

**SAKARYA UNIVERSİTESİ**  
**ENDUSTRI MUHENDİSLİĞİ**

**YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI – II**

**EMİCİ(YUTUCU) ZİNCİRLER**

**DERS NOTLARI**

Pek Çok ilginç markov zinciri uygulamalarında bazı durumlar emici (yutucu) ve geri kalan durumlar geçici durumlardır. Böyle zincirler emici zincirler olarak bilinir. Böyle zincirlerde eğer geçici durumlarla başlarsak eninde sonunda bu durumlardan emici durumların birine geçeriz ve emici durumdan bir daha ayrılmayız.

## ÖRNEK 7: ALACAKLI HESAP

Bir Firmanın Alacaklı hesap durumu yutucu markov zinciri olarak modellenenebilir. Eğer bir hesap 3 aydan fazla vadeyi aşmışsa böyle alacağı firma şüpheli alacak olarak kaydetmektedir. Her bir ayın başında her bir hesap aşağıdaki durumlardan biri ile sınıflandırılmaktadır.

- Durum 1: Yeni hesap
- Durum 2: 1 Ay vadesi geçmiş hesap
- Durum 3: 2 Ay vadesi geçmiş hesap
- Durum 4: 3 Ay vadesi geçmiş hesap
- Durum 5: Ödenmiş hesap
- Durum 6: Şüpheli alacak olarak kaydedilmiş hesap

Geçmiş verilere dayanarak aşağıdaki markov zinciri durumların bir aydan gelecek aya nasıl değiştiğini göstermektedir.

	Yeni	1 ay	2 ay	3 ay	Ödenmiş	Şüpheli
Yeni	0	.6	0	0	.4	0
1 ay	0	0	.5	0	.5	0
2ay	0	0	0	.4	.6	0
3 ay	0	0	0	0	.7	.3
Ödenmiş	0	0	0	0	1	0
Şüpheli	0	0	0	0	0	1

Yukarıdaki matrisi okuyacak olursak; Alacak vadesi 2 ay geçmişse %40 olasılıkla 3 ay vadesi geçmiş alacak olur ve %60 olasılıkla ödenmiş hesap olur.

Borç ödendiğinde veya şüpheli alacak olarak kaydedildiğinde hesap kapanır ve başka geçiş olmaz. Bundan dolayı ödenmiş ve şüpheli alacak durumları yutucu durumlardır.

Burada Yeni, 1 ay, 2 ay, 3 ay geçici durumlar ve Ödenmiş ve şüpheli yutucu durumlar olduğundan bu markov zinciri yutucu zincirdir. Herhangi bir zamanda geçici durumdaysak eninde sonunda yutucu durumlara gelir bir daha bu durumu terk etmeyiz.

Burada sorulabilecek bir soru; Yeni bir hesap hangi olasılıkla tahsil edilir bu ilerde döneceğimiz bir konudur.

## ÖRNEK 8 :İŞGÜCÜ PLANLAMA

Justice avukatlık Firması üç çeşit avukat çalıştırmaktadır: Genç, Kıdemli ve Ortak. Verilen yılda .15 olasılıkla genç avukat terfi ettirilir ve kıdemli avukat olur ve .05 olasılıkla genç avukat firmayı terk eder. .20 olasılıkla kıdemli avukat terfi ettirilir ve ortak olur ve .10 olasılıkla kıdemli avukat firmayı terk eder. .05 olasılıkla ortak avukat firmayı terk eder. Firma hiçbir zaman avukatların kıdemini düşürmez.

Bu problemde pek çok ilginç soru bulabiliriz. Bu sorular Firmanın cevabını arayacağı sorular olabilir. Örneğin; İşe alına genç avukat hangi olasılıkla ortak olmadan firmayı terk eder? Ortalama olarak genç bir avukat kaç yıl firmada kalır? Bu gibi sorular ilerde çalışılacaktır.

