



# **YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI I**

**ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ LİSANS PROGRAMI**

**PROF. DR. HARUN REŞİT YAZGAN**

**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ**



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ**

**ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ LİSANS PROGRAMI**



# **YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI I**

**Prof. Dr. Harun Reşit Yazgan**

## **Yazar Notu**

Elinizdeki bu eser, İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakóltesi'nde okutulmak için hazırlanmış **bir ders notu niteliğindedir**.

## İÇİNDEKİLER

1. DOĞRUSAL PROGRAMLAMAYA GİRİŞ .....	1
1.1. Doğrusal Model Kavramı .....	4
1.2. İşletme Problemleri Ve Doğrusal Modeller .....	5
1.3 Karar Problemleri .....	5
2. DOĞRUSAL MODELLER (DEVAM) .....	14
2.1. Üretim Planlama Problemleri .....	17
2.2. Finans Problemleri.....	20
2.3. Karışım Problemleri .....	21
3. DOĞRUSAL MODELLERİN YAZILIM VE GRAFİK İLE ÇÖZÜMÜ .....	26
3.1. Lingo Yazılım Sonuçlarının Yorumlanması .....	29
3.2. İki Değişkenli Bir Modelin Grafik Metoduyla Çözümü (Winston, 2005).....	30
3.3. Çözümlerde Karşılaşılabilecek Özel Durumlar .....	32
4. SIMPLEKS ALGORİTMA İLE ÇÖZÜM .....	38
4.1. Simpleks Algoritması .....	41
4.2. En Az(Min) Problemin Simpleks Algoritmasıyla Çözümü .....	44
4.3. İki Seçenekli Doğrusal Bir Modelin Çözümü (Winston, 2005) .....	47
5. BÜYÜK M, İKİ AŞAMALI ÇÖZÜM METODLARI VE ÖZEL DURUMLAR .....	53
5.1. Büyük M Metodu.....	56
5.2. İki Aşamalı Yöntem .....	61
5.3. En İyi Çözümün Olmaması.....	66
5.4. Çözümün Sınırsız Olması .....	67
6. DUAL SIMPLEKS YÖNTEMİ .....	71
6.1. Dual Simpleks Yöntemi .....	74
6.2. Modele Yeni Kısıt Eklenmesi.....	75
6.3. En Az Problemin Çözülmesi .....	79
7. DUAL PROBLEM .....	84
7.1. Dual Problem .....	87
7.2. Dual Problemin Ekonomik Yorumu .....	89
7.3. Primal Ençok Problemlerinin Optimal Z Satırından Dual Çözümün Okunması .....	92
7.4. Primal Enaz Problemlerinin Optimal Z Satırından Dual Çözümün Okunması.....	93
8. DUYARLILIK ANALİZİ .....	97
8.1. Matrislerle İlgili Özet Hatırlatmalar .....	100

8.2. Duyarlılık Analizi .....	102
9. FARKLI DURUMLAR İÇİN DUYARLILIK ANALİZİ.....	110
9.1.Farklı Durumlar İçin Duyarlılık Analizi.....	113
10. LINGO YAZILIM SONUÇLARININ YORUMLANMASI.....	120
10.1 Modelin Lingo Yazılımı ile Elde Edilen Sonuçlarının Yorumlanması .....	123
11. ULAŞTIRMA MODELLERİ .....	130
11.1. Ulaştırma Probleminin Modellenmesi .....	133
11.2. Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi.....	137
12. ULAŞTIRMA MODELLERİ (DEVAM) .....	141
12.1 Vogel Yaklaşım Yöntemi: .....	143
12.2. Çözümün Optimum Olup Olmadığının Araştırılması .....	145
13. TAM SAYILI PROGRAMLAMA.....	153
13.1 Problemlerinin Tam Sayılı Programlama Olarak Modellenmesi .....	156
13.2. Karışık Tamsayı Model .....	159
14. ATAMA VE GEZGİN SATICI PROBLEMİ .....	164
14.1. Atama Problemi.....	167
14.2. Macar Algoritması İle Gezgin Satıcı Probleminin Çözümü .....	169
14.3. Gezgin Satıcı Probleminin Dal Sınır İle Çözümü.....	171
KAYNAKÇA .....	178

## **1. DOĞRUSAL PROGRAMLAMAYA GİRİŞ**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

- 1.1.** Doğrusal model kavramı
- 1.2.** İşletme problemleri ve doğrusal modeller
- 1.3.** Karar problemleri



## **Giriş**

İşletmelerin sahip kaynakları ( insan gücü, makine ve teçhizat, sermaye vb.) kullanarak belirli kararlar almak isterler. Örneğin en iyi üretim miktarı, en uygun insan gücü sayısı, en uygun makine ihtiyacı belirlenmesi beklenir. Bu sorulara cevap bulunacak pek çok teknik ve yöntemleri literatür de bulmamız mümkündür. Bu haftaki konumuzda, karar problemlerinin çözümünde yardımcı olacak doğrusal modellemeyi ve nasıl kurulabileceği farklı örneklerle gösterilmektedir. Sonrasında ise modellerin çözümleri konusunda hem klasik çözüm yöntemleri hem de bir yazılım desteği ile çözümün nasıl yapılacağı elde edilen sonuçların nasıl yorumlanacağı konuları üzerinden durulacaktır.

## 1.1. Doğrusal Model Kavramı

İşletmelerdeki problemlerin çözümlerine başlamadan önce matematik olarak denklemlerinin kurulması gerekmektedir. Modellerdeki bütün değişkenler birinci dereceden seçildiğinde, ortaya çıkan yapıya “doğrusal model” denilmektedir.

Aşağıda doğrusal bir modelin nasıl kurulacağı adım adım anlatılmıştır. Bir örnekle model kurmaya başlayalım:

Bir işletme, seramik tabak ve seramik vazo üretmektedir. Her iki ürün içinde aynı hammadde kullanılmaktadır. Ürünlerle ilgili bilgiler aşağıdaki Tablodaki gibidir.

	İşçilik (saat/birim)	Seramik Hammaddesi (birim)	Kar (TL/birim)
Tabak	1	4	40
Vazo	2	3	50

**Tablo 1:** Tabak ve vazo üretim için bilgiler

İşletme bu proje için toplam tahsis edebileceği işçilik 40 saat ve hammaddenin de 120 kg olduğunu düşünelim. Bu veriler ışığında bir doğrusal modelin kurulmasında “amaç fonksiyonu” ve “kısıtların” oluşturulması gerekmektedir.

Karar değişkenleri: Model kurmaya başlamadan önce modelde kullanılacak karar değişkenlerinin neler olduğuna karar verilmelidir. Bunu da tabak üretim miktarını göstermesi için  $x_1$ , vazo üretim miktarını göstermesi içinde  $x_2$  sembollerini kullanacağız.

Amaç Fonksiyonu: Firmanın amacı karını en çok yapmaktır. Firmanın her bir ürünün satışından elde edileceği karların toplamı karını en çok yapacaktır. Tabakların satışından 40 TL kazanılmakta, üretilecek tabak sayısında  $x_1$  diye ifade edersek,  $40x_1$  tabak satışından elde edilecek geliri gösterecektir. Aynı şekilde vazo satışında 50 TL kazanılmakta, üretilecek vazo miktarını da  $x_2$  ile ifade edersek,  $50x_2$  olacaktır. Firmanın toplam karını  $40x_1+50x_2$  olarak ifade ederiz.

Kısıtlar: Her iki ürünün üretilmesi için işçilik ve hammaddeye ihtiyaç duyulmaktadır. Tabak üretimi için 1 saatlik işçiliğe ihtiyaç vardır, bunu ise  $1x_1$  şeklinde yazılabilir. Vazo üretimi için ise aynı şekilde düşünüldüğünde  $2x_2$  şeklinde yazabiliriz.

Günlük işgücü kapasitesi 40 saat ile sınırlandığından dolayı

$$1x_1+2x_2 \leq 40 \text{ şeklinde yazılır.}$$

$\leq$  küçük veya eşit ifadesi yazılmasının sebebi 40 en çok kullanılabilir kapasite, daha az da kullanılabilirliğinden bu şekilde yazılmıştır.

“=” olarak yazılmış olsaydı, 40 saatlik kapasitenin mutlak suretle kullanılması düşünülecekti. Firma 40 saati eğer ihtiyaç olacak, amaç fonksiyonunun en çok yapmak için gerekecek ise, kullanılacaktır. Fakat diğer kısıtları da dikkate aldığımızda, bu kısıt tam olarak kullanılamayabilecek, bir miktar boş da kalabileceği için küçük eşit şeklinde daha gerçekçi bir ifade olacaktır.

Hammadde ihtiyacı da aynı şekilde düşünülerek ifade edilebilir. Tabak üretimi için 4 kg hammaddeye ihtiyaç duyulmakta, bu da  $4x_1$  şeklinde yazılacaktır. Vazo üretimi içinde 3kg ihtiyaç duyulmakta,  $3x_2$  olarak yazılabilir. Günlük 120 kg lık hammadde ile sınırlandırıldığına göre  $4x_1 + 3x_2 \leq 120$  kg olacaktır.

Doğrusal modelin özetlersek;

$$\begin{aligned} \text{Ençok } Z &= 40x_1 + 50x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 120 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu modelin çözümünde, karı en çok yapacak üretim miktarları bulunması gerecektir. Elde edilen üretim miktarları her iki kısıtı da sağlayacak, en doğru üretim değerleri olacaktır. Modelin çözümü daha sonraki kısımlarda anlatılacaktır. Şimdi işletmelerde karşılaştığımız farklı problem tiplerini daha yakından tanımaya çalışalım. Öncelikli olarak problemlere ait doğrusal modellerin nasıl kurulduğu konusu üzerindeki tecrübemizi artıralım.

## 1.2. İşletme Problemleri Ve Doğrusal Modeller

Aşağıda çok farklı amaç fonksiyonları ve kısıtları içeren problemler verilmekte ve bunların çözümü için gerekli doğrusal modeller verilmiştir. Bu kapsamda, karar, üretim planlama, finans ve karışım problemlerinden örnekler verilecektir.

## 1.3 Karar Problemleri

### Model 1:

ABC firması PVC ve ahşap pencere üretmektedir. Üretim üç ayrı imalathanede yapılmaktadır. Birinci imalathanede PVC pencere, ikincisinde ise ahşap pencereler üretilmektedir. Pencerelerin cam montajı ise ortak bir imalathanede takılmaktadır. Aşağıdaki tabloda üretimin gerçekleşmesi için gerekli teknik bilgiler verilmiştir. Firma elindeki kaynakları kullanarak karını en çok yapacak üretim politikasını nasıl belirlemelidir. Bu sorunun cevabını bulacak doğrusal modeli oluşturalım.

İmalathaneler	Ürün1 (saat)	Ürün2 (saat)	Kapasiteler (saat)
1-pvc üretimi	1	-----	4

<b>2-ahşap üretimi</b>	-----	2	12
<b>3- cam montajı</b>	3	2	18
<b>Birim kar</b>	3	5 (TL)	
	(TL)		

**Tablo 2:** Pencere üretim bilgileri

Model kurmaya öncelikli olarak karar değişkenlerimizi belirleyerek başlayalım,  $x_1$  değişkeni PVC üretim miktarını,  $x_2$  ise ahşap üretim miktarını gösterdiğini düşünelim. Bu problemde işletme üç farklı kaynağa sahiptir. 1. İmalathanede yalnızca pvc ürünü üretilmekte, ikincisinde ise yalnızca ahşap üretildiği için bu ürünler kaynakları yalnız kendileri kullanabilmektedir.  $x_1 \leq 4$  ifade sinde pvc üretimi 1 saat sürmekte ve bize planlamadan tahsis edilen kaynağın 4 saatini kullanabileceğimiz belirtilmiştir. İkinci ürün  $x_2$  ise, biri birimin üretiminde iki saat işçilik gerekmekte buda toplam işçilik dikkate alındığında,  $2x_2 \leq 12$  şeklinde yazılabilir. Cam bölümünde kullanılabilecek kaynak her iki ürün tarafından kullanılacağı için kaynak uygun şekilde tahsis edilmesi gerekebilecektir. Buda  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$  şeklinde yazılabilir. Modeli toplu yazmak istersek;

#### Doğrusal Model 1:

$$\text{Ençok } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \leq 4$$

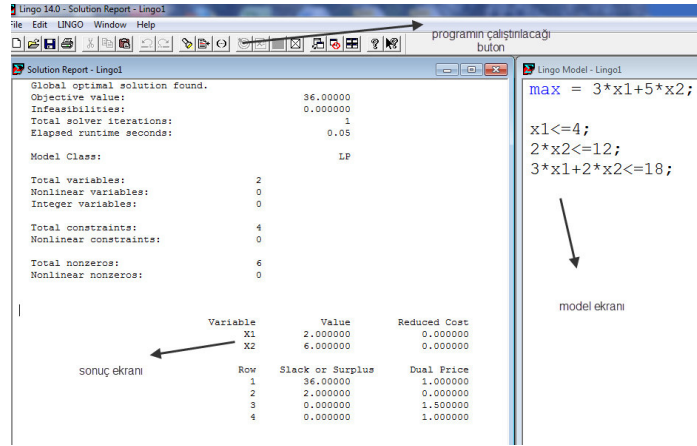
$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kurduğumuz modellerin sonuçları ile ilgili yorumlar yapabilmek için çözümlerine ihtiyaç duymaktayız. Klasik olarak çözümler dersimizin daha sonraki haftasında geniş bir şekilde anlatılacağı için, şimdilik yazılım desteği ile çözümleri elde edeceğiz. Doğrusal modellerin çözümü için pek çok yazılım desteği bulmamız mümkündür. Bunların bir kısmı ücretli, bir kısmı da sınırlı sayıdaki değişken ve kısıtlar çözmeye elverişli ücretsiz yazılımlar vardır. Notlarda, öğrenme kolaylığı açısından lindo.com firması tarafından geliştirilmiş, Lingo yazılım kullanılacaktır. Yazılımın ücretsiz versiyonu [www.lindo.com](http://www.lindo.com) adresinde indirilebilir.

Program bilgisayara kurulduktan sonra, demo versiyonunu çalıştırabiliriz. Açılan ekrana solda görüldüğü gibi amaç fonksiyonunu ve kısıtları yazarız. Bu işlem tamamlandıktan sonra, ekranın üst kısmında beliren “kırmızı” renkli “hedef tahtası” sembolüne benzeyen buton seçildiğinde, modelin çözümü ekranda görülecektir.



Şekil 1: Lingo sonuç ekranı

Bu sonuca x1 ürünümüzden yani PVC den 2 birim, x2 ürünümüz yani ahşaptan 6 adet üretir ise, karımız 36 TL olacaktır.

**Model 2:** Bir firma hammadde ve işçilik kullanarak dört ayrı ürün üretmektedir. Gerekli bilgiler tabloda verilmiştir. Hâlihazırda 4600 birim hammadde ve 5000 işçilik saat mevcuttur. Toplam müşteri talebi 950 adet olacaktır. Müşteriler ürün 4 den en az 400 adet olmasını talep etmektedir. Firmanın karını en çok yapmak için doğrusal modeli oluşturalım

Kaynaklar	Ürünler			
	1	2	3	4
Hammadde (birim)	2	3	4	7
İşçilik Saati (saat)	3	4	5	6
Satış Fiyatı (TL)	4	6	7	8

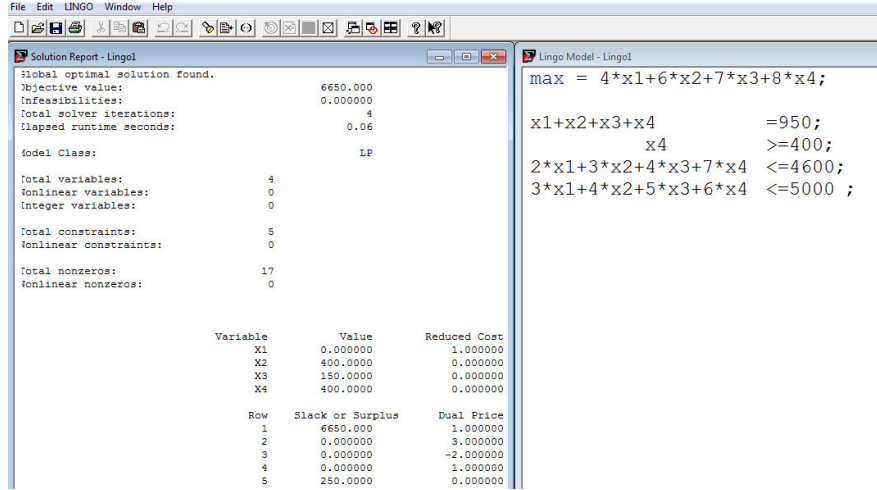
Tablo 3. Ürünlerle ilgili bilgiler

Bu problem de öncelikli olarak karar değişkenleri belirlenmiştir. Karar değişkenlerimiz, ürünlerimiz olarak belirleyebiliriz. Kuracağımız modelin sonucunda amacımız hangi üründen kaç adet üteceğimizi bulmak olmalıdır. Bu ürünlerin satışından elde diledik kar ise ürünün satış fiyatları ile üretilecek miktarların tanımlandığı amaç fonksiyonu olacaktır. Üretimde iki önemli kaynaktan birisi işçilik kaynağı, diğeri ise hammadde kaynaklarıdır. İşçilik kaynağı yazılırken kaynağın tamamı kısıt denklemin sağ tarafına yazılması gerekecektir, çünkü bu kaynak kullanılacaktır. Denklemin sol tarafına ise her bir ürünün bir adetinin üretilmesi için gereken bir süre vardır, tabloda bu değerler verilmiştir. Önek olarak 1. Ürün için 2 birim hammadde kullanılmakta 2. Ürün içinde 3 birim hammadde kullanmamız gerekecektir. Diğerleri de buna benzer şekilde yorumlanabilir. İşçilik kısıt da ise, bir adet 1. Ürün için 3 saatlik zamanımızı kullanmaktayız, 1 adet 2.ürün içinde 4 saat lik zamanımızı kullanıyoruz. Bunlardan başka üretim kaynak kısıtı olmayan ama taleple alakalı bir başka kısıtımız daha vardır. Bu da pazarlama bölümünden gelmiş 4. Ürünün en az 400 olması istenmektedir.

Yukarıda verilen problemin doğrusal model olarak ifade aşağıda verilmiştir.

## Doğrusal Model 2:

$$\begin{aligned} \text{Ençok } Z &= 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 950 \\ x_4 &\geq 400 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\leq 4600 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 5000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$



Şekil 2: Modelin sonucu

Elde edilen çözüm incelendiğinde, birinci üründen üretilmemesi ( $x_1=0$ ), ikinci üründen ( $x_2$ ) 400 adet, üçüncü ( $x_3$ ) üründen 150 adet ve dördüncü ( $x_4$ ) üründen de adet üretilmesi en uygun olacaktır. Bu miktarlar aynı zamanda kısıtların tamamını sağlamaktadır. Toplam elde edilecek kar, 6650 TL olacaktır.

## Model 3:

Bir otomobil firması dört farklı fabrikada otomobil üretmektedir. Her bir fabrikada üretim maliyetleri aşağıdaki tablodaki gibidir. 3. Fabrikada, en az 400 otomobil üretilmeli, 4 fabrikada ise toplam 3300 saat işçilik ve toplam 4000 birim hammadde mevcuttur. Firmanın 1000 aracı en az maliyetle hangi fabrikalarda üretmelidir?

Fabrika	Maliyet (TL)	İşçilik (saat)	Hammadde (birim)
1	15	2	3
2	10	3	4

3	9	4	5
4	7	5	6

**Tablo 4:** Fabrikalar ile ilgili bilgiler

Bu problemde işçilik ve hamda de kaynakları kullanılarak bir ürün dört farklı fabrikada üretilmektedir. Fabrikaların bulundukları yerler ve sahip oldukları teknolojilerinden dolayı ürünün maliyetleri her fabrikada farklı olmaktadır. Burada amaç toplam ihtiyaç duyulan 1000 adetlik talebin en az maliyetle üretilmesidir. Bu sebep den dolayı problemiz en az problemi şeklinde modellenmesi gerekmektedir. Yukarı da verilen değerler dikkate alınarak problemin modeli aşağıdaki şekilde kurulabilir.

Doğrusal Model 3:

$$\begin{aligned}
 \text{enaz}Z &= 15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1000 \\
 x_3 &\geq 400 \\
 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\leq 3300 \\
 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 4000 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Solution Report - Lingo1			Lingo Model - Lingo1		
Global optimal solution found.			min = 15*x1+10*x2+9*x3+7*x4;		
Objective value:	10100.00		x1+x2+x3+x4 =1000;		
Infeasibilities:	0.000000		x3 >=400;		
Total solver iterations:	3		2*x1+3*x2+4*x3+5*x4 <=3300;		
Elapsed runtime seconds:	0.05		3*x1+4*x2+5*x3+6*x4 <=5000 ;		
Model Class:					
LP					
Total variables:	4				
Nonlinear variables:	0				
Integer variables:	0				
Total constraints:	5				
Nonlinear constraints:	0				
Total nonzeros:	17				
Nonlinear nonzeros:	0				
Variable	Value	Reduced Cost			
X1	100.0000	0.000000			
X2	500.0000	0.000000			
X3	500.0000	0.000000			
X4	0.000000	7.000000			
Row	Slack or Surplus	Dual Price			
1	10100.00	-1.000000			
2	0.000000	-25.00000			
3	0.000000	-4.000000			
4	0.000000	5.000000			
5	700.0000	0.000000			

**Şekil 3:** Modelin sonucu

Bu modeli çözmek için amaç fonksiyonu en küçük problemi olduğu için “min” şeklinde ifade edilmiştir. Diğer kısımların yazılımında farklılık yoktur.

Model 4: Bir firma iki farklı ürün imal etmektedir. Her hafta imalat için 1300 birim hammadde sipariş edilmektedir. Firma da imalat için 15 işçi, her bir işçi haftada 40 saat olmak üzere toplam 600 saat çalışmaları planlanmıştır. İşçiler fazla mesaiye kaldıklarında 4 para birimi/saat fazla para almaktadırlar. İmalatta kullanılan tezgâhların haftalık çalışma süreleri 900 saat ile sınırlıdır. Ürünlerin satışında reklam yapılmadığı durumda; birinci üründen 55 birim,

ikinciden 60 birim haftalık talepleri olmaktadır. Talepleri artırmak için reklam yapılmak istendiğinde, reklama bir para birimi harcama yapıldığında, birinci ürünün talebini 10 birim, ikinci ürünün talebini ise 15 birim artırmaktadır. Reklam için harcanacak bütçe ise 100 para birimi olarak düşünürsek model nasıl kurulabilir?

	ürün1	ürün2	Kapasite
Satış fiyatı	9	8	
İşçilik	0.6	0.5	600
Tezgah satı	0.7	0.8	900
Hammadde	2	1	1300

**Tablo 5:** Ürünler ile ilgili bilgiler

Doğrusal Model 4:

$$\begin{aligned}
 EnçokZ &= 9x_1 + 8x_2 - 4fm - r_1 - r_2 \\
 x_1 - 10r_1 &\leq 55 \\
 x_2 - 10r_2 &\leq 60 \\
 0.6x_1 + 0.5x_2 &\leq 600 + fm \\
 2x_1 + x_2 &\leq 1300 \\
 0.7x_1 + 0.8x_2 &\leq 900 \\
 r_1 + r_2 &\leq 100 \\
 x_1, x_2, fm, r_1, r_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen model incelendiğinde amaç fonksiyonun bir kar fonksiyonu olduğu, bunun da satışlardan oluşabilecek maliyetler çıkartıldıktan sonra elde edildiğini görmekteyiz. Fazla mesai yapılacak ise bu satışlardan çıkartılması gerekecektir. Bunlara ilave olarak reklam yapılacak ise, reklam maliyetlerinin de fazla mesai gibi satıl değerlerinden çıkartılarak net kar değerlerine ulaşabilecek şekilde ifade edilmelidir. Kısıtlarda görülen 600 +fm ise, 600 saat üzerine fazla mesai yapılacak ise, bu değer + olarak eklenmektedir.

Modelin Lingo yazılımında ifadesi ve sonuç ekranı aşağıda verilmiştir.



Solution Report - Lingo			
optimal solution found.			
obj value:	9239.130		
obj value:	0.000000		
iterations:	4		
runtime seconds:	0.05		
status:	LP		
variables:	5		
nonzero variables:	0		
constraints:	7		
nonzero constraints:	0		
nonzeros:	18		
nonzero nonzeros:	0		
Variable	Value	Reduced Cost	
X1	155.5556	0.000000	
X2	988.8889	0.000000	
FM	0.000000	4.000000	
R1	10.05556	0.000000	
R2	61.92593	0.000000	
Row	Slack or Surplus	Dual Price	
1	9239.130	1.000000	
2	0.000000	0.1000000	
3	0.000000	0.666667E-01	
4	12.22222	0.000000	
5	0.000000	1.740741	
6	0.000000	7.740741	
7	28.01852	0.000000	

```

Lingo Model - Lingo
max = 9*x1+8*x2-4*fm-r1-r2;

x1-10*r1          <=55;
x2-15*r2          <=60;
0.6*x1+0.5*x2-fm <=600;
2*x1+x2           <=1300;
0.7*x1+0.8*x2     <=900;
r1+r2             <=100;

```

Şekil 4: Modelin sonucu

## **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde, doğrusal model kavramı ve nasıl kurulması gerektiği üzerinde duruldu. Ayrıca belirli tip problemlerin doğrusal modellerinin nasıl kurulacağı konusunda örnekler verildi.

## Bölüm Soruları

- 1) Bir model de kaynakların tamamının kullanılmadığı durumlar olabilir mi? bir örnek üzerinde nasıl gösterebilirsiniz?
- 2) En az problemde kısıtların tamamı  $\leq$  olur ise, çözüm konusunda ne söylenebilir?
- 3) Bir modeldeki amaç fonksiyonunda her zaman karı en çok olan öncelikli olarak üretilir mi?
- 4) Aşağıdaki model doğrusal mıdır?  
$$\text{ençok } Z = 2x_1 + 3x_2$$

Kısıtlar

$$3x_1 + 5x_2 \leq 100$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 150$$
- 5) Aşağıdaki model doğrusal mıdır?  
$$\text{ençok } Z = 5x_1 * x_2$$

Kısıtlar

$$3x_1 + 10x_2 \leq 100$$
$$x_1 \leq 150$$

## **2. DOĞRUSAL MODELLER (DEVAM)**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

2.1. Üretim Planlama Problemleri

2.2. Finans Problemleri

2.3. Karışım Problemleri

## **Giriş**

Geçen haftaki işletme problemlerinin modellenmesine başlamıştık. Bu hafta, doğrusal modellemede model kurmaya devam edilecek; üretim planlama, karışım ve finans problemlerinden örnekler verilecektir.

## 2.1. Üretim Planlama Problemleri

**Model 5:** Bir video üretim şirketi, gelecek 5 ay için bir üretim planını yapmak istemektedir. Şirketin önceki yıllardaki üretim verilerine göre, şirket ayda 2000 adet video üretimi yapabilmektedir. Şirket fazla mesai yaptığında ilave olarak ayda 600 ürün daha üretilmektedir. Ürünün bir birimin normal mesai ile üretim maliyeti 10 TL, fazla mesai ile 15 TL olduğu bilinmektedir. Şirketin yapmış olduğu talep anlaşması aşağıdaki tablodaki gibidir. Ürünün bir ayda şirketin deposunda beklemesiyle (stok) maliyeti oluşmakta bu da ürün başına 2 TL olmaktadır. Yönetim, planlama dönemi sonunda depoda ürünlerden elde kalmasını istememektedir. Şirketin envanter politikasını oluşturacak, toplam üretim ve elde tutma (stok) maliyetlerini en az yapacak, aylık üretim ve stok değerlerini bulmak için nasıl bir model oluşturulmalıdır?

