АиСД, пилотный поток. Лекция 1.

Определение. *Вероятностное пространство* — тройка объектов $\left(\Omega, 2^\Omega, \mathsf{P}\right)$, где

- Ω — множество элементарных исходов;
- 2^Ω — множество событий (где каждое событие — некий набор исходов);
- $\mathsf{P} : \Omega \to [0,1]$ — функция, сопоставляющая каждому исходу вероятность его наступления. При этом $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathsf{P}(\omega) = 1$.

Замечание. Все приводимые в данном курсе утверждения о вероятности справедливы лишь для вероятностных пространств с конечным множеством элементарных исходов.

Пусть $A \in 2^\Omega$ — некое событие. Будем обозначать вероятность события A как $\mathsf{P}(A)$.

Вероятность события равна сумме вероятностей входящих в него элементарных исходов, то есть $\mathsf{P}(A) = \sum\limits_{\omega \in A} \mathsf{P}(\omega)$.

Определение. Событие A называется *невозможным*, если $\mathsf{P}(A) = 0$.

Определение. Событие A называется *достоверным*, если $\mathsf{P}(A) = 1$.

Определение. $\mathsf{P}(A|B)$ обозначает *условную вероятность*, то есть вероятность наступления события A при условии наступления события B.

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$$

Определение. События A и B называются *независимыми*, если B не является невозможным и $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$.

Если A и B независимы, справедлива следующая формула:

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$$

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если $\forall I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \ \prod\limits_{i \in I} \mathsf{P}(A_i) = \mathsf{P}(\bigcap\limits_{i \in I} A_i)$

Замечание. Попарной независимости событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ недостаточно для того, чтобы они были независимыми в совокупности. Контрпример: при броске двух игральных кубиков событие A_1 определим как «выпало чётное значение на первом кубике», событие A_2 как «выпало чётное значение на втором кубике», а событие A_3 как «сумма значений на кубиках чётная». События попарно независимы, но если одновременно наступают любые два из них, третье становится достоверным.

Определение. События A и B называются *несовместными*, если $\mathsf{P}(A|B) = 0$.

Определение. Множество $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ называется *полной группой событий*, если $\forall i \neq j \ \mathsf{P}(A_i \cap A_j) = 0$ и $\mathsf{P}(\bigcup\limits_i A_i) = 1$

Если S — полная группа событий, то верно следующее утверждение:

$$\forall B \in 2^\Omega \quad \mathsf{P}(B) = \sum_{A \in S} B \cap A = \sum_{A \in S} \mathsf{P}(B|A) \cdot \mathsf{P}(A)$$