Justice firması problemini yutucu markov zinciri olarak aşağıdaki geçiş matrisiyle modelleyebiliriz.

	Genç	Kıdemli	Ortak	O.O Ayrılma	O. ayrılma
Genç	.80	.15	0	.05	0
Kıdemli	0	.70	.20	.10	0
Ortak	0	0	.95	0	.05
O.O Ayrılma	0	0	0	1	0
O. ayrılma	0	0	0	0	1

O.O Ayrılma → Ortak Olmadan Ayrılma

O.Ayrılma → Ortak ayrılma

Son iki durum yutucu durumdur. Diğer durumlar geçici durumdur. Örneğin kıdemli avukatı düşünürsek, Bu durum geçici durumdur. Eninde sonunda kıdemli avukat firmayı ortak olarak veya ortak olmadan terkeder. (Terk eden avukatın bir daha geri dönmediğini kabul ediyoruz)

Yutucu zincirlerde şunları bilmek isteyebiliriz

1→ Eğer Zincir verilen bir geçici durumdan başlarsa, yutucu duruma uğramadan her bir geçici durum ne kadar ziyaret edilir. Yutulma olmadan önce kaç period verilen durumda oluruz

2→Eğer zincir verilen bir geçici durumdan başlarsa, her bir yutucu durumda tamamlanma olasılığı nedir

Bu soruları cevaplamak için geçiş matrisini aşağıdaki gibi yazarız. Önce geçici durumları yazarız, sonra yutucu durumları yazarız. Tariflerin anlaşılması için (s-m) adet geçici durum ( $t_1, t_2, \dots, t_{(s-m)}$ ) olduğunu ve m adet yutucu durum ( $a_1, a_2, \dots, a_m$ ) olduğunu kabul edelim.

Yutucu markov zinciri için geçiş matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (s-m) \text{ sütun} & m \text{ sütun} \end{matrix} \\ \begin{matrix} (s-m) \text{ satır} \\ m \text{ satır} \end{matrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline Q & R \\ \hline 0 & I \\ \hline \end{array} \end{matrix}$$

Yukarıdaki formatta satır ve sütunlar sırasıyla  $t_1, t_2, \dots, t_{(s-m)}, a_1, a_2, \dots, a_m$  durumlarını gösterir.

- $Q \rightarrow (s-m) \times (s-m)$  matris olup geçici durumdan geçici durumlara geçişi gösterir
- $R \rightarrow (s-m) \times m$  matris olup geçici durumlardan yutucu durumlara geçişi gösterir
- $0 \rightarrow m \times (s-m)$  matris olup yutucu durumdan geçici durumlara geçiş olmadığını gösterir
- $I \rightarrow m \times m$  matris olup yutulan bir durumdan çıkış olmadığını gösterir

Bu notasyonu örnek 7 ve örnek 8 için kullanırsak



ÖRNEK 7 : Devam (ALACAKLI HESAP PROBLEMİ)

Yukarıdaki notasyonlarla problemi tekrar ifade edersek

- t1: Yeni hesap
- t2: 1 Ay vadesi geçmiş hesap
- t3: 2 Ay vadesi geçmiş hesap
- t4: 3 Ay vadesi geçmiş hesap
- a1: Ödenmiş hesap
- a2: Şüpheli alacak olarak kaydedilmiş hesap

Bu problemin geçiş matrisi aşağıdaki gibi idi

	Yeni	1 ay	2 ay	3 ay	Ödenmiş	Şüpheli
Yeni	0	.6	0	0	.4	0
1 ay	0	0	.5	0	.5	0
2ay	0	0	0	.4	.6	0
3 ay	0	0	0	0	.7	.3
Ödenmiş	0	0	0	0	1	0
Şüpheli	0	0	0	0	0	1

Yukarıdaki problemde  $s=6$  ve  $m=2$  dir.

$Q(s-m)x(s-m) \rightarrow Q$  4x4 matristir.