Aylar	Satış miktarı (adet)
1	1200
2	2100
3	2400
4	3000
5	4000

**Tablo 6:** Talepler

### Doğrusal Model 5:

$$\text{enaz}Z = 10(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 15(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$$

$$x_i \leq 2000 \quad i = 1 \dots 5$$

$$y_i \leq 600 \quad i = 1 \dots 5$$

$$x_1 + y_1 - w_1 = 1200$$

$$x_2 + y_2 + w_1 - w_2 = 2100$$

$$x_3 + y_3 + w_2 - w_3 = 2400$$

$$x_4 + y_4 + w_3 - w_4 = 3000$$

$$x_5 + y_5 + w_4 = 4000$$

$$x_i, y_i, w_i \geq 0 \quad i = 1 \dots 5$$

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2000.000	0.000000
X2	2000.000	0.000000
X3	2000.000	0.000000
X4	2000.000	0.000000
X5	2000.000	0.000000
Y1	300.0000	0.000000
Y2	600.0000	0.000000
Y3	600.0000	0.000000
Y4	600.0000	0.000000
Y5	600.0000	0.000000
W1	1100.000	0.000000
W2	1600.000	0.000000
W3	1800.000	0.000000
W4	1400.000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	152300.0	-1.000000
2	0.000000	-15.00000
3	0.000000	-17.00000
4	0.000000	-19.00000
5	0.000000	-21.00000
6	0.000000	-23.00000
7	0.000000	5.000000
8	0.000000	7.000000
9	0.000000	9.000000
10	0.000000	11.00000
11	0.000000	13.00000
12	300.0000	0.000000
13	0.000000	2.000000
14	0.000000	4.000000
15	0.000000	6.000000
16	0.000000	8.000000

Min = 10*x1+10*x2+10*x3+10*x4+10*x5+ 15*y1+15*y2+15*y3+15*y4+15*y5+ 2*w1+2*w2+2*w3+2*w4;	
x1+y1-w1	=1200;
x2+y2+w1-w2	=2100;
x3+y3+w2-w3	=2400;
x4+y4+w3-w4	=3000;
x5+y5+w4	=4000;
x1	<=2000;
x2	<=2000;
x3	<=2000;
x4	<=2000;
x5	<=2000;
y1	<=600;
y2	<=600;
y3	<=600;
y4	<=600;
y5	<=600;

Şekil 5: Modelin sonucu

Dönemler	Talepler	Normal Üretim	Fazla Mesai ile Üretim	Devreden Stok
1	1200	2000	300	1100
2	21000	2000	600	1600
3	24000	2000	600	1800
4	3000	2000	600	1400
5	4000	2000	600	0

Tablo 7: Talepler, Normal Üretim, Fazla Mesai Üretimi ve Stoklar

Problemde 2,3,4 ve 5. aylardaki talepler normal üretim ile karşılanamayacağı görülmektedir. Her ayda 600 adetlik fazla mesai yapıldığında ise, 4. ve 5. Ayların talepleri hala karşılanamamaktadır. Önceki aylardan kalan kapasite stokta tutularak sonraki ayların ihtiyaçları karşılanabilecektir. Yukarıdaki sonuçlar her ayda her ayda normal üretim ile 2000, birinci ay 300 adetlik fazla mesai ile ve diğer Aylarda da 600 adetlik fazla mesai ile üretim yapıldığı takdirde, bütün taleplerin karşılanabileceği görülmektedir.



**Model 6:** Bir ABC firması su kayağı imalatı yapmaktadır. Kayak için gerekli olan motoru XYZ firmasından almaktadır. ABC firmasının dört aylık kesin talepleri tablodaki gibidir. XYZ firmasının ocak, şubat ve mart aylarında atıl kullanamadığı kapasitesi vardır. Bu atıl kapasite daha sonraki ayların ihtiyacı karşılanmak için kullanılabilir. Bu durumda stokta bekletmenin bir maliyeti olacaktır. Motorun stokta bir aylık bekleme maliyeti 50 TL/motor olmaktadır. XYZ firması fazla mesai yaptığında en çok 20 motor daha ilave edebilmekte bundan dolayı da normal üretim maliyetinden farklı olarak 400 TL/motor ek maliyeti ortaya çıkmaktadır. XYZ firmasının maliyetini en aza indirecek model nasıl olmalıdır ?(ocak, şubat ve mart aylarında fazla mesai yapılamamaktadır.)

XYZ Firması			ABC Firması
Aylar	Kapasite	Fazla Mesai (adet)	Talep
Ocak	30		
Şubat	30		
Mart	30		
Nisan	40	20	60
Mayıs	60	20	85
Haziran	90	20	100
Temmuz	50	20	120

**Tablo 8:** Talepler ve Kapasiteler

**Doğrusal Model 6:**

$$enazZ = 150x_{14} + 100x_{24} + 50x_{34} + 0x_{44} + 200x_{15} + 150x_{25} + 100x_{35} + 50x_{45} + 0x_{55} + 50x_{56} + 250x_{16} + 200x_{26} + 150x_{36} + 0x_{66} + 50x_{67} + 300x_{17} + 250x_{27} + 200x_{37} + 0x_{77} + 400y_4 + 400y_5 + 400y_6 + 400y_7$$

$$\begin{aligned} x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 60 + x_{45} \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + y_5 &= 85 + x_{56} \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{56} + x_{66} + y_6 &= 100 + x_{67} \\ x_{17} + x_{27} + x_{37} + x_{67} + x_{77} + y_7 &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} &\leq 30 \\ x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} &\leq 30 \\ x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} &\leq 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{44} &\leq 40 \\ x_{55} &\leq 60 \\ x_{66} &\leq 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{77} &\leq 50 \\
y_4 &\leq 20 \\
y_5 &\leq 20 \\
y_6 &\leq 20 \\
y &\leq 20
\end{aligned}$$

**Model 7:** Bir şirket bilgisayar tamiri konusunda hizmet vermektedir. Gelecek beş ay için yapacağı tamir zamanı, toplamda aşağıdaki tablodaki gibidir. Tablodaki verilerden de görüldüğü gibi, işgücü ihtiyacı aylara göre değişkenlik göstermektedir. Fazla işgücü ihtiyacı elemanların yetiştirilmesini gerekli kılmaktadır. Firmada ocak ayının başında yetişmiş 50 teknisyen çalışmaktadır. Bir teknisyen ayda 160 saate kadar çalışabilmektedir. Diğer ayların taleplerini karşılamak için de yeni teknisyenler yetiştirecek, bunun süresi de bir ayı almaktadır. Eğitim esnasında usta teknisyen yeni teknisyene 50 saat nezaret etmek durumundadır. Usta teknisyenlere ayda 2000 TL (ayda 160 saati doldurmasalar da) verilmektedir. Yeni teknisyenlere eğitimleri boyunca 1000 TL ödenmektedir. Her ayın sonunda ise usta teknisyenlerden % 5 i işi bırakmaktadır. Şirketin gelecek beş aydaki talebini karşılayacak işçi politikasını belirleyen doğrusal modeli oluşturunuz.

Aylar	İşgücü (saat)
Ocak	6000
Şubat	7000
Mart	8000
Nisan	9500
Mayıs	11000

**Tablo 9:** İşgücü Talepleri

**Doğrusal Model 7:**

en az toplam maliyet Z

$$\begin{aligned}
&= 1000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 + 1000x_5 \\
&+ 2000y_1 + 2000y_2 + 2000y_3 + 2000y_4 + 2000y_5 \\
&y_1 = 50
\end{aligned}$$

$$0.95y_1 + x_1 = y_2$$

$$0.95y_2 + x_2 = y_3$$

$$0.95y_3 + x_3 = y_4$$

$$0.95y_4 + x_4 = y_5$$

$$160y_1 - 50x_1 \geq 6000$$

$$160y_2 - 50x_2 \geq 7000$$

$$160y_3 - 50x_3 \geq 8000$$

$$160y_4 - 50x_4 \geq 9500$$

$$160y_5 - 50x_5 \geq 11000$$

## 2.2. Finans Problemleri

**Model 8:** ABC Petrol Şirketi kendi ilgi alanlarıyla ilgili 5 farklı yatırım yapmak istemektedir. Yatırım dönemleri için yatırım maliyetleri ve kazançlar (net şimdiki değerler cinsinden) aşağıdaki Tablo 10’da verilmiştir. Şirketin 1. yatırım döneminde kullanabilir 40 000 TL’si bulunmaktadır. Yatırım dönemi 2 için ise 20 000 TL kullanabilir nakit vardır. Şirket her bir yatırımdan istediği oranda satın alabilir. Şirket kazancını maksimum etmek istemektedir. Yatırımcı karını en büyük yapmak için o yatırımlara hangi oranda katılacağına karar vermek istiyor. Bu amacı gerçekleştirecek doğrusal modeli kuralım

Dönem	Yatırımlar (TL)				
	1	2	3	4	5
1	11	3	5	5	29
2	3	6	5	1	34
Net Şimdiki Değer	13	16	16	14	39

**Tablo 10:** Yatırım seçenekleri ve Net Şimdiki Değerleri

**Doğrusal Model 8:**

$$\begin{aligned}
 11x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 &\leq 40 \\
 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 &\leq 20 \\
 x_1 &\leq 1 \\
 x_2 &\leq 1 \\
 x_3 &\leq 1 \\
 x_4 &\leq 1 \\
 x_5 &\leq 1
 \end{aligned}$$

### 2.3. Karışım Problemleri

**Model 9:** Bir petrol şirketi üç çeşit benzin üretmektedir. Bu benzinler üç farklı hammadde karışımından elde edilmektedir. Hammaddelerin toplam günlük miktarları ve varil başına maliyetleri tabloda verilmiştir. Şirket karını en çok yapmak için nasıl bir üretim politikası uygulamalıdır?

Hammadde	En çok varil (günlük)	Maliyet/varil
1	4500	12
2	2700	10
3	3500	14

**Tablo 11:** Hammadde ve günlük ihtiyaçlar

Benzin	Karışımın Özellikleri	Satış Fiyatı/varil (TL)
<b>Süper</b>	1'den enaz %50 2'den en çok % 30	23
<b>Kurşunsuz</b>	1'den enaz %40 3'den en çok %25	20
<b>Normal</b>	1'den enaz %60 2'den en az %10	18

**Tablo 12:** Benzinin karışım özellikleri

Şirket her benzinden günlük en az 3000 varil üretmek istemektedir. Şirket hedefine ulaşmak için uygulayacağı politikanın bulunmasını sağlayacak doğrusal modeli kurunuz!

### Doğrusal Model:

$$\begin{aligned}
 \text{Süper Benzin} &= x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} \\
 \text{Kurşunsuz Benzin} &= x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} \\
 \text{Normal Benzin} &= x_{1n} + x_{2n} + x_{3n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ençokZ} &= 23(x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}) + 20(x_{1k} + x_{2k} + x_{3k}) + 18(x_{1n} + x_{2n} + x_{3n}) \\
 &\quad - 12(x_{1s} + x_{1k} + x_{1n}) - 10(x_{2s} + x_{2k} + x_{2n}) - 14(x_{3s} + x_{3k} + x_{3n})
 \end{aligned}$$

$$\text{ençokZ} = 11x_{1s} + 13x_{2s} + 9x_{3s} + 8x_{1k} + 10x_{2k} + 6x_{3k} + 6x_{1n} + 8x_{2n} + 4x_{3n}$$

$$x_{1s} + x_{1k} + x_{1n} \leq 4500$$

$$x_{2s} + x_{2k} + x_{2n} \leq 2700$$

$$x_{3s} + x_{3k} + x_{3n} \leq 3500$$

$$x_{1s} + x_{2s} + x_{3s} \geq 3000$$

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} \geq 3000$$

$$x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} \geq 3000$$

### Süper benzin için:

Bileşen 1'den en az % 50

$$\frac{x_{1s}}{x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}} \geq 0.50$$

Bileşen 2'den en çok % 30

$$\frac{x_{2s}}{x_{1s} + x_{2s} + x_{3s}} \leq 0.30$$

### Kurşunsuz benzin için:

Bileşen 1'den en az % 40

$$\frac{x_{1k}}{x_{1k} + x_{2k} + x_{3k}} \geq 0.40$$

Bileşen 3'den en çok % 25

$$\frac{x_{3k}}{x_{1k} + x_{2k} + x_{3k}} \leq 0.25$$

**Normal benzin için:**

Bileşen 1'den en az % 60

$$\frac{x_{1n}}{x_{1n} + x_{2n} + x_{3n}} \geq 0.60$$

Bileşen 2'den en az % 10

$$\frac{x_{2n}}{x_{1n} + x_{2n} + x_{3n}} \geq 0.10$$

**Model 10:** Bir tavuk çiftliğinde tavuk yetiştirilmesi planlanmaktadır. Tavukların yetişkin olabilmesi için belirli özelliklere sahip gıdaları yemeleri gerekmektedir. Bu maksatla üç yiyecek seçilmiştir (kireç taşı, mısır, soya fasulyesi ). Bu yiyeceklerden ise; kalsiyum, protein ve fiber ihtiyacı karşılanacaktır. Yiyecekler ve içerikleri aşağıdaki Tablo 13'de verilmiştir.

Tavukların beslenmesinde;

- Kalsiyum miktarı en az % 0,8 ve en çok %1,2
- Protein en az % 22
- Fiber en çok % 5 oranlarına uyulması gerekmektedir

Yiyecekler ve özellikleri (kg)				
Yiyecekler	Kalsiyum	Protein	Fiber	Maliyeti /kg
Kireç taşı	0.38	-----	-----	0.04
Mısır	0.009	0.09	0.22	0.25
Soya fasulyesi	0.002	0.35	0.05	0.50

**Tablo 13:** Yiyecekler ve Özellikleri

**Doğrusal Model:**

$$\begin{aligned} \text{enazZ} &= 0.04x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 \\ 0.38x_1 + 0.009x_2 + 0.002x_3 &\geq 0.008 \\ 0.38x_1 + 0.009x_2 + 0.002x_3 &\leq 0.012 \\ 0.09x_2 + 0.35x_3 &\geq 0.25 \\ 0.22x_2 + 0.05x_3 &\leq 0.05 \end{aligned}$$

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde doğrusal model örneklerine devam edildi. Özellikle üretim planlama, finans ve karışım problemlerinden örnekler verildi.

## ÇALIŞMA SORULARI

- 1) Model 5 ile Model 6 arasındaki nasıl bir mantık farklılığı vardır ?
- 2) Model 5 göre talep en fazla ne kadar daha artabilir
- 3) Model 8 de eğer  $x$  değişkenlerinin değeri 0 ile 1 arasında çıkar ise sonucu nasıl yorumlayabiliriz
- 4) Model 9, süper benzin üretiminde 2. Hammadde ile ilgili sınırlama getirilmemesini nasıl yorumlarsınız?
- 5) Model 10 verilerini dikkate alarak, 1000 kg lık bir yem hazırlamak istesek, yem içine katılacak hammaddelerin miktarı ne olur ?

### **3. DOĞRUSAL MODELLERİN YAZILIM VE GRAFİK İLE ÇÖZÜMÜ**



## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

- 3.1. Lingo Yazılım Sonuçlarının Yorumlanması
- 3.2. İki Değişkenli Bir Modelin Grafik Metodu ile Çözümü
- 3. 3. Çözümlerde Karşılaşılabilecek Özel Durumlar

## **Giriş**

Bu haftaki çalışmada, Lingo yazılımı kullanılarak elde edilen sonuçların yorumları tekrar edilecektir. Kurulların modellerin çözümünün anlaşılması için kullandığımız grafik çözüm metodu örnek olarak verilecektir.

### 3.1. Lingo Yazılım Sonuçlarının Yorumlanması

Aşağıda verilen model Lingo programı ile çözüldü ve elde edilen sonuçlar tabloda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \max &= 60 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3; \\ 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + x_3 &\leq 48; \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1.5 \cdot x_3 &\leq 20; \\ 2 \cdot x_1 + 1.5 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_3 &\leq 8; \\ x_2 &\leq 5; \end{aligned}$$

Şekil 6: Doğrusal Model

Yukarıda verilen modelin çözümünde öncelikle, sonuç ekranı elde edilir.

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	5.000000
X3	8.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	280.0000	1.000000
2	24.00000	0.000000
3	0.000000	10.00000
4	0.000000	10.00000
5	5.000000	0.000000

Şekil 7: Modelin sonucu

Duyarlılık analizi sonuçlarını elde etmek için, Lingo yazılımında, üst ten bulunan “LINGO” butonu tıklanır, oradan “options” seçilir. Çıkan menüden “General Solver” seçilir, buradan çıkan menüden de, alt kısımda çıkan “dual computations” seçenekleri arasından “prices&ranges” seçeneği işaretlenir. Sonrasında ise, ana ekrandan Lingo seçeneği altından “Ranges” seçildiğinde, aşağıdaki ekran elde edilir.

Objective Coefficient Ranges:		
Variable	Current Coefficient	Allowable Increase
X1	60.00000	20.00000
X2	30.00000	5.000000
X3	20.00000	2.500000

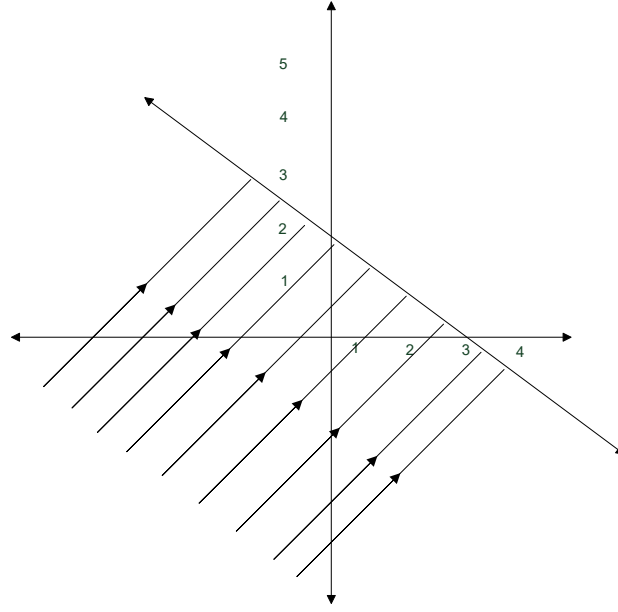
Righthand Side Ranges:		
Row	Current RHS	Allowable Increase
2	48.00000	INFINITY
3	20.00000	4.000000
4	8.000000	2.000000
5	5.000000	INFINITY

Şekil 8: Lingo yazılımı ile elde edilen duyarlılık sonuçları

### 3.2. İki Değişkenli Bir Modelin Grafik Metoduyla Çözümü (Winston, 2005)

Kurulan modellerin çözümü için değişik metotlar geliştirilmiştir. Gelecek haftaki çalışmada bu metotlardan birisi olan simpleks metot anlatılacaktır. Modellerin çözümlerindeki mantığın daha iyi anlaşılması için, grafik ile çözümlerinde incelenmesinin faydalı olacağını düşünüyoruz. Bu sebeple, öncelikli olarak denklemlerin yani kısıtların nasıl çizileceği üzerinde duralım.

İki değişkenli  $2x_1 + 3x_2 \leq 6$  denklemini grafik yöntemiyle çözeceğiz.  $x_2$ 'yi yalnız bıraktığımızda  $x_2 \leq \frac{(6-2x_1)}{3}$  olacaktır.  $x_2 \leq \frac{(6-2x_1)}{3}$  denkleminde  $x_1$  değişkeninin 0 olduğu yerde  $x_2 = 2$ ,  $x_2$  değişkeninin 0 olduğu yerde ise  $x_1 = 3$  olur. Grafiği aşağıdaki gibidir.



**Şekil 9:** Denklemlerin grafik olarak gösterimi

Taralı alan  $2x_1 + 3x_2 \leq 6$  eşitsizliğini göstermektedir.

Şimdi de aşağıda verilen iki değişkenli bir modeli, grafik metodu kullanarak çözelim.

$$\text{ençok} Z = 3x_1 + 2x_2$$

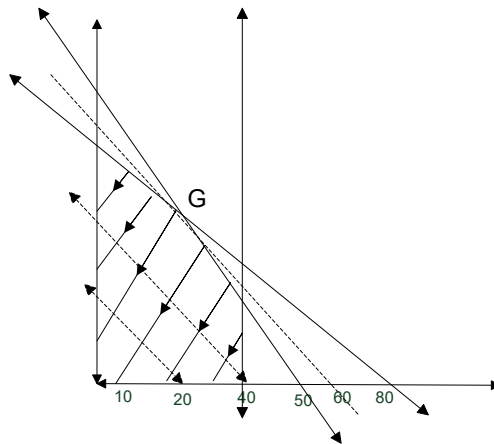
$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Yukarıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir. Aşağıdaki grafikte de olurlu bölge taralı alandır.



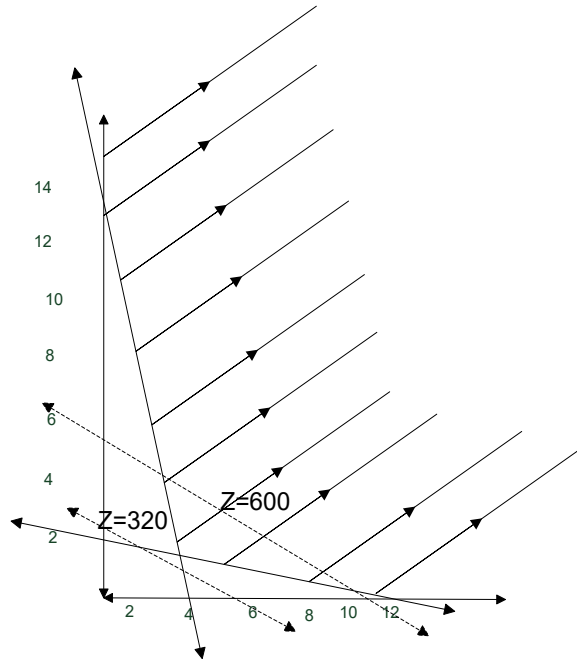
**Şekil 10:** Denklemlerin grafik olarak gösterimi

Olurlu bölgeyi belirledikten sonra en iyi çözüm için araştırma yapılabilir. En iyi çözüm; olurlu bölgedeki en fazla z değerini veren noktadır. En iyi çözümü bulmak için z değerleri aynı olan doğru çizilir. Bu problem için en iyi çözüm G noktası yani  $z=180$  ve  $(x_1, x_2) = (20, 60)$  şeklindedir.

Bir başka model ise

$$\begin{aligned} \text{en az } Z &= 50x_1 + 100x_2 \\ 7x_1 + 2x_2 &\geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 &\geq 24 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Verildiğini düşünelim. Yukarıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir. Aşağıdaki grafikte de olurlu bölge taralı alandır.



**Şekil 11:** Denklemlerin grafik olarak gösterimi

Amaç maliyeti minimize etmek olduğu için sorunun en iyi çözümü olurlu bölgede en az z değerini veren noktadır.

En az z değerli eş maliyet doğrusu  $x_1 = 3,6$   $x_2 = 1,4$  noktasından geçmektedir.  $Z=320$  dir.

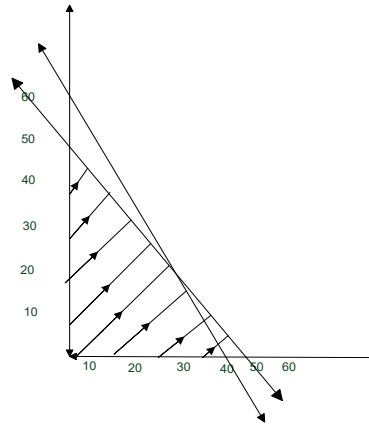
### 3.3. Çözümlerde Karşılaşılabilecek Özel Durumlar

Şimdi de, modellerin çözümünde karşılaşılabileceğimiz dört farklı özel durumu inceleyelim.

### 1) Alternatif En İyi Çözümler

$$\begin{aligned} \text{ençok} Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 &\leq 1 \\ \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir. Aşağıdaki grafikte de olurlu bölge taralı alandır.

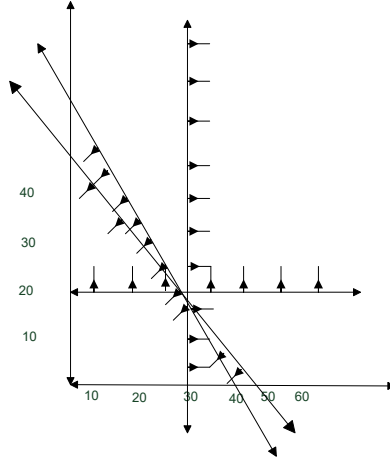


**Şekil 12:** Alternatif (Birden fazla) Çözüm

Burada iki tane optimal çözüm vardır. (40,0) noktası ve iki kısıtın kesiştiği nokta (20,30) iki en iyi çözüm noktası bulunmaktadır. Her iki çözüm noktasında da, amaç fonksiyonu 120 değerini alacaktır.

### 2) Olursuz Çözüm

$$\begin{aligned} \text{ençok} Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 &\leq 1 \\ \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 30 \\ x_2 &\geq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



**Şekil 13:** Ortak çözüm alanı yok

Grafiğe baktığımızda tüm kısıtları birlikte sağlayan bölge olmadığı için çözüm yoktur.

### 3)Sınırsız Çözüm

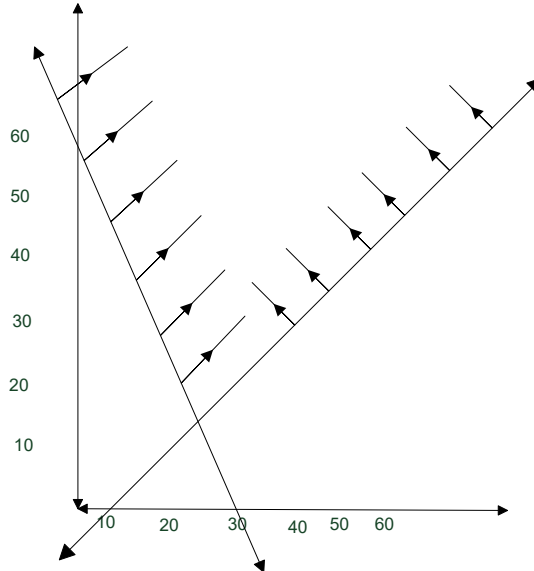
$$\text{ençok} Z = 2x_1 - x_2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Yukarıdaki kısıtları sağlayan noktalar kümesi olurlu bölgedir. Aşağıdaki grafikte de olurlu bölge taralı alandır.



**Şekil 14:** Değişkenler sınırlandırılmamış

Bu problemin uygun çözüm alanı üstten sınırlandırılmamıştır. Bundan dolayı bu modelinde çözümü yoktur.





### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde lingo yazılımı kullanılarak bir doğrusal modelin nasıl çözüleceğini öğrendik. Buna ilave olarak grafik metot ile iki boyut doğrusal modellerin nasıl çözüleceği üzerinde de durulmuştur.

## Bölüm Soruları

- 1) Bir üretim probleminin çözümünde, ürünlerden birisini üretilmesinin karlı olmadığı sonucu çıkmış olsa, değişik sebeplerden dolayı bu ürünü üretmek zorunda kalsak, her bir ürün adeti için kar'dan yapacağımız fedakarlığı Lingo sonuçlarından nasıl buluruz.
- 2) Lingo sonuçlarından, bir kısıtın duyarlılık alanı dışına çıkacak kadar artırılrsa, modelin çözümü hakkında ne söylenebilir.
- 3) Lingo sonuçlarında “infeasible”, “unbounded” sonuçlarının anlamları neler olabilir ?
- 4) Grafik olarak gösterilen modellerin çözümlerini Lingo yazılımında çözerseniz hangi sonuçlarla karşılaşabilirsiniz?
- 5) Lingo yazılımında “infeasible” bir çözüm bulun, sonrasında model üzerinde değişiklikler yaparak, çözülebilir hale getirin, elde ettiğiniz deneyimi gerçek bir problem üzerinde denemek isterseniz, gerçek problemde neleri değiştirerek bir çözüme ulaşılabilir.

#### **4. SIMPLEKS ALGORİTMA İLE ÇÖZÜM**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

- 4.1 Simpleks algoritması
- 4.2. En az(min) problemin simpleks algoritmasıyla çözümü
- 4.3. İki seçenekli doğrusal bir modelin çözümü

## **Giriş**

Bu haftaki çalışmada, doğrusal modellerin çözümünde kullandığımız simpleks algoritmasının adımları incelenecektir. Algoritma adımları enaz (min) ve ençok (max) problem örnekleri ile adım adım gösterilecektir.

#### 4.1. Simpleks Algoritması

Simpleks algoritması, doğrusal modellerin çözümü için geliştirilmiştir. Modelin çözümü için takip edilmesi gereken adımlar aşağıda özetlenmiştir. Daha sonrada örnekler üzerinde gösterilecektir.

##### 1- Standart başlangıç tablosunun oluşturulması:

Çözölmek istenen model, standart hale dönüştürölür. Sonrasında ise standart başlangıç tablosunun oluşturulması gerekmektedir. Standart başlangıç tablosu; değışkenlerin, teknolojik kısıtların ve sağ taraf değışkenlerinin toplu olarak yazılmasıdır.

Modeldeki her kısıta yeni değışkenler eklenerek eşitlik haline dönüştürölür.

$\leq$  şeklinde ise “s” (slack= boş)değışken eklenir.

$\geq$  şeklinde ise “-e” (excess=fazla) değışken ve a (artificial=yapay)

= şeklinde ise “a” (artificial=yapay) değışken eklenir.

Doğrusal Model	Standart Forma Dönüştürme
enaz/ençok= $ax_1+bx_2+cx_3$	enaz / ençok= $ax_1+bx_2+cx_3$
$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \leq b_1$	$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 + s_1 = b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \geq b_2$	$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 -e_2+ a_2 = b_2$
$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 = b_3$	$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 + a_3 = b_3$

**Tablo 14:** Standart hale dönüştürme

Kısıtların tamamı eşitlik haline dönüştüröldükten sonra, sıra bunların tabloya belirli bir düzen içinde yerleştirilmesi gerekmektedir. Modelin değışkenleri, yeni eklenen değışkenler, sağ taraf değeri (kısıt miktarları) ve teknoloji katsayılar aşağıdaki Tablo 14 gösterildiğı düzen içinde yerleştirilir. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, tabloda mutlaka birim matrisin oluşması gerekmektedir. Yeni eklenen değışkenler ile çözüme başlanacak dolayısıyla bunlar birim matrisi oluşturacaktır (eklenen “-e” hariç, “-e” ile birim matris oluşturulmaz) Tablo 15.

