ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

ИСАЕВ
АЛЕКСЕЙ ПЕТРОВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
ИЛЬИНА ПАВЛА КОНСТАНТИНОВИЧА

Содержание

Лекция 1

Уравнение Кортевега — де Фриза

В данном курсе будет две части:
1) классическая теория (осенний семестр)
2) элементы квантовой теории (весенний семестр)

Рекомендуемая литература для первой части курса:
«Введение в теорию солитонов», Новокшенов В.Ю. и «Многоликий солитон», Филиппов А. Т.

Первое наблюдение солитонов, записанное в литературе, датируется 1834 годом. Джон Скотт Рассел (1808-1882), гуляя вдоль канала, наблюдал картину распространения уединенной волны от резко останавливающейся баржи (Рис. 1.)

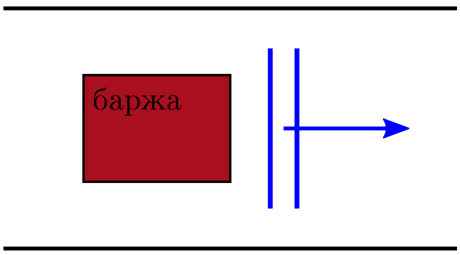

Рис. 1.

В 1965 году М. Крускал и Н. Забуски придумали для такого явления термин "солитон"(*solitary* — уединенный).

Чтобы попытаться описать такую волну, возьмем какую-нибудь колоколообразную функцию (Рис. 2.),

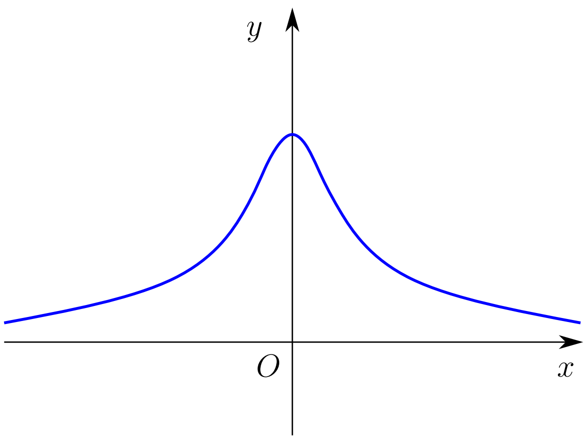

Рис. 2.

например,

$$u(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$$

Теперь попробуем «сдвинуть» эту функцию:

$$u(x,t) = \frac{\alpha}{\mathrm{ch}^2(\underbrace{\beta(x-ct+\delta)}_{\phi(x,t)})}$$

$\alpha,\ \beta,\ \delta,\ c$ — константы
δ — фаза
c — скорость движения колоколообразного объекта направо

Какому же уравнения эта функция должна удовлетворять? Продифференцируем $u(x,t)$:

$$\partial_x u(x,t) = u'(x,t) = \frac{-2\alpha}{\mathrm{ch}^3(\phi)}\beta\,\mathrm{sh}(\phi)$$

$$u''(x,t) = (-2\alpha\beta^2)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\phi)} - 3\frac{\mathrm{sh}^2(\phi)}{\mathrm{ch}^4(\phi)}\right) = \ldots$$

$$||\ \mathrm{ch}^2\phi - \mathrm{sh}^2\phi = 1\ ||$$

$$\ldots = (-2\alpha\beta^2)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2(\phi)} - 3\frac{1-\mathrm{ch}^2(\phi)}{\mathrm{ch}^4(\phi)}\right) = (-2\alpha\beta^2)\left(\frac{-2}{\mathrm{ch}^2(\phi)} + \frac{3}{\mathrm{ch}^4(\phi)}\right) =$$

$$= \beta^2\left(4u - \frac{6u^2}{\alpha}\right)$$

Итого,

$$u'' = \beta^2(4u - \frac{6}{\alpha}u^2)$$

С другой стороны,

$$\partial_t u(x,t) = \dot{u}(x,t) = -cu'(x,t)$$

$$u'''(x,t) = \beta^2(4u' - \frac{12}{\alpha}u'u) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{4\beta^2}u''' + \frac{3}{\alpha}u'u$$

Подставим последнее полученное выражение в $\dot{u}(x,t)$:

$$\dot{u} + \frac{c}{4\beta^2}u''' + \frac{3c}{\alpha}u'u = 0$$

Упростим это уравнение, сделав масштабное преобразование:

$$\begin{cases} x \ \to \ \lambda x, \\ u \ \to \ \mu u \end{cases}$$

Откуда

$$\boxed{\dot{u} + 6uu' + u''' = 0}$$

Полученное уравнение — это уравнение Кортевега - де Фриза (КдФ).
А $u(x,t)$ — односолитонное решение уравнения КдФ.

В середине 1960х годов было обнаружено, что уравнение КдФ является точно решаемым (интегрируемым).

Интегрируемость системы (по Лиувиллю): если для механической системы с N степенями свободы, мы можем предъявить M интегралов движения, находящихся в инволюции со скобкой Пуассона, то такая система называется интегрируемой.

$u(x,t)$ — имеет бесконечное число степеней свободы $\Rightarrow$ (по Лиувиллю) для КдФ должно быть бесконечное число законов сохранения. Питер Лакс придумал как их находить!