$R(s-m)x(m) \rightarrow R$  4x2 matristir.

$O m \times (s-m) \rightarrow O$  2x4 matristir

$I m \times m \rightarrow I$  2x2 matristir

$Q$  ve  $R$  yi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & .6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} .4 & 0 \\ .5 & 0 \\ .6 & 0 \\ .7 & .3 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 8 : Devam (JUSTICE AVUKATLIK FIRMASI)

t1= Genç

t2 = Kıdemli

t3 = Ortak

a1 = Ortak Olmadan Ayrılma (O.O. Ayrılma)

a2 = Ortak Ayrılma (O. Ayrılma)

Bu problem için geçiş matrisi aşağıdaki gibi idi.

	Genç	Kıdemli	Ortak	O.O Ayrılma	O. ayrılma
Genç	.80	.15	0	.05	0
Kıdemli	0	.70	.20	.10	0
Ortak	0	0	.95	0	.05
O.O Ayrılma	0	0	0	1	0
O. ayrılma	0	0	0	0	1

Bu problemde  $s=5$  ve  $m=2$  dir

$Q(s-m)x(s-m) \rightarrow Q$  3x3 matristir.

$R(s-m)x(m) \rightarrow R$  3x2 matristir.

$O m x(s-m) \rightarrow O$  2x3 matristir

$I m x m \rightarrow I$  2x2 matristir

$Q$  ve  $R$  yi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$Q = \begin{bmatrix} .80 & .15 & 0 \\ 0 & .70 & .20 \\ 0 & 0 & .95 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} .05 & 0 \\ .10 & 0 \\ 0 & .05 \end{bmatrix}$$

Şimdi Yutucu Zincirler hakkındaki bazı gerçekleri bulabiliriz.

1→ Eğer Zincir verilen bir geçici durumdan başlarsa, yutucu duruma uğramadan her bir geçici durum ne kadar ziyaret edilir. Yutulma olmadan önce kaç period verilen durumda oluruz.

CEVAP 1: eğer şimdi geçici durum  $t_i$ 'de isek ,  $t_i$ 'de yutulmadan önce geçecek beklenen period sayısı  $(I-Q)^{-1}$  matrisinin  $ij$ 'inci elemanıdır.

2→Eğer zincir verilen bir geçici durumdan başlarsa, her bir yutucu durumda tamamlanma olasılığı nedir

CEVAP 2: eğer şimdi geçici durum  $t_i$ 'de isek ve sonunda  $a_j$  yutucu durumunda yutulma olasılığı  $(I-Q)^{-1} R$  matrisinin  $ij$ 'inci elemanıdır.

## ÖRNEK 7 : Devam (ALACAKLI HESAP PROBLEMİ)

Şimdi bu problemle ilgili aşağıdaki soruları cevaplayalım.

1. Yeni bir hesabın eninde sonunda toplanma ihtimali nedir ?
2. 1 ay vadesi geçmiş hesabın eninde sonunda şüpheli alacak olma ihtimali nedir?
3. Firmanın satış ortalaması \$100.000/ay ise , yılda ne kadar para toplanamaz?

CEVAP : Önce lazım olan matrisleri yazalım

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & .6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} .4 & 0 \\ .5 & 0 \\ .6 & 0 \\ .7 & .3 \end{bmatrix} \quad (I-Q) = \begin{bmatrix} 1 & -.6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gaus-Jordan Satır işlemleriyle (I-Q) matrisinin tersini buluruz.

$$(I-Q)^{-1} = \begin{array}{c|cccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1 & 1 & .60 & .30 & .12 \\ t_2 & 0 & 1 & .50 & .20 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 & .40 \\ t_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(I-Q)^{-1} R = \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ t_1 & .964 & .036 \\ t_2 & .940 & .060 \\ t_3 & .880 & .120 \\ t_4 & .700 & .300 \end{array}$$

Şimdi soruları cevaplayabiliriz.

cevaplar

1) Cevaplar Yeni bir hesabın eninde sonunda toplanma ihtimali nedir ?