	Değişkenler		Sağ Taraf
Zi-cj	Değişkenlerin Katsayıları		Amaç fonksiyonunun Değeri
Çözüme Girenler	Teknolojik Katsayılar	Birim Matris	Kaynaklar

**Tablo 15:** Simpleks Tablo değişkenlerinin gösterimi

Standart hale dönüştürülmüş bir model temel alınarak simpleks başlangıç tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur Tablo 16 (zj-cj satırı, modeldeki amaç fonksiyonunun değerleri “-“ ile çarpılarak yerleştirilir).

	x1	x2	x3	e2	s1	a2	a3	sağ taraf
<b>zj-cj</b>	-a	-b	-c	0	0	M	M	0
<b>s1</b>	a11	a12	a13	0	1	0	0	b1
<b>a2</b>	a21	a22	a23	-1	0	1	0	b2
<b>a3</b>	a31	a32	a33	0	0	0	1	b3

**Tablo 16:** Başlangıç Tablosunun Oluşturulması

## 2- Çözüme giren değişkenin bulunması:

zj-cj satırında değerler arasından,

Amaç fonksiyonu **ençok (max) problemde negatif olan en küçük değer (mutlak değerce en büyük)**, amaç fonksiyonu **enaz(min) ise pozitif** değerler arasından **en büyük** olan **çözüme giren değişken** olarak belirlenir.

## 3- Çözümünden çıkacak değişkenin bulunması:



Sağ taraf değerleri, çözüme girecek değişkenin bulunduğu sütundaki değerlere bölünür, bölünen değerler arasından “sonsuz”, “0” ve “negatif” değerler dışında kalan **en küçük pozitif** değer in bulunduğu satırdaki değişken çözümden **çıkacak değişken** olarak belirlenir.

#### 4- Pivot eleman:

Çözüme girecek değişkenin bulunduğu sütun ile çözümden çıkacak değişkenin bulunduğu satırın kesiştiği yerdeki değerdir.

#### 5- Çözüm tablolarının bulunması:

Başlangıç tablosundan başlayarak daha sonraki adımda oluşacak tabloyu bulmak için, öncelikli olarak, pivot satırındaki değerler, pivot elemana bölünür ve elde edilen değerler yeni tablodaki pivot satırına yerleştirilir. Diğer satırlar ise, çözüme girecek değişkeni birim matrisinin elemanı yapacak şekilde, pivot satır değerleri belirli katsayı değerleri ile çarpılarak elde edilen değerler ile diğer satır değeri toplanır, elde edilen değerler yeni tabloda uygun satıra yazılır.

#### 6- En iyi çözümün bulunup/bulunmadığının test edilmesi:

Yeni elde edilen tablodaki  $z_j - c_j$  satırındaki değişkenlerin değerleri kontrol edilir.

**Eğer amaç fonksiyonu ençok (max) ise,  $z_j - c_j$  satırındaki değerlerin tamamının sıfır ya da pozitif olması durumunda,**

**Eğer amaç fonksiyonu enküçük(min) ise,  $z_j - c_j$  satırındaki değerlerin tamamının sıfır ya da negatif olması durumunda, en iyi çözüme (optimum) ulaşılmıştır. Aksi durumlarda yukarıda bahsedilen adımlar tekrar edilir.**

#### 4.2. En Az(Min) Problemin Simpleks Algoritmasıyla Çözümü

$$\text{enaz}Z = 2x_1 - 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Öncelikli olarak standart başlangıç tablosunu oluşturalım. Kısıtlar aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir.

$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6 \quad \rightarrow \quad x_1 - x_2 + s_2 = 6$$

amaç fonksiyonu ise (-) ile çarpılarak

$$z = -2x_1 + 3x_2 \quad \text{olarak seçilir}$$

Yeni formlar aşağıdaki Tablo 17 de olduğu gibi yazılır.

	x1	x2	s1	s2	sağ taraf	çözüm	oran
zj-cj	-2	3	0	0	B	Z	
s1	1	1	1	0	4	s1=4	4/1*
s2	1	-1	0	1	6	s2=6	6/-1

**Tablo 17:** Modelin Başlangıç Tablosu

Amaç fonksiyonu **en küçük olduğu** için zj-cj satırındaki değişkenlerin arasından pozitif olan en büyük değer “3”, böylece x2 çözüme girecek değişken olarak seçilir.

Çözümünden çıkacak değişkeni bulmak için de; oran testi yapılır. Sağ taraf değerleri, x2 sütunu altındaki sayılara bölünür.

$$\text{Oran 1: } 4/1 = 4$$

$$\text{Oran 2: } 6/-1 = -6$$

Şeklinde bulunur. Bu oranlar arasından “sonsuz”, “sıfır” ve “negatif olmayan”, en küçük pozitif sayının bulunduğu satırdaki değişken, çözümden çıkacak değişken olarak belirlenir. Böylece “s1” değişkeni çözümden çıkacak değişken olarak belirlenir.

Pivot eleman ise, çözüme girecek “x2” sütunu ile çözümden çıkacak “s1” satırının kesiştiği hücredeki değer, yani “1” değeridir.

Yeni tablo değerlerini bulmak için ise, öncelikli olarak pivot satırında bulunan sayılar, pivot elemana bölünerek, elde edilen değerler Tablo 4.5’deki pivot satırına yerleştirilir.

1/1                      1/1      1/1      0/1      4/1

Çözüme giren değişken birim matrisin bir elemanı olacağından dolayı, x2 birim matris olacak şekilde satırlar arasında aritmetik işlemlere devam edilir, yeni tablodaki zj-cj satırı elemanlarını bulmak için Tablo 17’deki pivot satırı (-3) ile çarpılır ve Tablo 17’deki zj-cj satırı elemanları ile toplanır.

Zj-cj satırı Tablo 17:	-2	3	0	0	0
Pivot satırı Tablo 17:	-3(1	1	1	0	4)
<b>Toplam (zj-cj) + pivot satırı</b>	<b>-5</b>	<b>0</b>	<b>-3</b>	<b>0</b>	<b>-12</b>

Şeklinde bulunur, Tablo 18’nin zj-cj satırına yerleştirilir.

S2 nin bulunduğu diğer satır elemanları ise,

S2 satırı Tablo 17:	1	-1	0	1	6
Pivot satırı Tablo 17:	1	1	1	0	4

**Toplam (s2 satırı ve pivot**

**satırı) 2 0 1 1 10**

Şeklinde bulunur ve Tablo 17 de s2 satırına yerleştirilir. İşlemlerden sonra yeni Tablo 18 aşağıdaki şekilde oluşacaktır.

	x1	x2	s1	s2	sağ taraf
zj-cj	-5	0	-3	0	-12
x2	1	1	1	0	4
s2	2	0	1	1	10

**Tablo 18:** Bir adım sonraki sonuçlar

Simpleks algoritma ile birinci adım sonuçları tamamlanmış ve sıra bulunan çözümün en iyi çözüm (optimum) olup/olmadığının test edilmesine gelmiştir. Test için, zj-cj satır değerlerine bakılır. Amaç fonksiyonu enaz (min) olduğu için, optimum sonuca ulaşmak için; zj-cj değerlerinin tamamının sıfır veya negatif olması gerekecektir. Tablo 18 deki zj-cj satırının elamanları arasında pozitif değer olmadığı için en iyi çözüme ulaşıldığı ve sonucun, enaz değer  $Z=-12$ ,  $x_1=0$ ,  $x_2=4$  olmuştur.

Modelin çözümünde Tablo da görüldüğü gibi

Çözüme giren  $x_2=4$  ve  $s_2=10$

Çözüme girmeyen  $x_1=0$ ,  $s_1=0$

Ve amaç fonksiyonunun değeri de  $z=-12$  olarak bulunur.

Eğer, ilk satırda bütün çözümde olan değişkenlerin katsayısı negatif (veya sıfır) ise, optimal sonuç bulunmuştur. Eğer pozitif değer var ise, en büyük pozitif değer seçilir ve çözüme devam edilir.

#### 4.3. İki Seçenekli Doğrusal Bir Modelin Çözümü (Winston, 2005)

$$\text{ençok } Z = 60x_1 + 35x_2 + 20x_3$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

Problemin standart hale dönüştürülmesi için

amaç fonksiyonunun katsayıları (-) ile çarpılır ve kısıtlar ise aşağıdaki şekilde yazılarak tabloya yerleştirilirler.

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = 8$$

$$x_2 + s_4 = 5$$

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	sağ taraf	oran testi
zj-cj	-60	-35	-20	0	0	0	0	0	
s1	8	6	1	1	0	0	0	48	48/8=6
s2	4	2	1.5	0	1	0	0	20	20/4=5
s3	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	8/2=4
s4	0	1	0	0	0	0	1	5	5/0=s

**Tablo 19:** Standart Başlangıç Tablosu

zj-cj satırına bakılarak, çözüme girecek değişken bulunur. Tablo 19 dan en küçük negatif değere sahip olan  $x_1$  değişkeni çözüme girecek değişken olarak seçilir.

Çözümünden çıkacak değişkeni bulmak için ise, sağ taraf değerleri  $x_1$  sütunundaki değerlere bölünerek oranlar bulunur. Oranlar arasından en küçük pozitif değer,  $s_3$  satırında çıkmaktadır. Bu sebepten dolayı, çözümünden çıkacak değişken olarak  $s_3$  belirlenir.

Pivot eleman ise,  $x_1$  ve  $s_3$ 'ün kesiştiği yerdeki 2 değeridir. Yeni tablo değerlerinin bulunması için, öncelikli olarak pivot satır elemanları, pivot elemana bölünür ve elde edilen değerler yeni tabloda pivot satırın bulunduğu satıra yerleştirilir.

$s_3$	$2/2$	$1.5/2$	$0.5/2$	$0/2$	$0/2$	$1/2$	$0/2$	$8/2$
-------	-------	---------	---------	-------	-------	-------	-------	-------

$z_j - c_j$  satırı elemanları ise,  $x_1$  değerini sıfır yapacak şekilde,  $s_3$  satırı (+30) ile çarpılır ve mevcut  $z_j - c_j$  satırı ile toplanır. Elde edilen değerler yeni tabloda  $z_j - c_j$  satırına yazılır.

$z_j - c_j$	-60	-35	-20	0	0	0	0	0	$Z=0$
-------------	-----	-----	-----	---	---	---	---	---	-------

+

30*(	$s_3$	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	$s_3=8$	)
------	-------	---	-----	-----	---	---	---	---	---	---------	---

=

$z_j - c_j$	0	10	-5	0	0	30	0	240	$Z=240$
-------------	---	----	----	---	---	----	---	-----	---------

Tablodaki diğer satırlar da aynı yol takip edilerek, Tablo 20 deki değerlere ulaşılır.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	sağ taraf	oran testi
$z_j - c_j$	0	10	-5	0	0	30	0	240	
$s_1$	0	0	-1	1	0	-4	0	16	-
$s_2$	0	-1	0.5	0	1	-2	0	4	$4/0.5=8$
$s_3$	1	0.75	0.25	0	0	0.5	0	4	$4/0.25=16$
$s_4$	0	1	0	0	0	0	1	5	$5/0=s$

**Tablo 20:** Birinci Adım sonrası çözüm değerleri

Yeni tablo değerleri bulunduktan sonra, en iyi çözüme optimum olup/ olmadığına bakılması gerekmektedir.  $z_j - c_j$  satırına bakılır. Optimum sonuca ulaşmak için, amaç fonksiyonu en çok olduğundan,  $z_j - c_j$  satırındaki tüm değerler sıfır ya da pozitif olmalıdır.  $x_3$  değeri negatif olduğundan, bulunan çözüm optimum değildir.  $z_j - c_j$  satırında -5 değerine sahip  $x_3$  değişkeni

çözümüne girecek değişken olarak belirlenir. Oran testleri ile bulunan en küçük pozitif değer olduğu  $s_2$  değişkeni olduğu için,  $s_2$  değişkeni çözümünden çıkacak değişken olacaktır. Pivot eleman,  $s_2$  ve  $x_3$ 'ün kesişme noktasındaki 0.5 sayısıdır. Bir önceki işlemler tekrar yapıldığında Tablo 21 deki değerlere ulaşılır.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	sağ taraf
$z_j - c_j$	0	0	0	0	10	10	0	280
$s_1$	0	-2	0	1	2	-8	0	24
$x_3$	0	-2	1	0	2	-4	0	8
$x_1$	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2
$s_4$	0	1	0	0	0	0	1	5

**Tablo 21:** İkinci adım sonrası çözüm değerleri (1. Çözüm)

Yukarıdaki tabloda  $z_j - c_j$  satırında negatif değer kalmadığından dolayı en iyi (optimum) çözüme ulaşılmıştır.

Fakat  $z_j - c_j$  satırında çözüme girmediği halde sanki girmiş gibi  $x_2$  değişkeninin değeri de 0 (sıfır) olmuştur. Bundan dolayı amaç fonksiyonu değeri aynı yani 280 olan bir başka çözümün varlığından bahsedilebilir.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	sağ taraf	oran testi
$z_j - c_j$	0	0	0	0	10	10	0	280	
$s_1$	0	-2	0	1	2	-8	0	24	$24/-2 = -12$
$x_3$	0	-2	1	0	2	-4	0	8	$8/-2 = -4$
$x_1$	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2	$2/1.25 = 1.6$
$s_4$	0	1	0	0	0	0	1	5	$5/1 = 5$

**Tablo 22:** Birinci çözüm sonrası yeni çözüm arama

Farklı çözümü bulmak için,  $x_2$  değişkeni çözüme girecek değişken olarak belirlenir ve oran testi yapılır ve çözümden çıkacak değişken belirlenir ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra Tablo 23 değerlere ulaşılır.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	sağ taraf
$z_j - c_j$	0	0	0	0	10	10	0	<b>280</b>
$s_1$	1.6	0	0	1	1.2	-5.6	0	27.2
$x_3$	1.6	0	1	0	1.2	-1.6	0	11.2
$x_2$	0.8	1	0	0	-0.4	1.2	0	1.6
$s_4$	-0.8	0	0	0	0.4	-1.2	1	3.4

**Tablo 23:** Yeni çözüm değerleri (2. Çözüm)

Yeni çözümün amaç fonksiyonu değeri olan ile bir önceki çözümün değeri aynı yani **280** olmuştur. Fakat değişkenlerin değerleri her çözümden farklı değerlerde olmuştur. Çözüm değerleri aşağıda özetlenmiştir.

Çözüm 1:  $x_1=2$        $x_2=0$        $x_3=8$        $s_1=24$        $s_4=5$        **$z=280$**

Çözüm 2:  $x_1=0$        $x_2=1.6$        $x_3=11.2$        $s_1=27.2$        $s_4=3.4$        **$z=280$**



## **Bu Bölümde Neler Öğrendik**

Bu bölümde doğrusal modellerin çözümünde kullandığımız simpleks algoritmasının adımları anlatılmış ve örnek bir model üzerinde detayları öğrenilmiştir.

## **Bölüm Soruları**

- 1) Bir model simpleks algoritması ile çözülmek istendiğinde, başlangıç tablosunda birim matrisi neden oluşturmak zorundayız?
- 2) Başlangıç matrisinde çözüme girecek eleman seçilemiyor ise ne yapılabilir?
- 3) Pivot eleman neden “-“ olmamalıdır?
- 4) Çözüme giren bir değişken daha sonraki adımlarda çözümden çıkabilir mi?
- 5) Optimum çözümde çözüme giren bir değişkenin değeri negatif olabilir mi? olur ise çözüm konusunda ne söylenebilir?

## **5. BÜYÜK M, İKİ AŞAMALI ÇÖZÜM METODLARI VE ÖZEL DURUMLAR**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

- 5.1 Büyük M metodu
- 5.2 İki Aşamalı yöntem
- 5.3. En iyi çözümün olmaması
- 5.4. Çözümün sınırsız olması

## **Giriş**

Bu haftaki çalışmada, kısıtlarda büyük eşit ve/veya eşitlik kısıtlarının olduğu durumlarda modelin optimum çözümünü bulmak için “büyük M” ve “iki aşamalı” yöntem üzerinde durulacaktır.

### 5.1. Büyük M Metodu

Bundan önceki verdiğimiz örneklerde, kısıtların işaretleri küçük eşit “ $\leq$ ” şeklindeydi. Eğer kısıtlar eşitlik “ $=$ ” ve/veya büyük eşit “ $\geq$ ” şeklinde ise, kısıtların standart hale dönüştürülmesi farklı olacaktır.

Örnek olarak;

$$3x_1 + 4x_2 \geq 10$$

olduğunda, bunun standart halde yazılması ise

$$3x_1 + 4x_2 - e = 10$$

şeklinde olur.

Denklemini eşit hale getirmek için fazla olan kısmın çıkarılması uygun olur. Bu sebeple bu fazlalık “e” (excess, fazlalık) değişkeni ile gösterilmiştir. Başlangıç matrisinde birim matrisin mutlaka oluşması gerektiği daha önceki haftalarda ifade etmiştik. “e” değişkenin katsayısı “negatif” olduğu için, birim matrisini oluşturamayacaktır. Bundan dolayı katsayısı pozitif olan yeni bir değişkenin eklenmesine ihtiyaç duyulacaktır. Bunun için ise, fiziksel olarak bir anlam ifade etmeyen, yalnızca birim matris oluşturmak için kullanılacak yeni “a” (artificial, yapay) değişkeninin kısıta eklenmesi gerekecektir.

Kısıt ise, yapay değişken de eklendikten sonra,

$$3x_1 + 4x_2 - e + a = 10 \text{ şekline gelecektir.}$$

Eğer kısıt  $3x_1 + 4x_2 = 10$  şeklinde olmuş olsaydı, yine aynı şekilde tabloda birim matris oluşturmak için “a” değişkeni eklenmesi gerekirdi.

Eğer kısıtlarımızın sağ tarafında da negatif olan değerler var ise, bunların da standart hale getirilmesi gerekecektir. Böyle bir durumda, kısıt’ın her iki tarafı -1 ile çarpılarak, sağ taraf pozitif hale getirilir.

Örnek olarak,  $3x_1 + 4x_2 \leq -10$  olsaydı,

-1 ile çarpılarak

$$-3x_1 - 4x_2 \geq 10$$

şekline dönüştürülür, sonrasında “-e” ve “a” eklenir.

İlave edilen “a” değişkeni gerçekte herhangi bir fiziksel anlamı olmamasına rağmen, yalnızca çözüme başlamak için geliştirdiğimiz yapay değişkenler olduğundan, katsayılarını M (çok büyük bir sayı) olarak kabul ederiz. Bundan dolayı bu metot **büyük M** metodu olarak isimlendirilmektedir.

Yeni değişkenlerin eklenmesi ile amaç fonksiyonumuz da değişmiş olacaktır. Amaç fonksiyonuna yeni yapay değişkenlerin eklenmesi durumunda bunların katsayılarını önemli hale gelecektir. Çözüme eklenen “a” ile başlanacak, fakat “a” larında çözümden çıkarılması gerekecektir. “a” ların çözümden çıkması için bir dizi işlem yapılması gerekmektedir. Amaç fonksiyonu;

en çok ise yapay değişkenlerin katsayısını  $-Ma$

en az ise yapay değişkenin katsayısını  $Ma$  şeklinde yazmak gerekecektir.

Şimdi bir örnek ile büyük M metodunun nasıl kullanıldığını görelim.

$$\text{enaz } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

modeli standart halde yazmak istersek,

$$\text{enaz } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - e_2 = 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

başlangıç tablosunda birim matris oluşturmak için de, ikinci ve üçüncü kısıtlara yapay değişkenler eklenecektir.

$$\begin{aligned} \text{enaz} Z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 + a_3 &= 10 \end{aligned}$$

Model standart hale dönüştürüldükten sonra, amaç fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

Modelimiz en az olduğu için yapay olarak eklenen değişkenlerin katsayıları pozitif olarak belirlenir ve amaç fonksiyonu

$$\text{enaz} Z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3 \quad \text{şekline gelir.}$$

Standart tabloya amaç fonksiyonunun değerlerini yerleştirdiğimizde

$$\text{zj-cj satırı} \quad -2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3$$

şeklinde olur.

	x1	x2	s1	e2	a2	a3	sağ taraf
zj-cj	<b>-2</b>	<b>-3</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-M</b>	<b>-M</b>	
s1	1/2	1/4	1	0	0	0	4
a2	1	3	0	-1	1	0	20
a3	1	1	0	0	0	1	10

**Tablo 24:** Başlangıç tablosu

Simpleks adımlara başlanabilmesi için, zj-cj satırındaki yapay değişkenlerin yok edilmesi gerekecektir. Bunun için de, 2. ve 3. satır değerlerinden faydalanılır.

İkinci ve üçüncü satır kısıtları M ile çarpılır ve zj-cj satırı ile toplanır.



$$z_j-c_j \text{ satırı} \quad :-2x_1-3x_2-Ma_2-Ma_3 \quad =0$$

$$M \text{ (satır2)} \quad : Mx_1+3Mx_2-Me_2+Ma_2 \quad =20M$$

$$M \text{ (satır3)} \quad : Mx_1+Mx_2+Ma_3 \quad =10M$$

$$\text{Yeni } z_j-c_j \text{ satırı} : (2M-2)x_1+(4M-3)x_2-Me_2 \quad =30M$$

	x1	x2	s1	e2	a2	a3	sağ taraf
zj-cj	(2M-2)	(4M-3)	0	-M	0	0	
s1	1/2	1/4	1	0	0	0	4
a2	1	3	0	-1	1	0	20
a3	1	1	0	0	0	1	10

**Tablo 25:** Yapay değişkenlerinin katsayıları sıfır yapıldı

Çözümüne giren değişkeni bulmak için zj-cj satırındaki pozitif en büyük değer bulunur, bu da

$x_2$  katsayısı,  $x_1$  den daha büyük ( $4M-3 > 2M-2$ ) olduğundan dolayı,  $x_2$  çözüm giren değişken olarak seçilir.

Çözümünden çıkacak değişken de; sağ taraf değişkenleri  $x_2$  sütununda ki değerlere bölünerek, aralarında en küçük değere karşılık gelen değişkene göre seçilir.

Oranlar :

$$s1 \quad 4/(1/4) =16$$

$$a2 \quad 20/3 \quad =6.67$$

$$a3 \quad 10/1 \quad =10$$

Oranlar arasından en küçük değer  $a_2$  nin bulunduğu satırda çıkmaktadır,  $a_2$  çözümünden çıkacak değişkendir.

	x1	x2	s1	e2	a2	a3	sağ taraf
zj-cj	(2M-2)	(4M-3)	0	-M	0	0	
s1	1/2	1/4	1	0	0	0	4
a2	1	3	0	-1	1	0	20
a3	1	1	0	0	0	1	10

**Tablo 26:** Çözüme giren ve çözümden çıkan değişkenler

zj-cj satırının yeni değerlerini bulmak ve bu satırdaki  $x_2$  nin değerini sıfır yapmak için

$-(4M-3)/3$  ile a2 satırı elemanları çarpılır ve zj-cj satırı elemanları ile toplanır.

Yeni zj-cj satırı :  $((2M-3)/3)x_1 + ((M-3)/3)e_2 + ((3-4M)/3)a_2 = (60+10M)/3$

şeklinde elde edilir.  $x_2$  sütunundaki diğer değerlerin 0 olması için de, a2 satırı uygun sayılarla çarpılıp diğer satırlara eklenerek aşağıdaki tabloya ulaşılır.

zj-cj satırı kontrol edildiğinde en iyi çözüme ulaşılmadığı görülmektedir. Bu satırdaki pozitif en büyük değer  $x_1$  değişkenin çözüme gireceğini göstermektedir. Çözümünden çıkacak değişkeni bulmak içinde, sağ taraf değişkenleri  $x_1$  sütunundaki değişkenlere bölündüğünde

	x1	x2	s1	e2	a2	a3	sağ taraf	oran
zj-cj	(2M-3)/3	0	0	(M-3)/3	(3-4M)/3	0	(60+10M)/3	
s1	5/12	0	1	1/12	-1/12	0	7/3	28/5
x2	1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	20
a3	2/3	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	5

**Tablo 27:**  $x_2$  değişkeni çözüme girdikten sonraki değerler

Zj-cj satırındaki en yüksek değer  $x_1$ 'e ait olduğundan,  $x_1$  değişkeninin çözüme gireceğini anlarız. Çözümünden çıkacak değişkeni bulmak için de, sağ taraf değişkenleri  $x_1$  sütunundaki değişkenlere bölünür.

$$\begin{array}{l} s_1 = (7/3) / (5/12) = 28/5 \\ x_2 = (20/3) / (1/3) = 20 \\ a_3 = (10/3) / (2/3) = 5 \end{array}$$

En küçük orana sahip olan  $a_3$  değişkeni çözümünden çıkacaktır. Pivot eleman da  $2/3$  olarak bulunur.

$a_1$  değişkeninin amaç zj-cj satırındaki değerini sıfır yapmak için  $a_3$  satırı  $(2M-3)/2$  çarpılarak zj-cj satırı ile toplanacaktır.

Yeni zj-cj satırı :  $-e_2/2 + ((1-2M)/2)a_2 + (3-2M)/2a_3 = 25$

Tablonun diğer satır değerleri de  $x_1$  sütununun değerlerinin sıfır olması için  $a_3$  satırı uygun değerler ile çarpılıp satır değerleri ile toplanarak tablo değerleri bulunur. Yeni sonuçlar aşağıdaki tablodaki gibi olacaktır.

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$e_2$	$a_2$	$a_3$	sağ taraf
<b>zj-cj</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1/2</b>	<b>(1-2M)/2</b>	<b>(3-2M)/2</b>	<b>25</b>
<b>s1</b>	0	0	1	-1/8	1/8	-5/8	1/4
<b>x2</b>	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	5
<b>x1</b>	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5

**Tablo 28:**  $x_1$  çözüme girdi

Tablo 5.5 deki zj-cj satırı incelendiğinde, pozitif değer kalmadığı görülmektedir, bu sebepten dolayı, en iyi sonuç değerlerine ulaşılmıştır.

Çözümde amaç fonksiyonu : 25  $x_1=5$  ve  $x_2=5$  olarak bulunur.

## 5.2. İki Aşamalı Yöntem

İki aşamalı yöntemde, M sabitini tümüyle ortadan kaldırarak sonuca ulaşmaya dayanmaktadır. Adından da anlaşılacağı üzere bu yöntemde doğrusal programlama problemi iki aşamada

çözülmektedir. Birinci aşamada bir başlangıç uygun temel çözümü bulmaya çalışılır. Böyle bir çözüm bulunması halinde orijinal problemi çözmek üzere ikinci aşamaya geçilir.

1. Aşama: Problem standart hale getirilir ve kısıtlar için gerekli olan yapay değişkenler M yönteminde olduğu gibi modele dahil edilerek bir başlangıç uygun temel çözümü elde edilir. Daha sonra yapay değişkenlerin toplamını minimum kılacak şekilde, eşitliklerle ilgili bir temel çözüm bulunur. Toplamların minimizasyonu pozitifse, doğrusal programlama probleminin uygun çözümü yok demektir. Bu durumda çözüm işlemi sona erer. (Pozitif bir yapay değişkene karşılık gelen kısıtın sağlanamadığı anımsanmalıdır.) Aksi halde ikinci aşamaya geçilir.
2. Aşama: Birinci fazdan sonra son simpleks tablonun z satırından, yapay değişkenler atılarak, amaç fonksiyonunun özgün katsayıları yerleştirilir ve birinci fazın temel çözümü, ikinci faz için başlangıç temel çözümünü oluşturur. Daha sonra en iyi çözüm bulunana kadar simpleks algoritmadaki işlemler yapılmaktadır.

