



# Rapport Modélisation et Simulation

Issa Kevin: 000514550  
Amsens David: 000567534

Novembre 2024

# Table des matières

1	Introduction . . . . .	3
2	Modélisation . . . . .	3
3	Étude de l'influence des paramètres physiques sur la trajectoire de la balle	5
4	Étude des conditions de passage à travers des trous . . . . .	7
	4.1 Description des obstacles . . . . .	7
	4.2 Conditions nécessaires pour le passage . . . . .	9
	4.3 Exploration des conditions initiales . . . . .	9
	4.4 Modélisation du rebond de la balle sur une surface . . . . .	9
5	Conclusion . . . . .	10

# 1. Introduction

Dans le cadre de ce projet, nous avons pour objectif de modéliser et de simuler le mouvement d'une balle en chute libre en tenant compte des lois physiques qui régissent son rebond. Le mouvement de la balle, étudié dans un espace bidimensionnel, sera décomposé en une composante horizontale, supposée rectiligne et uniforme, et une composante verticale comprenant les phases de chute libre et de rebond.

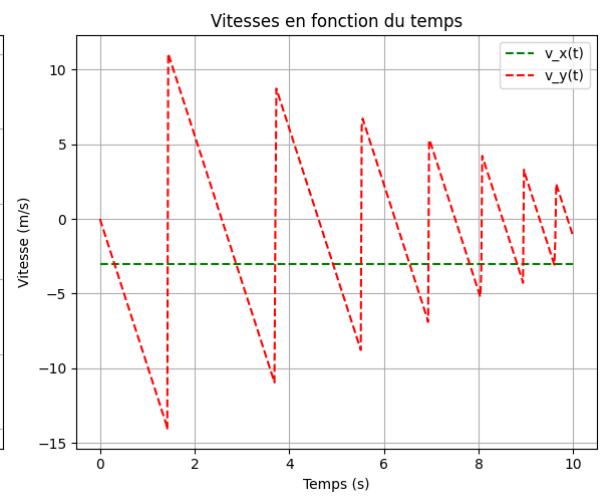
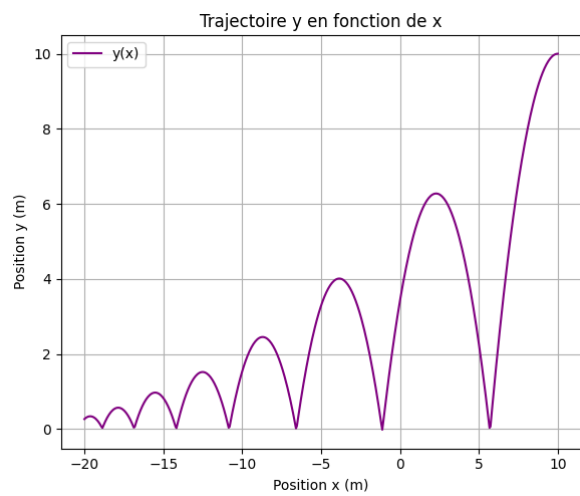
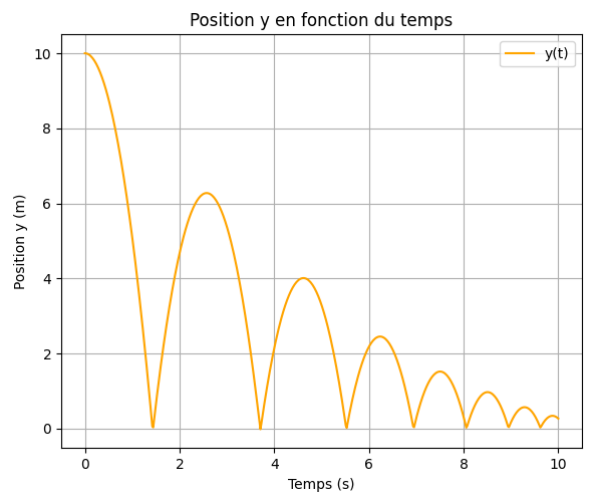
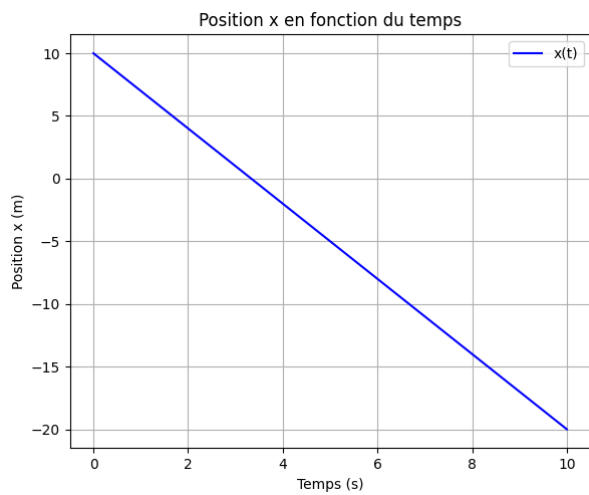
Ce rapport présente les étapes de modélisation et les résultats de la simulation à travers différents graphiques, dont les évolutions temporelles des positions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et des vitesses  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ , ainsi que la trajectoire  $y(x)$  de la balle. Ces analyses visuelles nous permettent d'étudier en détail l'influence des différents paramètres sur le comportement dynamique de la balle.

