, называемые препроцессорами. Препроцессоры либо непосредственно включаются в состав программных комплексов, реализующих МКЭ, либо существуют в виде автономных программ.

Алгоритм работы препроцессора, как правило, состоит из следующих этапов:

Этап 1. Нанесение на заданную область некоторого множества узлов.

Этап 2. Формирование узловых связей с целью заполнения области конечными элементами «наилучшей» формы.

Этап 3. Нумерация узлов, минимизирующая ширину полосы в матрице коэффициентов системы уравнений.

Последняя процедура поддается алгоритмизации особенно просто и реализована практически во всех крупных программных комплексах на основе МКЭ. При автоматическом нанесении на исходную область множества узлов должен выдерживаться ряд требований. Так, узлы должны сгущаться в зонах, где ожидаются высокие концентрации напряжений или градиенты температур. При этом изменение густоты узлов не должно быть скачкообразным. Эти требования удастся обеспечить, если в качестве координат узлов брать случайные числа с заданным законом распределения. Тогда в программных реализациях координаты узлов генерируются датчиком случайных чисел. Алгоритмы формирования межузловых связей строятся на основе различных подходов. При этом в первую очередь стараются, если это возможно, использовать упрощающие предположения. Так, регулярность области, очевидно, удобно использовать для построения однородной сетки, шаг которой меняется по несложному закону. Криволинейные границы области часто аппроксимируют с помощью отрезков прямой, параболы или дуги.

В основу разбиения области произвольной формы на треугольные конечные элементы может быть положен следующий алгоритм:

Этап 1. Аппроксимация границы области совокупностью отрезков, представляемых номерами узлов.

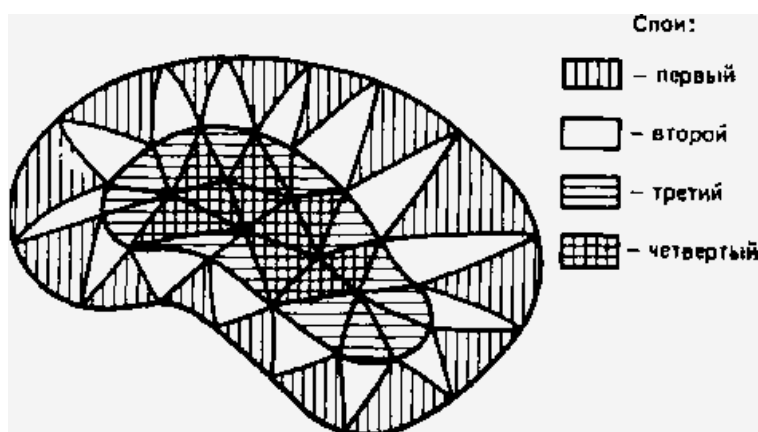


Рис. 1.5. Пример использования алгоритма автоматического разбиения произвольной области на треугольные конечные элементы.

Этап 2. Выбор вершин треугольников, основаниями которых служат полученные на этапе 1 отрезки (при этом выбор вершин разрешен только с одной вполне определенной стороны).

Этап 3. Соединение основания с выбранной вершиной отрезками, которые на следующем шаге сами будут рассматриваться как основания новых треугольников.

Алгоритм повторяется до тех пор, пока остается возможным строить новые элементы на базе проведенных отрезков, т. е. до полного заполнения области элементами.

Пример такого «послойного» заполнения области элементами приведен на рис. 1.5. При построении очередного треугольника для анализа выбираются вначале два ближайших к основанию узла с «разрешенной» стороны. На выбранных узлах строится прямоугольник. Далее проводится топологический анализ, использующий информацию об уже построенных элементах. Целью анализа является исключение возможности попадания какого-либо узла внутрь построенного треугольника. На основании анализа выбирается одна из двух возможных вершин и четырехугольник делится на треугольники одним из двух возможных способов.

Примером другого подхода к автоматическому разбиению области на элементы служит следующий алгоритм:

Этап 1. Определение граничных узлов области.

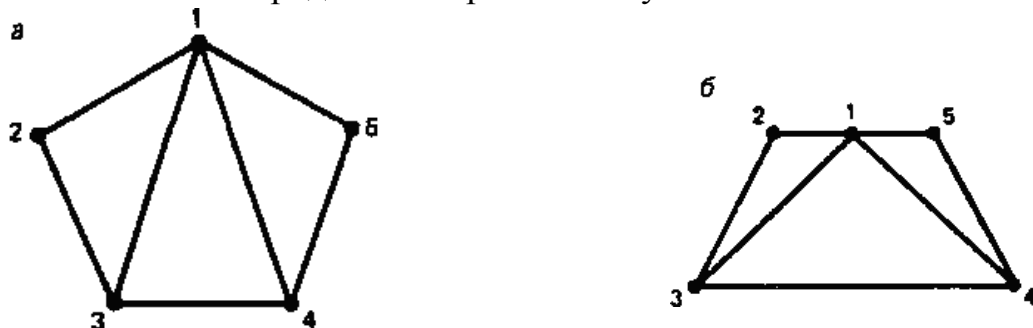


Рис. 1.6. Пример автоматического разбиения области с пятью граничными узлами на треугольные элементы: а — регулярная сетка; б — сетка в заданной области.