Запишем уравнение КдФ в виде условия нулевой кривизны. Лакс ввел два оператора:

$$L = \partial_x^2 + u(x,t)$$

$$A = \partial_t + M, \quad \text{где} \quad M = 4(\partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u')$$

Откуда получаем, что уравнение КдФ является результатом коммутирования этих двух операторов:

$$[A,\ L] = 0 \ \Rightarrow \ \dot{L} = [L, M]$$

Эти два оператора называются парой Лакса: A и L.

Задача. Рассмотреть функцию

$$F(x,t) = \frac{\alpha}{\mathrm{ch}(\beta(x - ct + \delta))}$$

Показать, что $F(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\dot{v} + \xi(v^2 + \lambda)v' + \gamma v''' = 0$$

$$\xi = 6\frac{c}{\alpha^2 + \lambda 6}$$

$$\gamma = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{c}{\alpha^2 + \lambda 6}$$

(Это уравнение называет модифицированным уравнением КдФ)

Определим производную в минус первой степени, как

$$\boxed{\partial^{-1} \cdot \partial = \partial \cdot \partial^{-1} = 1}$$

Определение. Оператор

$$P(x,\partial) = \sum_{m\geq 0} P_m(x)\partial^{k-m} = P_0\partial^k + P_1\partial^{k-1} + P_2\partial^{k-2} + ...$$

называется псевдодифференциальным оператором порядка k.

«протаскивание производной направо»:

$$\boxed{\partial^m f(x) = \sum_{k\geq 0} X_m^k \left(\partial^k f(x)\right)\partial^{m-k}}$$

Давайте подействуем на левую и правую части этого выражения еще раз производной

$$\partial^{m+1} f(x) = \sum_{k\geq 0} X_m^k \left(\partial^{k+1} f(x)\right)\partial^{m-k} + \sum_{k\geq 0} X_m^k \left(\partial^k f(x)\right)\partial^{m-k+1}$$

$$\sum_{k\geq 0} X_{m+1}^k \left(\partial^{k+1} f(x)\right)\partial^{m+1-k} = \sum_{k\geq 1} X_m^{k-1} \left(\partial^k f(x)\right)\partial^{m-k+1} + \sum_{k\geq 0} X_m^k \left(\partial^k f(x)\right)\partial^{m-k+1}$$

Откуда видно рекуррентное соотношение на коэффициенты

$$\begin{cases} X_{m+1}^k = X_m^{k-1} + X_m^k, \quad k > 1 \\ X_{m+1}^0 = X_m^0 \end{cases}$$

Решение этой системы

$$X_m^k = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}\cdot C$$

Чтобы зафиксировать константу C, рассмотрим соотношение при $m = 1$.

$$\partial f = f' + f\partial = \sum_{k\geq 0} X_1^k(\partial^k f)\partial^{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad X_1^0 = X_1^1 = 1$$

$$X_1^0 = \frac{1}{1!}\cdot C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

С момента, когда $k \geq m+1$, ряд обрывается (т. к. $X_m^k = 0$, при $k \geq m+1$) Следовательно

$$X_m^k = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} = C_m^k \quad \text{(биномиальный коэффициент)}$$

Пример. $m = -1$:

$$\partial^{-1} f(x) = \sum_{k\geq 1} \phi_k\partial^{-k} = \phi_1\partial^{-1} + \phi_2\partial^{-2} + \phi_3\partial^{-3} + ...$$

Подействуем на обе части слева производной

$$f(x) = \phi_1'\partial^{-1} + \phi_1 + \phi_2'\partial^{-2} + \phi_2\partial^{-1} + \phi_3'\partial^{-3} + \phi_3\partial^{-2} + ...$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \phi_1$$
$$\phi_1' + \phi_2 = 0$$
$$\phi_2' + \phi_3 = 0$$
$$\cdots$$

Откуда

$$\phi_1 = f$$
$$\phi_1' + \phi_2 = 0 \;\Rightarrow\; \phi_2 = -f'$$
$$\phi_2' + \phi_3 = 0 \;\Rightarrow\; \phi_3 = f''$$
$$\cdots$$
$$\boxed{\phi_k = (-1)^{k+1}\partial^{k-1}f}$$

Ответ: $\partial^{-1}f(x) = f\partial^{-1} - f'\partial^{-2} + f''\partial^{-3} - f'''\partial^{-4} + ...$

Вернёмся к уравнению КдФ

$$\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} + 4(\partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u'),}_{A}\ \underbrace{\partial^2 + u}_{L}\right] = \{\partial_t u - u\partial_t = \dot{u} + u\partial_t - u\partial_t = \dot{u}\} =$$

$$= \dot{u} + 4[\partial^3, u] + 6[u\partial, \partial^2 + u] + 3[u', \partial^2] =$$
$$= \dot{u} + 4(u''' + 3u''\partial + 3u'\partial^2 + u\partial^3 - u\partial^3) + 6(u\partial^3 + uu' + u^2\partial -$$
$$-u^2\partial - u''\partial - 2u'\partial^2 - u\partial^3) + 3(u'\partial^2 - u''' - 2u''\partial - u'\partial^2) =$$
$$= \dot{u} + 4(u''' + 3u''\partial + 3u'\partial^2) + 6(uu' - u''\partial - 2u'\partial^2) - 3(u''' + 2u''\partial) = ...$$