# 2. Modélisation

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation de la trajectoire d'une balle de masse  $m$  et de rayon  $r$  dans un espace bidimensionnel. Son mouvement se divise en deux composantes, horizontale et verticale, et nous allons observer chacune d'elles indépendamment. La trajectoire horizontale est rectiligne et uniforme car nous supposons une absence de frottements, elle maintient une vitesse constante  $v_x(t)$ , ce qui entraîne une évolution linéaire de la position  $x(t)$ . Le mouvement vertical de la balle comprend deux phases distinctes : une phase de chute libre et une phase de rebond. Lorsque le centre de masse de la balle en  $y(t)$  s'approche du sol à une distance inférieure à son rayon  $r$ , la balle entre en contact avec le sol et se déforme en modifiant ainsi son accélération verticale en raison des forces de rappel et de frottement qui sont définies par des constantes de rigidité  $k$  et de frottement  $c$ .

Les équations du mouvement sont basées sur les lois de la dynamique et comprennent l'influence de la gravité  $g$ . Nous utilisons ces équations pour simuler la trajectoire d'une balle soumise aux paramètres et aux conditions initiales données. La position initiale  $x(0) = 10$  m et  $y(0) = 10$  m, et vitesses initiales  $v_x(0) = -3$  m/s et  $v_y(0) = 0$  m/s. Pour cette simulation, nous prenons les valeurs  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>,  $c = 5$  kg/s m<sup>-1</sup>, et  $k = 5000$  kg/s<sup>2</sup>, qui représentent les effets gravitationnels, la dissipation d'énergie par frottement, et la rigidité de la balle au moment de l'impact.

Les résultats de cette modélisation sont présentés par des graphes des fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ , et  $y(x)$ , illustrant ainsi l'évolution temporelle des positions et vitesses, ainsi que la trajectoire complète de la balle.



### 3. Étude de l'influence des paramètres physiques sur la trajectoire de la balle

Dans cette seconde partie, nous étudions la variation de la trajectoire de la balle pour différentes valeurs des paramètres  $g$ ,  $c$  et  $k$ . L'objectif est d'observer l'influence de chacun de ces paramètres, comme la gravité, la constante de frottement, et la constante de rigidité sur le mouvement de la balle.

Premièrement, nous observons que la gravité  $g$  affecte principalement la chute de la balle et la hauteur de ses rebonds. En augmentant  $g$ , la force de gravité exercée sur la balle s'accroît, provoquant une chute plus rapide et des rebonds de moins en moins élevés. Ainsi, une valeur élevée de  $g$  a pour effet de réduire plus rapidement l'énergie cinétique de la balle dû aux impacts avec le sol et la gravité l'empêchant de la regagner, chaque rebond perdant en hauteur. Par contre, une réduction de la valeur de  $g$  ralentit la chute de la balle et allonge la durée du vol, entraînant des rebonds plus hauts et une trajectoire plus verticale.