Этап 2. Построение регулярной сетки с тем же числом узлов, что и в заданной области.

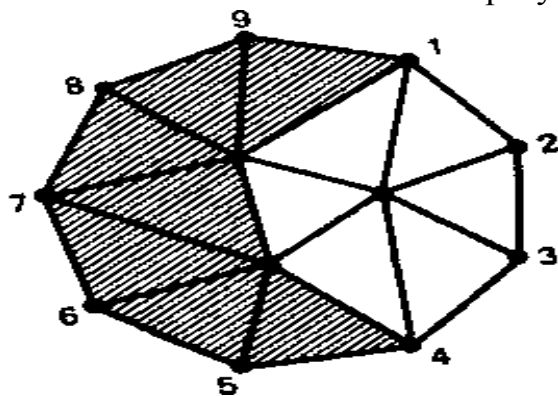
Этап 3. Использование полученной схемы соединения узлов для области произвольной формы.

На рис. 1.6 приведен пример разбиения на треугольные конечные элементы области с пятью граничными узлами.

Еще один алгоритм для построения регулярной сетки заключается в следующем:

Этап 1. Окружение исходной точки кольцом равносторонних треугольников так, чтобы число внешних узлов было предельно близким к заданному числу граничных узлов.

Этап 2. Если желаемый результат не достигнут, добавление еще одного ряда колец.



На рис. 1.7. проиллюстрировано использование приведенного алгоритма для построения регулярной сетки «наилучшего» вида для границы с девятью узлами. Полученная в результате проведенного построения схема соединения узлов позволяет получить координаты всех внутренних

Рис. 1.7 Пример использования алгоритма автоматического построения сетки наилучшего вида в области с десятью граничными узлами.

точек области. Если в результате выполнения алгоритма вид конечных элементов оказывается неудовлетворительным, то исходная область разбивается на подобласти и все повторяется сначала.

37.Аппроксимирующие функции элементов Одномерный симплекс-элемент

38.Аппроксимирующие функции элементов Двумерный симплекс-элемент

Определение аппроксимирующей функции элементов. Эту процедуру можно выполнить один раз для типичного элемента области безотносительно к его топологическому положению в ней. Полученная функция используется далее для всех остальных элементов области того же вида. Эта особенность является важным аспектом МКЭ. Благодаря ей элементы с однажды определенными функциями легко включаются в библиотеку элементов соответствующего программного комплекса. Далее эти элементы применяются для решения разнообразных краевых задач.

Выше отмечалось, что в качестве аппроксимирующих функций элементов чаще всего используются полиномы. В зависимости от степени последних конечные элементы делятся на симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы. Полиномы симплекс-элементов содержат константы и линейные члены; полиномы комплекс-элементов — константы, линейные члены, а также члены более высоких степеней. Комплекс-элементы, как правило, кроме граничных имеют дополнительные внутренние узлы. Полиномы мультиплекс-элементов также содержат члены более высоких степеней. Однако на мультиплекс-элементы накладывается дополнительно еще одно условие: их границы должны быть параллельны координатным осям.

Одномерный симплекс-элемент представляет собой отрезок, изображенный на рис. 1.8. При определении функции этого элемента для

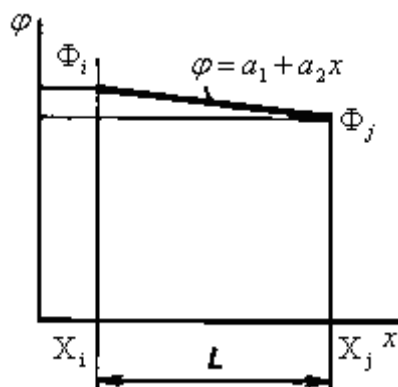


Рис. 1.8. Одномерный симплекс-элемент.

простоты будем считать, что узловые значения искомой непрерывной функции, определенные на концах отрезка, известны. По длине отрезка значение функции аппроксимируется линейным полиномом вида:

$$\varphi = a_1 + a_2 x. \quad (1.4.1)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются через узловые значения функции Φ_i , Φ_j в соответствии с условием непрерывности:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_i \text{ при } x = X_i; \\ \varphi &= \Phi_j \text{ при } x = X_j; \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Подставив (1.4.2) в (1.4.1), получим

$$\Phi_i = a_1 + a_2 X_i; \quad \Phi_j = a_1 + a_2 X_j. \quad (1.4.3)$$

Решив систему (1.4.3) относительно a_1 и a_2 получим

$$a_1 = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L; \quad a_2 = (\Phi_j - \Phi_i) / L.$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в (1.4.1), найдем

$$\varphi(x) = (\Phi_i X_j - \Phi_j X_i) / L + [(\Phi_j - \Phi_i) / L] x. \quad (1.4.4)$$

Проведя эквивалентные преобразования правой части уравнения (1.4.4), представим его в форме

$$\varphi = [(X_j - x) / L] \Phi_i + [(x - X_i) / L] \Phi_j. \quad (1.4.5)$$

Члены уравнения (1.4.5), заключенные в квадратные скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

$$N_i = (X_j - x) / L; \quad N_j = (x - X_i) / L; \quad (1.4.6)$$

С учетом обозначений (1.4.6) уравнение (1.4.4) принимает вид

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \quad (1.4.7)$$

или в матричной форме

$$\varphi = N\Phi, \quad (1.4.8)$$

где

$N = [N_i, N_j]$ - матрица-строка; $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$ вектор-столбец.