### Örnek

$$\begin{aligned} \text{enaz } Z &= 4x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

#### 1. Aşama Çözümü:

#### Standart Form:

$$\begin{aligned} \text{enaz } a &= a_1 + a_2 \\ 3x_1 + x_2 + a_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + s_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, a_1, a_2, s_3, e_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

temel	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	e <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	çözüm
a	0	0	0	-1	-1	0	0
a <sub>1</sub>	3	1	0	1	0	0	3
a <sub>2</sub>	4	3	-1	0	1	0	6

s <sub>3</sub>	1	2	0	0	0	1	4
----------------	---	---	---	---	---	---	---

**Tablo 29:** Başlangıç tablosu

M yöntemine benzer şekilde, a satırındaki a<sub>1</sub> ve a<sub>2</sub>'ye karşılık gelen değerler yeniden aşağıdaki gibi düzenlenir:

Eski a satırı:	(0	0	0	-1	-1	0	0)
+1*a <sub>1</sub> satırı:	(3	1	0	1	0	0	3)
+1*a <sub>2</sub> satırı:	(4	3	-1	0	1	0	6)
=Yeni a satırı:	(7	4	-1	0	0	0	9)

Yeni a satırı,

$$a + 7X_1 + 4X_2 - e_2 + 0a_1 + 0a_2 + 0s_3 = 9$$

temel	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	e <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	çözüm
a	7	4	-1	0	0	0	9
a <sub>1</sub>	3	1	0	1	0	0	3
a <sub>2</sub>	4	3	-1	0	1	0	6
s <sub>3</sub>	1	2	0	0	0	1	4

**Tablo 30:** Çözüme giren ve çözümden çıkan değişkenler seçiliyor

İşlemlerden sonra Tablo 31 ulaşılır

Temel	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	e <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	çözüm
A	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2

$x_1$	1	1/3	0	1/3	0	0	1
$a_2$	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
$s_3$	0	5/3	0	-1/3	0	1	3

**Tablo 31:**  $x_1$  çözüme girdi

Simpleks işlemlerinden sonra, Tablo 32 ulaşılır.

temel	$x_1$	$x_2$	$e_2$	$a_1$	$a_2$	$s_3$	çözüm
a	0	0	0	-1	-1	0	0
$x_1$	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
$x_2$	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
$s_3$	0	0	1	1	-1	1	1

**Tablo 32:**  $x_2$  çözüme girdi

enaz  $a = 0$  olduğundan, birinci aşamanın uygun temel çözümü  $x_1=3/5$ ,  $x_2=6/5$  ve  $s_3=1$ 'dir. Bu noktada yapay değişkenler görevlerini tamamlamıştır. Dolayısıyla, bunları ait oldukları sütunla birlikte tablodan çıkararak ikinci aşamaya geçilebilir.

## 2. Aşama Çözümü:

Yapay sütunları sildikten sonra, asıl problem şöyle yazılır:

$$\begin{aligned}
 \text{enaz } Z &= 4x_1 + x_2 \\
 x_1 + 1/5e_2 &= 3/5 \\
 x_2 - 3/5e_2 &= 6/5 \\
 e_2 + s_3 &= 1 \\
 x_1, x_2, s_3, e_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

temel	$x_1$	$x_2$	$e_2$	$s_3$	Çözüm
$z_j - c_j$	-4	-1	0	0	0
$x_1$	1	0	1/5	0	3/5
$x_2$	0	1	-3/5	0	6/5

$s_3$	0	0	1	1	1
-------	---	---	---	---	---

**Tablo 33:** başlangıç tablosu (2. Aşama için)

Temel değişken olan  $x_1$  ve  $x_2$ 'nin  $z_j-c_j$  satırında sıfırdan farklı katsayılarla sahip olmaları nedeniyle bu satırın yeniden düzenlenmesi gerekir.

Eski Z satırı:	(-4	-1	0	0	0)
+4x $X_1$ satırı:	(4	0	4/5	0	12/5)
+1x $X_2$ satırı:	(0	1	-3/5	0	6/5)
=Yeni Z satırı:	(0	0	1/5	0	18/5)

temel	$x_1$	$x_2$	$e_2$	$s_3$	Çözüm
$z_j-c_j$	0	0	1/5	0	18/5
$x_1$	1	0	1/5	0	3/5
$x_2$	0	1	-3/5	0	6/5
$s_3$	0	0	1	1	1

**Tablo 34:** Çözüme giren ve çözümden çıkan değişkenler

İşlemler yapıldıktan sonra, optimal sonuca ulaşılır Tablo 35.

Temel	$x_1$	$x_2$	$e_2$	$s_3$	çözüm
$z$	0	0	0	-1/5	17/5
$x_1$	1	0	0	-1/5	2/5
$x_2$	0	1	0	3/5	9/5
$e_2$	0	0	1	1	1

**Tablo 35:** Optimal tablo

enazZ’de temele girmeyen değişkenlerin katsayısı pozitif olmadığı için optimal çözüme ulaşılmıştır. Buna göre;  $x_1=2/5$ ,  $x_2=9/5$  ve  $e_2=1$  olur.

### 5.3. En İyi Çözümün Olmaması

En iyi çözümün bulunmadığı duruma örnek olması için aşağıdaki modeli çözelim.

$$enaz = 2x_1 + 3x_2$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 36$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Model yukarıda verildiği gibi olsun. Önceki örnekte olduğu gibi, öncelikli olarak kısıtlar standart forma getirilir ve sonrasında ise zj-cj satırındaki yapay değişkenlerin değeri sıfır yapılır ( Büyük M metodu konusu içinde nasıl yapılacağı anlatıldı).Sonuç aşağıdaki Tablo 36 daki gibi olacaktır.

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$e_2$	$a_2$	$a_3$	sağ taraf	oran
zj-cj	2M-2	4M-3	0	-M	0	0	46M	
$s_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	16
$a_2$	1	3	0	-1	1	0	36	12
$a_3$	1	1	0	0	0	1	10	10*

**Tablo 36:** Standart başlangıç değerleri

Önceki örnekte olduğu gibi, simpleks işlemler yapıldıktan sonra, aşağıdaki tablo değerlerine ulaşılacaktır.

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$e_2$	$a_2$	$a_3$	sağ taraf
zj-cj	1-2M	0	0	-M	0	3-4M	30+4M



<b>s1</b>	1/4	0	1	0	0	-1/4	3/2
<b>a2</b>	-2	0	0	-1	1	-3	6
<b>x2</b>	1	1	0	0	0	1	10

**Tablo 37:** A2 yapay değişkeni çözümde

zj-cj satırı incelendiğinde, pozitif değer taşıyan değişken yoktur, bu yüzden problemin en iyi çözüme geldiği düşünülür. Fakat başlangıçta eklediğimiz yapay a2 değişkeni hala çözümde görölmektedir. Yapay değişkenler fiziksel herhangi bir anlamları olmamasına rağmen çözümde değer almaları bir çelişkiyi ortaya çıkarmaktadır. Bu sebeple modelin çözümünün olmadığı sonucuna varılacaktır.

Özetlersek;

Eğer optimal çözümde yapay değişkenler **sıfır** ise, optimal çözüm bulunduğunu gösterir. Eğer optimal çözümde yapay değişkenler **pozitif** ise, modelin çözümü yoktur.

#### 5.4. Çözümün Sınırsız Olması

$$encokZ = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 5$$

$$6x_1 + 5x_2 - x_4 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>x3</b>	<b>x4</b>	<b>s1</b>	<b>s2</b>	<b>sağ taraf</b>	<b>oran testi</b>
<b>zj-cj</b>	-36	-30	3	4	0	0	0	
<b>s1</b>	1	1	-1	0	1	0	5	5/1=5
<b>s2</b>	6	5	0	-1	0	1	10	10/6=5/3*

**Tablo 38:** Standart başlangıç tablosu

	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>x3</b>	<b>x4</b>	<b>s1</b>	<b>s2</b>	<b>sağ taraf</b>	<b>oran testi</b>
<b>zj-cj</b>	0	0	3	-2	0	6	60	

<b>s1</b>	0	1/6	-1	1/6	1	-1/6	10/3	$(10/3)/(1/6) = 20^*$
<b>x1</b>	1	5/6	0	-1/6	0	1/6	5/3	$(5/3)/(-1/6) = -10$

**Tablo 39:** Birinci adım sonrası çözüm

	<b>x1</b>	<b>x2</b>	<b>x3</b>	<b>x4</b>	<b>s1</b>	<b>s2</b>	<b>sağ taraf</b>	<b>oran testi</b>
<b>zj-cj</b>	0	2	-9	0	12	4	100	
<b>x4</b>	0	1	-6	1	6	-1	20	$20/-6 = -10/3$
<b>x1</b>	1	1	-1	0	1	0	5	$5/-1 = -5$

**Tablo 40:** İkinci adım sonrası çözüm

İkinci adım sonrası elde edilen Tablo 40'yı incelediğimizde, zj-cj satırında negatif değer bulunmaktadır.  $x_3$  değişkeni çözüme girecek değişken olarak seçilir. Çözümünden çıkacak değişkeni bulmak için ise, oran testi yapılır. Tabloda da görüldüğü gibi, her iki oran da negatif değer olmaktadır. Bu sebeple çözümden çıkacak değişken bulunamamaktadır. zj-cj satırındaki değerlere göre çözüme ulaşamadığımız halde, adımlara devam edilememektedir. Bu durumdaki probleme **sınırsız çözüm** denilmektedir.

### **Bu Bölümde Neler Öğrendik**

Bu bölümde büyük M metodu ve iki aşamalı metotlar örnekler verilerek anlatılmıştır. İlave olarak doğrusal modellerin çözümünde karşılaşılabilecek özel durumlar da birer örnek verilerek anlatılmıştır.

## Bölüm Soruları

- 1) Modelde kısıtların tamamı  $\leq$  ise büyük M metodu ile çözmeye gerek var mıdır? neden?
- 2) Büyük M ile çözülen her model iki faz metodu ile de çözülebilir mi ?
- 3) Optimal tabloda, çözüme giren değişkenlerin arasından “a”lı bir değişken olur mu ?
- 4) Optimal sonuç da amaç fonksiyonun değeri M olur mu ? ( örnek,  $enaz Z=100+25M$ )
- 5) Bir modelde bulunan “ $\geq$ ” kısıtların tamamı “-“ ile çarpılarak “ $\leq$ ” yapılabilir, sonrasında da kısıtlar “ $\leq$ ” olacağı için, kısıtlara “s” ler eklenerek, Büyük M veya iki faz yerine “simpleks” ile çözülebilir mi?

## **6. DUAL SIMPLEKS YÖNTEMİ**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

- 6.1. Dual simpleks yöntemi
- 6.2. Modele yeni kısıt eklenmesi
- 6.3. Enaz problemin çözümü

## **Giriş**

Bu haftaki çalışmada, dual simpleks metodu anlatılacaktır. Sağ taraf değerlerinden herhangi birisinde negatif değer olduğunda, primal simpleks metodu kullanılamamaktadır. Böyle bir durumda dual simpleks 'in uygun bir çözüm metodu olduğu örneklerle anlatılacaktır. Ayrıca enaz problemlerin çözümünde de dual simpleks geçerli bir çözüm metodu olabileceği gösterilecektir.

## 6.1. Dual Simpleks Yöntemi

Daha önceki haftalarda anlatılan yöntemlerde kısıtlarda büyük eşit “ $\geq$ ” kısıtı olduğu durumlarda, çözüme başlamak için yapay değişken “a” kullanılacağını belirtmiştik. Benzer şekilde yapay değişkenler kullanılmadan çözülebilen ve ( $\geq$  tipi için) gevşek değişkenlere sahip olmayan problemlerin çözümü için kullanılan yöntemlerden birisi de Dual Simpleks Metot ’tur. Bu metotta çözüm olursuz başlar, fakat çözümü mümkünse optimal sona erer. Çözümün olursuz başlamasının nedeni  $\geq$  tipinde olan kısıtı  $\leq$  haline getirebilmek için -1 ile çarpılması, bu sebeple de sağ taraf değerinin negatif hale gelmesidir. Şayet  $\geq$  tipinde olan kısıtın sağ taraf değeri başlangıçta negatif ise, -1 ile çarpıldığında sağ taraf değeri pozitif olacaktır ve bu da istenen bir durumdur. Bu durumda kısıt simpleks için uygun hale gelir. Tüm kısıtlar  $\leq$  haline çevrildiğinde kısıtlardan en az birinin sağ taraf değeri negatif ise model dual simpleks ile çözülmelidir.

Dual Simpleks algoritmasında doğrusal programlama problemi (daha çok) optimum fakat uygun olmayan bir çözümle başlar. Birbiri ardına yapılacak yenilemeler optimumluğu bozmadan uygun çözüme yönelecek şekilde tasarlanmıştır. Uygunluğun elde edildiği yinelemede algoritma sona erer. Dual simpleks yöntemi, uygun ve optimum olmayan çözümle başlayıp uygun halini sürdürerek optimuma ulaşan normal simpleks yönteminin karşıtıdır.

### Aşamaları:

1. Başlangıçtaki temel çözümün uygun olup olmadığının incelenmesi için öncelikle ( $\geq$ ) biçiminde olan kısıtlayıcı fonksiyonların ( $\leq$ ) biçimine dönüştürülmesi gerekir. Başlangıç çözümü optimal ise buna karşılık gelen dual çözüm uygun olduğundan, ikinci adıma geçilir. Aksi halde işlemlere son verilir. (Çözüme optimal fakat olursuz başlanır.)
2. Temeli terk edecek değişkenin belirlenmesinde kullanılan ölçüt temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerine dayanır. Temeli terk edecek değişken en yüksek negatif (mutlak değerce en büyük negatif sayı) çözüm değerine sahip olan değişkendir. Bu değişkenin bulunduğu satır anahtar satırdır.



3. Seçim işlemi için temel olmayan değişkenlere karşılık gelen  $z_j - c_j$  değerleri, anahtar satırın kendilerine karşılık gelen elemanlarına bölünerek oranlar hesaplanır. Sıfır veya pozitif paydaya (bölene) sahip oranlar dikkate alınmazlar. Bu oranlar arasından mutlak değerce en küçük oranın bulunduğu sütun anahtar sütundur. Bu yolla anahtar sayının negatif, dolayısıyla temele giren değişkenin çözüm değerinin pozitif olması sağlanır. Tüm oranların sıfır veya pozitif paydalara (bölenlere) sahip olması durumunda işlemlere son verilir. Böyle bir durumda çözüm vektörünün ilgili elemanı tekrar negatif değerli bulunacağından uygun çözüme ulaşılamaz.
4. Temele giren ve temeli terk eden değişkenlerin belirlenmesinden sonra simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle daha gelişmiş bir çözüm elde edilerek tekrar ikinci adıma dönülür. Bu yolla uygun bir en iyi çözüm varsa sonlu sayıda işlemle bu çözüme ulaşılır.

Yukarıda açıklandığı gibi, primal simpleks yöntemde önce anahtar sütun sonra anahtar satır belirlenirken, dual simpleks yöntemde önce anahtar satır sonra anahtar sütun belirlenmektedir.

Dual simpleks 'in yöntem olarak kullanılması, modele yeni bir kısıt eklenmesi veya en küçük problemlerinin çözülmesi gibi iki farklı şekilde ortaya çıkmaktadır.

## 6.2. Modele Yeni Kısıt Eklenmesi

Modele yeni kısıt eklenmesinde, iki durumla karşılaşabilmektedir.

**Durum 1:** yeni bir kısıt eklenir ve mevcut çözüm bozulmaz, bu durumda yeni çözüm arayışına gidilmez.

**Durum 2:** yeni bir kısıt eklenir, fakat eklenen kısıt optimal çözümü sağlamaz, yeni bir optimum çözümün aranması gerekir.

Daha önceki haftalar gördüğümüz örnek ve optimal çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \text{encok} &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\
 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\
 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8
 \end{aligned}$$

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	B
zj-cj	0	5	0	0	10	10	280
s1	0	-2	0	1	2	-8	24
x3	0	-2	1	0	2	-4	8
x1	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	2

**Tablo 41:** Modelin çözüm tablosu

Bu probleme

1)  $x1+x2+x3 \leq 11$  kısıtı eklendiğinde, mevcut optimum çözüm değişmeyecektir. Yani  $2+0+8=10 < 11$  kısıtı sağlanmaktadır.

2)  $x2 \geq 1$  kısıtı eklendiğinde, mevcut optimum çözüm bozulacaktır. Bu durumda Tablo aşağıdaki gibi olacaktır. Tabloya yerleştirilirken,  $x2-e4=1$ , sonrasında “-“ ile çarpılır, - $x2+e2=-1$  olur ve bu şekilde Tablo 42 yerleştirilir.

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	e4	b
zj-cj	0	5	0	0	10	10	0	280
s1	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x1	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	0	2
e4	0	-1	0	0	0	0	1	-1

**Tablo 42:** model  $x2 \geq 1$  kısıtı eklendiğinde

Sağ taraf değerleri arasında negatif bir kısıt olduğu için, çözüm için dual simpleks uygulanabilir. Negatif değer olduğu satır olan e4 çözümünden çıkacaktır. Çözümüne girecek değişken ise, e4 satırındaki negatif katsayılı değerlere bakılması gerekecektir. e4 satırında yalnızca x2 değişkinin altında negatif değer olduğu için, x2 çözüme girmesine karar verilir.

Birden çok negatif değer olsa idi, oran testi yapılması gerçektir. Simpleks işlemler yapıldıktan sonra, aşağıdaki değerlere ulaşılır.

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	e4	b
zj-cj	0	0	0	0	10	10	5	275
s1	0	0	0	1	2	-8	-2	26
x3	0	0	1	0	2	-4	-2	10
x1	1	0	0	0	-1/2	3/4	5/4	3/4
x2	0	1	0	0	0	0	-1	1

**Tablo 43:** x2 çözüme girdi

Modele,

- 3)  **$x1+x2 \geq 12$  eklenir ise**,  $2+0=2$  buda  $\geq 12$  kısıtını sağlamaz, modelin tekrar çözülmesi gerekir.

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	e4	b
zj-cj	0	5	0	0	10	10	0	280
s1	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x1	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	0	2
e4	-1	-1	0	0	0	0	1	-12

**Tablo 44:**  $x1+x2 \geq 12$  kısıtı eklendiğinde durum

Birim matris bozulduğu için tablonun tekrar düzenlenmesi gerekmektedir. Mevcut e4 satırı yerine,  $e4+x1$  satırı toplanarak yeniden düzenleme yapılır.

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	e4	b
zj-cj	0	5	0	0	10	10	0	280
s1	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x1	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	0	2
e4	0	0.25	0	0	-0.5	1.5	1	-10

**Tablo 45:** Birim matris dikkate alınarak tekrar düzenlendi

e4 satırında -10 olduğu için, dual simpleks uygulanabilir, e4 çözümden çıkacaktır, bu satırda negatif değer yalnızca s2 nin altında oluşmuştur, s2 çözüme girecektir. Gerekli işlemlerden sonra, aşağıdaki değerler elde edilir.

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	e4	b
zj-cj	0	10	0	0	0	40	20	80
s1	0	-1	0	1	0	-2	4	-16
x3	0	-1	1	0	0	2	4	-32
x1	1	1	0	0	0	0	-1	12
s2	0	-0.25	0	0	1	-3	-2	20

**Tablo 46:** s2 çözüme girdi

Fakat Tablodan görüldüğü gibi, optimum sonuca henüz ulaşamamıştır, çünkü sağ taraf değerlerinde iki negatif değer vardır. Sağ taraf değerlerinden -16 ve -32 değer arasından mutlak değerce büyük olan x3 satırı çözümden çıkacak satır olarak belirlenir. x3 satırında negatif tek değer x2 değişkenidir. x2 çözüme girecektir. Simpleks adımlardan sonra Tablo 47 deki sonuçlara ulaşılır.

	x1	x2	x3	s1	s2	s3	e4	b
zj-cj	0	0	10	0	0	60	60	-240
s1	0	0	-1	1	0	-4	0	16
x2	0	1	-1	0	0	-2	-4	32
x1	1	0	1	0	0	2	3	-20
s2	0	0	-0.5	0	1	-4	-4	36

**Tablo 47:** x2 çözüme girdi

Bu sonuçlara sağ taraf değişkenlerinde hala negatif değer olduğu görülmektedir. Bu yüzden çözüme devam edilmesi gerecektir. Negatif değer bulundugu x1 değişkeni çözümde çıkacaktır. Fakat bu satırda hiçbir negatifli değer bulunmamaktadır. Çözüme girecek değişkenin bulunması imkanı yoktur. Bu yüzden dual simpleks ile işlemlere devam etmek mümkün değildir. Çözüm optimum olmamasına rağmen işlemlere de devam edilememektedir. Bu yüzden optimum çözümün olmadığı sonucuna varılır. Yani eklenen kısıt ile beraber modeli gerçekleştirecek durum görünmemektedir.

### 6.3. En Az Problemin Çözülmesi

$$\begin{aligned}
 \text{Enaz } Z &= x_1 + 2x_2 \\
 x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\
 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 6 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Dual simpleks 'in kullanılabileceği bir başka model türü de, enaz (min) problemlerinin çözümünde kullanılabilir. Öncelikli olarak verilen modelin amaç fonksiyonu “-“ ile çarpılarak ençok problemi haline dönüştürebiliriz. Amaç fonksiyonu, ençok=-x1-2x2 şekline dönüşür. Bununla standart başlangıç Tablosunda gösterimi aşağıdaki gibi olacaktır.

	x1	x2	x3	e1	e2	b
zj-cj	1	2	0	0	0	0
e1	1	-2	-1	-1	0	4
e2	2	1	-1	0	-1	6

**Tablo 48:** Modelin başlangıç tablosu

Tablodan görüldüğü gibi dual simpleks ile çözüme başlanmak istendiğinde, sağ tarafta değerleri arasında negatif değer olmadığı görülmektedir. Aynı zamanda Tablo 48 de birim matris oluşmamıştır. e1 ve e2 satırı negatif değerler ile çarpıldığında birim matris oluşması ile birlikte, sağ taraf değerleri de negatif olacak ve dual simpleks ile çözülebilir hale gelecektir.

	x1	x2	x3	e1	e2	b
zj-cj	1	2	0	0	0	0
e1	-1	2	1	1	0	-4
e2	-2	-1	1	0	1	-6

**Tablo 49:** Sağ taraf değerleri “-“ ile çarpıldıktan sonraki durum

Yukarıdaki Tablo 49’dan mutlak değerce en büyük olan (-4, -6) dan, e2 satırı çözümden çıkacak değişkenin bulunduğu satır olarak belirlenir. e2 satırında yalnızca “negatif ” değer olan değişkenler ile oran testi yapılır. zj-cj satırındaki değer ile, bunlara karşılık gelen e2 satırındaki negatif değerlere bölünerek oranlar bulunur.

Oran x1 için:  $1/-2$ ,

x2 için:  $2/-1$ ,

mutlak değerce en küçük olan seçilir. Bu durumda x1 çözüme girecek olarak belirlenir.

Simpleks işlemleri yapıldıktan sonraki elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi olacaktır.

	x1	x2	x3	e1	e2	b
zj-cj	0	3/2	1/2	0	1/2	-3
e1	0	5/2	-1/2	1	0	-1
x1	1	1/2	-1/2	0	1	3

Tablo 50: x1 çözüme girdi

Tablo 50 deki değerlere göre, optimum sonuca ulaşamamıştır. Sağ taraf değişkenlerinden negatif “-1” değeri, e1 çözümden çıkacak satır olacağını göstermektedir. e1 satırında negatif katsayılar dikkate alındığında yalnızca x3 değişkeninin negatif değere sahip olduğu için, x3 çözüme girecektir. Gerekli simpleks işlerinden sonra elde edilecek çözüm aşağıdaki gibi olacaktır.

	x1	x2	x3	e1	e2	b
zj-cj	0	7/3	0	1/3	1/3	-10/3
x3	0	-5/3	1	-2/3	1/3	2/3
x1	1	-1/3	0	-1/3	-1/3	10/3

**Tablo 51:** optimum sonuç

Tablo 51 değerleri optimum sonuca ulaşıldığını göstermektedir. Çünkü dual sağ taraf değerlerinde negatif değer kalmamıştır.

### **Bu Bölümde Neler Öğrendik ?**

Bu bölümde dual simpleks metodu üzerinde durulmuştur. Özellikle modele yeni bir kısıt eklenmesi ve enaz problemlerin dual simpleks ile nasıl çözüleceği üzerinde durulmuştur.



## Bölüm Soruları

- 1) Simpleks metot hangi durumlarda geçerli bir çözüm metodu olamayabilir?
- 2) Dua simpleks ile çözüme başlandığında, çözüm aşamasının belirli bir safhasında, normal simpleks metoda dönülebilir mi?
- 3) Kısıtların tamamı küçük eşit “ $\leq$ ” olduğunda dual simpleks nasıl kullanılabilir?
- 4) Modele yeni bir kısıt eklendiğinde, optimum çözüm bozulmamasına rağmen, dual simpleks ile işlemlere devam edilmek istense, nasıl bir durum ile karşılaşılır?
- 5) Dual simpleks büyük M ve iki aşamalı metotların alternatifi midir?

## **7. DUAL PROBLEM**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

- 7.1. Dual problemin ekonomik yorumu
- 7.2. Primal ençok problemlerin optimal z satırından dual çözümün okunması
- 7.3. Primal enaz problemlerin optimal z satırından dual çözümün okunması

## **Giriş**

Bu hafta, dual problem işlenecektir. Primal problem ile dual problemin aralarındaki ilişki anlatılarak, neden dual probleme ihtiyaç duyulabileceği incelenecektir. Ayrıca, primal sonuçlardan dual problemin sonuçların, dual sonuçlardan da primal problemin sonuçlarının nasıl okunabileceği üzerinde durulacaktır.

## 7.1. Dual Problem

Şimdiye kadar bahsettiğimiz doğrusal programlama modeli primal problem diye anılmaktadır. Dual problem ise, primal problemden doğrudan türetilen matematiksel tanımla yakından ilgilidir. Birçok doğrusal programlama işleminde dual, optimizasyonun anlamına (maksimizasyon veya minimizasyon), kısıtların tipine ve değişkenlerin işaretine bağlı olarak primalin çeşitli durumları için tanımlanmıştır. Bu tip işlemlerin karışıklığa yol açabilmesi nedeniyle primal problem şöyle tanımlanır:

$$\text{ençok veya enaz } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_{ij} = b_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Şekilde tanımlanan standart halde ifade edildiği varsayılır.  $X_j, j=1,2,\dots,n$  değişkenleri, dolgu ya da artık değişkenler varsa bunları da içerir. Standart halin üç özelliği vardır:

1. Tüm kısıtlar negatif olmayan sağ tarafa sahip eşitlikler halindedir.
2. Tüm değişkenler negatif olmama koşullarına uymaktadır.
3. Optimizasyon ençok veya enaz olabilir.

Dual modele geçişin 2 nedeni olabilir:

1. Kısıt sayısının değişken sayısına göre çok fazla olduğu modellerde kısıt sayısını azaltarak çözümü kolaylaştırmak.
2. Primalin çözümlerinin ekonomik olarak yorumlanabilmesi için dual çözümlerin elde edilir.

Dual problemin kısıtları ve değişkenleri primal problemden simetrik olarak aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

1. m tane primal kısıt denkleminin her biri için bir dual değişken tanımlanmıştır. ( $y_i$ )
2. n tane primal değişkenin her biri için bir dual kısıt tanımlanmıştır.
3. Dual kısıtın sol taraf katsayıları ilgili primal değişkenin kısıt katsayılarına (sütun halinde) eşittir. Sağ taraf sabiti ise aynı primal değişkenin amaç fonksiyonu katsayısına eşittir.
4. Dualin amaç fonksiyonu katsayıları primal kısıt denklemlerinin sağ tarafına eşittir.

Dual problemdeki optimizasyon amacının ne olacağı (ençok veya enaz) kısıtların tipi ve değişkenlerin işareti için gerekli kurallar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Ençok (Max) Problemi		Enaz (Min) Problemi	
<u>Kısıtlar</u>		<u>Değişkenler</u>	
$\geq$	$\leftrightarrow$	$\leq 0$	
$\leq$	$\leftrightarrow$	$\geq 0$	
$=$	$\leftrightarrow$	Sınırlandırılmamış	
<u>Değişkenler</u>		<u>Kısıtlar</u>	
$\geq 0$	$\leftrightarrow$	$\geq$	
$\leq 0$	$\leftrightarrow$	$\leq$	
Sınırlandırılmamış	$\leftrightarrow$	$=$	

### Örnek:

Primal Problem		Dual Problem
$Z_{\text{ençok}} = 0,4X_1 + 0,5X_2$ $0,3X_1 + 0,1X_2 \leq 2,7$ $0,5X_1 + 0,5X_2 = 6$ $0,6X_1 + 0,4X_2 \geq 6$ $X_1, X_2 \geq 0$	$y_1 \longrightarrow$ $y_2 \longrightarrow$ $y_3 \longrightarrow$	$W_{\text{enaz}} = 2,7y_1 + 6y_2 + 6y_3$ $y_1 \geq 0$ $y_2$ : sınırlandırılmamış $y_3 \leq 0$ $0,3y_1 + 0,5y_2 + 0,6y_3 \geq 0,4$ $0,1y_1 + 0,5y_2 + 0,4y_3 \geq 0,5$

### Örnek:

Primal Problem		Dual Problem
$Z_{\text{enaz}} = 0,4X_1 + 0,5X_2$ $0,3X_1 + 0,1X_2 \leq 2,7$ $0,5X_1 + 0,5X_2 = 6$ $0,6X_1 + 0,4X_2 \geq 6$ $X_1, X_2 \geq 0$	$y_1 \longrightarrow$ $y_2 \longrightarrow$ $y_3 \longrightarrow$	$W_{\text{ençok}} = 2,7y_1 + 6y_2 + 6y_3$ $y_1 \leq 0$ $y_2$ : sınırlandırılmamış $y_3 \geq 0$ $0,3y_1 + 0,5y_2 + 0,6y_3 \leq 0,4$ $0,1y_1 + 0,5y_2 + 0,4y_3 \leq 0,5$

### Örnek:

Primal Problem		Dual Problem
$Z_{\text{ençok}} = 5X_1 + 6X_2$ $X_1 + 2X_2 = 5$ $-X_1 + 5X_2 \geq 3$ $4X_1 + 7X_2 \leq 8$ $X_1$ : sınırlandırılmamış $X_2 \geq 0$	$y_1 \longrightarrow$ $y_2 \longrightarrow$ $y_3 \longrightarrow$	$W_{\text{enaz}} = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$ $y_1$ : sınırlandırılmamış $y_2 \leq 0$ $y_3 \geq 0$ $y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$ $2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$

## 7.2. Dual Problemin Ekonomik Yorumu

### Ençok Problemi:

#### Örnek:

$Z_{\text{ençok}} = 60X_1 + 30X_2 + 20X_3$   
 Kısıtlar:  
 $8X_1 + 6X_2 + X_3 \leq 48$   
 $4X_1 + 2X_2 + 1,5X_3 \leq 20$   
 $2X_1 + 1,5X_2 + 0,5X_3 \leq 8$   
 $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Yandaki örnekte;  $X_1$ : üretilen sıra,  $X_2$ : üretilen masa,  $X_3$ : üretilen sandalye miktarlarını gösterirken, 48 kullanılacak olan kereste kısıtını, 20 montaj işçiliği, 8 ise marangozluk kısıtını göstermektedir. Buna göre dual modeli yorumlayalım.