Как теперь понять, что у нас система с бесконечным число интегралов движения? Определим новую величину:

$$I_n = \mathrm{Tr}\ (L^n) \;\; (\text{хотя } L \text{ — бесконечная матрица})$$

Тогда

$$\dot{I}_n = \mathrm{Tr}\ (\dot{L^n}) = \mathrm{Tr}\ (\dot{L}L^{n-1} + L\dot{L}L^{n-2} + L^2\dot{L}L^{n-3} + \ ...\ + L^{n-1}\dot{L}) =$$

$$= \mathrm{Tr}\ ([L, M]L^{n-1} + L[L, M]L^{n-2} + L^2[L, M]L^{n-3} + \ ...\ + L^{n-1}[L, M]) =$$
$$= -\mathrm{Tr}\ ([M, L]L^{n-1} + L[M, L]L^{n-2} + L^2[M, L]L^{n-3} + \ ...\ + L^{n-1}[M, L]) =$$
$$= -\mathrm{Tr}\ ((ML-LM)L^{n-1} + L(ML-LM)L^{n-2} + L^2(ML-LM)L^{n-3} + ... + L^{n-1}(ML-LM)) =$$

$$= -\mathrm{Tr}\ ([M, L^n]) = (\text{т. к. след от любого коммутатора равен нулю}) = 0$$

$$\boxed{\dot{I}_n = 0}$$

Видно, что мы построили бесконечное число интегралов движения (Tr (L^n)).
Давайте введем оператор эволюции:

$$L(t) = T^{-1}L(0)T(t), \quad \text{где} \quad \dot{T}(t) = T(t)M(t)$$

Вспомогательная формула:

$$\dot{E} = 0\ (E \text{ — единичный оператор})$$

$$\dot{E} = \partial_t(TT^{-1}) = \dot{T}T^{-1} + T(\dot{T^{-1}})$$

$$\Rightarrow \quad (\dot{T^{-1}}) = -T^{-1}\dot{T}T^{-1}$$

Понятно, что

$$\dot{L}(t) = \dot{T^{-1}}L(0)T + T^{-1}L(0)\dot{T} = -T^{-1}\dot{T}T^{-1}L(0)T + T^{-1}L(0)TM =$$

$$-T^{-1}TML(t) + L(t)M = L(t)M - ML(t) = [L, M]$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\ (L(t)^n) = \mathrm{Tr}\ (T^{-1}L^n(0)T) = \mathrm{Tr}\ (L^n(0))$$

Видно, что Tr $(L(t)^n)$(не зависит от времени) — интеграл движения.

Задача. Рассмотрим Гамильтониан (цепочка Тоды):

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{(x_i - x_{i+1})},$$

где p_i — импульсы, x_i — координаты и $\{x_i, p_i\} = \delta_{ij}$.

Введем новые переменные

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2}}p_i$$

$$b_i = e^{\frac{1}{2}(x_i - x_{i+1})}$$

и перепишем наш гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i^2 = \mathrm{Tr}\ (L^2),$$

где L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 \end{pmatrix} (\text{например, для } n = 4)$$

С другой стороны, $\mathrm{Tr}\,(L) = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} p_i = 0$. Далее мы хотим определить вид матрицы оператора M, чтобы выполнялось соотношение

$$\dot{L} = [L, M]$$

Т. к. $\dot{L}$ — симметричная матрица, как и матрица L

$$\dot{L} = \dot{L}^T = ([L, M])^T = (LM - ML)^T = (LM)^T - (ML)^T = M^T L^T - L^T M^T = M^T L - L M^T$$

$$\Rightarrow \quad M^T = -M$$

Проверить, что M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & -b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 \end{pmatrix} \text{(например, для } n = 4)$$

Лекция 2

Иерархия Кортевега — де Фриза

Из интегрируемой системы можно выудить целый набор интегрируемых систем! Возьмем оператор $L = \partial^2 + u$ и извлечем из него квадратный корень:

$$\sqrt{\partial^2 + u} = \partial + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \partial^{-k}$$

$$\sqrt{\partial^2 + u} = (\partial + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \partial^{-k})(\partial + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \partial^{-k}) =$$

$$= \partial^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} f_k \partial^{1-k} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \partial^{-k} + \underbrace{\sum_{n,k=1}^{\infty} f_k \partial^{-k} f_n \partial^{-n}}_{\text{псевдодиф. оператор порядка -2}} =$$

$$= \partial^2 + 2f_1 + (2f_2 + f_1')\partial^{-1} + (2f_3 + f_2' + f_1^2)\partial^{-2} + ...$$

Сравнивая левую и правую части, получаем

$$\Rightarrow \quad f_1 = \frac{u}{2}$$

$$f_2 = -\frac{1}{4}u'$$

$$f_3 = \frac{1}{8}(u'' - u^2)$$

$$\sqrt{\partial^2 + u} = \partial + \frac{u}{2}\partial^{-1} - \frac{1}{4}u'\partial^{-2} + \frac{u'' - u^2}{8}\partial^{-3} + ...$$