Функции формы обладают следующим свойством: функция формы с номером i равна 1 в узле с соответствующим номером и равна 0 во всех других узлах. Не представляет труда убедиться в наличии этого свойства у функций формы (1.4.6).

Двухмерный симплекс-элемент представляет собой плоский треугольник с прямолинейными сторонами, уже использовавшийся выше для дискретизации произвольной двумерной области. Интерполяционный полином, аппроксимирующий непрерывную функцию $\varphi(x)$ внутри треугольного симплекс-элемента, имеет вид

$$\varphi(x) = a_1 + a_2x + a_3y. \quad (1.4.9)$$

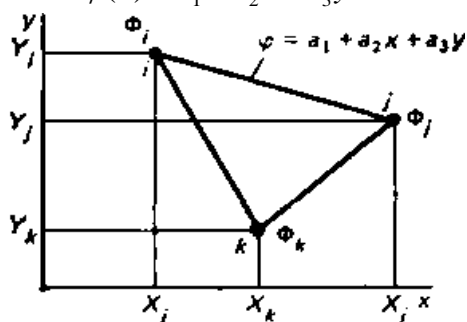


Рис. 1.9. Функция двухмерного симплекс-элемента.

Чтобы получить выражения для функций формы элемента, необходимо пронумеровать узлы треугольника. Обозначим их номерами i, j, k , начиная с произвольно выбранного узла, двигаясь при этом против часовой стрелки (рис. 1.9). Узловые значения Φ_i, Φ_j, Φ_k будем по-прежнему считать известными.

Используя условие непрерывности искомой функции в узлах аналогично предыдущему случаю, составим систему уравнений

$$\Phi_i = a_1 + a_2X_i + a_3Y_i;$$

$$\Phi_j = a_1 + a_2X_j + a_3Y_j;$$

$$\Phi_k = a_1 + a_2X_k + a_3Y_k,$$

разрешая которую относительно неизвестных коэффициентов полинома, получим:

$$\begin{aligned} a_1 &= (0,5/S)[(X_jY_k - X_kY_j)\Phi_i + (X_kY_i - X_iY_k)\Phi_j + (X_iY_j - X_jY_i)\Phi_k]; \\ a_2 &= (0,5/S)[(Y_j - Y_k)\Phi_i + (Y_k - Y_i)\Phi_j + (Y_i - Y_j)\Phi_k]; \\ a_3 &= (0,5/S)[(X_k - X_j)\Phi_i + (X_i - X_k)\Phi_j + (X_j - X_i)\Phi_k], \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

где S - площадь элемента, вычисляемая по формуле

$$S = 0,5[X_i(Y_j - Y_k) + X_j(Y_k - Y_i) + X_k(Y_i - Y_j)].$$

Подставив (1.4.10) в (1.4.9) и проделав преобразования, аналогичные предыдущему случаю, найдем

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (1.4.11)$$

где функции формы имеют вид

$$\begin{aligned} N_i &= (0,5/S)(a_i + b_i x + c_i y); \\ N_j &= (0,5/S)(a_j + b_j x + c_j y); \\ N_k &= (0,5/S)(a_k + b_k x + c_k y); \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

а

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j; & a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k; & a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i; \\ b_i &= Y_j - Y_k; & b_j &= Y_k - Y_i; & b_k &= Y_i - Y_j; \\ c_i &= X_k - X_j; & c_j &= X_i - X_k; & c_k &= X_j - X_i. \end{aligned}$$

Вычисляя значения функций формы N_i, N_j, N_k , нетрудно убедиться, что они равны 1 в узлах с соответствующими номерами и 0 в остальных узлах элемента.

Заметим, что функции (1.4.7) для одномерного и (1.4.11) для двухмерного симплекс-элементов были получены для типичных элементов безотносительно к их положению в области. Поэтому они удовлетворяют всем элементам данного типа, что, как отмечалось выше, позволяет создавать обширные библиотеки элементов в САПР.

39. Объединение конечных элементов в ансамбль

Основу этого этапа составляет замена произвольно назначенных выше номеров узлов i, j, k на номера, присвоенные узлам в процессе разбиения рассматриваемой области. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений, позволяющей при известных узловых значениях искомой функции получить значение последней в любой точке области.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов для сформулированной выше задачи о нахождении поля температур в стержне (см. рис. 1.2, а). Кусочно-элементная модель области приведена на рис. 1.2, б, а функция отдельного элемента определяется уравнением (1.4.7).

