



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI II

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ EĞİTİMİ LİSANS PROGRAMI

PROF. DR. HARUN REŞİT YAZGAN

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ
ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ EĞİTİMİ LİSANS PROGRAMI



YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI II

Prof. Dr. Harun Reşit Yazgan

Yazar Notu

Elinizdeki bu eser, İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi’nde okutulmak için hazırllanmış **bir ders notu niteliğindedir.**

İÇİNDEKİLER

1.	MARKOV ZİNCİRİ	1
1.1.	Markov Zincirleri	4
1.2.	n Adımlı Geçiş Olasılıkları.....	7
1.3.	Kararlı Durum Olasılıkları.....	9
2.	MARKOV ZİNCİRLERİNİN SINIFLANDIRILMASI.....	15
2.1.	Markov Zincirinin Sınıflandırılması.....	18
2.2.	Kararlı Durum Olasılıkları ve Ortalama İlk Geçiş Zamanları.....	20
3.	MARKOV ZİNCİRİNDE DURUM DEĞİŞİMİ İÇİN ADIM SAYISI	27
3.1.	Katı Stokastik Matris	30
3.2.	Yutucu Zincirler	32
4.	YUTUCU ZİNCİRLER	38
4.1.	Yutucu Zincirler İle İlgili Örnekler	41
4.1.1.	Örnek 1:.....	41
4.1.2.	Örnek 2:.....	42
4.1.3.	Örnek 3:.....	45
5.	KUYRUK PROBLEMLERİ.....	50
5.1.	Kuyruk Teorisi.....	53
5.2.	Kuyruk Teorisinde Genel Kavramlar	54
5.3.	Notasyonlar.....	56
5.4.	M/M/1/GD/ ∞/∞ Kuyruk Kapasitesi Sınırsız.....	58
5.5.	M/M/1/GD/c/ ∞ Kuyruk Kapasitesi Sınırlı	60
6.	KUYRUK PROBLEMLERİ (DEVAM)	65
6.1.	(M/M/s/GD/ ∞/∞) Çok Kanallı Kuyruk Sistemleri	68
6.2.	Seri Kuyruk Sistemleri	70
6.3.	Açık Kuyruk Sistemleri.....	71
7.	AĞ MODELLERİ (ŞEBEKE ANALİZİ).....	77
7.1.	Ağ Modelleri (Şebeke Analizi).....	80
7.2.	En Kısa Yol Problemleri.....	80
7.3.	Dijkstra Algoritması	83
8.	CPM VE KRİTİK YOL	90

8.1.	Ağ Modelleri.....	93
8.2	CPM.....	95
9.	PERT VE PROJE SÜRESİNİ KISALTMA	102
9.1.	PERT	105
9.2.	Proje Süresinin Kısaltılması Ve Zaman-Maliyet Analizi	108
9.3.	Hangi Faaliyet Kısaltılmalı.....	109
10.	ENVANTER MODELLERİ.....	114
10.1.	Envanter Modelleri	117
10.2.	Ekonomik Sipariş Miktarı (EOQ).....	117
10.3.	Elde Tutma Maliyetinin Envanter Değeri Cinsinden.....	119
10.4.	Miktar Üzerinde İndirim Uygulandığı Durumlar	120
11.	STOKASTİK ENVANTER MODELLERİ.....	126
11.1.	Sürekli Üretim Hızı Olduğu Durumda EOQ	129
11.2.	Yok Satmaya (Negatif Stok) İzin Verildiği Durumda	130
11.3.	Talebin Belirsiz Olduğu Durumda.....	131
11.4.	Geciken Sipariş Karşılanmadığı Durumda	134
12.	HİZMET SEVİYESİ VE TEKRAR SİPARİŞ VERME NOKTALARI	139
12.1.	Emniyet Stokunun Bulunmasında Servis Seviyesi Yaklaşımı.....	142
12.2.	SLM ₁	142
12.3.	SLM ₂	148
13.	DİNAMİK PROGRAMLAMA	152
13.1.	Deterministik Dinamik Programlama	155
14.	PROBABİLİSTİK DİNAMİK PROGRAMLAMA	164
14.1.	Probabilistik Dinamik Programlama.....	167

1. MARKOV ZİNCİRİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

- Markov Aanalizi
- n Adımlı Geçiş Olasılıkları
- Kararlı Durum Olasılıkları

Giriş

Bu bölümde Markov analizi konusu işlenecektir. Öncelikli olarak rassal değişkenlerin değişimlerinin modellenmesi üzerinde durulacaktır. Başlangıç matrisi ve sonrasında ise n durum kararlı matris ve kararlı durum olasılıkları üzerinde durulacaktır.

1.1. Markov Zincirleri

Bazen rassal bir değişkenin zaman içerisinde nasıl değiştiğiyle ilgileniriz. Mesela; bir işletmenin Pazar payı değişimini incelemek isteriz. Rassal bir değişkenin gelişimini incelemek stokastik süreçler içerir. Markov Zincirleri eğitim, pazarlama, sağlık, finans, muhasebe ve üretim gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Kesikli Stokastik Proses: Bir sistemin karakteristiklerini belirli bir zaman aralığında kesikli olarak gözlemlediğimizi düşünelim. X_t t anındaki sistem karakteristiği değerimiz olsun. Çoğu durumda t anından evvel X_t değeri bilinmez ve rasgele bir değer olarak da görülebilir.

Kesikli zamanlı stokastik bir süreç basitçe, rassal X_0, X_1, X_2, \dots , değişkenleri arasındaki ilişkinin tanımıdır. Diğer bir deyişle stokastik süreç, zaman ile indislenmiş rassal değişkenlerin bir dizisidir.

Markov Zinciri: Kesikli zamanlı stokastik sürecin özel bir çeşidine “Markov Zinciri” denir. Markov zincirinde mevcut durum sadece bir önceki duruma bağlı olarak değişir yani geçişteki diğer durumları göz önüne almaz. Markov zincirinde, mevcut durumun açıklaması, sürecin gelecekteki değişimini etkileyebilecek tüm bilgiyi kapsar. Gelecek durumlara belirli bir şekilde değil, olasılık olarak bir süreçle ulaşılacaktır.

Herhangi bir anda sistem belirli bir olasılık dağılımına bağlı olarak kendi durumundan başka bir duruma geçebilir veya aynı durumda kalabilir. Durumda olan değişiklikler geçiş olarak bilinir ve çeşitli durum değişimleriyle ilişkili olasılıklar da geçiş olasılıkları olarak adlandırılır.

$$P(X_{t+1}=j|X_t=i)=p_{ij}$$

Burada p_{ij} sistemin t zamanında i durumundayken, $t+1$ zamanında da j durumunda olma olasılığını ifade etmektedir. Yani p_{ij} bir geçiş olasılığıdır. Bu şekilde her bir durumdan bir diğerine geçiş olasılıklarını ifade ettiğimizde de ortaya geçiş olasılıkları matrisi çıkar.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1s} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{s1} & P_{s2} & \dots & P_{ss} \end{bmatrix}$$

Herhangi bir t anında durum i olarak verilirse, proses $t+1$ anında herhangi bir yerde olabilir. Yani her bir i için;

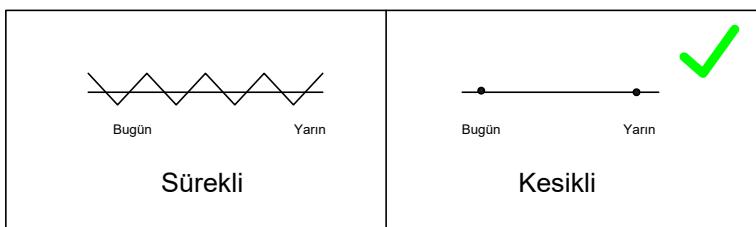
$$\sum_{j=1}^{j=s} P(X_{t+1} = j | P(X_t = i)) = 1$$

$$\sum_{j=1}^{j=s} P_{ij} = 1$$

Geçiş matrisinin özellikleri:

1. Geçiş matrisi kare matris olmalı, yani her bir durumdan bir diğerine geçiş olasılığı belirtilmelidir.
2. Tüm girdiler olasılık değerleri olduğu için 0 ile 1 arasında olmalıdır.
3. Geçiş matrisindeki her bir satırdaki girdilerin toplamı 1'e eşit olmalıdır.

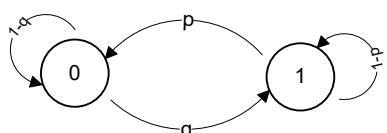
Örnek: Bir makinanın n 'inci günün başlangıcında çalışıyor ya da bozuk olduğunu varsayıyalım. Eğer makine bugün çalışıyor ise p olasılığı ile yarın bozuk olacaktır. Eğer makine bugün bozuk ise q olasılığı ile yarın çalışıyor olacaktır. Buna göre makinenin olası çalışma durumlarını belirleyelim, geçiş diyagramını çizip geçiş matrisini yazalım.



X_n : n 'inci gün başlangıcında makinenin durumu

$$X_1 = \begin{cases} 0, & n\text{'inci gün başlangıcında makine bozuk} \\ 1, & n\text{'inci gün başlangıcında makine çalışıyor} \end{cases}$$

Geçiş diyagramı şöyledir:



Geçiş matrisi şöyledir:

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-q & q \\ 1 & p & 1-p \end{array}$$

Örnek: Bir kutuda başlangıçta 2 boyasız top vardır. Rasgele bir top seçilir ve aynı anda bir bozuk para atılır. Eğer seçilen top boyasız ve bozuk para tura gelirse boyasız top kırmızıya, para yazı gelirse de siyaha boyanır. Eğer seçilen top boyalısa bozuk paranın durumuna bakılmaksızın rengi değiştirilir. (Siyah ise kırmızıya, kırmızı ise siyaha) Bu modeli stokastik proses olarak modellersek, herhangi bir zamanki durumu $[u \ r \ b]$ vektörüyle açıklayabiliriz. (u kutudaki boyasız top sayısını, r kutudaki kırmızı top sayısını, b ise kutudaki siyah top sayısını gösterir.) Başlangıçta $X_0=[2 \ 0 \ 0]$ olarak veriliyor. İlk para atışından sonra durum vektörü $[1 \ 1 \ 1]$

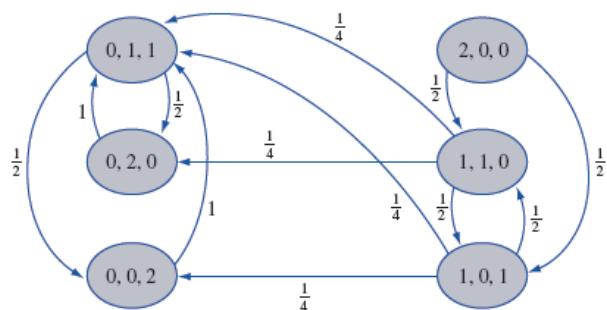
$[0]$ veya $[1 \ 0 \ 1]$ olabilir. Buradan açıkça X_t 'ler arasında bir bağlantı olması gerektiği görülür. Örneğin; $X_t=[0 \ 2 \ 0]$ ise; $X_{t+1}=[0 \ 1 \ 1]$ olacağından emin olabiliriz.

Kutunun içerisinde topların durumu bir önceki duruma bağlı olarak değişir. Kurallara göre problemin geçiş matrisi aşağıdaki gibi olacaktır:

	$[0 \ 1 \ 1]$	$[0 \ 2 \ 0]$	$[0 \ 0 \ 2]$	$[2 \ 0 \ 0]$	$[1 \ 1 \ 0]$	$[1 \ 0 \ 1]$
$P=$	$[0 \ 1 \ 1]$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
	$[0 \ 2 \ 0]$	1	0	0	0	0
	$[0 \ 0 \ 2]$	1	0	0	0	0
	$[2 \ 0 \ 0]$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$[1 \ 1 \ 0]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$
	$[1 \ 0 \ 1]$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$

Örneğin; $X_t=[1 \ 1 \ 0]$ olsun. X_{t+1} olduğunda $\frac{1}{2}$ olasılıkla kırmızı topu seçip siyaha boyama durumu $[1 \ 0 \ 1]$, $\frac{1}{2}$ olasılıkla renksiz topu seçip $\frac{1}{4}$ olasılıkla kırmızıyla $[0 \ 2 \ 0]$ ve $\frac{1}{4}$ olasılıkla siyaha boyama durumları $[0 \ 1 \ 1]$ söz konusudur.

Geçiş olasılıkları matrisinin grafik gösterimi aşağıdaki gibi olur:

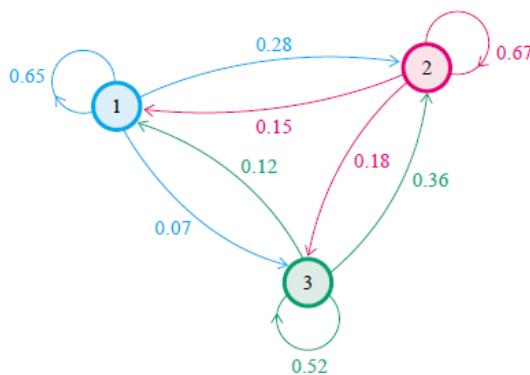


Örnek: Sosyolojide bireyler gelir durumuna göre alt-sınıf, orta-sınıf ve üst-sınıf olarak üçe ayrılmaktadır. Sosyologlar bir bireyin gelir sınıfıyla, o bireyin atasının gelir sınıfı arasında güçlü bir belirleyici faktör olduğunu ortaya koymuşlardır. Alt-sınıfı durum 1, orta-sınıfı durum 2 ve üst-sınıfı durum 3 olarak gösterirsek sosyologların önerdiği nesiller arası değişim faktörleri şöyledir:

Gelecek Nesil

Durum	1	2	3
1	0,65	0,28	0,07
2	0,15	0,67	0,18
3	0,12	0,36	0,52

Geçiş diyagramı şöyledir:



1.2. n Adımlı Geçiş Olasılıkları

“Bir Markov zinciri m zamanında i durumundaysa, n periyod sonra j durumunda olma ihtimali nedir?”

Buna göre;

$$P(X_{m+n}=j, X_m=i) = P(X_n=j|X_0=i) = P_{ij}(n)$$

n adımlı i durumundan j durumuna geçiş olasılığı olarak adlandırılır. $P_{ij}(2)$ de sistemin i durumundan 2 adım sonra j durumuna geçiş olasılığını ifade eder ve $P_{ij}(1)=p_{ij}$ olduğuna göre;

$$P_{ij}(2) = \sum_{k=1}^{k=s} (i' \text{den } k' \text{ya geçiş olasılığı}) \times (k' \text{dan } j' \text{ye geçiş olasılığı}) = \sum_{k=1}^{k=s} p_{ik} p_{kj}$$

Burada $p_{ik} \cdot p_{kj}$ çarpımı P matrisinin i satırı ile P matrisinin j sütunu çarpımını ifade eder. Dolayısıyla $P_{ij}(2)$, P^2 matrisinin ij 'inci elementidir. Buna göre $n > 1$ için $P_{ij}(n)$, P^n nin ij 'inci elemanına eşittir.

$n=0$ için $P_{ij}(0)=P(X_0=j|X_0=i)$ ve

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek: İçecek üreten bir işletmenin iki tip kola ürettiğini kabul edelim. İşletmenin ürettiği Kola 1 içeceğini alan bir tüketicinin bir sonraki alışverişinde yine Kola 1 alma olasılığı %90 olarak, Kola 2 içeceğini alan bir tüketicinin de bir sonraki alışverişinde yine Kola 2 alma olasılığı %80 olarak belirlenmiştir. Buna göre;

a) eğer kişi halen bir Kola 2 içicisi ise, bu kişinin 2. periyot sonrasında Kola 1 alma olasılığı nedir?

b) eğer kişi halen bir Kola 1 içicisi ise, bu kişinin 3. periyot sonunda tekrar Kola 1 alma olasılığı nedir?

Çözüm: Burada tüketicinin satınalma eğiliminin bir Markov zincirindeki gibi, en son aldığı ürüne göre değiştigini görmekteyiz. Dolayısıyla, her bir tüketicinin kola satınalma eğilimini iki durumlu bir Markov zinciriyle gösterebiliriz.

1. Durum: En son Kola 1 alan tüketici
2. Durum: En son Kola 2 alan tüketici

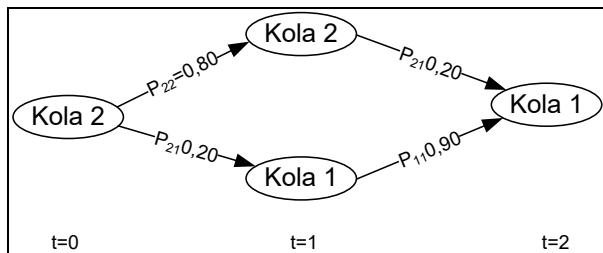
Geçiş matrisi şöyle olacaktır:

		Kola	Kola
		1	2
P=		Kola	
1	Kola	0,90	0,10
	Kola	0,20	0,80
2			

a) Buna göre; bir Kola 2 içicisinin 2. periyot sonunda Kola 1 alma olasılığı;

$$P(X_2=1|X_0=2)=P_{21}(2)$$

$P^2 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix}$ matrisinin de 21 elemanına eşit yani $P_{21}(2)=0,34$ olur.

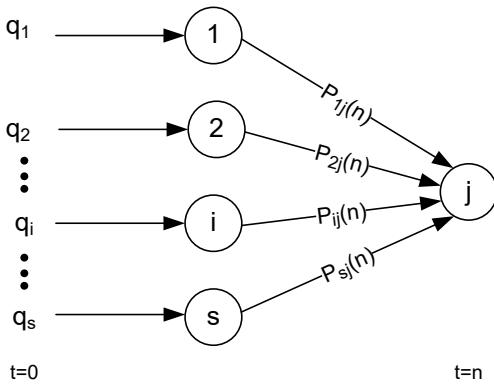


Problemi temel olasılık teorisine göre de çözebiliriz. Yandaki şekildeki verilere göre $P_{22} \cdot P_{21} + P_{21} \cdot P_{11} = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,34$ sonucu elde edilir.

b) Tüketici Kola 1 içicisiyse 3 dönem sonra hala Kola 1 tüketme olasılığı $P_{11}(3)$;

$$P_3 = P(P^2) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,781 & 0,219 \\ 0,483 & 0,562 \end{bmatrix} \text{ ise } P_{11}(3) = 0,781 \text{ olur.}$$

Bazı durumlarda başlangıç anında Markov zincirinin hangi durumda olduğunu bilmeyiz. Böyle bir durumda başlangıç anında i durumunun olasılığının q_i olduğunu düşünürsek;



yazılabilir. n anında j durumunda bulunma olasılığı şu şekilde formüle edilir:

$$\sum_{i=1}^{i=s} (i \text{ durumunda bulunma olasılığı}) \times (n \text{ sayıda geçişte } i' \text{den } j' \text{ye geçiş olasılıkları})$$

$$\sum_{i=1}^{i=s} q_i P_{ij}(n) = q \cdot (P^n \text{ nin } j \text{ sütunu})$$

Örneğin; tüketicilerin %60 kadarının Kola 1'i, %40'ının da Kola 2'yi tercih ettiğini farz edelim. 3 dönem sonra bir tüketicinin Kola 1'i satın alma olasılığının ne olacağını bulalım.

Burada $q = [0,60 \quad 0,40]$ olarak verilmiştir.

$q \cdot (P^3 \text{ ün Kola 1 sütunu}) = 3 \text{ dönem sonra bir tüketicinin Kola 1 satın alma olasılığı}$,

$[0,60 \quad 0,40] \begin{bmatrix} 0,781 \\ 0,438 \end{bmatrix} = 0,6438$ olur. Yani 3 dönem sonra tüketicilerin %64'ü Kola 1 satın alacaklardır.

1.3. Kararlı Durum Olasılıkları

Problemde n'nin alabileceği büyük değerler için de n adımlı geçiş matrisi değerleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

n	P ₁₁ (n)	P ₁₂ (n)	P ₂₁ (n)	P ₂₂ (n)
1	0,90	0,10	0,20	0,80
2	0,83	0,17	0,34	0,66
3	0,78	0,22	0,44	0,56
4	0,75	0,25	0,51	0,49
5	0,72	0,28	0,56	0,44
10	0,68	0,32	0,65	0,35
20	0,67	0,33	0,67	0,33
30	0,67	0,33	0,67	0,33
40	0,67	0,33	0,67	0,33

Yukarıdaki tablodaki veriler incelendiğinde P₁₁(n) ve P₂₁(n) değerlerinin sabitlendiği ve 0,67'ye yaklaşığı görülmektedir. Bunun anlamı, n'nin büyük değerleri için bir tüketicinin Kola

1 satın alma olasılığı 0,67 demektir. Benzer şekilde $P_{12}(n)$ ve $P_{22}(n)$ değerleri de 0,33'e yaklaşarak sabitleşmiştir. Yani başlangıç durumu ne olursa olsun, bir tüketicinin n dönem sonra Kola 2 ürününü alma olasılığı 0,33'tür. Bu olasılıkları **kararlı durum olasılıkları** denir. Buradaki kararlı durum olasılıkları uzun dönemde tüketicinin hangi ürünü hangi olasılıkla alacağını gösterir.

Örnek: Tekstil sektöründe faaliyet gösteren bir işletme kullandığı iplik sarma makinesinin çalıştığı ve çalışmadiği durumlar hakkında bir araştırma yapmış ve makinenin mevcut yılı durumunun bir önceki yıldaki durumundan etkilendiğini gözlemlemiştir. Araştırmada makinenin şu 4 durumda bulunduğu ifade etmiştir:

1. Durum: Yeni gibi (çalışıyor)
2. Durum: Yıpranmış (çalışıyor)
3. Durum: Arızalı (çalışmıyor)

Durumlar arası geçiş olasılığı aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Durumlar		1	2	3
P=	1	0,2	0,8	0
	2	0	0,6	0,4
	3	1	0	0

Makineyi yenilemenin maliyeti 30.000 TL'dır. Bu verilere göre;

- a) Yeni gibi durumundaki bir makinenin 2, 5, 10 ve 20 yıl sonra arızalı duruma geçme olasılığı nedir?
- b) Problemin kararlı durum olasılıkları göz önüne alınarak uzun dönemde makine hangi ihtimallerle hangi durumlarda olabileceğini söyleyiniz.
- c) Makineyi dönemlik olarak çalışır durumda tutmanın beklenen maliyeti nedir?

Çözüm:

a)

Durumlar		1	2	3
P(2)=	1	0,0400	0,6400	0,3200
	2	0,4000	0,3600	0,2400
	3	0,2000	0,8000	0

Durumlar		1	2	3
P(5)=	1	0,2307	0,5645	0,2048
	2	0,2560	0,5130	0,2310
	3	0,3216	0,5120	0,1664

Durumlar		1	2	3
P(10)=	1	0,2636	0,5247	0,2117
	2	0,2647	0,5259	0,2094
	3	0,2588	0,5294	0,2118

Durumlar		1	2	3
P(20)=	1	0,2632	0,5263	0,2105
	2	0,2632	0,5263	0,2105
	3	0,2632	0,5263	0,2105

Yukarıdaki geçiş matrislerine göre $P_{11}(2)=0,2632$; $P_{12}(5)=0,5263$; $P_{13}(10)=0,2105$ olur.

b) Makine 0,2632 ihtimalle yeni gibi, 0,5263 ihtimalle az yıpranmış, 0,2105 ihtimalle de arızalı durumda olacaktır.

c) Makinenin çalışır durumda kalması demek, arızalı olmaması demek. Arızalı durumdan sadece yeni gibi durumuna geçiş vardır ve yeni makine almanın maliyeti 30.000 TL'dır. Buna göre kararlı durumda makine 0,2105 olasılıkla arızalı duruma geçeceğine göre, makineyi dönemlik çalışır durumda tutmanın beklenen maliyeti de $30.000 * 0,2105 = 6315$ TL olacaktır.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Markov analizi ve kararlı durum olasılıklarını gördük.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Markov kimdir ? markov başlangıç matrisi elemanları nasıl belirlenebilir ?
- 2) Markov zincirinde Gelecek durumların geçmiş durumlardan bağımlı veya bağımsız olup olmadığını araştırın
- 3) Kararlı durum olasılıklarının markov zinciri değerlerinin limit değerleri olup olmadığını tartışınız
- 4) Markov zincirinde satır değerlerinin toplamı neden 1 eşit olmak zorundadır
- 5) Markov zincirinde her bir olası durumların mutlaka kendi aralarında ilişkiler olup olmaması konusunu araştırınız

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

2. MARKOV ZİNCİRLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Bir Markov Zincirindeki Durumların Sınıflandırılması
Kararlı Durum Olasılıkları ve Ortalama İlk Geçiş Zamanları

Giriş

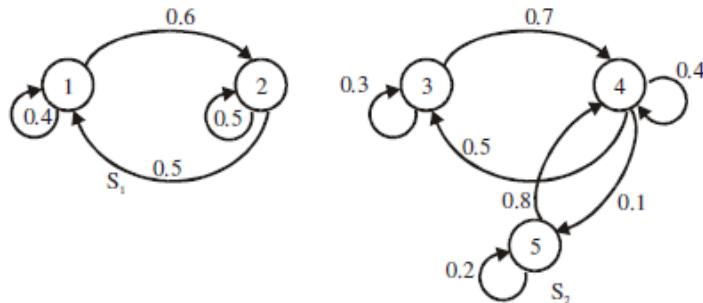
Bu haftaki çalışmada, markov zincilerinin sınıflandırılması anlatılacaktır. Sonrasında ise kararlı durum olasılıklarına geçiş için gerekli adım sayısının nasıl bulunabileceği üzerinde durulacaktır.

2.1. Markov Zincirinin Sınıflandırılması

Daha önce belirtildiği gibi görüldü ki çok geçiştiken sonra n adımlı geçiş olasılıkları kararlı değerlere yaklaşır. Bunu daha detaylı anlatmadan önce bir Markov Zincirinin durumlarını matematik olarak nasıl sınıflandırabileceğimiz üzerine çalışmaya ihtiyacımız vardır. Aşağıdaki tanımların çoğunu izah etmek için şu geçiş matrisini kullanacağız.

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Yol: Verilen iki i ve j durumları için i den j ye giden yol, i de başlayıp j de sona eren geçişlerin sırasıdır. Öyle ki bu sıradaki her bir geçiş pozitif bir olasılık değerine sahiptir.



Erişilebilir Durum: i den j ye giden bir yol varsa j ye i durumundan “erişilebilir bir durum” adı verilir.

Haberleşir Durumlar: Eğer j , i den erişilebilir, i de j den erişilebilir durum iseler i ve j durumlarına

“Haberleşir Durumlar” adı verilir. Yukarıdaki şekilde gösterilen P geçiş olasılık matrisi için 5 durumu 3’ten erişilebilir bir durum iken (3-4-5 yolu ile) 1 durumundan erişilebilir değildir. Aynı zamanda 1 ve 2 durumları haberleşir durumlardır (yani 1 den 2 ye ve 2 den 1 e gidebiliriz).

Eğer bir Markov zincirinde tüm durumlar birbiriyle haberleşir ise (tek bir kapalı küme varsa), bu zincir *küçültülemezdir* veya *indirgenemeyendir*.

Kapalı Küme: Markov zincirindeki durumlar kümesine S dersek, S' nin içerisindeki herhangi bir duruma S' nin dışarısında kalan herhangi bir durumdan erişim yok ise S' ye “Kapalı Küme” adı verilir. Yukarıdaki şekildeki P geçiş matrisi ile Markov Zincirinden, $S_1 = \{1, 2\}$ ve $S_2 = \{3, 4, 5\}$ ’in her ikisi de kapalı kümelerdir. (Burada S_1 de başlayıp S_2 de sona eren veya S_2 de başlayıp S_1 de sona eren bir yay yoktur).

Yutucu Durum: Eğer $P_{ii} = 1$ ise i durumuna yutucu (veya emici) bir durum denir. Eğer emici bir duruma girersek, hiçbir şekilde bu durumdan ayrılamayız.

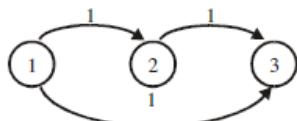
Geçici Durum: Eğer j , i ' den erişilebilir bir durum iken; i , j ' den erişilebilir olmayan bir durum ise i ' ye "Geçici Durum" denir. Bazı durumlardan erişilip bazı durumlardan erişilemeyen durumlardır. Diğer bir deyimle i durumuna asla geri dönmeyen, i durumundan ayrılmmanın bir yolu varsa ve i durumundan ayrıldıktan sonra geri dönülemiyorsa i durumu geçicidir. Çünkü ayrıldıktan sonra bu durumlara tekrar dönülmesi mümkün değildir.

Mesela, vazo-topörneğinde $[2 \ 0 \ 0]$, $[1 \ 1 \ 0]$, $[1 \ 0 \ 1]$ boyasız topun bulunduğu durumlar geçicidir. $[1 \ 0 \ 1]$ den $[0 \ 0 \ 2]$ ye bir yol vardır fakat $[0 \ 0 \ 2]$ de artık toplar boyalıdır ve $[1 \ 0 \ 1]$ e dönmenin bir yolu yoktur. Buna göre çok sayıda periyottan sonra herhangi bir geçici i durumunun ortaya çıkması olasılığı 0'dır.

Devirli Durum: Bir durum geçici değilse bu duruma "Devirli Durum" denir. Herhangi bir anda elde edilmesi tekrar mümkün olan durumlardır. Vazo-topörneğinde $[0 \ 2 \ 0]$, $[0 \ 0 \ 2]$, $[0 \ 1 \ 1]$ devirli durumlardır.

Periyodik Durum: Eğer k , $k > 1$ olan en küçük tam sayı olmak üzere i durumundan yine i durumuna geri dönen bütün yollar k 'nın katı iseler i durumuna k periyotlu Periyodik Bir Durum denir. Eğer bir durum periyodik değilse bu duruma periyodik olmayan (aperiyodik) durum denir.