Теперь посчитаем оператор L в степени 3/2:

$$(\partial^2 + u)^{3/2} = (\partial^2 + u)\sqrt{\partial^2 + u} = (\partial^2 + u)(\partial + \frac{u}{2}\partial^{-1} - \frac{1}{4}u'\partial^{-2} + \frac{u'' - u^2}{8}\partial^{-3} + ...) =$$

$$= (\text{выпишем только члены в положительной степени}) =$$

$$= \partial^3 + \frac{u}{2}\partial - \frac{u'}{4} + u' + u\partial + (\text{отрицательные степени}) =$$

$$= \partial^3 + \frac{3u}{2}\partial + \frac{3u'}{4} + ...$$

Видно, что с точностью до множителя мы получили оператор M:

$$M = 4(\partial + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u')$$

В теории псевдодифференциальных операторов есть понятия положительной и отрицательной части оператора.
Таким образом,

$$P(x, \partial) = P_+(x, \partial) + P_-(x, \partial)$$

и

$$\left[(\partial^2+u)^{3/2}\right]_+ = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u'$$

Получаем уравнение, совпадающее с КдФ:

$$\partial_t L = 4[L, L_+^{3/2}]$$

Если мы определим эволюцию по параметру t_n, то получим полную иерархию таких уравнений

$$\partial_{t_n} L = \alpha[L, L_+^{n/2}], \quad n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$n = 1: \quad t_1 = x$$

$$n = 3: \quad t_3 = t$$

$$n \geq 5: \quad t_n \text{ какие-то системы со своим временем}$$

Для плотностей интегралов движения

$$\dot{I}_n(x,t) + \partial_x(...) = 0,$$

$$\text{где } I_n(x,t) = \mathrm{Res}\ (L^{n/2})$$

Для псевдодифференциального оператора вычет — коэффициент при минус первой степени!

Лекция 3

Система уравнений Кортевега-де Фриза

В предыдущих лекциях мы обсудили, что в физике есть системы, в которых может распространяться уединенная волна, называемая кинком или солитоном (Рис. 3.):

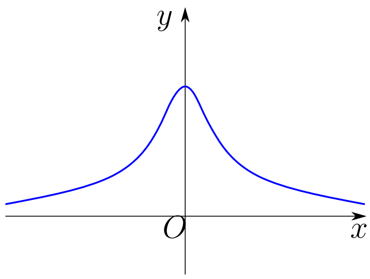

Рис. 3.

$$u(x,t) = \frac{\alpha}{\operatorname{ch}^2(\beta(x - ct - \delta))}$$

Если выбрать $\alpha = c/2$ и $b = \sqrt{c}/2$, наша функция удовлетворяет уравнению КдФ:

$$\dot{u} + 6uu' + u''' = 0$$

Стоит отметить, что в паре Лакса для оператора L существует важный спектральный параметр λ:

$$L = \partial^2 + u + \lambda, \text{ мы для простоты кладем } \lambda = 0$$

Система КдФ — Гамильтонова, а именно, для неё можно предъявить гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int dx u^2(x,t)$$

и скобку Пуассона

$$\dot{u} = \{u, \mathcal{H}\}$$

$$\{u(x,t), u(y,t)\} = \alpha\delta'(x-y)(u(x) + u(y)) + \beta\delta'''(x-y)$$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака (обобщённая функция):

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

$$\delta'(x-y) = \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y) \text{ (производная берётся по первому аргументу)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)dx = (-1)^n\partial^n f(0)$$

Найдем подходящие α и β, чтобы выполнялось уравнение КдФ:

$$\dot{u}(y) = \{u(y), \frac{1}{2}\int dxu^2(x)\} = \frac{1}{2}\int dx\{u(y), u^2(x)\} =$$

$$= \int dxu(x)\{u(y), u(x)\} = \int dxu(x)[\alpha\delta'(y-x)(u(x)+u(y)) + \beta\delta'''(y-x)] =$$

$$= \alpha\frac{\partial}{\partial y}\int dxu^2(x)\delta(y-x) + \alpha\int dxu(x)\{-\frac{\partial}{\partial x}\delta(y-x)\}u(y) + \beta\frac{\partial^3}{\partial y^3}\int dxu(x)\delta(y-x) =$$

$$= \alpha\frac{\partial}{\partial y}u^2(y) + \alpha\int dxu'(x)u(y)\delta(y-x) + \beta\frac{\partial^3}{\partial y^3}u(y) =$$

$$= \alpha(u^2(y))' + \alpha u'(y)u(y) + \beta u'''(y) = 3\alpha u'u + \beta u'''$$

Откуда

$$\dot{u} = 3\alpha u'u + \beta u'''$$

Следовательно,

$$\alpha = -2, \quad \beta = -1$$

Можно получить бесконечномерную алгебру (алгебру Вирасоро), если проквантовать эту скобку Пуассона.

