VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Duomenų mokslo projektas - kursinis darbas

Ar rizikos didinimas proporcingai didina aktyvų klasės grąžą

Evelina Voleišo, Ieva Eigelytė

VILNIUS 2023

DUOMENŲ MOKSLO STUDIJŲ PROGRAMA
III kursas

Darbo vadovas:	Asist. Dr. Andrius Buteikis
Autorių kontaktai:	el. paštas ieva.eigelyte@mif.stud.vu.lt
	el. paštas evelina.voleiso@mif.stud.vu.lt

Santrauka

Investavimas į akcijas yra viena populiariausių investavimo krypčių visame pasaulyje, tačiau investicijos į akcijas kaip ir į bet kurį kitą finansinį instrumentą turi tam tikrą rizikos lygį. Investuotojai iš investicijos tikisi gauti tam tikros naudos (pelno), esant minimaliam arba investuotojui priimtinam rizikos (investuotų lėšų praradimas) lygiui. Darbe, atsižvelgiant į tris skirtingus akcijų aktyvus tiriama ar gaunamos aktyvų grąžos priklauso nuo prisiimtos rizikos ir didėjant vienam rodikliui didėja ir kitas rodiklis. Pritaikant įvairius rizikos ir grąžos santykių rodiklius bei GARCH-M ir CAPM modelius labiau įsigilinama į rizikos ir grąžos priklausomybės egzistavimą. Atliekant slenkančios regresijos analizę apskaičiuojami tris pagrindiniai rizikos ir grąžos rodikliai: grąžos vidurkiai, standartinis nuokrypis ir beta koeficientas, kurie padeda išsiaiškinti ir vizualiai matyti egzistuojančia priklausomybę skirtingais laikotarpiais.

Abstract

Investing in stocks is one of the most popular investment strategies worldwide. However, investing in stocks, like any other financial instrument, carries a certain level of risk. Investors expect to gain a certain benefit (profit) from their investment while maintaining a minimum or acceptable level of risk (potential loss of invested funds). In this study, considering three different stock assets, we examine whether the returns on assets depend on the assumed risk, and whether an increase in one indicator corresponds to an increase in another indicator. By applying various risk-return ratio indicators, as well as GARCH-M and CAPM models, we delve deeper into the existence of the relationship between risk and return. Through the analysis of rolling regression, three main risk-return indicators are calculated: average returns, standard deviation, and beta coefficient, which help to understand and visually observe the existing dependency over different time periods.

Turinys

1 Įvadas

Rinkos pagrindais organizuotas verslas nuolat susiduria su tam tikromis rizikomis. Taip yra todėl, kad kintant aplinkai, verslui būdingas laukiamų rezultatų neapibrėžtumas. Sparčiai keičiantis rizikos sąlygoms, augant investicijų konkurencijai ypač išaugo poreikis vertinti ir valdyti riziką. Nevertinama rizika konkurencinėje rinkoje sąlygoja nepakankamai apgalvotus ir ekonomiškai nepagrįstus sprendimus, kas gali neigiamai paveikti subjektų veiklos efektyvumą. Šiuolaikinėje visuomenėje mokslininkai ir ekspertai nuolat diskutuoja dėl vertybinių popierių portfelio formavimo modelių ir jų taikymo įvairovės - privalumų ir trūkumų. Vertybinių popierių portfelių investicijų mokslas nuolat plėtojasi, o atsirandant naujiems ir pažangiems modeliams, perteikiamos ir naujos vertybinių popierių rinkos tendencijas. Šių laikų investuotojų lūkesčiai – augantys, kadangi jiems aktualu, kurie portfelių sudarymo modeliai, suteikia daugiausiai informacijos, siekiant užtikrinti pelną, su maksimalia garantija. Dažniausiai kuo aukštesnis portfelio pelningumas, tuo didesnė patiriama rizika ir atvirkščiai, todėl investuotojai, norėdami priimti pagrįstus sprendimus, turi suprasti jų tarpusavio ryšį. Paprastai manoma, kad rizikos ir grąžos santykis yra svarbus akcijų rinkos atspėjamumo ir kintamumo elementas.

1.1 Tikslas

Įvertinti ar skirtingoms aktyvų klasėms ir sektoriams grąžos virš nerizikingos investicijos ir rizikos santykis yra pastovus.

1.2 Uždaviniai

1. Keliais skirtingais metodais įvertinti aktyvų riziką atsižvelgiant į skirtingas charakteristikas.

2. Įvertinti rizikos santykį ir palyginti koks jis skirtingos rizikos aktyvams.

3. Įvertinti rizikos santykį ir palyginti kokios yra priklausomybės nuo rizikos.

4. Įvertinti aktyvų grąžas ir suskaičiuoti grąžą virš nerizikingos investicijos.

5. Pritaikius slenkančios regresijos modelį palyginti grąžos rizikos santykius

2 Literatūros apžvalga

Apskritai rizika gali būti suprantama, kaip situacija, su kuria susiduria asmuo ar įmonė, kai veikloje yra bent kokia minimali žalos tikimybė. Dauguma autorių ir mokslininkų, tarp jų ir A. Damodaran viename savo straipsnių [3] riziką skirsto į dvi esmines grupes: sisteminė ir nesisteminė. Sisteminė rizika kitaip dar vadinama rinkos rizika, o nesisteminė – specifine rizika. G. Kancerevyčius [11] išskiria kelis sisteminės rizikos šaltinius: palūkanų normų pokyčius, infliaciją, perkamosios galios pokyčius, investuotojų lūkesčius dėl visos ekonomikos perspektyvų. Ši rizika, kuriai priskiriami labiau makroekonominiai rodikliai, egzistuoja visada, nes ji yra nenuspėjama ir priklauso nuo išorinių veiksnių. Nesisteminė rizika priklauso nuo atskiros investicinės priemonės rizikingumo. Kancerevičiaus [11] išskiria kelis šios rizikos šaltinius: vadovybės veiklos ir sprendimai, streikai, žaliavų prieinamumas, užsienio firmų konkurencijos efektai. Nesisteminė rizika, kuriai priskiriami labiau makroekonominiai rodikliai, gali būti pašalinta diversifikuojant. A. Domadran [3] viename iš savo straipsnių riziką apibūdina kaip pavojų ir galimybių derinį, autorius pabrėžia, kad rizika gali turėti labai neigiamų pasekmių, tačiau pasinaudojus ją tinkamai, ji gali lemti didesnę grąžą. Dažniausiai rizikos valdyme, šio svarbaus dvilypumo nepastebima ir daugiausia dėmesio skiriama neigiamoms rizikos pasekmėms.

Vienas iš populiarių įrankių, padedančių suprasti akcijų rizikos ir grąžos santykį - kapitalo įkainojimo modelis (angl. Capital Asset Pricing Model, CAMP). Šį modelį 1960 m. sukūrė Stenfordo universiteto profesorius William Sharpe. CAPM yra finansų teorija, kuri naudojama įvertinti akcijų ar kitų investicijų grąžos ryšį su rizika. Šis modelis leidžia įvertinti ne tik pačius rizikingiausius, bet mažiau rizikingus vertybinius popierius. Modelio grindžiama teorija teigia, kad investuotojai turėtų tikėtis didesnės grąžos už investiciją, kuri yra rizikingesnė, t.y. turinti didesnį sisteminį rizikos koeficientą [5].

W. Sharpe (2003) pastebėjo, jog atskirų akcijų vertė kinta kartu su rinka. Jo sukurtas modelis pagrįstas prielaida, kad akcijos pelningumas tiesiogiai susijęs su rinkos indeksu per apskaičiuojamą jautrumo koeficientą. Be to, konkrečios akcijos pelno normą galima apskaičiuoti naudojantis žinoma pelningumo vidutine reikšme ir jo nuokrypio intervalu. Dėl to W. Sharpe modelis, kuriam užtenka tik trijų akcijos parametrų (jautrumo koeficiento, pelningumo vidutinės reikšmės ir jo nuokrypio intervalo), gerokai supaprastino rizikos matavimą ir portfelio optimizavimą (V., Katkus [12]).

CAPM modelio pagrindinis elementas yra beta koeficientas 3.9, kuris yra matavimo vienetas, naudojamas įvertinti investicijos sisteminę riziką ir parodo akcijos vertės kitimą visos akcijų rinkos atžvilgiu (Dzikevičius, Šaranda [1]). Investicija, kurios beta koeficientas yra mažesnis nei 1, yra laikoma mažiau rizikinga, o investicija, kurios beta koeficientas yra didesnis nei 1, yra laikoma rizikingesne.

Autorės D. Cibulskienė, Ž. Grigaliūnienė [4] pagrindinį šios teorijos pranašumą įvardina tokį, kad ši teorija paaiškina skirtumą tarp didelių ir mažų kapitalizacijų firmų akcijų pelningumo. Jeigu mažų įmonių akcijos turi mažesnę betą, tai pagal CAMP jos turėtų turėti mažesnį reikalaujamą pelningumą. Tačiau kai kuriose rinkose mažų įmonių akcijų pelningumai ir jų indeksai dažnai lenkia didelių įmonių akcijų ir jų indeksų pelningumus, o tai prieštarauja CAMP. E. Valakevičius [21] vienoje savo knygoje aprašė ir nurodė tam tikras CAMP modelio taikymo prielaidas:

1. Visi investuotojai vengia rizikos, kuri lygi portfelio pajamų (pelno) normos vidutiniam kvadratiniam nuokrypiui.

2. Visi investuotojai turi vienodą laiko horizontą (pvz. vienas mėnuo, dveji metai) investiciniam sprendimui priimti.

3. Investuotojai laukiamą pelno normą ir riziką vertina vienoda tikimybe.

4. Rinkoje egzistuoja nerizikingoji investicija į turtą, ir kiekvienas investuotojas gali skolintis arba skolinti neribotą jo kiekį su nerizikingąja palūkanų norma.

5. Sandorių kaštai yra lygūs nuliui, nėra infliacijos, nėra diferencijuotų mokesčių.

6. Nėra asmens pajamų mokesčių.

7. Visi investuotojai disponuoja ta pačia informacija apie rinkoje cirkuliuojančius aktyvus.

8. Rinkoje veikia daug investuotojų, todėl pavieniai investuotojai, vykdydami pirkimo pardavimo sandorius, negali daryti poveikio aktyvų kainai.

9. Investuotojai siekia maksimaliai padidinti savo laukiamą pelną per vieną investavimo periodą, esant duotam ar žemesniam rizikos lygiui.

10. Nusistovėjusi kapitalo rinkos pusiausvyra, t. y. rinkos kainos yra kliringo kainos (kainos, pagal kurias vykdomi kasdieniai atsiskaitymai kliringo kontoroje).

11. Investicijų vertinimui taikomi rodikliai – pelno normos vidurkis ir dispersija.

CAPM remiasi Markowitz (1952) sukurta teorija, o ją pristatė Treynor [8] ir W. Sharpe [18]. W. Sharpe pristatė beta koeficientą, kaip aktyvų grąžos jautrumo rizikos matą ir išvedė tikėtinos grąžos formulę. Tačiau per daugelį metų CAPM buvo keičiamas ir tobulinamas Lintnerio (1965), Mossinas (1966), Blackas (1972). Vienas svarbiausių tyrimų apie CAPM buvo pristatytas 1992 m. Fama ir French – trijų faktorių modelis [6]. CAPM buvo išplėstas, įtraukiant du papildomus kintamuosius, padedančius paaiškinti grąžos svyravimus. Autoriai teigė, jog svarbūs tikėtinos grąžos veiksniai yra ne tik beta koeficientas, bet ir aktyvų dydis bei rinkos vertės santykis. Tačiau rezultatai yra diskutuotini, nes pirmasis teigiamas ryšys tarp beta koeficiento ir tikėtinos grąžos pasirodė esąs neigiamai susijęs su aktyvų dydžiu ir beta koeficientu. Kadangi CAPM modelis susilaukė kritikos dėl to, kad jame naudojamos gana stiprios prielaidos ir kad jis gali būti nepatikimas realioje rinkoje, siekiant patikrinti, ar aktyvų grąža gali būti paaiškinta ne tik bendru grąžos faktoriumi, bet ir kitais faktoriais.