Örneğin; $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ geçiş matrisinde her bir durum 3 periyoda sahiptir. Aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi, 1 durumundan başlayıp 1 durumuna dönmenin tek yolu 1-2-3-1 yoldur.



Dolayısıyla 1'den başlayıp tekrar 1 durumuna dönmek için 3 geçiş yaparız ($k=3$), böylece 1 durumunun 3 periyoda sahiptir. Her nerede olursak olalım 3 periyot sonra olduğumuz yere geri doneceğimizi söyleyebiliriz.

Ergodik Zincir: Eğer bir zincirdeki tüm durumlar "Devirli, Periyodik Olmayan ve her biri diğer ile Haberleşir" iseler bu zincire "Ergodik Zincir" denir. Aşağıdaki 3 Markov zincirini inceleyelim.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Ergodik Zincir

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Ergodik Değil

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Ergodik Zincir

P_2 ergodik değildir çünkü, durumları birbirileyle haberleşmeyen 2 sınıf oluşturur. (Sınıf 1={1,2} ve Sınıf 2= {3,4}.)

Düzenli Zincir: Bir Markov zincirinin geçiş matrisine ait kuvvetlerden herhangi birinde tüm elemanları pozitifse yani hiç sıfır yoksa bu zincire düzenli denir. Bir zincirin düzenli olması o zincirin ergodik olduğunu gösterir. Fakat; ergodik olan bir zincirin mutlaka düzenli olması gerekmektedir.

Örnek:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \quad P_1^2 = \begin{bmatrix} 0,444 & 0,222 & 0,334 \\ 0,167 & 0,458 & 0,375 \\ 0,125 & 0,188 & 0,687 \end{bmatrix} \quad P_1$$

geçiş matrisinin

P_1^2 kuvvetinin elemanları pozitif veya sıfırdan farklı olduğundan P_1 geçiş matrisi ile verilen Markov zinciri düzenlidir.

2.2. Kararlı Durum Olasılıkları ve Ortalama İlk Geçiş Zamanları

Kola örneğinde, bir kişinin gelecekte bir kola satın alma olasılığı Kola 1 için 0.67, Kola 2 için 0.33 olduğunu ve başlangıçta Kola 1 veya Kola 2 içicisi olmasına bağlı olmadığını göstermiştık. Şimdi bir Markov Zincirinin uzun dönemli davranışını tanımlamada kullanılabilen ve kararlı durum olasılıkları için önemli olan bir kavramı ele alacağız. Aşağıdaki sonuç, Markov Zincirlerinin uzun dönemli davranışını ve kararlı durum olasılıklarını anlamada çok önemlidir.

Teorem (Kararlı Durum Olasılıkları Teoremi): S durumlu bir ergodik zincir için geçiş matrisi P olsun. Bu taktirde bir $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_s]$ vektörü vardır. (Kararlı durum olasılıklarını veya vektörünü bulabilmek için zincir mutlaka ergodik olmalıdır.) Öyle ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir.

Teoreme göre, P^n 'nin ij 'nci elemanı $P_{ij}(n)$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}(n) = \pi_j$$

olur.

Yani durumları büyük değerli n'ler için gözlemlersek, P^n , satırları aynı olan bir matrise yaklaşır. Bu demektir ki uzun bir zaman sonra Markov Zinciri kararlı duruma gelir ve i başlangıç durumundan bağımsız olarak j durumunda bulunmanın olasılığı π_j dir.

Bir Markov Zinciri için $\pi = [\pi_1 \pi_2 \dots \pi_s]$ vektörüne genellikle Kararlı- Durum dağılımı veya Denge Dağılımı adı verilir. Teoremden, büyük değerli n ve bütün i'ler için:

$$P_{ij}(n+1) \cong P_{ij}(n) \cong \pi_j$$

$P_{ij}(n+1) = P^n$ 'nin i satırı ve P'nin j sütunu olduğu için;

$$P_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^s P_{ik}(n)p_{kj} \text{ olarak yazılabilir.}$$

Yukarıdaki son iki denkleme göre;

$$\pi_j = \sum_{k=1}^s \pi_k p_{kj} \text{ yazılabilir.}$$

Matris formu olarak da;

$$\pi = \pi P \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Fakat belirtilen eşitlik sisteminde sonsuz sayıda çözüm vardır. Çünkü P matrisinin rankı daima $\leq S-1$ olarak bulunur. (Not: Bir $A = [a_{ij}]_{m \times n} \neq 0$ matrisinin karesel alt matrisleri arasında, determinantı sıfırdan farklı olanların mertebesi en büyük olana A matrisinin rankı denir ve $\text{rank}(A)$ ile gösterilir.) Yalnız kararlı durum olasılıklarını elde etmede herhangi bir n ve herhangi bir i için;

$$P_{i1}(n) + P_{i2}(n) + \dots + P_{is}(n) = 1 \text{ olur.}$$

Bu ifadede n sonsuza yaklaşırken;

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s = 1 \text{ elde ederiz.}$$

Böylece eşitliklerden herhangi birisi yukarıda yerine konularak kararlı durum olasılıkları için çözüme ulaşılabilir.

Örnek: Kolaörneğinde geçiş olasılıkları matrisini n defa kendisiyle çarparak kararlı durum olasılıklarını elde etmeye çalıştık. Aynı örneği tekrar ele alalım.

Geçiş matrisi şöyle idi:

	Kola 1	Kola 2
P =	Kola 1	0,90 0,10
	Kola 2	0,20 0,80

Çözüm:

$$[\pi_1 \quad \pi_2] = [\pi_1 \quad \pi_2] \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

denklemlerinde π_1 ve π_2 değerlerini hesaplayalım.

$$\pi_1 = 0,9 \pi_1 + 0,2 \pi_2$$

$$\pi_2 = 0,1 \pi_1 + 0,8 \pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

Yukarıdaki ilk 2 eşitlik birbirini doğruladığı için birini ve 3. eşitliği birlikte çözelim. (1. ve 3. eşitlikleri ele alalım.)

$$0,1\pi_1 = 0,2\pi_2 \rightarrow \pi_1 = 2\pi_2$$

$\pi_1 + \pi_2 = 1 \rightarrow 2\pi_2 + \pi_2 = 1 \rightarrow \pi_2 = 1/3$ ve $\pi_1 = 2/3$ olarak bulunur. Yani uzun dönemde bir kişisinin Kola 1 alıcısı olma olasılığı $2/3$, Kola 2 alıcısı olma olasılığı ise $1/3$ olacaktır.

Örnek: Yukarıdaki Kola örneğinde, üreticinin toplam 1.000.000 müşterisinin olduğunu, Kola 1 satışından elde ettiği net karın birim başına 1,5 TL, Kola 2 satışından elde ettiği net karın birim başına 1,25 TL olduğunu ve bir müşterinin 1 yıl boyunca alıcısı olduğu üründen her hafta 1 tane aldığı varsayılmı. (Yılda 52 adet/ müşteri) Bu koşullar altında, bir reklam firması kola üreticisi firmaya 1 yıl boyunca Kola 1'in reklamını yaptıkları takdirde Kola 1 müşterilerinin Kola 2'ye geçme oranının %10'dan %5'e düşeceğini garantisini vermektedir. Reklam firması reklam bedeli olarak yıllık 1.250.000 TL talep etmektedir. Bu durumda üretici reklam vermelii midir?

Çözüm:

$$P = \begin{array}{c|cc} & \text{Kola 1} & \text{Kola 2} \\ \hline \text{Kola 1} & 0,95 & 0,05 \\ \text{Kola 2} & 0,20 & 0,80 \end{array}$$

$$[\pi_1 \quad \pi_2] = [\pi_1 \quad \pi_2] \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = 0,95 \pi_1 + 0,2 \pi_2$$

$$\pi_2 = 0,05 \pi_1 + 0,8 \pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

denklemlerinden $\pi_2 = 1/5$ ve $\pi_1 = 4/5$ olarak bulunur. Yani uzun dönemde bir kişisinin Kola 1 alıcısı olma olasılığı $4/5$, Kola 2 alıcısı olma olasılığı ise $1/5$ olacaktır.

Bu durumda reklam yapmanın sonucunda elde edilecek ek kar:

$$(52*1.000.000)*(\text{Reklamdan sonraki toplam kar} - \text{Reklam verilmeden önceki toplam kar}) = (52*1.000.000)*[((4/5)*1,5\text{TL} + (1/5)*1,25\text{TL}) - ((2/3)*1,5\text{TL} + (1/3)*1,25\text{TL})]$$

$$= 1.733.333,333 \text{ TL}$$

Kola üreticisi reklam vermelidir.

Örnek: Bir şirketin ısıtma ve soğutma sistemlerinde 2000 adet hava filtresi kullanılmaktadır. Burada göz ardı edilemeyecek ciddi bir yenileme maliyeti söz konusudur. Dolayısıyla şirket gerekmedikçe filtreleri değiştirmek istememektedir. Aynı zamanda kirlenmiş filtreler hava motorlarının daha çok güç harcamasına sebep olmaktadır ve bu nedenle elektrik tutarı artmaktadır. Bunun için en iyi yenileme politikası belirlenmelidir. Yönetim, filtreleri “yeni – iyi – açık” ve “tıklalı” olmak üzere dört sınıfa ayırmış ve elektrik giderlerini “yeni” filtreler için 2 TL “iyi” filtreler için 4 TL, “açık” filtreler için 6 TL olarak belirlemiştir. “Tıklalı” birfiltreyi kullanmak ise aşırı bir maliyete sebep olmaktadır. Ayrıca yeni filtre tutarı 10 TL'dir ve yenileme işçiliğini de kapsamaktadır. Geçmiş deneyimlerden bilinmektedir ki; bir ayın sonunda “yeni” filtrelerin %80'inin “iyi”, %20'sinin “açık” duruma geçtiği, “iyi” filtrelerin %20'sinin durumunu koruduğu, %60'ının “açık”, %20'sinin ise “tıklalı” duruma geçtiği bilinmektedir. Son olarak da aynı periyotta “açık” durumdaki filtrelerin %60'ının “açık” durumda kaldığı ve filtrelerin %40'ının “tıkladığı” gözlenmiştir.

- a) Filtrelerin “tıklalı” duruma geçtiği belirlendiğinde değiştirilmesi
- b) Filtrelerin “açık” veya daha kötü duruma geçtiği zaman yenilenmesi

Bu iki durum için aylık giderleri ve hangi durumun daha ucuz olduğunu belirleyiniz.

Çözüm:

a)

	Tıklalı/Yeni	İyi	Açık
Tıklalı/Yeni	0	0,8	0,2
İyi	0,2	0,2	0,6
Açık	0,4	0	0,6

$$[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] \begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = 0,2 \pi_2 + 0,4 \pi_3$$

$$\pi_2 = 0,8 \pi_1 + 0,2 \pi_2$$

$$\pi_3 = 0,2 \pi_1 + 0,6 \pi_2 + 0,6 \pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

denklemlerinden $\pi_1 = 1/4$ ve $\pi_2 = 1/4$ ve $\pi_3 = 2/4$ olarak bulunur. Yani denge durumuna ulaşıldığında filtrelerin 1/4'ü “tikalı/yeni”, 1/4'ü “iyi”, 1/2'si ise “açık”tır. Bu demek oluyor ki; yönetim her ay 2000 filtrenin 500 tanesinin “tikalı/yeni”, 500 tanesinin “iyi” ve 1000 tanesinin de “açık” durumlufiltreye dönüşeceğini düşünmektedir. “Tikalı/yeni” filtrelerin elektrik ve yenileme tutarı $(2\text{TL} + 10\text{TL}) = 12\text{TL}$ dir. “İyi” durumdaki bir filtrenin elektrik sarfiyatı 4TL ve “açık” durumdaki bir filtrenin elektrik sarfiyatı 6TL ise;

$$12.(500) + 4.(500) + 6.(1000) = 14.000 \text{ TL}'lik aylık gider olacaktır.$$

b)

	Tikalı/Açık/Yeni	İyi
Tikalı/Açık/Yeni	0,2	0,8
İyi	0,8	0,2

$$[\pi_1 \quad \pi_2] = [\pi_1 \quad \pi_2] \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = 0,2 \pi_1 + 0,8 \pi_2$$

$$\pi_2 = 0,8 \pi_1 + 0,2 \pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

denklemlerinden $\pi_1 = 1/2$ ve $\pi_2 = 1/2$ olarak bulunur. Yani uzun dönemde, denge durumuna ulaşıldığında filtrelerin yarısı “T/A/Y” ve diğer yarısı da “iyi” durumda olacaktır. Maliyeti;

$12.(1000) + 4.(1000) = 16.000\text{TL}$ olacaktır. Her iki politika da göz önüne alındığında; sadece tikalı olan filtreyi yenileme politikasının (a şikkindaki politikanın) maliyeti daha düşük olduğundan tercih edilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Markov matrislerinin sınıflandırmasını ve akaralı duruma olasılıklarının elde edilmesini gördük.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Markov zincirinde sütün olasılık değerlerinin toplamı 1 eşit olmak zorunda mıdır?
- 2) Kararlı durum olasılıkları formül kullanılarak veya matris çarpımları ile bulunmak istense her iki durumda da aynı değerler mi bulunur? Tartışınız
- 3) Ergodik zincirin temel özelliği nedir? Bir örnek vererek tartışınız
- 4) Her yutucu zincir ergodik özelikte midir?
- 5) Zincirdeki olayların haberleşir olmaması ne demektir? Bir örnek üzerinde tartışınız

3. MARKOV ZİNCİRİNDE DURUM DEĞİŞİMİ İÇİN ADIM SAYISI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Katı Stokastik Matris

Durum Değişimi İçin Gerekli Adım Sayısı

Yutucu Zincirler

Giriş

Bu bölümde öncelikli olarak katı stokastik matris üzerinde durulacaktır. Markov zincirindeki kararlı adıma ulaşmak için gerekli adım sayının nasıl bulunacağı anlatılacaktır. Sonrasında ise, yutucu zincirler örnekler ile anlatılacaktır.

3.1. Katı Stokastik Matris

Geçiş olasılıklarını gösteren bir P matrisinde, m durum sayısını göstermek üzere, tüm i satır ve j sütunlarındaki değerlerin toplamları 1'e eşitse yani; $\sum_{i=1}^m P_{ij} = \sum_{j=1}^m P_{ij} = 1$ ise; böyle matrislere *katı stokastik matris* denir. Katı stokastik matrislerde denge vektörü bileşenleri bütün matrislerde j değerleri için $V_j = 1/m$ dir.

Örnek:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

geçiş matrisinin denge vektörü $V = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]$ olur.

Durum Değişimi İçin Gerekli Adım Sayısı

Düzenli Markov zincirlerinde sürecin n adımda S_i durumundan S_j durumuna geçiş halinde ortalama adım sayısı aşağıda verilen $N = PN_d + J$ bağıntısı ile hesaplanır. Burada;

- n_{ij} =Sürecin S_i durumundan S_j durumuna geçiği için gerekli adım sayısı,
- N =Elemanları n_{ij} olan matris, ($m \times m$). (ortalama adım sayısı matrisi),
- $N_d = N$ matrisinin köşegeni üzerindeki elemanlar yerine sıfır konularak elde edilen matris,
- J =Elemanları 1 olan kare matris, ($m \times m$),
- P =Verilen geçiş olasılıkları matrisi olmak üzere, ($m \times m$)

$m = 3$ için bu ifadeyi açacak olursak:

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & 0 & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde

yazılır.

$N = PN_d + J$ ifadesinin her iki tarafını da V denge vektörü ile çarparsa; $VN = VPN_d + VJ$ eşitliğini elde ederiz.

$VP = V$ ile $VJ = [1 \ 1 \ \dots]$ vektörleri elde edilir. Yerine konursa;

$$VN = VN_d + [1 \ 1 \ 1 \ \dots]$$

$V(N - N_d) = [1 \ 1 \ 1 \ \dots]$ ifadesinde $N - N_d$ işlemi yapılrsa köşegen üzerindeki elemanları n_{ii} (yani n_{11}, n_{22}, n_{33}) ve diğer elemanları sıfır olan bir matris bulunur. Buna göre $V_i \cdot n_{ii} = 1$ olmalıdır. Buradan da $n_{ii} = 1/V_i$ eşitliği elde edilir.

Örnek: Kola örneği için yapacak olursak;

$P = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$ ve $V = [2/3 \ 1/3]$ n_{ij} elemanlarını veya sürecin durum değişimi için gerekli adım sayısını bulunuz.

Çözüm:

$n_{ii} = 1/V_i$ denkleminden; $n_{11}=3/2$ ve $n_{22}=3$ olarak bulunur. $N=PN_d+J$ ifadesi açık yazılır ve n_{ii} değerlerine yerlerine konursa;

$$\begin{bmatrix} 3/2 & n_{12} \\ n_{21} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & n_{12} \\ n_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3/2 = 0,1n_{21} + 1$$

$$n_{12} = 0,9n_{12} + 1$$

$$n_{21} = 0,8n_{21} + 1$$

$$3 = 0,2n_{12} + 1$$

Denklemlerinde $n_{21}=5$ ve $n_{12}=10$ değerleri elde edilir. Örneğin; son olarak Kola 1 içen bir tüketici ortalama 10 kez daha Kola 1 aldıktan sonra Kola 2 alacaktır. Tüm ortalama ilk geçiş sayısı aşağıdaki matristeki gibidir.

$$N = \begin{bmatrix} 3/2 & 10 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Örnek:

Geçiş olasılıkları matrisi $P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$ olan düzenli bir Markov zincirinin sabit

durum vektörü $V = [1/3 \ 1/2 \ 1/6]$ 'dır. n_{ij} elemanlarını veya sürecin durum değişimi için gerekli adım sayısını bulunuz.

Çözüm:

$n_{ii} = 1/V_i$ denkleminden; $n_{11}=3$, $n_{22}=2$ ve $n_{33}=6$ olarak bulunur. $N=PN_d+J$ ifadesi açık yazılır ve n_{ii} değerlerine yerlerine konursa;

$$3 = 0,6n_{21} + 0,2n_{31} + 1$$

$$n_{12} = 0,2n_{12} + 0,2n_{32} + 1$$

$$n_{13} = 0,2n_{13} + 0,6n_{23} + 1$$

$$n_{21} = 0,4n_{21} + 0,2n_{31} + 1$$

$$2=0,4n_{12}+0,2n_{32}+1$$

$$n_{23}=0,4n_{13}+0,4n_{23}+1$$

$$n_{31}=0,6n_{21}+1$$

$$n_{32}=0,4n_{12}+1$$

$$6=0,4n_{13}+0,6n_{23}+1$$

denklemleri elde edilir. Denklemlerin ortak çözümünden aşağıdaki ortalama ilk geçiş sayısı matrisi elde edilir.

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 5/3 & 5 \\ 5/2 & 2 & 5 \\ 5/2 & 5/3 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2. Yutucu Zincirler

Bir Markov zinciri iki özelliğe sahip olması halinde de yutucu Markov zinciri olarak adlandırılmaktadır. Bu özellikler:

- Zincirin en az 1 yutucu duruma ($P_{ii}=1$ şeklinde sadece kendisiyle haberleşen duruma) sahip olması,
- Yutucu olmayan tüm durumlardan en az 1 yutucu duruma geçişin olası olmasıdır.

Örnek: Şirketlerin alacaklar hesabı durumları genellikle yutucu Markov zincirleriyle modellenir. Bir şirketin ödenme tarihi 3 ayı geçmiş olan alacaklarını toplayamadığını düşünelim. Bu durumda başlangıçta her bir hesabı şu şekilde sınıflandırmalıyız:

- Durum 1: Yeni hesap
- Durum 2: Ödemesi 1 ay gecikmiş hesap
- Durum 3: Ödemesi 2 ay geçmiş hesap
- Durum 4: Ödemesi 3 ay geçmiş hesap
- Durum 5: Ödenmiş hesap
- Durum 6: Tahsil edilemeyecek hesap (Şüpheli alacak)

Geçmiş verilere göre alacak hesaplarının mevcut aydan bir sonraki aydaki durum değişimleri aşağıdaki gibidir:

	Yeni	1 Ay	2 Ay	3 Ay	Ödenmiş	Şüpheli
Yeni	0	0,6	0	0	0,4	0
1 Ay	0	0	0,5	0	0,5	0
2 Ay	0	0	0	0,4	0,6	0
3 Ay	0	0	0	0	0,7	0,3
Ödenmiş	0	0	0	0	1	0
Şüpheli	0	0	0	0	0	1

Örneğin; bir ayın başında bir hesabın ödemesi 2 ay kadar gecikmişse, hesabın o ay içerisinde ödenme ihtimali %60, bir sonraki ayın başında ödenme ihtimali %40'tır. Basitçe düşünürsek; 3 ay içerisinde bir hesap ya ödenir ya da şüpheli alacak olarak kaydedilir. Hesap ödendiğinde veya şüpheli hesap olarak kaydedildiğinde kapatılmaktadır ve herhangi bir işlem gerçeklememektedir. Yani, “Ödenmiş” ve “Şüpheli” durumları yutucu durumlardır.

Buradaki ana sorun, yeni bir hesabın sonuç olarak hangi olasılıkla toplanabileceğidir.

Örnek: Bir hukuk firması tecrübesiz avukatlar, kıdemli avukatlar ve ortaklar olarak 3 farklı tipte avukat çalışmaktadır. Bilinen bir yılda tecrübesiz avukatların %15'i kıdemli avukat olmakta, %5'i ise işten ayrılmaktadır. Tecrübeli avukatların %20'si ortak olmakta, %10'u ise işten ayrılmaktadır. Ortakların ise %5'i firmadan ayrılmaktadır. Firma hiçbir zaman bir çalışan alt sınıfa indirmemektedir. Bu koşullarda firmanın cevaplamak istediği bazı sorular vardır. Örneğin; yeni işe alınmış tecrübesiz bir avukatın ortak olmadan evvel işten ayrılma olasılığı nedir? Yeni işe alınmış bir avukat ortalama ne kadar süre firmada çalışır?

Çözüm:

	Tecrübesiz	Kıdemli	Ortak	Ayrılan Çalışan	Ayrılan Ortak
Tecrübesiz	0,80	0,15	0	0,05	0
Kıdemli	0	0,70	0,20	0,10	0
Ortak	0	0	0,95	0	0,05
Ayrılan Çalışan	0	0	0	1	0
Ayrılan Ortak	0	0	0	0	1

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi son iki durum yutucu durum, diğer durumlar ise geçici durumlardır. Örneğin; kıdemli bir avukat kıdemli olarak çalışmaya devam edebildiği gibi bir sonraki adımda ortak olabilir veya çalışan olarak işten ayrılabilir. Fakat; çalışan olarak işten ayrılan bir kişi bir sonraki adımda yine aynı durumda kalacaktır. (İşten ayrılan bir avukatın tekrar işe alınmadığı varsayımlı yapılmıştır.)

Tüm yutucu zincirlerde şu sorulara cevap aranır:

- Eğer bir yutucu zincir verilen bir geçici durumla başlarsa, yutucu duruma ulaşmadan evvel her bir duruma kaç kez ulaşması beklenir? Yutucu duruma ulaşmadan evvel verilen geçici bir durumda kaç periyot harcanması beklenir?
- Eğer zincir verilen geçici bir durumdan başlarsa, her bir yutucu durumda sonlanma olasılığı nedir?

Yutucu matrislerle ilgili örnekleri gelecek haftaki konumuzda inceliyelim.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Katı stokastik ve yutuucu matrisler görüldü

BÖLÜM SORULARI

1) Aşağıdaki iki matrise ait kararlı durum vektörlerini (V) ve ortalama ilk geçiş sayısını matrislerini (N) bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$

- 2) Dört satır dört sutundan oluşan Katı stokastik matris'de kararlı durum olasılıkları her zaman 0.25 eşit midir? Bir örnek üzerinde tartışınız
- 3) Markov zincirinde kaç adım sonrasında bir durumdan başka bir duruma geçiş olasılıkları bulunabilir mi?
- 4) Yutucu zincir özelliği olan bir markov matris'in de en az kaç tane yutucu durum olabilir

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

4. YUTUCU ZİNCİRLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Yutucu zincirler ile ilgili örnekler

Giriş

Bu bölümde yutucu zincirler ile ilgili örnekler incelenecektir.

4.1. Yutucu Zincirler İle İlgili Örnekler

Tüm yutucu zincirlerde şu sorulara cevap aranır:

- Eğer bir yutucu zincir verilen bir geçici durumla başlarsa, yutucu duruma ulaşmadan evvel her bir duruma kaç kez ulaşması beklenir? Yutucu duruma ulaşmadan evvel verilen geçici bir durumda kaç periyot harcanması beklenir?
- Eğer zincir verilen geçici bir durumdan başlarsa, her bir yutucu durumda sonlanma olasılığı nedir?

Bu sorulara cevap verebilmek için, geçiş matrisini şu sıralamada yazarız: Önce geçici durumlar, sonra yutucu durumlar. Farzedelim ki; $s-m$ adet geçici durum olsun ($t_1, t_2, t_3, \dots, t_{s-m}$) ve m yutucu durum olsun (a_1, a_2, \dots, a_m). Yutucu zincirin geçiş matrisi şöyle yazılır:

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} s-m \text{ sütun} & m \text{ sütun} \end{matrix} \\ \begin{matrix} s-m \text{ satır} \\ m \text{ satır} \end{matrix} & \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \end{array}$$

Q olarak isimlendirilen matris $(s-m) \times (s-m)$ boyutlu geçici durumlar matrisi, R $(s-m) \times m$ boyutlu geçici durumlardan yutucu durumlara geçişini ifade eden matris, $0 \times (s-m)$ boyutlu sıfır matris ve I da birim matristir.

4.1.1. Örnek 1:

Örneğin; alacaklar hesabı ile ilgili olan ilk örneğimizi bu formda düzenleyelim:

	Yeni	1 Ay	2 Ay	3 Ay	Ödenmiş	Şüpheli
Yeni	0	0,6	0	0	0,4	0
1 Ay	0	0	0,5	0	0,5	0
2 Ay	0	0	0	0,4	0,6	0
3 Ay	0	0	0	0	0,7	0,3
Ödenmiş	0	0	0	0	1	0
Şüpheli	0	0	0	0	0	1

Burda tüm durumlar yani $s=6$, yutucu durumlar da $m=2$ 'dir. Q matrisi 4×4 boyutlu, R matrisi de 4×2 boyutlu bir matris olmuştur.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad R = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

Yine aynı şekilde hukuk firması örneğini de inceleyelim:

	Tecrübesiz	Kıdemli	Ortak	Ayrılan Çalışan	Ayrılan Ortak
Tecrübesiz	0,80	0,15	0	0,05	0
Kıdemli	0	0,70	0,20	0,10	0
Ortak	0	0	0,95	0	0,05
Ayrılan Çalışan	0	0	0	1	0
Ayrılan Ortak	0	0	0	0	1

$$Q = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,70 & 0,20 \\ 0 & 0 & 0,95 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad R = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0,10 & 0 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Şimdi yutucu zincirlerle ilgili sorulara cevap arayabiliriz:

- Eğer bir yutucu zincir verilen bir geçici durumla başlarsa, yutucu duruma ulaşmadan evvel her bir duruma kaç kez ulaşması beklenir? Yutucu duruma ulaşmadan evvel verilen geçici bir durumda kaç periyot harcanması beklenir?
 - t_i gibi geçici bir durumdaysak, yutucu duruma ulaşmadan evvel t_j durumunda kaç periyot harcayacağımız $(I-Q)^{-1}$ matrisinin ij 'inci elemanıdır.
- Eğer zincir verilen geçici bir durumdan başlarsa, her bir yutucu durumda sonlanma olasılığı nedir?
 - t_i gibi geçici bir durumdaysak, gelişimizin a_j yutucu durumunda sonlanma olasılığı $(I-Q)^{-1}xR$ matrisinin ij 'inci elemanıdır.

$(I-Q)^{-1}$ matrisine Markov Zinciri'nin Temel Matris'i denir.

4.1.2. Örnek 2:

Alacaklar hesabı örneğine tekrar geri dönelim ve aşağıdaki soruları cevaplandırıralım.

- Yeni bir hesabın ödenme olasılığı nedir?
- Ödemesi 1 ay gecikmiş bir hesabın şüpheli alacak olarak kaydedilmesi olasılığı nedir?
- Firmanın aylık ortalama satışı 100.000\$ ise, yıllık toplanamayan para ne kadardır?

Çözüm:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0,6 & 0 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}_{4 \times 2} \quad I - Q =$$

Matrisin tersi alınırsa;

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,30 & 0,12 \\ 0 & 1 & 0,50 & 0,20 \\ 0 & 0 & 1 & 0,40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$(I - Q)^{-1} \times R = \begin{bmatrix} 0,964 & 0,036 \\ 0,940 & 0,060 \\ 0,880 & 0,120 \\ 0,700 & 0,300 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

a. Yeni bir hesabın ödenme olasılığı için $(I-Q)^{-1}xR$ matrisinde yeni hesabı gösteren 1. satır ve ödenme olasılığı gösteren 1. sütun elemanına yani 11 elemanına bakacağiz. 0,96 olasılıkla yeni hesap ödenecektir.

b. Ödemesi 1 ay gecikmiş olan hesabı gösteren 2. satır ve şüpheli alacak olarak kaydedilme olasılığını gösteren 2. sütun elemanına yani 22 elemanına bakacağiz. 0,06 olasılıkla ödemesi 1 ay gecikmiş olan hesap şüpheli alacak olara kaydedilecektir.

c. Her ay ortalama 100.000\$'lık hesap açılıyorsa, yıllık ortalama 1.200.000\$'lık hesap açılacaktır. Yeni hesapların ödenmemesi (şüpheli alacak olarak kaydedilmesi) olasılığı $(I-Q)^{-1}xR$ matrisinin 12 elemanına eşit yani 0,036 olduğuna göre; $1.200.000 \times 0,036 = 43.200\$ / \text{yıl}'lık$ bir toplanamayan para olması tahmin edilir.

