



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатика и системы управления

КАФЕДРА Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

ОТЧЕТ по лабораторной работе №1

Название: Расстояние Левенштейна и Дамерау – Левенштейна

Дисциплина: Анализ алгоритмов

Студент ИУ7-546
(группа)

(подпись, дата)

Ларин В.Н.
(фамилия, и.о.)

Преподаватель

(подпись, дата)

Волкова Л.Л.
(фамилия, и.о.)

Москва, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
1 Аналитический раздел	3
1.1 Рекурсивный алгоритм нахождения расстояния Левенштейна	3
1.2 Матричный алгоритм нахождения расстояния Левенштейна	4
1.3 Рекурсивный алгоритм нахождения расстояния Левенштейна с кэшированием ..	5
1.4 Расстояния Дамерау — Левенштейна	5
1.5 Вывод	5
2 Конструкторский раздел	7
2.1 Схемы алгоритмов	7
2.2 Вывод	10
3 Технологический раздел	11
3.1 Требование к ПО	11
3.2 Средства реализации	11
3.3 Реализация алгоритмов	11
3.4 Тестовые данные	14
3.5 Вывод	14
4 Экспериментальный раздел	15
4.1 Технические характеристики	15
4.2 Время выполнения алгоритмов	15
4.3 Использование памяти	15
4.4 Вывод	21
Заключение	22
Список литературы	23

ВВЕДЕНИЕ

Расстояние Левенштейна - минимальное количество операций вставки одного символа, удаления одного символа и замены одного символа на другой, необходимых для превращения одной строки в другую.

Расстояние Левенштейна применяется в теории информации и компьютерной лингвистике для:

- исправления ошибок в слове
- сравнения текстовых файлов утилитой diff
- в биоинформатике для сравнения генов, хромосом и белков

Цель данной лабораторной работы:

1) Изучение метода динамического программирования на материале алгоритмов нахождения расстояния Левенштейна и Дamerau-Левенштейна.

2) Оценка реализаций алгоритмов нахождения расстояния Левенштейна и Дamerau-Левенштейна.

Для достижения данных целей были выделены следующие задачи:

- 1) Изучение алгоритмов Левенштейна и Дamerau-Левенштейна;
- 2) Применение метода динамического программирования для матричной реализации указанных алгоритмов;
- 3) Получение практических навыков реализации указанных алгоритмов: матричные и рекурсивные версии;
- 4) Сравнительный анализ линейной и рекурсивной реализаций выбранного алгоритма определения расстояния между строками по затрачиваемым ресурсам (времени и памяти);
- 5) Экспериментальное подтверждение различий во временной эффективности рекурсивной и нерекурсивной реализаций выбранного алгоритма;
- 6) Описание и обоснование полученных результатов в отчете о выполненной лабораторной работе, выполненного как расчётно-пояснительная записка к работе.

1 Аналитический раздел

Расстояние Левенштейна [1] между двумя строками — это минимальное количество операций вставки, удаления и замены, необходимых для превращения одной строки в другую.

Цены операций могут зависеть от вида операции (вставка (insert), удаление (delete), замена (replace)) и/или от участвующих в ней символов, отражая разную вероятность разных ошибок при вводе текста, и т. п. В общем случае:

- $w(a, b)$ — цена замены символа a на символ b .
- $w(\lambda, b)$ — цена вставки символа b .
- $w(a, \lambda)$ — цена удаления символа a .

Для решения задачи о редакционном расстоянии необходимо найти последовательность замен, минимизирующую суммарную цену. Расстояние Левенштейна является частным случаем этой задачи при

- $w(a, a) = 0$.
- $w(a, b) = 1, a \neq b$.
- $w(\lambda, b) = 1$.
- $w(a, \lambda) = 1$.

1.1 Рекурсивный алгоритм нахождения расстояния Левенштейна

Расстояние Левенштейна между двумя строками a и b может быть вычислено по формуле 1.1, где $|a|$ означает длину строки a ; $a[i]$ — i -ый символ строки a , функция $D(i, j)$ определена как:

$$D(i, j) = \begin{cases} 0 & i = 0, j = 0 \\ i & j = 0, i > 0 \\ j & i = 0, j > 0 \\ \min\{ & \\ D(i, j - 1) + 1 & \\ D(i - 1, j) + 1 & i > 0, j > 0 \\ D(i - 1, j - 1) + m(a[i], b[j]) & (1.2) \\ \} & \end{cases}, \quad (1.1)$$

а функция 1.2 определена как:

$$m(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{если } a = b, \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}. \quad (1.2)$$

Рекурсивный алгоритм реализует формулу 1.1. Функция D составлена из следующих соображений:

- 1) Для перевода из пустой строки в пустую требуется ноль операций;
- 2) Для перевода из пустой строки в строку a требуется $|a|$ операций;
- 3) Для перевода из строки a в пустую требуется $|a|$ операций;

4) Для перевода из строки a в строку b требуется выполнить последовательно некоторое количество операций (удаление, вставка, замена) в некоторой последовательности. Последовательность проведения любых двух операций можно поменять, порядок проведения операций не имеет никакого значения. Полагая, что a', b' — строки a и b без последнего символа соответственно, цена преобразования из строки a в строку b может быть выражена как:

- а) Сумма цены преобразования строки a в b и цены проведения операции удаления, которая необходима для преобразования a' в a ;
- б) Сумма цены преобразования строки a в b и цены проведения операции вставки, которая необходима для преобразования b' в b ;
- в) Сумма цены преобразования из a' в b' и операции замены, предполагая, что a и b оканчиваются разные символы;
- г) Цена преобразования из a' в b' , предполагая, что a и b оканчиваются на один и тот же символ.

Минимальной ценой преобразования будет минимальное значение приведенных вариантов.

1.2 Матричный алгоритм нахождения расстояния Левенштейна

Прямая реализация формулы 1.1 может быть малоэффективна по времени исполнения при больших i, j , т. к. множество промежуточных значений $D(i, j)$ вычисляются заново множество раз подряд. Для оптимизации нахождения расстояния Левенштейна можно использовать матрицу в целях хранения соответствующих промежуточных значений. В таком случае алгоритм представляет собой построчное заполнение матрицы $A_{|a|, |b|}$ значениями $D(i, j)$.