S.Ross [17] išplėtė CAPM, sukurdamas daugiafaktorinį kapitalo įkainojimo modelį – Abritražo kainų teoriją (toliau APT), kaip alternatyvą CAPM modeliui. APM modeliuoja tiesinį ryšį tarp tikėtinos grąžos, rinkos rizikos ir kitų išorinių rizikos veiksnių, kurių gali būti daugiau nei vienas. Nenustatyti rizikos veiksniai gali būti bet kokie, bet praktikoje, tai greičiausiai bus makroekonominiai kintamieji, tokie kaip palūkanų norma, infliacijos lygis ir panašiai. Vėliau buvo sukurta daug kitų teorijų, kai kurios iš jų yra CAPM ir APT modifikacijos. Įvairios teorijose teigiama, kaip galima įvertinti investicijų grąžą. Tačiau, Bruner [15] bei Graham ir Harvey [10] teigimu, CAPM buvo pripažinta labiausiai praktikų ir mokslininkų mėgstamas modelis.

Autoriai Sun ir Zhang [2] rado APT modelio pranašumo įrodymų prieš CAPM modelį. Kai kuriuose ankstesniuose tyrimuose teigiama, kad APT modelis gali paaiškinti daugumą anomalijų, kurios liko neaiškios taikant CAPM modelį. Tačiau, nepaisant daugybės privalumų, APT nepavyko pakeisti CAPM modelio. Ir kai kurie autoriai kaip Bodie(2009), teigia, jog tokie modeliai kaip Fama-French trijų faktorių modelis ar APT yra daugiafaktorinis CAPM modelio pritaikymas, o ne esminių idėjų, kuriomis grindžiamas CAPM, atmetimas. Ir CAPM yra plačiai pripažįstamas kaip tinkamas metodas finansinio turto grąžai vertinti.

Kitas gerai žinomas metodas, kuriuo nustatomas ryšys tarp grąžos ir rizikos, yra apibendrintas autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo vidurkio modelis (GARCH-M), kuris sulaukė didelio dėmesio finansų bei ekonometrijos srityje dėl savo gebėjimo atspindėti kintamumo ir tikėtinos grąžos ryšį. Šis modelis išplečia tradicinę vidurkio lygtį, įtraukdamas sąlyginę dispersiją kaip papildomą kintamąjį. Ankstyvuosius GARCH modelio tyrimus pradėjo Engle (1982) [7], kuris įvedė sąlyginio heteroskedastiškumo sąvoką. Tačiau tik vėlesniuose tyrimuose buvo nagrinėjamas sąlyginės dispersijos įtraukimas į vidurkio lygtį. Reikšmingą indėlį įnešė Bollerslev ir Wooldridge (1992), kurie pasiūlė GARCH-M modelį, kaip būdą fiksuoti kintamumo įtaką tikėtinai grąžai. Jų tyrimas parodė, kad didesnis kintamumas paprastai lemia didesnę tikėtiną grąžą, o tai patvirtina, kad investuotojai reikalauja didesnės kompensacijos už rizikos prisiėmimą padidėjusio kintamumo laikotarpiais. Vėlesnėje literatūroje GARCH-M modelis buvo toliau plėtojamas ir tobulinamas. Pavyzdžiui, Glosten, Jagannathan ir Runkle (1993) [**Str26**] įvedė asimetrinio poveikio sąvoką, teigdami, kad teigiamų ir neigiamų sąlyginės dispersijos sukrėtimų poveikis tikėtinai grąžai gali skirtis. Šis asimetrinis GARCH-M modelis buvo plačiai taikomas empiriniuose tyrimuose, siekiant parodyti kintamumo ir grąžos ryšio asimetriją. Apibendrinant galima teigti, kad GARCH-M modelis suteikė vertingų įžvalgų apie rizikos ir grąžos ryšį finansų rinkose. Jis pasirodė esąs galinga priemonė volatilumo poveikio tikėtinai grąžai parodyti ir yra plačiai taikomas tyrimuose.

Vienas iš alternatyvių rizikos matavimo būdų, nagrinėjant ryšį tarp rizikos ir grąžos - rizikos vertės metodas (angl. Value at Risk, VaR). VaR modelis – tai rizikos vertė parodanti (konkreti reikšmė), per tam tikrą laiką tikėtiną maksimalų vertybinių popierių portfelio nuostolį. Šis metodas yra bene plačiausiai finansų įstaigose naudojamas rizikos matas, kuris taip pat įtrauktas į "Bazelio II" kapitalo pakankamumo sistemą. Pirmasis jį pristatė J.P. Morgan [20] kaip būdą įvertinti finansinio turto portfelio nuostolį, esant tam tikram patikimumo lygiui, per tam tikrą laikotarpį. Šio metodo paprastumas lėmė tai, kad jis dažnai laikomas standartiniu rizikos matu ne tik finansų institucijose, bet ir kitų investuotojų ir verslo atstovų.

Autoriai R. Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev [14] savo straipsnyje pateikė pristatytą VaR modifikaciją vadinama sąlyginės rizikos vertės metodu (angl. Conditional Value at Risk, CVaR) arba tikėtinos deficito rizikos metodu (angl. Expected Shortfall, ES), kuris yra apibrėžiamas kaip vidurkis visų nuostolių, kurie yra didesni arba lygūs VaR. Kadangi egzistuoja VaR ir CVaR pasirinkimo problema, ypač finansinės rizikos valdymo srityje, Gaia Serraino kartu su Stan Uryasev [9] palygino minėtus metodus ir remiantis rezultatais, teigė, jog VaR ir CVaR matuoja skirtingas grąžų pasiskirstymo dalis, todėl, atsižvelgiant į tai, ko riziką norima įvertinti, vienam iš jų gali būti teikiama pirmenybė. VaR gali būti geresnė portfelių optimizavimui, o CVaR gali būti prastai veikianti ne pagal imtį, kai portfelio optimizavimas vykdomas naudojant prastai sudarytą scenarijų rinkinį. CVaR pasižymi geresnėmis matematinėmis savybėmis ir gali būti lengvai tvarkomas optimizavimo ir statistikos srityse, tačiau, lyginant įverčio stabilumą, reikia pasirinkti tinkamus patikimumo lygius.

Viename Investicijų valdymo ir Financinių inovacijų žurnale [19] autoriai pateikė slenkančios regresijos ir kryžminio pjūvio regresijos pavyzdžius, kuriuos pritaikė CAPM modeliui suskaičiuoti β reikšmes ir įvertinti jų priklausomybę grąžoms. Autoriai tyrė dvi hipotezes: H_{01} Nėra ryšio tarp rizikos ir akcijų grąžos pagal slenkančios regresijos metodą, H_{02} Nėra ryšio tarp rizikos ir jos dispersijos su vidutine akcijų grąža taikant kryžminio pjūvio regresijos metodą. Tyrėjai turimus duomenis padalino į 29 lygias periodines dalis, tuomet suformavo 3 metų slenkančiosios regresijos modelį imant 36 mėnesių intervalą. Pritaikius šiuos metodus tyrėjai gavo kiekvienos periodinės dalies β ir p reikšmes, kurių pagalba galėjo atmesti arba priimti nulinę hipotezę. Savo atveju autoriai aprašė Indijos akcijų grąžos priklausomybę nuo rizikos ir gavo statistiškai reikšmingus koeficientus, kurie parodė, kad per 10 tirtų metų grąžos tiesiškai (proporcingai) priklauso nuo rizikos.

3 Sąvokos ir formulės

3.1 Investicijų grąža (angl. ROI, Return of Investment)

Investicijų grąža - tai investicijų vertinimo metodas, pagal kurį lyginama numatomų būsimų pajamų iš investicijų suma su pradine investicija, o santykis išreiškiamas procentais. Šis procentinis dydis atspindi tikėtiną pajamų grąžą. Norint apskaičiuoti aktyvo investicijos mėnesinę grąžą, reikia investicijos grąžą per tam tikrą mėnesį padalinti iš pradinės investicijos [16].

$$ROI = \frac{\text{Incesticijos grąžą}}{\text{Pradinė investicija}}.$$

3.2 Grynoji grąža (angl. Simple return)

Turto kainos paprastai yra nestacionarios, t. y. jų statistika, pavyzdžiui, vidurkis ir dispersija (matematiniai momentai), laikui bėgant kinta. Tai taip pat gali reikšti, kad kainų eilutėse pastebimos tam tikros tendencijos arba sezoniškumas. Transformuodami kainas į grąžą, bandome padaryti laiko eilutę stacionarią. Vienas i6 būdų skaičiuoti grynąją grąžą. Portfelio paprastoji grąža yra portfelio atskirų turto vienetų grąžų svertinė suma.

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

R_t - investicijos grąža per tam tikrą laikotarpį.
P_t - investicijos grąža tam tikru laiko momentu.
P_{t-1} - pradine investicija tam tikru laiko momentu.

3.3 Aktyvo grąža virš nerizikingos investicijos

Viso laikotarpio aktyvų grąža virš nerizikingos investicijos (toliau NI) yra apskaičiuojama pritaikant geometrinio vidurkio formulę. Vidutinės geometrinės grąžos formulė - tai būdas apskaičiuoti vidutinę investicijų grąžos normą, apskaičiuojamą per tam tikrą laikotarpį. Geometrinis grąžos vidurkis yra geresnis vidutinės investicijų grąžos matas nei aritmetinis grąžos vidurkis, kuris paprasčiausiai sudeda kiekvieno laikotarpio grąžą ir padalina ją iš laikotarpių skaičiaus.

$$GAR = \left(\frac{\text{Paskutinė grąžos vertė}}{\text{Pradinė grąžos vertė}}\right)^{12/n} - 1.$$

GAR - Geometrinis metinis grąžos vidurkis.
n - mėnesių skaičius.

3.4 Standartinis nuokrypis (angl. Standart deviance)

Standartinis nuokrypis - tai statistinis matas finansų srityje, kuris, taikomas metinei investicijų grąžos normai, parodo istorinį investicijų nepastovumą. Kuo didesnis vertybinių popierių standartinis nuokrypis, tuo didesnis kiekvienos kainos nuokrypis nuo vidurkio, o tai rodo didesnį kainų svyravimą. Standartinis nuokrypis dažniausiai skaičiuojamas mėnesiams, dienoms ar metams, priklausomai nuo to, kokius duomenis turime. Mūsų atveju standartinį nuokrypį dar dauginame iš šaknies iš 12, nes turime pateiktus mėnesinius duomenis, o norime gauti metinius.

$$SD = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \times \sqrt{12}.$$

N - stebėjimų skaičius.
x_i - mėnesio grąža virš NI.
$\overline{x}$ - grąžų virš NI vidurkis.

3.5 Šarpo koeficientas (angl. Sharpe ratio)

Šarpo, arba dažnai dar vadinimas - Sharpe rodiklis yra populiariausias investicinių portfelių valdymo efektyvumo matavimui skirtas rodiklis. Šarpo rodiklis lygina investicinio fondo ar kitokio portfelio grąžą virš nerizikingos grąžos, atsižvelgiant į rizikos lygį. Iš rizikingesnių investicijų tikimąsi didesnės ir grąžos, todėl Šarpo rodiklio tikslas yra išmatuoti grynąją investicinio portfelio grąža (grąžą, viršijančią nerizikingų investicijų grąžą) ir palyginti ją su portfelio volatilumu, kitaip sakant rizikingumu. Aukštesnis rodiklis rodo didesnį investicinio fondo patrauklumą.

$$\text{Sharpe Ratio } = \frac{GAR}{SD}.$$

GAR - aktyvo grąža virš NI.
SD - standartinis nuokrypis.