Örnek: Hukuk firmasırneğini göz önüne alarak aşağıdaki sorulara cevap verelim.

- a)** Yeni işe alınan tecrübesiz bir avukat firmada ortalama ne kadar çalışır?
- b)** Tecrübesiz bir avukatın ortak olma ihtimal nedir?
- c)** Bir ortağın firma ile ortalama çalışma süresi ne kadardır?

Çözüm:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,70 & 0,20 \\ 0 & 0 & 0,95 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad R = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0,10 & 0 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 0,20 & -0,15 & 0 \\ 0 & 0,30 & -0,20 \\ 0 & 0 & 0,05 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2,5 & 10 \\ 0 & 10/3 & 40/3 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (I - Q)^{-1} \times R = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,50 \\ 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

a. Yeni işe alınan tecrübesiz bir avukatın tecrübesiz olarak çalışma periyodu $((I-Q)^{-1}$ matrisinin 11 elemanından) 5 yıl, kıdemli olarak çalışma periyodu $((I-Q)^{-1}$ matrisinin 12 elemanından) 2,5 yıl ve ortak olarak çalışma periyodu $((I-Q)^{-1}$ matrisinin 13 elemanından) 10 yıldır. Toplamda yeni işe alınan tecrübesiz bir avukatın firmada ortalama 17,5 yıl kadar çalışması beklenir.

b. Tecrübesiz bir avukat $(I-Q)^{-1} \times R$ matrisinin 12 elemanına göre 0,50 olasılıkla işletmeden ortak olarak ayrılıyorsa gelecekte 0,50 olasılıkla ortak olarak çalışacağı anlamına gelir.

c. Bir ortağın firmada ortalama çalışma süresinin $((I-Q)^{-1}$ matrisinin 33 elemanından) 20 yıl olduğunu söyleyebiliriz.

İşgücü Planlama Modelleri

Birçok organizasyon (örneğin; daha önce de sözünü ettigimiz avukatlık firması gibi) farklı kategorilerde çalışan istihdam ederler. Uzun dönemli planlama için kararlı durumda bulunacak her bir kategoriden kaç çalışanın istihdam edilmesi gerektiğini tahmin edilebilmesi oldukça faydalı olacaktır.

Çalışanlarını s farklı gruba ayırmış bir firma düşünelim. Her bir zaman aralığında i grubunda çalışan bir kişinin bir sonraki zaman aralığından j durumuna geçme olasılığı p_{ij} olsun. Ayrıca tüm zaman aralıklarında p_{is+1} olasılığı da i grubunda çalışan bir kişinin bir sonraki zaman aralığında işten ayrılma olasılığını göstersin. Yani P matrisi $s \times (s+1)$ boyutlu bir matris p_{ij} de bu matrisin elemanı olsun. Her bir periyodun başlangıcında firma H_i kadar grup i kişisini işe alınsın. $N_i(t)$ 'de t periyodunun başlangıcında işletmede çalışmakta olan i grubuna ait kişi sayısı olsun. Burada her bir $N_i(t)$, t büyükükçe bir limite yaklaşuyorsa ($N_i = \lim_{n \rightarrow \infty} N_i(t)$) N'ye (N_1, N_2, \dots, N_s) "Kararlı Durum Sayımı" (steady-state census) denir.

Eğer kararlı durum sayımı söz konusuya, kararlı durumda ;

(Her bir periyot boyunca i grubuna katılan çalışan sayısı)= (Her bir periyot boyunca i grubundan ayrılan çalışan sayısı) olmalıdır.

Her grup için bu eşitlik sağlanamazsa, zaman ilerledikçe en azından bir grupta yığılma olur. Buna göre;

$$\text{Her bir periyot boyunca i durumuna geçen insan sayısı} = H_i + \sum_{k \neq i} N_k p_{ki}$$

$$\text{Her bir periyot boyunca i durumundan ayrılan insan sayısı} = N_i \sum_{k \neq i} p_{ik}$$

Bu eşitlikler kararlı durum sayımı hesabında kullanılır:

$$H_i + \sum_{k \neq i} N_k p_{ki} = N_i \sum_{k \neq i} p_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

Yukarıdaki eşitliği basitleştirmek için; $\sum_{k \neq i} p_{ik}$ yerine $(1 - p_{ii})$ kullanılabilir. Eğer kararlı durum söz konusu değilse, herhangi bir çözüm bulunamaz.

4.1.3. Örnek 3:

Amerika'da insanların çocukların, çalışan yetişkinler ve emekliler olarak 3 gruba ayrıldığını farz edelim. Bir yıllık periyot süresince çocukların 0,959'u çocuk olarak kalmakta 0,04'ü çalışan yetişkin durumuna geçmekte ve 0,001'i de ölmektedir. Herhangi bir yıl boyunca çalışan yetişkinlerin 0,96'sı aynı durumda kalmakta, 0,03'ü emekli olmakta ve 0,01'i de ölmektedir. Emeklilerin 0,95'i aynı durumda kalmakta 0,05'i de ölmektedir. Her yıl 1000 çocuk doğduğuna göre;

- Kararlı durum sayımını belirleyiniz.
- Her bir emekli, çalışan yetişkinlerin ödemeleriyle kurulan emekli fonundan yılda 5000\$ maaş alırsa, her bir çalışan yetişkin emekli fonuna yıllık ne kadarlık bir katkı yapmak zorundadır?

Çözüm:

Grup 1: Çocuklar

Grup 2: Çalışan yetişkinler

Grup 3: Emekliler

Grup 4: Ölenler

$$H_1=1000, H_2=H_3=0 \text{ ve } P = \begin{bmatrix} 0,959 & 0,040 & 0 & 0,001 \\ 0 & 0,960 & 0,030 & 0,010 \\ 0 & 0 & 0,950 & 0,050 \end{bmatrix}$$

“Her bir periyot boyunca i durumuna geçen insan sayısı= Her bir periyot boyunca i durumundan ayrılan insan sayısı” eşitliğine göre aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$1000 = (0,04 + 0,001)N_1 \text{ (Çocuklar)}$$

$$0,04N_1 = (0,03 + 0,01)N_2 \text{ (Çalışan yetişkinler)}$$

$$0,03N_2 = 0,05N_3 \text{ (Emekliler)}$$

a) Bu denklem sisteminin ortak çözümünden $N_1 = 24.390$, $N_2 = 24.390$, 24 , $N_3 = 14.634,14$ bulunur.

b) Kararlı durumda $14.634,14$ emekli olacağına göre yılda $14.634,14 \times 5000\$$ maaş ödemesi yapılacaktır. Bunun için çalışanlar da;

$$\frac{14634,14 \times 5000}{24390,24} = 3000\$/\text{yıl} \text{ katkıda bulunurlar.}$$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Yutucu zinciler ile örnekler görüldü

BÖLÜM SORULARI

- 1) Yutucu zincirler ile ilgili geliştirilen formüller ile bulunan geçiş olasılık değerleri ile; formülleri kullanmadan, geçiş matrisini yeteri kadar büyülüklükte üstel değeri alınarak elde edilen olasılık değerleri aynı mıdır? Tartışınız.
- 2) $(I-Q)^{-1}xR$ neyi ifade etmektedir?
- 3) $(I-Q)^{-1}$ hangi bilgiyi vermektedir?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

5. KUYRUK PROBLEMLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Kuyruk teorisi

$M/M/1/GD/\infty/\infty$ kuyruk sistemlerinde sabit durum olasılıklarını elde etme

$M/M/1/GD/c/\infty$ kuyruk sistemlerinde (kuyruk kapasitesinin sınırlı olduğu durumlarda)
sabit durum olasılıklarını elde etme

Giriş

Bu bölümde kuyruk teorisi incelenecaktır. Öncelikli olarak kuyruk teorisinin temelleri üzerinde durulacak, sonrasında ise genel ve kapasite kısıtlı kuyruk problemleri üzerinde durulacaktır.

5.1. Kuyruk Teorisi

Bekleme günlük yaşamın her alanında karşılaşılan bir olaydır. Örneğin banka gişelerinde bekleyen insanlar, marketlerde ödeme yapmak isteyenlerin kasada oluşturdukları kuyruklar, hastanedeki hasta kuyrukları v.b. Bekleme sadece insana özgü bir deneyim değildir. Örneğin; işler makinede işlem görmeyi bekler, uçaklar havaalanı kulesinden iniş izni almadan önce havada daireler çizer. Bu kuyrukların oluşum nedeni hizmete olan talebin, hizmet biriminin kapasitesini aşmasıdır.

Tüm işletme tiplerinin, devlet, sanayi, okul ve hastanelerin büyük veya küçük kuyruk problemleri vardır. En önemli sorunlarından birisi müşterilerine etkin bir servis sistemi yönetimini oluşturamamaktır. Hizmet üreten işletmelerde hizmet düzeyi, etkinliği ve sürekliliğini artırma yönetici için önemli bir gereklilik olarak ortaya çıkmaktadır.

Bir kuyruk sistemini açıklayabilmek için giriş ve çıkış süreci belirlenmelidir. Giriş/çıkış süreci için bazı örnekler:

Durum	Giriş Süreci	Çıkış Süreci
Banka	Müşterilerin bankaya varışı	Banka memurunun müşteriye servis vermesi
Pizzacı	Pizza siparişinin alınması	Pizzacının siparişi teslim etmesi
Hastane Kan Bankası	Kan gelişİ	Hastaların kan alması
Tersane	Arızalı gemilerin tersaneye gelişİ	Gemilerin tamir edilip denize dönmesi

Sıra beklemenin söz konusu olduğu bir hizmet işletmesinde, hizmet talebinin belirsizliği, birbirine zıt iki durumu ortaya çıkartmaktadır. Bunlardan ilki, müşterilerin beklemesi ya da bekleme nedeniyle müşteri kaybı, ikincisi ise hizmet biriminin boş beklemesidir. Bu sorumlara çözüm arayışı, bilimsel yönetim tekniklerinin kullanılmasını bir zorunluluk haline getirmektedir. Aksi halde, bekleme zamanını azaltmak ve müşteri kaybını önlemek amacıyla talebi yanında karşılamak için hizmet kapasitesini artırmak, hizmet biriminin boş kalıp beklemesi durumunda işletmeye çok pahalıya mal olacak bir etkinlik kaybına sebep olacaktır. Birbirine zıt bu iki bekleme durumu arasında optimal bir bekleme zamanı bulmak için kullanılan sisteme, literatürde *sıra bekleme sistemleri ya da kuyruk modelleri* denmektedir. Bu sistemlerin analizinde amaç; sıra bekleme sisteminin işleyişile ilgili toplam maliyeti, ilgili maliyet türleri ve hizmet talebinin miktarı doğrultusunda en az düzeye indirebilecek bir hizmet kapasitesi belirlemektir.

Kuyruk teorisi, geliş ve gidişlerin rastgele olduğu tesislerin işletilmesini analiz etmek için modeller sunmaktadır. Poisson dağılımı ve üstel dağılım kuyruk analizinde önemli birer rol oynamaktadırlar, çünkü tamamen rastgele süreçleri temsil etmektedirler. Kuyruk modelleri başka dağılımlarla da analiz edilebildiği halde, ortaya çıkan modeller genellikle analitik açıdan uygulanabilir değildir.

5.2. Kuyruk Teorisinde Genel Kavramlar

1. Müşteri Geliş Süreci: Müşteriler işlerinin görülmesi için servis sistemine gelen kişiler, araç ve gereçler veya makineler olabilir. Müşterilerin hizmet almak için sisteme gelişleri, bu gelişlerin hangi faktörlerden etkilendiği ve gelişlerinin özellikleri kuyruk teorisinde tanımlanması ve uygulamaya geçmeden önce bilinmesi gereken bileşenlerdir. Müşterilerin servis sistemine gelişleri sekiz farklı özellikle ifade edilir:

- 1) Müşterilerin geldiği kaynak bir ya da birden fazla olabilir.
- 2) Müşterilerin geldiği kaynak sonlu veya sonsuz olabilir.
- 3) Kuyruk sistemine gelişler tek tek veya grup halinde olabilir.
- 4) Gelişler, sistem tarafından tamamen veya kısmen kontrol edilebildiği gibi hiç kontrol edilemeyecekler.
- 5) Müşterilerin sisteme gelişleri deterministik veya stokastik karakterlidir.
- 6) Gelişlerin zaman aralıklarının dağılımı, sistemden sisteme göre değişmekte beraber ya bilinen, istatistiksel dağılımlara uyar ya da sistemin kendisine özgü empirik bir dağılımdir.
- 7) Geliş süreci bağımlı veya bağımsız karakterlerde olabilir.
- 8) Geliş süreci durağan olabilir veya zaman içinde değişir.

2) Kuyruk Disiplini: Servis sistemine gelen müşteri sayısı hizmet kapasitesinden büyükse sistemde kuyruk oluşur. Kuyruk disiplini ise gelen müşterilerin bir kuyruğu seçme veya seçmemeye ve kuyrukta bekleme süresi içinde göstereceği davranışını kapsar. Kuyruk disiplininde aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- 1) Sistem kapasitesi dolu ise gelen birim kabul edilmez.
- 2) Hizmet almak için gelen müşteri kuyrukta beklemenin uzun zaman alacağını düşünür ve kuyruğa girmeden sistemi terk eder.
- 3) Sisteme gelen müşteri kuyrukta bir süre bekledikten sonra ayrılabilir.
- 4) Çok kanallı kuyruk sistemlerinde müşteri daha kısa olduğunu düşündükleri kuyruğa girerek yer değiştirebilirler.

3) Servis Disiplini: Servis istasyonunun, servis için müşteri seçiminde koyduğu ve uyguladığı politikalara servis disiplini denir. Servis disiplini seçimi maliyetleri etkileyen bir karar sürecidir. Dört tip servis disiplininden söz edilebilir. Bunlar;

1. FCFS (First Come First Served); ilk gelen ilk servis alır disiplini bazı kaynaklarda FIFS (First In First Served) , FCFC (First Come First Choice) olarak da adlandırılır. Bu discipline göre müşteriler geliş amaçları yada tercihleri göz önüne alınmaksızın sisteme geliş sıralarına göre servis görürler. Örneğin taksi, restoran ve benzeri sistemlerde bu kuyruk disiplini geçerlidir.

2. LCFS (Last Come First Served); son gelen ilk servis alır disiplini bazı kaynaklarda LIFS (Last In First Served) olarak da adlandırılır. Bu discipline göre yeni gelen müşteriler derhal servise alınır. Eğer servis alan bir müşteri varsa yeni gelen müşterinin servisi tamamlanana kadar bekletilir.

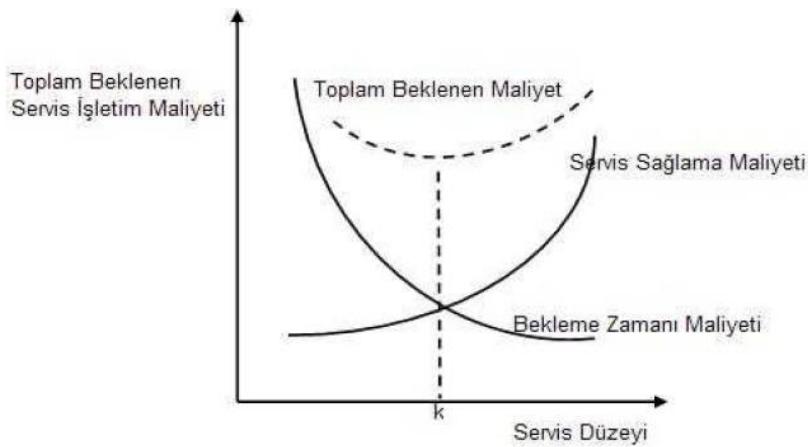
3. SIRO (Service In Random Order); rassal sırada servis disiplinine göre rastgele müşterilere yani hangi müşteri rast gelirse ona hizmet edilir.

4. PRI (Priority Queue Discipline); öncelikli servis disiplini iki biçimde uygulanır: Birincide, öncelikli bir müşteri gelir ve kanalda hizmet sunulan bir müşteri varsa kanaldaki müşteri çıkarılır yerine gelen müşteri alınır. Buna “tam öncelikli servis” (preemptive service priority order-PSPO) disiplini adı verilir. Eğer kanaldaki müşterinin hizmeti bitirilir ve öncelikli müşteri sırada bekleyenlerden önce alınırsa buna “tam öncelikli olmayan servis” (non-preemptive priority service-NPPS) disiplini denilir.

Servis disiplini çeşitli biçimlerde uygulanmasına rağmen sistemin genel işleyişini etkilemez. Çünkü sistemde olması beklenen ortalama müşteri sayısı, sırada bekleyen ortalama müşteri sayısı ve bekleme zamanı gibi sistem göstergeleri discipline bakımaksızın aynıdır.

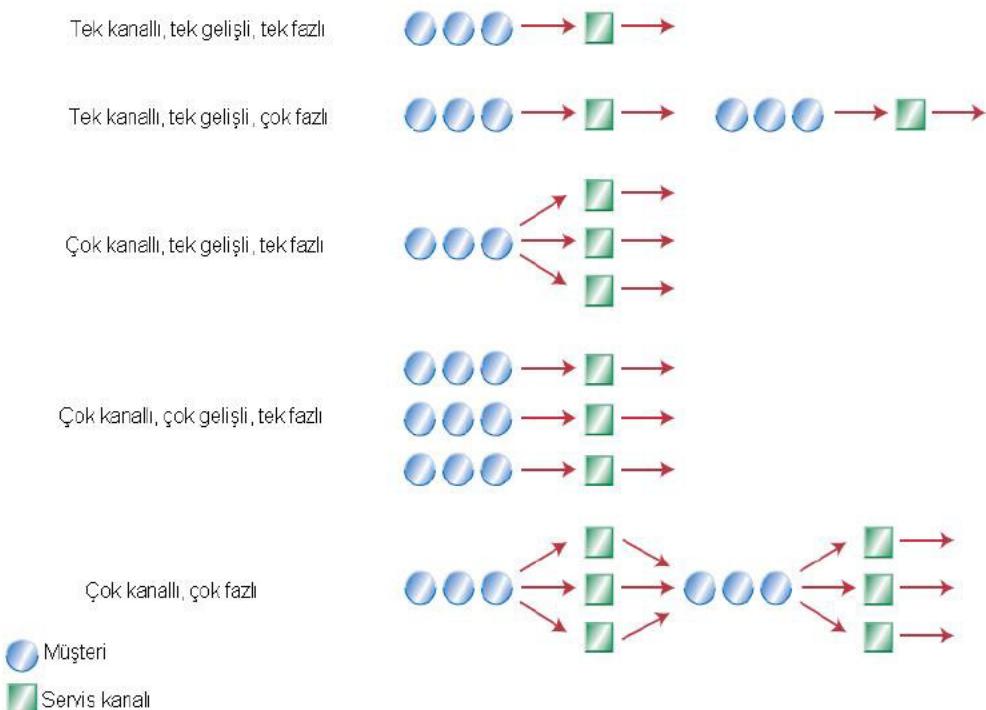
4) Servis Oranı: Hizmet almak için sisteme gelen müşterilerin hizmet almaları için istenen servis süresini ifade eder. Kuyruk sistemlerinde servis seviyesi performans ölçütü olarak da anlam kazanmaktadır. Servis için gelen müşterilerin her biri aynı miktarda süreyi gerektirirse servis oranı tek biçimli olabilir. Servis süreleri karmaşık olduğunda Erlang veya Üstel olasılık dağılımları ile gösterilir.

5) Kuyrukta Bekleme ve Servis Sağlama Maliyetleri: Kuyruk modelinde iki maliyet vardır. Birincisi müşterinin servis için bekledikleri zaman kaybının maliyetidir. Buna bekleme zamanı maliyeti adı verilir. İkincisi ise müşteri servisini sağlama maliyetidir. İşletme servis seviyesini artırmakken, bekleme zamanı maliyetini en düşük düzeyde tutmayı amaçlar. Servis düzeyi artarken, bekleme maliyeti azalır fakat servis sağlama maliyeti artar. İşletme servis düzeyini artırmakken bekleme zamanı maliyetini en düşük düzeyde tutmayı amaçlar. Bu iki maliyet toplamının en az olduğu noktada servis düzeyi işletme için en iyi miktar olmaktadır.



Kuyruk işlemlerinin organizasyonca içsel olduğu durumlarda, organizasyonun amacı bu maliyeti en aza indirmektir.

6) Servis Süreci: Servis süreci, müşterinin servis almaya başladıkta sistemi terk ettiği ana kadar geçen süreçtir. Servis süresi dağılımının sistemde bulunan müşterilerin sayısından bağımsız olduğu varsayılmır. Bu daha fazla müşteri olduğunda servisin daha hızlı çalışmayacağı anlamına gelir.



5.3. Notasyonlar

Kuyruk problemlerini tanımlamak için notasyonlar geliştirilmiştir, bunlar sırası ile 1/2/3/4/5/6 aşağıdaki gibidir:

1: Gelişler

- M: Müşteri gelişleri üstel
- D: Deterministik
- E_k : Erlang, k parametreli
- GI: Genel dağılım

2: Servis

- M: Hizmet Süresi üstel
- D: Deterministik
- E_k : Erlang, k parametreli
- GI: Genel dağılım

3: Paralel Servis Sayısı

4: Kuyruk Disiplini

- FCFS: İlk Gelen İlk Hizmet Gören
- LCFS: Son Gelen İlk Hizmet Gören
- SIRO: Random Servis
- GD : Genel Kuyruk Disiplini

5: Sistemde Müsaade Edilen En Çok Müşteri Sayısı

6: Müşterilerin Kümesi

Örnek: M/M/1/GD/ ∞/∞

- Müşteri gelişleri üstel,

- Hizmet süresi üstel,
- Hizmet veren sayısı 1,
- Kuyruk disiplini genel,
- Kuyruk kapasitesi sınırsız,
- Müşteri kümesi sınırsız.

5.4. M/M/1/GD/ ∞ / ∞ Kuyruk Kapasitesi Sınırsız

Genellikle bir müşterinin bir kuyruk sisteminde ne kadar zaman harcadığıyla ilgilenilir. Müşterinin kuyruk sisteminde harcaması beklenen zaman, kuyrukta harcadığı zaman ile serviste harcadığı zamanın toplamıdır ve W ile sembolize edilir. Müşterinin kuyrukta harcadığı zaman da W_q ile sembolize edilir. Kararlı duruma ulaşıldığı varsayımlı altında W ve W_q değerleri hesaplanabilmektedir. Little'ın kuyruk formülüne göre W ve W_q değerleri L ve L_q değerlerinden kolayca hesaplanabilir.

λ = Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısı

L = Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

L_q = Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı

L_s = Servisteki ortalama müşteri sayısı

W = Bir müşterinin sistemde harcadığı ortalama süre

W_q = Bir müşterinin kuyrukta beklediği ortalama süre

W_s = Bir müşterinin serviste harcadığı ortalama süre

Herhangi bir sabit durum dağılımı olan bir kuyruk sistemi için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\checkmark \quad L = \lambda * W$$

(Sistemdeki ortalama müşteri sayısı= Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısı* Bir müşterinin ortalama sistemdeki harcadığı süre)

$$\checkmark \quad L_q = \lambda * W_q$$

(Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı= Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısı* Bir müşterinin ortalama kuyrukta beklediği süre)

$$\checkmark \quad L_s = \lambda * W_s$$

(Servisteki ortalama müşteri sayısı= Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısı* Bir müşterinin ortalama serviste harcadığı süre)

İlk gelen müşteriye ilk hizmet veren bir kuyruk sistemi düşünelim. Sistem kararlı duruma ulaşmış olsun ve sisteme rastgele bir geliş yapılsın. Müşteri servis tamamlanıncaya sistemde kalsın ve müşteri sistem ayrıldığında sistemde ortalama L kişi olsun. Bu müşteri sistem ayrıldığı zaman, kim sistemde olacak? Yalnızca bir önceki müşterinin sistemde harcadığı süre boyunca sisteme gelen müşteriler. Önceki müşteri sistemde ortalama W kadar zaman harcadığına göre, bu sürede ortalama λW kadar müşteri sisteme gelecektir. Bundan dolayı $L = \lambda W$ olur.

$\rho = \lambda / \mu$ formülünde λ ; birim zamanda gelen müşteri sayısı, μ ; birim zamanda hizmet sunulabilen ortalama müşteri sayısına (servis hızına) bölündüğünde ρ bir kuyruktaki trafik yoğunluğunu elde etmiş oluruz. $0 \leq \rho < 1$ olmalıdır.

$L = \rho / (1 - \rho)$ formülünden de hesaplanabilir. Buna göre;

$W = L / \lambda = 1 / (\mu - \lambda)$ olur.

$L_q = \lambda^2 / \mu (\mu - \lambda)$ ve $W_q = \lambda / \mu (\mu - \lambda)$ olur.

Bu formüllerde dikkat edilirse ρ değeri 1'e yaklaşıkça W ve W_q değerlerinin büyüğü, 0'a yaklaştıkça da W_q değerinin 0'a yaklaşığı W değerinin de $1 / \mu$ 'ye yani ortalama servis zamanına yaklaşığı görülmektedir.

Örnek: Bir otomobil yıkama istasyonunda, tek bir noktada hizmet verilmektedir. Otomobil gelişleri saatte 10 araba ve her bir müşteri için ortalama servis süresi de 4 dakika sürmektedir. Geliş süreleri ve servis süreleri üstel dağılımı uygundur. Buna göre;

- Hizmet veren birimin boşta kalma olasılığı nedir?
- Ortalama kuyruk da bekleyen müşteri sayısı nedir?
- Müşterinin sistemde harcadığı süre ne kadardır?
- Ortalama saatte kaç müşteriye hizmet verilmektedir?

Çözüm: Problem, $\lambda = 10$, $\mu = 15$ araba/saat olan bir $M/M/1/GD/\infty/\infty$ kuyruk sistemi problemidir ve $\rho = 10/15$ 'tir.

a. Boşta kalma olasılığı = $1 - \rho = 1 - (2/3) = 1/3$ Hizmet veren birim ortalama, zamanının üçte birini boş olarak geçirecektir.

b. $L_q = \lambda^2 / \mu (\mu - \lambda)$ formülünde elimizdeki verileri yerine koyduğumuz zaman;

$L_q = 10^2 / 15 (15 - 10) = 1,33$ kişi olarak bulunur.

c. Müşterinin sistemde harcadığı ortalama süre; $W = 1 / (15 - 10) = 0,2$ saat yani ortalama 12dkdır.

d. Hizmet veren birim her zaman dolu olsaydı, saatte 15 müşteriye hizmet verebilirdi. A şıkkında birimin çalışma süresinin üçte birinin boş geçtiğini biliyoruz. Buna göre kalan üçte ikilik sürede $15 \cdot (2/3) = 10$ müşteriye hizmet vermektedir. (Bu değerin sistem kararlı duruma ulaştığında geçerli olduğunu söyleyebiliriz.)

Örnek: Her araç sahibinin benzin deposu yarıya kadar boşaldığında, benzin aldıklarını düşünelim. Böylece tek dolum pompası olan bir istasyona saatte 7,5 müşteri gelmektedir. Hizmet süresi ise, bir araba için 4 dakika olmaktadır. Geliş süreleri ve süreleri üstel dağılımı uygundur. Buna göre;

a. L ve W nedir?

b. Eğer araba sahipleri, panik yapar ve depolarının $\frac{3}{4}$ 'ü dolu olduğunda, istasyona gelmiş olsalardı, servis süresi $10/3$ olursa, L ve W ne olurdu?

Çözüm:

a. Problem, $\lambda = 7,5$, $\mu = 15$ araba/saat olan bir M/M/1/GD/ ∞/∞ kuyruk sistemi problemidir ve $\rho = 7,5/15$ 'tir.

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı; $L = \rho / (1 - \rho)$ formülünden $L = 0,5/0,5 = 1$ müşteri olur.

Müşterinin sistemde harcadığı ortalama süre; $W = L / \lambda$ formülünden $W = 1/7,5 = 0,13$ saat olur.

b. Bu durumda problem, birim zamanda gelecek olan müşteri sayısı 2 katına çıkacağından $\lambda = 2(7,5) = 15$, $\mu = 60/3,33 = 18$ araba/saat olan bir M/M/1/GD/ ∞/∞ kuyruk sistemi problemidir ve $\rho = 15/18$ 'dır.

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı; $L = \rho / (1 - \rho)$ formülünden $L = (5/6)/(1/6) = 5$ müşteri olur.

Müşterinin sistemde harcadığı ortalama süre de; $W = L / \lambda$ formülünden $W = 5/15 = 1/3$ saat yani 20dk olur. Yani, panik uzun kuyruklara sebep olur...

5.5. M/M/1/GD/c/ ∞ Kuyruk Kapasitesi Sınırı

Sistemdeki ortalama müşteri sayısını ve müşterinin sistemde harcadığı ortalama süreyi bulmak için aşağıdaki formüller kullanılır:

- $\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{c+1}}$
- $\pi_j = \rho^j * \pi_0 \quad (j=1,2,\dots,c)$
- $\pi_j = 0 \quad (j=c+1, c+2, \dots)$
- Eğer $\mu \neq \lambda$ ise; $L = \frac{\rho[1-(c+1)\rho^c + c\rho^{c+1}]}{(1-\rho^{c+1})(1-\rho)}$
- Eğer $\mu = \lambda$ ise; $\pi_j = \frac{1}{c+1}$ ve $L = \frac{c}{2}$
- $L_s = 1 - \pi_0$ ve $L_q = L - L_s$

- $W = \frac{L}{\lambda(1-\pi_c)}$
- $W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-\pi_c)}$

M/M/1/GD/c/∞ kuyruk Sistemlerinde kararlı durum $\lambda \geq \mu$ olduğunda sağlanır.

Örnek: Bir berber dükkânında toplam 10 kişilik koltuk bulunmaktadır. Geliş zamanları üstel dağılıma uygundur ve saatte ortalama 20 müşteri gelmektedir. Gelen müşteriler eğer dükkân dolu ise girmemektedirler. Berber ise, saç kesim işlemini ortalama 12 dakikada tamamlamaktadır ve işlem süresi de üstel dağılıma uymaktadır.