Можно написать следующее соответствие между произвольными номерами i, j , фигурирующими в уравнении (1.4.7), и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели: для

$$\text{элемента 1 } i=1; \quad j=2; \quad (1.5.1a)$$

$$\text{элемента 2 } i=2; \quad j=3; \quad (1.5.1б)$$

$$\text{элемента } 3 \quad i=3; \quad j=4; \quad (1.5.1\text{в})$$

$$\text{элемента } 4 \quad i=4; \quad j=5; \quad (1.5.1\text{г})$$

$$\text{элемента } 5 \quad i=5; \quad j=6. \quad (1.5.1\text{д})$$

Подставив значения номеров узлов (1.5.1) в (1.4.7), получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)} T_1 + N_2^{(1)} T_2; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)} T_2 + N_3^{(2)} T_3; \\ \varphi^{(3)} &= N_3^{(3)} T_3 + N_4^{(3)} T_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)} T_4 + N_5^{(4)} T_5; \\ \varphi^{(5)} &= N_5^{(5)} T_5 + N_6^{(5)} T_6; \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

В выражениях для функций формы элемента (1.4.7) значения произвольных номеров i, j также следует изменить в соответствии с (1.5.1).

Тогда значения $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$, например, определяются по формулам

$$N_3^{(2)} = (x - X_2) / L^{(2)};$$

$$N_3^{(3)} = (X_4 - x) / L^{(3)}.$$

Очевидно, что $N_3^{(2)}, N_3^{(3)}$ не равны друг другу даже в случае равенства длин элементов $L^{(2)}$ и $L^{(3)}$. При известных значениях узловых величин $T_1 - T_6$ уравнения (1.5.2) позволяют определить значение температуры в любой точке стержня.

Рассмотрим еще один пример объединения элементов двухмерной области в ансамбль, который потребуется для иллюстрации дальнейших этапов МКЭ.

Треугольная область разбита на элементы треугольной формы, как показано на рис. 1.10. Для обозначения узлов отдельных элементов по

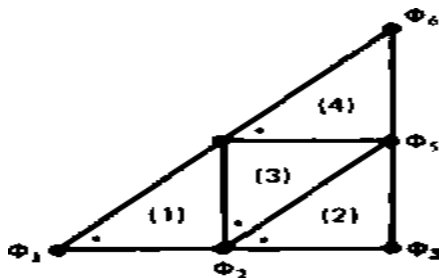


Рис. 1.10. Пример составления ансамбля конечных элементов для двухмерной треугольной области.

прежнему используются номера i, j, k , начиная с произвольного узла (на рисунке отмеченного звездочкой) против часовой стрелки. Соответствие между этими обозначениями и глобальными номерами узлов следующее:

$$\text{элемента 1 } i=1; \quad j=2; \quad k=4; \quad (1.5.3a)$$

$$\text{элемента 2 } i=2; \quad j=3; \quad k=5; \quad (1.5.3б)$$

$$\text{элемента 3 } i=2; \quad j=5; \quad k=4; \quad (1.5.3в)$$

$$\text{элемента 4 } i=4; \quad j=5; \quad k=6. \quad (1.5.3г)$$

Подставляя значения (1.5.3) и (1.4.11), получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_4^{(1)}\Phi_4; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + N_4^{(2)}\Phi_4; \\ \varphi^{(3)} &= N_2^{(3)}\Phi_2 + N_5^{(3)}\Phi_5 + N_4^{(3)}\Phi_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Аналогичную замену номеров необходимо проделать в (1.4.12) при вычислении функций формы элементов. Система (1.5.4) – сокращенная форма математического описания модели. Расширенная форма имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(1)}\Phi_4 + 0\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(2)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + 0\Phi_4 + N_4^{(2)}\Phi_4 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(3)} &= 0\Phi_1 + N_2^{(3)}\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 + N_5^{(3)}\Phi_5 + 0\Phi_6; \\ \varphi^{(4)} &= 0\Phi_1 + 0\Phi_2 + 0\Phi_3 + N_4^{(4)}\Phi_4 + N_5^{(4)}\Phi_5 + N_6^{(4)}\Phi_6, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\varphi = N\Phi. \quad (1.5.5)$$

В САПР с целью уменьшения объема памяти чаще используют сокращенную форму описания моделей (1.5.4). Расширенная форма описания моделей имеет некоторые преимущества при реализации следующих этапов алгоритма МКЭ.

40.Определение вектора узловых значений функций вариационным методом.

Для этой цели, как отмечалось выше, используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некоторого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

• Пример минимизации функционала в задаче о нахождении распределения температуры в стержне. При указанном методе минимизируется функционал:

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dV + \int_S [qT + 0,5\alpha(T - T_*)^2] dS, \quad (1.6.1)$$

где V - объем тела; S - площадь границы.

В функционал F входят оба граничных условия (1.1.1). При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать, что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно). Тогда

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \quad (1.6.2)$$

Функционал (1.6.1) удобно представить в виде

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dY + \int_{S_1} qTdS_1 + \int_{S_2} 0,5\alpha(T - T_*)^2 dS_2, \quad (1.6.3)$$

где S_1 и S_2 - площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия (1.1.1а) и (1.1.1б) соответственно.