Burada  $t_1$  den  $a_1$ 'e geçiş sorulmaktadır. Bu  $(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 1-1'inci elemanıdır.

$(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 1-1'inci elemanı = .964 'tür

2) 1 ay vadesi geçmiş hesabın eninde sonunda şüpheli alacak olma ihtimali nedir?

Burada  $t_2$ 'den  $a_2$ 'ye geçiş sorulmaktadır. Bu  $(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 2-2'inci elemanıdır.

$(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 2-2'inci elemanı = .060 'dır

3) Firmanın satış ortalaması \$100.000/ay ise , yılda ne kadar para toplanamaz?

Burada  $t_1$  den  $a_2$ 'e geçişi bulalım. Bu  $(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 1-2'inci elemanıdır.

$(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 1-2'inci elemanı = .036 'dır.

Eğer 0,036 olasılıkla para tahsil edilemiyorsa %3,6 para tahsil edilememiş olur.

Eğer aylık satış = \$100.000 ise yıllık satış = \$1.200.000 olur.

Toplanmayan para =  $3,6 * 1.200.000 = \$43.200$  yıllık toplanamayan para olur.



## ÖRNEK 8 :Devam (İŞGÜCÜ PLANLAMA)

Örnek 8’de aşağıdaki sorular sorulmuş olsun

1. Genç avukatın firma için çalışmasının ortalama süresi nedir?
2. Genç avukatın ortak olma ihtimali nedir?
3. Ortağın firmada ortak olarak çalışmasının ortalama uzunluğu nedir?

## ÇÖZÜM

Önce Gerekli matrisleri yazalım

$$Q = \begin{bmatrix} .80 & .15 & 0 \\ 0 & .70 & .20 \\ 0 & 0 & .95 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} .05 & 0 \\ .10 & 0 \\ 0 & .05 \end{bmatrix} \quad (I-Q) = \begin{bmatrix} .20 & -.15 & 0 \\ 0 & .30 & -.20 \\ 0 & 0 & .05 \end{bmatrix}$$

Gaus-Jordan Satır işlemleriyle (I-Q) matrisinin tersini buluruz.

$$(I-Q)^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & 5 & 2,5 & 10 \\ t_2 & 0 & 10/3 & 40/3 \\ t_3 & 0 & 0 & 20 \end{array}$$

$$(I-Q)^{-1} R = \begin{array}{c|cc} & a_1 & a_2 \\ t_1 & .50 & .50 \\ t_2 & 1/3 & 2/3 \\ t_3 & 0 & 1 \end{array}$$

Şimdi Soruları cevaplayacak olursak:

1) Genç avukatın firma için çalışmasının ortalama süresi nedir?

Burada (genç avukat olarak firmada çalışma)+(Kıdemli avukat olarak çalışma) + (Ortak olarak çalışma) sürelerinin toplamı istenmektedir. Bu ise

$$(I-Q)^{-1} \text{ matrisinin } 1-1 \text{ elemanı} + 1-2 \text{ elemanı} + 1-3 \text{ elemanı toplamına eşittir} \\ = 5 + 2,5 + 10 = 17,5$$

Genç avukat ortalama 17,5 yıl firmada çalışır.

2) Genç avukatın ortak olma ihtimali nedir?

Genç avukatın ortak olma ihtimali firmayı ortak olarak ayrılması olasılığına eşittir.  $t_1$ 'den  $a_2$ 'ye geçme olasılığıdır. Bu da  $(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 1-2'inci elemanıdır.

$(I-Q)^{-1} R$  matrisinin 1-2'inci elemanı = .50 Böylece genç bir avukatın ortak olma ihtimali %50'dir.

3) Ortağın firmada ortak olarak çalışmasının ortalama uzunluğu nedir?