- Berber ortalama saatte ne kadar saç kesme işlemi tamamlar?
- Dükkanı giren bir müşteri ortalama ne kadar zaman harcar?

Çözüm:

a. Gelenlerin π_{10} 'u dükkanı dolu bulacaktır. Bu durumda saatte ortalama $\lambda = (1 - \pi_{10})$ kişi dükkanı gelecektir. Gelen tüm müşteriler saçını kestirecek ve berber de saatte ortalama $\lambda = (1 - \pi_{10})$ saç kesecektir. Bu problemde $c=10$, $\lambda= 20$ müşteri/saat, $\mu= 5$ müşteri/saat. $\rho=20/5=4$.

$$\pi_0 = \frac{1-4}{1-4^{10+1}}$$

$$\pi_{10} = 4^{10} \left(\frac{1-4}{1-4^{10+1}} \right) = 0,75$$

$\lambda(1- \pi_{10})=20(1-0,75)=5$ Yani berber saatte ortalama 5 müşterinin saç kesme işlemini tamamlar. Bu da ortalama $20-5=15$ kişi dükkanı girmeyecek demektir.

$$b. L = \frac{4[1-(10+1)4^{10}+10 \cdot 4^{10+1}]}{(1-4^{10+1})(1-4)} = 9,67 \text{ müşteri}$$

$$W = \frac{9,67}{20(1-0,75)} = 1,93 \text{ saat}$$

Sonuçlara göre berber dükkanı oldukça kalabaliktır ve berber en az 1 tane çalışan istihdam etmelidir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Kuyruk problemleri ve sınıflandırmaları görüldü.

BÖLÜM SORULARI

- 1) $\rho = \lambda/\mu$ formülünde λ ; birim zamanda gelen müşteri sayısı, μ ; birim zamanda hizmet sunulabilen ortalama müşteri sayısına (servis hızı) dan daha küçük olmasına rağmen neden kuyruk oluşur. (örnek $\lambda = 10$, $\mu = 20$, $\rho = 0.5$)
- 2) Gerçek bir kuyruk problemini çözmek istedigimizde lamda λ ve mü μ değerleri nasıl bulunur
- 3) Büyük bir markette hangi saatte kaç kasiyer görevlisinin çalışması gereğiği nasıl bulunabilir ?
- 4) Havaalanlarında ne tür kuyruk problemleri vardır ?
- 5) Kullandığımız kredi kartları ile alış veriş yapılmak istedigimizde firmanın banka

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

6. KUYRUK PROBLEMLERİ (DEVAM)

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Birden Çok kanallı ($M/M/s/GD/\infty/\infty$) Kuyruk Sistemlerinde Sabit Durum
Olasılıklarını Elde Etme
Seri Kuyruk Sistemleri
Açık Kuyruk Sistemleri

Giriş

Bu bölümde kuyruk problemlerinin incelenmesine devam edilecektir. Çok kanallı kuyruk problemleri örneklerle anlatılacak, seri ve açık kuyruk problemleri tartışılacaktır.

6.1. (M/M/s/GD/ ∞/∞) Çok Kanallı Kuyruk Sistemleri

Gelişler arası zamanın ve servis sürelerinin üstel olduğu, tek gelişli ve çok kanallı (s paralel servisli) servis sistemlerini inceleyelim. Eğer mevcut durumda j müşteri sayısı $j \leq s$ ise; tüm müşteriler servis almaktadırlar. $j > s$ olması durumunda j-s müşteri kuyrukta beklemektedir. Her bir gelişte eğer boş servis merkezi varsa müşteriler oraya yönelir, fakat; tüm servis merkezleri doluyaşa müsteriler beklemek üzere kuyruğa dâhil olurlar.

Formüller

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=(s-1)} \frac{(s\rho)^i}{i!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}}$$

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{j!} \quad (j=1,2,\dots,s)$$

Eğer $\rho \geq 1$ kararlı durum olmayacağıdır. Başka bir ifadeyle, eğer geliş oranı en az maksimum servis oranı kadar büyükse ($\lambda \geq s\mu$) sistem çöker.

$$P(j \geq s) = \frac{(s\rho)^s \pi_0}{s!(1-\rho)}$$

$$L_q = \frac{P(j \geq s)\rho}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu}$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = L_q + L_s \text{ den } L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu}$$

$P(j \geq s)$ değerleri formülle hesaplanabildiği gibi aşağıdaki tablodan da okunabilir.

ρ	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$	$s = 7$
.10	.02	.00	.00	.00	.00	.00
.20	.07	.02	.00	.00	.00	.00
.30	.14	.07	.04	.02	.01	.00
.40	.23	.14	.09	.06	.04	.03
.50	.33	.24	.17	.13	.10	.08
.55	.39	.29	.23	.18	.14	.11
.60	.45	.35	.29	.24	.20	.17
.65	.51	.42	.35	.30	.26	.21
.70	.57	.51	.43	.38	.34	.30
.75	.64	.57	.51	.46	.42	.39
.80	.71	.65	.60	.55	.52	.49
.85	.78	.73	.69	.65	.62	.60
.90	.85	.83	.79	.76	.74	.72
.95	.92	.91	.89	.88	.87	.85

Örnek: Bankada bir serviste iki görevli çalışmaktadır. Saatte ortalama 80 müşteri gelmekte ve boş bir görevliden hizmet almak için tek bir kuyrukta beklemektedirler. Ortalama bir müşteriye verilen servis 1.2 dakika sürmektedir. Gelişler ve servis süresi üstel dağılıma uymaktadır. Buna göre;

- Bankada ortalama beklenen müşteri sayısı nedir?
- Bankada bir müşterinin ortalama harcadığı süre nedir?
- Çalışanların boş da kalma yüzdeleri nedir?

Çözüm:

a. $\lambda = 80 \quad \mu = 50 \text{ müşteri/saat}$

$\rho = \frac{80}{2*(50)} = 0,8 < 1$ yani kararlı durum mevcuttur. $P(j \geq 2) = 0,71$ tablodan

okunabilir veya $P(j \geq s) = \frac{(s*\rho)^s * \pi_0}{s! * (1-\rho)}$ formülünden hesaplanır.

$L_q = \frac{0,8*(0,71)}{1-0,8} = 2,84$ kuyrukta bekleyen müşteri, toplam $L = 2,841 + \frac{80}{50} = 4,44$

müşteri

b. $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4,44}{80} = 0,055 \text{ saat} = 3,3 \text{ dakika}$

c. Belirli bir servis merkezinin boş kalma oranını tanımlarken, $j=0$ zamanı boyunca ve $j=1$ zamanının yarısı kadar zaman (simetriden dolayı) dikkate alınır. Buna göre servis merkezinin boş kalma oranı $\pi_0 + 0,5\pi_1$ 'dir.

$$\pi_0 = \frac{s! * P(j \geq s) * (1-\rho)}{(s*\rho)^s} = \frac{2! * (0,71) * (1-0,8)}{(1,6)^2} = 0,11 \text{ veya}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{(2*0,8)^1}{1!} + \frac{(2*0,8)^2}{2! * (1-0,8)}} = \frac{1}{1+1*6+6*4} = \frac{1}{9} = 0,11 \text{ bulunur.}$$

$$\pi_1 = \frac{1,6^1 * \pi_0}{1!} = 0,176$$

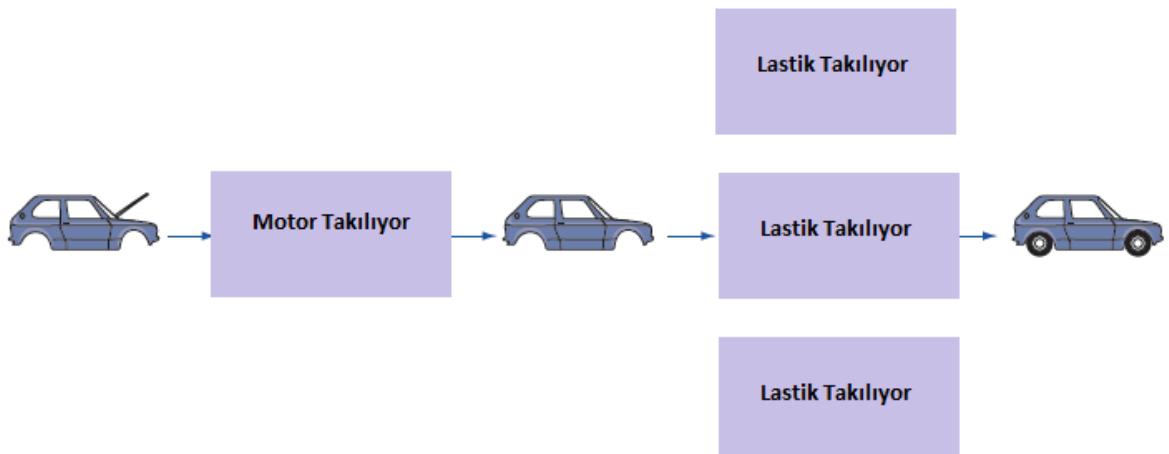
$$(0,5 * 0,176) = 0,198$$

$$\pi_0 + 0,5\pi_1 = 0,11 +$$

6.2. Seri Kuyruk Sistemleri

Örnek: Bir otomobil firmasında, motor takılması ve lastiklerin takılması seri kuyruk sistemi olarak tasarlanmıştır. Öncelikle tek bir merkezde motor takılmakta, sonrasında üç ayrı merkezde lastikler takılmaktadır. Kuyruğa saatte ortalama 54 araç gelmektedir. Motorun takılmasını gerçekleştiren işçi saatte 60 araç motoru takabilmektedir. Lastikleri takan her bir işçi de araç başına ortalama 3 dakika kadar bir zaman harcamaktadır. Gelişler arası süre ve servis süreleri üstel dağılıma uyduğuna göre;

- a. Her bir iş istasyonundaki ortalama kuyruk zamanları ne olur?
- b. Bir aracın sistemde harcadığı toplam süre ne olur?



Çözüm:

$$\lambda = 54 \text{ araba/saat } s_1=1, \quad \mu_1 = 60 \text{ araba/saat } s_2=3 \quad \mu_2 = 20, \quad \rho = \frac{54}{60} = 0,9$$

$$\text{a. } L_q(\text{motor}) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,9^2}{1-0,9} = 8,1 \text{ araba}$$

$$W_q(\text{motor}) = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{8,1}{54} = 0,15 \text{ saat}$$

$$\text{b. } \rho = \frac{54}{3*20} = 0,9$$

$$L_q(\text{lastik}) = \frac{0,83*0,9}{1-0,9} = 7,47 \text{ araba}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{7,47}{54} = 0,138 \text{ saat}$$

$\text{Toplam} = 0,15 + 0,138 = 0,288$ saat

6.3. Açık Kuyruk Sistemleri

$$M / M / s_j / GD / \infty / \infty$$

p_{ij} : müşterinin i. istasyonda işin tamamlandıktan sonra j. istasyona gitme ihtimali

r_j : dışarıdan gelen müşteri oranı

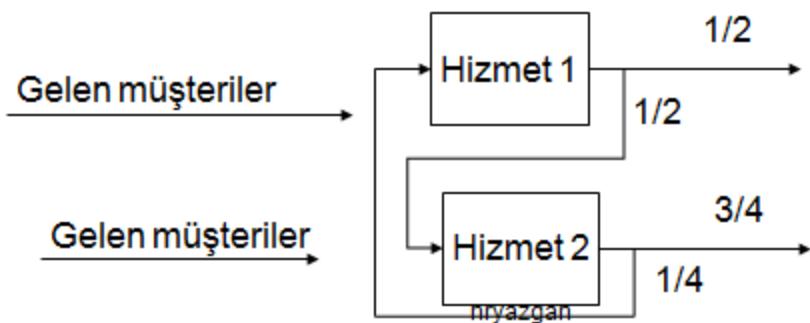
$1 - \sum_{j=1}^{j=k} p_{ij}$ hizmeti tamamlanma yüzdesi

λ_j = j istasyonuna gelenlerin miktarı

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{i=k} p_{ij} * \lambda_j$$

Örnek: İki kişi tarafından hizmet veren bir faaliyeti düşündüğümüzde, birinci hizmet veren kişiye saatte ortalama 8 müşteri ve ikinci kişiye ise, ortalama saatte 17 kişi gelmektedir. Birinci kişi ortalama üstel olarak saatte 20 müşteri ve ikinci kişi ise, üstel olarak ortalama saatte 30 müsteridir. Birinci kişiden hizmet alanlardan yarısı sistemden çıkmakta; diğer yarısı ise, ikinci kişiden hizmet almaya devam etmektedir, ikinci kişiden hizmet alan müşterilerden $\frac{3}{4}$ işlerini tamamlayarak sistemden ayrılmakta, geriye kalan $\frac{1}{4}$ müşteri ise, birinci kişiden hizmet almak istemektedir.

- a. Hizmet 1'in boşta kalma süresi nedir?
- b. Hizmet verenlerdeki ortalama müşteri sayısı?
- c. Bir müşterinin sistemde harcadığı ortalama süre nedir?
- d. Eğer hizmet 2, de ortalama saatte 20 müşteri olsa idi, 1-3 sorular nasıl olurdu?



$$r_1 = 8 \text{ müşteri/saat}$$

$$r_2 = 17 \text{ müşteri/saat}$$

$$p_{12} = 0,5$$

$$p_{21} = 0,25$$

$$p_{11} = p_{22} = 0$$

$$\lambda_1 = 8 + 0,25\lambda_2$$

$$\lambda_2 = 17 + 0,5\lambda_1$$

$$\lambda_1 = 14$$

$$\lambda_2 = 24$$

M / M / 1 / GD / ∞ / ∞

a. Hizmet 1

$$\lambda = 14 \text{ müşteri/saat}$$

$$\mu = 20 \text{ müşteri/saat}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - 0,7 = 0,3 \% \text{ 30 boş bekleniyor}$$

b. Hizmet veren yerlerdeki ortalama müşteri sayısı

$$L(\text{hizmet1}) = \frac{14}{20-14} = \frac{7}{3}$$

$$L(\text{hizmet2}) = \frac{24}{30-24} = 4$$

$$\text{Ortalama müşteri sayısı} = 4 + \binom{7}{3} = 19/3$$

c. Müşterinin sistemde harcadığı ortalama süre

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{19/3}{8+17} = 19/75 \text{ saat}$$

d. $s_2 \mu_2 = 20 < \lambda_2$ olduğundan sistem kararlı hale gelemezdi (steady state)

$$W_q = \frac{2,275 - 0,767}{5(1 - 0,076)} = 0,326 \text{ saat}$$

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Farklı tipdeki kuyruk problemlerinin çözümü üzerinde duruldu.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Çok kanallı sistem ile tek kanallı sistem arasında temek farklılık nerede oluşmaktadır.
- 2) Bir buz dolabı modeli üretim problemi kuyruk problemi olarak nasıl modellenebilir?
- 3) Bir hastanedeki kan alma hizmeti açık kuyruk sistemi şeklinde modellenebilir mi?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

7. AĞ MODELLERİ (ŞEBEKE ANALİZİ)

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Ağ modelleri (şebekе analizi)

En kısa yol problemi

Dijkstra's algoritması

Giriş

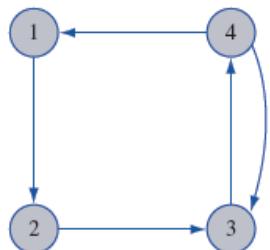
Bu bölümde ağ probleminin temel kavramları incelenecaktır. En kısa yol problemi üzerinde durulacaktır. Dijkstra algoritması adımları bir örnek üzerinde gösterilecektir.

7.1. Ağ Modelleri (Şebeke Analizi)

Ağ modelleri ya da şebeke analizi bir planlama teknigi olup genellikle büyük ölçekli projelerin planlanması, bir noktadan diğer noktaya olan en kısa yolu bulunması, inşaat planlaması, yeni ürünlerin pazarlamasının programlanması, belirli sistemlerdeki maksimum akışın (örneğin trafik akışı, sıvı akışları gibi) bulunması, büyük çaplı ihalelerin hazırlanması ve televizyon programının yapılması gibi birçok alanda kullanılabilir. Şebeke analizi tekniklerinden PERT (Proje Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği) ve CPM (Kritik Yol Yöntemi) projelerin planlanması ve uygulamadaki denetimi için bir yöntem sağlarlar.(Öztürk, 1997

Bir grafik veya ağ diyagramı oklar ve düğümler kümesinden oluşur. Göz önüne aldığımız bir ağda V kümesi düğümleri, A kümesi ise okları (bağlantıları) ifade eder. Bağlantılar kümescinin elemanları (j,k) şeklinde gösterilir. (j,k) olarak gösterilen bir bağlantıda j başlangıç düğümü, k ise hedef düğümü ifade eder.

Akışın yönüne bakılmaksızın iki düğümü birleştiren farklı bağlantılar yolları oluşturur. Bir yol bir düğümü kendine bağlıyorsa bir döngü veya çevrim oluşur.



Yandaki diyagramda;

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$A = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,3), (4,1)\}$ olarak ifade edilir.

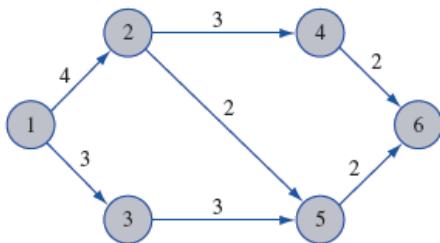
Örneğin; 4'ten 3'e gitmek için 2 yol vardır:

1. Yol: 4-3 yolu
2. Yol: 4-1-2-3 yolu.

7.2. En Kısa Yol Problemleri

Bir başlangıç düğümünden bir hedef düğüme gitmek için izlenebilecek en kısa yolu araştırdığımız problemlerdir.

Örnek: Aşağıdaki ağ diyagramında düğümler şehirleri, oklar üzerindeki rakamlar da şehirlerarasındaki uzaklıklarını ifade ederse, 1'den 6'ya gitmek için en kısa yol ne olmalıdır?



Çözüm: İzlenebilecek yollar şöyledir:

1. Yol: 1-2-4-6
2. Yol: 1-2-5-6
3. Yol: 1-3-5-6

Yolların uzunlukları şöyledir:

1. Yol: 9
2. Yol: 8
3. Yol: 8

Yani izlenebilecek en kısa yol; 1-2-5-6 veya 1-3-5-6 yollarıymış.

Örnek: 12000'a yeni bir araba aldığımızı düşünelim. Bir yıl boyunca arabanın bakım maliyeti arabanın yaşına göre değişmektedir ve aşağıdaki tabloda verilmiştir. Yüksek bakım masraflarından kaçınmak için arabayı satıp yeni bir araba alınamaktadır. Arabanın ticari değeri de yaşına göre değişmektedir ve aşağıdaki tabloda belirtilmiştir. Hesaplamayı basitleştirmek için herhangi bir zamanda yeni bir araba almanın maliyetinin hep 12000 olduğunu düşünelim. Önümüzdeki 5 yıl boyunca amacımız net maliyeti enküçüklemektir. (satınalma maliyeti + bakım maliyeti – arabanın satış değeri) Problemi en kısa yol problemi olarak modelleyiniz.

Aracın Yaşı	Yıllık Bakım Maliyeti (TL)	Satış Değeri (TL)
0	2000	7000
1	4000	6000
2	5000	2000
3	9000	1000
4	12000	0

Çözüm: Ağımızda 6 tane düğüm olacaktır. İ düğümü i yılının başlangıcını gösterecektir. $i < j$ için, (i,j) bağlantısı i yılında alınan bir aracın j yılına kadar elde tutulduğunu gösterir. (i,j) bağlantısının değeri (buna c_{ij} denilecek) i yılında satın alınan bir aracın j yılına kadar kullanılması ve j yılında satılması sonucu ortaya çıkan net maliyet değeridir. Şöyledi ki;

$c_{ij} = i$ yılından $j-1$ yılına kadar olan bakım maliyeti + i yılında alınan arabanın fiyatı – j yılında arabanın piyasa satış değeri

Buna göre c_{ij} değerlerini bulalım:

$$c_{12} = 12000 + 2000 - 7000 = 7000 \text{ (1. yılda alınıp 2. yılda satılma durumu)}$$

$$c_{13} = 12000 + 2000 + 4000 - 6000 = 12000 \text{ (1. yılda alınıp 2. yılda satılma durumu)}$$

$$c_{14} = 12000 + 2000 + 4000 + 5000 - 2000 = 21000 \text{ (1. yılda alınıp 4. yılda satılma durumu)}$$

$$c_{15} = 12000 + 2000 + 4000 + 5000 + 9000 - 1000 = 31000$$

$$c_{16} = 12000 + 2000 + 4000 + 5000 + 9000 + 12000 - 0 = 44000$$

$$c_{23} = 12000 + 2000 - 7000 = 7000 \text{ (2. yılda alınıp 3. yılda satılma durumu)}$$

$$c_{24} = 12000 + 2000 + 4000 - 6000 = 12000$$

$$c_{25} = 12000 + 2000 + 4000 + 5000 - 2000 = 21000$$

$$c_{26} = 12000 + 2000 + 4000 + 5000 + 9000 - 1000 = 31000$$

$$c_{34} = 12000 + 2000 - 7000 = 7000$$

$$c_{35} = 12000 + 2000 + 4000 - 6000 = 12000$$

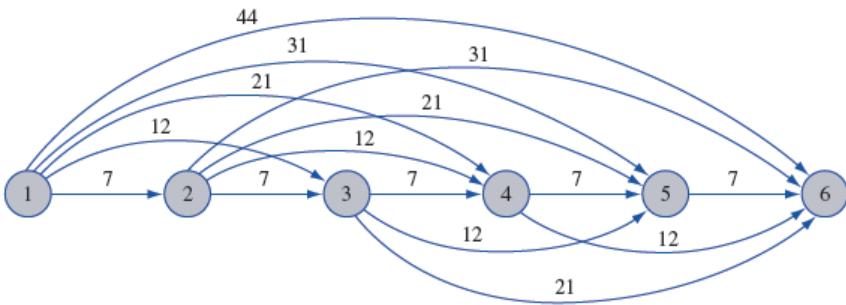
$$c_{36} = 12000 + 2000 + 4000 + 5000 - 2000 = 21000$$

$$c_{45} = 12000 + 2000 - 7000 = 7000$$

$$c_{46} = 12000 + 2000 + 4000 - 6000 = 12000$$

$$c_{56} = 12000 + 2000 - 7000 = 7000$$

Yukarıdaki değerler bize 1 düğümünden 6 düğümüne giderken hangi yolu izlersek izleyelim tüm durumlarda net maliyetimizi vermektedir. Örneğin; başlangıçta aldığım arabayı 3. yılın başında satarsam ve yine 3. yılda araba alıp 5. yılın sonuna kadar kullanıp satarsam $c_{13} + c_{36}$ değerlerinden bana bu stratejinin maliyeti 33000 olmaktadır. Aşağıdaki diyagramda tüm stratejilerin maliyetleri verilmiştir.



7.3. Dijkstra Algoritması

Bağlantı değerlerinin negatif olmadığı durumlarda bir düğümden diğer tüm düğümlere giden en kısa yolu bulmak için Dijkstra Algoritması kullanılabilir.

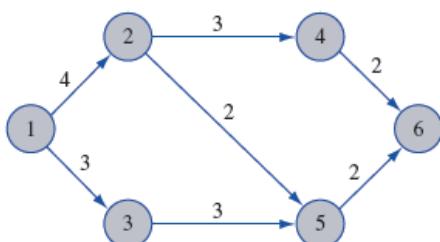
Başlangıç düğümü olan düğüm 1 “kalıcı” olarak 0 değeriyle etiketlenir. Düğüm 1’e tek bir bağlantıyla (ok ile) bağlı olan i düğümleri “geçici” olarak etiketlenir. Bunların dışındaki diğer düğümler ∞ değeriyle geçici olarak etiketlenir. Daha sonra en küçük değerli geçici etiketli düğüm seçilir ve “kalıcı” olarak etiketlenir.

Şimdi i düğümünün kalıcı etiketi alarak $(k+1)$ ’inci düğüm olduğunu farz edelim. Bu durumda i düğümü düğüm 1’e en yakın k ’ncı düğümdür. Bu noktada herhangi bir düğümün (düğüm i') geçici etiketi düğüm 1’den düğüm i' ye olan, düğüm 1’e en yakın $k-1$ düğümü içeren en kısa yoldur. Her bir j düğümü için geçici bir etiket vardır ve düğüm i' ye bağlıdır. j ’nin geçici etiketi

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \text{düğüm } j' \text{ nin geçici etiketi} \\ \text{düğüm } i' \text{ nin geçici etiketi} + (i, j) \text{ değeri} \end{array} \right\} \quad \text{kuralına göre yenilenir.}$$

Düğüm 1’e en yakın k düğümünü içeren düğümlerden geçen, j ’nin yeni geçici etiketinin değeri (uzunluğu)düğüm 1’den düğüm j ’ye olan en kısa yoldur. En küçük geçici etiket kalıcı etiket yapılır. Düğüm 1’e en yakın $k+1$ ’inci en kısa düğüm yeni geçici düğüm olarak etiketlenir. Bu süreç tüm düğümleri geçici düğüm olarak etiketleyene kadar devam eder. Düğüm 1’den düğüm j ’ye olan en kısa yolu bulmak için, düğüm j ’den geriye doğru bağlantı uzunluklarıyla farklılık gösteren düğümleri bulunmalıdır. Eğer düğüm 1’den düğüm j ’ye olan en kısa yolu bulurken, düğüm j kalıcı etiketi alana kadar süreç devam ettirilir.

Örnek:



Probleminde başlangıç düğümü olan 1'den, bitiş düğümü olan 6'ya giden en kısa yolu bulalım.

- Öncelikle 1 düğümü kalıcı olarak etiketlenir ve 0 değerini alır.
- 1'den 2 ve 3'e tek bağlantıyla ulaşılabilir ve bu düğümler kalıcı olarak işaretlenerek bağlantı değerlerini alırlar. Bunun dışındaki düğümler de geçicidir ve ∞ (olarak hesaplanır) değerini alırlar. $[0^* \ 4 \ 3 \ \infty \ \infty \ \infty]$ şeklinde.
- Daha sonra 1'den geçici etiketli en küçük bağlantı değerine sahip 3 düğümüne gidilir ve 3 düğümü kalıcı olarak işaretlenir. $[0^* \ 4 \ 3^*\infty \ \infty \ \infty]$
- 3 düğümünden tek geçiş 5 düğümüne olduğu için bu bağlantı değeri tekrar hesaplanır. (5 düğümünün geçici etiketi= $\min\{\infty, 3+3\}=6$) $[0^* \ 4 \ 3^*\infty \ 6 \ \infty]$
- Bir sonraki en küçük değerli bağlantının değeri 4 olduğundan 2 düğümü kalıcı düğüm olarak işaretlenir. $[0^* \ 4^* \ 3^*\infty \ 6 \ \infty]$
- 2 düğümünden 4 ve 5 düğümlerine geçiş vardır ve bu düğümlerin değerleri tekrar hesaplanır. (4 düğümünün geçici etiketi= $\min\{\infty, 4+3\}=7$; 5 düğümün geçici etiketi= $\min\{6, 4+2\}=6$) $[0^* \ 4^* \ 3^* \ 7 \ 6 \ \infty]$
- Bir sonraki en küçük bağlantının değeri 6 olduğundan 5 düğümü kalıcı olarak etiketlenir. $[0^* \ 4^* \ 3^* \ 7 \ 6^* \ \infty]$
- 5 düğümünden 6 düğümüne geçiş vardır ve 6 düğümünün bağlantı değeri tekrar hesaplanır. (6 düğümünün geçici etiketi= $\min\{\infty, 6+2\}=8$;) $[0^* \ 4^* \ 3^* \ 7 \ 6^* \ 8]$
- Bir sonraki en küçük bağlantının değeri 7 olduğundan 4 düğümü kalıcı olarak etiketlenir. $[0^* \ 4^* \ 3^* \ 7^* \ 6^* \ 8]$
- 4 düğümünden 6 düğümüne geçiş vardır ve 6 düğümünün bağlantı değeri tekrar hesaplanır. (6 düğümünün geçici etiketi= $\min\{8, 7+2\}=8$;) $[0^* \ 4^* \ 3^* \ 7^* \ 6^* \ 8]$
- Bir sonraki en küçük bağlantının değeri 8 olduğundan 6 düğümü kalıcı olarak etiketlenir. Hedef düğüm kalıcı olarak etiketlendiği için algoritma durur. $[0^* \ 4^* \ 3^* \ 7^* \ 6^* \ 8^*]$
BİTTİ!
- En kısa yolu bulmak için geriye doğru gidilir. 6'ya en kısa 5 düğümünden, 5'e de en kısa 2 ve 3 düğümlerinden, 2 ve 3 düğümlerine de 1 düğümünden en kısa ulaşılır. Yani daha önceden de hesaplandığı gibi, 1-2-5-6 ve 1-3-5-6 en kısa yollardır.

Not: Dijkstra algoritmasının çalışması için ağ döngüsel olmamalıdır.

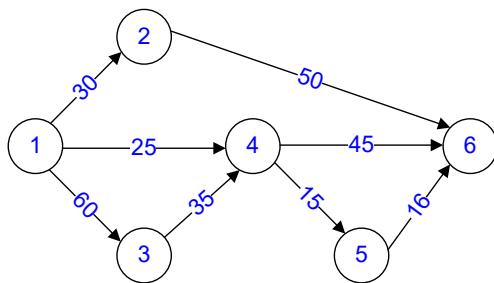
Örnek: n şehir arasında bazıları doğrudan ve bazıları aktarmalı olmak üzere hava yolu ulaşımı mevcuttur. İ ve j şehirleri arasındaki hava yolu ulaşım maliyeti a_{ij} ile gösterilsin. $a_{ij}=a_{ji}$ olduğunu kabul edip, i ve j şehirleri arasında doğrudan uçuş yoksa gösterime uygun iki şehir

arasındaki yolculuk için en düşük ulaşım maliyetinin bulunmasıdır. $n=6$ ve $a_{12}=30$, $a_{13}=60$, $a_{14}=25$, $a_{15}=a_{16}=\infty$, $a_{23}=a_{24}=a_{25}=\infty$, $a_{26}=50$, $a_{34}=35$, $a_{35}=a_{36}=\infty$, $a_{45}=15$, $a_{46}=45$, $a_{56}=16$ olarak verilsin.

