Случайные величины и мат.ожидание

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ - **случайная величина** (численное выражение события)
Пример: $p(\xi = 3) = \sum\limits_{\omega : \xi(\omega) = 3} p(\omega)$

Пусть $\Omega \to \xi_1$, $\Omega \to \xi_2$ - случайные величины.
Они **независимы**, если $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ независимы $\xi_1 \subset A$ и $\xi_1 \subset B$.

A - событие. Тогда **индикаторная случайная величина** определяется следующим образом:

$$I_a(\omega) = \begin{cases} 1, \ \omega \in A \\ 0, \ \omega \in A \end{cases}$$

$E(\xi) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) p(w)$ - **мат.ожидание** (среднее значение случайной величины)

Свойства мат.ожидания

$E(c\xi) = cE(\xi)$

$E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$

Доказательство. По определению: $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (\alpha\xi_1(\omega) + \beta\xi_2(\omega)) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$ $\square$

$E(\xi_1\xi_2) = E(\xi_1)E(\xi_2)$, если ξ_1, ξ_2 независимы.

Доказательство.
$E(\xi) = \sum\limits_{x\in\mathbb{R}} x \cdot p(\xi = x)$
$E(\xi_1\xi_2) = \sum\limits_{x\in\mathbb{R}} x \cdot p(\xi_1\xi_2 = x) = \sum\limits_{y\in\mathbb{R}}\sum\limits_{z\in\mathbb{R}} yz \cdot p(y \cap z) = \sum\limits_{y\in\mathbb{R}}\sum\limits_{z\in\mathbb{R}} yz \cdot p(y)p(z) =$
$\sum\limits_{y\in\mathbb{R}} p(\xi_1 = y) + \sum\limits_{z\in\mathbb{R}} p(\xi_2 = z)$ $\square$

$D(\xi) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} (\xi(\omega - E(\xi)))^2 p(\omega) = E(\xi - E(\xi))$ - **дисперсия** (разброс значений)

Примеры

1. Есть n рабочих стоимостью $c_1, c_2, \cdots, c_n$ за единицу времени, и n работ занимающие $t_1, t_2, \cdots, t_n$ времени. Сколько ожидаемо мы заплатим случайной перестановке рабочих?
$E(\xi\rho) = E\sum\limits_{i=1}^{n} c(\rho_i)t_i = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i E(c_{\rho_i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \frac{\sum c_i}{n} = \frac{\sum t_i \sum c_i}{n}$ (из линейности мат.ожидания, раскладываем на n функций)

2. Пусть задан граф $G = (V,E)$, и $A \subset V$. Тогда разрез U_A - это все ребра, соединяющие вершины из A с вершинами не из A. Каково мат.ожидание его размера?
$E|U_A| = E\sum\limits_{e\in E} I_{e\in U_A} = \sum\limits_{e\in E} p(e \in U_A) = \frac{|E|}{2}$ (т.к. каждая вершина относится к A с вероятностью $\frac{1}{2}$)

3. Каково мат.ожидание len в жадном поиске НВП?

```
lst=-1
len=0
for i: 1..n
    if p[i] > lst:
        lst = p[i]
        len += 1
```

$E(\xi(\rho)) = E\sum\limits_{i=1}^{n} I_{\rho_i = max(\rho_1, \cdots, \rho_i)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ (т.к. вероятность, что максимум в последовательности из i элементов будет на i-м месте, равна $\frac{1}{i}$)

Оценка дисперсии

Неравенство Маркова
$p(\xi > kE(\xi)) \leq \frac{1}{k}$ при $\xi(w) \geq 0$, $E(\xi) \geq 0$

Неравенство Чебышева
$p(|\xi - E(\xi)| > a) \leq \frac{D(\xi)}{a^2}$