3.6 Rizikos vertė (angl. VaR, Value at Risk)

Rizikos vertė - tai statistinis rodiklis, naudojamas apskaičiuoti didžiausią galimą turto ar portfelio nuostolį per tam tikrą laikotarpį ir esant tam tikram patikimumo lygiui. Apskaičiuoti VaR naudojami Monte Karlo modeliavimo, parametriniai ir istoriniai metodai, tačiau apskaičiuoti kiekvieną iš jų reikalingi skirtingi rodikliai. Šiame darbe naudosime vieną iš galimų VaR skaičiavimo metodų - parametrinį metodą.

$$VaR = \text{GAR} + (SD \times z).$$

GAR - geometrinis metinis grąžos vidurkis.
SD - standartinis nuokrypis.
z - skirstinio kvantilis.

Reikšmė z yra normaliojo skirstinio kreivės statistinis matas, rodantis, kiek nuo tikėtinos portfelio grąžos (vidurkio) nukrypsta tam tikra apskaičiuotos grąžos procentinė dalis. Dažniausiai naudojamos $0.001, 0.01$ ir 0.05 tikimybės, kurių z reikšmės atitinkamai yra $-3.09, -2.33, -1.64$.

3.7 Sąlyginė rizikos vertė (angl. CVaR, Conditional Value at Risk)

.

VaR parodo blogiausio atvejo nuostolį, susijusį su tam tikra tikimybe ir laiko horizontu, o CVaR - tikėtiną nuostolį, jei ši blogiausio atvejo riba kada nors bus peržengta. Kitaip tariant, CVaR kiekybiškai įvertina tikėtinus nuostolius, kurie atsiranda už VaR lūžio taško.

$$CVaR = 1 \times \left(\mathrm{GAR} - SD \times (\frac{z}{1-Q}) \right).$$

GAR - geometrinis metinis grąžos vidurkis.
SD - standartinis nuokrypis.
z - skirstinio kvantilis.
Q - pasikliovimo lygmuo.

3.8 Apibendrintas autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo vidurkio modelis (angl. GARCH-M, Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity In Mean)

Apibendrintas autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo vidurkio (GARCH(1,1)-M) modelio vaidmuo yra labai svarbus priimant investicinius sprendimus remiantis laiko eilučių duomenimis. Daroma prielaida, jog praeities grąža ir volatilumas įtakoja akcijų grąžos vidurkį is sąlyginę dispersiją tam tikru laiko momentu. Modelis susieja sąlyginę dispersiją su grąžos vidurkiu, todėl tai yra tinkamas metodas nustatyti rizikos ir grąžos ryšio egzistavimą.
GARCH(1,1)-M modelis grindžiamas šia lygtimi:

$$r_t = \mu_t + \kappa\sigma_t^2 + a_t.$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j.\sigma_{t-j}^2.$$
$$a_t = \sigma_t \epsilon_t.$$

r_t - stebima grąža arba priklausomas kintamasis.
μ_t - vidurkis arba tarpinis narys, rodantis vidutinę tikėtiną grąžą.
κ - rizikos premijos parametras.
σ_t^2 - sąlyginė dispersija.
r_t - liekana laiko momentu t.
$\alpha_{0,1}$, $_{..,p}$ - ARCH komponento modelio parametrai.
β_j - GARCH komponento modelio parametrai.
ϵ_j - standartizuotos liekanos.

3.9 Kapitalo įkainojimo modelis (angl. CAPM, Capital asset price model)

Kapitalo įkainojimo modelis (CAPM) apibūdina ryšį tarp sisteminės rizikos arba bendrų investavimo pavojų ir tikėtinos turto, ypač akcijų, grąžos. Tai finansų teorijos modelis, kuriuo nustatomas tiesinis ryšys tarp investicijų grąžos ir rizikos.
Pagrindinė modelio formulė yra:

$$R_i = R_f + \beta_i(R_m - R_f).$$

Tikėtinos grąžos formulėje naudojamas beta koeficientas, kuris yra vienas iš sisteminės rizikos matų. Jis yra apskaičiuojamas pasinaudojus šia formule:

$$\beta_i = \frac{Cov(R_f, R_m)}{\sigma^2(R_m)}.$$

R_i - tikėtina investicijos grąža.
R_f - nerizikinga pelno norma.
β_i - investicijos Beta koeficientas.
R_m - visos rinkos grąža.

Pagal CAPM teoriją, kuri apibūdina akcijų grąžos priklausomybę nuo rizikos lygio, β rodo, kaip aktyvas yra jautrus rinkos svyravimams. Bendrai, rizikos ir grąžos tarpusavio priklausomybę galima apibūdinti taip: aukštesnė rizika, susijusi su didesniu beta koeficientu, turėtų reikšti aukštesnę grąžą,

3.10 Koreliacija

Koreliacijos koeficientas parodo tiesinio, jei koreliacija tiesinė, arba ranginio, jei koreliacija ranginė, sąryšio tarp 2 kintamųjų stiprumą: t.y., ar tikėtina, kad padidėjus vieno kintamojo reikšmėms, padidės (arba sumažės) ir kito kintamojo reikšmės. Kai duomenys atitinka normalumo prielaidas naudojama Pearsono koreliacija (angl. Pearson correlation), kitu atveju naudojama Spearmano koreliacija (angl. Spearman correlation). Koreliacijos koeficientas lygus 0 reiškia, kad sąryšio nėra, o 1, kad egzistuoja labai stiprus sąryšis.

3.11 Slenkančioji regresija (angl. Rolling regression)

Slenkančioji regresija leidžia atlikti regresijos analizę judančiame laiko periode. Tai reiškia, kad regresijos modelis yra skaičiuojamas su pasislinkusiu duomenų langeliu, kuris juda per laiko eilutę arba kitą stebimąją sritį. Pagrindinė šios analizės paskirtis yra stebėti ir įvertinti ryšį tarp kintamųjų kintant laikui. Tai ypač naudinga, kai tarp kintamųjų yra pokyčiai per laiką. Prieš taikant šį metodą nustatomas langelio dydis, kuris atspindi norimo naudoti laiko tarpą. Priklausomai nuo langelio dydžio bus paimamas skirtingas slenkančio laiko periodo dydis. Pirmiausia, apskaičiuojami regresijos modelio koeficientai su pirmuoju laiko periodu (langeliu). Slankiojant per laiko eilutę, atnaujinamas regresijos modelis, pridedant naujausius duomenis ir pašalinant seniausius. Slenkanti regresija leidžia stebėti regresijos modelio pokyčius per laiką ir įvertinti, ar jie yra statistiškai reikšmingi ar ne. Tai gali padėti identifikuoti laiko eigoje vykstančias tendencijas, struktūrinius pokyčius arba kitus svarbius kintamųjų ryšio aspektus.

4 Duomenys

Duomenų rinkinyje pateikiami 3 skirtingi akcijų aktyvų indeksai: S&P500, DAX, REIT. Duomenyse pateikiama kiekvieno aktyvo bendroji grąža (uždirbamas pelnas) per mėnenį, 32 metų (nuo 1990-12-31 iki 2023-01-31) laikotarpiu.

1. S&P500 indeksas, jį sudaro 500 didžiausių JAV akcijų rinkos įmonių.

2. DAX yra pagrindinis Vokietijos vertybinių popierių rinkos indeksas. Jis atspindi 30 likvidžiausių Vokietijos įmonių, kurios prekiauja Frankfurto vertybinių popierių biržoje, veiklos procesus ir yra plačiausiai naudojamas rodiklis šalies grynojo turto rinkoje.

3. REIT (angl. Real Estate Investment Trust) – tai bendrovė, kuri valdo, eksploatuoja arba finansuoja pajamingą nekilnojamą turtą įvairiuose NT sektoriuose. Tai gali būti daugiabučiai pastatai, biurai, prekybos centrai, viešbučiai ir pan.

Taip pat duomenyse pateikiami JAV ir Vokietijos investicinio indekso grąžos neprisiimant jokios rizikos. Šiuos duomenis sudaro mėnesinės grąžos 32 metų laikotarpyje nuo 1990-12-31 iki 2023-01-31.

5 Duomenų analizė

Prieš atliekant statistinius metodus atliksime pradinę duomenų analizę susipažinti su duomenimis ir pasižiūrėti kuo skiriasi kiekvienas iš turimų aktyvų. Visu pirma pasižiūrime uždirbamo pelno duomenis. Iš 1 lentelės matome, kad turimuose duomenyse pateiktos 386 duomenų reikšmės, iš trijų aktyvų labiausiai išsiskiria DAX aktyvas, nes jo uždirbtas vidutinis pelnas didžiausias. REIT aktyvas išsiskiria mažu pelningumu.

	S&P500	REIT	DAX
Stebinių skaičius	386	386	386
Vidurkis	2717.77	**889.34**	**6770.94**
Standartinis nuokrypis	2239.99	724.18	3903.33
Min.	367.63	81.25	1398.23
Maks.	9986.7	2964.06	15884.86

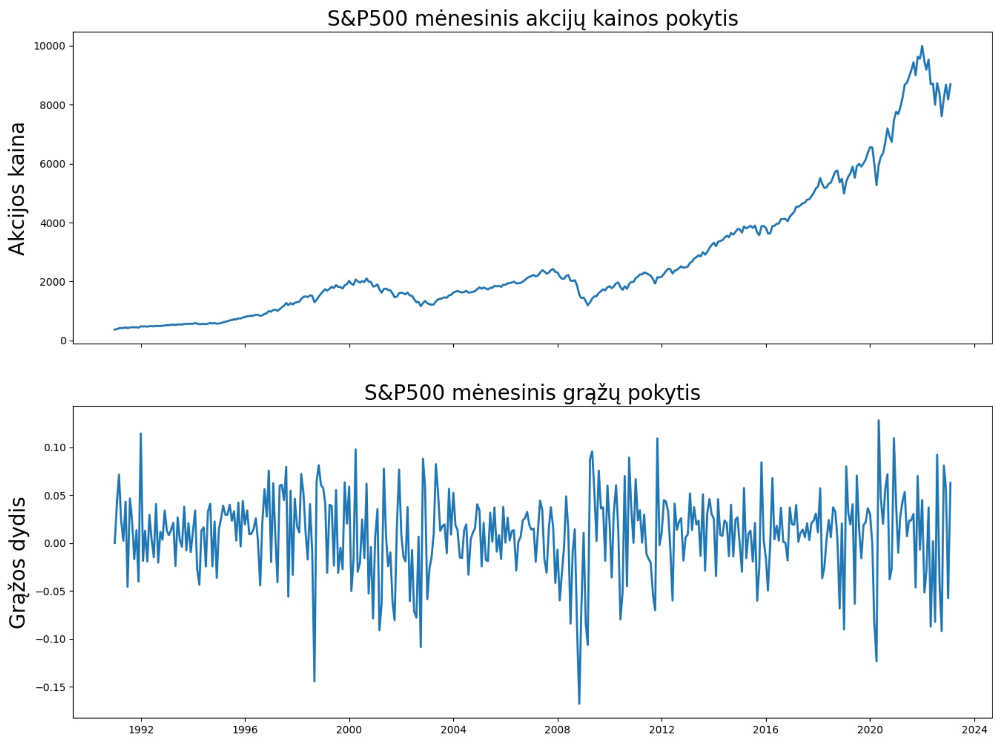
1 lentelė: Aktyvų charakteristikos

Grafikų panelėje (žr. 1 pav.) atvaizduoti mėnesiniai S&P500 investicijų pelno ir grąžos pokyčiai laike. Aiškiai matome, kad S&P500 akcijų grynasis pelnas palaipsniui didėjo ir 2021 m. gruodžio mėnesį pasiekė didžiausia kainą. Taip pat galime pastebėti, kad didžiausi mėnesiniai grąžos svyravimai buvo tarp 2008 ir 2012 metų bei 2018 ir 2022 metų. Du svarbiausi aspektai, kodėl akcijos taip svyravo: 2008 m. ekonominė krizė ir 2020 m. prasidėjusi COVID-19 pandemija. Nuo 2007 m. spalio iki 2009 m. kovo mėnesio S&P500 indeksas nukrito apie 56,8%, tačiau iki 2013 m. kovo mėn. atlygino visus nuostolius [16]. 2020 metais prasidėjus pandemijai S&P500 akcijos smuko maždaug 34%.