- Probleme ilişkin ağı çizin.
- En düşük maliyetle 1. Şehirden 6. Şehre gitmek için hangi yol izlenmelidir?

Çözüm:

a.



b.

- Öncelikle 1 düğümü kalıcı olarak etiketlenir ve 0 değerini alır.
- 1'den 2, 3 ve 4'e tek bağlantıyla ulaşılabilir ve bu düğümler kalıcı olarak işaretlenerek bağlantı değerlerini alırlar. Bunun dışındaki düğümler de geçicidir ve ∞ (olarak hesaplanır) değerini alırlar. $[0^* \ 30 \ 60 \ 25 \ \infty \ \infty]$ şeklinde.
- Daha sonra 1'den geçici etiketli en küçük bağlantı değerine sahip 4 düğümüne gidilir ve 4 düğümü kalıcı olarak işaretlenir. $[0^* \ 30 \ 60 \ 25^* \ \infty \ \infty]$
- 4 düğümünden 5 ve 6 düğümlerine geçiş olduğu için bu bağlantılar değeri tekrar hesaplanır. (5 düğümünün geçici etiketi= $\min\{\infty, 25+15\}=40$, 6 düğümünün geçici etiketi= $\min\{\infty, 25+45\}=70$) $[0^* \ 30 \ 60 \ 25^* \ 40 \ 70]$
- Bir sonraki en küçük değerli bağlantının değeri 30 olduğundan 2 düğümü kalıcı düğüm olarak işaretlenir. $[0^* \ 30^* \ 60 \ 25^* \ 40 \ 70]$
- 2 düğümünden 6 düğümüne geçiş vardır ve bu düğüm değeri tekrar hesaplanır. (6 düğümünün geçici etiketi= $\min\{70, 30+50\}=70$) $[0^* \ 30^* \ 60 \ 25^* \ 40 \ 70]$
- Bir sonraki en küçük değerli bağlantının değeri 40 olduğundan 5 düğümü kalıcı düğüm olarak işaretlenir. $[0^* \ 30^* \ 60 \ 25^* \ 40^* \ 70]$
- 5 düğümünden 6 düğümüne geçiş vardır ve bu düğüm değeri tekrar hesaplanır. (6 düğümünün geçici etiketi= $\min\{70, 40+16\}=56$) $[0^* \ 30^* \ 60 \ 25^* \ 40^* \ 56]$

- Bir sonraki en küçük değerli bağlantının değeri 56 olduğundan 6 düğümü kalıcı düğüm olarak işaretlenir. **[0* 30* 60 25* 40* 56*] BİTTİ!**
- En kısa yolu bulmak için geriye doğru gidilir. 6'ya en kısa 5 düğümünden, 5'e en kısa 4 düğümünden, 4'e de en kısa 1 düğümünden ulaşılır. 1-4-5-6 yolu en kısa yoldur ve bu yolu tercihe etmenin maliyeti 56'dır.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Ağ problemleri ve Dijkstra Algoritması görüldü.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Bir problemin şebeke modelinin çiziminde neden boş görevlere ihtiyaç duyulur?
- 2) Kritik yolda neden görevlerin gevşek zamanları olmaz
- 3) Kritik yol neden proje süresinin hesaplanması esastır
- 4) En kısa yol problemlerin çözümünde hangi algoritmalar kullanılabilir?

KAYNAKÇA

- Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.
- Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.
- Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.
- Öztürk, A. Yöneylem Araştırması, Ekin Kitabevi, 1997.

8. CPM VE KRİTİK YOL

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

CPM (Kritik Yol Metodu) ve PERT (Program Değerlendirme Ve Gözden Geçirme Tekniği)

Kritik Yolun Bulunması

Giriş

Bu bölümde CPM ve PERT teknigi üzerinde durulacaktır. Sonrasında ise, kritik yolun bulunması örnekler üzerinde gösterilecektir.

8.1. Ağ Modelleri

Ağ modelleri çok fazla faaliyet içeren büyük ve karmaşık çizelgeleme probleminde kullanılır. Eğer her bir faaliyetin gerçekleşme zamanı kesin olarak biliniyorsa, projenin tamamlanması için gereken süreyi belirlemek için CPM (Critical Path Method) olarak kısaltılan kritik yol metodu kullanılır. CPM, aynı zamanda projenin tamamlanması gecikmeden, proje içerisindeki faaliyetlerin ne kadar gecikebileceğini belirlemek için de kullanılır. CPM, faaliyetler arasında tanımlanmış olan öncelik ilişkileri aracılığıyla işlerin ne zaman yapılacağını belirleyen bir süreçtir.

Eğer proje içerisindeki faaliyetlerin gerçekleşme süreleri kesin olarak bilinmemiyorsa, projenin teslim tarihinin olasılığının belirlenmesinde PERT (Program Evaluation and Review Technique) olarak kısaltılan program değerlendirme ve gözden geçirme tekniği kullanılır.

CPM ile PERT arasındaki en önemli farklılık faaliyet sürelerinin belirlenme esasıdır. CPM'de faaliyet sürelerinin kesin olarak belirlenebildiği varsayımdan söz edilir. PERT'de ise projenin belirsizlik ortamında yürütüldüğü ve çeşitliği şans faktörlerinden kaynaklanan birtakım değişikliklerden etkilenebileceği göz önüne alınmaktadır. Dolayısıyla zamanla projede meydana gelebilecek bu değişikliklerin ve aksaklıların, faaliyet sürelerine etki edeceğii çok açıktır. PERT'in amacı; üçlü süre tahminin faaliyetlerin teknik özelliklerini iyi bilen bir kişi tarafından yapılarak, faaliyetlerin içerdikleri belirsizlikleri zaman tahminlerine en iyi şekilde yansıtmaktır.

CPM ve PERT ile İlgili Kavramlar

Proje Ağı: Projedeki faaliyetlerin birbiri ile ilişkilerini gösteren grafik göstergemidir. Faaliyetlerin birbirinden önce ve sonra gelme sıraları göz önünde tutularak oluşturulur.

Faaliyet/Aktivite (Activity): Projenin tamamlanabilmesi için gerçekleştirilmesi gereken her iş bir faaliyet olarak adlandırılır. Faaliyetler proje ağının çiziminde oklarla ifade edilir.

Önceki Faaliyet (Predecessor): Bir faaliyetin başlayabilmesi için, bundan önce bitirilmesi gereken faaliyeti temsil eder. Yani önceki faaliyet bitirilmeden ardından gelecek olan faaliyet başlayamaz.

Olay (Event): Belirli bir işin ya da faaliyetin başlangıcını ya da bitişini ifade eden noktalardır. Proje ağının çiziminde numaralandırılmış bir daire ile ifade edilir.

Kukla Faaliyet (Dummy activity): Projede gerçekte var olmayan, gerçekleştirilmeye zamanı sıfır olan ve yalnızca proje ağını çizmede yararlanılan faaliyetlerdir.

En İyimser Süre (Optimistic time-a): Bir faaliyetin en iyi koşullar altında gerçekleştirilebileceği zamanı belirtir.

En Kötümser Süre (Pesimistic time-b): Bir faaliyetin olabilecek en olumsuz koşullar altında bitirileceği zamanı belirtir.

Olası Süre (Most likely time-m): Bir faaliyetin, normal çalışma koşullarında olabilecek gecikmeler dahilinde gerçekleştirileceği zamanı belirtir.

Beklenen Süre (Expected time): Bir faaliyetin iyimser, kötümser ve olası süre tahminlerine bağlı olarak hesaplanan beklenen tamamlanma zamanını ifade edilir. Beklenen zamanın hesaplanması ile ilgili bilgi çalışmanın ilerleyen bölümlerinde verilecektir.

En Erken Başlama Zamanı (ES): Bir faaliyetin, kendisinden önce gerçekleşen faaliyetlerin tamamlanması koşuluyla başlayabileceği en erken zamanı belirtir.

En Erken Bitiş Zamanı (EF): En erken başlama zamanına faaliyet süresinin (ya da beklenen zamanın) eklenmesiyle bulunan zaman değeridir.

En Geç Başlama Zamanı (LS): Bir faaliyetin, kendisinden sonra gelen faaliyetlerin tümünün gerçekleşmesini sağlayacak ve proje tamamlanma zamanını değiştirmeyecek şekilde başlatılabileceği en geç zamanı ifade eder.

En Geç Bitiş Zamanı (LF): En geç başlama zamanına faaliyet süresinin (ya da beklenen zamanın) eklenmesiyle bulunan zaman değeridir.

Boşluk: Bir faaliyetin en erken ve en geç başlama (ya da bitiş) zamanları arasındaki farktır. Proje geciktirilmeden bir faaliyetin geciktirileceği süreyi ifade eder.

Ağ Diyagramının Çizilmesi

Örnek: Bir firma ürün 3 olarak isimlendirdiği, ürün 1 ve ürün 2'den birer tanesinin birbirine monta edilerek üretildiği yeni bir ürün üretmek istemektedir. Ürün 3 üretilmeden evvel işçilerin eğitim alması ve bazı hammaddelerin temin edilmesi gerekmektedir. Daha sonra ürün 1 ve ürün 2'nin üretilmesi gerekecektir. Ürün 2 üretildikten sonra da bir test aşamasından geçecektir. Bu işlemlerden sonra da ürün 1 ve ürün 2 birbirine monta edilerek ürün 3'ün üretimi gerçekleşecektir. İşçilerin eğitimi 6 gün, hammaddelerin temini 9 gün, ürün 1'in üretimi 8 gün, ürün 2'nin üretimi 7 gün, ürün 2'nin test edilmesi 10 gün ve son olarak ürün 1 ile ürün 2'nin montajı 12 gün sürmektedir. Bu projenin ağını oluşturalım.

Projenin ağını çizmeden önce aşağıdaki kuralları inceleyelim:

1. Düğüm 1 projenin başlangıcını ifade eder. Düğüm 1'den çıkan faaliyetlerden (oklardan) önce tamamlanması gereken başka faaliyetler yoktur. (Bu faaliyetlerin öncül faaliyetleri yoktur.)

2. Bitiş düğümü projenin tamamlandığını gösteren düğümdür.

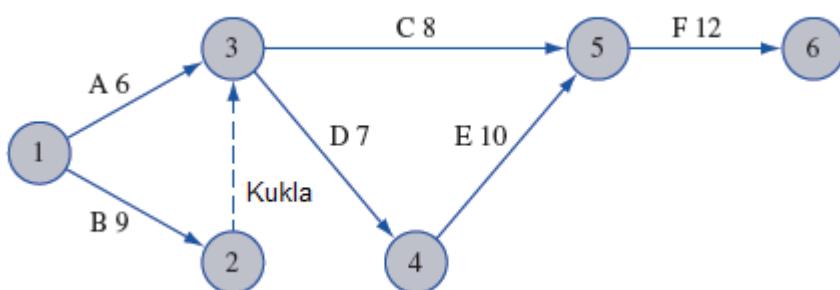
3. Ağdaki düğüm numaraları başlangıç düğümünden sonuç düğümüne doğru artar. Bir faaliyetin başlangıç düğüm numarası, bitiş düğüm numarasından küçük olur.

4. Bir faaliyet ağda birden fazla ok ile gösterilemez.
5. İki düğüm en az ve en fazla bir ok ile bağlanır.

Bu kuralları göz önüne alarak proje ağını çizmeden evvel öncül ve ardıl faaliyetler ile faaliyet sürelerini daha iyi anlamak için bir tablo oluşturalım:

Faaliyetler	Öncül Faaliyetler	Faaliyet Süreleri
A= İşçilerin eğitimi	-	6 gün
B= Hammadde tedariki	-	9 gün
C= Ürün 1 üretimi	A, B	8 gün
D= Ürün 2 üretimi	A, B	7 gün
E= Ürün 2 test edilmesi	D	10 gün
F= Ürün 1 ve Ürün 2 montajı	C,E	12 gün

Ağ şu şekilde çizeriz:



Proje ağı 1 düğümyle başlar 6 düğümyle biter. 1 düğümünü 2 ve 3 düğümüne A ve B faaliyetleriyle bağlanır. Kural 5'e göre 2 ve 3 düğümleri de kukla faaliyetle birbirine bağlanır. 3 düğümü 4 ve 5 düğümlerine C ve D faaliyetleriyle bağlanır. 4 düğümü 5 düğümüne E faaliyetiyle ve 5 düğümü de 6 düğümüne F faaliyetiyle bağlanır. Düğüm faaliyetlerin yanında süreleri de belirtilmiştir.

8.2 CPM

Kritik yol yöntemi uygulanmasına karar verilen bir projede izlenecek adımları şu şekilde sıralamak mümkündür:

1. Proje faaliyetlerinin belirlenmesi,
2. Faaliyetler arasındaki ilişkilerin, sıranın belirlenmesi,
3. Şebeke diyagramının oluşturulması,

4. Faaliyetlere kaynak ve maliyet atanması,
5. Faaliyet sürelerinin hesaplanması,
6. Şebekedeki en uzun yolun (kritik yol) hesaplanması: Faaliyetler arasındaki ilişkiler ve faaliyet süreleri belirlendikten sonra ileriye ve geriye doğru hesaplamalar yapılarak, kritik faaliyetlerden oluşan kritik yol ve proje süresi bulunabilir. Proje süresinin hesaplanması, her bir faaliyetin erken başlama ve tamamlanma zamanları ile geç başlama ve tamamlanma zamanları kullanılır.
7. Son olarak kritik yolun hesaplanmasıdan sonra şebekenin proje kontrolünde kullanılması.

Kritik Yolun Bulunması

Şebeke diyagramı oluşturulduktan sonra, faaliyet sürelerinin de belirlenmesi ile artık kritik yolun hesaplanması işlemine geçilebilir. Kritik yol hesaplamalarında iki yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan birincisi, faaliyetlerin erken başlama ve erken tamamlanma zamanlarının hesaplanması sağlayan ileriye doğru hesaplama yöntemi, bir diğer ise geç başlama ve geç tamamlanma zamanlarını bulmaya yönelik geriye doğru hesaplama yöntemidir.

Her iki yöntemde de erken ve geç zamanların hesaplanması, faaliyetler arasında tanımlanmış olan öncelik ilişkileri bazı alır. İlk olarak ileriye doğru hesaplama yöntemi ile son faaliyetin erken itiş süresi belirlendikten sonra geriye doğru hesaplama yöntemine geçilir.

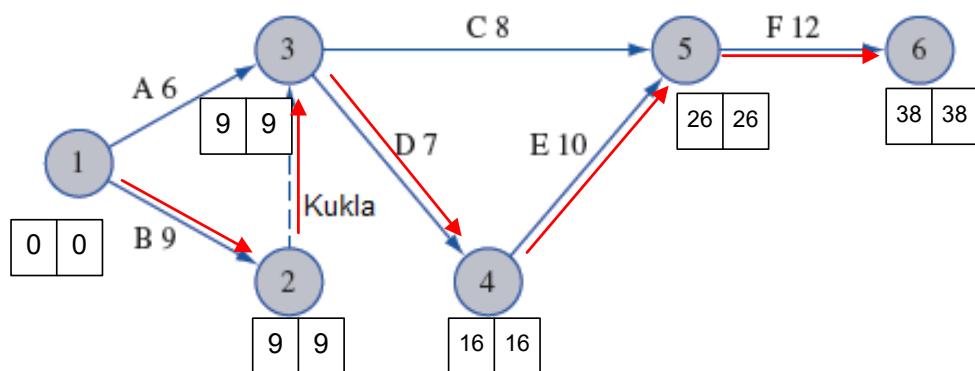
İleriye doğru hesaplama: Bu yöntemde sırasıyla şebekedeki her bir faaliyetin beklenen erken başlama ve erken tamamlanma zamanları bulunur. Bu hesaplamalar sırasında göz önünde bulundurulması gerekenler şunlardır:

1. Öncülü olmayan her bir faaliyetin erken başlama zamanı, projenin başlangıç zamanı olarak kabul edilen sıfırdır.
2. Bir faaliyetin başlayabilmesi için tüm öncül faaliyetlerinin tamamlanmış olması gerektiğinden, bu faaliyetin erken başlangıç zamanı tüm öncül faaliyetlerinin erken tamamlanma zamanlarının en büyüğüne eşittir.
3. Bir faaliyetin erken tamamlanma zamanı, erken başlama zamanı ile faaliyet süresinin toplamına eşittir.
4. Son olarak ağdaki en son faaliyetin erken başlama zamanı ile faaliyet süresinin toplamı bir başka deyişle en son faaliyetin erken tamamlanma zamanı projenin tamamlanma süresini verir.

Geriye doğru hesaplama: İleriye doğru hesaplamalar sonucu proje süresi belirlendikten sonra, son adımdan ilk adıma doğru her faaliyetin geç başlama ve tamamlanma zamanlarının hesaplanması işlemidir. Ağda yer alan en son faaliyetin geç başlama zamanı, projenin toplam süresinden bu faaliyetin süresi çıkartılarak bulunur. (İki geç başlama zamanı söz konusu

olduğunda küçük olan seçilir.) İlk adıma kadar sırasıyla bu işlemler tekrarlanarak tüm faaliyetler için geç başlama zamanları belirlenir.

Tüm faaliyetler için erken ve geç gerçekleşme zamanları bulunduktan sonra artık kritik faaliyetler ve dolayısıyla projenin kritik yolu belirlenebilir. Erken ve geç başlama ya da erken ve geç tamamlanma zamanları birbirine eşit olan faaliyetler kritik faaliyetlerdir. Bir başka deyişle, kritik faaliyetlerin erken ve geç başlama ya da erken ve geç tamamlanma zamanları arasındaki fark sıfırdır. Kritik faaliyetler belirlendikten sonra bunların sırasıyla başlangıç düğümünden son düğüme kadar birleştirilmesiyle kritik yol elde edilir. Buna göre yukarıda ağı diyagramı çizilen örneğe ait kritik yolu bulalım:

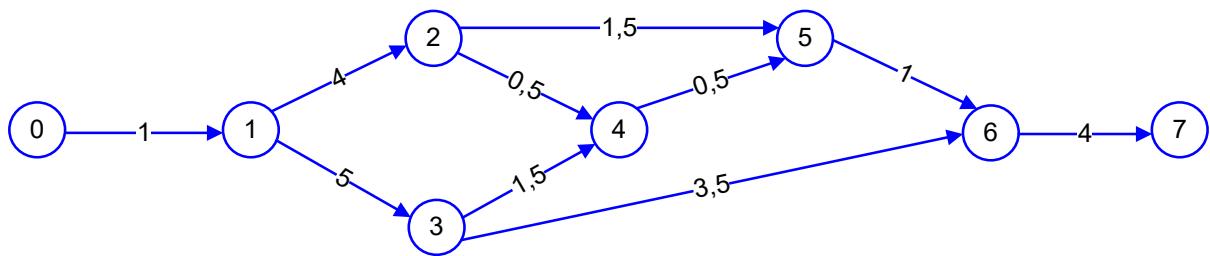


İleriye doğru hesaplarken 1 düğümüne A ve B faaliyetlerinin erken başlangıç zamanı olarak 0 değerini atıyoruz. 2 düğümüne de kukla faaliyetin erken başlangıç zamanı olarak $0+9=9$ değerini atıyoruz. 3 düğümüne C ve D faaliyetlerinin erken başlangıç zamanı olarak $0+6=6$ ve $9+0=9$ alternatiflerinden en büyük olanını (A ve B faaliyetlerinin erken tamamlanma zamanı) yani 9 değerini atıyoruz. 4 düğümüne E faaliyetinin erken başlama zamanı olarak $9+7=16$ değerini atıyoruz. 5 düğümüne F faaliyetinin erken başlama zamanı olarak $9+8=17$ ve $16+10=26$ alternatiflerinden en büyük olanını yani 26 değerini atıyoruz. 6 düğümüne de F faaliyetinin erken tamamlanma zamanı olarak $26+12=38$ değerini atıyoruz.

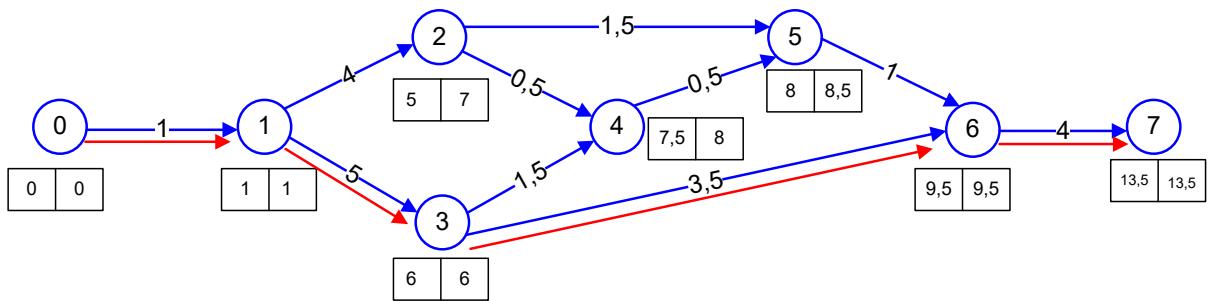
Geriye doğru hesaplarken de 6 düğümüne geç başlama zamanı olarak 38 değerini atıyoruz. 5 düğümüne F faaliyetinin geç başlama zamanı olarak $38-12=26$ değerini atıyoruz. 4 düğümüne E faaliyetinin geç başlama zamanı olarak $26-10=16$ değerini atıyoruz. 3 düğümüne C ve D faaliyetlerinin geç başlama zamanı olarak $16-7=9$ ve $26-8=18$ değerlerinden en küçük olanı yani 9 değerini atıyoruz. 2 düğümüne kukla değişkenin geç başlama zamanı olarak $9-0=9$ değerini atıyoruz. 1 düğümüne de A ve B faaliyetlerinin geç başlama zamanı olarak $9-6=3$ ve $9-9=0$ değerlerinden en küçük olan 0 değerini atıyoruz.

Bu işlemlere göre kritik yol: 1-2-3-4-5-6 yoludur ve projenin tamamlanma süresi 38 gündür.

Örnek: Aşağıda ağ diyagramı verilmiş projeye ait kritik yolu ve tamamlanma zamanını bulunuz.



Çözüm:



Kritik yol: 0-1-3-6-7 yoludur ve tamamlanma süresi 13,5 olur.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde CPM ve kritik yolu bulunuş konuları incelenmiştir.

BÖLÜM SORULARI

1. Aşağıdaki projenin ağ diyagramını çiziniz ve projenin tamamlanma süresini ve kritik yolunu bulunuz.

Görevler	Süre (hafta)	Öncelik	Görevler	Süre (hafta)	Öncelik
A	4	-	L	1	H,K
B	3	-	M	1	F, I, J, L
C	2	-	N	1	M
D	8	-	O	1	M
E	4	A	P	1	N
F	1	C	Q	1	P
G	4	D	R	2	O, Q
H	2	E,G	S	1	R
I	2	E	T	1	S
J	1	B	U	3	S
K	20	-	V	1	T, U
			W	1	T, U

2. Aşağıda bir projenin faaliyetlerinin başlama ve bitirme zamanları ile ilgili değerler verilmiştir. Kritik yol hangisidir?

Görevler	ES	EF	LS	SF
1-2	0	8	1	9
1-3	0	6	0	6
1-4	0	3	2	5
2-5	8	8	9	9
2-6	8	13	16	21
3-5	6	9	6	9
4-5	3	7	5	9
4-8	3	5	14	16
5-7	9	16	9	16
5-8	9	13	12	16
8-7	13	13	16	16
6-9	13	17	21	25
7-9	16	25	16	25

3. Bir projede bir den çok kritik yol olabilir mi? Tartışınız.
4. Bir projenin kritik yolu olmayabilir mi? Tartışınız.
5. Kritik yolun haricindeki görevlerde neden gevşek zaman vardır?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

9. PERT VE PROJE SÜRESİNİ KISALTMA

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

PERT

Proje süresinin kısaltılması ve zaman-maliyet analizi

Giriş

Bu bölümde öncelikli olarak PERT konusu incelenecaktır. Sonrasında ise, proje süresinin maliyetler dikkate alınarak nasıl kısaltılacağı üzerinde durulacaktır.

9.1. PERT

PERT, CPM'in bir varyasyonu olup projenin her aşamasındaki zaman tahminlerine az da olsa daha şüphecı bir bakış açısı ile yaklaşan bir yöntemdir. PERT' de tipki CPM'de olduğu gibi, projelerin tamamlanabileceği en kısa zaman süresinin belirlenmesi esasına dayanır.

PERT'in temel amacı; üçlü süre tahmininin faaliyetlerin teknik özelliklerini iyi bilen bir kişi tarafından yapılarak, faaliyetlerin içerdikleri belirsizlikleri zaman tahminlerine en iyi şekilde yansımaktır. Ayrıca PERT'de, CPM'e ek olarak projenin farklı tarihlerdeki tamamlanma olasılıkları da hesaplanabilmektedir. Böylece proje yöneticisi, istenilen herhangi bir tarihte projenin tamamlanıp tamamlanamayacağını öğrenebilir ya da o tarihte işin ne kadarlık bir kısmının biteceğini önceden öğrenerek buna göre düzeltici önlemler alabilir.

PERT'de beklenen faaliyet süreleri (t), en iyimser süre(a), en kötümser süre (b) ve en olası süre(m) tahmininden oluşan bir formülle hesaplanır:

$$t = \frac{a+4m+b}{6}$$

Buna göre, her bir faaliyetin beklenen süresi, $a-b$ aralığında olmalıdır. En olası süre ise; ya $(a+b)/2$ 'ye eşit ya da en iyimser veya en kötümser süreden birine daha yakındır. O halde PERT'de üç süre tahmini yapılarak, faaliyet süreleri ile ilgili ihtimalin bir β dağılımı meydana getirdiği kabul edilir.

Projenin belirli bir tarihteki tamamlanma olasılığını hesaplayabilmek için, projenin standart sapmasının belirlenmesi gereklidir. Bunun için sırayla her bir faaliyetin varyansı;

$$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 \text{ ve standart sapması } \sigma = \frac{b-a}{6} \text{ formülleriyle hesaplanır.}$$

Formüllerden anlaşılacağı üzere, en iyimser ve en kötümser süre arasındaki fark büyükçe standart sapma ve varyansın da büyüyeceği açıklıdır. Bir faaliyetin standart sapmasının büyümesi, riskin de artacağı anlamına gelir.

Her bir faaliyet için standart sapma miktarları belirlendikten sonra, projenin standart sapmasını bulmak için kritik faaliyetlerin standart sapmalarını toplamak yeterlidir. Bir projenin standart sapması;

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{b-a}{6}\right)^2} \text{ formülü ile hesaplanır.}$$

Projenin standart sapması belirlendikten sonra artık projenin istenen bir tarihteki tamamlanma olasılığı, gerekli değerlerin formüle yerleştirilmesiyle kolaylıkla bulunabilir. Projenin belirli bir tarihteki tamamlanma olasılığı;

T: Projenin test edilen bitiş süresi

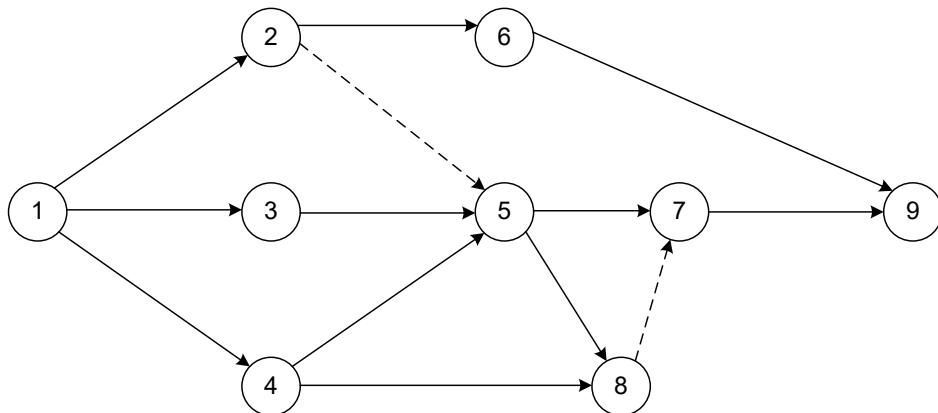
T_p : Projenin tamamlanma süresi

σ_p : Projenin standart sapması olmak üzere; $Z = \frac{T - T_p}{\sigma_p}$ şeklinde hesaplanır.

Örnek: Bir firma sipariş sistemini yenilemek ve yeni bir sistem kurmak için bir proje hazırlamak istemektedir. Bu maksatla oluşturulan projedeki faaliyetler aşağıda verilmiştir.