$$[u(x), u(y)] = \delta'(x-y)(u(x)+u(y)) + \frac{c}{24}\delta'''(x-y)$$

Но существует и вторая гамильтонова система

$$\mathcal{H} = \int(u^3 - \frac{\alpha}{2}(u')^2)dx$$

$$\{u(x), u(y)\} = \beta\delta'(x-y)$$

$$\dot{u}(y) = \{u(y), \mathcal{H}\} = \{u(y), \int(u^3 - \frac{\alpha}{2}(u'(x))^2)dx\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dx\{u(y), u^3(x)\} - \frac{\alpha}{2}\int dx\{u(y), (u'(x))^2\} = \\
&= \int dx(u^2(x)\{u(y), u(x)\} + \{u(y), u^2(x)\}u(x)) - \frac{\alpha}{2}\int dx 2u'(x)\{u(y), u'(x)\} = \\
&= \int dx 3u^2(x)\{u(y), u(x)\} - \alpha\int dx u'(x)\{u(y), u'(x)\} = \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\int dx 3u^2(x)\beta\delta(y-x) - \alpha\int du(x)\frac{\partial}{\partial x}(\beta\delta'(y-x)) = \\
&= \beta\frac{\partial}{\partial y}(3u^2(y)) - \alpha\frac{\partial}{\partial y}\int dx\frac{\partial}{\partial x}(\beta\delta(y-x))u'(x) = \\
&= \beta 6u(y)u'(y) - \alpha\frac{\partial}{\partial y}\left(-\int dx\beta\delta(y-x)u''(x)\right) = \\
&= 6\beta u(y)u'(y) + \alpha\beta\frac{\partial}{\partial y}u''(y) = 6\beta u(y)u'(y) + \alpha\beta u'''(y)
\end{aligned}
$$

Итого

$$\dot{u} - 6\beta uu' - \alpha\beta u''' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \beta = -1, \quad \alpha = 1$$

, т. е.

$$\mathcal{H} = \int (u^3 - \frac{1}{2}(u')^2)dx$$

$$\{u(x), u(y)\} = -\delta'(x-y)$$

КдФ — бигамильтонова система!

Что для такого гамильтониана координата, а что импульс?

$$
\left.\begin{array}{l}
q_i, p_j \\
\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \\
q(x), p(x) \\
\{q(x), p(y)\} = \delta(x-y)
\end{array}\right| u(x) = p(x) + q'(x)
$$

Вернёмся к псевдодифференциальным операторам

$$\partial^{-1} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(\partial^{k-1} f)\partial^{-k}$$

$$\partial^m f(x) = \sum_{k\geq 0} X_m^k (\partial^k f)\partial^{m-k}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$X_m^k = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)}$$

$$L = \partial^2 + u(x), \quad L^{1/2} = \partial + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \partial^{-k}, \quad (L^{1/2})^2 = L$$

$$f_1 = \frac{u}{2}$$

$$f_2 = -\frac{u'}{4}$$

$$f_3 = \frac{1}{8}(u'' - u^2)$$

Задача. Найти f_4 и f_5.

$$(L^{1/2})^3 = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u' + \frac{1}{8}(3u^2 - u'')\partial^{-1} + ...$$

$$X_p = \sum_{k\geq 0}^{\infty} x_k \partial^{p-k} \text{ — псевдодиф. оператор порядка } p$$

Соответственно, форма записи уравнения КдФ:

$$\partial_t L = [(L^{3/2})_+, L]$$

Возникает мысль взять уравнения вида

$$\partial_{t_n} L = [(L^{n/2})_+, L], \quad n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Получается эволюция с разным временем

$$L = \partial^2 + u(x, t_3, t_5, t_7, ...)$$

Лекция 4

Теория псевдодифференциальных операторов

Найдем интегралы движения КдФ. Уравнение КдФ можно записать в виде

$$\dot{L} = [(L^{3/2})_+, L]$$

или вся иерархия

$$\partial_{t_n} L = [(L^{n/2})_+, L]$$

Первое утверждение, которое можно сделать

$$[(L^{n/2})_+, L] \text{ — не содержит отрицательных степеней } \partial$$

Второе утверждение

$$[(L^{n/2})_+, L] \text{ — не содержит производных}$$

Докажем это:

$$L^{n/2} = (L^{n/2})_+ + (L^{n/2})_-$$

$$[L^{n/2}, L] = 0$$

$$\underbrace{[(L^{n/2})_+, L]}_{\text{имеет произв. неотриц. степ.}} = -[(L^{n/2})_-, L]$$

$$(L^{n/2})_- \text{ — имеет порядок } \leq (-1)$$

$$L \text{ — имеет порядок } 2$$

$$\Rightarrow \text{ согласно лемме } \Rightarrow [(L^{n/2})_-, L] \text{ — имеет порядок } \leq (-1) + 2 - 1 = 0$$

Лемма. Пусть есть два псевдодифференциальных оператора

$$P(x) \text{ — порядка } p,$$

$$Q(x) \text{ — порядка } q,$$

тогда

$$[P(x), Q(x)] \text{ — порядка } \leq p + q - 1.$$

$$[u_0\partial^p + u_1\partial^{p-1} + ..., q_0\partial^q + q_1\partial^{q-1} + ...] = [u_0\partial^p, v_0\partial^q] + ... =$$
$$= f(...)\partial^{q+p-1} + \ ...$$

Следовательно,

$$[(L^{n/2})_+, L] \text{ — имеет порядок } 0$$

Определение. Res (X): вычетом псевдодифференциального оператора X называется коэффициент при ∂^{-1}.