Также можно заметить, что для заполнения каждой новой строки матрицы, необходима только одна предыдущая строка, что дает дополнительную оптимизацию алгоритма по памяти.

1.3 Рекурсивный алгоритм нахождения расстояния Левенштейна с кэшированием

Рекурсивный алгоритм заполнения можно оптимизировать по времени выполнения с помощью кэширования. Суть данного метода заключается в заполнении матрицы при выполнении рекурсии. В случае, если рекурсивный алгоритм выполняет прогон для данных, которые еще не были обработаны, результат нахождения расстояния заносится в матрицу. В случае, если обработанные ранее данные встречаются снова, для них расстояние не находится и возвращается полученное ранее значение.

1.4 Расстояния Дамерау — Левенштейна

Расстояние Дамерау — Левенштейна может быть найдено по формуле 1.3, которая задана как

$$d_{a,b}(i, j) = \begin{cases} \max(i, j), & \text{если } \min(i, j) = 0, \\ \min\{ \\ \quad d_{a,b}(i, j - 1) + 1, \\ \quad d_{a,b}(i - 1, j) + 1, \\ \quad d_{a,b}(i - 1, j - 1) + m(a[i], b[j]), & \text{иначе} \\ \quad \left[\begin{array}{ll} d_{a,b}(i - 2, j - 2) + 1, & \text{если } i, j > 1; \\ & a[i] = b[j - 1]; \\ & b[j] = a[i - 1] \\ & \infty, & \text{иначе} \end{array} \right. \\ \} \end{cases}, \quad (1.3)$$

Формула выводится по тем же соображениям, что и формула (1.1). Как и в случае с рекурсивным методом, прямое применение этой формулы неэффективно по времени исполнения, то аналогично методу из 1.3 производится добавление матрицы для хранения промежуточных значений рекурсивной формулы.

1.5 Вывод

В данном разделе были рассмотрены алгоритмы нахождения расстояния Левенштейна и Дамерау-Левенштейна, который является модификаций первого, учитывающего

возможность перестановки соседних символов. Формулы Левенштейна и Дamerau — Левенштейна для расчета расстояния между строками задаются рекурсивно, а следовательно, алгоритмы могут быть реализованы рекурсивно или итерационно.

2 Конструкторский раздел

2.1 Схемы алгоритмов

В данной части будут рассмотрены схемы алгоритмов нахождения расстояние Левенштейна и Дамерау - Левенштейна. На рисунках 2.1, 2.2, 2.3 представлены рассматриваемые алгоритмы.