Faaliyet	Yapılacak İşler
1-2	Ekipmanların kurulumu
1-3	Sistem Geliştirme
1-4	Sistemi oluşturan elemanlarının yerlerinin belirlenmesi
2-5	Boş
2-6	Ekipmanları test ve değişimin yapılması
3-5	Test Etme
4-5	İşlerin Öğretilmesi
4-8	Şirketin uyumunun sağlanması
5-7	Sistemin eğitimi
5-8	Sistemin test edilmesi
8-7	Boş
6-9	Son kontrollerin yapılması
7-9	Sistemin değişimin yapılması

Bu faaliyetlerin ağ diyagramı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:



Faaliyetlerin ortalama süreleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

1-2 Faaliyeti için

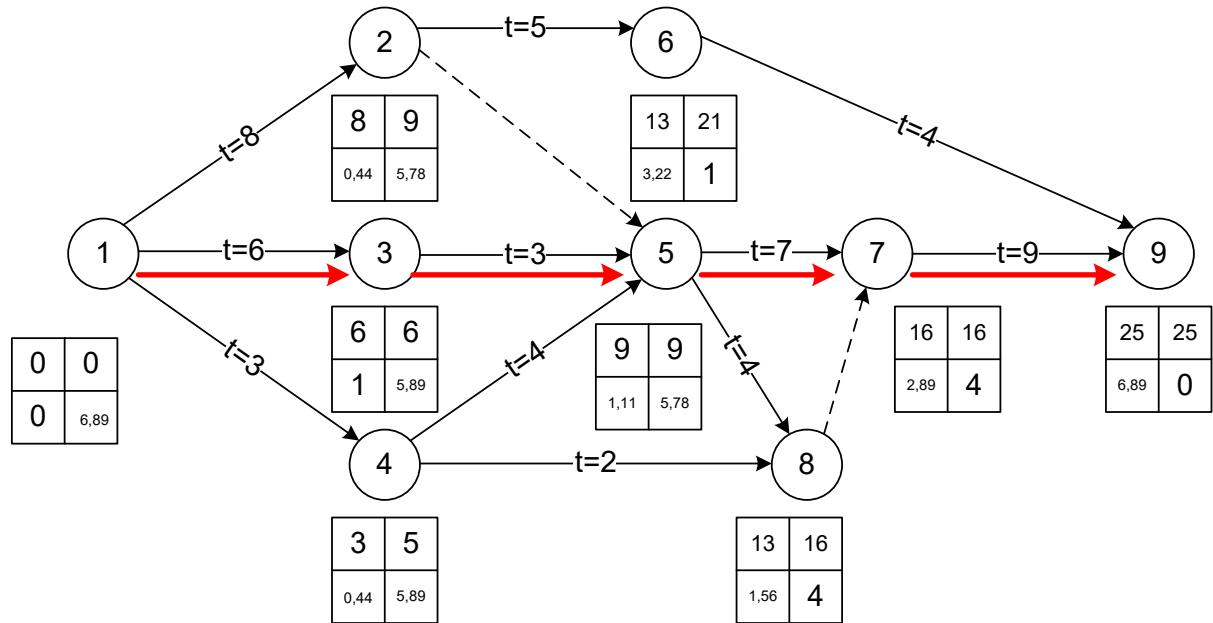
$$t = \frac{a+4m+b}{6} = \frac{6+(4 \times 8)+10}{6} = 8 \text{ hafta}$$

$$v = \left(\frac{b-a}{6} \right)^2 = \left(\frac{10-6}{6} \right)^2 = \frac{4}{9} \text{ hafta}$$

Diğer faaliyetler için de aynı işlemler yapılarak aşağıdaki tablo elde edilmiştir:

Faaliyet	Tahmini Süreler (Hafta)			Ortalama Süre	Değişim
	a	m	b		
1-2	6	8	10	8	4/9
1-3	3	6	9	6	1
1-4	1	3	5	3	4/9
2-5	0	0	0	0	0
2-6	2	4	12	5	25/9
3-5	2	3	4	3	1/9
4-5	3	4	5	4	1/9
4-8	2	2	2	2	0
5-7	3	7	11	7	16/9
5-8	2	4	6	4	4/9
8-7	0	0	0	0	0
6-9	1	4	7	4	1
7-9	1	10	13	9	4

Projenin en erken ve en geç başlama zamanlarının bulunması:



Faaliyet	t	σ^2	ES	EF	LS	LF	S (boş)
1-2	8	0.44	0	8	1	9	1
1-3	6	1.00	0	6	0	6	0
1-4	3	0.44	0	3	2	5	2
2-5	0	0.00	8	8	9	9	1
2-6	5	2.78	8	13	16	21	8
3-5	3	0.11	6	9	6	9	0
4-5	4	0.11	3	7	5	9	2
4-8	2	0.00	3	5	14	16	11
5-7	7	1.78	9	16	9	16	0
5-8	4	0.44	9	13	12	16	3
8-7	0	0.00	13	13	16	16	3
6-9	4	1.00	13	17	21	25	8

7-9 9 4.00 16 25 16 25 0

Kritik Yol: S boş süresi sıfıra eşit olan sütundaki faaliyetlerden; **1-3-5-7-9** olarak bulunur.

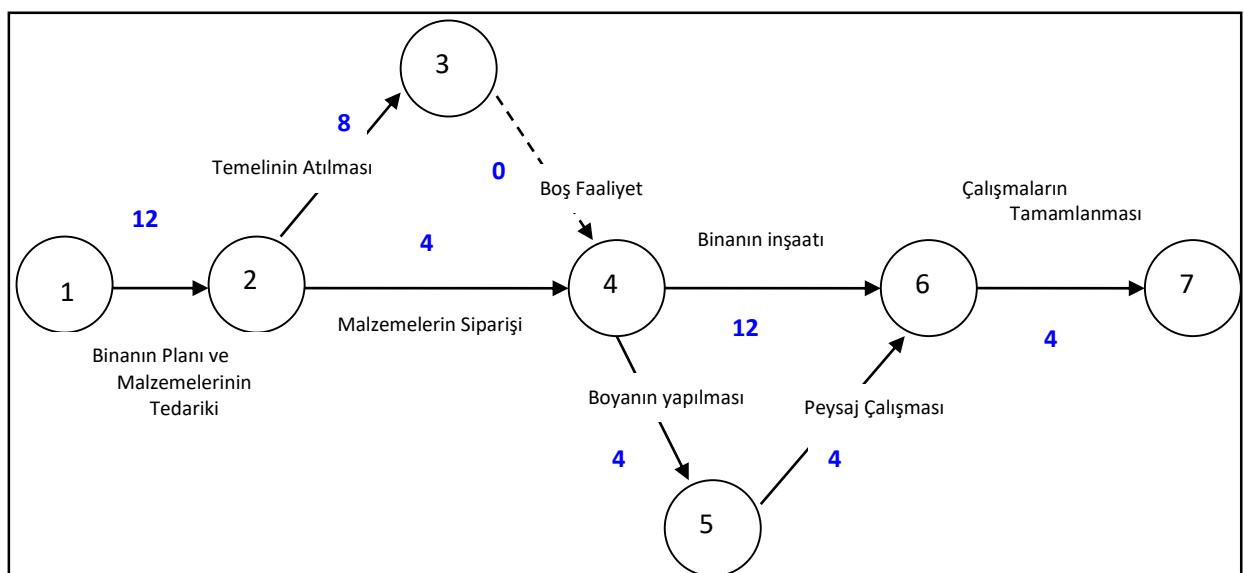
9.2. Proje Süresinin Kısaltılması Ve Zaman-Maliyet Analizi

Daha önceki haftalarda, faaliyetleri belirli olan bir projenin tamamlanma süresi ve kritik yolunun nasıl bulunacağı konuları işlenmiştir. Proje faaliyet süreleri gerek bilinen, gerekse de belirli bir olasılığa bağlı olarak belirlenmiş olsun, CPM/PERT tekniklerini kullanarak en kısa yolu bulmak mümkün olabilmektedir. Yöneticiler ise çoğu zaman bulunan kritik süreden proje süresini kısaltmak isteyebilmektedirler. Bu durumda faaliyetler arasından hangi faaliyetin süresinin kısaltılabileceği, kaç gün daha kısaltılmamanın mümkün olacağı ve bunun işletmeye ek bir maliyet getireceği konusunun araştırması gerekmektedir.

Proje süresi, faaliyetlere daha çok kaynak tahsis ederek kısaltılması mümkün olabilecektir. Bunu da daha çok işçi çalıştırarak veya fazla mesai uygulayarak mümkün olabilecektir. Buna ilave olarak da daha çok malzeme ve hammadde veya ekipman kullanarak proje süresi kısaltılabilicektir. Bütün bu faaliyetler projenin normal maliyetini artırıcı etkiye sahiptir. Verilmesi gereken karar ise, maliyet-zaman karşılaştırımlarının yapılması ile mümkün olabilecektir.

Proje süresi kısaltılması düşünülmüyorsa, bu elbette ki kritik olan faaliyetlerin kısaltılmasının bir anlamı olacaktır. Kritik olmayan bir faaliyetin kısaltılması, projenin son tamamlanması gereken süreye etki etmeyeceğinden dolayı, arzu edilen proje süresinin kısaltılması gerçekleşmeyecektir. Bu sebeple projede kısaltılması gereken süreler mutlaka kritik olan faaliyetler olacaktır.

Konunun anlaşması için daha önceki konularımızda verdığımız bir inşaat ile ilgili projeyi tekrar gözden geçirelim. Aşağıdaki şekil daha önceki konularda verdığımız örneğin aynıdır, yalnızca proje süreleri hafta olarak belirtilmiştir.



Bir İnşaat Projesindeki Faaliyetler ve Süreleri

Örnek olarak 1-2 faaliyetinin tamamlanma süresi 12 hafta sürmektedir. Bu faaliyetin bize olan maliyetinin 3000 birim TL olacağını düşünelim. Eğer bu faaliyet 7 haftada bitirilmesi istenirse maliyetin 5000 birim TL'ye yükseleceğini düşünürsek,

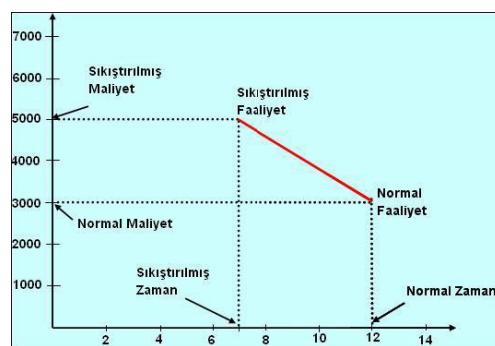
$$\text{Normal Süre} - \text{Kısaltılmış Süre} = 12 - 7 = 5 \text{ haftalık bir kısalma}$$

$$\text{Kısaltılmış Sürenin Maliyeti} - \text{Normal Maliyet} = 5000 - 3000 = 2000 \text{ birim TL}$$

$$\frac{\text{Toplam}}{\text{Toplam}} \frac{\text{Kısaltılmış}}{\text{Kısaltılmış}} \frac{\text{Maliyet}}{\text{Zaamani}} = \frac{2000}{5} = 400 \text{ birim TL/ hafta olarak bulunacaktır.}$$

Bu hesaplamalardan çıkan sonuç ise, 1-2 faaliyetini bir hafta daha erken bitirmek istesek 400 birim TL ek maliyet ödemek durumunda kalacağız.

Aşağıdaki şekil normal zaman ile ve normal maliyet ile kısaltılmış zaman için maliyetlerin nasıl olduğunu göstermektedir. Zaman kısaltılması istendikçe buna karşılık ek ödenek maliyeti ve aralarındaki doğrusal ilişki görülmektedir.



Normal ve Sıkıştırılmış Maliyet

9.3. Hangi Faaliyet Kısaltılmalı

Yukarıdaki projedeki faaliyetlerin ve bu faaliyetleri kısaltılabilenleri süreler ve maliyetler aşağıdaki **Tablo** de gösterilmiştir.

Faaliyetler ve Normal, Sıkıştırılmış Süreler ve Normal ve Sıkıştırılmış Zaman Maliyetleri

Faaliyetler	Normal Zaman (Hafta)	Kısaltılmış Zaman (Hafta)	Normal Maliyet	Kısaltılmış Maliyet	Mümkün Olan Kısaltma Zamani	Haftalık Kısaltma Maliyeti
*1-2	12	7	3 000	5 000	5	*400
*2-3	8	5	2 000	3 500	3	*500
2-4	4	3	4 000	7 000	1	3 000
*3-4	0	0	0	0	0	*0
4-5	4	1	500	1 100	3	200
*4-6	12	9	50 000	71 000	3	*7 000
5-6	4	1	500	1 100	3	200
*6-7	4	3	15 000	22 000	1	*7 000

1-2-3-4-6-7 = 36 ay olduğunu daha önceki konularımızda bulunmuştur. Örnek olarak proje yöneticisi bu projenin 36 yerine 30 aylık bir sürede tamamlamak isterse, bu durumda hangi faaliyet/faaliyetlere öncelik vererek maliyetini en az yapacak ve arzu ettiği süreye ulaşacaktır? Proje süresinin kısaltılması, ancak kısaltılacak faaliyet kritik faaliyetler arasından seçilirse mümkün olabilecektir. Bu sebeple, kritik faaliyet arasından en az maliyetli olandan başlamak gerekecektir. Yukarıda verilen kritik faaliyetler arasından en az bir hafta kısaltmanın en düşük olduğu faaliyet 1-2 faaliyetidir. (Boş değişkenin süresi sıfırdır ve bu yüzden kısaltılması mümkün değildir). 1-2 faaliyetinin bir hafta kısaltmanın işletmeye ek maliyeti 400 birim para kadar olacaktır. Bundan dolayı, 1-2 faaliyetinin mümkün olduğu kadar kısaltılması düşünülecektir. Bu da 5 haftalık bir kısaltma yapılabileceğini göstermektedir. Bu faaliyetin 12 haftadan 7 haftaya kadar kısaltılabileceği teknik olarak mümkündür, ondan sonra kısaltmanın mümkün olamadığı bilinmektedir.

1-2 faaliyetini 5 hafta kısalttığımızda, toplam proje süresi $36-5 = 31$ aya kadar azaltılmış olabilecektir. 30 haftada tamamlamak için ise, 1 haftalık bir kısaltmaya daha ihtiyaç duyulacaktır. Yine kritik yol üzerinden ikinci maliyeti en az olan faaliyetin bulunması gerekecektir, bu faaliyet de 2-3 faaliyeti olmaktadır. 2-3 faaliyetini bir hafta kısaltmanın ek maliyeti 500 birim para olabilmektedir. 2-3 faaliyetini 8 haftadan 7 haftaya kısalttığımızda, 500 birim paralık bir proje maliyeti artacaktır. Sonuç olarak ise, 36 hafta süreli bir projenin 30 haftaya kısaltılmasının ek maliyeti;

$$1-2 \text{ faaliyeti}, 5 \text{ hafta} = 5 * 400 = 2000 \text{ birim para}$$

$$2-3 \text{ faaliyeti}, 1 \text{ hafta} = 1 * 500 \text{ birim para}$$

Toplam= 2000 + 500 = 2500 para birim kadar olacaktır.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

PERT ve proje zaman ilişkileri incelenmiştir.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Proje süresinin kısaltılmasına neden kritik yoldan başlanır
- 2) Proje süresi bir birim kısaltıldığındaki kritik yol değişebilir mi?
- 3) Kritik yol üzerindeki faaliyetler kısaltılmaya başlandığında öncelik hangi faaliyetlere verilmelidir?
- 4) Gerçek bir projenin uygulamasında, proje görevlerinin süreleri kesin bilinmemiyor ise, en uygun dağılım nasıl belirlenir?
- 5) Gerçek hayatı büyük projelerde belirlenen sürelerin ve maliyetlerin tutturulama nedenleri başlıca neler olabilir?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

10. ENVANTER MODELLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Envanter modelleri

Elde tutma maliyetinin envanter değeri cinsinden ifade edildiği durumda EOQ'nun hesaplanması

Miktar üzerinde indirim uygulandığı durumlarda EOQ hesaplanması

Giriş

Bu bölümde envanter modelleri üzerinde durulacaktır. Öncelikle envanter modellerinin temel kavramları anlatılacaktır. Ekonomik Sipariş Miktarının nasıl hesaplanacağı gösterilecektir. Elde tutma maliyetlerinin envanter değeri cinsinden nasıl bulunacağı sonrasında ise, miktar üzerinde fiyat indirimi yapıldığı durumlarda ekonomik sipariş miktarının hesaplanması incelenecektir.

10.1. Envanter Modelleri

Envanter, belirli bir dönemde gerekli talebi karşılamak ve işlemlerin verimli ve hatasız bir şekilde yürütmesi için fiziki veya ticari malların stoklanmasıdır. Üretim döneminden önceki mallar, işlenmekte olan mallar ve üretim sonundaki mallar olarak stoklanabilir. Envanter kontrolü ile girişimci, malların firmaya getirdiği maliyeti en düşük seviyede tutmaya yarar. Envanter kontrollünde esas amaç en uygun zamanda en uygun stok seviyesinin belirlenmesi, firmaya maliyetinin minimum olması ve bunun bir düzen içerisinde sürdürülmesidir. Envanter modelleri şu sorulara cevap arar:

1. Bir malın (bitmiş ürün, yarı mamul, hammadde, vb.) siparişi ve/veya üretimi ne zaman yapılmalıdır?
2. Sipariş/üretimin miktarı ne olmalıdır?

Modeli oluşturmak için öncelikli olarak envanter maliyetlerini yakından tanıyalım:

- a) Sipariş ve hazırlık maliyeti: Siparişin hazırlanmasından başlanarak, tedarikçiye ulaştırana kadar geçen maliyetler, üretim yapan bir firma için ise, üretime başlayana kadar yapılan her türlü hazırlık maliyetleri (makine ayarlarının yapılması, kalıpların takılması, üretim hattının hazırlanması vb.)
- b) Tedarik maliyeti: Bir birim ürünü üretmek veya tedarik etmek için yapılacak işçilik, hammadde ve taşıma maliyetleridir.
- c) Elde tutma ve/veya stokta bekletme maliyeti: Bir zaman diliminde bir birim envanterin depoda tutulmasının maliyeti (depo maliyeti, sigortalama maliyeti, vergiler, bozulma, hırsızlık ve yok olmasının maliyeti)
- d) Envanterin bitmesi ve yok satma maliyeti: Müşteriye talebi zamanında teslim edilmediğinde, mamul eksikliği ortaya çıkmaktadır. Müşterinin geç teslimatı kabul etmesi durumunda, karşılanması mümkün olmayan bir zamanda karşılaşması durumu karşımıza çıkmaktadır. Bu durumda geciken teslimat (back-ordered) negatif envanter değerini ortaya çıkarmaktadır. Müşterinin gecikmeli teslimatı kabul etmediği durumda ise, müşteri kaybı (lost sales) olacak, bu da yok satma maliyeti olarak karşımıza çıkacaktır.

10.2. Ekonomik Sipariş Miktarı (EOQ)

Yukarıda bahsedilen maliyetler dikkate alındığında, sipariş miktarı ve sipariş zamanının bulunması, maliyetin en aza indirilmesi açısından önemli olmaktadır. Aşağıdaki kabullerin yapıldığını düşünerek, şimdi sipariş miktarını hesaplayalım.

Kabuller:

- 1) Siparişin tekrar edileceği,
- 2) Talebin biliniyor olduğu,

3) Tedarik süresinin (lead time) sabit olduğu: Sipariş verildikten sonra, siparişin teslim alınmasına kadar geçen süre.

4) Sürekli sipariş olacağı: Sipariş herhangi bir zaman diliminde yapılabilir, eğer envanter miktarı periyodik olarak gözden geçiriliyor ve siparişler periyodik olarak veriliyor ise, periyodik tekrar modeli vardır.

5) Tedarik süresi sıfırdır.

6) Negatif stoğa müsaade edilmiyor.

D: toplam talep

K: hazırlık maliyeti

q: sipariş miktarı

h: stok da tutma maliyeti

p: ürünün fiyatı

TC = toplam maliyet

$$TC(q) = \text{yıllık sipariş verme maliyeti} + \text{yıllık tedarik maliyeti} + \text{yıllık elde tutma maliyeti}$$

$$\text{Yıllık sipariş verme maliyeti} = \frac{K \times D}{q}$$

$$\text{Yıllık tedarik maliyeti} = p \times D$$

$$\text{Yıllık elde tutma maliyeti} = \frac{h \times q}{2}$$

$$TC(q) = \frac{K \times D}{q} + p \times D + \frac{h \times q}{2}$$

Tanımlanan maliyet fonksiyonunu en aza indirecek q değerini bulmak istersek, fonksiyonun türevini alır ve sıfıra eşitleriz. Buradan da q bulunur.

$$TC(q)' = -\frac{K \times D}{q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

$$q^* = \left(\frac{2 \times K \times D}{h} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Örnek: Bir şirket her yıl toplamda 500 adet ürün satabileceğini planlamaktadır. Sipariş maliyeti 5 para birimi, ürünün maliyeti 0.40 para birimi ve elde tutma maliyeti de 0.08 ürün/yıl şeklinde olur ise, talebin sabit olduğu ve negatif stoğa müsaade edilmediği düşünüldüğünde,

en uygun sipariş miktarı (EOQ) nasıl bulunur? Bir yıldaki sipariş sayısı, siparişler arasındaki süre ne kadar olur?

Çözüm:

$K=5$ para birimi

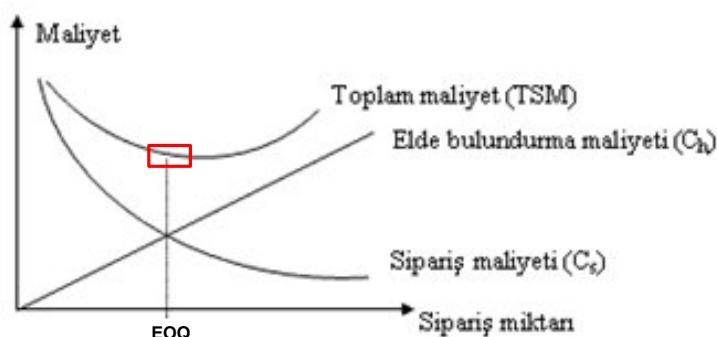
$h=0.08$ ürün/yıl

$D=500$ ürün/yıl

$$q^* = \left(\frac{2 \times 5 \times 500}{0.08} \right)^{\frac{1}{2}} = 250$$

$$\text{sipariş sayısı} = \frac{\text{toplam talep}}{\text{sipariş miktarı}} = \frac{D}{q^*} = \frac{500}{250} = 2 \text{ sipariş/yıl}$$

$$\text{siparişler arası süre} = \frac{q^*}{D} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2} \text{ yıl}$$



Elde tutulan mamulün, elde tutma maliyetlerinin hesaplanmasıında iki farklı yöntem kullanılabilir. Bunlardan birisi, elde tutma maliyeti faiz oranı (i) cinsinden hesaplanabilir bu durumda $h=i$, i faiz oranı olarak kabul edilir. Yukarıda verilen hesaplama, bu ifade dikkate alınarak hesaplamaya yapılmıştır. İkinci yöntem de ise, elde tutma maliyetinin hesaplanmasında ürünün satış fiyatı dikkate alınabilir, bu durumda $h=i^*c$, c sipariş verilen ürünün alış fiyatı ($\text{üretiliyor ise bu durumda ürünün üretim maliyeti}$) olarak ifade edilir. Aşağıdaki örnekte, $h=i^*c$ formülü dikkate alınarak çözülmüştür.

10.3. Elde Tutma Maliyetinin Envanter Değeri Cinsinden

Örnek: Bir toptan elektronik eşya mağazası yılda 10 000 adet kamera satışı yapmaktadır. Sipariş maliyeti 5 para birimi, kameraların satış fiyatı 100 para birimidir. 1 para birimlik değerin stokta bekleme maliyeti 0.20 para birimidir. En uygun sipariş miktarını (EOQ) ve sipariş sayısını bulunuz?

Çözüm:

$$K = 5$$

$$D = 10\,000$$

$$h = 0.20 \text{ para birimi/yıl}$$

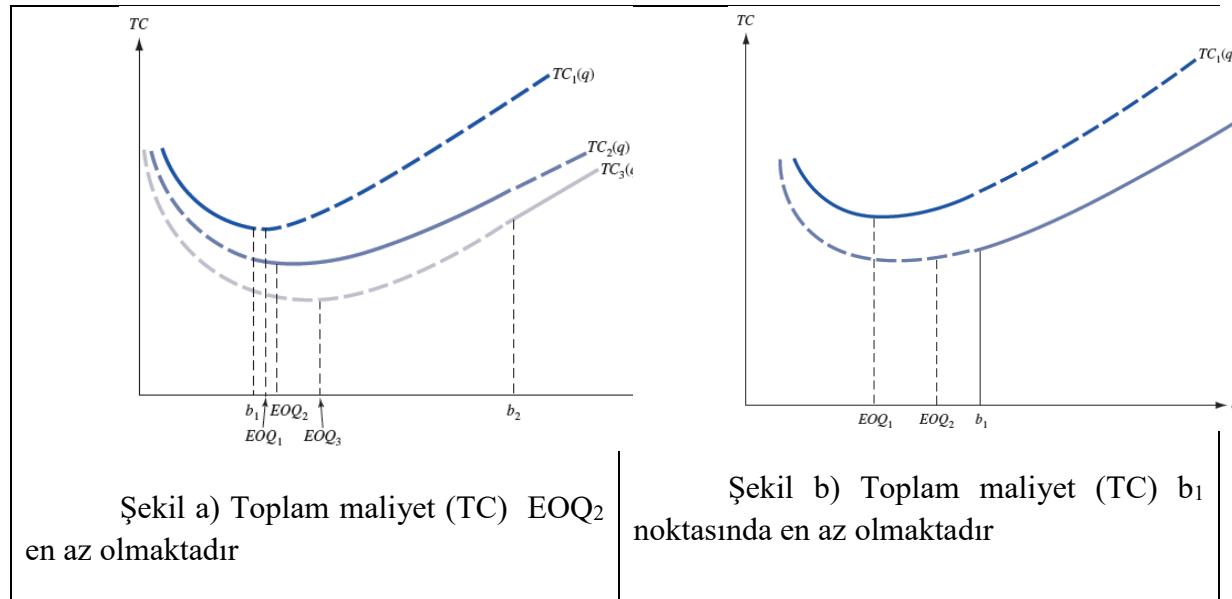
$$p=100 \text{ para birimi}$$

$$q = \left(\frac{2 \times (5) \times (10000)}{(100) \times (0,20)} \right)^{1/2} = (5000) \times \frac{1}{2} = 70,71 \text{ kamera}$$

sipariş sayısı = $10000/71 = 141$ adet sipariş verildiğinde, toplamda en düşük maliyet değeri bulunacaktır.

10.4. Miktar Üzerinde İndirim Uygulandığı Durumlar

Mamullerin siparişinde, ürünün fiyatı sipariş verilen malın miktarına göre farklılık da gösterilebilir. Bir ürün ile ilgili fiyat teklifi almak istediğimizde, belki de bizden istenilen ilk bilgi “kaç adet alacağımız” olacaktır. Miktar arttıkça da, malın fiyatının düşmesi elbette ki en olağan durumlardan birisidir. Eğer fiyatlamada farklı fiyat aralıkları kullanılıyorsa, bu durumda sipariş miktarı nasıl hesaplanır sorusu karşımıza çıkmaktadır. Bu bölümde bu konu ile ilgili bir örnek verecektir. Şekil a ve b bu durumun grafikleridir.



Örnek: Bir firma imalat için hammadde sipariş vermek istemektedir. Toplam talebin 1000 adet olacağı bilinmektedir. Tedarikçi ile görüşmede, ürünün fiyatının, sipariş miktarına göre farklılık göstereceği ifade edilmiştir. Sipariş vermenin maliyetini 100 para birimi olarak, elde tutma maliyetini ise sermayenin maliyeti cinsinden yıllık %20 olarak düşünürsek,

Sipariş Miktarı	Fiyatı
$0 \leq q < 100$	50
$100 \leq q < 300$	49,00
$q \geq 300$	48,50

- ✓ Ekonomik sipariş miktarı ne olmalıdır?
- ✓ Yılda kaç sipariş verilmelidir?
- ✓ Toplam yıllık sipariş maliyeti ne olacaktır?

Çözüm:

$$K=100$$

$$D=1000$$

$$p_3=48,5 \text{ ve } 300 \leq q$$

$$EOQ_3 = \left(\frac{2 \times (100) \times (1000)}{0,2 \times (48,5)} \right)^{1/2} = 148,59$$

$EOQ_3 < 300$ uygulanmaz, bu yüzden ikinci şekli uygulanır ve $q \geq 300$ den $q^*=300$

$$EOQ_2 = \left(\frac{2 \times (100) \times 1000}{0,2 \times (49)} \right)^{1/2} = 142,86$$

$100 \leq EOQ < 300$, EOQ uygulanabilir, $q_2^*=142,86$ uygulanır.

$0 \leq q \leq 100$ uygulanmaz. $TC(0)$ bulunmasına gerek yok. Miktar sıfır seçilemez.

Hatta $q=100$ seçilmesi durumunda

$$\text{Yıllık sipariş maliyeti} = 100(1000/100) = 1000 \text{ para birimi}$$

$$\text{Yıllık tedarik maliyeti} = 1000(50) = 50\,000 \text{ para birimi}$$

$$\text{Yıllık elde tutma maliyeti} = (1/2)(100)(10) = 500$$

$$TC_1(100) = \underline{\underline{51\,500}}$$

$TC_3(300)$ ve $TC_2(142.86)$ hangisi en küçük ise, tercih edilir.

$q_3^* = 300$, yıllık $0.2(48.5) = 9.7$ para birimi

Yıllık sipariş maliyeti $= 100(1000/300) = 333.33$ para birimi

Yıllık tedarik maliyeti $= 1000(48.5) = 48\ 500$ para birimi

Yıllık elde tutma maliyeti $= (1/2)(300)(9.7) = 1455$

$TC_3(300)$ **=50288.33**

$q_2^* = 142.86$ yıllık elde tutma maliyeti $0.2(49) = 9.8$ para birimi

Yıllık sipariş maliyeti $= 100(1000/142.86) = 699.99$ para birimi

Yıllık tedarik maliyeti $= 1000(49) = 49000$ para birimi

Yıllık elde tutma maliyeti $= (1/2)(142.86)(9.8) = 700.01$

$TC_2(142.86)$ **=50400**

$0 \leq q \leq 100$ uygulanmaz. $TC(0)$ bulunmasına gerek yok. Miktar sıfır seçilemez.