Grafikų panelėje (žr. 2 pav.) atvaizduoti mėnesiniai REIT investicijų pelno ir grąžos pokyčiai laike. Aiškiai matome, kad REIT akcijų grynasis pelnas palaipsniui vis didėjo, tačiau 2007 metais kaina pradėjo kristi ir tik 2009 kilti ir 2021 m. gruodžio mėnesį pasiekė didžiausią kainą per 30 metų. Taip pat galime pastebėti, kad didžiausi mėnesiniai grąžos svyravimai buvo tarp 2007 ir 2010 metų bei 2018 ir 2022 metų, nes čia grąžos stipriai krito ir vėl pakilo per mažą laikotarpį. Kaip ir S%P500 indeksas REIT indeksas 2008 m. krito dėl ekonominės krizės, bendrai REIT indeksas smuko apie 37% [13].

Grafikų panelėje (žr. 3 pav.) atvaizduoti mėnesiniai DAX investicijų pelno ir grąžos pokyčiai laike. Galime pastebėti, kad DAX lyginant su kitais aktyvais yra pačios nepastoviausios. Čia akcijų kaina labai stipriai svyruoja, daug kartų krenta ir vėl kylą. Gan dideli grąžos svyravimai vyrauja visus 30 metų, tačiau pats nepastoviausias laikotarpis tarp 2005 m. ir 2006 m.

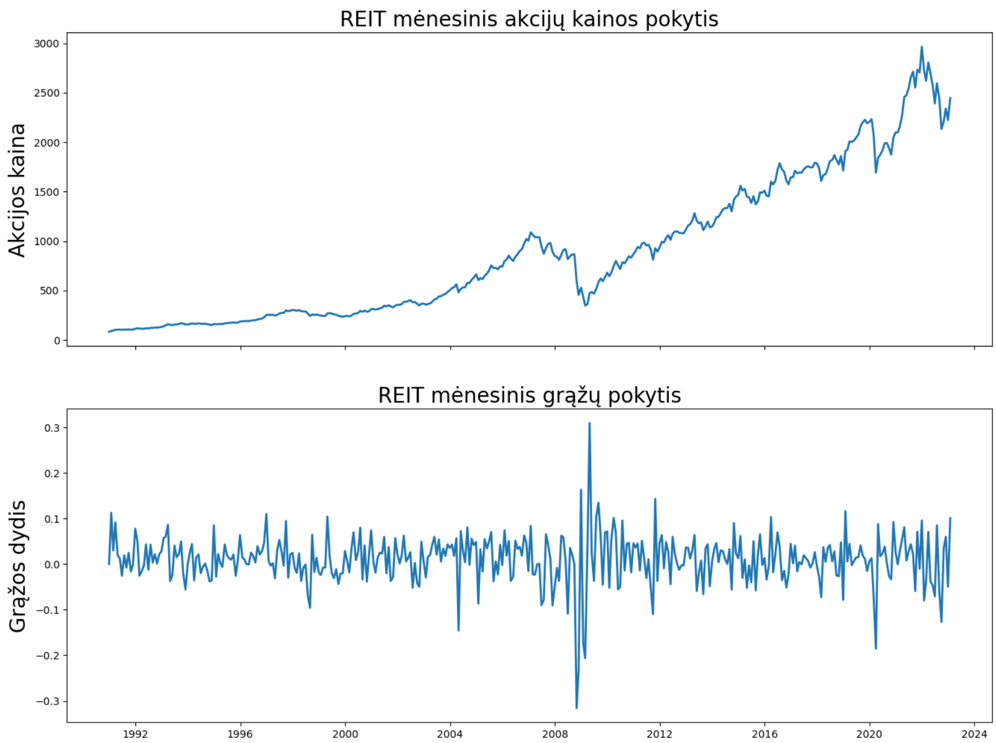
Atsižvelgiant į kiekvieną iš aktyvų, visos grąžos suskaičiuotos prisiimant tam tikrą sisteminę arba nesisteminę riziką. Pasinaudojant JAV grąžomis



1 pav.: S&P500 kainos ir grąžos pokytis laike

tuo pačiu laikotarpiu neprisiimant jokios rizikos, apskaičiuojame kiekvieno aktyvo grąžą virš nerizikingos investicijos.

Atsižvelgiant į gautas grąžas neprisiimant jokios rizikos (žr. 4 pav.) matome, kad visos grąžos svyruoja gan panašiai, labiausiai išsiskiria 2009 m. REIT aktyvo grąžos pokyčiai, bei smarkiai dažnai išsiskiriančios DAX grąžos.



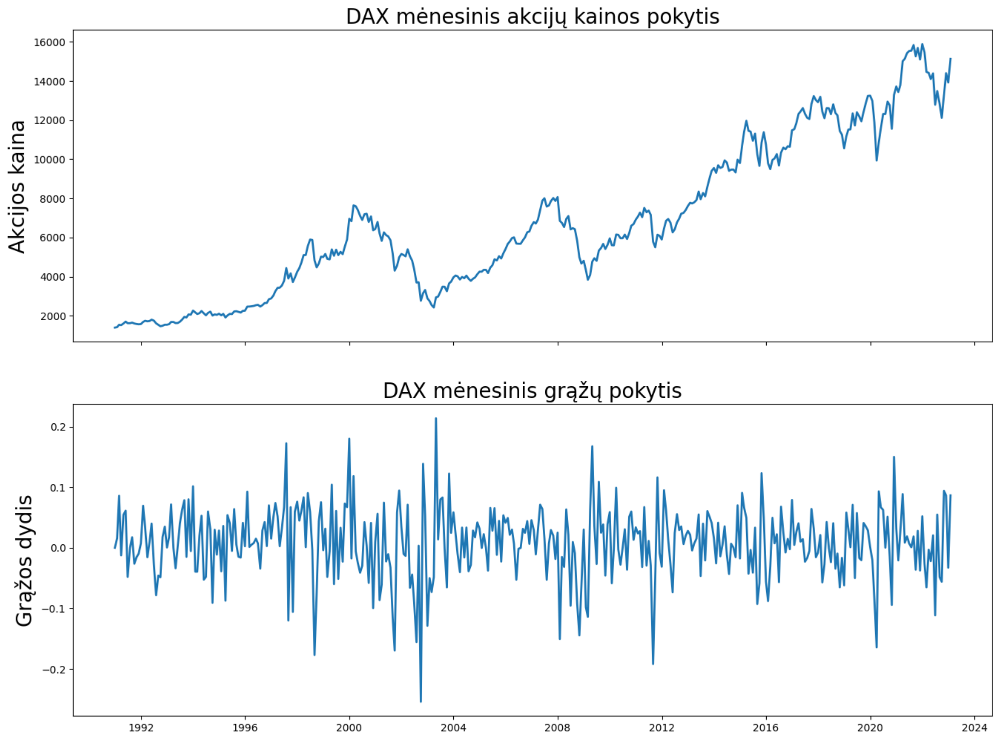
2 pav.: REIT kainos ir grąžos pokytis laike

Suskaičiavus kiekvieno aktyvo vidutinę grąžą virš NI galime spręsti, kurios akcijos generavo didesnį pelną per metus. Iš 2 lentelėje pateiktų rezultatų didžiausią pelną per metus generavo REIT akcijos, tačiau jos standartinis nuokrypis lyginant su S&P500 gan didelis, t.y. ši akcija rizikinga ir nestabili. Iš visų turimų akcijų rodiklių stabiliausia yra S&P500 ir ji generavo net 7.6 % grąžos per metus, kas yra visai geras rodiklis. Pritaikius t-testą patikrinome hipotezę, kad vidurkis nėra lygus 0 ir gavome, kad vidutinės grąžos virš nerizikingos investicijos statistiškai reikšmingai skiriasi nuo 0.

Vienas labiausiai žinomų ir naudojamų rizikos vertinimo matų - Šarpo koeficeintas. Didžiausią Šarpo koeficientą turi S&P500 aktyvas - 0,51. REIT ir DAX akcijos pasiekė pelningumą virš rizikos, tačiau ši riba nebuvo aukšta. Investicijos į DAX akcijas turimam laikotarpiui buvo mažiau rizikingesnės, nei investicijos į S&P500 ar REIT akcijas.

	S&P500	REIT	DAX
Vidurkis	7.6 %	**8.42 %**	5.14 %
Standartinis nuokrypis	14.83 %	18.73 %	**20.3 %**
Šarpo koeficientas	0.51	0.45	0.25

2 lentelė: Vidurkio, standartinio nuokrypio ir Šarpo koeficiento suvestinė



3 pav.: DAX kainos ir grąžos pokytis laike

Patikrinti duomenų pasiskirstymą ir skirstinio uodegas (angl. tails) naudosime du parametrus: asimetrijos (angl. Skewness) ir eksceso (angl. Kurtosis).

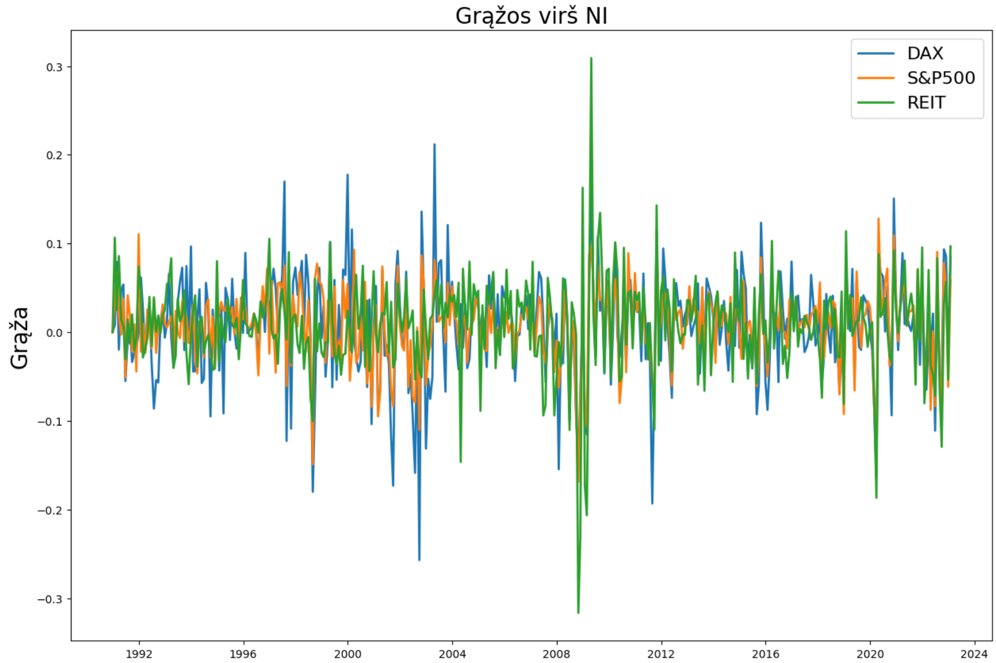
Asimetrija $= 0$: pasiskirstymas yra normalus.
Asimetrija > 0: daugiau svorio turi kairioji pasiskirstymo uodega.
Asimetrija < 0: daugiau svorio turi dešinioji pasiskirstymo uodega.

Eksceso $= 3$: pasiskirstymas normalus.
Eksceso < 3: pasiskirstymas plokščias.
Eksceso > 3: pasiskirstymas yra plonas ir aukštas.