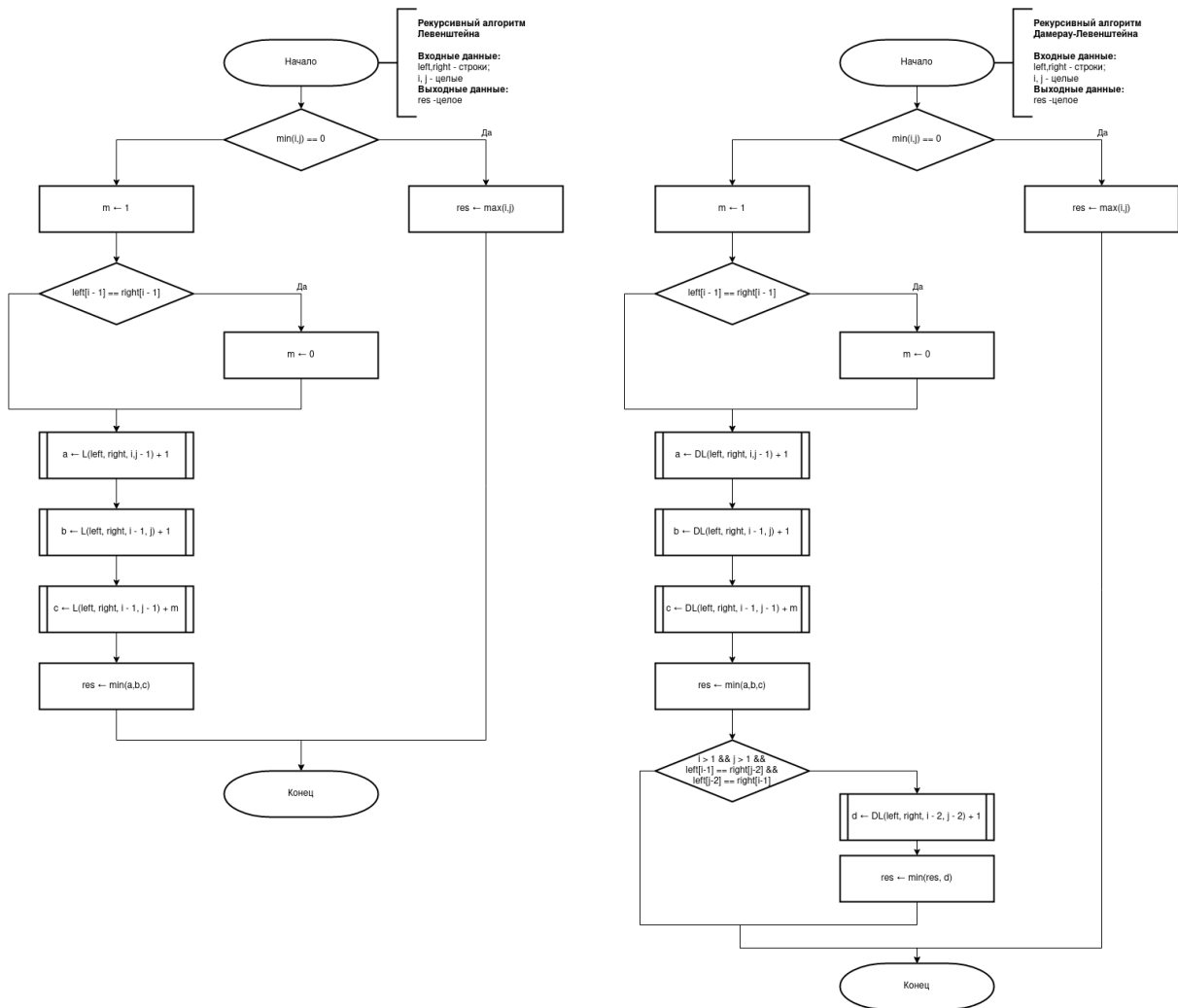


Рисунок 2.1 — Схема рекурсивных алгоритмов Левенштейна и Дамерау–Левенштейна

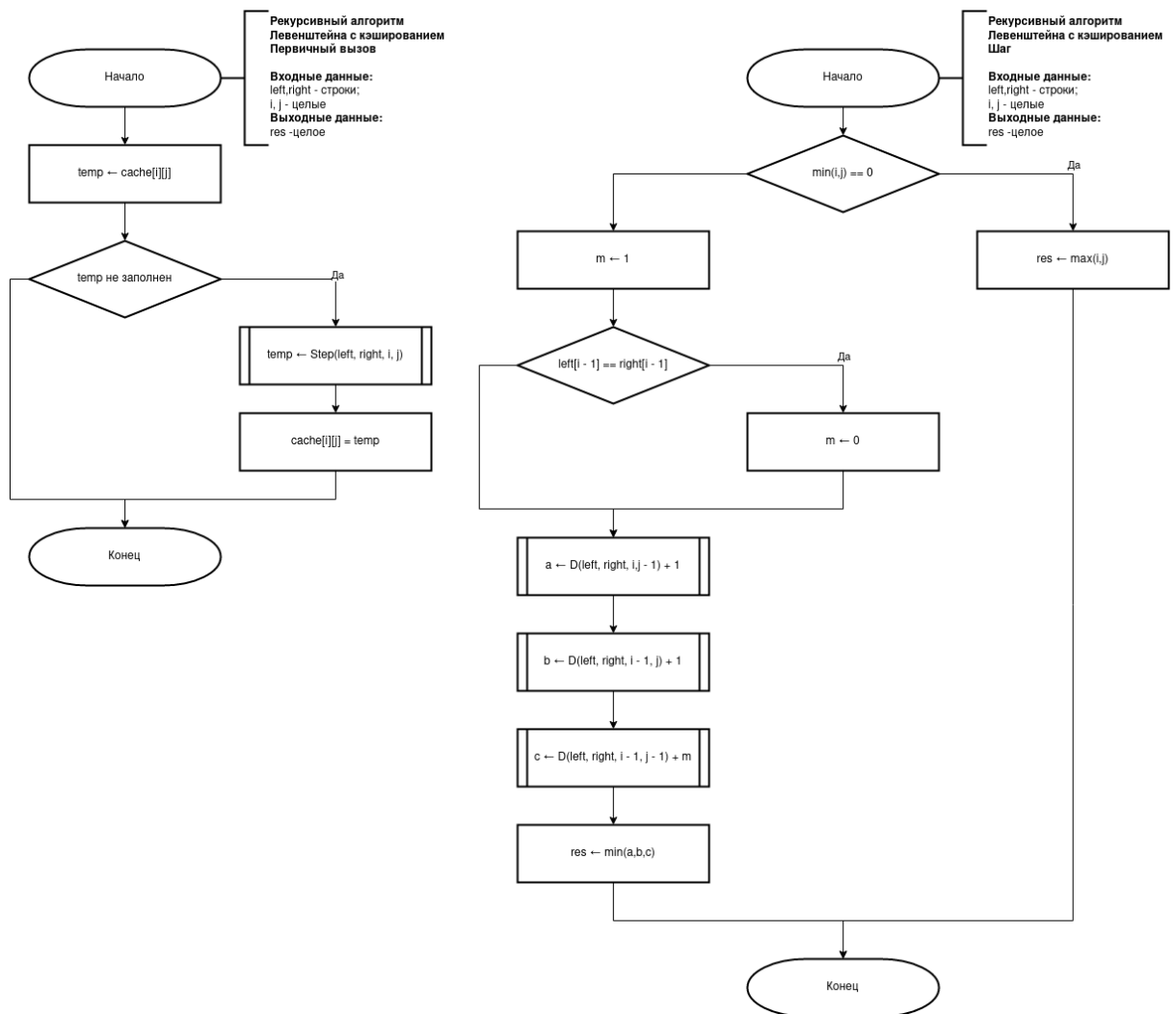


Рисунок 2.2 — Схема рекурсивного алгоритма Левенштейна с кэшированием

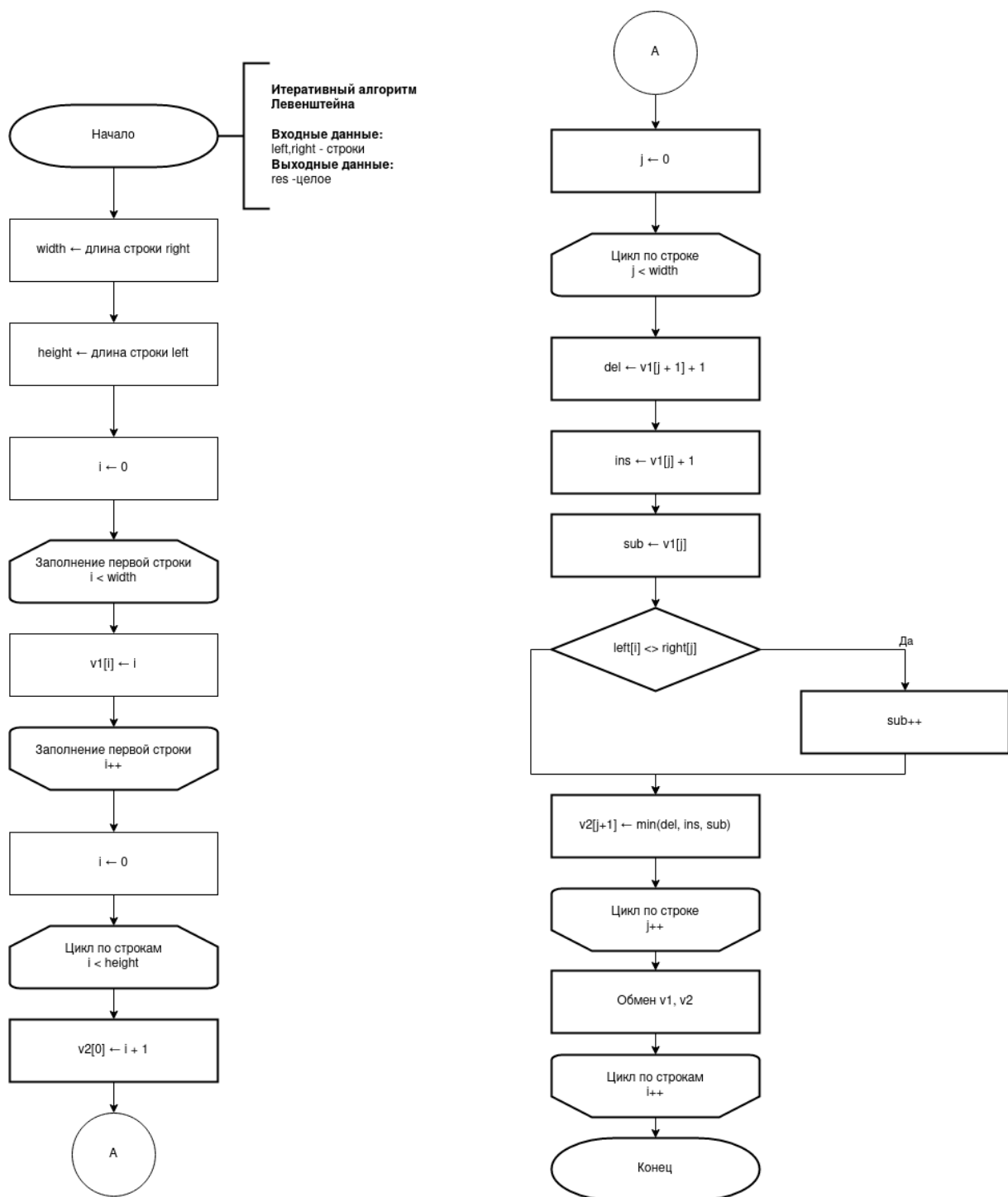


Рисунок 2.3 — Схема итеративного алгоритма Левенштейна

2.2 Вывод

На основе теоретических данных, полученные в аналитическом разделе были построены схемы исследуемых алгоритмов.

3 Технологический раздел

3.1 Требование к ПО

Программа должна отвечать следующим требованиям:

- 1) На вход подаются две строки в любой раскладке;
- 2) ПО должно выводить полученное расстояние.

3.2 Средства реализации

Основным средством разработки является язык программирования. Был выбран язык программирования C++. Данный выбор обоснован высокой скоростью работы языка, поддержкой строгой типизации [2]. Для сборки проекта был выбран инструмент CMake [3]. В качестве среды разработки был выбран инструмент JetBrains Clion [4].

Для подгрузки тестовых данных в формате JSON [5] в программу была использован модуль PropertyTree библиотеки Boost [6].

3.3 Реализация алгоритмов

В листинге 3.1 представлена реализация рекурсивного алгоритма Левенштейна. В листинге 3.2 представлена реализация рекурсивного алгоритма Левенштейна с кэшированием. В листинге 3.3 представлена реализация итеративного алгоритма Левенштейна. В листинге 3.4 представлена реализация рекурсивного алгоритма Дамерау–Левенштейна.

Листинг 3.1 — Рекурсивный алгоритм Левенштейна

```
1 int rec_l(const std::string &left, const std::string &right, const int i,  
    const int j) {  
2     if (std::min(i, j) == 0) {  
3         return std::max(i, j);  