Hatta $q=100$ seçilmesi durumunda

Yıllık sipariş maliyeti $= 100(1000/100) = 1000$ para birimi

Yıllık tedarik maliyeti $= 1000(50) = 50\ 000$ para birimi

Yıllık elde tutma maliyeti $= (1/2)(100)(10) = 500$

$TC_1(100)$ **=51\ 500**

q_3^* en küçük $TC(q)$ sağlar.

Her bir sipariş 300 adet olacağına göre, $(1000/300) = 3.33$ sipariş yapılır. Yıllık maliyet de 50288.33 olur.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Envater problemleri incelemiş, ekonomik sipariş miktarının bulunması üzerinde durulmuştur.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Hangi durumlarda EOQ'nun kullanılması tutarsız olabilir?
- 2) Fiyatın miktara bağlı olarak azaldığı durumlarda, EOQ değeri belirlenen aralığın dışında bulunduğuunda bulunan değer kabul edilmez, kabul edilmiş olsaydı nasıl bir problem ortaya çıkardı
- 3) EOQ yerine ihtiyaç duyduğumuz zaman ve miktarda sipariş etmek istesek nasıl bir problemle karşı karşıya kalırız.
- 4) Elde tutma maliyetinin artmasıyla EOQ'nun miktarının azalıp/çoğalacağını tartışınız
- 5) Pahalı ürünlerle, düşük fiyatlı ürünlerin elde tutma maliyetleri farklı mı kabul edilmelidir? Cevabınız evet ise, bu nasıl çözülebilir?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

11. STOKASTİK ENVANTER MODELLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Sürekli üretim hızı olduğu durumda EOQ

Yok satmaya (negatif stok) izin verildiği durum

Stokastik envanter modelleri

Giriş

Bu bölümde üretim yapıldığı durumlarda optimum üretim hızının nasıl bulunacağı tartışılacaktır. Ayrıca, yok satma durumu dikkate alınarak EOQ nun nasıl hesaplanacağı gösterecektir. Sonrasında ise, talebin belirsiz olduğu stokastik envanter modellerine giriş yapılacaktır.

11.1. Sürekli Üretim Hızı Olduğu Durumda EOQ

Mamulu tedarikçiden temin etmek yerine, firma kendisi üretim yapıyor ise, bu durumda en uygun üretim miktarının bulunması gerekecektir. Firmanın belirli bir zaman periyodunda r birim üretim yaptığı kabul edersek, en uygun üretim miktarı (EOQ), daha önce gördüğümüz klasik formülasyondan farklı olacaktır.

$$\frac{\text{elde tutma maliyeti}}{\text{yıl}} = h(\text{ortalama stok})(1 \text{ yıl}) = \frac{h(r-D)q}{2r}$$

$$\frac{\text{sipariş maliyeti}}{\text{yıl}} = \frac{\text{sipariş maliyeti}}{\text{bir periyot}} = \frac{\text{periyotlar}}{\text{yıl}} = \frac{KD}{q}$$

$$a + b = \frac{hq(r-D)}{2r} + \frac{KD}{q}$$

$$\text{Optimal üretim hızı } q = \left(\frac{2KD}{\frac{h(r-D)}{r}} \right)^{1/2} = \left(\frac{2KDr}{h(r-D)} \right)^{1/2}$$

$$\text{EOQ} = \left(\frac{2KD}{h} \right)^{1/2}$$

$$\text{Optimal üretim hızı } \text{EOQ} \left(\frac{r}{r-D} \right)^{1/2}$$

Örnek: Bir otomobil firması yılda 10 000 adet otomobil şasesi üretmektedir. Her birinin fiyatı ise, 2000 para birimidir. Fabrika yılda 25 000 adet üretme kapasitesine sahiptir, üretimin hazırlık maliyeti 200 para birimi, stok maliyetinin ise, stok değeri cinsinden yıllık 0.25 para birimidir. Optimal üretim hızını bulunuz. Yılda kaç defa üretim yapılmalıdır ?

Çözüm:

$$r = 25000 \text{ yılda}$$

$$D = 10000 \text{ şase yılda}$$

$$h = 0.25(2000) \text{ şase/yıl} = 500 \text{ şase/yıl}$$

$$K = 200 \text{ her bir üretimin başlaması için}$$

$$\text{Optimal üretim hızı} = \left(\frac{2 * (200) * (1000) * (25000)}{500 * (25000 - 1000)} \right)^{1/2} = 115.47$$

$$\text{Kaç kez üretmeye başlama sayısı} = \frac{10000}{115.47} = 86.6 \text{ olarak bulunur.}$$

11.2. Yok Satmaya (Negatif Stok) İzin Verildiği Durumda

$$q^* = \left[\frac{2KD(h+s)}{hs} \right]^{1/2} = EOQ \left(\frac{h+s}{s} \right)^{1/2}$$

$$M^* = \left[\frac{2KDs}{h(h+s)} \right]^{1/2}$$

$$\text{en çok eksiklik} = q^* - M^*$$

Örnek: Bir sağlık kuruluşu, yılda 10 000 gözlük çerçevesi satmaktadır. Sağlık kuruluşu çerçeveleri, bölgesindeki bayiden 15 para birime temin etmektedir. Her bir sipariş maliyeti ise 50 para birime mal olmaktadır. Firma talepleri geç karşılayabilmekte ve bir çerçeveyi geç karşılamayanın yılda 15 para birimlik maliyetine katlanılabilmektedir. Elde tutma maliyeti, envanterin değeri cinsinden 0.30 para birimi tutmaktadır,

- ✓ En iyi sipariş miktarı nedir?
- ✓ En çok olabilecek eksiz stok ne olacaktır?
- ✓ En çok olabilecek envanter seviyesi kaç olacaktır?

Çözüm:

$$K=50$$

$$D=10\ 000$$

$$h = 0.3 (15) = 4.5 \text{ çerçeve/yıl}$$

$$s=15 \text{ çerçeve/yıl}$$

$$q^* = \left[\frac{2 * (50) * (10000) * (19.5)}{(4.5) * (15)} \right]^{1/2} = 537.48$$

$$M^* = \left[\frac{2 * (50) * (10000) * (15)}{(4.5) * (19.5)} \right]^{1/2} = 413.45$$

$$q^* - M^* = 124.03$$

Her bir sipariş, 537 veya 538 adet olmalı, en çok stok seviyesi de 413.45 olacaktır.

Üretim r birim kadar ise ve eksiz envantere müsaade ediliyor olsaydı;

$$q^* = \left(\frac{2KD(h+s)}{h(r-D)s} \right)^{1/2}$$

$$M^* = \frac{q^*(r-D)}{r} - \left(\frac{2KD(r-D)h}{sr(h+s)} \right)^{1/2}$$

$$\text{en çok olacak eksiz envanter} = S^* = \left(\frac{2KD(r-D)h}{sr(h+s)} \right)^{1/2}$$

11.3. Talebin Belirsiz Olduğu Durumda

Bir ürüne ait olan talep zaman içinde sabit kalamaz. Yıllık, aylık ve günlük ortalama talep uzun bir dönem için sabit olabilir. Fakat; günlük ve hatta aylık talep miktarlarının sabit olduğu düşünülemez. Çünkü bazı günler ve aylarda istenilen miktarlar artabilir veya azalabilir. Durum böyle olunca gerçek talep düzeyinde bir değişkenlik söz konusu olacaktır. Bu bölümde, talep değerlerinin bilinmediği durumlarda ekonomik sipariş miktarının nasıl bulunacağı konusu üzerinde durulacaktır.

Daha önceden kullanılan notasyonları hatırlayalım:

K: Sipariş maliyeti

h: Elde bulundurma maliyeti

L: Tedarik süresi

q: Sipariş miktarı

ayrıca;

D: Talebi ifade eden rassal değişken (talebin sürekli olduğu farzedilir), E(D) beklenen değeri, var(D) varyans değeri ve σ_D standart sapması.

C_B : Geciken sipariş maliyeti

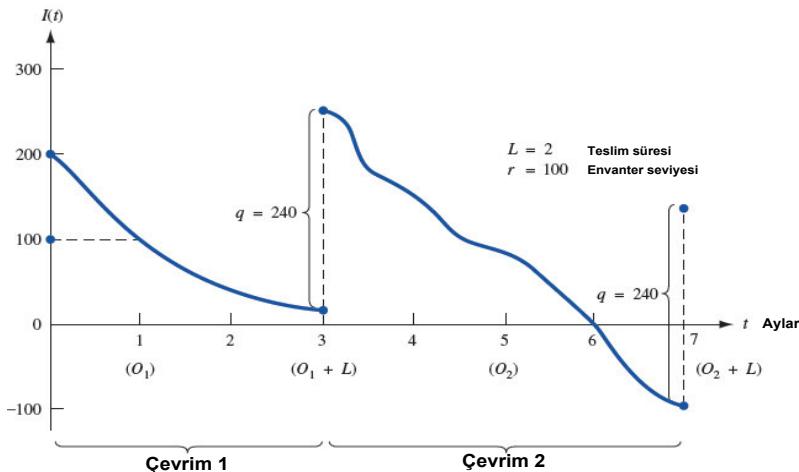
$OHI(t)$: t anında eldeki stok miktarı

$B(t)$: t anında gönderilememiş sipariş miktarı (bekleyen sipariş)

$I(t)$: t anındaki net stok miktarı = $OHI(t) - B(t)$

r: Envanter seviyesi (tekrar sipariş verme noktası, reorder point)

Aşağıdaki şekilde, talebin belirsiz olduğu durumda envanter değerinin değişmesine sipariş süresinin nasıl belirlendiğini göstermektedir. Şekildeki bilgilere göre, tekrar sipariş noktası $r=100$, teslim süresi $L=2$ hafta ve ekonomik sipariş miktarı $q=240$ adet ve başlangıç envanter miktarının 200 adet olduğu bilinmektedir.



Şimdi, şekli daha yakından tanımlayarak çalışalım. Müşteri siparişlerinin karşılanmasıyla, mevcut envanter erimeye başlayacaktır. Envanter seviyesi 100 olduğunda, tekrar sipariş noktası olduğu için, sipariş verilmektedir. Siparişin teslim süresinin 2 hafta olduğunu düşünürsek, verilen siparişin envanterimize dahil edilmesi 3. hafta da olacaktır. Yeni teslim aldığımız siparişin envantere dahil edilmesiyle, mevcut envanter değerinin 300 adetin üzerine çıktığını görüyoruz. Bu envanter değerinin de, elde kalmış envanter + yeni gelen 240 adet siparişin toplamından oluştuğunu söyleyebiliriz. 3. haftanın sonrasında da müşteri istekleri karşılanması devam edilmekte, fakat bu dönemdeki müşteri talebinin daha yoğun olduğu gözlemlenmektedir. Bunun sonucunda da envanter değerimizin hızla eridiğini görmekteyiz. Envanter değeri 100'e ulaştığında, ikinci sipariş verilmiş, siparişin teslim süresi 2 hafta olduğu için de sipariş verildikten bir hafta sonra yoğun müşteri talebinden dolayı envanter değerimiz eksi (negatif) değere ulaşmıştır. İkinci sipariş 7. haftada teslim edileceği için, yeni gelen teslimat ile envanter değerimizin tekrar artıya çıktığını görüyoruz. Mevcut envanter değerinin nasıl bulunduğuna bakmak istediğimizde; öncelikli olarak eksi envanter, yani müşterimize söz verdığımız ama teslim edemediğimiz miktar müşteriye teslim edilmiş, bundan sonrasında elde kalan envanter değeri elimizde kalan mevcut miktarı oluşturacaktır.

X: Tedarik süresi boyunca talebi ifade eden, $f(X)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip ve sırasıyla ortalaması, varyansı ve standart sapması $E(X)$, $\text{var}(X)$ ve σ_D olan bir rassal değişken olsun. Farklı noktalardaki taleplerin birbirinden bağımsız olduğunu varsayırsak;

$E(X)=L \cdot E(D)$, $\text{var}(X)=L \cdot (\text{var}(D))$, $\sigma_X = \sigma_D \sqrt{L}$ olur. D 'nin normal dağıldığını varsayırsak X de normal dağılır.

L ; ortalama $E(L)$, varyansı $\text{var}(L)$ ve standart sapması σ_L olan teslim süresinin rassal değişkeni olsun. Teslim süresi boyunca taleplerin teslim süreleri birbirinden bağımsızsa;

$$E(X)=E(L)E(D), \quad \text{var}(X)=E(L)\text{var}(D)+E(D)^2(\text{var}(L)) \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$\text{Çevrim boyunca } I(t) \text{ nin beklenen değeri} = \frac{q}{2} + r - E(X)$$

$$\text{Beklenen elde bulundurma maliyeti} = h\left(\frac{q}{2} + r - E(X)\right)$$

Br.: Stoksuz kalma sayısı rassal değişkeni veya sipariş verme noktası r olan bir çevrim boyunca yok satma rassal değişkeni ise;

$$\text{Beklenen yok satma (shortage) maliyeti} = \frac{C_B E(Br) E(D)}{q}$$

$$\text{Beklenen sipariş maliyeti} = \frac{KE(D)}{q}$$

$$\text{Toplam Maliyet}(q,r) = h\left(\frac{q}{2} + r - E(X)\right) + \frac{C_B E(Br) E(D)}{q} + \frac{KE(D)}{q} \text{ olur.}$$

$$EOQ = \left(\frac{2KE(D)}{h}\right)^{1/2}$$

Teslim süresi boyunca stoksuzluğun ortaya çıkma ihtimali $P(X \geq r^*) = \frac{hq^*}{C_B E(D)}$ formülleri ile bulunabilir.

Örnek: Bilgisayar malzemeleri satan bir firma, ana bayiye anakart siparişleri vermektedir. Firmanın yıllık sattığı anakart sayısı ortalama 1000 adet olmaktadır. Standart sapmasını 40,8 ve siparişlerin teslim süresini 2 hafta olarak kabul edersek, sipariş maliyeti 50 TL, yıllık elde tutma maliyeti 10 TL dir. Müşteriye geç teslim etmenin maliyeti 20 TL'dir. Siparişlerin tamamının karşılanması durumunu dikkate alarak;

- Ekonomik sipariş miktarı (EOQ) nedir?
- Teslim süresi boyunca stoksuzluğun ortaya çıkma ihtimali nedir?
- Tekrar sipariş verme noktası (r) nedir?
- Emniyet stok seviyesi nedir?

Çözüm:

$$EOQ = \left(\frac{2 * 50 * 1000}{10}\right)^{1/2} = 100$$

$$E(X) = \frac{E(D)}{26} = \frac{1000}{26} = 38,46$$

$$\delta_X = \frac{\delta_D}{\sqrt{26}} = \frac{40,8}{\sqrt{26}} = 8$$

$$P(X \geq r) = \frac{10 * 100}{20 * 1000} = 0,05$$

$$P\left(\frac{X - 38,46}{8} \geq \frac{r - 38,46}{8}\right) = 0,05$$

$$P(Z \geq \frac{r - 38,46}{8}) = 0,05$$

$$P(Z \leq 1,65) = 0,9505$$

$$1 - 0,9505 = 0,0495$$

$$\frac{r - 38,46}{8} = 1,65$$

$$r = 38,46 + 8 * 1,65 = 51,66$$

Buna göre emniyet stoku seviyesi; $r - E(X) = 51,66 - 38,46 = 13,2$ olur.

11.4. Geciken Sipariş Karşılanmadığı Durumda

Yok satmanın maliyetini her bir yok satma durumu için C_{LS} olarak ifade edelim. (C_{LS} : kardan kayıp ile güven kaybı maliyeti olarak düşünülebilir.) Bu durumda aşağıdaki formülleri kullanabiliriz:

$$q^* = \left(\frac{2KE(D)}{h} \right)^{1/2}$$

$$P(X \geq r^*) = \frac{hq^*}{hq^* + C_{LS}E(D)}$$

Bir önceki örnekte, geciken siparişin bir daha karşılanmadığını düşünelim. Anakart satış fiyatı 50TL, depolama maliyeti 30 TL, güven kaybı maliyeti 20 TL olsun. Buna göre yok satma maliyeti; $C_{LS} = (50-30)TL + 20TL = 40TL$ olur.

$$P(X \geq r^*) = \frac{10.100}{10.100+40.1000} = 0,024$$

$r=54,28$ olarak bulunur.

Emniyet stoku da $r-E(X)= 54,28-38,46=15,82$ olur.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Stokastik envanter problemleri incelenmiştir. Slave olarak yok satmanın varsayıldığı durumlarda, tekrar sipariş noktasının nasıl bulunacağı üzerinde durulmuştur.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Bir işletmede talep ortalama değeri, standart sapması ve hangi dağılıma uydugu nasıl bulunabilir?
- 2) Üretime hazırlık maliyeti yüksek ise, daha düşük mü daha yüksek mi üretim hızı tercih edersiniz? Neden?
- 3) Yok satma neden itibar kaybettirir, EOQ nun hesaplanmasıyla yok satma maliyeti nasıl hesaplanabilir?
- 4) Yok satma maliyeti arttığında EOQ değeri azalır mı? Yoksa artar mı? Tartışınız
- 5) Geciken siparişin karşılanması durumda, EOQ daha mı büyük yoksa daha mı küçük seçilmelidir? Neden?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

12. HİZMET SEVİYESİ VE TEKRAR SİPARİŞ VERME NOKTALARI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Emniyet Stokunun Bulunmasında Servis Seviyesi Yaklaşımı (Talep Bilinmiyor)

SLM1 için Tekrar Sipariş Verme Noktası ve Emniyet Stok Seviyesinin Tanımlanması

SLM2 için Tekrar Sipariş Verme Noktası ve Emniyet Stok Seviyesinin Tanımlanması

Giriş

Bu bölümde Ekonomik sipariş miktarının bulunmasında servis seviyesi yaklaşımlarından bahsedilecektir. Öncelikle SLM1, yani talebin karşılanma oranı, sonrasında ise, SLM2 ise negatif stoğa düşme sayısı dikkate alınarak tekrar sipariş noktası ve ekonomik sipariş miktarının bulunması üzerinde durulacaktır.

12.1. Emniyet Stokunun Bulunmasında Servis Seviyesi Yaklaşımı

Emniyet stoğunun bulunmasında iki farklı servis saviyesi kullanılabilir.

Service Level Measure) $SLM_1 =$ Talebin beklenen karşılanma oranı

$SLM_2 =$ Eksi stok seviyesine düşme sayısı

12.2. SLM₁

$$NL\left(\frac{r - E(X)}{\sigma_x}\right) = \frac{q(1 - SLM_1)}{\sigma_x}$$

NL : Normal Kayıp (Loss) Fonksiyonu

Eksi stoka düşme sayısı $\sigma_x NL(y)$

Tekrar sipariş verme noktası $E(X) + y * \sigma_x$

Normal kayıp fonksiyonu değerleri aşağıdaki tablolardan hesaplanır. Tabloda NL(x) en yüksek 0,3989 değerini almaktadır. Bu değerin üzerindeki değerler için x negatif olacaktır. Ayrıca x değerini okuyabilmek için $NL(-x)=NL(x)+x$ formülü kullanılır.

<i>x</i>	<i>M_L(x)</i>	<i>x</i>	<i>M_L(x)</i>	<i>x</i>	<i>M_L(x)</i>
0.00	0.3989	0.40	0.2304	0.80	0.1202
0.01	0.3940	0.41	0.2270	0.81	0.1181
0.02	0.3890	0.42	0.2236	0.82	0.1160
0.03	0.3841	0.43	0.2203	0.83	0.1140
0.04	0.3793	0.44	0.2169	0.84	0.1120
0.05	0.3744	0.45	0.2137	0.85	0.1100
0.06	0.3697	0.46	0.2104	0.86	0.1080
0.07	0.3649	0.47	0.2072	0.87	0.1061
0.08	0.3602	0.48	0.2040	0.88	0.1042
0.09	0.3556	0.49	0.2009	0.89	0.1023
0.10	0.3509	0.50	0.1978	0.90	0.1004
0.11	0.3464	0.51	0.1947	0.91	0.09860
0.12	0.3418	0.52	0.1917	0.92	0.09680
0.13	0.3373	0.53	0.1887	0.93	0.09503
0.14	0.3328	0.54	0.1857	0.94	0.09328
0.15	0.3284	0.55	0.1828	0.95	0.09156
0.16	0.3240	0.56	0.1799	0.96	0.08986
0.17	0.3197	0.57	0.1771	0.97	0.08819
0.18	0.3154	0.58	0.1742	0.98	0.08654
0.19	0.3111	0.59	0.1714	0.99	0.08491
0.20	0.3069	0.60	0.1687	1.00	0.08332
0.21	0.3027	0.61	0.1659	1.01	0.08174
0.22	0.2986	0.62	0.1633	1.02	0.08019
0.23	0.2944	0.63	0.1606	1.03	0.07866
0.24	0.2904	0.64	0.1580	1.04	0.07716
0.25	0.2863	0.65	0.1554	1.05	0.07568
0.26	0.2824	0.66	0.1528	1.06	0.07422
0.27	0.2784	0.67	0.1503	1.07	0.07279
0.28	0.2745	0.68	0.1478	1.08	0.07138
0.29	0.2706	0.69	0.1453	1.09	0.06999
0.30	0.2668	0.70	0.1429	1.10	0.06862
0.31	0.2630	0.71	0.1405	1.11	0.06727
0.32	0.2592	0.72	0.1381	1.12	0.06595
0.33	0.2555	0.73	0.1358	1.13	0.06465
0.34	0.2518	0.74	0.1334	1.14	0.02034
0.35	0.2481	0.75	0.1312	1.15	0.06210
0.36	0.2445	0.76	0.1289	1.16	0.06086
0.37	0.2409	0.77	0.1267	1.17	0.05964
0.38	0.2374	0.78	0.1245	1.18	0.05844
0.39	0.2339	0.79	0.1223	1.19	0.05726

<i>x</i>	<i>M</i> (<i>x</i>)	<i>x</i>	<i>M</i> (<i>x</i>)	<i>x</i>	<i>M</i> (<i>x</i>)
1.20	0.05610	1.60	0.02324	2.00	0.008491
1.21	0.05496	1.61	0.02270	2.01	0.008266
1.22	0.05384	1.62	0.02217	2.02	0.008046
1.23	0.05274	1.63	0.02165	2.03	0.007832
1.24	0.05165	1.64	0.02114	2.04	0.007623
1.25	0.05059	1.65	0.02064	2.05	0.007418
1.26	0.04954	1.66	0.02015	2.06	0.007219
1.27	0.04851	1.67	0.01967	2.07	0.007024
1.28	0.04750	1.68	0.01920	2.08	0.006835
1.29	0.04650	1.69	0.01874	2.09	0.006649
1.30	0.04553	1.70	0.01829	2.10	0.006468
1.31	0.04457	1.71	0.01785	2.11	0.006292
1.32	0.04363	1.72	0.01742	2.12	0.006120
1.33	0.04270	1.73	0.01699	2.13	0.005952
1.34	0.04179	1.74	0.01658	2.14	0.005788
1.35	0.04090	1.75	0.01617	2.15	0.005628
1.36	0.04002	1.76	0.01578	2.16	0.005472
1.37	0.03916	1.77	0.01539	2.17	0.005320
1.38	0.03831	1.78	0.01501	2.18	0.005172
1.39	0.03748	1.79	0.01464	2.19	0.005028
1.40	0.03667	1.80	0.01428	2.20	0.004887
1.41	0.03587	1.81	0.01392	2.21	0.004750
1.42	0.03508	1.82	0.01357	2.22	0.004616
1.43	0.03431	1.83	0.01323	2.23	0.004486
1.44	0.03356	1.84	0.01290	2.24	0.004358
1.45	0.03281	1.85	0.01257	2.25	0.004235
1.46	0.03208	1.86	0.01226	2.26	0.004114
1.47	0.03137	1.87	0.01195	2.27	0.003996
1.48	0.03067	1.88	0.01164	2.28	0.003882
1.49	0.02998	1.89	0.01134	2.29	0.003770
1.50	0.02931	1.90	0.01105	2.30	0.003662
1.51	0.02865	1.91	0.01077	2.31	0.003556
1.52	0.02800	1.92	0.01049	2.32	0.003453
1.53	0.02736	1.93	0.01022	2.33	0.003352
1.54	0.02674	1.94	0.009957	2.34	0.003255
1.55	0.02612	1.95	0.009698	2.35	0.003159
1.56	0.02552	1.96	0.009445	2.36	0.003067
1.57	0.02494	1.97	0.009198	2.37	0.002977
1.58	0.02436	1.98	0.008957	2.38	0.002889
1.59	0.02380	1.99	0.008721	2.39	0.002804

x	$NL(x)$	x	$NL(x)$	x	$NL(x)$
2.40	0.002720	2.80	0.0007611	3.20	0.0001852
2.41	0.002640	2.81	0.0007359	3.21	0.0001785
2.42	0.002561	2.82	0.0007115	3.22	0.0001720
2.43	0.002484	2.83	0.0006879	3.23	0.0001657
2.44	0.002410	2.84	0.0006650	3.24	0.0001596
2.45	0.002337	2.85	0.0006428	3.25	0.0001537
2.46	0.002267	2.86	0.0006213	3.26	0.0001480
2.47	0.002199	2.87	0.0006004	3.27	0.0001426
2.48	0.002132	2.88	0.0005802	3.28	0.0001373
2.49	0.002067	2.89	0.0005606	3.29	0.0001322
2.50	0.002004	2.90	0.0005417	3.30	0.0001273
2.51	0.001943	2.91	0.0005233	3.31	0.0001225
2.52	0.001883	2.92	0.0005055	3.32	0.0001179
2.53	0.001826	2.93	0.0004883	3.33	0.0001135
2.54	0.001769	2.94	0.0004716	3.34	0.0001093
2.55	0.001715	2.95	0.0004555	3.35	0.0001051
2.56	0.001662	2.96	0.0004398	3.36	0.0001012
2.57	0.001610	2.97	0.0004247	3.37	0.00009734
2.58	0.001560	2.98	0.0004101	3.38	0.00009365
2.59	0.001511	2.99	0.0003959	3.39	0.00009009
2.60	0.001464	3.00	0.0003822	3.40	0.00008666
2.61	0.001418	3.01	0.0003689	3.41	0.00008335
2.62	0.001373	3.02	0.0003560	3.42	0.00008016
2.63	0.001330	3.03	0.0003436	3.43	0.00007709
2.64	0.001288	3.04	0.0003316	3.44	0.00007413
2.65	0.001247	3.05	0.0003199	3.45	0.00007127
2.66	0.001207	3.06	0.0003087	3.46	0.00006852
2.67	0.001169	3.07	0.0002978	3.47	0.00006587
2.68	0.001132	3.08	0.0002873	3.48	0.00006331
2.69	0.001095	3.09	0.0002771	3.49	0.00006085
2.70	0.001060	3.10	0.0002672	3.50	0.00005848
2.71	0.001026	3.11	0.0002577	3.51	0.00005620
2.72	0.0009928	3.12	0.0002485	3.52	0.00005400
2.73	0.0009607	3.13	0.0002396	3.53	0.00005188
2.74	0.0009295	3.14	0.0002311	3.54	0.00004984
2.75	0.0008992	3.15	0.0002227	3.55	0.00004788
2.76	0.0008699	3.16	0.0002147	3.56	0.00004599
2.77	0.0008414	3.17	0.0002070	3.57	0.00004417
2.78	0.0008138	3.18	0.0001995	3.58	0.00004242
2.79	0.0007870	3.19	0.0001922	3.59	0.00004073

<i>x</i>	<i>NL(x)</i>	<i>x</i>	<i>NL(x)</i>	<i>x</i>	<i>NL(x)</i>
3.60	0.00003911	3.75	0.00002103	3.90	0.00001108
3.61	0.00003755	3.76	0.00002016	3.91	0.00001061
3.62	0.00003605	3.77	0.00001933	3.92	0.00001016
3.63	0.00003460	3.78	0.00001853	3.93	0.00000972
3.64	0.00003321	3.79	0.00001776	3.94	0.000009307
3.65	0.00003188	3.80	0.00001702	3.95	0.000008908
3.66	0.00003059	3.81	0.00001632	3.96	0.000008525
3.67	0.00002935	3.82	0.00001563	3.97	0.000008158
3.68	0.00002816	3.83	0.00001498	3.98	0.000007806
3.69	0.00002702	3.84	0.00001435	3.99	0.000007469
3.70	0.00002592	3.85	0.00001375	4.00	0.000007145
3.71	0.00002486	3.86	0.00001317		
3.72	0.00002385	3.87	0.00001262		
3.73	0.00002287	3.88	0.00001208		
3.74	0.00002193	3.89	0.00001157		

Örnek: Bir firma yılda ortalama 1000 adet mutfak robotu satmaktadır. Sipariş maliyetinin 50 TL, tedarik süresinin 1 ay, elde tutma maliyetinin 10 TL yıllık olduğunu düşünelim. Mutfak robotunun talebi normal dağılıma uymakta ve standart sapması 69,28 ‘dir. % 80, % 90, % 95, % 99, % 99.9 seviyelerinde (SLM_1) tekrar sipariş noktalarını bulalım.

$$E(D) = 1000, K=50, h=10$$

$$q = \left(\frac{2 * 50 * 1000}{10} \right)^{\frac{1}{2}} = 100$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{12} \right) * 1000 = 83,33$$

$$\sigma_x = \frac{69,28}{\sqrt{12}} = 20$$

$$SLM_1 = \% 80 \text{ için};$$

$$NL\left(\frac{r-83,33}{20}\right) = \frac{100*(1-0,8)}{20} = 1$$

$$NL(-0,9) = NL(0,9) + 0,9 = 1$$

$$\frac{r - 83,33}{20} = -0,9$$

$$r = 83,33 - 20 * 0,9 = 65,33$$

$SLM_1 = \% 90$ için;

$$NL\left(\frac{r - 83,33}{20}\right) = \frac{100 * (1 - 0,9)}{20} = 0,5$$

$$NL(-0,19) = NL(0,19) + 0,19 = 0,5011$$

$$\frac{r - 83,33}{20} = -0,19$$

$$r = 83,33 - 20 * 0,19 = 79,53$$

$SLM_1 = \% 95$ için;

$$NL\left(\frac{r - 83,33}{20}\right) = \frac{100 * (1 - 0,95)}{20} = 0,25$$

$$NL(0,34) = 0,2518$$

$$\frac{r - 83,33}{20} = 0,34$$

$$r = 90,13$$

$SLM_1 = \% 99$ için;

$$NL(1,25) = 0,0506$$

$$\frac{r - 83,33}{20} = 1,25$$

$$r = 83,33 + 20 * 1,25 = 108,33$$

$SLM_1 = \% 99,9$ için;

$$NL(2,19) = 0,005$$

$$\frac{r - 83,33}{20} = 0,005$$

$$r = 83,33 + 20 * 2,19 = 127,13$$

SLM₁ (%)	Tekrar Sipariş Noktası
80	65.33
90	79.53
95	90.13
99	108.33
99.9	127.13

12.3. SLM₂

S₀: Eksi stoka düşülen ortalama çevrim sayısı

$$P(X > r) \leq \frac{S_0 * q}{E(D)}$$

Yukarıdaki örnekte yılda ortalama 2 teslim süresi içerisinde stoksuz kalındığını düşünelim. Buna göre;

$$P(X > r) \leq \frac{2 * 100}{1000} = 0,2$$

r= 100,16 ve

Emniyet stoku seviyesi 100,16-E(X)=16,83 olarak bulunur.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Tekrar sipariş noktasının belirlenmesinde servis seviyesi yaklaşımları tartışılmıştır.