Norint išsiaiškinti ar asimetrijos ir eksceso apskaičiuoti koeficientai statistiškai reikšmingai skiriasi nuo normaliojo skirstinio pasiskirstymo atliksime Asimetrijos ir Eksceso testus, kurių hipotezės:

$$\begin{cases} \mathrm{H_0} & : \text{Asimetrija reikšmingai nesiskiria nuo normaliojo skirstinio.} \\ \mathrm{H_A} & : \text{Asimetrija reikšmingai skiriasi nuo normaliojo skirstinio.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{H_0} & : \text{Ekscesas reikšmingai nesiskiria nuo normaliojo skirstinio.} \\ \mathrm{H_A} & : \text{Ekscesas reikšmingai skiriasi nuo normaliojo skirstinio.} \end{cases}$$



4 pav.: Grąžos virš NI

	Statistika	p reikšmė
S&P500TR	-4.29	$1.75 \cdot 10^{-5}$
REIT	-5.1	$3.22 \cdot 10^{-7}$
DAX	-3.62	$2.94 \cdot 10^{-4}$

3 lentelė: Asimetrijos testo rezultatai, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.05$

Atliktų testų rezultatai pateikti 3 ir 4 lentelėse. Visos gautos p reikšmės < 0.05, todėl nulines hipotezes atmetame ir galime teigti, kad visų aktyvų asimetrijos koeficientai statistiškai reikšmingai skiriasi nuo normaliojo skirstinio koeficientų. Iš 5 lentelėje pateiktų tikslių asimetrijos ir eksceso koeficientų galime spręsti, kad nei vienas iš aktyvų neturi tikslaus pasiskirstymo. REIT akcijos pasiskirstymas yra ypač plonas ir aukštas, priešingai nei kitos akcijos, kurių pasiskirstymas yra plokščias. Visų trijų akcijų pasiskirstymas taip pat turi daugiau svorio dešinėje kas sufleruoja apie sunkiąsias uodegas.

	Statistika	p-value
S&P500TR	3.17	$1.5 \cdot 10^{-3}$
REIT	7.98	$1.39 \cdot 10^{-15}$
DAX	4.41	$1.02 \cdot 10^{-5}$

4 lentelė: Eksceso testo rezultatai, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.05$

	Asimetrija	Ekscesas
S&P500	-0.56	1.07
REIT	-0.68	6,97
DAX	-0.46	1.84

5 lentelė: Aktyvų normalumo kriterijai

Suskaičiuotos rizikos vertes kiekvienam aktyvui naudojant 0,01%, 0.05% ir 0.001% patikimumo lygius rezultatai pateikti 6 lentelėje. Ši metrika yra susijusi su tikimybe, kad aktyvas patirs nuostolius per tam tikrą laikotarpį tam tikros tikimybės ribose. Pagal gautus rezultatus, galime spręsti, kad S&P500 aktyvas turi 5% tikimybę prarasti apie 17% pelno, 1% tikimybę prarasti apie 27% pelno ir 0.1% tikimybę prarasti daugiau nei 38% pelno per 30 metų laikotarpį. REIT aktyvas turi 5% tikimybę prarasti apie 22% pelno, 1% tikimybę prarasti apie 35% pelno ir 0.1% tikimybę prarasti daugiau nei 50% pelno per 30 metų laikotarpį. DAX aktyvas turi 5% tikimybę prarasti apie 28% pelno, 1% tikimybę prarasti apie 42% pelno ir 0.1% tikimybę prarasti daugiau nei 57% pelno per 30 metų laikotarpį.

	0.001	0.05	0.01
S&P500	-38.22 %	-16.79 %	-26.89 %
REIT	-49.45 %	-22.38 %	-35.14 %
DAX	-57.58 %	-28.24 %	-42.08 %

6 lentelė: Rizikos vertės grąžoms virš NI

Tiksliau įvertinti aktyvų riziką apskaičiuojame sąlygines rizikos vertes kiekvienam aktyvui. Gauti rezultatai pateikti 7 lentelėje, jie parodo, koks tikėtinas nuostolis viršijus tam tikrą ribą. Aptariant REIT aktyvą, galime teigti, kad viršijus 5% rizikos tikimybę vidutiniškai prarasime apie 30% pelno, o viršijus 1% tikimybę vidutiniškai apie 42%. Patirti vidutiniškai daugiau nei puse pelno nuostolį labiausiai tikėtina viršijus 0.1% tikimybę DAX aktyvui. Taip pat iš gautų rezultatų, galime spręsti, kad stabiliausias aktyvas - S&P500, nes kuo mažesnis CVaR, tuo mažesnis portfelio nuostolių potencialas, o tai rodo didesnį portfelio stabilumą.

	0.001	0.05	0.01
S&P500	-42.33 %	-22.98 %	-31.92 %
REIT	-54.63 %	-30.20 %	-41.49 %
DAX	-63.20 %	-36.73 %	-48.96 %

7 lentelė: Sąlyginės rizikos vertės grąžoms virš NI

6 GARCH modelio pritaikymas akcijų grąžoms

6.1 Stacionarumas

Nors GARCH-M modelis yra skirtas stacionarioms finansinėms serijoms, jis gali būti taikomas ir nestacionarioms serijoms. Tačiau, norint gauti tikslingesnius rezultatus, būtina, kad serijos būtų bent jau silpnai stacionarios arba, jei serijos yra nestacionarios, reikia atlikti tam tikras transformacijas, kad galima būtų taikyti GARCH-M modelį. Dažniausiai laiko eilučių stacionarumui nustatyti yra naudojamas Dickey-Fuller (ADF) statistinis testas, kuris tikrina šias hipotezes:

$$\begin{cases} \mathrm{H_0} & : \text{Laiko eilutė nėra stacionari} \\ \mathrm{H_A} & : \text{Laiko eilutė yra stacionari} \end{cases}$$

Remiantis gautomis (žr. 8 lentelę) p-reikšmėmis, kurios yra mažesnės už reikšmingumo lygmenį, galime teigti, jog mūsų laiko eilučių sekos, kurias sudaro S&P500, DAX ir REIT logaritminės grąžos, yra stacionarios. Tai tenkina GARCH-M modelio prielaidą.

	statistika	p-reikšmė
S&P500TR	-10.7384	0.000
DAX	-18.9529	0.000
REIT	-8.3938	0.000

8 lentelė: Dickey-Fuller testo rezultatai, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.05$

6.2 Normalumas

Antra prielaida, kurią patikrinsime, yra logaritmuotų akcijų grąžų normalumas. Dažniausiai, kai yra naudojami finansiniai duomenys, normalumas yra tikrinimas Jarque-Bera testu, kai:

$$\begin{cases} \mathrm{H_0} & : \text{Grąžos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį} \\ \mathrm{H_A} & : \text{Grąžos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį} \end{cases}$$

Šioje dalyje susiduriame su problema, nes pagal (žr. 9 lentelę) gautą atsakymą atmetame nulinę hipotezę. Tai reiškia, jog mūsų laiko eilutė nėra normaliai pasiskirsčiusi ir pritaikytas GARCH(1,1)-M modelis gali grąžinti iškreiptus koeficientus bei netinkamai įvertinti volatilumą, nes bus laikoma, jog duomenų pasiskirstymas yra normalus, ko mūsų akcijų logaritmuotos grąžos neturi.

	statistika	p-reikšmė
S&P500TR	69.97	0.0000
DAX	147.22	0.0000
REIT	1549.34	0.0000

9 lentelė: Jarque-Bera testo normalumui tikrinti rezultatai, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.05$

Tokiu atveju naudosime alternatyvius GARCH-M modelius, kurie nereikalauja duomenų normalumo pasiskirstymo. Remiantis anksčiau apskaičiuotais asimetrijos ir eksceso koeficientais (žr. 5 lentelę), modelį skirtą nustatyti S&P500 rizikos ir grąžų ryšį sudarysime pasirenkant asimetrinį stjudent-t pasiskirstymą. Tuo tarpu DAX ir REIT pasirinksime universalios paklaidos pasiskirstymą.

6.3 Modelio hiper-parametrų parinkimas

Kadangi, sudarant GARCH(1,1)-M modelius, reikia pasirinkti atitinkamus hiperparametrus, patikrinome kiekvieno modelio Akaike (toliau AIC) kriterijaus reikšmę, pagal kurią atrinkome optimaliausią laiko atsilikimo parametro reikšmę kiekvienam modeliui su pasirinktais pasiskirstymais.
Išanalizavus (žr.10 lentelę) esančias AIC reikšmes, galima pastebėti, kad visų trijų indeksų (S&P500, DAX ir REIT) modelių, kurių laiko atsilikimo reikšmės yra 1, 2 ir 3, AIC yra mažiausias. Tai rodo, kad į modelį įtraukus iki 3 laiko atsilikimo narių, modelis geriausiai tiks duomenims.
Mažesnės šių atsilikimo reikšmių AIC reikšmės rodo geresnę pusiausvyrą tarp modelio sudėtingumo ir tinkamumo. Didėjant laiko atsilikimo nario reikšmei, AIC reikšmės pradeda taip pat didėti, o tai rodo, kad modelio tinkamumas mažėja.
Svarbu pažymėti, kad konkrečios atsilikimo reikšmės, kurios duoda mažiausią AIC, kiekvienam indeksui gali skirtis, kaip matyti iš lentelės. Todėl rekomenduojama pasirinkti 1, 2 arba 3 atsilikimo reikšmę pagal atitinkamą indeksą, kad būtų gautas tinkamiausias modelis, geriausiai atitinkantis duomenis.
Apibendrinant galima teigti, kad svarbu atsižvelgti į atsilikimo hiperparametrus GARCH-M(1,1) modelyje, kad būtų tinkamai atspindėtos laiko priklausomybės. Pasirinkome laiko atsilikimo reikšmę 1, su kuria sudaryti modeliai yra geriausi turimoms laiko eilutėms,

	S&P500	DAX	REIT
lag_1	**-1431.51**	**-1123.46**	**-1253.99**
lag_2	-1414.78	-1119.01	-1253.66
lag_3	-1375.83	-1117.29	-1250.18
lag_4	-1408.37	-1113.54	-1249.76
lag_5	-1404.92	-1110.34	-1244.05
lag_6	-1219.96	-1107.13	-1238.54
lag_7	-1399.26	-1105.71	-1237.80
lag_8	-1393.35	-1101.77	-1230.62
lag_9	26964.6	-1097.35	-1226.38
lag_{10}	26244.5	-1093.66	-1226.26
lag_{11}	-1382.56	-1092.60	-1220.24
lag_{12}	-1375.72	-1084.95	-1213.60

10 lentelė: Modelių AIC rezultatai keičiant GARCH-M(1,1) modelio laiko atsilikimo parametrą

6.4 Autokoreliacija

Sudarius tris skirtingus modelius su atitinkamais hiperparametrais, kuriuos parinkome anksėsniame skyriuje, prieš rezultatų aptarimą svarbu yra įsitikinti, jog pritaikyti modeliai yra tinkami duomenims, todėl reikia patikrinti ir sudarytų modelių liekanų autokoreliaciją. Vienas iš testų, kuris skirtas ištirti liekanų autokoreliacijas, yra Ljung-Box testas, kuriuo tikriname šias hipotezes:

$$\begin{cases} \mathrm{H_0} & : \text{ liekanos nėra autokoreliuotos} \\ \mathrm{H_A} & : \text{ liekanos yra autokoreliuotos} \end{cases}$$

Gauti rezultatai (žr.11 lentelę) rodo, jog S&P500, DAX ir REIT modelio liekanose nėra statistiškai reikšmingos autokoreliacijos, t.y. liekanų reikšmės yra atsitiktinės ir neturi jokio sisteminio ryšio tarpusavyje. Remiantis GARCH-M modelio prielaida apie autokoreliacijos nebuvimą, galime teigti, jog pritaikytas modelis yra tinkamas esantiems duomenims.

	statistika	p-reikšmė
S&P500TR	8.8883	0.5117
DAX	0.4321	0.5117
REIT	3.5353	0.0601

11 lentelė: Ljung-Box testo rezultatai autokoreliacijai tikrinti, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.05$

6.5 GARCH(1,1) modelio sudarymas S&P500, DAX, REIT

Pateikiami (žr.12 lentelę) GARCH(1,1)-M modelio rezultatai naudojant S&P500, DAX ir REIT logaritmuotas grąžas kaip priklausomus kintamuosius. Sudarant modelį buvo naudojami 384 stebėjimai po koregavimų. Ryšys tarp rizikos ir grąžos yra apskaičiuojamas naudojant sąlyginę dispersiją, su kuria yra susijęs κ koeficientas. Gautos modelio koeficientų reikšmės gali padėti nustatyti ryšį tarp rizikos ir grąžos, t.y. ar didelės rizikos prisiėmimas investuojant į konkrečią akciją lems didelę grąžą, ar ne.