4     }  
5  
6     int m = left[i - 1] == right[j - 1] ? 0 : 1;  
7  
8     return std::min({  
9         rec_l(left, right, i, j - 1) + 1,  
10        rec_l(left, right, i - 1, j) + 1,  
11        rec_l(left, right, i - 1, j - 1) + m  
12    });  
13 }
```

Листинг 3.2 — Рекурсивный алгоритм Левенштейна с кэшированием

```
1 class Rec_Mem_l {
```

```

2      const int NoData = -1;
3
4      std::vector<std::vector<int>> _buffer;
5      std::string _left;
6      std::string _right;
7
8      int _step(int i, int j);
9
10     int __step(int i, int j);
11
12 public:
13     int operator()(const std::string &left, const std::string &right);
14 };
15
16 int Rec_Mem_1::_step(int i, int j) {
17
18     int temp = _buffer[i][j];
19     if (temp != NoData) {
20         return temp;
21     }
22
23     temp = __step(i, j);
24     _buffer[i][j] = temp;
25     return temp;
26
27 }
28
29 int Rec_Mem_1::__step(int i, int j) {
30
31     if (std::min(i, j) == 0) {
32         return std::max(i, j);
33     }
34
35     int m = _left[i - 1] == _right[j - 1] ? 0 : 1;
36     std::initializer_list<int> res = {
37         _step(i, j - 1) + 1,
38         _step(i - 1, j) + 1,
39         _step(i - 1, j - 1) + m
40     };
41
42     return std::min(res);
43 }
44
45 int Rec_Mem_1::operator()(const std::string &left, const std::string
46     &right) {
47     _left = left;
48     _right = right;

```

```

48
49     int i = left.size(), j = right.size();
50     _buffer.resize(i + 1);
51     for (auto &row: _buffer) {
52         row.resize(j + 1);
53         for (auto &el: row) {
54             el = NoData;
55         }
56     }
57
58     return _step(i, j);
59 }