BÖLÜM SORULARI

- 1) SLM1 ile SLM2 hizmet sevilerinin temek farkını tartışınız
- 2) EOQ aynı kalmak şartıyla SLM1 artırmak istediğimizde ne yapabiliriz?
- 3) Tekrar sipariş verme noktasının düşük olmasının nasıl bir riski vardır?
- 4) Tekrar sipariş verme noktası olduğundan daha büyük olması ne gibi sonuçları doğurur
- 5) Elde tutma maliyetinin artması veya azalması tekrar sipariş verme noktasını nasıl etkiler?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

13. DİNAMİK PROGRAMLAMA

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Deterministik dinamik programlama

İleriye doğru dinamik programlama

Geriye doğru dinamik programlama

Giriş

Bu bölümde dinamik programlama üzerinde durulacaktır. İleriye ve geriye dinamik programlama örneklerle anlatılacaktır.

13.1. Deterministik Dinamik Programlama

Dinamik programlama bir çok optimizasyon problemini çözmek için kullanılabilecek bir yöntemdir. Doğrusal programlamanın aksine dinamik programlama, mevcut problemi birbiri ardından işlem gören parçalara ayırmıştır. Doğrusal programlamada n sayıda bilinmeyen arasında $(m+1)$ tane bağlantı kurulur. Bu bağlantılardan m tanesi doğrusal şartları tanımlayan kısıtlar ve bir tanesi de optimallığı araştırılan amaç fonksiyonudur. Dinamik programlamada doğrusallık söz konusu değildir ve (mn) büyüklüğündeki problemi bir bütün (sistem) olarak düşünür. Sadece tüm sistem parçaları ardışık işlemler görür ve ardışık iki işlem arasında fonksiyonel bir bağlantı kurulur.

Dinamik programlamanın diğer tekniklere göre üstünlüğü, zaman faktörünü değerlendirmesi yanında, çok boyutlu problemlerin çözümünde etkin hesaplama kolaylığı sağladır. En büyük dezavantajı bütün problemler için uygun gelen bir modelin ifade edilememesidir. Dolayısıyla her problem kendi içinde formüle edilme zorluğunu taşır.

Bazı Terimler

Ardıl Küme: Eğer i düğümünden j düğümüne yönlendirilmiş ok var ise; j düğümüne i 'nin ardılı denir ve $scs(i)=\{j\}$ olarak gösterilir.

Öncül Küme: Eğer i düğümüne j düğümünden yönlendirilmiş ok var ise; j düğümüne i 'nin öncülü denir ve $pre(i)=\{j\}$ olarak gösterilir.

Optimallik Denklemi: Anlık maliyet (immediate cost) ile sonraki aşamadan hedefe gitmenin optimum maliyetinin (cost-to-go) toplamıdır. İleriye doğru dinamik programlamada g_i , geriye doğru dinamik programlamada f_i ile sembolize edilir.

Sınır Koşulu: İleriye doğru dinamik programlamada başlangıç, geriye doğru dinamik programlamada hedef düğümlerin optimallik denklemi değerleridir ve sıfır eşitlenir.

İleriye Doğru Dinamik Programlama

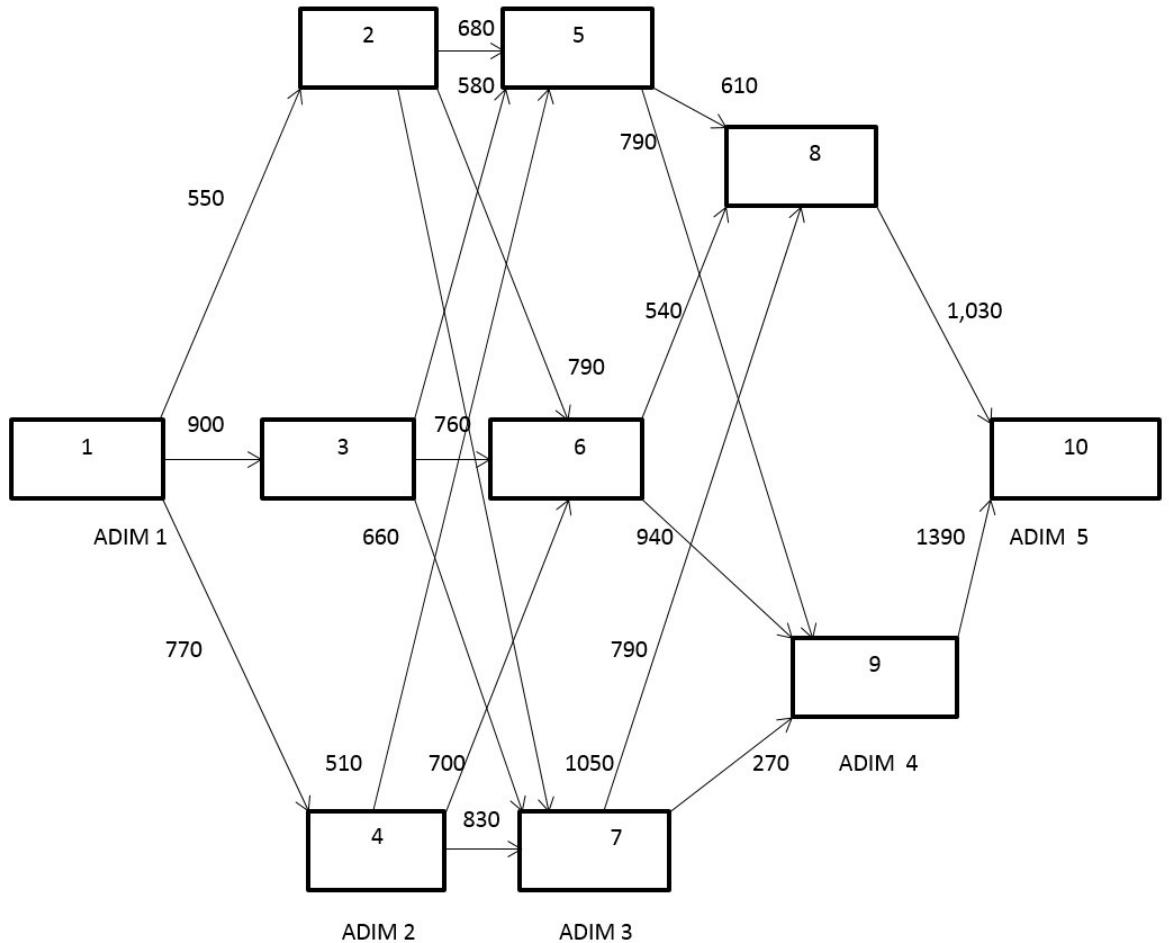
g_i : i 'den başlangıç düğümüne kadar olan en kısa veya en uzun (küçük veya büyük) mesafe olsun.

$g_1=0$ sınır koşulu,

$g_{i+1} = \min \text{ veya } \max \{ t_{i,i+1}, g_i: scs(i)=i+1 \} \quad (t_{i,j}: i \text{ düğümünden } j \text{ düğümüne yönlendirilmiş okun maliyeti, uzunluğu,...})$

Optimallik denklemi: $g_j = \min \text{ veya } \max \{ g_i + t_{i,j}: i \in pre(j) \}$

ÖRNEK: Aşağıda 10 şehir ve aralarındaki mesafeler verilmiştir. İlk şehirden başlayarak son şehrə ulaşmak için takip edilmesi gereken en kısa yolu bulalım.



Çözüm:

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = 550 \quad (1 \rightarrow 2)$$

$$g_3 = 900 \quad (1 \rightarrow 3)$$

$$g_4 = 770 \quad (1 \rightarrow 4)$$

$$g_5 = \min \{ g_2 + t_{25}, g_3 + t_{35}, g_4 + t_{45} \} = \min \{ 550 + 680, 900 + 580, 770 + 510 \} =$$

$$\min \{ 1230, 1480, 1280 \} = 1230 \quad (2 \rightarrow 5)$$

$$g_6 = \min \{ g_2 + t_{26}, g_3 + t_{36}, g_4 + t_{46} \} = \min \{ 550 + 790, 900 + 760, 770 + 700 \} =$$

$$\min \{ 1340, 1660, 1470 \} = 1340 \quad (2 \rightarrow 6)$$

$$g_7 = \min \{ g_2 + t_{27}, g_3 + t_{37}, g_4 + t_{47} \} = \min \{ 550 + 1050, 900 + 660, 770 + 830 \} =$$

$$\min \{ 1600, 1560, 1600 \} = 1560 (3 \rightarrow 7)$$

$$g_8 = \min \{ g_5 + t_{58}, g_6 + t_{68}, g_7 + t_{78} \} = \min \{ 1230 + 610, 1340 + 540, 1560 + 790 \} =$$

$$\min \{ 1840, 1880, 2350 \} = 1840 (5 \rightarrow 8)$$

$$g_9 = \min \{ g_5 + t_{59}, g_6 + t_{69}, g_7 + t_{79} \} = \min \{ 1230 + 790, 1340 + 940, 1840 + 270 \} =$$

$$\min \{ 2020, 2280, 2110 \} = 2020 (5 \rightarrow 9)$$

$$g_{10} = \min \{ g_8 + t_{810}, g_9 + t_{910} \} = \min \{ 1840 + 1030, 2020 + 1390 \} = \min \{ 2870, 3410 \} = 2870 (8 \rightarrow 10)$$

Optimal Yol: 1-2-5-8-10

Geriye Doğru Dinamik Programlama

f_i : i'den hedef düğüme kadar olan en kısa veya en uzun (küçük veya büyük) mesafe olsun.

$$f_{\text{hedef}} = 0 \text{ sınır koşulu,}$$

$f_i = \min \text{ veya } \max \{ t_{i,j}, f_j : \text{scs}(i) = j \} \quad (t_{i,j}: i \text{ düğümünden } j \text{ düğümüne yönlendirilmiş okun maliyeti, uzunluğu,...})$

Optimallik denklemi: $f_j = \min \text{ veya } \max \{ f_j + t_{i,j} : j \in \text{scs}(i) \}$

Örnek: Yukarıdaki örneği geriye doğru dinamik programlama ile çözelim.

$$f_{10} = 0$$

$$f_9 = 1390 (9 \rightarrow 10)$$

$$f_8 = 1030 (9 \rightarrow 10)$$

$$f_7 = \min \{ f_8 + t_{78}; f_9 + t_{79} \} = 1660 (7 \rightarrow 9)$$

$$f_6 = \min \{ f_8 + t_{68}, f_9 + t_{69} \} = 1570 (6 \rightarrow 8)$$

$$f_5 = \min \{ f_8 + t_{58}, f_9 + t_{59} \} = 1640 (5 \rightarrow 8)$$

$$f_4 = \min \{ f_7 + t_{47}, f_6 + t_{46}, f_5 + t_{45} \} = 2150 (4 \rightarrow 5)$$

$$f_3 = \min \{ f_7 + t_{37}, f_6 + t_{36}, f_5 + t_{35} \} = 2220 (3 \rightarrow 5)$$

$$f_2 = \min \{ f_7+t_{27}, f_6+t_{26}, f_5+t_{25} \} = 2320 \quad (2 \rightarrow 5)$$

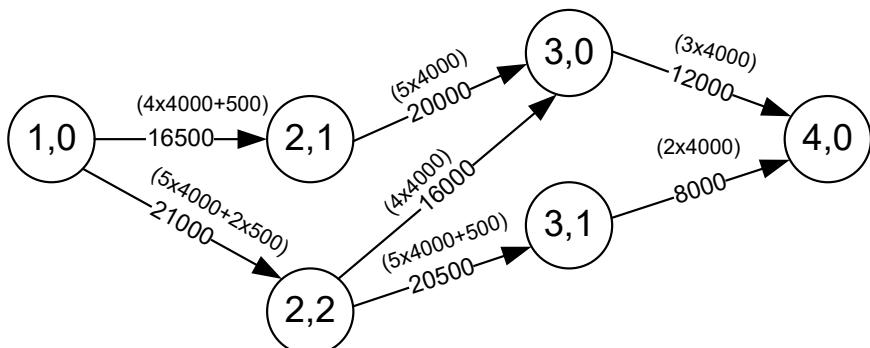
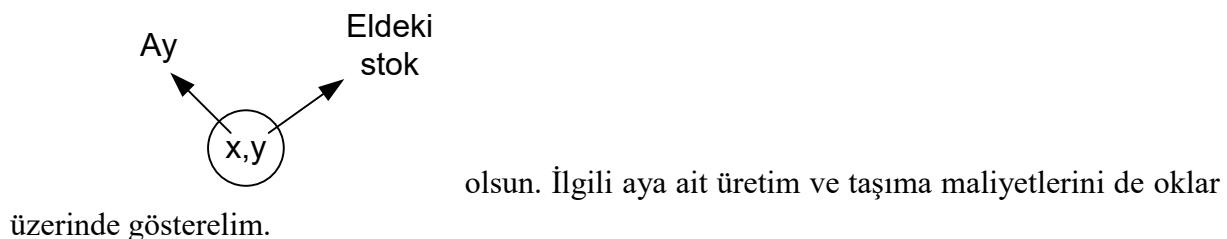
$$f_1 = \min \{ f_4+t_{14}, f_3+t_{13}, f_2+t_{12} \} = 2870 \quad (1 \rightarrow 2)$$

Çözüm: 1-2-5-8-10

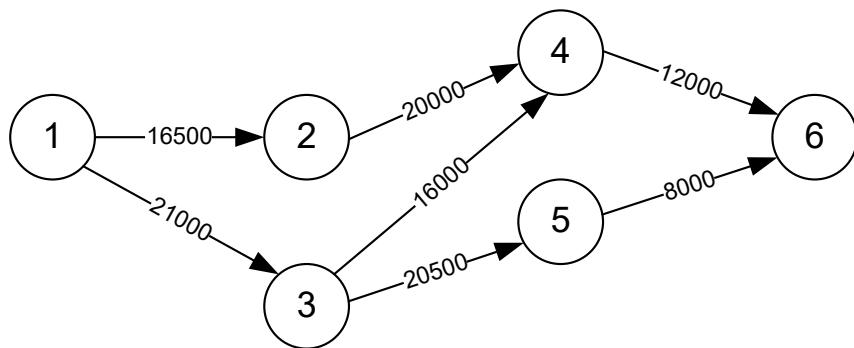
Örnek: Bir firma ürettiği bir ürünün gelecek 3 aydaki talebini karşılamak istemektedir. Firmanın kapasitesi aylık 5 üründür. Ürünün gelecek ilk ay talebi 3 adet, ikinci ay talebi 6 ve üçüncü ay talebi 3 adettir. Birim üretim maliyetleri her ay için sabit 4000 TL'dir. Her birim ürünü üretip bir sonraki aya taşımın maliyeti (stok maliyeti) 500 TL'dir. İlk ayın başında elde stok olmadığı düşünülürse en düşük maliyetli üretim planını dinamik programlama ile bulalı. (Not: En düşük maliyetli üretimi bulabilmek için son ay elimde hiç stok kalmadığını düşünürüm.)

Çözüm:

Öncelikle ağ diyagramını oluşturalım.



Şekli biraz sadeleştirirsek;



Geriye doğru dinamik programlamayla çözüm:

$$f_6=0$$

$$f_5=8000 \ (5 \rightarrow 6)$$

$$f_4=12000 \ (4 \rightarrow 6)$$

$$f_3= \min \{ f_6+20500, f_5+16000\} = \min \{ 28500, 28000\} = 28000 \ (3 \rightarrow 4)$$

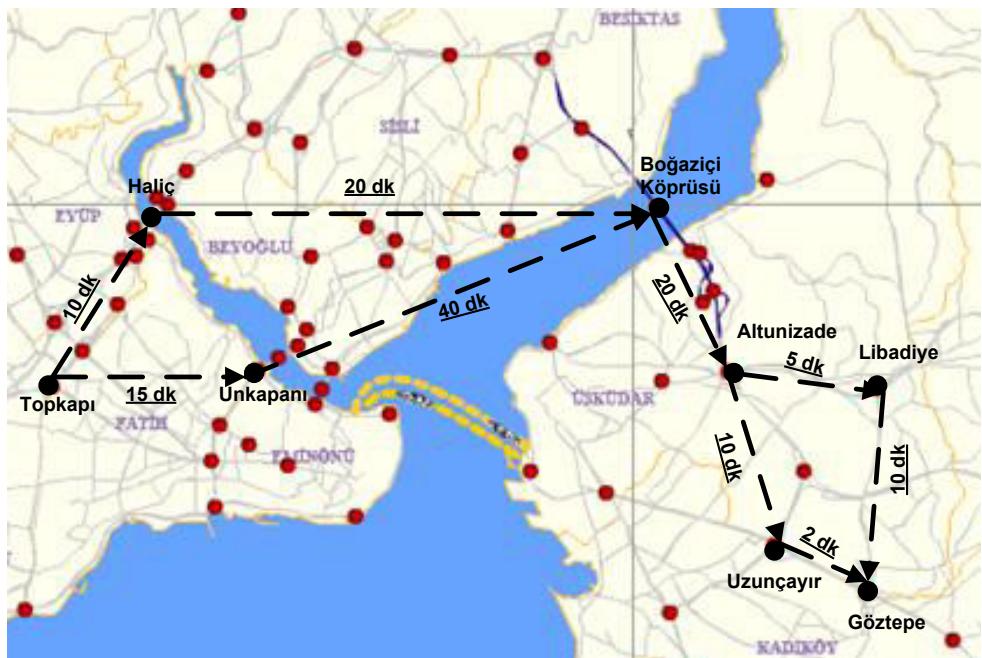
$$f_2= 12000+20000=32000 \ (2 \rightarrow 4)$$

$$f_1= \min \{ f_3+21000, f_2+16500\} = \min \{49000, 48500\} = 48500 \ (1 \rightarrow 2)$$

Optimal yol: 1-2-4-6

Optimal üretim planı ise; ilk ay 4 adet üretip 3 adedini satarak 2. aya 1 adet taşıyacak, 2. ay 5 adet üretip elinde olan toplam 6 adet ürünü satacak ve 3. ayda 3 adet üretip tamamını satacaktır.

Örnek: Aşağıdaki haritaya göre Topkapı'dan Göztepe'ye en kısa sürede gidebilmek için hangi güzergâh izlenmelidir, dinamik programlamayla bulunuz.



İleriye doğru dinamik programlamayla çözüm:

$$g_{\text{Topkapı}} = 0$$

$$g_{\text{Haliç}} = 10 \text{ (Topkapı} \rightarrow \text{Haliç)}$$

$$g_{\text{Unkapanı}} = 15 \text{ (Topkapı} \rightarrow \text{Unkapanı)}$$

$$g_{\text{Boğaziçi Köprüsü}} = \min \{ g_{\text{Haliç}} + 20, g_{\text{Unkapanı}} + 40 \} = \min \{ 30, 55 \} = 30 \text{ (Haliç} \rightarrow \text{Boğaziçi Köprüsü)}$$

$$g_{\text{Altunizade}} = 30 + 20 = 50 \text{ (Boğaziçi Köprüsü} \rightarrow \text{Altunizade)}$$

$$g_{\text{Libadiye}} = 50 + 5 = 55 \text{ (Altunizade} \rightarrow \text{Libadiye)}$$

$$g_{\text{Uzunçayır}} = 50 + 10 = 60 \text{ (Altunizade} \rightarrow \text{Uzunçayır)}$$

$$g_{\text{Göztepe}} = \min \{ g_{\text{Uzunçayır}} + 2, g_{\text{Libadiye}} + 10 \} = \min \{ 62 + 65 \} = 62 \text{ (Uzunçayır} \rightarrow \text{Göztepe)}$$

Optimal güzergâh= Topkapı-Haliç-Boğaziçi Köprüsü-Altunizade-Uzunçayır-Göztepe

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Dinamik programmanın aşamaları verilmiş ve en kısa yol probleminin çözümü tartışılmıştır.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Birim üretim maliyetinin her ay farklı olduğunu düşünelim. Örneğin; 1. ay 4000 TL, 2. ay 2000 TL ve 3. ay da 5000 TL olsun. Bu durumda optimal üretim planını dinamik programlamayla bulun.
- 2) Dinamik programa kullanıldığında alternatif sayılarının azaltılması nasıl başlıyor tartışınız
- 3) İleriye doğru ile geriye doğru dinamik programlama metodlarının kullanılmasında neden sonuç daima aynı çıkar ?
- 4) Dinamik programlamada problemin optimal çözümü, her adımdaki en iyi değerler bulunduktan sonra, bu sonuçlar toplu olarak ilişkilendirildikten sonra bulunabilir ? neden ?
- 5) Dinamik programlamada bir adımdaki uygun strajı neden sonraki veya önceki dönemleri etkiler ?

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.

14. PROBABİLİSTİK DİNAMİK PROGRAMLAMA

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

Probabilistik dinamik programlama

Giriş

Bu bölümde probabilistik dinamik programlam konusu inceleneciktir. Farklı örneklerle konunun detayları inceleneciktir.

14.1. Probabilistik Dinamik Programlama

Dinamik programlamayı şu şekilde formülize edebiliriz:

$$f_t(\text{mevcut durum}) = \text{en çok (veya en az)} [\text{mevcut durumun maliyeti} + f_{t+1}(\text{yeni durum})]$$

Mevcut periyodun maliyetinin veya gelecek periyodun durumunun rassal olduğu dinamik programlama problemlerine probabilistik dinamik programlama problemleri denir. Bu problemlerde karar vericinin amacı genellikle belirli bir zaman periyodunda beklenen maliyeti enküçüklemek veya beklenen kârı enbüyüklemektir.

Mevcut durum maliyetlerinin belirsiz, gelecek periyot durumunun belirli olduğu bir örneği inceleyelim.

Örnek: Bir supermarket zinciri yerel bir mandıradan galonu 1 dolara 6 galon süt tedarik etmektedir. (Not: 1 galon=3,79 lt) Zincirin üç marketinde de süt galonu 2 dolara satılmaktadır. Mandıra, günün sonunda satılmayan sütün galonunu 50 cent'ten geri almaktadır. İşletmenin üç marketinde de süt talepleri belirsizdir. Her bir marketteki günlük süt talepleri geçmiş verilere göre şöyledir:

		Günlük Talep (Galon)	Olasılık
Market 1	1	0,60	
	2	0	
	3	0,40	
Market 2	1	0,50	
	2	0,10	
	3	0,40	
Market 3	1	0,40	
	2	0,30	
	3	0,30	

İşletme beklenen net kazancını enbüyükleyecek şekilde tedarik ettiği 6 galonluk sütü marketlerine pay etmek istemektedir. Buna göre dinamik programlama kullanarak 6 galon sütü üç markete paylaştırınız.

Cözüm: İşletme her koşulda günlük toplam 6 dolarlık bir satın alma maliyetine katlanacaktır. Amaç, 6 galonluk sütten elde etmeyi beklediğimiz geliri enbüyüklemektir.

$r_t(g_t)$: t marketine atanan g_t galondan elde edilen beklenen gelir

$f_t(x)$: $t, t+1, t+2, t+3$ marketlerine atanan x galondan elde edilen beklenen en çok gelir

Modelin dinamik programlama formülünü de şöyle tanımlayalım:

$$f_t(x) = \underset{g_t}{\text{en çok}} \{ r_t(g_t) + f_{t+1}(x - g_t) \}$$

Öncelikle her bir markete atanan süt miktarlarından elde edilebilecek beklenen getirileri hesaplayalım:

$$r_1(0)=0$$

$r_1(1)=0,60*2+0,4*2= 2$ dolar (Tablodaki verilere göre %60 ihtimalle 1 galon süt talebi, %40 ihtimalle de 3 galon süt talebi olacak. Yani market 1'e 1 galon süt atadığımızda her hâlükârdâ 2 dolar kazanacağız. Dikkat edilirse tabloda 0 galon süt talebi yok.)

$r_1(2)=0,6*2,5+0,4*4= 3,1$ dolar (Market 1'e 2 galon süt atadığımızda %60 ihtimalle 1 galon süt talebi olursa 2 dolar müşteriden, 0,5 dolar mandıradan, %40 ihtimalle de 3 galon süt talebi olursa elimizde toplam 2 galonluk süt olduğundan 4 dolar müşteriden kazanabiliriz.)

$r_1(3)=0,6*3+0,4*6= 4,2$ dolar (Market 1'e 3 galon süt atadığımızda %60 ihtimalle 1 galon süt talebi olursa 2 dolar müşteriden, 1 dolar da mandıradan, %40 ihtimalle de 3 galon süt talebi olursa 6 dolar müşteriden kazanabiliriz.)

Düzen marketler için de aynı şekilde hesaplamalar yapılır, elde edilen değerler tablodaki gibidir:

$r_3(0)=0$	$r_2(0)=0$	$r_1(0)=0$
$r_3(1)=2$	$r_2(1)=2$	$r_1(1)=2$
$r_3(2)=3,4$	$r_2(2)=3,25$	$r_1(2)=3,1$
$r_3(3)=4,35$	$r_2(3)=4,35$	$r_1(3)=4,2$

Tanımladığımız formüle göre market 3' yapacağımız atamalardan elde edeceğimiz beklenen getiriler şöyledir:

$$f_3(0) = \text{ençok}\{r_3(0)\} = 0$$

$$f_3(1) = \text{ençok}\{r_3(1)\} = 2$$

$$f_3(2) = \text{ençok}\{r_3(2)\} = 3,4$$

$$f_3(3) = \text{ençok}\{r_3(3)\} = 4,35$$

Hesaplamaları geriye doğru devam ettirelim:

$$f_2(0) = r_2(0) + f_3(0 - 0) = 0$$

$$f_2(1) = \text{ençok} \begin{cases} r_2(0) + f_3(1 - 0) = 0 + 2 = 2 \\ r_2(1) + f_3(1 - 1) = 2 + 0 = 2 \end{cases} *$$

$$f_2(2) = \text{ençok} \begin{cases} r_2(0) + f_3(2 - 0) = 0 + 3,4 = 3,4 \\ r_2(1) + f_3(2 - 1) = 2 + 2 = 4 \\ r_2(2) + f_3(2 - 2) = 3,25 + 0 = 3,25 \end{cases} *$$

$$f_2(3) = \text{ençok} \begin{cases} r_2(0) + f_3(3 - 0) = 0 + 4,35 = 4,35 \\ r_2(1) + f_3(3 - 1) = 2 + 3,4 = 5,4 * \\ r_2(2) + f_3(3 - 2) = 3,25 + 2 = 5,25 \\ r_2(3) + f_3(3 - 3) = 4,35 + 0 = 4,35 \end{cases}$$

$$f_2(4) = \text{ençok} \begin{cases} r_2(1) + f_3(4 - 1) = 2 + 4,35 = 6,35 \\ r_2(2) + f_3(4 - 2) = 3,25 + 3,4 = 6,65 * \\ r_2(3) + f_3(4 - 3) = 4,35 + 2 = 6,35 \end{cases}$$

$$f_2(5) = \text{ençok} \begin{cases} r_2(2) + f_3(5 - 2) = 3,25 + 4,35 = 7,6 \\ r_2(3) + f_3(5 - 3) = 4,35 + 3,4 = 7,75 * \end{cases}$$

$$f_2(6) = r_2(3) + f_3(6 - 3) = 4,35 + 4,35 = 8,70 *$$

$$f_1(6) = \text{ençok} \begin{cases} r_1(0) + f_2(6 - 0) = 0 + 8,70 = 8,70 \\ r_1(1) + f_2(6 - 1) = 2 + 7,75 = 9,75 * \\ r_1(2) + f_2(6 - 2) = 3,1 + 6,65 = 9,75 * \\ r_1(3) + f_2(6 - 3) = 4,2 + 5,4 = 9,6 \end{cases}$$

Görüldüğü gibi market 1'e 2 galon, market 2'ye 2 galon ve market 3'e 2 galon süt atadığımızda ayrıca; market 1'e 1 galon, market 2'ye 3 galon ve market 3'e 2 galon süt atadığımızda elde edeceğimiz beklenen gelir en çok 9,75 dolar olabilir.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Probabilistik dinamik programlama kavramı bir örnek üzerinde incelenmiştir.

BÖLÜM SORULARI

- 1) Stokastik ile deterministik kavramlarını tartışınız?
- 2) Dinamik programlama Doğrusal Model kavramından temelde nasıl bir farkı vardır?
- 3) Dinamik programlamada son durumdaki şartlar problemin çözümünü belirler. Neden? (ipucu: dönem sonunda elde kalan stok değerinin sıfır veya belirli bir adet kabul edilmesi)

KAYNAKÇA

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.