$W_{\text{enaz}} = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$   
 $y_1 \geq 0$

$$\begin{aligned}
y_2 &\geq 0 \\
y_3 &\geq 0 \\
8y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq 60 \quad (\text{sıra kısıtı}) \\
6y_1 + 2y_2 + 1,5y_3 &\geq 30 \quad (\text{masa kısıtı}) \\
y_1 + 1,5y_2 + 0,5y_3 &\geq 20 \quad (\text{sandalye kısıtı})
\end{aligned}$$

Yukarıdaki dual modelde sıra kısıtına bakılacak olursa 8 birimlik kereste, 4 birim saatlik montaj işçiliği, 2 birim saatlik de marangozluk işçiliği kullanılacağı için, sıranın satış fiyatı 60 birimden daha az olmamalıdır. (Yani; 1 br sıra için gerekli kereste(8)X kereste fiyatı ( $y_1$ ) + 1 br sıra için gerekli işçilik (4) X işçilik fiyatı ( $y_2$ ) + 1 br sıra için gerekli marangozluk (2) X marangozluk fiyatı ( $y_3$ )  $\geq 60$  \$)

$W_{\text{enaz}} = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$  amaç fonksiyonu ise, tüm kaynaklara ödenecek toplam ücreti ifade ettiği için burada enaz yapmak istenmektedir. Modelde  $y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \geq 0$ ,  $y_3 \geq 0$  olması gerekmektedir.

Model çözüldüğünde ise, dual değişkenlerin değerleri bize primal problemdeki gölge fiyatların değerlerini (dual prices) verecektir.

### **Enaz Problemi:**

#### **Örnek: (Diyet Problemi)**



$$\text{enaz } Z = 50X_1 + 20X_2 + 30X_3 + 80X_4$$

Kısıtlar:

$$400X_1 + 200X_2 + 150X_3 + 500X_4 \geq 500$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 6$$

$$2X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 4X_4 \geq 10$$

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 + 5X_4 \geq 8$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Yandaki örnekte;  $X_1$ : günlük tüketilen kek sayısını,  $X_2$ : günlük tüketilen dondurma sayısını,  $X_3$ : günlük tüketilen kola sayısını,  $X_4$ : günlük tüketilen peynirli kek dilimi sayısını gösterirken, 500 tüketilecek kalori miktarı, 6 tüketilecek çikolata miktarı, 10 tüketilecek şeker miktarı ve 8 de tüketilecek yağ miktarını göstermektedir. Amaç fonksiyonu da her bir yiyeceğin birim maliyetleriyle tüketim miktarlarının çarpımından oluşur ve diyetin maliyetini enaz yapmaktadır. Buna göre dual modeli yorumlayalım.

$$\text{Ençok } W = 500y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 8y_4$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

$$y_4 \geq 0$$

$$400y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 \leq 50 \quad (\text{kek kısıtı})$$

$$200y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 4y_4 \leq 20 \quad (\text{dondurma kısıtı})$$

$$150y_1 + 4y_3 + y_4 \leq 30 \quad (\text{kola kısıtı})$$

$$500y_1 + 4y_3 + 5y_4 \leq 80 \quad (\text{peynirli kek kısıtı})$$

Yukarıdaki dual modelin amaç fonksiyonunda satıcı, diyeti yapan kişiye yapacağı yiyecek miktarını artırarak kazancını ençok yapmaya çalışmaktadır. Fakat, yiyeceklerin fiyatlarını ayarlarken örneğin;  $400y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2y_4 \leq 50$  kısıtında olduğu gibi kek'e 50 birim fiyatlık ödeme yapıldığında 400 kalori, 3 birim çikolata, 2 birim şeker ve 2 birim yağ alabilmektedir. Bu kombinasyon için diyet yapan kişi daha fazla ödemeye zorlanamaz. Diğer 3 kısıt da aynı şekilde yorumlanır.  $y_1, y_2, y_3, y_4$  değişkenleri 0 veya pozitif değer almaktadır.

### 7.3. Primal Ençok Problemlerinin Optimal Z Satırından Dual Çözümün Okunması

- Eğer kısıt “ $\leq$ ” kısıtıysa  $y_i$ : Optimal tablonun Z satırındaki  $S_i$  değeridir.
- Eğer kısıt “ $\geq$ ” kısıtıysa  $y_i$ : -(Optimal tablonun Z satırındaki  $e_i$  değeridir).
- Eğer kısıt “=” kısıtıysa  $y_i$ : (Optimal tablonun Z satırındaki  $a_i$ -M) değeridir.

#### Örnek:

$$\text{ençok } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

Kısıtlar:

$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 15$$

$$2X_2 - X_3 \geq 5$$

$$2X_1 + X_2 - 5X_3 = 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Temel	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$e_2$	$a_2$	$a_3$	çözüm
<b>Z</b>	0	0	0	51/23	58/23	M-(58/23)	M+(9/23)	565/23
<b><math>x_3</math></b>	0	0	1	4/23	5/23	-5/23	-2/23	15/23
<b><math>x_2</math></b>	0	1	0	2/23	-9/23	9/23	-1/23	65/23
<b><math>x_1</math></b>	1	0	0	9/23	17/23	-17/23	7/23	120/23

**Tablo 52:** Optimal sonuç

Modelin Duali:

$$\text{enaz } Z = 15y_1 + 5y_2 + 10y_3$$

Kısıtlar:

$$y_1 + 2y_3 \geq 3$$

$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$$

$$2y_1 - y_2 - 5y_3 \geq 5$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3: \text{ sınırlandırılmamış}$$

$y_1$  değeri optimal tablonun Z satırındaki  $S_1$  değerine karşılık gelir. (kısıt “ $\leq$ ” kısıtı olduğu için)

$$y_1 = 51/23.$$

$y_2$  değeri optimal tablonun Z satırındaki  $-e_2$  değerine karşılık gelir. (kısıt " $\geq$ " kısıtı olduğu için)  $y_2 = -58/23$ .

$y_3$  değeri optimal tablonun Z satırındaki  $a_3-M$  değerine karşılık gelir. (kısıt " $=$ " kısıtı olduğu için)  $y_3 = 9/23$ .

Optimal dual amaç değeri, primal çözümün amaç değerine eşittir. Yani  $W = 565/23$  olur.

$W = 15 \cdot (51/23) + 5 \cdot (-58/23) + 10 \cdot (9/23) = 565/23$  olarak da hesaplanır.

#### 7.4. Primal Enaz Problemlerinin Optimal Z Satırından Dual Çözümün Okunması

- Eğer kısıt " $\leq$ " kısıtıysa  $y_i$ : Optimal tablonun Z satırındaki  $S_i$  değeridir.
- Eğer kısıt " $\geq$ " kısıtıysa  $y_i$ :  $-(\text{Optimal tablonun Z satırındaki } e_i)$  değeridir.
- Eğer kısıt " $=$ " kısıtıysa  $y_i$ :  $((\text{Optimal tablonun Z satırındaki } a_i) + M)$  değeridir.

#### Örnek:

$$\text{enaz } Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3$$

Kısıtlar:

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$

$$X_2 - X_3 \leq 2$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 6$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

temel	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$e_1$	$s_2$	$a_1$	$a_3$	çözüm
<b>Z</b>	-1	0	0	-3	0	3-M	-1-M	6
<b><math>x_2</math></b>	1	1	0	-2	0	2	-1	2
<b><math>s_2</math></b>	-1	0	0	3	1	-3	2	2
<b><math>x_3</math></b>	0	0	1	1	0	-1	1	2

**Tablo 53:** Optimal sonuç

Modelin Duali:

$$\text{ençok } W = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$$

Kısıtlar:

$$y_1 + y_3 \leq 3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 1$$

$y_1 \geq 0$ ,  $y_2 \leq 0$ ,  $y_3$ : sınırlandırılmamış

$y_1$  değeri optimal tablonun Z satırındaki  $-e_1$  değerine karşılık gelir. (kısıt " $\geq$ " kısıtı olduğu için)  
 $y_1=3$ .

$y_2$  değeri optimal tablonun Z satırındaki  $S_2$  değerine karşılık gelir. (kısıt " $\leq$ " kısıtı olduğu için)  
 $y_2=0$ .

$y_3$  değeri optimal tablonun Z satırındaki  $a_3+M$  değerine karşılık gelir. (kısıt " $=$ " kısıtı olduğu için)  $y_3=-1$ .

Optimal dual amaç değeri, primal çözümün amaç değerine eşittir. Yani  $W=6$  olur.

$W=4*3+2*0+6*(-1)= 6$  olarak da hesaplanır.

### **Gölge Fiyatları (Shadow Prices)**

Daha önce de birçok problemlerinde dual problem değişken değerlerinin primal problemin gölge fiyatlarını verdiğinden bahsetmiştik. Enaz problemlerinde dual problem değişken değerlerinin toplamaya göre tersi (negatifi) primal gölge fiyatlarını verir.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde öncelikli olarak dual problemlerin ekonomik yorumları üzerinde durulmuştur. Sonrasında ise, primal ve dual problemlerin ilişkileri üzerinde durulmuştur. Primal sonuçların dual sonuç tablosundan nasıl okunabileceği örneklerle gösterilmiştir.

## Bölüm Soruları

- 1) Ençok problemin dualini aldığımızda, elde ettiğimiz modeli nasıl yorumlarız?
- 2) Bir modelde kısıt sayısı çok fazla ise, çözümü basitleştirmek için ne önerilebilir?
- 3) Simpleks adımlarda iterasyon sayısını kısıt sayısı mı yoksa değişken sayısı mı belirler?
- 4) Simpleks tabloda gölge fiyatlar nerede oluşur? Bunlar dual problemin nesine karşılık gelir?
- 5) Bir modelin primal simpleks çözümü ile dual simpleks çözüm değerleri her zaman eşit midir ?

## **8. DUYARLILIK ANALİZİ**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

8.1. Matrislerle ilgili özet hatırlatmalar

8.2. Duyarlılık analizi



## **Giriş**

Bu bölümde doğrusal modeller içinde en önemli konulardan biri olan duyarlılık analizi konusu işlenecektir. Öncelikle duyarlılık analizinde hesaplamalar için gerekli olan genel matris işlemleri tekrarlanacak, sonrasında da duyarlılık analizinde kullanılan temel formüller ve tanımlamalar verilecektir.

## 8.1. Matrislerle İlgili Özet Hatırlatmalar

Simpleks hesaplamaları izlemenin kısa ve özlü bir yolu matris kullanmaktır. Matris kullanmamız halinde üç temel matris işlemine gereksinim duyulur. Bunlar, (sıra vektörü)x(matris), (matris)x(sıra vektörü) ve (skaler)x(matris)'tir.

1. (mxn) boyutlu bir A matrisi, m sıra ve n sütunlu dikdörtgen bir dizidir.
2. n boyutlu bir V sıra vektörü (1xn) boyutlu bir matristir.
3. m boyutlu bir P sütun vektörü (mx1) boyutlu bir matristir.

Bu tanımlar matematiksel olarak şöyle ifade edilir:

$$V = [V_1, V_2, \dots, V_n], \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Üç matris işlemi şöyle tanımlanır:

1. (V x A) Bu işlem sadece, V sıra vektörünün boyutunun A'nın sıra sayısına eşit olması halinde geçerlidir. Bu durumda,

$V \times A = [\sum_{i=1}^m v_i a_{i1}, \sum_{i=1}^m v_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^m v_i a_{in}]$  olur. Örneğin;

$$[11, 22, 33] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = (11 \times 1 + 22 \times 3 + 33 \times 5, 11 \times 2 + 22 \times 4 + 33 \times 6) = (242, 308)$$

2. (A x P) Bu işlem sadece, A'nın sütun sayısı P sütun vektörünün boyutuna eşitse geçerlidir. Bu durumda,

$$A \times P = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} p_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} p_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} p_j \end{bmatrix} \text{ olur. Örneğin;}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33 \\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 242 \\ 308 \end{bmatrix}$$

3. (skaler x matris) Bir  $\alpha$  skaler niceliği (ya da sabiti) verildiğinde,  $\alpha A$  çarpım işlemi sonunda,  $(i,j)$ . elemanı  $\alpha a_{ij}$ ’ ye eşit olan bir  $(m \times n)$  matrisi elde edilecektir. Örneğin;  $\alpha=10$  alınırsa,

$$(10) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Bu işlemlere ek olarak matrisin tersi alma işlemi de kullanılmaktadır. Örneğin; 2x2 boyutlu bir A matrisinin tersi şöyle bulunur:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3x3’lük B matrisinin tersi  $B.B^{-1}=I$  eşitliği kullanılarak veya aşağıdaki örnekteki gibi bulunur:

**Örnek:**

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}) + (a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33})$$

$$= -(-45 + 8 - 15) + (9 - 12 - 50) = -1$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8, \quad B_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29, \quad B_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

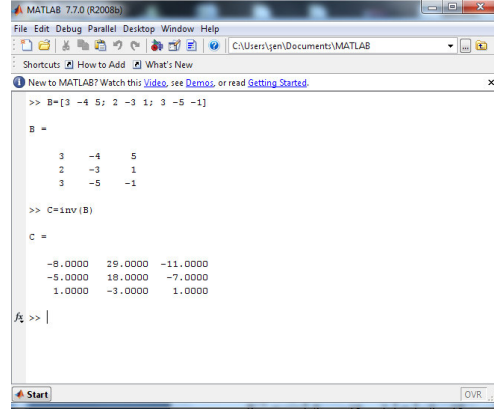
$$B_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad B_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18, \quad B_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1, \quad B_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3, \quad B_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matlab kullanarak matrisin tersini almak için “inv” komutu kullanılır. Öncelikle yukarıdaki B matrisini tanıtırız. (B=[3 -4 5; 2 -3 1; 3 -5 -1] şeklinde yazıp enter’e basarız.) Daha sonra “C=

inv(B)” komutunu ekrana girdiğimizde bize B’nin tersini alarak C matrisini verir. Aşağıdaki resimde yapılan işlemleri görebilirsiniz.



Şekil 15: Matlab kullanılarak matris hesaplaması

## 8.2. Duyarlılık Analizi

Duyarlılık analizi konusunu örnek üzerinde anlamaya çalışalım.

### Örnek:

$$\text{Ençok}Z=60x_1+30x_2+20x_3$$

$$\text{Ençok}Z=60x_1+30x_2+20x_3+0s_1+0s_2+0s_3$$

kısıtlar

kısıtlar

$$8x_1+6x_2+x_3 \leq 48$$

$$8x_1+6x_2+x_3+s_1 = 48$$

$$4x_1+2x_2+1,5x_3 \leq 20$$

$$4x_1+2x_2+1,5x_3+s_2 = 20$$

$$2x_1+1,5x_2+0,5x_3 \leq 8$$

$$2x_1+1,5x_2+0,5x_3+s_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Yukarıda verilen modelin başlangıç tablosu aşağıdaki gibidir.

temel	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	sağ taraf
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----------

$z_j - c_j$	-60	-30	-20	0	0	0	0
$s_1$	8	6	1	1	0	0	48
$s_2$	4	2	1,5	0	1	0	20
$s_3$	2	1,5	0,5	0	0	1	8

**Tablo 54:** Modelin başlangıç tablosu

Bu tablonun daha önceden öğrendiğimiz simpleks metot ile çözülmüş hali aşağıdaki gibi olduğunu düşünelim.

temel	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	sağ taraf
$z_j - c_j$	0	5	0	0	10	10	280
$s_1$	0	-2	0	1	2	-8	24
$x_3$	0	-2	1	0	2	-4	8
$x_1$	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2

**Tablo 55:** Optimal sonuç

Yukarıdaki çözümlü örneği göz önünde bulundurarak, duyarlılık analizinde kullanılacak kavramları tanımlayalım.

**BV** (Basic Variables): Optimal tablodaki temel değişkenleri ifade eden kümedir.

$$BV = \{s_1, x_3, x_1\}$$

**$X_{BV}$** : (mx1) boyutlu bir sütun vektörüdür. Optimal tablodaki temele giren değişkenleri ifade ettiğimiz vektördür, sıralaması optimal tablodaki gibidir.

$$X_{BV} = \begin{bmatrix} X_{BV_1} \\ \vdots \\ X_{BV_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

**NBV** (Nonbasic Variables): Optimal tablodaki temele girmeyen değişkenleri ifade eden kümedir.

$$NBV = \{x_2, s_2, s_3\}$$

**$X_{NBV}$ :**  $(n-m) \times 1$  boyutlu bir sütun vektörüdür. (n: tüm değişkenleri, m: optimal tabloda temele giren değişkenlerin sayısını temsil eder) Optimal tabloda temele girmeyen değişkenleri ifade ettiğimiz vektördür. Değişkenlerin sıralaması önemli değildir.

$$X_{NBV} = \begin{bmatrix} X_{NBV_1} \\ \vdots \\ X_{NBV_{n-m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$$

**$C_{BV}$ :**  $(1 \times m)$  boyutlu satır vektörüdür. Optimal tablodaki temele giren değişkenlerin, modelin amaç satırındaki katsayılarını temsil eder.

$$C_{BV} = [C_{BV_1} \quad \dots \quad C_{BV_m}] = [0 \quad 20 \quad 60]$$

**$C_{NBV}$ :**  $1 \times (n-m)$  boyutlu satır vektörüdür. Optimal tablodaki temele girmeyen değişkenlerin, modelin amaç satırındaki katsayılarını temsil eder.

$$C_{NBV} = [C_{NBV_1} \quad \dots \quad C_{NBV_{n-m}}] = [30 \quad 0 \quad 0]$$

**$B$ :** BV kümesindeki sıralamaya göre, optimal tabloda temele giren değişkenlerin modeldeki kısıt katsayılarının ifade edildiği  $(m \times m)$  boyutlu matristir.

$$BV = \{S_1, X_3, X_1\}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1,5 & 4 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{bmatrix}$$

**$a_j$ :**  $X_j$  değişkeninin modeldeki kısıt katsayılarını ifade eden sütun vektörüdür.

$$a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} \text{ veya } a_{S_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

**$N$ :** NBV kümesinde belirlediğimiz sıralamaya göre, optimal tabloda temele girmeyen değişkenlerin modeldeki kısıt katsayılarının ifade edildiği  $m \times (n-m)$  boyutlu matristir.

$$NBV = \{X_2, S_2, S_3\}, \quad N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**$b$ :** Modeldeki kısıtların sağ taraf değerlerinin ifade edildiği  $(m \times 1)$  boyutlu matristir.

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Yukarıda ifade ettiğimiz matrisleri kullanarak modeli matris olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} \text{ençok}Z &= [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} S_1 \\ X_3 \\ X_1 \end{bmatrix} \\ \text{ençok}Z &= C_{BV}X_{BV} + C_{NBV}X_{NBV} + [30 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} X_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kısıtlar

Kısıtlar

$$\begin{aligned} BX_{BV} + NX_{NBV} &= b \\ X_{BV}, X_{NBV} &\geq 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1,5 & 4 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ X_3 \\ X_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ X_3 \\ X_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} X_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

Şimdi optimal tablonun Z satır katsayılarını elde edebilmek bazı cebirsel işlemler yapacağız.

Yukarıdaki kısıt denkleminin her iki tarafını  $B^{-1}$  matrisiyle çarpalım.

$$B^{-1}BX_{BV} + B^{-1}NX_{NBV} = B^{-1}b \quad \text{ya da} \quad X_{BV} + B^{-1}NX_{NBV} = B^{-1}b \quad \text{olur.}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ matrisini yukarıdaki denklemde yerine koyduğumuzda,}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ X_3 \\ X_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

$$X_{BV} + B^{-1}NX_{NBV} = B^{-1}b \text{ denklemini } C_{BV} \text{ vektörüyle çarptığımızda,}$$

$$C_{BV}X_{BV} + C_{BV}B^{-1}NX_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b \text{ denklemini elde ederiz. Daha önceden Z denklemini,}$$

$$Z = C_{BV}X_{BV} + C_{NBV}X_{NBV} \text{ olarak ifade etmiştik. Yani } Z - C_{BV}X_{BV} - C_{NBV}X_{NBV} = 0 \text{ denklemini yukarıdaki kısıt denkleminin yerine koyarsak şu denklemi elde ederiz.}$$

$Z + (C_{BV}B^{-1}N - C_{NBV})X_{NBV} = C_{BV}B^{-1}b$  ( $C_{BV}B^{-1}b$  denklemi optimal Z satırının sağ tarafını ifade eder)

$X_j$ 'nin optimal Z satırındaki değerini ( $\bar{C}_j$  olarak isimlendirilir) elde edebilmemiz için şu denklemi kullanabiliriz:

$$C_{BV}B^{-1} (N \text{ matrisindeki } X_j \text{ değişkeninin sütunu}) - (C_{NBV} \text{ deki } X_j \text{'nin katsayısı}) = \bar{C}_j = C_{BV}B^{-1}a_j - C_j$$

Örneğimize dönecek olursak,

$$C_{BV} = [0 \quad 20 \quad 60], \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}$$

$$C_{BV}B^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10] \text{ olur.}$$

Şimdi de bu vektörü kullanarak optimal tabloda temele girmeyen değişkenlerin Z satırındaki katsayılarını hesaplayalım ve en baştaki primal çözümden doğru olup olmadığını kontrol edelim.

$$\bar{C}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - 30 = 5 \quad (a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} \text{ ve modelin amaç satırından } C_2=30)$$

Çözümdeki optimal tablonun Z satırına bakarsak  $X_2$ 'nin katsayısının 5 olduğunu görebiliriz.

$$\bar{C}_{S_2} = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

Çözümdeki optimal tablonun Z satırına bakarsak  $S_2$ 'nin katsayısının 10 olduğunu görebiliriz.

$$\bar{C}_{S_3} = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

Çözümdeki optimal tablonun Z satırına bakarsak  $S_3$ 'ün katsayısının 10 olduğunu görebiliriz.

Optimal tabloda temele giren değişkenlerin katsayılarının 0 olacağı bilindiği için bu hesaplamaların optimal tabloda temele giren değişkenler için yapılmasına gerek yoktur.



Optimal tablodaki Z satırının sağ taraf değerini de hesaplayalım.

$$C_{BV}B^{-1}b = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 280$$

Çözümdeki optimal tablonun Z satırına bakarsak çözüm değerinin 280 olduğunu görebiliriz.

Bu hesaplamalara göre optimal tablodaki Z satırını yazalım:

temel	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>3</sub>	sağ taraf
zj-cj	0	5	0	0	10	10	280

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Matrisler ile ilgili temel işlemler tekrar edilmiş ve duyarlılık analizinin matrisler ile nasıl yapılacağı tartışılmıştır.

### **Bölüm Soruları**

- 1) Duyarlılık analizinin yapılma nedenleri neler olabilir ?
- 2)  $B^{-1}$  matrisi biliyor ise, son tablonun bütün elemanları nasıl bulunabilir ?
- 3)  $B^{-1}$  matrisi son tablodan nasıl okunur ?
- 4)  $Z_j - C_j$  satırında bir değişkenin değerinin pozitif olması nasıl yorumlanabilir (modelin ençok problem olduğu kabul edilerek)
- 5) Son tablodan gölge fiyatın değerleri nasıl okunur ?

## **9. FARKLI DURUMLAR İÇİN DUYARLILIK ANALİZİ**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

9.1. Altı (6) farklı seçenek ile modelin duyarlılık analizinin yapılması

## **Giriş**

Bu bölümde doğrusal bir modelin duyarlılık analizi altı (6) farklı açıdan ele alınarak incelenmesi yapılmaktadır.

## 9.1.Farklı Durumlar İçin Duyarlılık Analizi

Duyarlılık analizi yaparken modelin 6 parametresinde değişiklikler yapıp sonuçları inceleyebiliriz. Bu değişiklikler şunlardır:

1. Optimal tabloda temele girmeyen değişkenlerin modeldeki amaç fonksiyonu katsayılarının değiştirilmesi
2. Optimal tabloda temele giren değişkenlerin modeldeki amaç fonksiyonu katsayılarının değiştirilmesi
3. Kısıtlardaki sağ taraf değerlerinde değişiklik yapılması
4. Optimal tabloda temele girmeyen değişkenlerin modelin kısıt denklemlerindeki katsayı matrisinin değerlerinin değiştirilmesi
5. Modele yeni bir değişken veya aktivite eklenmesi
6. Modele yeni bir kısıt eklenmesi

$$\begin{aligned} \text{ençok } Z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\leq 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

### 1. Optimal tabloda temele girmeyen değişkenlerin modeldeki amaç fonksiyonu katsayılarının değiştirilmesi:

Örnekteki optimal tabloda temele girmeyen değişkenlerden bir tanesinin  $X_2$  olduğunu biliyoruz.

$X_2$ 'nin amaç fonksiyonu değerini ne kadar değiştirelim ki çözümümüz optimal kalsın?

Örneğin;  $X_2$ 'nin amaç fonksiyonundaki katsayısını 30'dan  $30+\Delta$ 'ya değiştirelim.

$$a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad C_2=30+\Delta \text{ olsun} \quad \text{ve} \quad C_{BV}B^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10] \text{ hesaplanmıştı.}$$

$$\overline{C}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 35 - 30 - \Delta = 5 - \Delta$$

$\overline{C}_2 \geq 0$  olduğu durumda optimallik bozulmayacağı için yukarıdaki denklemde  $\Delta \leq 5$  olarak bulunur. Bu sonucu yorumlamak gerekirse,  $X_2$  değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısını ( $C_2$ 'yi) 5'ten fazla artırırsak yani 35'in üzerine çıkartırsak artık çözümümüz optimal olmaz. Örneğin;  $C_2=40$  olursa optimallik bozulur ve optimalliği yakalamak için iterasyonlar devam

ettirilerek  $Z=288$ ,  $S_1=27,2$ ,  $X_3=11,2$ ,  $X_2=1,6$ ,  $X_1=0$ ,  $S_2=S_3=0$  optimal çözümü elde edilir. Bu çözümle bir önceki çözüm karşılaştırılırsa, ilk durumda  $X_1$ 'den üretirken artık  $X_1$ 'den üretmediğimizi,  $X_2$ 'den üretmiyorken de artık  $X_2$ 'den ürettiğimizi görebiliriz. Kısacası ilk durumda çözüme girmeyen  $X_2$ 'nin satış fiyatını 30'dan 40'a artırırsak artık çözüme girecektir.

Temele girmeyen diğer değişkenler için de aynı analizi yapınız.

## 2. Optimal tabloda temele giren değişkenlerin modeldeki amaç fonksiyonu katsayılarının değiştirilmesi:

Örnekteki optimal tabloda temele giren değişkenlerden bir tanesinin  $X_1$  olduğunu biliyoruz.  $X_1$ 'in amaç fonksiyonu değerini ne kadar değiştirelim ki çözümümüz optimal kalsın?