```

Листинг 3.3 — Итеративный алгоритм Левенштейна

```

1  int iter_l(const std::string &left, const std::string &right) {
2      int width = right.size();
3      int height = left.size();
4      std::vector<int> v1(width + 1);
5      std::vector<int> v2(width + 1);
6
7      for (size_t i = 0; i < width; i++) {
8          v1[i] = i;
9      }
10
11     for (size_t i = 0; i < height; i++) {
12         v2[0] = i + 1;
13         for (size_t j = 0; j < width; j++) {
14             int del = v1[j + 1] + 1;
15             int ins = v2[j] + 1;
16             int sub = v1[j];
17             if (left[i] != right[j]) {
18                 sub++;
19             }
20
21             v2[j + 1] = std::min({del, ins, sub});
22         }
23         std::swap(v1, v2);
24     }
25     return v1[width];
26 }

```

Листинг 3.4 — Рекурсивный алгоритм Дамерау–Левенштейна

```

1  int rec_dl(const std::string &left, const std::string &right, const int i,
2      const int j) {
3      if (std::min(i, j) == 0) {
4          return std::max(i, j);
5      }
6
7      int del = rec_dl(left, right, i - 1, j) + 1;
8      int ins = rec_dl(left, right, i, j - 1) + 1;
9      int sub = rec_dl(left, right, i - 1, j - 1);
10     if (left[i] != right[j]) sub++;
11     return std::min({del, ins, sub});
12 }

```

```

4     }
5
6     int m = left[i - 1] == right[j - 1] ? 0 : 1;
7
8     int res = std::min({
9         rec_dl(left, right, i, j - 1) + 1,
10        rec_dl(left, right, i - 1, j) + 1,
11        rec_dl(left, right, i - 1, j - 1) + m
12    });
13    if (i > 1 && j > 1 && left[i - 1] == right[j - 2] && left[i - 2] ==
14        right[j - 1]) {
15        res = std::min(res, rec_dl(left, right, i - 2, j - 2) + 1);
16    }
17    return res;
18 }

```

3.4 Тестовые данные

В таблице 3.1 представлены тестовые данные для алгоритмов Левенштейна и Дamerau–Левенштейна.

Таблица 3.1 — Тестовые данные для алгоритмов Левенштейна и Дamerau–Левенштейна

№	S_1	S_2	Левенштейна	Дamerau–Левенштейна
1	« »	« »	0	0
2	«same»	«same»	0	0
3	«hello»	«gol»	4	4
4	«qwer»	«rewq»	4	3
5	«music»	«muisc»	2	1
6	«memory»	«memxory»	1	1
7	«memxory»	«memory»	1	1
8	«mexory»	«memory»	1	1

3.5 Вывод

На основе схем из конструкторского раздела были разработаны реализации требуемых алгоритмов.

4 Экспериментальный раздел

4.1 Технические характеристики

Тестирование выполнялось на устройстве со следующими техническими характеристиками:

- Операционная система Ubuntu 21.04;
- Память 16 GiB (4,5 GiB выделено для нужд графического ядра)
- Процессор AMD® Ryzen 5 5500u with radeon graphics × 12

4.2 Время выполнения алгоритмов

Для замеров времени использовалась стандартная функция языка `clock` [7]. Данная функция возвращает суммарное процессорное время, использованное программой. В случае ошибки, функция возвращает значение -1. На листинге 4.1 показан способ применения данной функции при замерах.

Листинг 4.1 — Замер времени функции

```
1 auto start = clock();
2 for (int j = 0; j < counts; ++j) {
3     rec_l(left, right);
4 }
5 res.rl = double(clock() - start) / counts;
```

Результаты тестирования приведены в таблице 4.1. Прочерк в таблице означает что тестирование для этого набора данных не выполнялось.

Представлены зависимости времени работы рекурсивных алгоритмов Левенштейна и Дамера–Левенштейна на рисунках 4.1 и 4.2

На рисунках 4.3 и 4.4 представлена зависимость времени работы реализаций алгоритмов Левенштейна итеративного и рекурсивного с кэшем.

4.3 Использование памяти

Максимальная глубина стека при вызове рекурсивных функций рассчитывается по формуле (4.1).

Использование памяти при итеративной реализации алгоритма Левенштейна может быть найдено с помощью формулы (4.2).

Таблица 4.1 — Таблица зависимости времени работы реализаций алгоритмов от длины входных слов

Длина слов	Рекурсивный Левенштейна	Итеративный Левенштейна	Рекурсивный с кэшем Левенштейна	Рекурсивный Дамерау–Левенштейна
1	0.2	0.3	0.5	0.2
2	0.3	0.4	0.5	0.3
3	1.1	0.6	0.7	1.2
4	5.4	0.8	1.1	5.7
5	28	1	1.5	30.8
6	149.9	1.3	2.1	173
7	800.4	1.7	3.2	906.2
8	4357.9	2.1	4	5021.7
9	23820.5	2.4	4.9	27907.9
10	132888	3	5.9	146318
20	–	10.3	22.5	–
30	–	22.5	46.1	–
50	–	59.9	132.8	–
100	–	236.4	530.1	–
200	–	921	2047.2	–

$$M_{recursive} = (n \cdot lvar + ret + ret_{int}) \cdot depth \quad (4.1)$$

Где:

n – количество аллоцированных локальных переменных;

$lvar$ – размер переменной типа int

ret – адрес возврата;

ret_{int} – возвращаемое значение;

$depth$ – максимальная глубина стека вызова, которая равна $|S_1| + |S_2|$.

$$M_{iter} = |S_1| + |S_2| + (|S_2| + 1) \cdot 2 \cdot lvar + n \cdot lvar + ret + ret_{int} \quad (4.2)$$

Где $(|S_2| + 1) \cdot 2 \cdot lvar$ – место в памяти под матрицу расстояний.