Les constantes  $c$  et  $k$  qui dépendent de la rigidité de la balle, ont une influence importante sur la trajectoire de la balle, car plus la valeur de  $c$  est grande, au plus nous observons une diminution de la hauteur des rebonds. Pour une valeur faible de  $c$ , les pertes d'énergie sont moindres, et la balle conserve son énergie cinétique, résultant en des rebonds plus élevés. Au contraire, lorsque  $k$  est élevé, la balle rebondit plus violemment, ce qui génère une trajectoire avec des rebonds plus hauts. Une valeur de  $k$  réduite implique une trajectoire qui devient plus douce et tend à s'aplatir au sol.

Pour conclure, l'analyse des paramètres  $g$ ,  $c$ , et  $k$  montre que chacun influence la trajectoire de la balle de manière distincte. Les ajustements de ces valeurs permettent de modéliser différentes conditions physiques qui modifient la dynamique de la balle en fonction de la gravité, des pertes d'énergie dues aux frottements, et de la rigidité au rebond.

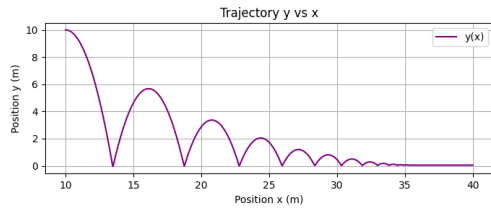


Figure 1: Description de  $g=15$ .

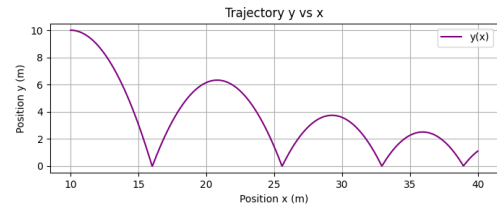


Figure 2: Description de  $g=5$ .

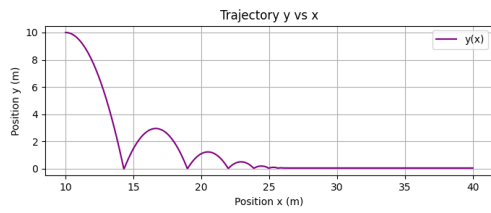


Figure 3: Description de  $c=10$ .

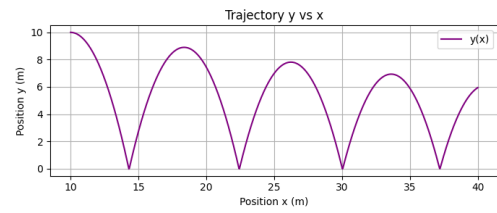


Figure 4: Description de  $c=1$ .

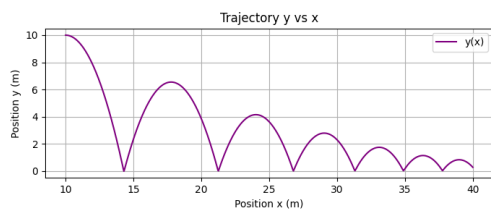


Figure 5: Description de  $k=8000$ .

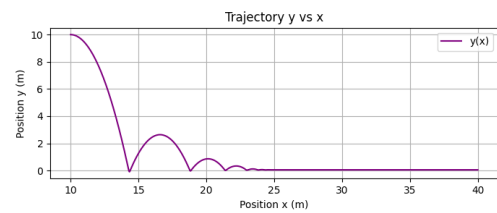


Figure 6: Description de  $k=1000$ .