Пусть

$$P(x) \text{ — порядка } l$$

$$Q(x) \text{ — порядка } n$$

$$[P(x), Q(x)] \text{ — порядка } \leq l+n-1$$

Утверждение 1. Res $[P, Q] = \partial_x(...)$.
Док-во:

$$\text{Res } [P, Q] = \text{Res } \sum_{k,k'=0}^{\infty} (p_k \partial^{l-k} q_{k'} \partial^{n-k'} - q_{k'} \partial^{n-k'} p_k \partial^{l-k}) = ...$$

$$/ * \, \partial^k f = \sum_{m=0}^{\infty} X_k^m (\partial^m f) \partial^{k-m} = \sum_{m=0}^{\infty} C_k^m (\partial^m f) \partial^{k-m} * /$$

$$... = \text{Res } \sum_{k,k'} \sum_{m=0}^{\infty} (p_k (\partial^m q_{k'}) C_{l-k}^m \partial^{n-k'+l-k-m} - C_{n-k'}^m q_{k'} (\partial^m p_k) \partial^{l-k+n-k'-m}) =$$

$$= \text{Res } \sum_{k,k'} \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{(C_{l-k}^m p_k (\partial^m q_{k'} - C_{n-k'}^m q_{k'} (\partial^m p_k))}_{(*)} \partial^{l-k+n-k'-m} =$$

$$= \sum_{k,k'} \sum_{m} (*) \delta_{l-k+n-k'-m, \; -1} = ...$$

С другой стороны,

$$X_{n-k'}^m = C_{n-k'}^m \Big|_{n-k'=m+k-l-1} = (-1)^m C_{l-k}^m$$

(это можно просто показать, если расписать биномиальные коэффициенты)

$$... = \sum_{k,k'} \sum_{m} \delta_{...} C_{l-k}^m (p_k \partial^m q_{k'} - (-1)^m q_{k'} (\partial^m p_k))$$

Например, для $m = 2$ в скобках получим

$$p \partial^2 q - q \partial^2 p = \partial (p \partial q - q \partial p)$$

! покажите справедливость *утверждения 1.* для любого m

Утверждение 2. Рассмотрим функции

$$I_n = \text{Res }(L^{n/2}) \text{ для } n = 2k+1$$

Тогда

$$\partial_t I_n + \partial_x(...) = 0,$$

т. е. I_n — плотность сохраняющегося заряда $Q_n = \int I_n dx$.

$$\partial_t \text{Res }(L^{n/2}) = \text{Res } \partial_t(L^{n/2}) = \text{Res }([(L^{n/2})_+, L]) = \partial_x(...)$$

(по утверждению 1.)

Давайте выпишем несколько первых законов сохранения

$$L^{1/2} = \partial + \sum u_k \partial^{-k} = \partial + \frac{u}{2}\partial^{-1} - \frac{u'}{4}\partial^{-2}$$

$$\text{Res }(L^{1/2}) = \frac{u}{2} \;\Rightarrow\; I_1 = \int u(x)dx$$

$$L^{3/2} = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u' + \frac{1}{8}(3u^2 - u'')\partial^{-1} + ...$$

$$\text{Res }(L^{3/2}) = \frac{1}{8}(3u^2 - u'') \;\Rightarrow\; I_2 = \int u^2(x)dx$$

$$\text{Res }(L^{5/2}) \;\sim\; \left(u^3 - \frac{(u')^2}{2}\right) + (...)$$

Иерархия Кадомцева-Петвиашвили (включает в себя «иерархию КдФ»). Возьмем в качестве оператора, из которого будем строить интегрируемые системы

$$L^{1/2} = \partial + \sum u_k \partial^{-k},$$

т. е. теперь возьмем «новый» L равный

$$L = \partial + \sum u_k \partial^{-k}$$

Потребуем, чтобы

$$L^2 = \partial^2 + u$$

Тогда все $u_k(x,t)$ выразятся через $u(x,t)$.
Давайте докажем коммутируемость потоков в этой иерархии. Для этого докажем следующую формулу:

$$\partial_{t_n}\partial_{t_m} L = \partial_{t_m}\partial_{t_n} L$$

Обозначим $(L^n)_+$ как M_n, тогда формулу можно переписать в виде

$$\partial_{t_n}[M_m, L] = \partial_{t_m}[M_n, L]$$

$$[\partial_{t_n} M_m, L] + [M_m, \partial_{t_n} L] = [\partial_{t_m} M_n, L] + [M_n, \partial_{t_m} L]$$
$$[\partial_{t_n} M_m, L] + [M_m, [M_n, L]] = [\partial_{t_m} M_n, L] + [M_n, [M_m, L]]$$
$$[\partial_{t_n} M_m - \partial_{t_m} M_n + [M_m, M_n], L] = 0$$
$$[\partial_{t_n} - M_n, \partial_{t_m} - M_m] = 0$$

Давайте докажем последнее равенство

$$\partial_{t_m} L^n = [M_m, L^n] = [(L^m)_+, L^n] = -[(L^m)_-, L^n]$$

$$\partial_{t_n} L^m - \partial_{t_m} L^n = [M_n, L^m] - [M_m, L^n] = [M_n, M_m] + [M_n, (L^m)_-] - [(L^m)_+, L^n] =$$
$$= [M_n, L^m] - [M_m, L^n] = [M_n, M_m] + [M_n, (L^m)_-] + [(L^m)_-, L^n]$$
$$\partial_{t_n} L^m - \partial_{t_m} L^n = [M_n, M_m] + [(L^m)_-, (L^n)_-]$$

Возьмем положительную проекцию обеих частей полученного тождества

$$\partial_{t_n} M_m - \partial_{t_m} M_n = [M_n, M_m] + 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial_{t_n} M_m - \partial_{t_m} M_n + [M_m, M_n] = 0$$

Рассматривая только уравнение КдФ, выживает только одно время t (остальные $t_3,\ t_5,\ t_7, \ldots$ «замораживаются»).