Remiantis šiais rezultatais, galima teigti, kad analizuojamuose akcijų indeksuose egzistuoja ryšys tarp rizikos ir grąžos. Visais trimis atvejais su sąlyginiu kintamumu susiję κ koeficientai turi teigiamas reikšmes, o tai rodo teigiamą rizikos ir grąžos ryšį. Tačiau svarbu pažymėti, kad šie koeficientai nėra statistiškai reikšmingi. Koeficientų reikšmės suteikia daugiau informacijos apie rizikos ir grąžos santykį. Visų trijų modelių teigiama konstanta rodo teigiamą kiekvieno akcijų indekso grąžą, o statistinis reikšmingumas pastebėtas S&P500 atveju. Neigiami laiko atsilikimo nariai rodo galimą neigiamą ankstesnės grąžos poveikį dabartinei grąžai, nors jie yra statistiškai reikšmingi tik S&P500 atveju. β koeficientai rodo GARCH(1,1)-M komponento modelio parametrus, atspindinčius praeities kintamumo poveikį būsimam kintamumui. Jie statistiškai reikšmingi visuose trijuose modeliuose, o tai rodo teigiamą praeities ir ateities kintamumo ryšį.

Lyginant grąžos ir rizikos santykį tarp trijų akcijų, S&P500 pasižymi santykinai mažesne rizika ir grąža. Tuo tarpu DAX, skirtingai nuo S&P500, turi 3 kartus stipresnį ryšį tarp rizikos ir grąžos, tačiau, remiantis volatilumo koeficientu, REIT indeksas yra rizikingiausias ir pelningiausias. REIT indekso rizikos ir grąžos sąryšis yra stipriausias lyginant su S&P500 ir DAX.

	S&P500	DAX	REIT
$const$	0.0082	0.0059	0.0087
	(0.002)	(0.41)	(0.24)
lag_1	-0.0045	-0.041	-0.069
	(0.0001)	(0.94)	(0.48)
κ	0.33	0.92	1.19
	(0.78)	(0.69)	(0.68)
ω	0.0001	0.0004	0.0003
	(0.019)	(0.021)	(0.36)
α_1	0.203	0.168	0.155
	(0.0011)	(0.0061)	(0.38)
β_1	0.75	0.73	0.75
	(0.000)	(0.000)	(0.0005)

12 lentelė: GARCH-M(1,1) modelio rezultatai naudojant S&P500, DAX ir REIT akcijų grąžas

Apibendrinant galima teigti, kad nors κ koeficientai, susiję su rizikos ir grąžos santykiu, yra teigiami, tačiau jie nėra statistiškai reikšmingi, todėl net prisiimant didesnę riziką nereiktų tikėtis garantuotai didesnių grąžų.

7 CAPM modelio pritaikymas(S&P500)

7.1 Beta

Beta yra vienas iš pagrindinių kintamųjų, naudojamų CAPM (angl. Capital Asset Pricing Model) modelyje, kuris siekia apskaičiuoti aktyvo tikėtiną grąžą pagal jo sisteminę riziką.

Beta apskaičiuojama, naudojant tam tikro laikotarpio aktyvo grąžas ir lyginant jas su rinkos grąžomis. Jei aktyvo β yra lygi 1, tai reiškia, kad aktyvo rizika yra tokia pati kaip rinkos. Bet jeigu aktyvo beta yra didesnė už 1, tai jis laikomas rizikingesniu nei rinka, ir atvirkščiai.

Beta ir aktyvo grąža yra tiesiogiai proporcingos. Aktyvas su aukštesne beta turėtų gauti didesnę tikėtiną grąžą, kas atsispindėtų jo aukštesne riziką, o aktyvas su mažesne beta turėtų gauti mažesnę tikėtiną grąžą dėl jo mažesnės rizikos.

Beta apskaičiavimams naudojome S&P500 ir USRF akcijų grąžas. Įstačius reikšmes į formulę:

$$\beta_i = \frac{1.1917 \times 10^{-6}}{3.3477 \times 10^{-6}} = 0.57$$

Beta reikšmė gavosi lygi 0.57. Tai reiškia, jog S&P500 yra labiau pastovus nei rinka ir kai rinka pasikeičia per 1%, tai S&P500 pasikeičia tik per 0.57%. Apibendrinant, galime teigti, jog S&P500 yra mažiau rizikinga lyginant su rinka(išreikšta USRF), tačiau tai taip pat gali reikšti, kad tikėtina investicijos grąža bus irgi mažesnė.

7.2 CAPM

CAPM modelio apskaičiavimai grąžina tikėtiną investicijos grąžą per tam tikra laikotarpį. Mūsų atveju, kai beta yra 0.57, apskaičiuota tikėtina grąža per metus yra 4.7%.

$$R_i = 0.076 + 0.57(0.025 - 0.076) = 0.047$$

Investuotojas, kuris įsigyja aktyvą, kurio beta yra 0.57, tikėtųsi pasipelnyti bent 4.7% per metus. Tai galima pavadinti kaip kompensacija už prisiimta šios investicijos riziką.

Svarbu paminėti, kad reali investicijos grąžą gali skirtis nuo apskaičiuotos tikėtinos grąžos. Todėl palyginsime turimą realią S&P500 grąžą per 30 metų bei apskaičiuotą CAPM modelio grąžą.

S&P500 grąžos metinis vidurkis siekia 7.6% per metus. Lyginant su gauta tikėtina grąža per metus, reali grąžą yra didesnė investuotojo naudai. Skirtumas tarp realios ir tikėtinos grąžos yra 2.06%.

8 CAPM modelio pritaikymas(REIT)

8.1 Beta

Beta apskaičiavimams naudojome REIT ir USRF nerizikingos normos grąžas. Įstačius reikšmes į formulę:

$$\beta_i = \frac{6.2765 \times 10^{-7}}{3.3477 \times 10^{-6}} = 0.19$$

0.19 beta reikšmė rodo, kad REIT indeksas teigiamai koreliuoja su JAV nerizikinga norma. Tai reiškia, kad didėjant JAV nerizikingai normai, tikėtina, kad REIT indekso vertė didės, ir atvirkščiai. Šią teigiamą koreliaciją galima aiškinti kaip REIT turto savybę, kai jis linkęs gerai veikti didėjančių nerizikingų normų aplinkoje.
Taip pat, REIT beta, kuri yra 0.19, reiškia, kad ši investicija yra mažiau rizikinga, palyginti su visa rinka, nes yra mažiau jautrus rinkos svyravimams.

8.2 CAPM

Remiantis rezultatais, tikėtina REIT investicijos grąža, apskaičiuota taikant CAPM modelį, yra 7.31%, o vidutinė reali REIT investicijos grąža, virš nerizikingos normos, yra 8.42%.

$$R_i = 0.084 + 0.19(0.025 - 0.084) = 0.073$$

Skirtumas tarp tikėtinos grąžos ir faktinės grąžos yra mažas, todėl galima teigti, jog REIT investicijos rezultatai buvo beveik tokie patys, kokių tikėjosi investuotojai, remdamiesi CAPM modeliu.

9 CAPM modelio pritaikymas(DAX)

9.1 Beta

Remiantis skaičiavimais, atliktais naudojant Vokietijos nerizikingą palūkanų normą ir DAX grąžą, apskaičiuota DAX beta yra -0.89.

$$\beta_i = \frac{-4.44 \times 10^{-6}}{4.98 \times 10^{-6}} = -0,89$$

Beta reikšmė -0.89 rodo, kad DAX indeksas neigiamai koreliuoja su Vokietijos nerizikinga norma. Tai reiškia, kad Vokietijos nerizikingai normai didėjant, DAX indekso vertė gali mažėti, ir atvirkščiai. Šią neigiamą koreliaciją galima aiškinti kaip DAX indekso teigiamą savybę, kai jis linkęs gerai pasirodyti ekonominio neapibrėžtumo laikotarpiais ir taip apsisaugoti nuo rinkos rizikos.

9.2 CAPM

Pagal CAPM modelį apskaičiuota tikėtina DAX turto grąža yra 7.57%, o vidutinė metinė DAX turto grąža, virš nerizikingos normos, yra 5.14%.

$$R_i = 0.05 + (-0.89)(0.02 - 0.05) = 0.076$$

Skirtumas tarp tikėtinos grąžos ir faktinės grąžos rodo, kad DAX indekso rezultatai buvo prastesni, palyginti su tuo, ko tikėjosi investuotojai, remdamiesi CAPM modeliu.

10 Grąžos ir rizikos santykių tikrinimas

Iš prieš tai aptartų skyrių žinome, kad standartinis nuokrypis yra vienas iš rizikos matavimo matų, beta koeficientas siekia apskaičiuoti tikėtiną grąžą pagal sisteminę riziką. Metodus, aprašytus [19] straipsnyje pritaikėme ir savo turimiems duomenis, tačiau papildomai skaičiavome ir grąžų priklausomybę nuo standartinio nuokrypio. Slenkančios regresijos analizėje pasirinkome nagrinėti 30 metų laikotarpį ir duomenis dalinome į 10 lygių periodinių dalių.

Pagal gautus rezultatus 13, 14, 15 lentelėse matome, kad β koeficientų ir standartinio nuokrypio koeficientų p reikšmės < 0.05, todėl nulinę hipotezę atmetame ir negalime teigti, kad koeficientai statistiškai reikšmingai skiriasi nuo nulio (t.y. grąžos ir rizikos priklausomybė neegzistuoja). 13 lentelėje pateikti S&P500 aktyvo rezultatai ir šiuo atveju iš visų turimų laiko periodų labiausiai išsiskiria dvi paryškintos grupės, kurių p reikšmės leistų neatmesti nulinės hipotezės ir manyti, kad statistiškai reikšmingas ryšys egzistuoja. Papildomai paskaičiuojame ir gautų standartinių nuokrypių bei vidutinių mėnesinių grąžų koreliacija visiems aktyvams. Koreliacija arti 1 arba 1 leistų manyti, kad ryšys tarp rizikos ir grąžos yra ir didėjant arba mažėjant vienam, didėja arba atitinkamai mažėja kita. S&P500 koreliacija - 0.034, DAX koreliacija - 0.098 ir REIT aktyvo koreliacija - 0.096. Gautos koreliacijos reikšmės mažos ir nedaug skiriasi nuo 0, tai dar kartą patvirtina, kad grąžos priklausomybė nuo rizikos yra labai silpna arba nedaro didelės įtakos viena kitai. Visų trijų aktyvų koreliacijos koeficientai statistiškai reikšmingai nesiskiria nuo 0.