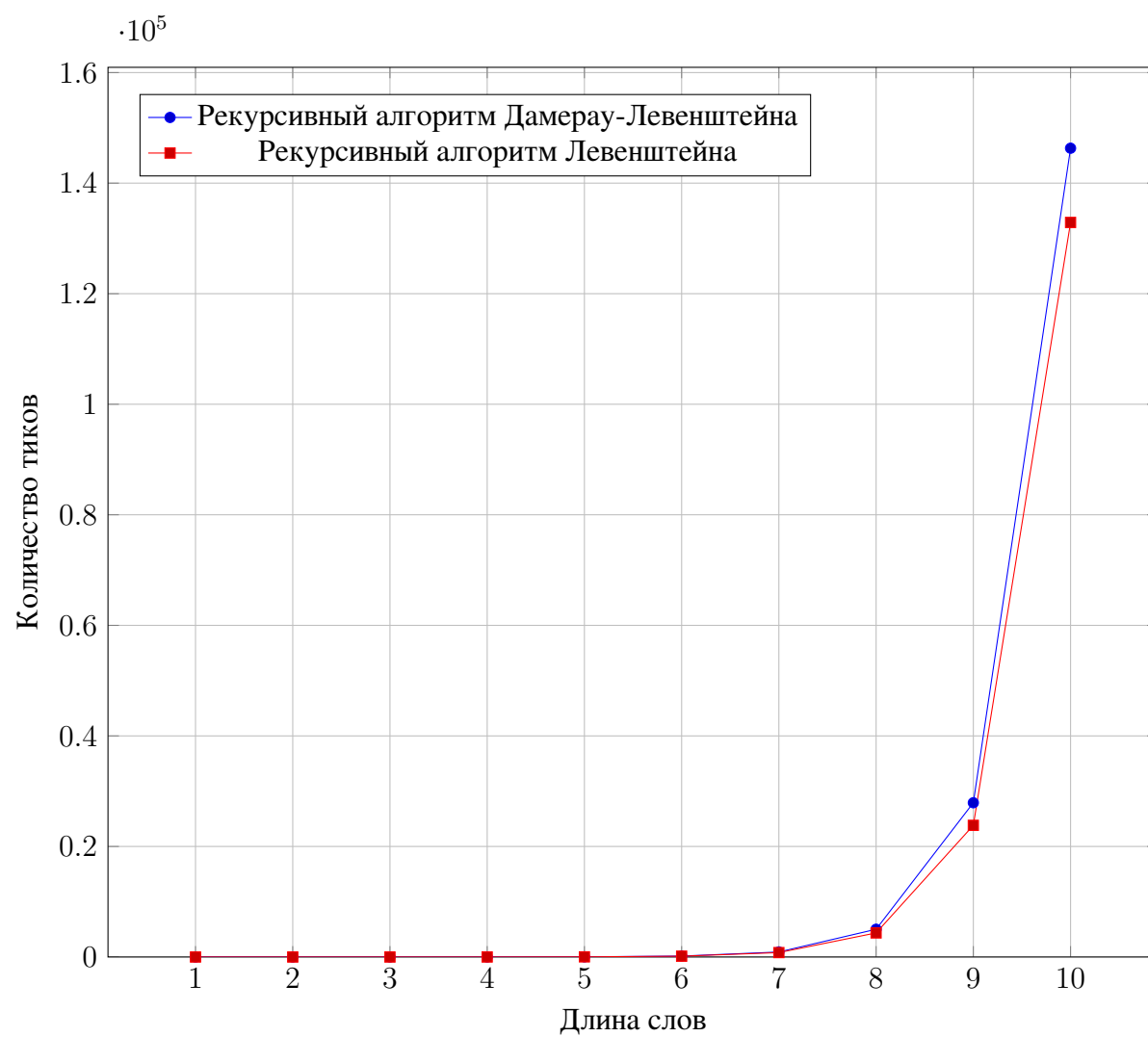


Рисунок 4.1 — Зависимость времени работы реализаций рекурсивных алгоритмов Левенштейна и Дамерау-Левенштейна от времени