Burada  $t_3$  ile başlayıp  $t_3$ 'te kalma süresi nedir sorulmaktadır.

$$(I-Q)^{-1} \text{ matrisinin } 3-3 \text{ elemanı aranmaktadır} = 20$$

Ortak avukat firmada ortak olarak ortalama 20 yıl bulunur.



# İŞGÜCÜ PLANLAMA MODELLERİ

Justice avukatlık firması gibi pek çok organizasyon kararlılık durumu sayılarını bilmek isteyebilir.

Bir organizasyon düşünelim; Bu organizasyonun elemanları herhangi bir zamanda  $s$  gruptan  $(1,2,...,s)$  olarak etiketlenmiş olsun) birine ait olsun.

Her bir periodda  $p_{ij}$  fraksiyonu herhangi bir zaman periodunda grup  $i$ 'de başlayıp bir period sonra grup  $j$ 'de olan elemanları gösterebilir. Aynı zamanda  $p_{i(s+1)}$  herhangi bir zamanda grup  $i$ 'de olup bir period sonra organizasyonu terkeden fraksiyonu ifade etsin.

$P_{s \times (s+1)}$  matris olsun ve  $i$ - $j$ 'inci eleman  $p_{ij}$  olsun.

Her bir zamanın başında organizasyon  $H_i$  kadar grup  $i$ 'ye eleman kabul ediyor(tutuyor, işe alıyor) olsun.  $N_i(t)$  period  $t$  başında grup  $i$  üyesi sayısı olsun.

Buradaki soru  $t$  büyüdükçe (Eğer varsa  $N_i$  için Limit)  $N_i(t)$  bir limite yaklaşırmı?

Eğer  $N_i(t)$  bir limite yaklaşırsa o zaman  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, ..., N_s)$  organizasyonun **kararlılık durumu sayıları** olarak adlandırılır.

Eğer **Kararlılık-durumu sayıları** mevcutsa, aşağıdaki s tane denklemden oluşan sistemi çözerek bu değerleri bulabiliriz. Eğer bu sayılar varsa, kararlılık durumunda  $i=1,2,...,s$  için aşağıdaki eşitlik doğru olmalıdır.

Her bir periodda grup i'ye giren sayısı = Her bir periodda grup i'yi terkeden sayısı (14)

Eğer (14) doğru olmazsa en az bir grupta eleman sayısı kararlılık durumuna erişmez ve eleman sürekli yığılmaya başlar.

Her bir periodda durum i'ye giren eleman sayısı  $= H_i + \sum_{k \neq i} N_k p_{ki}$

Her bir periodda durum i'yi terkeden eleman sayısı  $= N_i * \sum_{k \neq i} p_{ik}$

Böylece **kararlılık-durumu sayıları** için eşitlik aşağıdaki gibi olur

$$H_i + \sum_{k \neq i} N_k p_{ki} = N_i * \sum_{k \neq i} p_{ik} \quad (14')$$

Verilen  $p_{ij}$  ve  $H_i$  değerleri ile (14') kullanılarak kararlılık-durumu-sayıları bulunabilir.

Tersine düşündüğümüzde, Eğer  $p_{ij}$  ve arzulanan kararlılık-durumu-sayıları verilmişse (14') işe-alma politikasını tesbit için kullanılabilir. Bu durumda  $(H_1, H_2, ..., H_s)$  işe-alma politikasını gösterir. Bazı durumlarda  $H_i$  değerleri negatif çıkabilir. Bu durumda işten-çıkarmamız anlamına gelir. Aşağıdaki 2 örnekte bu konu açıklanmaktadır.