Пример. Положим $u_1(x,t,\ldots) = u(x,t,\ldots) = u(x,y,t), \quad t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad t_3 = t.$

$$\partial_{t_2} L = \partial_y L = [(L^2)_+, L]$$

$$\partial_{t_3} L = \partial_t L = [(L^3)_+, L]$$

$$(L^2)_+ = \partial^2 + 2u, \quad (L^3)_+ = \partial^3 + 3u_1\partial + (2u_2 + 3u_1')$$
$$\partial_y u_1 = u_1'' + 2u_2'$$
$$\partial_y u_2 = u_2'' + 2u_3' + 2u_1 u_1'$$
$$\boxed{3u_{yy} + \partial_x(-4u_t + u_{xxx} + 12uu_x) = 0}$$

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили

Преобразования Бэклунда связывают решения одного дифференциального уравнения (в общем случае нелинейного) с решениями другого дифференциального уравнения (в общем случае нелинейного).

Преобразование Бэклунда для ур-я КдФ называют *преобразование Миура*:
Если v — решение модифицированного уравнения КдФ

$$(Q(v) = v_t - 6(v^2 + \lambda)v' + v''' = 0),$$

то $u = -(v' + v^2 + \lambda)$ — решение уравнения Кдф (λ — произвольная константа).

Перепишем преобразование Миура:

$$u_t = -(\partial_x + 2v)v_t$$

$$u_x = -(\partial_x + 2v)v_x$$

Пусть

$$P(u) = u_t + 6uu_x + u_{xxx} = -(\partial_x + 2v)v_t + 6(v_x + v^2 + \lambda)(\partial_x + 2v)v_x - \partial_x^2(\partial_x + 2v)v_x =$$

$$= -(\partial_x + 2v)v_t + (6(v_x + v^2 + \lambda) - \partial_x^2)(\partial_x + 2v)v_x =$$

$$= -(\partial_x + 2v)(\underbrace{v_t - 6(v^2 + \lambda)v' + v'''}_{\text{модиф. ур-е КдФ}}) = 0$$

Заметим, что модифицированное уравнение КдФ инвариантно относительно преобразования

$$v \ \rightarrow \ -v$$

Следовательно, ещё одно решение КдФ

$$\tilde{u} = -(-v_x + v^2 + \lambda)$$

Возьмем $\tilde{u} = 0$ и получим дифференциальное уравнение на v:

$$-v_x + v^2 + \lambda = 0$$

$$v = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}(x + f(t)))$$

Полученное решение для v подставим в преобразование Бэклунда:

$$u = -(v_x + v^2 + \lambda) = \frac{-2\lambda}{\cos^2(\sqrt{\lambda}(x + f(t)))}, \quad \lambda < 0, \quad f(t) = -ct + \delta$$

Мы получили обычное односолитонное решение уравнения КдФ.

Лекция 5

Преобразование Бэклунда

Запишем уединенную волну

$$u(x,t) = \frac{c/2}{\mathrm{ch}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x+ct+\delta)\right)},$$

удовлетворяющую уравнению КдФ:

$$\dot{u} + 6uu' + u''' = 0$$

Вспомним пару Лакса:

$$L = \partial_x^2 + u$$

$$A = \partial_t + \underbrace{4(\partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u')}_{M}$$

Уравнение КдФ можно записать в виде условия нулевой кривизны

$$0 = [A, L] = \partial_t L + [M, L] = 0$$

Когда мы извлекали квадратный корень из L, получили псевдодифференциальный оператор

$$L^{1/2} = \partial_x + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \partial^{-k}$$

Для нахождения u_k мы рассматривали равенство $(L^{1/2})^2 = L$.
Используя формулу:

$$\partial^n f(x) = f(x)\partial^n + nf'(x)\partial^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}f''(x)\partial^{n-2} + \dots$$

В итоге, получили

$$M = (L^{3/2})_+$$

Ценность записи уравнения КдФ в виде условия нулевой кривизны заключается в возможности доказать, что наша система интегрируема (построить бесконечное число интегралов движения).

С точки зрения физики для уравнения КдФ мы ищем решения для которых при $|x| \to \infty$ $u(x,t) \to 0$.