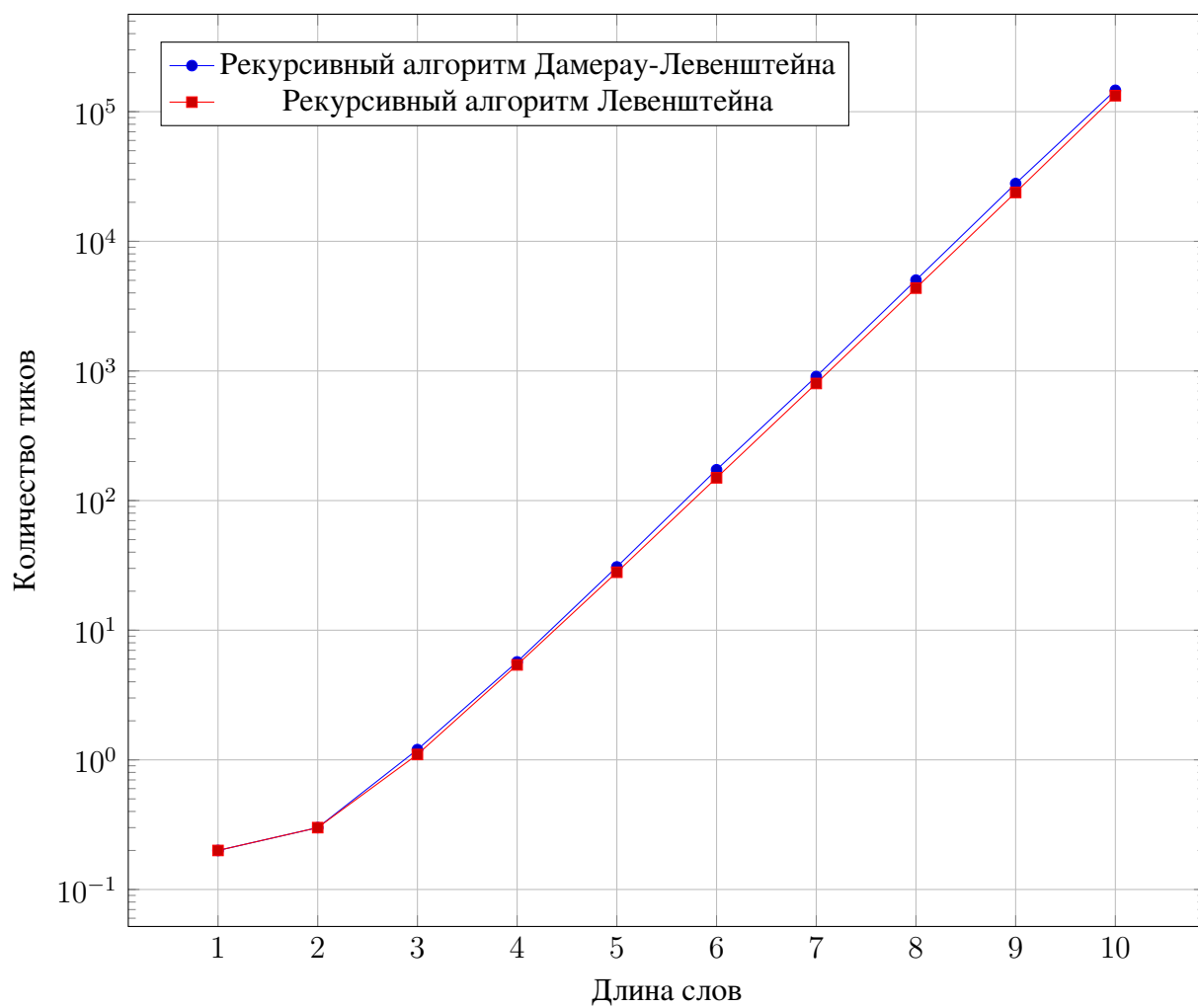


Рисунок 4.2 — Зависимость времени работы реализаций рекурсивных алгоритмов Левенштейна и Дамерау-Левенштейна от времени в логарифмической шкале

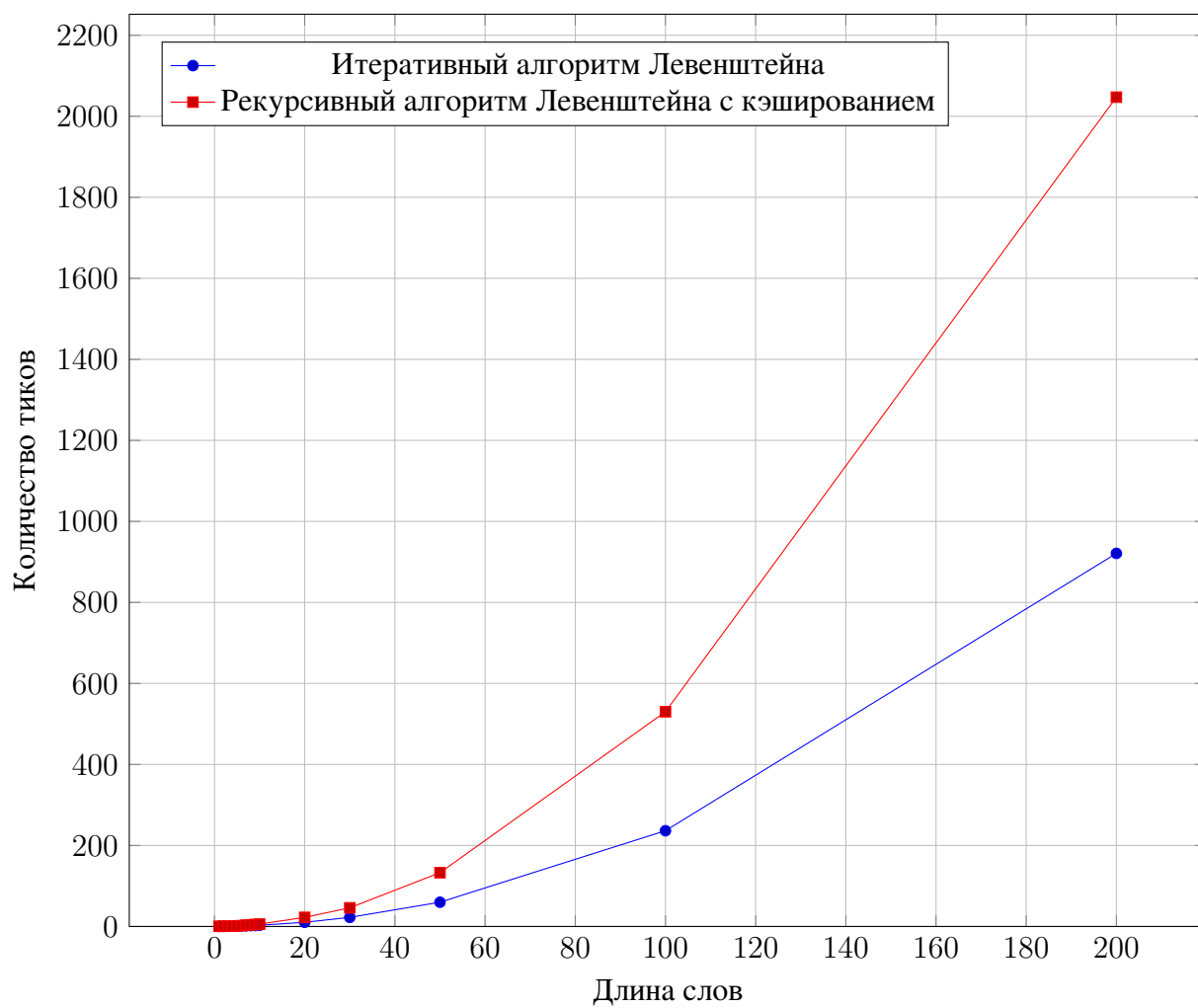


Рисунок 4.3 — Зависимость времени работы реализаций алгоритмов Левенштейна итеративного и рекурсивного с кэшем