Pradžia	Pabaiga	β koef.	β p-value	SD koef.	SD p-value
1998-12-31	2001-04-30	-0.0065	0.67	-0.14	0.88
2001-05-31	2003-09-30	0.00067	0.86	0.015	0.98
2003-10-31	2006-02-28	-0.016	0.19	3.3	0.07
2006-03-31	**2008-07-31**	**-0.019**	**0.014**	**0.85**	**0.008**
2008-08-29	2010-12-31	-0.00051	0.91	0.42	0.56
2011-01-31	2013-05-31	0.00028	0.98	1.13	0.22
2013-06-28	2015-10-30	0.0073	0.4	1.15	0.74
2015-11-30	**2018-03-30**	**0.021205**	**0.06**	**1.18**	**0.0077**
2018-04-30	2020-08-31	-0.002	0.92	0.27	0.79
2020-09-30	2023-01-31	-0.023	0.13	-0.23	0.42

13 lentelė: S&P500 aktyvo Slenkančios regresijos rezultatai laiko periodui

Pradžia	Pabaiga	β koef.	β p-value	SD koef.	SD p-value
1998-12-31	2001-04-30	-0.00061	0.94	0.35	0.8
2001-05-31	2003-09-30	0.0014	0.83	1.59	0.64
2003-10-31	2006-02-28	-0.0054	0.45	0.98	0.23
2006-03-31	2008-07-31	0.0047	0.3	0.54	0.32
2008-08-29	2010-12-31	-0.0012	0.64	-0.12	0.28
2011-01-31	2013-05-31	-0.00089	0.92	0.57	0.58
2013-06-28	2015-10-30	-0.002	0.58	-0.052	0.99
2015-11-30	2018-03-30	-0.0023	0.86	0.061	0.69
2018-04-30	2020-08-31	-0.006	0.63	0.69	0.12
2020-09-30	2023-01-31	-0.014	0.24	0.32	0.46

14 lentelė: REIT aktyvo Slenkančios regresijos rezultatai laiko periodui

Pradžia	Pabaiga	β koef.	β p-value	SD koef.	SD p-value
1998-12-31	2001-04-30	-0.0014	0.79	0.16	0.78
2001-05-31	2003-09-30	-0.0096	0.25	0.23	0.14
2003-10-31	2006-02-28	0.024	0.61	-0.25	0.84
2006-03-31	2008-07-31	0.00076	0.97	0.06	0.89
2008-08-29	2010-12-31	0.0018	0.9	-0.24	0.46
2011-01-31	2013-05-31	-0.002	0.85	0.59	0.26
2013-06-28	2015-10-30	-0.006	0.49	-0.41	0.82
2015-11-30	2018-03-30	0.0015	0.7	0.52	0.18
2018-04-30	2020-08-31	-0.0056	0.75	0.3	0.65
2020-09-30	2023-01-31	0.0045	0.86	-0.35	0.56

15 lentelė: DAX aktyvo Slenkančios regresijos rezultatai laiko periodui

11 Rezultatai

Atlikus pradinę duomenų analizę išsiaiškinome, kad turimų aktyvų kainos, mėnesinės grąžos ir grąžos virš NI nebuvo pastovios ir svyravo priklausomai nuo akcijas veikiančių kitų faktorių. Atsižvelgiant į 32 metų laikotarpio turimus duomenis, didžiausią vidutinę metinę grąžą generuoja REIT aktyvas, kuri lygi 8.42%, tačiau šio aktyvo standartinis nuokrypis nedaug skiriasi nuo didžiausios turimos reikšmės, todėl galime spręsti, kad šis aktyvas yra nestabilus. Stabiliausias iš visų turimų aktyvų - S&P500, nes jo vidutinė grąža aukšta, o standartinis nuokrypis žemas.

Šarpo koeficientas vertinantis vidutinės metinės grąžos ir rizikos santykį parodė, kad nei vienas aktyvas nėra efektyvus, nors ir generuoja teigiamą grąžą, viršijančią rizikos nerizikingo aktyvo grąžą. Šie skaičiavimai gali būti netikslus, nes pagal asimetrijos ir eksceso rodiklius, jie statistiškai reikšmingai skiriasi nuo 0, t.y. duomenys nėra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį.

Apskaičiuotos rizikos ir sąlyginės rizikos reikšmės parodė, kad DAX aktyvas turi didžiausią tikimybę prarasti pelno dalį esant 0.01%, 0.05% ir 0.1% reikšmingumo lygmenims. Pagal šiuos reikšmingumo lygmenys mažiausią dalį pelno gali prarasti S&P500 aktyvas.

Norint nustatyti, ar tiriamų akcijų indeksuose egizstuoja ryšys tarp rizikos ir grąžos buvo sudaryti ir įvertinti GARCH-M modeliai. Visais trim atvejais buvo pastebėtas teigiamas ryšys. nes κ koeficientai, kurie yra susiję su sąlygine dispersija, buvo teigiami. Tačiau svarbu atkreipti dėmesį, kad šie rezultatai nepasiekė statistinio reikšmingumo lygio, tai reiškia, jog tai rodo, kad ryšys yra silpnas. S&P500 pasižymėjo mažesne rizika ir grąža, o REIT indeksas stipriausių rizikos ir grąžos ryšiu. Taip pat, pagal apskaičiuotą viso laikotarpio aktyvo sisteminį rizikingumą arba, kitaip, jautrumą prieš rinkos svyravimus, S&P500 yra mažiau jautrus rinkos svyravimams ir mažiau rizikingas palyginti su rinka. Tuo nepasižymi DAX indeksas - Vokietijos nerizikingai normai didėjant, DAX indekso vertė gali mažėti. REIT pasirodė turinti silpniausią teigiamą koreliaciją su JAV rinka.

Atlikus pagrindinį vidutinių grąžų ir rizikos palyginimą išsiaiškinome, kad nei β koeficientas, nei standartinis nuokrypis nėra statistiškai reikšmingi grąžos priklausomybei. Tai reiškia, kad tarp šių aktyvų generuojamų grąžų ir rizikos ryšys yra silpnas bei investuojant į šias akcijas papildoma rizika nebūtinai padidina tikėtiną grąžą.

Literatūra

[1] Svetlana Saranda Audrius Dzikevičius. “Can financial ratios help to forecast stock prices?” In: *Security and Sustainability Issues* (2011 m.), p. 147–157.

[2] Daowei Zhang Changyou Sun. “Assessing the financial performance of forestry-related investment vehicles: Capital Asset Pricing Model vs Arbitrage Pricing Theory”. In: *Amer. J. Agr.l Econ* (2001 m.), p. 617–628.

[3] Aswath Damodaran. “Value and Risk: Beyond Betas”. In: *Stern School of Business* (2003 m.).

[4] Žana Grigaliūnienė Diana Cibulskienė. “Modernios portfelio teorijos genezė ir vystymasis”. In: *Ekonomika ir vadyba: aktualijos ir perspektyvos* Vol. 1, No. 8 (2007 m.), p. 52–61.

[5] Kenneth R. French Eugene F. Fama. “The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence”. In: *Journal of Economic Perspectives* Vol. 18, No. 3 (2004 m.), p. 25–46.

[6] Kenneth R. French Eugene F. Fama. “The Cross-Section of Expected Stock Returns Conditions of Risk”. In: *The Journal of Finance* Vol. 47, No. 2 (1992 m.).

[7] Robert F.Engle. “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”. In: *Econometrica* Vol. 50, No. 4 (1982 m.), p. 987–1008.

[8] Craig W. French. “The Treynor capital asset pricing model”. In: *Journal Of Investment Management* Vol. 1, No. 2 (2003 m.), p. 60–72.

[9] Stan Uryasev Gaia Serraino. “Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization”. In: *Gobal Fraud Risk Management, American Express, Phoenix, Arizona* (2008 m.).

[10] Campbell R. Harvey John R. Graham. “The theory and practice of corporate finance: evidence from the feld”. In: *Journal of Financial Economics* Vol. 60 (2001 m.), p. 187–243.

[11] Gitanas Kanverevyčius. “Finansai ir investicijos, III atnaujintas leidinys”. In: *Stern School of Business* (2009 m.), p. 904.

[12] Valdemaras Katkus. *Privačioji bankininkystė (asmeninio turto valdymo principai).* Lietuvos bankininkystės draudimo ir finansų institutas, 2000 m.

[13] Allen Kenney. “Outlook for REITs in 2009 Similar to 2008, Analysts Say”. In: ().

[14] Stanislav Uryasev R. Tyrrell Rockafellar. “Optimization of conditional value-at-risk”. In: *Implemented in Portfolio Safeguard by AORDA.com* ().

[15] Robert S. Harris Robert F. Bruner. Kenneth M. Eades. ir Robert C. Higgins. “Best Practices In Estimating The Cost of Capital: Survey and Synthesis”. In: *Financial Practice and Education* (1998 m.), p. 13–28.

[16] Jeff Rohde. “What is a good ROI for rental property in 2022?” In: *Roofstock* Vol. 19, No. 3 (2023 m.), p. 425–442.

[17] Stephen A. Ross. “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing”. In: *The Journal of economics theory* Vol. 13 (1976 m.), p. 341–360.

[18] William F. Sharpe. “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”. In: *The Journal of Finance* Vol. 19, No. 3 (1964 m.), p. 425–442.

[19] Iqbal Thonse Hawaldar Soumya Shetty Janet Jyothi Dsouza. “Rolling regression technique and cross-sectional regression: A tool to analyze Capital Asset Pricing Model”. In: *Investment Management and Financial Innovations* Vol. 18, No. 4 (2021 m.), p. 241–251.

[20] Neil D. Pearson Thomas J. Linsmeier. “Value at Risk”. In: *Financial Analysts Journal* Vol. 56, No. 2 (2000 m.), p. 47–67.

[21] Eimutis Valakevičius. *Investicijų mokslas.* Kaunas : Technologija, 2007 m. ISBN: 9986139406.