Для вычисления объемного интеграла в (1.6.3) его необходимо разбить на две области в соответствии с принятой конечно-элементной моделью:

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dY = \int_{V_1} 0,5\lambda_x \left(\frac{du(x)^{(1)}}{dx} \right)^2 dV_1 + \int_{V_2} 0,5\lambda_x \left(\frac{du(x)^{(2)}}{dx} \right)^2 dV_2. \quad (1.6.4)$$

Производные в (1.39) вычисляются с учетом (1.6.2) :

$$du(x)^{(1)} / dx = (-T_1 + T_2) / L^{(1)}; \quad du(x)^{(2)} / dx = (-T_2 + T_3) / L^{(2)}. \quad (1.6.5)$$

Подставив (1.6.5) в (1.6.4) и считая, что $dV^{(e)} = S^{(e)} dx$, получим

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dY = 0,5 \frac{\lambda_x^{(1)} S^{(1)}}{L^{(1)}} \cdot (-T_1 + T_2)^2 + 0,5 \frac{\lambda_x^{(2)} S^{(2)}}{L^{(2)}} \cdot (-T_2 + T_3)^2. \quad (1.6.6)$$

Второе и третье слагаемые в (1.6.3) вычисляются просто, так как подынтегральным функциям соответствуют узловые значения T_1 и T_3 :

$$\int_{S_2} qTdS_1 = qT_1S_1; \quad (1.6.7)$$

$$\int_{S_2} 0,5\alpha(T - T_*)^2 dS_2 = 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2), \quad (1.6.8)$$

где S_1 и S_2 - площади поверхностей, на которых заданы q и α (для рассматриваемого примера $S_1 = S^{(1)}$ и $S_2 = S^{(2)}$).

Значение функционала F вычисляется простым суммированием выражений (1.6.7) - (1.6.8):

$$F = 0,5C^{(1)}(T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + 0,5C^{(2)}(T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + qS_1T_1 + 0,5\alpha S_2(T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2), \quad (1.6.9)$$

где

$$C^{(1)} = S^{(1)} \lambda_x^{(1)} / L^{(1)} \quad \text{и} \quad C^{(2)} = S^{(2)} \lambda_x^{(2)} / L^{(2)}.$$

Для минимизации функционала F необходимо выполнение условий

$$\partial F / \partial T_1 = C^{(1)}T_1 + C^{(1)}T_2 + qS_1 = 0;$$

$$\partial F / \partial T_2 = -C^{(1)}T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}]T_2 - qC^{(2)}T_3 = 0;$$

$$\partial F / \partial T_3 = -C^{(2)}T_2 + [C^{(2)} + \alpha S_2]T_3 - \alpha S_2 T_* = 0,$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \\ \alpha S_2 T_* \end{bmatrix}. \quad (1.6.10)$$

В общем виде (1.6.10) можно представить так: $KT = B$, что соответствует (1.18).

Примечание. Матрица коэффициентов K в (1.6.10) по-прежнему называется матрицей жесткости, хотя по физическому смыслу в данной задаче ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Такое название матрицы K пришло из строительной механики, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях.

Зная характеристики материала, из системы (1.6.10) можно определить узловые значения T_1, T_2, T_3 .

Из (1.6.9) и (1.6.10) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определенного типа в матрицу жесткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях.

Метод Галеркина — другой широко известный метод вычисления вектора узловых значений — представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этого метода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение. Поэтому метод Галеркина с успехом применяется при решении задач, для которых не удастся подобрать функционал для минимизации (например, задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье-Стокса).

Метод Галеркина основан на минимизации невязки $\varepsilon = L\tilde{u} - f$ приближенного решения \tilde{u} и исходного дифференциального уравнения $Lu - f = 0$, где L — дифференциальный оператор решаемой задачи.

Для минимизации ε в заданной области G требуется ортогональность невязки функции формы т.е. выполнение равенства $\int_G N_i \varepsilon dG = 0$ для каждой из функций N_i .

Сочетание метода Галеркина с МКЭ приводит к системе уравнений:

$$\int_G N_\beta L(\varphi) dG = 0 \text{ при } \beta = i, j, k, \dots,$$

где $L(\varphi)$ — левая часть исходного дифференциального уравнения, описывающего непрерывную функцию φ .

Технику получения разрешающей системы уравнений методом Галеркина легко проиллюстрировать на примере уже решенной выше задачи об отыскании температурного поля в однородном стержне, конечно-элементная модель которого была представлена ранее.

Применив метод Галеркина, получим:

$$\int_V N^t \lambda_x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} dV = 0 \quad (1.6.11)$$

Подставим в (1.6.11) формулу дифференцирования произведений:

$$\int_V N^t \lambda_x \frac{d^2 u(x)}{dx^2} dV = \int_V \frac{d}{dx} \left(N^t \lambda_x \frac{du(x)}{dx} \right) dV - \int_V \frac{dN^t}{dx} \lambda_x \frac{du(x)}{dx} dV \quad (1.6.12)$$

Интерполяционная функция $u(x)$ не сохраняет постоянства по длине стержня, поэтому интеграл в (1.6.12) можно представить суммой соответствующих интегралов для отдельных элементов. Тогда, второй интеграл в (1.6.12) можно представить в виде:

$$\int_V \frac{dN^t}{dx} \lambda_x \frac{dT}{dx} dV = \sum_{e=1}^2 \int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)}. \quad (1.6.13)$$

Вычислим в (1.6.13) интегралы, относящиеся к отдельным элементам:

$$\frac{dN^{(e)t}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \frac{X_j - x}{L^{(e)}} \\ \frac{x - X_i}{L^{(e)}} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (1.6.14)$$

$$\frac{du(x)^{(e)}}{dx} = \frac{d}{dx} N(x)^{(e)} T^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} [-1, 1] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} \quad (1.6.15)$$

С учетом (1.6.14) и (1.6.15)

$$\int_{V^{(e)}} \frac{dN^{(e)t}}{dx} \lambda_x^{(e)} \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{\lambda_x^{(e)}}{L^{(e)} L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} dV^{(e)}. \quad (1.6.16)$$

Первый интеграл в (1.6.12) на основании теоремы Остроградского—Гаусса преобразуется к виду:

$$\int_V \frac{d}{dx} \left(N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} \right) dV = \int_S N^t \lambda_x \frac{dT}{dx} l_x dS, \quad (1.6.17)$$

где $l_x(dT/dx) = dT/dn$; n — внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности.