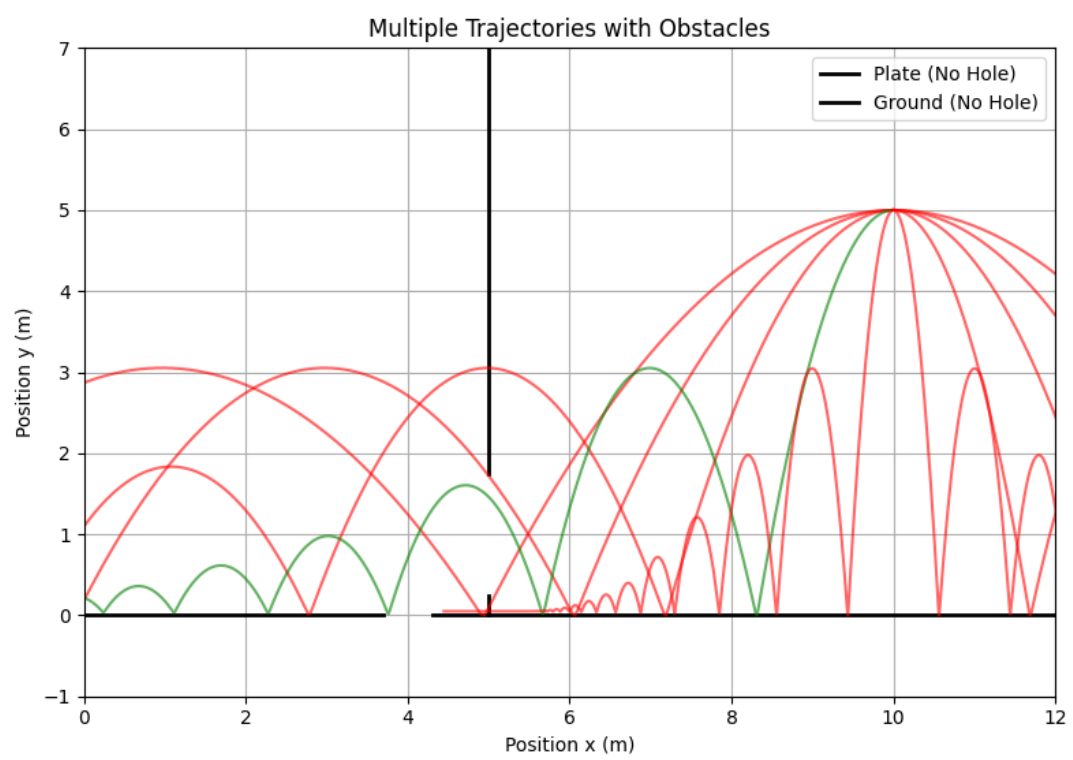
## 4. Étude des conditions de passage à travers des trous

Dans cette partie, nous analysons la capacité de la balle à traverser deux obstacles consécutifs : un trou circulaire dans une plaque verticale et un trou au sol, situés le long de sa trajectoire. L'objectif est de déterminer des combinaisons de conditions initiales  $(v_x(0), v_y(0), y(0))$  qui permettent à la balle, dont le rayon est  $r = 0.05$  m, de franchir ces obstacles en respectant les contraintes géométriques imposées par leur position et leurs dimensions.

### 4.1. Description des obstacles

Le premier obstacle est une plaque verticale, positionnée à  $x_{\text{plaque}} = 5$  m, comportant un trou circulaire de rayon  $r_{\text{plaque}} = 0.75$  m centré en  $y_{\text{plaque}} = 1$  m. Le second obstacle est un trou circulaire situé au sol, centré en  $x_{\text{trou}} = 4$  m, avec un rayon  $r_{\text{trou}} = 0.3$  m. Les positions et dimensions de ces obstacles imposent des contraintes spatiales sur la trajectoire de la balle qui doit éviter les bords des trous pour être considérée comme ayant réussi à franchir les obstacles.

Nous pouvons observer, ci-dessous, le résultat graphique des fonctions permettant de simuler les trajectoires des différents mouvements dans le graphique suivant. Les conditions initiales afin d'avoir au moins une bonne trajectoire est d'avoir la vitesse  $X$  initial est de 3 m/s en lançant la balle à une hauteur de 5 en position  $x = 10$ , ici les vitesses initiales horizontale  $v_x(0)$  et verticale  $v_y(0)$  sont différentes et ont été choisies afin d'observer et de simuler des trajectoires distinctes. Ces variations permettent d'analyser l'impact des paramètres initiaux sur le comportement des trajectoires et d'explorer différents mouvements.





## 4.2. Conditions nécessaires pour le passage

Pour que la balle traverse le trou de la plaque, son centre de masse  $(x(t), y(t))$  doit respecter deux conditions. La position horizontale  $x(t)$  de la balle doit se trouver à l'intérieur des limites de la plaque, soit  $x_{\text{plaque}} - r \leq x(t) \leq x_{\text{plaque}} + r$ . La distance entre la position verticale  $y(t)$  de son centre de masse et le centre  $y_{\text{plaque}}$  du trou doit être inférieure ou égale à  $r_{\text{plaque}}$ , soit  $|y(t) - y_{\text{plaque}}| \leq r_{\text{plaque}}$ .