12 Priedas

```python
# Susidarome bendrą duomenų rinkinį DAX aktyvui.
# Kiti aktyvai skaičiuojami taip pat tik pakeičiant kintamųjų
↪ pavadinimus.

DAX = pd.concat([Index[["Unnamed: 6", "DAX Index"]],
↪ RiskFree["Germany RF Index"]], axis=1)

# Skaičiuojame DAX investicinį indeksą. (ROI)

def index(df, col):
    first_val = df[col].iloc[0]
    index = df[col].div(first_val)
    return index

DAX['Index DAX'] = index(DAX,"DAX Index")

# Skaiciuojame DAX grąžą per mėnesį

def Return(df, col):
    Return = df[col].div(df[col].shift())  # divide each value
     ↪ by the previous value
    Return.iloc[0] = 1  # set the first value to 1
    Return = (Return - 1)  # subtract 1 from each value
    return Return

DAX['Return DAX'] = Return(DAX,"Index DAX")


# Skaičiuojamę Germany RF grąžą per menesį
# (DAX ir S&P500 aktyvams skaičiavome US RF grąžą)

def ReturnUS(df, col):
    ReturnUS = df[col].div(df[col].shift()) previous value
    ReturnUS.iloc[0] = 1
    ReturnUS = (ReturnUS - 1)
    return ReturnUS

DAX['Return GERRF'] = ReturnUS(DAX,"Germany RF Index")

# DAX mėnesinės grąžos virš nerizikingos investicijos
def Return_month(df, col1, col2):
    Return_month = df[col1] - df[col2]  # divide each value by
     ↪ the first value
```

```python
    return Return_month

DAX['Return Month'] = Return_month(DAX,"Return DAX","Return
↪  GERRF")

# Nusibraižome kainos ir grąžų pokytį DAX aktyvui
fig, axs = plt.subplots(2, 1, figsize=(16, 12), sharex=True)

axs[0].plot(DAX['Unnamed: 6'], DAX['DAX Index'],linewidth=2)
axs[0].set_ylabel('Akcijos kaina',fontsize=20)
axs[0].set_title('DAX mėnesinis akcijų kainos pokytis',size=20)

axs[1].plot(DAX['Unnamed: 6'], DAX['Return DAX'], linewidth=2)
axs[1].set_ylabel('Grąžos dydis',fontsize=20)
axs[1].set_title('DAX mėnesinis grąžų pokytis',size=20)

plt.show()

# Visų grąžų virš nerizikingos investicijos linijinė diagrama

fig, axs = plt.subplots(1, 1, figsize=(15, 10), sharex=True)

# Pirma ašis (DAX)
plt.plot(DAX['Unnamed: 6'], DAX['Return Month'], linewidth=2,
↪  label='DAX')
plt.plot(S_P500['Unnamed: 0'], S_P500['Return Month'],
↪  linewidth=2, label='S&P500')
plt.plot(REIT['Unnamed: 2'], REIT['Return Month'], linewidth=2,
↪  label='REIT')
plt.ylabel('Grąža', fontsize=20)
plt.title('Grąžos virš NI', size=20)
plt.legend(fontsize=16)

# Visų mėnesių suma
num_month = S_P500.shape[0] - 1
print('Number of rows:', num_month)


# Vidutinės grąžos virš Nerizikinos Investicijos skaičiavimas

Return_NI_DAX = ((DAX["Index DAX"].iloc[-1] / DAX["Germany RF
↪  Index"].iloc[-1])**(12/num_month))-1

# Atliekame testą patikrinti ar vidurkis statistiškai
↪  reikšmingai
```

```python
# skiriasi nuo 0. DAX aktyvui.

t_stat, p_value = ttest_1samp(DAX['Return Month'], 0)
print("T-statistic value: ", t_stat)
print("P-Value: ", p_value)

# Apskaičiuojame standartinį nuokrypį

std_dev_DAX = (DAX["Return Month"].std())*np.sqrt(12)

# Sharpe koeficiento skaičiavimas
Sharpe_Ratio_DAX = Return_NI_DAX / std_dev_DAX

# Asimetrijos ir eksceso skaičiavimas

DAX_skew = skew(DAX['Return Month'])
DAX_kurt = kurtosis(DAX['Return Month'])

# Patikriname ar šie rodikliai statistiškai reikšmingai
↪ skiriasi
# nuo normaliojo skirstinio.
DAX_skew_test = skewtest(DAX['Return Month'])
DAX_kurt_test = kurtosistest(DAX['Return Month'])

# VaR ir CVaR skaičiavimas

VaR999_SP = Return_NI_SP + (std_dev_SP * norm.ppf(0.001))
VaR95_SP = Return_NI_SP + (std_dev_SP * norm.ppf(0.05))
VaR99_SP = Return_NI_SP + (std_dev_SP * norm.ppf(0.01))

VaR999_DAX = Return_NI_DAX + (std_dev_DAX * norm.ppf(0.001))
VaR95_DAX = Return_NI_DAX + (std_dev_DAX * norm.ppf(0.05))
VaR99_DAX = Return_NI_DAX + (std_dev_DAX * norm.ppf(0.01))

z999 = norm.ppf(1-con999)
z95 = norm.ppf(1-con95)
z99 = norm.ppf(1-con99)

CVaR999_DAX = 1 * (Return_NI_DAX - std_dev_DAX *
↪ (norm.pdf(z999)/(1-con999)))
CVaR95_DAX = 1 * (Return_NI_DAX - std_dev_DAX *
↪ (norm.pdf(z95)/(1-con95)))
CVaR99_DAX = 1 * (Return_NI_DAX - std_dev_DAX *
↪ (norm.pdf(z99)/(1-con99)))
```

```
# CAPM modelio taikymas

Market_Return_DAX = ((DAX["Germany RF Index"].iloc[-1] /
↪  DAX["Germany RF Index"].iloc[1])**(12/num_month))-1
covariance_DAX = DAX["DAX return"].cov(DAX["RF return"])
variance_DAX = DAX["RF return"].var()
beta_DAX = covariance_DAX / variance_DAX
print("Beta of DAX:", beta_DAX)
CAPM_DAX = Return_NI_DAX + beta_DAX *
↪  (Market_Return_DAX-Return_NI_DAX)
print("CAPM model value of DAX:", CAPM_DAX)


# Apsakičiuojame grąžų logaritmus

def Log_Return(df, col):
    log_return = np.log(df[col]) - np.log(df[col].shift())
    log_return.iloc[0] = 0
    return log_return

def Return_month_log(df, col1, col2):
    Return_month_log = df[col1] - df[col2]
    return Return_month_log


# Prielaidos dėl duomenų stacionarumo tikrinimas
result_DAX = adfuller(DAX['Monthly log return'])
print('ADF Statistic of DAX: %f' % result_DAX[0])
print('p-value: %f' % result_DAX[1])
print('Critical Values:')
for key, value in result_DAX[4].items():
print('\t%s: %.3f' % (key, value))

# Liekanų nepriklausomumo tikrinimas
sm.stats.acorr_ljungbox(DAX['Monthly log return'],  lag = [1],
↪  return_df=True)

# Prielaidos apie liekanų normalųjį pasiskirstymą

jb_stat_DAX, jb_pval_DAX = jarque_bera(DAX['Monthly log
↪  return'])
if jb_pval_DAX < 0.05:
    print("The distribution of DAX returns is significantly
     ↪  non-normal (p < 0.05)", jb_pval_DAX)
else:
```

```
    print("The distribution of DAX returns is not significantly
     ↪  non-normal (p >= 0.05)")
print(f"Jarque-Bera test statistic: {jb_stat_DAX:.4f}")


# Optimaliausių LAG parinkimas GARCH modeliui

warnings.filterwarnings("ignore")

def garch_lag(df, col, max_lag=13):
    best_lag = None
    best_aic = np.inf

    for lag in range(1, max_lag + 1):
        gim = ARCHInMean(df[col], lags=[lag],
         ↪  volatility=GARCH(p=1, q=1),
         ↪  distribution=GeneralizedError(), form='var')
        res = gim.fit(disp='off')
        aic = res.aic
        if aic < best_aic:
            best_lag = lag
            best_aic = aic

    print("Best Lag Structure:", [best_lag])
    print("AIC:", best_aic)

with warnings.catch_warnings():
    warnings.simplefilter("ignore")
    print('Best lag for S_P500')
    garch_lag(S_P500, "Monthly log return", max_lag=12)
    print('Best lag for DAX')
    garch_lag(DAX, "Monthly log return", max_lag=12)
    print('Best lag for REIT')
    garch_lag(REIT, "Monthly log return", max_lag=12)

# GARCH-IN-MEAN modelio sudarymas

GARCH_DAX = ARCHInMean(DAX['Monthly log return'], lags=[1],
 ↪  volatility=GARCH(p=1, q=1),
 ↪  distribution=GeneralizedError(), form='var')
GARCH_DAX_results = GARCH_DAX.fit(disp='off')

print(GARCH_DAX_results.summary())
```

```
lags = [1,2,3, 4,5,6,7, 8,9,10,11, 12]  # Specify the lag
↪ values to test
for lag in lags:
    model = ARCHInMean(DAX['Monthly log return'], lags=[lag],
    ↪ volatility=GARCH(p=1, q=1),
    ↪ distribution=GeneralizedError(), form='var')
    result = model.fit(disp='off')

    std_residuals = result.resid /
    ↪ result.conditional_volatility

    squared_residuals = np.square(std_residuals)

    lb_test = sm.stats.acorr_ljungbox(squared_residuals,
    ↪ lags=lag, return_df=True)

    significant_lags = lb_test['lb_pvalue'] < 0.05

    significant_lags_indices =
    ↪ lb_test[significant_lags].index.tolist()

    if len(significant_lags_indices) > 0:
        print(f"Significant lags with ARCH effects
        ↪ (lag={lag}):")
        for lag in significant_lags_indices:
            print(f"Lag {lag}: p-value = {lb_test.loc[lag,
            ↪ 'lb_pvalue']}")
    else:
        print(f"No significant lags with ARCH effects
        ↪ (lag={lag}).")


# Slenkančios regresijos taikymas

window_size = 96
rolling_avg_returns = []
rolling_beta_values = []
rolling_std_values = []

for i in range(window_size, len(DAX["Monthly return"]) + 1):
    subset = DAX["Monthly return"].iloc[i-window_size:i]
    subset_complex = subset.apply(lambda x: complex(x, 0))

    abs_subset = np.abs(subset_complex)
```

```
    sign_subset = np.sign(subset_complex)

    # vidurkiai
    avg_return = np.float_power(abs_subset.iloc[-1] /
     ↪  abs_subset.iloc[0], 1/window_size) - 1
    avg_return = avg_return * sign_subset.iloc[0]  # jeigu
     ↪  buvo minusas pries tai, ikeliam minusa, kad grazos
     ↪  butu logiskos

    rolling_avg_returns.append(avg_return)
    # beta
    beta_subset = DAX['DAX return'].iloc[i-window_size:i]
    rolling_beta = beta_subset.cov(DAX['RF return']) / DAX['RF
     ↪  return'].var()
    rolling_beta_values.append(rolling_beta)
    # std
    rolling_std = subset.std() * np.sqrt(12)
    rolling_std_values.append(rolling_std)


rolling_beta = pd.Series(rolling_beta_values + [np.nan] *
 ↪  (len(DAX["DAX return"]) - len(rolling_beta_values)))
rolling_avg_returns = pd.Series(rolling_avg_returns + [np.nan]
 ↪  * (len(DAX["Monthly return"]) - len(rolling_avg_returns)))
rolling_std = pd.Series(rolling_std_values + [np.nan] *
 ↪  (len(S_P500["Monthly return"]) - len(rolling_std_values)))

# Duomenis išsisaugome naujame duomenų rinkinyje

rolling_df = pd.DataFrame({
    'Date':
     ↪  DAX['Date'].iloc[window_size-1:].reset_index(drop=True),
    'Rolling Avg': rolling_avg_returns,
    'Rolling Beta': rolling_beta,
    'Rolling Std': rolling_std
})

# Pašaliname trūkstamas (NAN) reikšmes
rolling_df.dropna(inplace=True)

# Tikriname ar ryšys tarp beta koeficientų ir grąžų yra
# statistiškai reikšmingi

rolling_avg_returns = rolling_df['Rolling Avg'].apply(lambda x:
 ↪  x.real)
```

```
y = rolling_avg_returns
X = rolling_df['Rolling Beta']

X = sm.add_constant(X)

model = sm.OLS(y, X).fit()

print(model.summary())

# Tikriname ar ryšys tarp standartinio nuokrypio ir grąžų yra
# statistiškai reikšmingi

rolling_avg_returns = rolling_df['Rolling Avg'].apply(lambda x:
↪  x.real)

y = rolling_avg_returns
X = rolling_df[['Rolling Std', 'Rolling Beta']]

X = sm.add_constant(X)

model = sm.OLS(y, X).fit()

print(model.summary())


# Kryžminio pjūvio regresijos taikymas

subperiod_size = 29
num_subperiods = 10

regression_results_df = pd.DataFrame(columns=['Subperiod',
↪  'Date From', 'Date To', 'Coef Beta', 'Pval Beta', 'Coef
↪  Std', 'Pval Std'])

for i in range(num_subperiods):
    start_index = i * subperiod_size
    end_index = start_index + subperiod_size
    subset = rolling_df.iloc[start_index:end_index]

    x_std = subset['Rolling Std']
    x_beta = subset['Rolling Beta']
    y = subset['Rolling Avg']

    x = pd.concat([x_std, x_beta], axis=1)
```

```
    x = sm.add_constant(x)
    model = sm.OLS(y, x)
    results = model.fit()

    coef_beta = results.params['Rolling Beta']
    pval_beta = results.pvalues['Rolling Beta']
    coef_std = results.params['Rolling Std']
    pval_std = results.pvalues['Rolling Std']

    subperiod_dates = subset.index
    date_from = subperiod_dates[0]
    date_to = subperiod_dates[-1]

    regression_results_df = regression_results_df.append({
        'Subperiod': i + 1,
        'Date From': date_from,
        'Date To': date_to,
        'Coef Beta': coef_beta,
        'Pval Beta': pval_beta,
        'Coef Std': coef_std,
        'Pval Std': pval_std
    }, ignore_index=True)

print(regression_results_df)

# Koreliacijos skaičiavimas sugeneruotoms grąžoms ir
↪   standartinio
# nuokrypio rodikliams


corr, p_value = spearmanr(rolling_df1['Rolling Avg'],
↪   rolling_df1['Rolling Std'])
print('Spearman correlation: %.3f' % corr)
print('p-value: %.3f' % p_value)
```