С учетом краевого условия в точке $x=0$ для первого элемента интеграл (1.6.17) принимает вид:

$$\int_S N^{(1)t} \lambda_x \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} X_2 \\ L^{(1)} \\ X_1 \\ -L^{(1)} \end{bmatrix} (-q) dS. \quad (1.6.18)$$

Подставив значения $X_1 = 0$, $X_2 = L^{(1)}$ в (1.6.18), получим:

$$\int_S N^{(1)t} \lambda_x^{(1)} \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix} dS = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.6.19)$$

С учетом краевого условия в точке $x=L$ для второго элемента интеграл (1.6.17) запишется так:

$$\int_S N^{(2)t} \lambda_x^{(2)} \frac{dT^{(2)}}{dx} dS = \int_S \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-\alpha(T_3 - T_*)] dS = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-\alpha T_3 + \alpha T_*). \quad (1.6.20)$$

Просуммировав выражения вида (1.6.20) для первого и второго элементов и выражения (1.6.19) и (1.6.20) и приравняв сумму нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)}C^{(1)} & +C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)}C^{(2)} & +\alpha S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qS_1 \\ 0 \\ -\alpha S_2 T_* \end{bmatrix} = 0, \quad (1.6.21)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)} \lambda_x^{(1)} / L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)} \lambda_x^{(2)} / L^{(2)}$.

Система (1.6.21) идентична системе (1.6.10), определенной путем минимизации соответствующим образом подобранного функционала.

Завершающим шагом этапа определения вектора узловых значений Φ является решение системы линейных алгебраических уравнений.

■ Примечание. Основные особенности этого шага — большая размерность и сильная разреженность матрицы коэффициентов системы. В связи с этим для реализации МКЭ в САПР разработаны специальные способы хранения матрицы жесткости, позволяющие уменьшить необходимый для этого объем ОП. Для нахождения узловых значений функций

применяются методы преобразования и решения системы, направленные на снижение за-трат машинного времени.

41. Определение вектора узловых значений функций методом Галеркина.

^ **Определение вектора узловых значений функций.** Для этой цели используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некоторого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

Пример минимизации функционала в задаче о нахождении распределения температуры в стержне (рис. 7).

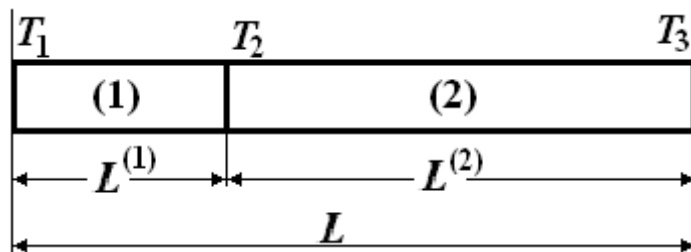


Рис. 7. Пример минимизации функционала при нахождении распределения температуры в стержне.

При указанном методе минимизируется функционал:

$$F = \int_V 0,5 \left[\frac{dT}{dx} \right]^2 dV + \int_S [qT + 0,5 \alpha (T - T_*)^2] dS \quad (13)$$

где V - объем тела; S - площадь границы.

В функционал F входят оба граничных условия (2). При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать, что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно) (рис. 12). Тогда

$$T^{(1)} = N_1^{(1)} T_1 + N_2^{(1)} T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)} T_2 + N_3^{(2)} T_3 \quad (14)$$

Функционал (13) удобно представить в виде

$$F = \int_V 0,5 \left[\frac{dT}{dx} \right]^2 dV + \int_{S_1} qT dS_1 + \int_{S_2} 0,5 \alpha (T - T_*)^2 dS_2 \quad (15)$$

где S_1 и S_2 - площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия (2 а) и (2 б) соответственно.

Для вычисления объемного интеграла в (15) его необходимо разбить на два слагаемых в соответствии с принятой конечной элементной моделью:

$$\int_V 0,5 \left[\frac{dT}{dx} \right]^2 dV = \int_{V_1} 0,5 \left[\frac{dT^{(1)}}{dx} \right]^2 dV_1 + \int_{V_2} 0,5 \left[\frac{dT^{(2)}}{dx} \right]^2 dV_2 \quad (16)$$

Производные в (16) вычисляются с учетом (14) и (8)

$$\begin{aligned} \frac{dT^{(1)}}{dx} &= (-T_1 + T_2) / L^{(1)}; \\ \frac{dT^{(2)}}{dx} &= (-T_2 + T_3) / L^{(2)} \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (17) в (16) и считая, что $dV^{(e)} = S^{(e)} dx$ получим

$$\int_V 0,5 \left[\frac{dT}{dx} \right]^2 dV = 0,5 \frac{S^{(1)}}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 + 0,5 \frac{S^{(2)}}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2$$