Örneğin;  $X_1$ 'in amaç fonksiyonundaki katsayısını 60'dan  $60+\Delta$ 'ya değiştirelim. Bu durumda  $C_{BV} = [0 \quad 20 \quad 60 + \Delta]$  olur. Bu durumda  $C_{BV}B^{-1}$  vektörünü yeniden hesaplarız.

$$C_{BV}B^{-1} = [0 \quad 20 \quad 60 + \Delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} = [0 (10 - 0,5\Delta) (10 + 1,5\Delta)]$$

Şimdi Z satırı tekrar hesaplayalım.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad C_1 = 60 + \Delta, \quad C_2 = 30, \quad C_3 = 20$$

$$\overline{C_2} = C_{BV}B^{-1}a_2 - C_2 = [0 (10 - 0,5\Delta)(10 + 1,5\Delta)] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} - 30 = 5 + 1,25\Delta$$

$$\overline{C_{S_2}} = [0 (10 - 0,5\Delta)(10 + 1,5\Delta)] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10 - 0,5\Delta$$

$$\overline{C_{S_3}} = [0 (10 - 0,5\Delta)(10 + 1,5\Delta)] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10 + 1,5\Delta$$

Bu katsayıları göre şimdi optimal tablo Z satırını tekrar yazalım,

$$Z + (5 + 1,25\Delta)X_2 + (10 - 0,5\Delta)S_2 + (10 + 1,5\Delta)S_3$$



Optimalliğin bozulmaması için Z satırında negatif değer olmaması gerektiği kuralından yola çıkarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$5+1,25 \Delta \geq 0 (\Delta \geq -4)$$

$$10-0,5 \Delta \geq 0 (\Delta \leq 20)$$

$$10+1,5 \Delta \geq 0 (\Delta \geq -(\frac{20}{3}))$$

Bu durumda  $-4 \leq \Delta \leq 20$  olur. Yani,  $X_1$  değişkeninin amaç fonksiyonundaki katsayısını 4 azaltabilir ve 20 artırabiliriz, bu koşullarda optimalite bozulmaz. Örneğin;  $C_1=100$  olursa, yeni optimal çözüm  $Z=400$ ,  $S_1=16$ ,  $S_2=4$ ,  $X_1=4$ ,  $X_2=X_3=0$  olarak değişir. Yani  $X_3$ 'de artık çözümden çıkar ve yerine  $S_2$  çözüme girer.

### 3. Kısıtlardaki sağ taraf değerlerinde değişiklik yapılması:

Daha önce de tanımladığımız b matrisindeki 2. kısıta ait olan sağ taraf değerini ( $b_2=20$ )  $\Delta$  kadar değiştirdiğimizde olurluluğunun bozulmaması için  $\Delta$  ne olması gerektiğini araştıralım.

$$B^{-1} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + \Delta \\ 8 + 2\Delta \\ 2 - 0,5\Delta \end{bmatrix}$$

Olurluluğun bozulmaması için kısıt sağ taraf değerlerinin negatif olmaması gerekir kuralına göre aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$24+2\Delta \geq 0 (\Delta \geq -12)$$

$$8+2\Delta \geq 0 (\Delta \geq -4)$$

$$2-0,5\Delta \geq 0 (\Delta \leq 4)$$

Bu durumda  $-4 \leq \Delta \leq 4$  olur. Yani  $b_2$  sağ taraf kısıt değeri en fazla 4 azaltılıp 4 artırıldığında optimallik bozulmaz. Örneğin  $b_2=30$  olursa;

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ olur ve olurluluğun bozulduğu görülür.}$$

### 4. Optimal tabloda temele girmeyen değişkenlerin modelin kısıt denklemlerindeki katsayı matrisinin değerlerinin değiştirilmesi:

Örneğin; optimal tabloda çözüme girmeyen  $X_2$  değişkenini ele alalım.  $X_2$  değişkeni zaten çözüme girmediği için  $Z$  satırındaki katsayısını optimalliği bozacak bir  $\Delta$  değeri kadar değiştirmedığımız sürece ( $\Delta \leq 5$  olarak hesaplanmıştı, optimalliği bozmak için  $\Delta > 5$  kadar artırmalıyız) bu üründen üretilmeyecektir. Fakat  $a_2$  matris değerlerinin değişmesi (bu da teknoloji kısıtlarının değişmesiyle mümkün olabilir, mesela; yeni bir CNC tezgah alınıp işlemlerin daha kısa sürede yapılması gibi, tam tersi de mümkündür) analizde “katlanılabilir maliyet” (reduced cost ya da indirgenmiş maliyet olarak da karşımıza çıkabilir) değerlerinde bir değişime sebep olacaktır. Bunu şöyle bir örnekle açıklayalım;

$$a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\overline{C_2} = [0 \ 10 \ 10] \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 30 = 40 - 30 = 10 \text{ olur.}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1,5 \end{bmatrix} \text{ iken } \overline{C_2} = 5 \text{ bulunmuştu. } a_2 \text{ değerleri değişince } X_2 \text{ ürününü optimal olmasa bile}$$

üretmem halinde katlanmam gereken maliyet 5’ten 10’a yükselmiştir.

Burada öncelikle  $X_2$  değişkeninin modeldeki  $Z$  satırı katsayısını (satış fiyatını) optimaliteyi bozabilecek kadar artırıp,  $X_2$  ürününün çözüme girmesini sağladıktan sonra  $a_2$  vektör değerlerini değiştirip sonucu gözlemlememiz de mümkündür. (Değişkenin önce çözüme girmesini sağlayıp, ardından kısıt katsayılarının optimallik üzerindeki etkisi araştırılabilir.)

## 5. Modele yeni bir değişken veya aktivite eklenmesi

Örneğin; modele  $X_4$  gibi yeni bir değişken eklediğimizi düşünelim, şöyle olsun:

$$\begin{aligned} \text{çok}Z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + s_1 &= 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + s_2 &= 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + x_4 + s_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu durumda  $C_4=15$ ,  $a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  olduğu görülmektedir.  $\bar{C}_4 = [0 \ 10 \ 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 5 \geq 0$  olarak

hesaplanır. Yani son optimal çözüm  $X_4$  değişkeni ifade edilen kısıt katsayılarıyla eklendiğinde de optimalliğini korumaktadır. Eğer, yeni eklediğimiz değişken sonucunda  $\bar{C}_4 \leq 0$  olsaydı, son optimal çözüm artık optimal olmayacaktı. (Böyle bir durumda eski optimal çözüm suboptimal olarak da adlandırılır, yani bu çözüm hala olurludur fakat; optimal değildir, optimale ulaşmak için iterasyonları devam ettirmek gerekir.)

## 6. Modele yeni bir kısıt eklenmesi

Probleme  $X_1+X_2+X_3 \leq 11$  kısıtını ekleyelim. Optimal çözüm,  $Z=280$ ,  $X_1=2$ ,  $X_2=0$ ,  $X_3=8$ , bu kısıtı da sağladığı için optimallik durumu değişmez. Fakat;  $X_2 \geq 1$  kısıtını eklersek elimizdeki çözüm optimal çözüm olmaz. Bu durumda  $X_2-e_4=1$ 'i  $(-1)$  ile çarpıp (bunun sebebi problemin çözümüne dual simpleks ile devam edilecek olması nedeniyle olurluluğun bozulması gerektiğindendir.)  $-X_2+e_4=-1$  kısıtı son optimal çözüm tablosuna eklenir. Dual simpleks ile çözüme devam edildiğinde  $Z=275$ ,  $X_1=0,75$ ,  $X_2=1$ ,  $X_3=10$  olur.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde altı farklı durum dikkate alınarak duyarlılık analizi anlatılmıştır.

## ÇALIŞMA SORULARI

- 1) Çözümde olmayan bir değişkenin çözüme girebilmesi için  $z_j - c_j$  satırındaki değeri ne olmalıdır?
- 2) Çözüme giren bir değişkenin amaç fonksiyonundaki değeri değiştiğinde  $C_{BV}B^{-1}$  matrisinin değeri değişir mi? Değişirse nasıl değiştiğini bir örnekle gösteriniz
- 3)  $B^{-1}b$  Çarpımı sonucunda negatif değer çıkması ne anlama gelir?
- 4) Bir malın üretiminde yenilikler oluyor ve teknolojik katsayılar değişiyor ise, bu malın üretilip/üretilmemesine nasıl etki eder, bir örnekle gösteriniz
- 5) Üretilen bir ürüne yeni bir özellik katmak istiyoruz, bu yeni durumu modelimize nasıl yansıtabiliriz.

## **10. LINGO YAZILIM SONUÇLARININ YORUMLANMASI**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

### 10.1 Modelin Lingo Yazılımı ile Elde Edilen Sonuçlarının Yorumlanması

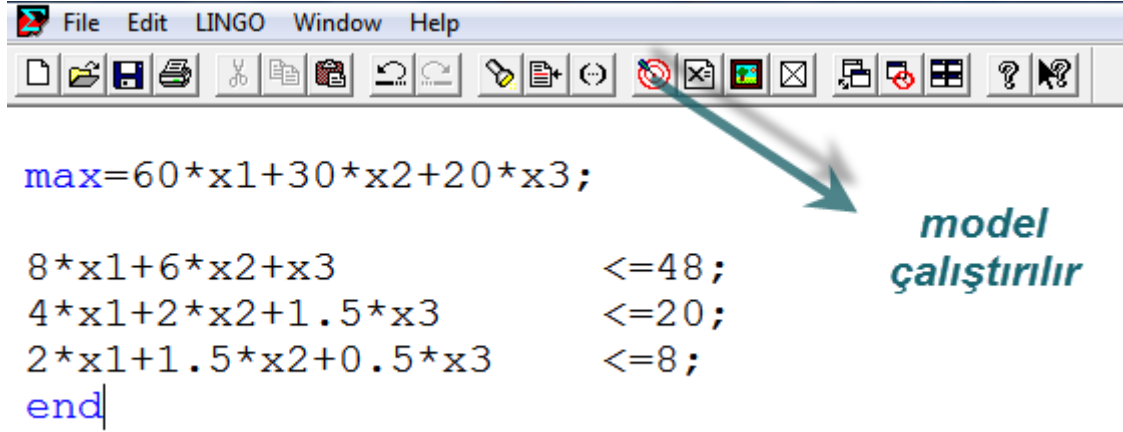
## **Giriş**

Bu bölümde kurulmuş bir doğrusal modelin Lingo yazılımı ile elde edilen sonuçlarının yorumlanması tekrar edilecek ve optimum çözümü sağlayacak sınır değerlerinin okunması ve yorumlanması konusu üzerinde durulacaktır.



## 10.1 Modelin Lingo Yazılımı ile Elde Edilen Sonuçlarının Yorumlanması

Modeli aşağıdaki gibi Lingo'ya yazalım.



Şekil 16: Modelin Lingo ekran görüntüsü

Modelin çözüm ekranı aşağıdaki gibidir.

Global optimal solution found.		
Objective value:		280.0000
Infeasibilities:		0.000000
Total solver iterations:		3
Elapsed runtime seconds:		0.05
Model Class: LP		
Total variables:	3	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	4	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	12	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	5.000000
X3	8.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	280.0000	1.000000
2	24.00000	0.000000
3	0.000000	10.00000
4	0.000000	10.00000

Şekil 17: Modelin sonucu

Modelin duyarlılık ekran çıktısı aşağıdaki gibidir.

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:			
Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	60.00000	20.00000	4.000000
X2	30.00000	5.000000	INFINITY
X3	20.00000	2.500000	5.000000

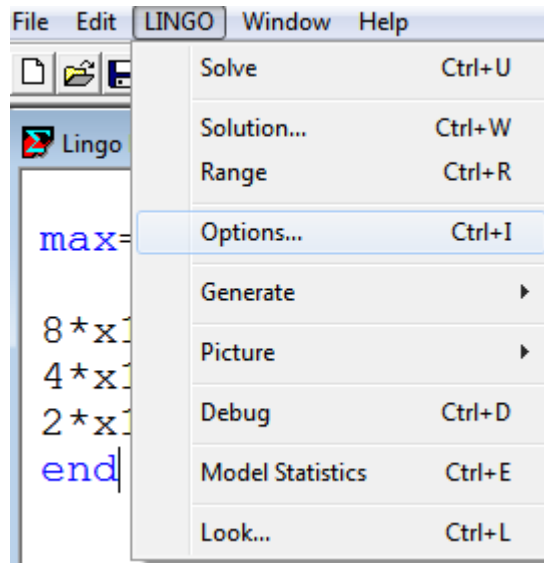
  

Righthand Side Ranges:			
Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	48.00000	INFINITY	24.00000
3	20.00000	4.000000	4.000000
4	8.000000	2.000000	1.333333

**Şekil 18:** Modelin duyarlılık sonuçları

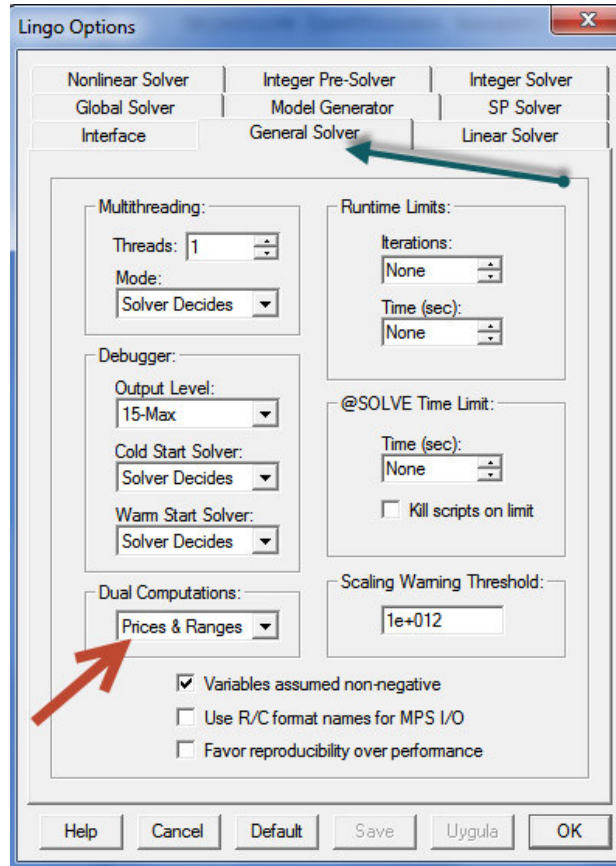
*Not: Lingo yazılımından duyarlılık (ranges) raporu almak için aşağıdaki adımlar takip edilebilir.*

*Lingo da editör ekranı açık iken, lingo menüsünden “options” seçeneği işaretlenir.*



**Şekil 19:** Modelin duyarlılık sonuçlarının elde edilmesi gereken ayarlar

*Açılan menüden “general solver” işaretli iken, “dual computations” seçeneklerinden “Prices & Ranges” işaretlenir.*



Şekil 20: Lingo yazılımında duyarlılık ayarları

*Sonrasında, model çözüldükten sonra, yukarıdaki birinci resimde görünen Lingo menüsü altında açılan “range” işaretlendiğinde, duyarlılık raporu üretilmiş olacaktır.*

Tablodaki sonuçlarda, amaç fonksiyonunun değeri 280 olarak bulunmuştur.

#### Çözüme Giren Değişkenler:

$X_1=2$  ve  $X_3=8$ ,  $X_2=0$  olarak görülmektedir.

**Reduced Cost:** Amaç fonksiyonunun değerini en çok probleminde azaltma, en az probleminde artırma etkisi yapar. Çözüme giren değişkenlerin değerleri “reduced cost” (katlanılabilir maliyet) sütununda sıfır görünür. Çözüme girmeyen değişkenler ise değer alır. Yukarıda bahsedilen örnekte,  $X_2$ ’nin üretimi sıfır olarak görülmektedir, çünkü karlı bir ürün değildir. Fakat bunun böyle olmasına rağmen  $X_2$  den 1 birim üretilmek istenirse, amaç

fonksiyonun değeri 5 birim azalacaktır (kardan 5 birim kaybedilecektir), yeni değer 275 olacaktır.

**Slack/Surplus:** Kullanılmayan kaynağın miktarını gösterir. Örnekte birinci kısıt 48 değerindedir. Fakat bu kaynak,  $X_1$  ve  $X_3$  üretilmesinden sonra kullanılmayan 24 birim atıl kapasite kalmıştır. ( $S_1$ ) 2. ve 3. kısıtların tamamı kullanılmıştır.

**Dual Price:** Gölge fiyatlar anlamına gelir. Elimizde olan kaynakları bir birim artırıma veya azaltma durumunda amaç fonksiyonu nasıl değiştirdiği bulunabilecektir. Gölge fiyatın pozitif olması durumunda, kaynağı bir birim artırdığımızda, amaç fonksiyonu gölge fiyat kadar artar, azaltıldığında ise, gölge fiyat kadar azalacaktır.

Gölge fiyatının negatif olduğu durumda ise, en çok probleminde amaç fonksiyonunu azaltıcı, en az probleminde ise artırıcı etki yapacaktır.

Tamamı kullanılmayan bir kaynağın gölge fiyatı sıfır olacaktır. Yukarıdaki örnekte, 48 birimlik kaynağın yalnızca 24 birimi kullanılmış, bir o kadarı da atıl kalmıştır, tamamı kullanılmayan bir birimin artırılması amaç fonksiyonunu artırmayacak, kullanılmayacak kısmı artışına sebep olacaktır. 48 birimlik kaynağı 50 birime artırdığımızda, kullanılmayan kaynak değeri 24 birim + 2 birim daha eklenerek, 26 birime ulaşacaktır.

İkinci ve üçüncü kaynağın gölge fiyatları 10 olarak görülmektedir. Bunun anlamı, 2. veya 3. kısıt bir birim artırılırsa, amaç fonksiyonu 10 birim artacaktır. Örnek olarak ikinci kısıttaki 8 birimlik kaynak 10 birime çıkarılır ise, amaç fonksiyonu  $280 + (10 \cdot 2)$  kadar artacaktır.

Gölge fiyat aynı zamanda, kullandığımız kaynakların hangisine öncelik vereceğimizi göstermesi açısından oldukça önemli bilgileri de verir. Bir işletme kapasite artırımına gitmek istese ve hangi kaynağa öncelik verilmesi gerektiğini bulmak isteseydik, gölge fiyatlara bakılacak ve en yüksek pozitif değer olan kaynağa öncelik verilmesi gerektiği sonucuna varılacaktır, çünkü bu kaynağın amaç fonksiyonuna etkisi diğerlerinden daha fazla olmaktadır.

**Ranges (Duyarlılık Aralığı):** Tabloda sunulan önemli sonuçlardan biri de değişkenlerin ve kaynakların duyarlılık aralıklarının bulunmasıdır. Öncelikli olarak modelde olan  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  değişkenlerinin duyarlılık aralıkları verilmektedir.

Yukarıda çözümü verilen modelin çözümünün değişmemesi şartı ile  $X_1$  değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı 20 birim artırılabilir, 4 birim azaltılabilecektir, yani  $X_1$

değişkeni [80-56] arasında değer alabilir. Bu aralığın dışındaki değerler için optimum çözüm seti (yani çözüme girenler = sayısal değer alanlar, var ise çözüme girmeyenler, değeri sıfır olanlar) değişecektir. Aralığın içinde kalındığı sürece optimum çözüm seti (değişkenlerin değeri pozitif ise, değeri pozitif, değişkenlerin değeri sıfır olanlar ise, sıfır olarak kalacaktır) değişmeyecektir. Örnek olarak  $X_1$  katsayısı 100 olarak seçilir ve model çözülür ise,  $X_1$  ve  $X_3$  pozitif,  $X_2$  sıfır olan sonucu değişecektir. Fakat  $X_1$  katsayısı 55 olarak seçilir ise, hala çözüme giren  $X_1$  ve  $X_3$  değişkenlerinin değeri pozitif ve  $X_2$  değişkenin değeri sıfır olacaktır, muhtemel ki, aralık içindeki değişimlerde  $X_1$  ve  $X_3$  değerleri değişecek, bundan dolayı da amaç fonksiyonun değişmesi beklenmelidir, modelin çözümünün değişmesinden kastedilen çözüme giren değişkenlerin tamamının veya birinin girmemesi, girmeyenlerin de tamamının veya birinin çözüme girmesi durumudur. Değişkenlerin değerlerinin değişmesi optimum set aynı kalmış fakat amaç fonksiyonun değerinin elbette ki değiştiğini göstermez. Yukarıda örnekte, eğer  $X_2$  çözüme girerse, optimum set değişecek, veya  $X_1$  ve/veya  $X_3$  çözümden çıkmış ise yine optimum set değişmiş olacaktır.

Değişkenlerin duyarlılık aralığı için yaptığımız yorumlar, kısıtların duyarlılık aralığı içinde geçerlidir. Örnek olarak 48 birimlik birinci kaynak [sonsuz, 24] aralığında kalır ise, modelin çözümü değişmez. Tamamı kullanılmayan 48 birimlik kaynağı istediğimiz kadar artırabiliriz, amaç fonksiyonuna etkisi olmayacak, modelin çözümü de değiştirmeyecektir. Aynı kaynağı 20 birim olarak kabul edersek, modelin çözümü değişecektir. İkinci kaynağın duyarlılık aralığı ise  $[20+4=24, 20-4=16]$  birim aralığı olur. Üçüncü kaynak ise duyarlılık aralığı  $[8+2=10, 8-1.33=6.67]$  olur.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde Lingo yazılımı kullanılarak modellerin çözümleri ve elde edilen sonuçların yorumlanması üzerinde durulmuştur.

## Bölüm Soruları

- 1) Lingo yazılımında uygun çözüm olmamasını (infeasibility) nasıl yorumlarsınız?
- 2) Lingo çözümlerinde “reduced cost” çözüme girmeyen bir değişkenin değerinin sıfır çıkması ne demektir?
- 3) Lingo çözümünden kaynakların hangisine öncelik verilebileceği ile ilgili yorumlar elde edilebilir mi?
- 4) Lingo çözümünde “allowable increase” veya “allowable decrease” değerinin sınırsız (infinity) çıkmasını nasıl yorumlarsınız?
- 5) Lingo çözümlerinde, en çok probleminde, optimum çözüm bozulmaması şartı ile, bir ürün için olabilecek en çok fiyat artışı ve en çok fiyat düşürmesi nasıl bulunabilir?

## **11. ULAŖTIRMA MODELLERİ**



## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

11.1. Ulaştırma Problemlerinin Modellenmesi

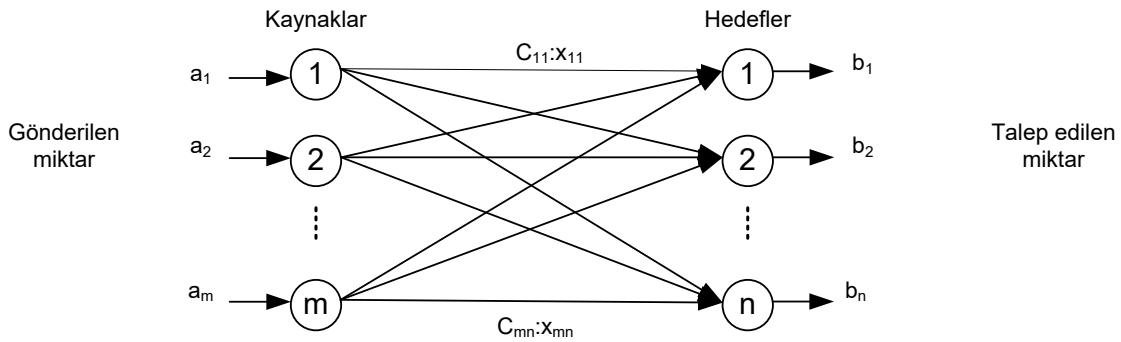
11.2. Başlangıç Çözümünün Oluşturulması

## **Giriş**

Bu bölümde ulaştırma problemlerinin modellenmesi incelenecek sonrasında, kurulan modellerin çözümü için geliştirilen metotlar bir örnek üzerinde incelenecektir.

## 11.1. Ulaştırma Probleminin Modellenmesi

Ulaştırma modeli, doğrusal programlama probleminin özel bir şeklidir. Bu modelde, malların kaynaklardan (fabrika gibi) hedeflere (depo gibi) taşınmasıyla ilgilenilir. Buradaki amaç bir taraftan hedefin talep gereksinimleri ve kaynakların arz miktarlarında denge sağlarken, diğer taraftan da her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum kılacak taşıma maliyetlerini belirlemektir. Modelde, verilen rota üzerindeki taşıma maliyetlerinin aynı rota üzerindeki taşıma miktarlarıyla doğru orantılı olduğu kabul edilmektedir. Ulaştırma modeli, malların bir yerden bir yere taşınmasından başka, stok kontrolü, iş gücü programlama, tesis yeri seçimi, üretim planlama, personel atama gibi alanlarda da kullanılabilmektedir.



**Şekil 21:** Ulaştırma modelinin görünümü

Problemin genel hali yukarıdaki şekilde gibidir. Her biri birer düğüm olarak gösterilen  $m$  kaynak ve  $n$  hedef vardır. Bağlantılar, kaynaklarla hedefler arasındaki rotaları belirten ifadelerdir.  $(i,j)$  bağlantısı,  $i$  kaynağını  $j$  hedefine bağlarken iki tür bilgi içermektedir:

1.  $C_{ij}$  birim taşıma maliyeti
2.  $X_{ij}$  taşıma miktarı

$i$  kaynağının arz miktarı  $a_i$ ,  $j$  hedefinin talep ettiği miktarda  $b_j$  olsun. Modelin amacı, tüm arz ve talep kısıtlarını sağlayan, ayrıca toplam taşıma maliyetlerini minimum kılan  $X_{ij}$  bilinmeyen miktarlarını belirlemektir.

**Örnek:** ABC elektrik üretim şirketinin dört şehre hizmet veren üç adet elektrik santrali vardır. Her bir santral sırasıyla 35 milyon, 50 milyon ve 40 milyon kWh elektrik üretmektedir. Şehirlerin en yoğun saatlerde talep ettiği elektrik miktarı ise sırasıyla 45 milyon, 20 milyon, 30

milyon ve 30 milyon kwh'dir. 1 milyon kwh elektriğin bir santralden bir şehre gönderilmesinin maliyeti aşağıdaki tabloda verilmiştir. Her şehrin talebini en az maliyetle karşılamak üzere bir ulaştırma tablosunda dengeli bir ulaştırma sorunu formüle ediniz ve sorunun DP modelini gösteriniz.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Santral 1	8	6	10	9
Santral 2	9	12	13	7
Santral 3	14	9	16	5

**Tablo 56:** Santrallerden Şehirlere Elektrik Maliyetleri (TL/kwh)

Doğrusal Model:

$X_{ij}$ : Santral i'de üretilen, şehir j'ye gönderilen elektrik miktarı (milyon kWh)

$$\text{enaz} Z = 8X_{11} + 6X_{12} + 10X_{13} + 9X_{14} + 9X_{21} + 12X_{22} + 13X_{23} + 7X_{24} + 14X_{31} + 9X_{32} + 16X_{33} + 5X_{34}$$

Kısıtlar:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 35 \text{ (arz kısıtları)}$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 50$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 40$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 45 \text{ (talep kısıtları)}$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 20$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 30$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 30$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ (} i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4 \text{)}$$

Ulaştırma Probleminin Formülasyonu:

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Arz
Santral 1	8	6	10	9	35
Santral 2	9	12	13	7	50
Santral 3	14	9	16	5	40
TALEP	45	20	30	30	125

**Tablo 57:** Talep, Arz ve Ulaştırma Maliyetleri

Toplam talep ve toplam arz eşit olduğundan (125 milyon kwh) sorun “dengeli”dir. (arz ve talep birbirini karşılıyor)

### Ulaştırma Problemlerinin Genel Doğrusal Programlama Gösterimi:

$$Z_{\text{enaz}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq S_i \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (\text{arz kısıtı})$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \geq d_j \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (\text{talep kısıtı})$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$$

Yukarıdaki sorun, bir ençok yapma sorunu (ulaştırma sonucu kar elde edilmesi gibi) da olsa, kısıtlarının benzer özellikler taşıması durumunda yine bir ulaştırma sorunu gibi ele alınabilir. Ulaştırma modellerinin uygulamaları sadece malların coğrafi bir yerden başka bir coğrafi yere taşınmasıyla sınırlı değildir. Bir stok kontrol problemi de ulaştırma problemi gibi çözülebilir.

**Örnek:** Bir XYZ firması yürüyüş sporu yapanlar için sırt çantaları üretmektedir. Bu ürünlere her yıl Mart ve Haziran ayları arasında talep olduğundan, bu yıl da dört aylık dönemdeki taleplerin aylara göre sırasıyla 100, 200, 180, 300 birim olacağı tahmin edilmektedir. Boraliş, yarım gün çalışan işgören kullandığı için üretim kapasitesi aylara göre değişmektedir. Bu yılki Mart-Haziran döneminde aylara göre sırasıyla 50, 180, 280, 270 birimlik üretim tahmini yapan Boraliş'in aylık üretimi, karşılık gelen ayın talebiyle tutmayabilmektedir. Bundan dolayı şirketin önünde talebi karşılamak için üç yol vardır.

1. Mevcut aylık üretimle talebi karşılamak,
2. Bir önceki ayın üretim fazlasıyla talebi karşılamak,
3. Bir sonraki ayın üretim fazlasıyla talebi karşılamak.

Birinci durumda, çanta başına üretim maliyeti 40TL'dir. İkinci durumda, çanta başına ilave 0,50 TL'lik bir elde bulundurma maliyeti söz konusu olacaktır. Üçüncü durumda ise, aylık her gecikme için çanta başına 2 TL'lik bir ceza maliyeti söz konusu olacaktır. Firma, dört aylık optimum üretim programını belirlemek istemektedir.