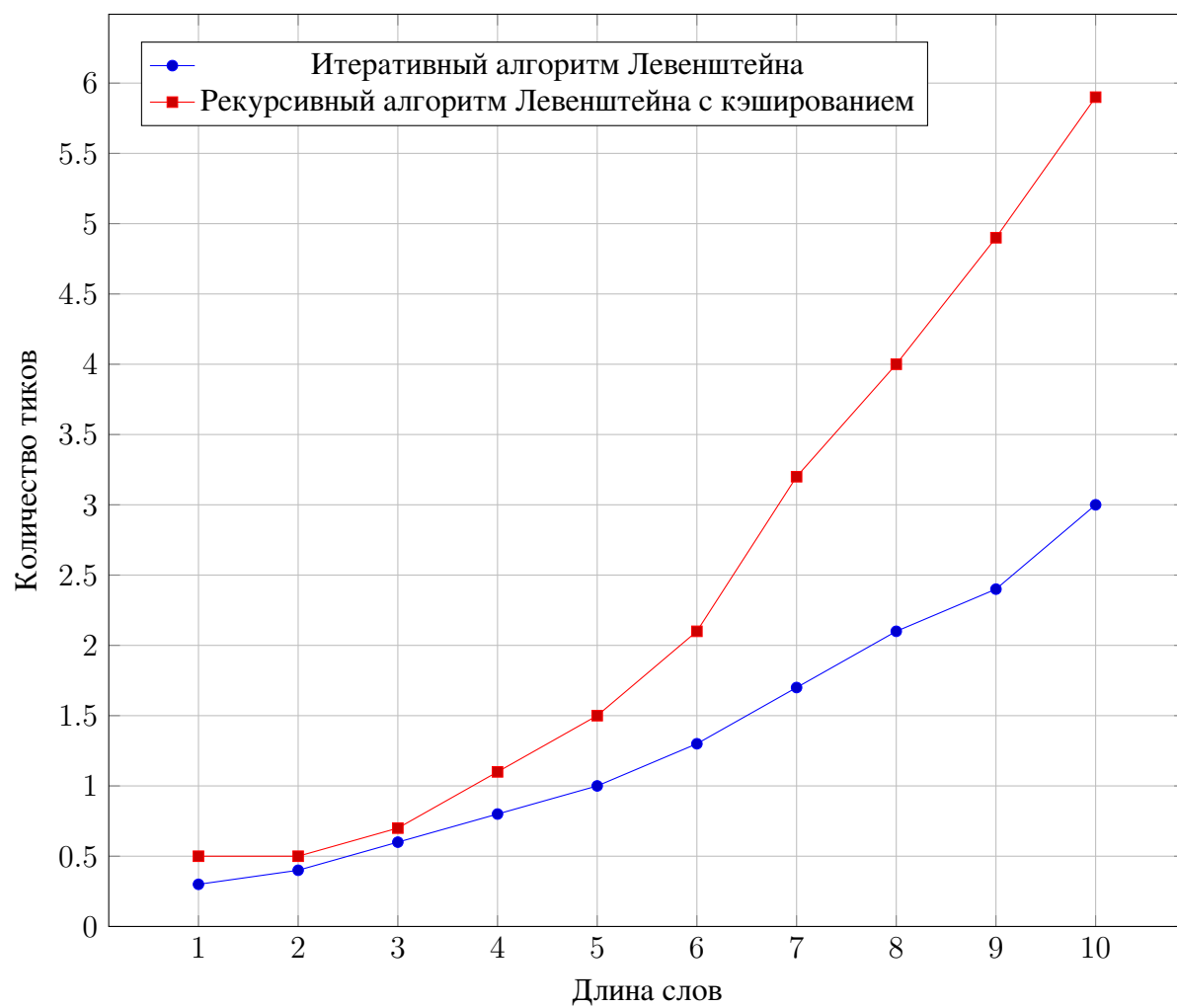


Рисунок 4.4 — Зависимость времени работы реализаций алгоритмов Левенштейна итеративного и рекурсивного с кэшем

4.4 Вывод

Рекурсивный алгоритм Левенштейна работает дольше итеративной реализации – время этого алгоритма увеличивается экспонентально с ростом размера строк. Рекурсивный алгоритм с кэшированием превосходит простой рекурсивный алгоритм по времени. Расстояние Дameraу – Левенштейна по результатам замеров работает дольше в отличие от расстояния Левенштейна. Однако, в системах автоматического исправления текста, где транспозиция встречается чаще, расстояние Дameraу – Левенштейна будет наиболее эффективным алгоритмом. По расходу памяти все реализации проигрывают рекурсивной за счет большого количества выделенной памяти под матрицу расстояний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках лабораторной работы были рассмотрены два алгоритма нахождения редакторского расстояния – расстояние Левенштейна и расстояние Дамерау – Левенштейна. Во время аналитического изучения алгоритмов были выявлены смысловые различия между двумя алгоритмами – расстояние Дамерау – Левенштейна более эффективно в системах автоматической замены текста, где наиболее часто встречающаяся редакторская операция – это транспозиция. В других случаях, если алгоритмы работают не с буквами в естественном языке, рациональнее использовать алгоритм расстояние Левенштейна. Самая оптимальная реализация по памяти – рекурсивный алгоритм, самая оптимальная реализация по времени – итеративный алгоритм, использующий матрицу расстояний. В ходе лабораторной работы получены навыки динамического программирования, реализованы изученные алгоритмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левенштейн В.И. Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов. — Докл. АН СССР, 1965. — С. 845–848. — ISBN: 9785457707351. — Режим доступа: <http://mi.mathnet.ru/dan31411>.
2. Страуструп Б. Программирование. Принципы и практика использования C++. — ООО ИД Вильямс, 2011. — ISBN: 9785457707351. — Режим доступа: <https://books.google.ru/books?id=kttwBgAAQBAJ>.
3. CMake [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://cmake.org/> (дата обращения: 10.10.2021).
4. CLion: A Cross-Platform IDE for C and C++ by JetBrains [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.jetbrains.com/clion/> (дата обращения: 10.10.2021).
5. Introducing JSON [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.json.org/json-en.html> (дата обращения: 10.10.2021).
6. Boost C++ Libraries [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.boost.org/> (дата обращения: 10.10.2021).
7. Clock: Интерактивная система просмотра системных руководств [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.opennet.ru/man.shtml?topic=clock&category=3&russian=0> (дата обращения: 10.10.2021).