Второе и третье слагаемые в (15) вычисляются просто так как подынтегральным функциям соответствуют узловые значения T_1 и T_3 :

$$\begin{aligned} \int_{S_1} q T dS_1 &= q T_1 S_1; \\ \int_{S_2} 0,5 \mathcal{A} (T - T_*)^2 dS_2 &= 0,5 \mathcal{B}_2 (T_3^2 - 2T_* T_3 + T_*^2) \end{aligned}$$

где S_1 и S_2 - площади поверхностей, на которых заданы q и \mathcal{A} (для рассматриваемого примера $S_1 = S^{(1)}$ и $S_2 = S^{(2)}$).

Значение функционала F вычисляется простым суммированием последних трех выражений:

$$\begin{aligned} F &= 0,5 C^{(1)} (T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2) + 0,5 C^{(2)} (T_2^2 - 2T_2 T_3 + T_3^2) + \\ &+ q S_1 T_1 + 0,5 \mathcal{B}_2 (T_3^2 - 2T_* T_3 + T_*^2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{где } C^{(1)} = S^{(1)} \mathcal{E}^{(1)} / L^{(1)} \text{ и } C^{(2)} = S^{(2)} \mathcal{E}^{(2)} / L^{(2)}$$

Для минимизации функционала F необходимо выполнение условий:

$$\begin{aligned} \partial F / \partial T_1 &= C^{(1)} T_1 + C^{(1)} T_2 + q S_1 = 0; \\ \partial F / \partial T_2 &= -C^{(1)} T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}] T_2 - C^{(2)} T_3 = 0; \\ \partial F / \partial T_3 &= -C^{(2)} T_2 + [C^{(2)} + \mathcal{B}_2] T_3 - \mathcal{B}_2 T_* = 0 \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \mathcal{S}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -qS_1 \\ 0 \\ \mathcal{S}_2 T_* \end{pmatrix} \quad (19)$$

В общем виде (19) можно представить так: $KT = B$, что соответствует (7).

Примечание. Матрица коэффициентов K в (19) называется *матрицей жесткости*, хотя по физическому смыслу данной задачи ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Такое название матрицы K пришло из строительной механики, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях техники.

Зная характеристики материала, из системы (19) можно определить узловые значения T_1, T_2, T_3 . Из (18) и (19) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определенного типа в матрицу жесткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях.

^ **Метод Галеркина** - другой широко известный метод вычисления вектора узловых значений - представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этого метода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение. Поэтому метод Галеркина с успехом применяется при решении задач, из которых не удастся подобрать функционал для минимизации (например задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье-Стокса).

Метод Галеркина основан на минимизации ошибки $\mathcal{E} = Lu - f$ приближенного решения u исходного дифференциального уравнения $L\phi - f = 0$, где L - дифференциальный оператор.

Для минимизации \mathcal{E} в заданной области G требуется выполнение равенства $\int_G N_i \mathcal{E} dG = 0$ для каждой из функций N_i .

Сочетание метода Галеркина с МКЭ приводит к системе уравнений

$$\int_G N \mathcal{L}(\phi) dG = 0 \quad \text{при} \quad \mathcal{E} = i, j, k, \dots,$$

где $L(\phi)$ - левая часть исходного дифференциального уравнения, описывающего непрерывную функцию ϕ . Технику получения разрешающей системы уравнений методом Галеркина легко проиллюстрировать на примере задачи об отыскании температурного поля в однородном стержне (рис. 1).

Применив метод Галеркина к (1), получим

$$\int_V N' \mathcal{E} \frac{d^2 T}{dx^2} dV = 0 \quad (20)$$

Подставим в (33) формулу дифференцирования произведений:

$$\int_V N^t \epsilon_x \frac{d^2 T}{dx_2} dV = \int_V \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} N^t \end{bmatrix} \epsilon_x \frac{dT}{dx} dV - \int_V \frac{dN^t}{dx} \epsilon_x \frac{dT}{dx} dV \quad (21)$$

Интерполяционная функция T не сохраняет постоянства по длине стержня, поэтому интеграл в (21) можно представить суммой соответствующих интегралов для отдельных элементов. Так, второй интеграл в (21) можно представить в виде

$$\int_V \frac{dN^t}{dx} \epsilon_x \frac{dT}{dx} dV = \sum_{e=1}^2 \int_V \frac{dN^{(e)t}}{dx} \epsilon_x \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)}$$

Вычислим в этом уравнении интегралы, относящиеся к отдельным элементам:

$$\frac{dN^{(e)t}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} X_j - x \\ x - X_i \\ L^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\frac{dT^{(e)}}{dx} = \frac{d}{dx} N^{(e)} T^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} \quad (23)$$

С учетом (22) и (23)

$$\int_V \frac{dN^{(e)t}}{dx} \epsilon_x \frac{dT^{(e)}}{dx} dV^{(e)} = \int_V \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} dV^{(e)} = \frac{S^{(e)}}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \end{bmatrix} \quad (24)$$

Первый интеграл в (21) на основании теоремы Остроградского-Гаусса преобразуется к виду

$$\int_V \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} N^t \end{bmatrix} \epsilon_x \frac{dT}{dx} dV = \int_S N^t \epsilon_x \frac{dT}{dx} l_x dS \quad (25)$$

где $l_x (dT/dx) = dT/dn$; n - внешняя нормаль к рассматриваемой поверхности.