Bur durum, bir üretim-stok problemiyle bir ulaştırma problemi arasında aşağıdaki paralellikleri kurmak suretiyle ulaştırma problemi gibi modellenebilir:

Ulaştırma Problemi	Üretim-Stok Problemi
1. Kaynak: i	1. Üretim dönemi: i
2. Hedef: j	2. Talep dönemi: j
3. İ kaynağının arz miktarı	3. i dönemindeki üretim kapasitesi
4. j hedefindeki talep miktarı	4. j döneminin talebi
5. i kaynağından j hedefine birim ulaştırma maliyeti	5. j dönemi için i dönemindeki birim maliyet (üretim + stok + ceza)

İ döneminden j dönemine birim ulaştırma maliyeti aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$C_{ij} = \begin{cases} i\text{'deki üretim maliyeti, } i=j \\ i\text{'deki üretim maliyeti} + i\text{'den } j\text{'ye elde bulundurma maliyeti, } i < j \\ i\text{'deki üretim maliyeti} + i\text{'den } j\text{'ye ceza maliyeti, } i > j \end{cases}$$

	1	2	3	4	
1	40	40,5	41	41,5	50
2	42	40	40,5	41	180
3	44	42	40	40,5	280
4	46	44	42	40	270
TALEP	100	200	180	300	780

**Tablo 58:** Talep, Arz ve Ulaştırma Maliyetleri

Yukarıdaki tablodaki gibi formüle edilir.

### Ulaştırma Algoritması

Ulaştırma algoritmasının adımları simpleks algoritmasıyla tamamen paraleldir:

**Adım 1.** Başlangıç uygun temel çözümü belirleyerek adım 2'ye git.

**Adım 2.** Tüm temel dışı değişkenler için giren değişkeni belirlemek üzere simpleks yöntemin en iyi çözüm (optimum) koşulu kullanılır. En iyi çözüm koşulu sağlanmışsa dur, aksi halde adım 3'e git.

**Adım 3.** Mevcut tüm temel değişkenler içinden çıkan değişkeni belirlemek üzere simpleks yöntemin uygunluk koşulunu kullan ve yeni temel çözümü bul. Adım 2'ye geri dön.

## 11.2. Başlangıç Çözümünün Belirlenmesi

Ulaştırma problemlerinin özel yapısı, yapay olmayan bir başlangıç temel çözümünü sağlayan üç yöntemden birini kullanmamıza olanak sağlar. Bunlar:

1. Kuzeybatı Köşesi Yöntemi (northeast corner method)
2. En Düşük Maliyetler Yöntemi (minimum cost method)
3. Vogel Yaklaşım Yöntemidir (vogel's method)

**Kuzeybatı Köşesi Yöntemi:** Yöntem tablonun  $X_{11}$  değişkeninin yer aldığı kuzeybatıdaki hücrede başlar.

**Adım 1.** Seçilen hücreye mümkün olduğunca fazla atama yap ve ardından bu atanan miktarı arz ve talep miktarlarından çıkararak gerekli düzenlemeleri yap.

**Adım 2.** İleride tekrar atama yapılmasını önlemek için çıkarma sonucu sıfır arz ya da talebe ulaşan satır ya da sütunu iptal et. Hem satır hem de sütun aynı anda sıfıra gelmişse birini seç ve iptal edilmeyen satır (sütun)'daki sıfır arzı (talebi) dikkate alma (terk et).

**Adım 3.** İptal edilmeyen sadece bir satır ya da sütun kaldığında dur. Aksi halde, bir önceki işlemde sütun iptal edilmişse sağ kutuya, satır iptal edilmişse bir aşağıdaki kutuya geç. Adım 1'e git.

**Örnek:**

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	ARZ
Santral 1	8 <u>35</u>	6 <u>X</u>	10 <u>X</u>	9 <u>X</u>	35
Santral 2	9 <u>10</u>	12 <u>20</u>	13 <u>20</u>	7 <u>X</u>	50
Santral 3	14 <u>X</u>	9 <u>X</u>	16 <u>10</u>	5 <u>30</u>	40
TALEP	45	20	30	30	125

**Tablo 59:** Kuzeybatı metoduna göre atama sonucu

Bu atamanın maliyeti  $Z = 35 \cdot 8 + 10 \cdot 9 + 20 \cdot 12 + 20 \cdot 13 + 10 \cdot 16 + 30 \cdot 5 = 1180$  TL olur.

**En Düşük Maliyetler Yöntemi:** En düşük maliyetler yöntemi, en ucuz rota üzerine yoğunlaştığından daha iyi bir başlangıç çözümü bulmaktadır. En düşük maliyetli hücreye mümkün olan yüksek atamayı yapmak suretiyle başlangıç çözümü oluşturulmaya başlanır. (Eşitlik durumunda rastgele atama yapılır.) Daha sonra, arz ve talep miktarları ayarlanır ve yapacağı atama tanımlanan satır ya da sütun iptal edilir. Eğer aynı anda satır ya da sütun iptali gerekirse, kuzeybatı köşesi yönteminde olduğu gibi bunlardan sadece biri iptal edilir. Ardından, iptal edilmemiş hücreler içinden en düşük maliyetlisi bulunur ve süreç bu şekilde iptal edilmeyen bir satır ya da sütun kalmayıncaya kadar tekrarlanır.

**Örnek:**

	Şehir 1		Şehir 2		Şehir 3		Şehir 4		Arz
Santral 1	8		6		10		9		35
	<u>15</u>		<u>20</u>		<u>X</u>		<u>X</u>		
Santral 2	9		12		13		7		50
	<u>30</u>		<u>X</u>		<u>20</u>		<u>X</u>		
Santral 3	14		9		16		5		40
	<u>X</u>		<u>X</u>		<u>10</u>		<u>30</u>		
Talep	45		20		30		30		125

**Tablo 59:** En düşük maliyet metoduna göre atama sonucu

Bu atamanın maliyeti  $Z = 18 \cdot 8 + 30 \cdot 9 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 13 + 10 \cdot 16 + 30 \cdot 5 = 1080$  TL olur.

Kuzeybatı köşesi yönteminde bulunan başlangıç çözümünün amaç değeri  $1180 > 1080$  (en düşük maliyetler yönteminde bulunan başlangıç çözümünün amaç değeri)



### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde ulaştırma modelleri üzerinde durulmuştur. Ulaştırma problemlerinin doğrusal olarak modellenmesi yapılmıştır. İlave olarak ulaştırma modellerinin çözümü için üç farklı metottan kuzeybatı ve en küçük maliyet metodu ile çözümün nasıl yapılacağı örneklerle gösterilmiştir.

## Bölüm Soruları

- 1) Kuzeybatı ve En düşük maliyet yöntemleri ile elde edilen sonuçlar ile problemin doğrusal olarak kurulan bir modelin çözümlerinin karşılaştırıldığında ne söylenebilir?
- 2) Kuzeybatı yöntemi ile en düşük maliyet yöntemleri sonuçları aynı mı çıkar farklı çıkabilir mi? Farklı çıkar ise hangisinin daha iyi sonuç vermesi potansiyeli olabilir?
- 3) Ulaştırma modelinde atanacak hücre sayıları en az kaç tane olabilecekleri konusunda bir fikir yürütebilir miyiz? Araştırınız?
- 4) Kuzeybatı ve En düşük maliyet yöntemleri sezgisel metotlar mıdır?
- 5) Ulaştırma problemlerinde bir satıra atanan değerler ile o satırın toplam arz değeri arasından nasıl bir matematiksel ilişki vardır?

## **12. ULAŖTIRMA MODELLERİ (DEVAM)**

## **Giriş**

Bu haftaki çalışmada, ulaştırma problemlerinin çözümünde kullanılan Vogel metodu anlatılacaktır. Ayrıca üç metot ile elde edilen sonucun optimum olup olmadığının testinin nasıl yapılacağı bir örnek üzerinde incelenecektir.

## 12.1 Vogel Yaklaşım Yöntemi:

VAM en düşük maliyetler yönteminin geliştirilmiş hali olup, genelde en iyi başlangıç çözümünü vermektedir.

**Adım 1.** Pozitif arzlı (talepli) her satır için satırdaki (sütundaki) en küçük birim maliyeti aynı satırın (sütunun) ikinci en küçük birim maliyetinden çıkararak bir ceza ölçüsü belirle.

**Adım 2.** En büyük cezaya sahip satır ya sütunu sapt. Eşitlik halinde rastgele seçim yapılabilir. Bu satır ya da sütundaki en düşük maliyetli hücreye mümkün olduğunca fazla miktarda atama yap. Kalan arz ve talepleri hesapla ve sıfırlanan satır ya da sütunu iptal et. Aynı anda sıfırlanan satır ya da sütun varsa, sadece birini iptal ederek kalan satıra (sütuna) sıfır miktarda arz (talep) ata.

**Adım 3.** (a) İptal edilmemiş arz ya da talebe sahip tam bir satır (sütun) kalmışsa dur.  
(b) İptal edilmemiş pozitif arzlı (talepli) bir satır (sütun) kalmamışsa, en düşük maliyetler yöntemiyle satırdaki (sütundaki) temel değişkenleri belirle ve dur.  
(c) İptal edilmemiş satır ve sütunların tümü sıfır arz ve talebe sahipse, en düşük maliyetler yöntemiyle sıfır temel değişkenleri belirle ve dur.  
(d) Aksi halde adım 1'e git.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Arz	Satır cezaları
Santral 1	8	6	10	9	35	8-6=2
Santral 2	9	12	13	7	50	9-7=2
Santral 3	14	9	16	5	40	9-5=4
Talep	45	20	30	30	125	
Sütun cezaları	9-8=1	9-6=3	13-10=3	7-5=2		

**Tablo 60: Atama 1, Santral 3 - şehir 4**

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4		Satır cezaları
Santral 1	8	6	10		35	8-6=2
Santral 2	9	12	13	X	50	12-9=3
Santral 3	14	9	16		10	14-9=5
	<u>X</u>	<u>10</u>	<u>X</u>	<u>X</u>		
Talep	45	20	30	0		
Sütun cezaları	9-8=1	9-6=3	13-10=3			

**Tablo 61: Atama 2, Santral 3-şehir 2**

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4		Satır cezaları
Santral 1	8	6	10		35	8-6=2
		<u>10</u>		X		
Santral 2	9	12	13		50	12-9=3
		<u>X</u>		X		
Santral 3					0	
	X	X	X	X		
Talep	45	10	30	0		
Sütun cezaları	9-8=1	12-6=6	13-10=3			

**Tablo 62: Atama 3, Santral 1-şehir 2**

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4		Satır cezaları
Santral 1	8		10		25	10-8=2
	<u>X</u>	X		X		
Santral 2	9		13		50	13-9=4
	<u>45</u>	X		X		

Santral 3	X		X		X		X		0
Talep	45	0	30	0					
Sütun cezaları	9-8=1		13-10=3						

**Tablo 63: Atama 4, Santral 2-şehir 1**

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Satır cezaları
Santral 1	X	X	25	X	25
Santral 2	X	X	5	X	5
Santral 3	X	X	X	X	0
Talep	0	0	30	0	
Sütun cezaları			13-10=3		

**Tablo 64: Atama 5, Santral 1-şehir 3**

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	
Santral 1	X	10	25	X	35
Santral 2	45	X	5	X	50
Santral 3	X	10	X	30	40
Talep	45	20	30	30	125

**Tablo 65: Atama 6, Atamalar sonuçlandı**

Bu atamanın maliyeti  $Z = 45 \cdot 9 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 9 + 25 \cdot 10 + 5 \cdot 13 + 30 \cdot 5 = 1020$  TL olur.

En düşük maliyetler yönteminde bulunan başlangıç çözümünün amaç değeri 1080 TL

Kuzeybatı köşesi yönteminde bulunan başlangıç çözümünün amaç değeri 1180 TL

$1180 > 1080 > 1020$ .

## 12.2. Çözümün Optimum Olup Olmadığının Araştırılması

### Çözüm Algoritması

Başlangıç çözümü belirlendikten sonra, optimum çözümü belirlemek için şu adımlar uygulanır:

Adım 1. Çözümü geliştirebilmek için, mevcut temeldışı değişkenler içerisinde giren değişkeni belirlemek üzere simpleks optimumluk kuralını kullan. Optimumluk koşulu sağlanmışsa dur, aksi halde adım 2'ye git.

Adım 2. Simpleks uygunluk koşulunu kullanarak çıkan değişkeni belirle. Temeli değiştir ve adım 1'e dön.

Temeli değiştirme hesaplamaları simpleks yöntemde kullanılan satır işlemlerine benzemez. Onun yerine, ulaştırma modelinin özel yapısından yararlanan daha basit hesaplamalar yapılır.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4	Arz
Santral 1	8 <u>35</u>	6 <u>X</u>	10 <u>X</u>	9 <u>X</u>	35
Santral 2	9 <u>10</u>	12 <u>20</u>	13 <u>20</u>	7 <u>X</u>	50
Santral 3	14 <u>X</u>	9 <u>X</u>	16 <u>10</u>	5 <u>30</u>	40
Talep	45	20	30	30	125

**Tablo 66: Başlangıç Çözümü**

Yukarıdaki tabloda kuzeybatı köşesi yöntemiyle yapılan başlangıç çözümü görülmektedir. Mevcut temel dışı değişkenler içinden giren değişkeni belirlemek için, çarpanlar yöntemi kullanılarak Z satırındaki temeldışı katsayılarla hesaplamalar yapılır. Çarpanlar yönteminde tablonun i satır ve j sütunlu  $u_i$  ve  $v_j$  çarpanlarıyla ilgilenilir. Mevcut  $X_{ij}$  temel değişkenlerinin her biri için bu çarpanlar  $u_i + v_j = c_{ij}$ , temeldeki her  $X_{ij}$  için denklemini sağlar.

Temel Değişken	(u,v) denklemi	Çözüm
$X_{11}$	$u_1 + v_1 = 8$	$u_1 = 0$ ise $v_1 = 8$ ( $u_1 = 0$ keyfi kabul)
$X_{21}$	$u_2 + v_1 = 9$	$v_1 = 8$ ise $u_2 = 1$
$X_{22}$	$u_2 + v_2 = 12$	$u_2 = 1$ ise $v_2 = 11$
$X_{23}$	$u_2 + v_3 = 13$	$u_2 = 1$ ise $v_3 = 12$
$X_{33}$	$u_3 + v_3 = 16$	$v_3 = 12$ ise $u_3 = 4$
$X_{34}$	$u_3 + v_4 = 5$	$u_3 = 4$ ise $v_4 = 1$

**Tablo 67: Temel değişkenler**

$u_1 = 0$ ,  $v_1 = 8$ ,  $u_2 = 1$ ,  $v_2 = 11$ ,  $v_3 = 12$ ,  $u_3 = 4$ ,  $v_4 = 1$  değerleri kullanılarak temelde olmayan değişkenleri değerlendirmek üzere  $u_i + v_j - c_{ij}$  formülüyle hesaplama yapılır.



Temeldışı Değişken	(u,v) denklemi
$X_{12}$	$u_1+v_2-c_{12}=0+11-6=5$
$X_{13}$	$u_1+v_3-c_{13}=0+12-10=2$
$X_{14}$	$u_1+v_4-c_{14}=0+1-9=-8$
$X_{24}$	$u_2+v_4-c_{24}=1+1-7=-5$
$X_{31}$	$u_3+v_1-c_{31}=4+8-14=-2$
$X_{32}$	$u_3+v_2-c_{32}=4+11-9=6$

**Tablo 68:** Temele girmeyen değişkenler

Yukarıdaki tablodaki işlemlerde her temel değişken için  $u_i+v_j-c_{ij}=0$  olacaktır. Bu durumlar, simpleks tablonun Z satırı hesaplamalarına eşdeğer olarak aşağıdaki tablodaki gibi gösterilebilir.

Temel	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	$X_{24}$	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$	$X_{34}$
Z	0	5	2	-8	0	0	0	-5	-2	6	0	0

Ulaştırma modelinin minimum maliyeti araması nedeniyle, giren değişken, Z satırındaki en büyük pozitif katsayıya sahip olan değişkendir. Dolayısıyla  $X_{32}$  giren değişkendir.

	$v_1=8$	$v_2=11$	$v_3=12$	$v_4=0$	Arz
$u_1=0$	<div><div>8</div><div><u>35</u></div></div>	<div><div>6</div><div><u>5</u></div></div>	<div><div>10</div><div><u>2</u></div></div>	<div><div>9</div><div><u>-8</u></div></div>	35
$u_2=1$	<div><div>9</div><div><u>10</u></div></div>	<div><div>12</div><div><u>20-Q</u></div></div>	<div><div>13</div><div><u>20+Q</u></div></div>	<div><div>7</div><div><u>-5</u></div></div>	50
$u_3=4$	<div><div>14</div><div><u>-2</u></div></div>	<div><div>9</div><div><u>Q</u></div></div>	<div><div>16</div><div><u>10-Q</u></div></div>	<div><div>5</div><div><u>30</u></div></div>	40
Talep	45	20	30	30	125

**Tablo 69:**  $x_{32}$  çözüme girecek değişken

	$v_1=8$	$v_2=11$	$v_3=12$	$v_4=0$	Arz
$u_1=0$	<div><div>8</div><div><u>35</u></div></div>	<div><div>6</div><div><u>5</u></div></div>	<div><div>10</div><div><u>2</u></div></div>	<div><div>9</div><div><u>-8</u></div></div>	35
$u_2=1$	<div><div>9</div><div><u>10</u></div></div>	<div><div>12</div><div><u>10</u></div></div>	<div><div>13</div><div><u>30</u></div></div>	<div><div>7</div><div><u>-5</u></div></div>	50
$u_3=4$	<div><div>14</div><div><u>-2</u></div></div>	<div><div>9</div><div><u>10</u></div></div>	<div><div>16</div><div><u>10-Q</u></div></div>	<div><div>5</div><div><u>30</u></div></div>	40
Talep	45	20	30	30	125

**Tablo 70:**  $x_{32}$  çözüme girdi

Temel Değişken	(u,v) denklemi	Çözüm
$X_{11}$	$u_1+v_1=8$	$u_1=0$ ise $v_1=8$ ( $u_1=0$ keyfi kabul)
$X_{21}$	$u_2+v_1=9$	$v_1=8$ ise $u_2=1$
$X_{22}$	$u_2+v_2=12$	$u_2=1$ ise $v_2=11$
$X_{23}$	$u_2+v_3=13$	$u_2=1$ ise $v_3=12$
$X_{32}$	$u_3+v_2=9$	$v_2=11$ ise $u_3=-2$
$X_{34}$	$u_3+v_4=5$	$u_3=-2$ ise $v_4=7$

**Tablo 71:** x32 çözüme girdikten sonraki temel değişkenler

Temeldışı Değişken	(u,v) denklemi
$X_{12}$	$u_1+v_2-c_{12}=0+11-6=5$
$X_{13}$	$u_1+v_3-c_{13}=0+12-10=2$
$X_{14}$	$u_1+v_4-c_{14}=0+7-9=-2$
$X_{24}$	$u_2+v_4-c_{24}=1+7-7=1$
$X_{31}$	$u_3+v_1-c_{31}=-2+8-14=-8$
$X_{33}$	$u_3+v_3-c_{33}=-2+12-16=-6$

**Tablo 71:** x32 çözüme girdikten sonraki temeldışı değişkenler

	$v_1=8$	$v_2=11$	$v_3=12$	$v_4=0$	ARZ
$u_1=0$	8 <b><u>35-Q</u></b>	6 <b>Q</b>	10 <b><u>2</u></b>	9 <b><u>-2</u></b>	35
$u_2=1$	9 <b><u>10+Q</u></b>	12 <b><u>10-Q</u></b>	13 <b><u>30</u></b>	7 <b><u>1</u></b>	50
$u_3=4$	14 <b><u>-8</u></b>	9 <b><u>10</u></b>	16 <b><u>-6</u></b>	5 <b><u>30</u></b>	40
TALEP	45	20	30	30	125

**Tablo 72:** x12 çözüme girecek değişken

	$v_1=8$	$v_2=11$	$v_3=12$	$v_4=0$	ARZ
$u_1=0$	8 <b><u>25</u></b>	6 <b>10</b>	10	9	35
$u_2=1$	9 <b><u>20</u></b>	12	13 <b><u>30</u></b>	7	50
$u_3=4$	14	9 <b><u>10</u></b>	16	5 <b><u>30</u></b>	40
TALEP	45	20	30	30	125

**Tablo 73:** x12 çözüme girdi

Temel Değişken	(u,v) denklemi	Çözüm
$X_{11}$	$u_1+v_1=8$	$u_1=0$ ise $v_1=8$ ( $u_1=0$ keyfi kabul)
$X_{12}$	$u_1+v_2=6$	$u_1=0$ ise $v_2=6$
$X_{21}$	$u_2+v_1=9$	$v_1=8$ ise $u_2=1$
$X_{23}$	$u_2+v_3=13$	$u_2=1$ ise $v_3=12$
$X_{32}$	$u_3+v_2=9$	$v_2=6$ ise $u_3=3$
$X_{34}$	$u_3+v_4=5$	$u_3=3$ ise $v_4=2$

**Tablo 74:** x12 çözüme girdikten sonraki temel değişkenler

Temeldışı Değişken	(u,v) denklemi
$X_{13}$	$u_1+v_3-c_{13}=0+12-10=2$
$X_{14}$	$u_1+v_4-c_{14}=0+2-9=-7$
$X_{22}$	$u_2+v_2-c_{22}=1+6-12=-5$
$X_{24}$	$u_2+v_4-c_{24}=1+2-7=-4$
$X_{31}$	$u_3+v_1-c_{31}=3+8-14=-3$
$X_{33}$	$u_3+v_3-c_{33}=3+12-16=-1$

**Tablo 75:** x12 çözüme girdikten sonraki temeldışı değişkenler

	$v_1=8$	$v_2=11$	$v_3=12$	$v_4=0$	
$u_1=0$	8 <u>25-Q</u>	6 <b>10</b>	10 <b>Q</b>	9 <u>-7</u>	35
$u_2=1$	9 <u>20+Q</u>	12 <u>-5</u>	13 <u>30-Q</u>	7 <u>-4</u>	50
$u_3=4$	14 <u>-3</u>	9 <b>10</b>	16 <u>-1</u>	5 <b>30</b>	40
TALEP	45	20	30	30	125

**Tablo 76:** x13 çözüme girecek

	$v_1=8$	$v_2=11$	$v_3=12$	$v_4=0$	
$u_1=0$	8 <b>45</b>	6 <b>10</b>	10 <b>25</b>	9 <u>-7</u>	35
$u_2=1$	9 <u>-5</u>	12 <b>5</b>	13 <u>-4</u>	7 <b>30</b>	50
$u_3=4$	14 <u>-3</u>	9 <b>10</b>	16 <u>-1</u>	5 <b>30</b>	40
TALEP	45	20	30	30	125

**Tablo 77:** x13 çözüme girdi

Temel Değişken	(u,v) denklemi	Çözüm
$X_{12}$	$u_1+v_2=6$	$u_1=0$ ise $v_2=6$ ( $u_1=0$ keyfi kabul)
$X_{13}$	$u_1+v_3=10$	$u_1=0$ ise $v_3=10$
$X_{21}$	$u_2+v_1=9$	$v_1=6$ ise $u_2=3$
$X_{23}$	$u_2+v_3=13$	$v_3=10$ ise $u_2=3$
$X_{32}$	$u_3+v_2=9$	$v_2=6$ ise $u_3=3$
$X_{34}$	$u_3+v_4=5$	$u_3=3$ ise $v_4=2$

**Tablo 78:** x13 çözümü girdikten sonraki temel değişkenler

Temeldışı Değişken	(u,v) denklemi
$X_{11}$	$u_1+v_1-c_{11}=0+6-8=-2$
$X_{14}$	$u_1+v_4-c_{14}=0+2-9=-7$
$X_{22}$	$u_2+v_2-c_{22}=3+6-12=-3$
$X_{24}$	$u_2+v_4-c_{24}=3+2-7=-2$
$X_{31}$	$u_3+v_1-c_{31}=3+6-14=-5$
$X_{33}$	$u_3+v_3-c_{33}=3+10-16=-3$

**Tablo 79:** x13 çözümü girdikten sonraki temel değişkenler

Temel	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	$X_{24}$	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$	$X_{34}$
Z	-2	0	0	-7	0	-3	0	-2	-5	0	-3	0

Model enküçükleme modeli olduğundan Z satırı değerlerine bakılarak çözümün optimal olduğu görülür.  $Z_{enaz}=10*6+25*10+45*9+5*13+10*9+30*5= 1020$  olur.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde, ulaştırma modellerinin çözümüne devam edilmiş ve vogel metodunun detayları incelenmiştir. İlave olarak da, elde edilen çözümün optimal olup/olmadığının testinin nasıl yapılacağı üzerinde durulmuştur.

## Bölüm Soruları

- 1) Vogel metodu ile kuzey batı ve en düşük maliyet yöntemlerinin sonuçlarını yorumlayınız?
- 2) Kuzeybatı ile bulunan bir sonuç, geliştirilerek optimum sonuca ulaşılabilir mi?
- 3) Optimuma en yakın sonuç Vogel metodu üretebilir mi? neden?
- 4) Bir metot ile elde edilen çözümün iyileştirilmesinde, neden atanmış hücreler üzerinde hesap yapılmaktadır?
- 5) İyileştirme aşamasında, atanan hücre çıkıyor, sonra da giriyor ise ve bu işlem sürekli tekrar ediyor ise, çözüm konusunda ne söylenebilir?

### **13. TAM SAYILI PROGRAMLAMA**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

13.1. Problemlerinin tam sayılı programlama olarak modellenmesi ve Lingo ile çözülmesi



## **Giriş**

Bu haftaki çalışmada, tam sayılı problemlerin modellenmesi üzerinde durulacaktır. Sonrasında ise, lingo yazılımı ile çözümü anlatılacaktır.

### 13.1 Problemlerinin Tam Sayılı Programlama Olarak Modellenmesi

Daha önceki doğrusal modellerin çözümlerinden de hatırlanacağı gibi, optimum sonuçlar arasında tam sayı olmayan yani kesirli değerlerin olabildiğini görmüştük. Örnek olarak en uygun personel sayısını bulmak istediğimizi düşünelim. Bu durumda bulunacak personel sayısının kesirli olması anlamsız olacağı için, çözümün tam sayı olmasının beklenmesi doğal olacaktır. Bir başka örnekte, üretilecek ürün üretim miktarlarının tam sayı olmasını isteyebiliriz. Bu örneklerde olduğu gibi, doğrusal modellerin çözümleri beklentilerimizi karşılamayacaktır. Bu durumda mevcut doğrusal modellerin özel formlarından olan değişkenlerin tam sayı olma şartı getirilmesi gerekmektedir. Değişkenlerinin tamamının veya bir kısmının tam sayı olması istenen model, tam sayılı programlama olarak adlandırılır.

Genel olarak tam sayılı programlama problemi şu şekilde modellenir:

$$Z_{\text{ençok/enaz}} = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_j$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

**Örnek:** Bir ABC yatırım firması NŞD (net şimdiki değer) analizini kullanarak farklı yatırım araçlarının seçimi konusunda karar vermek istemektedir. Bu amaçla piyasadan elde edilen analizler sonucunda, yatırımların maliyetleri ve NŞD’lerin getirileri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Tablodaki veriler dikkate alındığında, firma toplam getirisini en çok yapmak için 14000TL’lik yatırım bütçesini nasıl tahsis etmelidir?

Yatırımlar	Yatırım Miktarı –TL (NŞD)	Getirisi –TL (NŞD )
1	5000	16000
2	7000	22000
3	4000	12000
4	3000	8000

**Tablo 80:** Yatırımlar ve getirileri

Yukarıdaki problemin çözümü için tam sayılı programlama kullanılarak çözüm aranacaktır.

$$\text{Ençok}Z=16X_1+22X_2+12X_3+8X_4$$

Kısıtlar

$$5X_1+7X_2+4X_3+3X_4 \leq 14$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

Yukarıda verilen çözümde, amaç fonksiyonunun değeri, 42 olarak bulunmuştur. Aşağıdaki şekle dikkat edilir ise, bulunan değerler, 0 veya 1 şeklinde olması isteneceği için,  $X_1=0$ ,  $X_2=X_3=X_4=1$  olmuştur. Lingo yazılımında, modeldeki değişkenlerin tam sayı olup/olmadığı tanımlanmalıdır. “end” den sonra @BIN (x) yazılarak, dört değişkenin değerinin 0 veya 1 olması şartı konulmuştur.

Yani, bizim için 1. yatırım karlı değildir ve buna göre bu yatırımı yapmamız istenmez. Bütçemizi diğer yatırımlar için ayırmamız öngörülmüştür, 2., 3. ve 4. yatırımı yapmamız beklenir. Burada her yatırımı 1’er kez yapmamız istendiği için bu sonuç ortaya çıktı, her yatırımı birden fazla kez yapabilseydik nasıl çözerdik? (Örneğin; 1 külçe yerine 2 külçe altına yatırım yapabildiğimiz bir modelimiz olsaydı?)