Pour atterrir dans le trou du sol, les contraintes sont similaires, mais elles s'appliquent lorsque la balle touche le sol. La position horizontale  $x(t)$  doit être dans l'intervalle  $x_{\text{trou}} - r \leq x(t) \leq x_{\text{trou}} + r$ . La position verticale  $y(t)$  doit être inférieure ou égale au rayon de la balle  $r$ , soit  $y(t) \leq r$ .

## 4.3. Exploration des conditions initiales

Pour répondre à ces contraintes, nous avons exploré un espace de conditions initiales  $(v_x(0), v_y(0), y(0))$ , en maintenant la position initiale  $x(0) = 10$  m. Les vitesses initiales horizontale  $v_x(0)$  et verticale  $v_y(0)$  ont été ajustées pour générer des trajectoires différentes. De plus, la hauteur initiale  $y(0)$  a été modifiée afin d'aligner la balle sur la position verticale du trou dans la plaque au moment du passage.

En combinant les conditions initiales optimales, nous avons pu simuler des trajectoires où la balle traverse le trou de la plaque avant de descendre vers le trou du sol. Ces résultats montrent l'importance de la précision dans la modélisation des conditions initiales pour atteindre les objectifs fixés.

Cette étude montre que la dynamique de la balle peut être modifiée en fonction des contraintes des obstacles, pour garantir le passage dans les deux trous, à condition d'adopter des conditions initiales adaptées.

## 4.4. Modélisation du rebond de la balle sur une surface

Afin de simuler de manière réaliste le rebond de la balle lorsqu'elle entre en contact avec la plaque, plusieurs lois physiques doivent être prises en compte. Ces lois n'ont pas été intégrées dans les expériences présentées dans la section 4.1. Les modifications suivantes doivent être appliquées pour améliorer la modélisation du rebond :

- **Prise en compte de la vitesse au moment de l'impact :** Lors de la collision avec la plaque, la vitesse de la balle au moment de l'impact est essentielle pour prédire correctement la dynamique du rebond. Cette vitesse détermine l'ampleur du changement de direction et de la vitesse après l'impact.
- **Calcul de l'angle après le rebond :** L'angle de rebond  $(\theta'_r)$  peut être calculé à partir des composantes de vitesse après l'impact, à savoir la composante tangentielle  $v'_t$  et la composante normale  $v'_n$ . La relation entre ces composantes est donnée par la loi de réflexion :

$$\tan(\theta'_r) = \frac{v'_n}{v'_t} = \frac{-e \cdot v_n}{v_t}$$

où  $e$  est le coefficient de restitution, qui détermine la perte d'énergie dans la direction normale à la surface.

En utilisant les décompositions de la vitesse avant le rebond  $v_n = v \cos(\theta_i)$  et  $v_t = v \sin(\theta_i)$ , on obtient la relation suivante :

$$\tan(\theta'_r) = \frac{-e \cdot \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i)}$$

L'angle de rebond  $\theta'_r$  peut alors être exprimé par la formule :

$$\theta'_r = \arctan(-e \cdot \cot(\theta_i))$$

Ces modifications assurent un rebond plus réaliste en les ajoutant aux équations déjà présente. Bien que d'autres lois peuvent permettre d'améliorer le comportement de la balle.

## 5. Conclusion

Pour conclure, dans ce projet, nous avons eu l'occasion de mettre en pratique les concepts vus lors des séances d'exercices en les utilisant pour modéliser et simuler le mouvement d'une balle en chute libre avec rebonds. Nous avons pu observer l'impact des paramètres physiques et des conditions initiales sur le système.

Les observations ont montré l'influence de paramètres tels que la gravité et la rigidité. De plus, l'observation des conditions nécessaires pour franchir des obstacles a montré l'importance d'ajustements précis des conditions initiales afin de répondre à ce problème.

Enfin, la difficulté de modélisation des rebonds sur la plaque verticale montre le besoin d'utiliser des lois physiques supplémentaires pour représenter des mouvements plus complexes.