С учетом краевого условия (2 а) в точке для первого элемента интеграл (25) принимает вид

$$\int_S N^{(1)} \epsilon_x \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} X_2 \\ L^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ L^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q \end{bmatrix} dS \quad (26)$$

Подставив значения $X_i = 0$, $X_2 = L^{(1)}$ в (26), получим

$$\int_S N^{(1)} \epsilon_x \frac{dT^{(1)}}{dn} dS = \int_S \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q dS = \begin{bmatrix} qS \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

С учетом краевого условия (2 б) в точке $x = L^{(2)}$ второго элемента интеграл (25) запишется так:

$$\int_S^{N^{(2)}} \frac{dT^{(2)}}{dx} dS = \int_S \left[q - \mathcal{A}(T_3 - T_*) \right] dS = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_*) \quad (28)$$

Просуммировав выражения вида (24) для первого и второго элементов и выражения (27) и (28) и приравняв сумму нулю, получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \mathcal{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qS_1 \\ 0 \\ \mathcal{A}_2 T_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

где $C^{(1)} = S^{(1)} \frac{d}{dx} / L^{(1)}$ и $C^{(2)} = S^{(2)} \frac{d}{dx} / L^{(2)}$

Завершающим шагом этапа определения вектора силовых значений $\hat{\Phi}$ является решение системы линейных алгебраических уравнений.

Примечание. Основные особенности этого шага - большая размерность и сильная разреженность матрицы коэффициентов системы. В связи с этим для реализации МКЭ в САПР разработаны специальные способы хранения матрицы жесткости, позволяющие уменьшить необходимый для этого объем ОП. Для нахождения узловых значений функций применяются методы преобразования и решения системы, направленные на снижение затрат машинного времени.

42. Определение вектора узловых значений функций методом наименьших квадратов

Пусть дана функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок с помощью узлов

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

Пусть y_0, y_1, \dots, y_n – значение функции $f(x)$ в узлах.

Если n – большое число, то интерполяционный $L_n(x)$ – многочлен высокой степени. Зачастую неудобно использовать многочлены очень высокой степени. Очевидно, мы можем отказаться от использования части узлов и тем самым понизить степень интерполяционного многочлена, но тогда теряется

часть информации. Поэтому вместо интерполяционного многочлена будем искать многочлен $P_m(x)$ меньшей степени ($m < n$), такой что сумма

$$\sum_{i=0}^n [f(x_i) - P_m(x_i)]^2$$

принимает наименьшее значение. Данный многочлен называется многочленом наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

Положим

$$P_m(x) = a_0 x^m + \dots + a_m$$

и будем искать решение задачи

$$S(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n [a_0 x_i^m + \dots + a_{m-1} x_i + a_m - y_i]^2 \rightarrow \min.$$

Приравнявая к нулю производные S , получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов a_i :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0}^n [a_0 x_i^m + \dots + a_m - y_i] \cdot x_i^m = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^n [a_0 x_i^m + \dots + a_m - y_i] \cdot x_i^{m-1} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_{m-1}} = 2 \sum_{i=0}^n [a_0 x_i^m + \dots + a_m - y_i] \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2 \sum_{i=0}^n [a_0 x_i^m + \dots + a_m - y_i] \cdot 1 = 0 .$$

Отсюда получается

$$\begin{cases} a_0 \left(\sum_{i=0}^n x_i^{2m} \right) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{2m-1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m = \sum_{i=0}^n y_i x_i^m \\ a_0 \left(\sum_{i=0}^n x_i^{2m-1} \right) + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m-1} = \sum_{i=0}^n y_i x_i^{m-1} \\ \dots \dots \dots \\ a_0 \left(\sum_{i=0}^n x_i^n \right) + \dots + a_m \sum_{i=0}^n 1 = \sum_{i=0}^n y_i \end{cases}$$

– нормальная система для определения коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n .

Когда $m \leq n$, можно показать, что нормальная система имеет единственное решение, которое действительно дает минимальное значение для функции S . Получив решения нормальной системы a_0, \dots, a_n , строим многочлен наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

В частном случае, когда $m=n$, многочлен $P_n(x)$ переходит в интерполяционный многочлен.

Для решения нормальной системы обычно используется следующая таблица:

i	x_i	x_i^2	x_i^{2m}	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^m$
0	x_0	x_0^2		x_0^{2m}	y_0	$y_0 x_0$		$y_0 x_0^m$
1	x_1	x_1^2		x_1^{2m}	y_1	$y_1 x_1$		$y_1 x_1^m$
.
.
.
n	x_n	x_n^2		x_n^{2m}	y_n	$y_n x_n$		$y_n x_n^m$
	$\sum_{i=0}^n x_i$	$\sum_{i=0}^n x_i^2$...	$\sum_{i=0}^n x_i^{2m}$	$\sum_{i=0}^n y_i$	$\sum_{i=0}^n y_i x_i$...	$\sum_{i=0}^n y_i x_i^m$