Global optimal solution found.		
Objective value:	42.00000	
Objective bound:	42.00000	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	0	
Total solver iterations:	0	
Elapsed runtime seconds:	0.27	
Model Class:	PILP	
Total variables:	4	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	4	
Total constraints:	2	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	8	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	-16.00000
X2	1.000000	-22.00000
X3	1.000000	-12.00000
X4	1.000000	-8.000000

```

Lingo Model - Lingo2
max=16*x1+22*x2+12*x3+8*x4;

5*x1+7*x2+4*x3+3*x4    <=14;
@BIN (x1);
@BIN (x2);
@BIN (x3);
@BIN (x4);
end

```

**Şekil 22:** Modelin Lingo ile çözümü

Modeli değiştirsek ve her bir yatırımın, tam sayı şartını saklı tutarak, birden çok olabileceğini ifade etmek istesek, GIN (x) eklememiz yeterli olacaktır. (Yani  $X_j \in Z^+$  ( $j=1,2,3,4$ ) durumunda) Bu ifade, değişkenlerin tam sayı olma şartını sağlayacaktır. Değişkenler 1 den büyük değer alabilirler, fakat kesitli değerler alamazlar. Aşağıdaki şekilde modelin bu kısıtlar altında çözülmüş halini görmekteyiz.

```

Global optimal solution found.
Objective value:                44.00000
Objective bound:                44.00000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        0
Elapsed runtime seconds:        0.10

Model Class:                    MILP

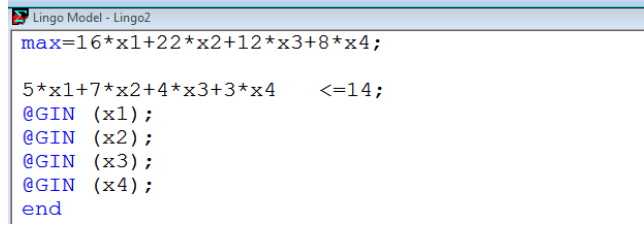
Total variables:                4
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              4

Total constraints:              2
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                8
Nonlinear nonzeros:            0

Variable      Value      Reduced Cost
X1            2.000000    -16.00000
X2            0.000000    -22.00000
X3            1.000000    -12.00000
X4            0.000000     -8.00000

```



```

Lingo Model - Lingo2
max=16*x1+22*x2+12*x3+8*x4;

5*x1+7*x2+4*x3+3*x4    <=14;
@GIN (x1);
@GIN (x2);
@GIN (x3);
@GIN (x4);
end

```

Şekil 23: Modelin Lingo ile çözümü

Bu sonuçlara göre, ikinci yatırım en karlı yatırım olarak görülmekte, ikinci yatırımdan iki birim yatırım yapılması karımızı en çok yapacak çözüm olmaktadır.

**Örnek:** Bir büyük metropol şehrin 6 farklı bölgeden oluştuğunu düşünelim. Şehir planlamacıları, kurulması düşünülen itfaiye merkezlerinin yerlerini ve kurulacak istasyon yeri sayısını bulmak istemektedirler. Bir itfaiye merkezinden bölgelere olan mesafenin en çok 15 dakika olması istenmektedir. Bölgelerarası uzaklıklar dakika cinsinden aşağıdaki tabloda verilmiştir. Hangi bölgelerin itfaiye merkezi olarak seçilmesi uygun olacaktır?

		Bölgeler (dakika)					
		1	2	3	4	5	6
Bölgeler	1	0	10	20	30	30	20
	2	10	0	25	35	20	10
	3	20	25	0	15	30	20
	4	30	35	15	0	15	25
	5	30	20	30	15	0	14
	6	20	10	20	25	14	0

Tablo 81: Bölgeler ve aralarındaki mesafeler(dakika)

Yukarıdaki problemi tam sayılı programlamayı kullanarak şu şekilde modelleyebiliriz:

Bölgeler arasında 15 dakika ve daha az olan yerler;

Bölge 1 : 1,2

Bölge 2 : 1,2,6

Bölge 3 : 3,4

Bölge 4 : 3,4,5

Bölge 5 : 4,5,6

Bölge 6 : 2,5,6

$$\text{enaz} Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

Kısıtlar

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$X_1 + X_2 + X_6 = 1$$

$$X_3 + X_4 = 1$$

$$X_3 + X_4 + X_5 = 1$$

$$X_4 + X_5 + X_6 = 1$$

$$X_2 + X_5 + X_6 = 1$$

$$X_j \in \{0,1\} \quad (j=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Yukarıdaki modeli Lingo'ya yazıp çözdürdüğümüzde  $X_2=X_4=1$  ve  $X_1+X_3+X_5+X_6=0$  olarak bulunur. Yani 2. ve 4. bölgeleri itfaiye merkezi olarak seçtiğimizde diğer tüm bölgelere en 15 dakikadan daha kısa sürelik bir mesafe olmaktadır.

## 13.2. Karışık Tamsayılı Model

**Örnek:** Bir tekstil firması t-shirt, gömlek ve pantolon üretmektedir. Ürünler için firma uygun tezgâhlar kiralamayı düşünmektedir. Her tezgâhtan en fazla 1 tane kiralanacaktır ve tezgâh kira ücretleri aşağıdaki gibidir. Ürünler için gerekli işçilik ve kumaş miktarları aşağıda verilmiştir.

Yukarıdaki problemi şu şekilde modelleyebiliriz:

	Uygun Tezgah Kira Bedeli (TL-haftalık)	Ürünün Satış Fiyatı	Ürünün Maliyeti	Tablo 82:
<i>T-shirt</i>	200	12	6	
<i>Gömlek</i>	150	8	4	
<i>Pantolon</i>	100	15	8	
Ürünlerin satış ve maliyet bilgileri				

**Tablo 83:** Ürünlerin işçilik ve kumaş gereksinim bilgileri

	İşçilik (saat)	Kumaş (birim)
<i>T-shirt</i>	3	4
<i>Gömlek</i>	2	3
<i>Pantolon</i>	6	4
<i>Toplam</i>	150	160

$$\text{ençok} Z = 12X_1 + 8X_2 + 15X_3 - 6X_1 - 4X_2 - 8X_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

Kısıtlar

$$3X_1 + 2X_2 + 6X_3 \leq 150$$

$$4X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 160$$

$$X_1 \leq My_1$$

$$X_2 \leq My_2$$

$$X_3 \leq My_3$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}^+$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$$

Modele dikkat edilirse hem 0-1 alması gereken değişkenler (yani her tezgahı en fazla 1 tane kiralayabiliyorum), hem de tam sayı olması gereken değişkenler vardır. M katsayısı büyük bir sayıyı ifade etmektedir. Örneğin;  $X_1 \leq My_1$  kısıtının anlamı; “eğer t-shirt üretirsek t-shirt tezgahını almak zorundayız ve de kaç tane t-shirt üretirsek üretelim 1 tane t-shirt tezgahı bizim için yeterli olacaktır”. M’yi Lingo’ya katsayı olarak yazmamız gerekir. Bunun için;  $3X_1 \leq 150$  buradan  $X_1$  en fazla 50,  $4X_1 \leq 160$  buradan  $X_1$  en fazla 40,  $2X_2 \leq 150$  buradan  $X_2$  en fazla 75,  $3X_2 \leq 160$  buradan  $X_2$  en fazla 54,  $6X_3 \leq 150$  buradan  $X_3$  en fazla 25,  $4X_3 \leq 160$  buradan  $X_3$  en fazla 40, yani M için 100 sayısı seçilmesi uygun olabilir.

```

Lingo Model - Lingo2
max=6*x1+4*x2+7*x3-200*y1-150*y2-100*y3;
|
3*x1+2*x2+6*x3      <=150;
4*x1+3*x2+4*x3      <=160;
x1-100*y1            <=0;
x2-100*y2            <=0;
x3-100*y3            <=0;

@GIN (x1);
@GIN (x2);
@GIN (x3);
@BIN (y1);
@BIN (y2);
@BIN (y3);
end

```

Şekil 24: Modelin Lingo kodları

Global optimal solution found.		
Objective value:	75.00000	
Objective bound:	75.00000	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	0	
Total solver iterations:	11	
Elapsed runtime seconds:	0.15	
Model Class:		
	PILP	
Total variables:		
	6	
Nonlinear variables:		
	0	
Integer variables:		
	6	
Total constraints:		
	6	
Nonlinear constraints:		
	0	
Total nonzeros:		
	18	
Nonlinear nonzeros:		
	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	-6.000000
X2	0.000000	-4.000000
X3	25.00000	-7.000000
Y1	0.000000	200.0000
Y2	0.000000	150.0000
Y3	1.000000	100.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	75.00000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	60.00000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	75.00000	0.000000

Şekil 25: Modelin sonuçları

Yukarıdaki şekilde modelin Lingo çözümü görülmektedir. Çözüme göre sadece 25 br'lik pantolon üretmemiz karlıdır.

### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde tam sayılı programlama üzerinde durulmuştur. Farklı problemler verilerek bunların tam sayılı olarak nasıl modellenebileceği üzerinde örnekler gösterilmiştir.



## Bölüm Soruları

- 1) Tam sayılı olarak çözülen bir model, değişkenlerin değeri serbest olarak çözülsün, amaç fonksiyonunun değerleri açısından karşılaştırıldığında ne söylenebilir?
- 2) Bir doğrusal modelde, değişkenlerin bir kısmı serbest, diğerleri tam sayı olabilir mi?
- 3) Tam sayı çözüm için hangi algoritmalar kullanılabilir?
- 4) Simpleks metot ile bir model çözüldüğünde, çözüm tam sayı şartını sağlar mı?
- 5) Tam sayı programlama bir atama problemlerinde kullanılabilir mi? bir örnekle açıklayınız?

## **14. ATAMA VE GEZGİN SATICI PROBLEMİ**

## **Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?**

14.1. Atama Problemleri

14.2. Gezgin Satıcı Problemi

## **Giriş**

Bu haftaki çalışmada, atama problemi ve gezgin satıcı problemleri örnekler üzerinde anlatılacaktır.

## 14.1. Atama Problemi

### *Macar Yöntemi*

**Adım 1.** Orijinal maliyet matrisindeki her satırın minimumunu bul ( $p_i$ ) ve bunu satırın tüm elemanlarından çıkar.

**Adım 2.** Adım 1’de elde edilen matrisin her sütununun minimumunu bulduktan ( $q_j$ ) sonra, bunu sütundaki tüm elemanlardan çıkar.

**Adım 3.** Adım 2’deki matriste ortaya çıkan sıfır elemana ilgili optimum atamayı yap.

### Örnek:

		İşler			
		1	2	3	4
Çocuklar	1	1	4	6	3
	2	9	7	10	9
	3	4	5	11	7
	4	8	7	8	5

Yukarıdaki matrise adım 1 ve adım 2 uygulandığında aşağıdaki indirgenmiş matris elde edilmiş olur.

		İşler			
		1	2	3	4
Çocuklar	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

Sıfırların yerleri, bir işin bir çocuğa atanmasına olanak vermemektedir. Örneğin, 1. İşe 1. Çocuğu atarsak, bu durumda 1. Sütun elimine edilmiş olacaktır ve 3. Çocuk geriye kalan üç sütunda sıfır olmadığından herhangi bir işe atanamayacaktır. Bu engeli ortadan kaldırabilmek için prosedüre aşağıdaki adım eklenmelidir.

**Adım 2a:** Uygun atama adım 1 ve adım 2’de gerçekleştirilemiyorsa,

- (i) Son indirgenmiş matriste tüm sıfırları kapayacak şekilde ve minimum sayıda yatay ve düşey çizgiler çiz.
- (ii) Üzeri çizilmemiş elemanlar içinden en küçüğünü seç ve bu elemanı üzeri çizilmemiş her elemandan çıkar. Aynı elemanı, iki kapatma çizgisinin kesiştiği yerdeki elemanla topla.
- (iii) Bu yeni tabloda sıfır değerini alan elemanlarla atama yapılamıyorsa adım 2a'yı tekrarla. Aksi halde adım 3'e giderek optimum atamayı belirle.

		İşler			
		1	2	3	4
Çocuklar	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

Üstü kapatılmamış en küçük eleman 1'dir. Bu eleman, üstü kapatılmamış tüm elemanlardan çıkarılıp kapatma çizgilerinin kesiştiği yerlerdeki elemanlarla toplanırsa aşağıdaki matris elde edilmiş olur.

		İşler			
		1	2	3	4
Çocuklar	1	0	2	1	1
	2	3	0	0	2
	3	0	0	3	2
	4	4	2	0	0

Optimum çözümde 1. çocuğa 1. iş, 2. çocuğa 3. iş, 3. çocuğa 2. iş ve 4. çocuğa 4. iş atanmıştır. Bu durumda optimum maliyet 21 para birimidir.

## 14.2. Macar Algoritması İle Gezgin Satıcı Probleminin Çözümü

Satıcı beş farklı şehirdeki işlerini takip etmek istemektedir. Şehirlerarasındaki mesafe aşağıdaki tablodaki gibidir. Satıcı, şehirlerarasında seyahat edeceği toplam mesafeyi en az yapması için şehirleri hangi sıra ile ziyaret etmelidir?

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	0	132	217	164	58
Ş2	132	0	290	201	79
Ş3	217	290	0	113	303
Ş4	164	201	113	0	196
Ş5	58	79	303	196	0

**Tablo 85:** Şehirlerarasındaki mesafe (km)

Problemi Macar algoritması ile çözmek istediğimizde öncelikli olarak, M (büyük sayı) aşağıdaki kutulara eklenir. Buralara atama yapılmayacağı anlamına gelmektedir. Satırlardaki en küçük değerler bulunur.

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5	En küçük
Ş1	M	132	217	164	58	<b>58</b>
Ş2	132	M	290	201	79	<b>79</b>
Ş3	217	290	M	113	303	<b>113</b>
Ş4	164	201	113	M	196	<b>113</b>
Ş5	58	79	303	196	M	<b>58</b>

**Tablo 85:** Satırlardaki en küçük değerler

Satır değerlerinden bulunan en küçük değeri çıkardıktan sonra elde edilen sayılar, şu şekilde olacaktır.

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	M	74	159	106	0
Ş2	53	M	211	122	0
Ş3	104	177	M	0	190
Ş4	51	88	0	M	83
Ş5	0	21	245	138	M
En küçük	<b>0</b>	<b>21</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>

**Tablo 85:** Sütunlardaki en küçük değerler

Sonraki adım ise, sütunlardaki en küçük değerleri bulmak ve bunları sütun değerlerinden çıkarmak gerekmektedir. İşlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki tablo değerleri elde edilir.

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	M	53	159	106	0
Ş2	53	M	211	122	0
Ş3	104	156	M	0	190
Ş4	51	67	0	M	83
Ş5	0	0	245	138	M

**Şekil 26:** Sıfırları yok etmek için çizilen çizgiler

Problemde, beş satır olduğu için en az beş çizgi ile sıfırlar kapatılabiliyor ise, atama işlemlerine başlanacaktır. Bu örnekte ise elde edilen tablo değerleri en az dört çizgi ile sıfırların üzeri kapatılmıştır. Fakat, atamak için çizgi sayısı yeterli değildir. Sıfırları kapatmak için çizgilerin hangi satır veya sütundan çizileceği önemli değildir, önemli olan en az çizgi ile bütün sıfırları kapatmaktır. En az dört çizgi olduğu için, işlemlere devam edilmesi gerekmektedir. Yukarıdaki çizgilerin çizimine göre, üzerinden çizgi geçmeyen en küçük değer 53 olduğu görülmektedir. Çizgileri farklı çizmiş olsaydık, üzeri çizilmemiş değer 53 daha farklı olabilir. Bu durumda yeni bulduğumuz değer dikkate alınarak işlemlere devam edilecektir. Üzerinden çizgi geçen değerler değiştirilmez, çift çizgi geçenlere ise bu 53 değeri eklenir. Üzerinden çizgi geçmeyen değerlerden 53 değeri çıkarılır. Aşağıdaki tablo değerlerine ulaşılır.

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	M	0	106	53	0
Ş2	0	M	158	69	0
Ş3	104	156	M	0	243
Ş4	51	67	0	M	136
Ş5	0	0	245	138	M

**Tablo 85:** 53 en küçük değere göre son hali

Sıfırlar en az beş çizgi ile kapatılabilmektedir. Satır Çizgi sayısı, satır sayısına eşit olduğundan dolayı atama yapılacak noktaya gelinmiş olmaktadır.

#### Atama Sonucu:

Çözüm 1			Çözüm 2		
X <sub>34</sub> =1	X <sub>34</sub> = 1	113	X <sub>34</sub> =1	X <sub>34</sub> = 1	113
X <sub>43</sub> =1	X <sub>43</sub> = 1	113	X <sub>43</sub> =1	X <sub>43</sub> = 1	113
X <sub>52</sub> =1	X <sub>52</sub> = 1	79	X <sub>51</sub> =1	X <sub>51</sub> = 1	58
X <sub>15</sub> =1	X <sub>15</sub> = 1	58	X <sub>25</sub> =1	X <sub>25</sub> = 1	79
X <sub>21</sub> =1	X <sub>21</sub> = 1	132	X <sub>12</sub> =1	X <sub>12</sub> = 1	132
<b>Toplam</b>		<b>495 km</b>			<b>495 km</b>



Bu sonuçlardan problemin iki çözümünün olduğunu görüyoruz. Satıcı, 1.çözümü takip etmek isterse, 1. Şehirden 5. Şehre gidecek, 5. Şehirden 2. Şehre geçecek, 2. Şehirden tekrar 1. Şehre dönecektir. Sonrasında ise, 3. Şehir den 4. Şehre giderek oradan tekrar 3.şehre dönecek ve turunu 495 km de tamamlayacaktır. Burada önemli bir kısıt ihmal edilmiştir. Bir şehirden yalnızca bir kez geçmek şartı konulmamıştır. Bundan dolayı da, satıcı 1. Şehre tekrar dönmekte ve buradan 3. Şehre nasıl gideceği hesaplarda dikkate alınmamaktadır. Satıcıya bir şehre yalnızca bir kez uğramalısın gibi bir şart konduğunda, macar algoritması bu problemin çözümüne imkan sağlamaz. Bu şart dikkate alınarak yapılacak seyahatin bulunmasını sağlayacak dal-sınır algoritması üzerinde daha sonraki konularda durulacaktır.

### 14.3. Gezgin Satıcı Probleminin Dal Sınır İle Çözümü

Gezgin satıcı problemini çözmek için araştırmacılar tarafından pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bu çözüm yöntemleri optimal çözüme ulaşıp ulaşmamasına göre kesin çözüm yöntemleri (optimal sonuç veren) ve sezgisel yöntemler (optimal sonucu garanti etmeyen) olarak ikiye ayrılır. Kesin çözüm yöntemlerinden en çok yaygın olarak kullanılan dal-sınır algoritması ile problemin çözümü anlatılacaktır.

#### Dal Sınır Algoritması

Aşağıdaki tabloda verilen değerler Macar algoritması ile çözülerek bir tur yolu bulunur.

#### Örnek 1:

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Şehir 1	-	200	125	400
Şehir 2	200	-	150	140
Şehir 3	125	150	-	200
Şehir 4	400	140	200	-

**Tablo 86:** Şehirlerin aralarındaki mesafeler (km)

Fakat bu metot bir şehirden bir kez geçme şartını garanti etmez. Bu durumda bulunan çözüm kabul edilemeyecektir. Macar algoritması ile elde edilen çözüm incelendiğinde;

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Şehir 1	M	75	0	275
Şehir 2	60	M	10	0

Şehir 3	0	25	M	75
Şehir 4	260	0	60	M

**Tablo 87:** Uygun olmayan çözüm

$X_{13}$ ,  $X_{24}$ ,  $X_{31}$  ve  $X_{42}$  (bu çözüm, yollar toplandığında 530 birim edecektir) Bu çözümde tüm şehirlere birer kez uğranma koşulu gerçekleşmemektedir. Bu durumda mevcut çözümü kabul edemiyoruz. Bundan sonraki adıma dal-sınır algoritması ile devam edebiliriz. Kuralı bozan şehirlerden rastgele seçelim. Örneğin; 2-4, 4-2 yolunu seçiyoruz. Mevcut çözümde  $X_{24}=0$  ve  $X_{42}=0$  şartları ayrı ayrı yazılarak tekrar çözülür.

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Şehir 1	M	25	0	25
Şehir 2	0	M	0	M
Şehir 3	0	25	M	0
Şehir 4	260	0	110	M

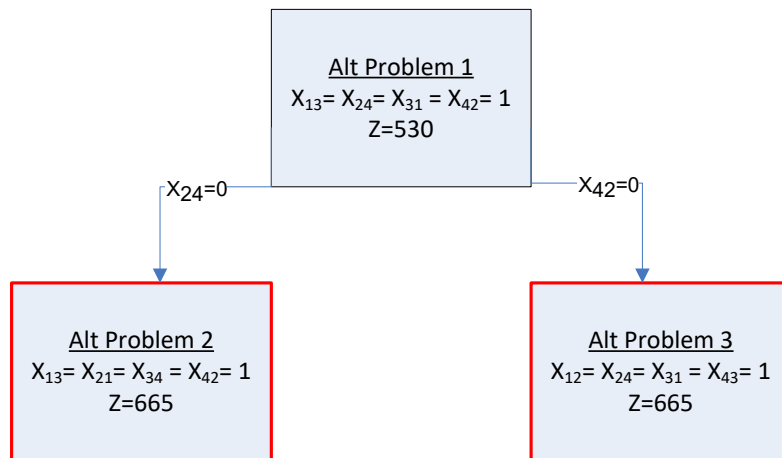
**Tablo 88:**  $x_{24}$  yasaklandı

$X_{13}$ ,  $X_{21}$ ,  $X_{34}$  ve  $X_{42}$  olur.  $Z=665$ .

	Şehir 1	Şehir 2	Şehir 3	Şehir 4
Şehir 1	M	0	0	225
Şehir 2	60	M	60	0
Şehir 3	0	0	M	75
Şehir 4	150	M	0	M

**Tablo 89:**  $x_{42}$  yasaklandı

$X_{12}$ ,  $X_{24}$ ,  $X_{31}$  ve  $X_{43}$  olur.  $Z=665$ .



**Şekil 27:** Problemin alt problemler haline getirilmesi

Yukarıdaki çözümlerin her ikisi de kısıtları sağlamakta ve aynı çözümü vermektedir. Dikkat edilirse sıralama birbirinin tersidir, yani 1-3-4-2(-1) ve 1-2-4-3(-1) şeklindedir. Dikkat edilirse, Z amaç fonksiyonu değerinin arttığı görülür. İlk çözümdeki değere kısıtlar eklendikçe enküçükleme probleminin amaç fonksiyonu artış göstermektedir. Yani kısıtlama arttıkça amaç fonksiyonu da artar.

### Örnek:2

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	0	132	217	164	58
Ş2	132	0	290	201	79
Ş3	217	290	0	113	303
Ş4	164	201	113	0	196
Ş5	58	79	303	196	0

Tablo 89: Şehirlerarasındaki mesafeler

Yukarıdaki şehirlerarası uzaklık matrisine sahip olan gezgin satıcı problemin çözümünü Macar algoritmasıyla daha evvelden aşağıdaki gibi bulmuştuk.

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	M	0	106	53	0
Ş2	0	M	158	69	0
Ş3	104	156	M	0	243
Ş4	51	67	0	M	136
Ş5	0	0	245	138	M

Tablo 90: Macar algoritması ile çözümü

Bu çözüme göre;  $X_{15}$ ,  $X_{21}$ ,  $X_{34}$ ,  $X_{43}$ ,  $X_{52}$  yolu takip edilebilir. Fakat burada her şehrin 1 kez ziyaret edilmesi gerektiği kısıtı sağlanmamaktadır. Bu problemi de dal-sınır algoritmasıyla çözmek istersek rastgele  $X_{34}=0$  ve  $X_{43}=0$  kısıtlarını ekleyip çözelim.

$X_{34}=0$  kısıtını eklediğimizde;

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	M	53	159	0	0
Ş2	53	M	211	16	0
Ş3	0	52	M	M	86
Ş4	51	67	0	M	83
Ş5	0	0	245	32	M

Tablo 91:  $x_{34}$  engellendi

$X_{14}$ ,  $X_{25}$ ,  $X_{31}$ ,  $X_{43}$ ,  $X_{52}$  olur.

$X_{43}=0$  kısıtını eklediğimizde;

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	M	53	0	106	0
Ş2	53	M	52	122	0
Ş3	104	156	M	0	190
Ş4	0	16	M	M	32
Ş5	0	0	86	138	M

**Tablo 92:**  $x_{43}$  engellendi

$X_{13}$ ,  $X_{25}$ ,  $X_{34}$ ,  $X_{41}$ ,  $X_{52}$  olur.

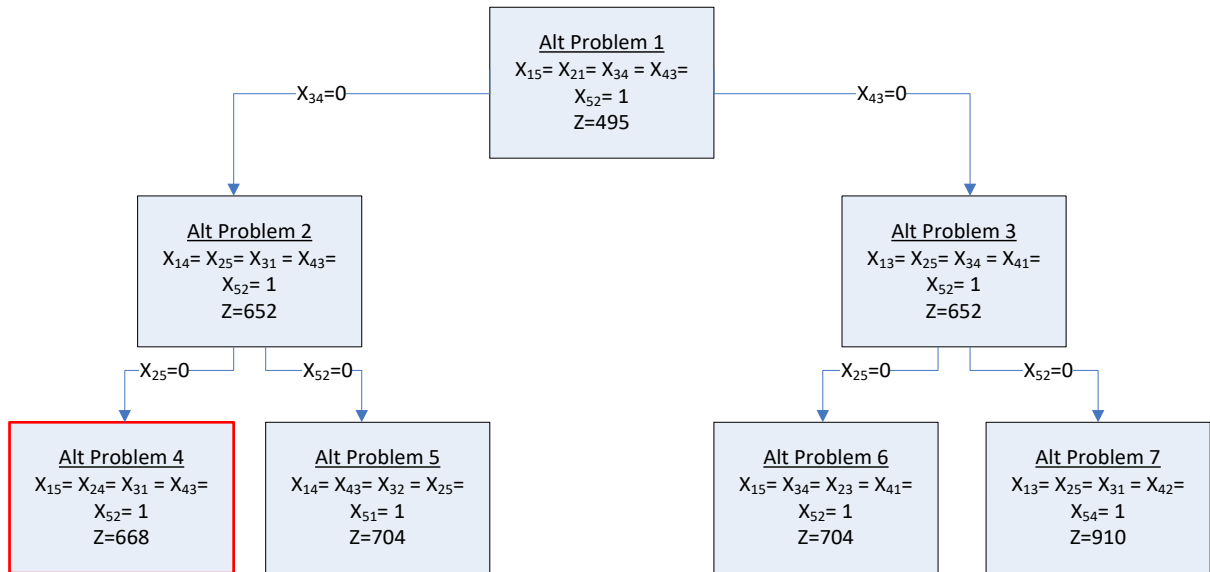
Bu çözümler kabul edilemez, problemi dallandırmaya devam edelim.

Hem  $X_{34}=0$  hem de  $X_{25}=0$  kısıtını ekleyelim.

Şehirler	Ş1	Ş2	Ş3	Ş4	Ş5
Ş1	M	53	159	37	0
Ş2	0	M	158	0	M
Ş3	0	52	M	M	86
Ş4	51	67	0	M	83
Ş5	0	0	245	69	M

**Tablo 93:**  $x_{34}$  ve  $x_{25}$  engellendi

$X_{15}$ ,  $X_{24}$ ,  $X_{31}$ ,  $X_{43}$ ,  $X_{52}$  olur. Bu çözüm kısıtları sağlamaktadır.  $Z=668$  olur ve problemin diğer çözümleri de aşağıdaki gibidir.



**Şekil 28:** Problemin dal sınır ile çözülmesi



### **Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti**

Bu bölümde atama problemlerinin çözümünde kullanılan Macar metodu üzerinde durulmuştur. İkinci olarak ise, tam sayılı modellerin çözümünde kullanılan dal sınır algoritması örnekler ile anlatılmıştır.

## Bölüm Soruları

- 1) Macar metodu ile bulunan çözüm optimum her zaman çözüm müdür?
- 2) Birinci sorunun cevabı doğru değil ise, optimum değeri bulmak içine nasıl bir yol takip edilmelidir?
- 3) Macar metodu gezgin satıcı probleminin çözümünde bir şehre bir kez uğrama şartını ihlal eden bir çözüm önerebilir mi?
- 4) 0-1 Tam sayılı programlamanın normal tam sayılı programlamadan farkı nerede oluşmaktadır?
- 5) Dal sınır çözümü ile Macar metodunun çözümlerini tartışınız?

## **KAYNAKÇA**

Winston,W.,Operational Research, 4rd, Thomson, 2005.

Hillier, F., Lieberman, G. Introduction to Operations Research, 7rd, McGraw-Hill, 2001.

Taha, H., Yöneylem Araştırması, Literatür Yayıncılık, 2004.