## ÖRNEK 9 :

Küçük bir Ülkede vatandaşlar üç grupta sınıflandırılabilir: Çocuklar, Çalışan yetişkinler, Emekliler. Bir yıllık zaman periyodundan birinde çocukların 0,959'u çocuk olarak kalmakta ve 0,04'ü çalışan yetişkin olmaktadır ve 0,001'i ölmektedir. Verilen herhangi bir yılda çalışan yetişkinlerin 0,96'sı çalışan yetişkin olarak kalmakta ve 0,03'ü emekli olmakta ve 0,01'i ise ölmektedir. Emeklilerin 0,95'i emekli olarak kalmakta, 0,05'i ise ölmektedir. Her yıl 1000 tane çocuk doğmaktadır.

1. Kararlılık-durumu-sayıları'nı bulun ?
2. Her bir emekli yıllık \$5000 ücret almaktadır. Bu ücret çalışan yetişkinlerin ödemesinden karşılanmaktadır. Emekli ücretlerinin ödenebilmesi için her bir çalışan yetişkin ne kadar ödemelidir.

## ÇÖZÜM :

1)

Grup 1 : Çocuklar

Grup 2: Çalışan

Grup 3: Emekli

Grup 4: Ölü

H1'in 1000 H2=H3=0 olduğu verilmiş

$$P = \begin{bmatrix} .959 & .040 & 0 & .001 \\ 0 & .960 & .030 & .010 \\ 0 & 0 & .950 & .050 \end{bmatrix}$$

Her bir periodda grup i'ye giren sayısı = Her bir periodda grup i'yi terkeden sayısı (14)

Şimdi (14') 'ü çözecek olursak  $H_i + \sum_{k \neq i} N_k p_{ki} = N_i * \sum_{k \neq i} p_{ik}$  (14')

$$\begin{array}{ll} 1000 = (.04 + .001)N_1 & \text{Çocuk} \\ .04N_1 = (.03 + .01)N_2 & \text{Çalışan} \\ .03N_2 = .05N_3 & \text{Emekli} \end{array}$$

Yukarıdaki sistemi çözdüğümüzde  $N_1=24.390,24$   $N_2=24.390,24$  ve  $N_3=14.634,14$  olur.



ÇÖZÜM :

2)

$N_1=24.390,24$   $N_2=24.390,24$  ve  $N_3=14.634,14$  bulmuştuk

14.634,14 emekli vardır bunların aldığı yıllık ücret =  $14.634,14 * 5000$  dolar olur.

Çalışanın ödeyeceği ücret =  $(14.634,14 * 5000) / 24.390,24 = \$3000$  olur

Her bir çalışan yıllık \$3000 ödemelidir.

Bu sonuç mantıklıdır çalışan sayısı emekli sayısının 5/3 katıdır ödeyeceği miktar bu nedenle \$3000 olmaktadır.

ÖRNEK 10: Örnek 8'e dönecek olursak. Justice avukatlık firmasının uzun vade hedefleri 50 genç avukat, 30 kıdemli ve 10 ortak çalıştırmaktır. Bu kararlılık durumu sayılarını yakalamak için her yıl justice firması her bir avukat grubuna ne kadar avukat almalıdır?

ÇÖZÜM 10:

Grup1 = Genç

Grup 2= Kıdemli

Grup3 = Ortak

Grup 4= Ayrılan

Justice Firması N1=50, N2=30 ve N3=10 olmasını istemektedir.

Örnek 8'den P matrisini yazarsak:  $P = \begin{bmatrix} .80 & .15 & 0 & .05 \\ 0 & .70 & .20 & .10 \\ 0 & 0 & .95 & .05 \end{bmatrix}$

Eşitlik sistemi (14') kullanırsak

$H1 = (.15 + .05) 50$	Genç
$(.15)50 + H2 = (.20 + .10)30$	Kıdemli
$(.20)30 + H3 = (.05)10$	Ortak

Sistemi çözdüğümüzde  $H1=10$ ,  $H2=1,5$   $H3=-5,5$  olarak buluruz. Justice Firması istediği sayıları yakalaması için yukarıdak sayılarla belirtildiği kadar ilgili guruba avukat işe almalı ve işten çıkarmalıdır.