Далее мы выписали интегралы движения

$$I_1 \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dx u^2(x), \quad I_2 \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dx (u^3(x) - \frac{1}{2}(u'(x))), \quad ...$$

Все эти интегралы находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, т. е.

$$\{I_i, I_j\} = 0$$

А также иерархия КдФ:

$$\partial_{t_n} = [(L^{n/2})_+, L], \quad L = \partial^2 + u$$

и иерархия КП:

$$\partial_{t_n} = [(L^n)_+, L], \quad L = L^{1/2}_{\text{старый}} = \partial + \sum_{k=1}^{\infty} u_k \partial^{-k}$$

Вспомним преобразования Бэклунда, связывающие решения двух уравнений $P(u) = 0$ и $Q(v) = 0$.
Возьмем

$$P(u) = \dot{u} + 6uu' + u''' \quad (\text{КдФ})$$

$$Q(v) = v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} \quad (\text{МКдФ})$$

связывающее преобразование

$$\boxed{u = -(v_x + v^2 + \lambda)}$$

Сделаем проверку, из преобразования получаем:

$$u_t = -(\partial_x + 2v)v_t$$

$$u_x = -(\partial_x + 2v)v_x$$

$$P(u) = -(\partial_x + 2v)v_t + 6(v_x + v^2 + \lambda)(\partial_x + 2v)v_x - \partial_x^2(\partial_x + 2v)v_x =$$
$$= -(\partial_x + 2v)(v_t - (6(v_x + v^2 + \lambda) - \partial_x^2)v_x) + [6(v_x + v^2 + \lambda) - \partial_x^2, \partial_x + 2v]v_x =$$
$$= -(\partial_x + 2v)(v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx}) + 6(\partial_x + 2v)v_x^2 - 12v_{xx}v_x - 12vv_x^2$$

Откуда

$$P(u) = -(\partial_x + 2v)Q(v)$$

Таким образом, если $Q(v) = 0$, то $P(u) = 0$.

Лекция 6

Преобразование Бэклунда для двумерной модели Лиувилля

Интегрируемость более менее хорошо изучена для двумерных систем!
Пусть система описывается двумерным полем $u(x,t)$:

$$\boxed{u_{xt} = \exp(mu)}$$

уравнение Лиувилля

Введем

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad t = \frac{x_0 - x_1}{2}$$

настоящее время и координата x_0 и x_1

$$u_{xt} = (\partial_0^2 - \partial_1^2)u$$

Мы хотим связать с уравнением

$$\tilde{u}_{xt} = 0$$

Связь решений:

$$\left.\begin{aligned} (\tilde{u} - u)_x &= \frac{2k}{m}\exp(\frac{m}{2}(u + \tilde{u})) \quad \text{(i)} \\ (\tilde{u} + u)_t &= -\frac{1}{k}\exp(\frac{m}{2}(u - \tilde{u})) \quad \text{(ii)} \end{aligned}\right| \text{преобразование Бэклунда}$$

Общее решение свободного уравнения

$$\tilde{u}(x,t) = g(t) + f(x)$$

$$(\tilde{u} - u)_{xt} = \frac{2k}{m}\frac{m}{2}(u + \tilde{u})_t \exp(\frac{m}{2}(u + \tilde{u})) = k(u + \tilde{u})_t \exp(\frac{m}{2}(u + \tilde{u})) =$$

$$= \{\text{исп. (ii) уравнение}\} = k(-\frac{1}{k})\exp(\frac{m}{2}(u - \tilde{u}))\exp(\frac{m}{2}(u + \tilde{u}) = -e^{mu} \qquad (1)$$

$$(\tilde{u} + u)_{tx} = -\frac{1}{k}\frac{m}{2}(u - \tilde{u})_x \exp(\frac{m}{2}(u - \tilde{u})) = \{\text{исп. (i) уравнение}\} =$$

$$= -\frac{1}{k}\frac{m}{2}(-\frac{2k}{m})\exp(\frac{m}{2}(u + \tilde{u}))\exp(\frac{m}{2}(u - \tilde{u})) = e^{mu} \qquad (2)$$

Сложим и вычтем (1) и (2) уравнения:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xt} = 0 \\ u_{tx} = e^{mu} \end{cases}$$

Подставим общее решение свободного уравнения в преобразование Бэклунда:

$$\begin{cases} (f-u)_x = \dfrac{2k}{m} e^{\frac{m}{2}(u+f+g)} \\ (g+u)_t = -\dfrac{1}{k} e^{\frac{m}{2}(u-f-g)} \end{cases}$$

Введем для удобства:

$$w(x,t) = u(x,t) - f(x) + g(t)$$

Тогда

$$\begin{cases} -w_x = \dfrac{2k}{m} e^{\frac{m}{2}(w+2f)} \\ w_t = -\dfrac{1}{k} e^{\frac{m}{2}(w-2g)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{m}{2} w_x e^{-\frac{m}{2}w} = k e^{mf} \\ -\dfrac{m}{2} w_t e^{-\frac{m}{2}w} = \dfrac{m}{2k} e^{-mg} \end{cases}$$

Введем две функции $F(x)$ и $G(t)$:

$$F_x(x) = k e^{mf(x)} \text{ и } G_t(t) = \frac{m}{2k} e^{-mg(t)}$$

$$f = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{F_x}{k}\right) \text{ и } g = -\frac{1}{m} \ln\left(\frac{2kG_t}{m}\right)$$

Тогда система перепишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{m}{2}w}\right) = F_x(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(e^{-\frac{m}{2}w}) = G_t(t) \end{cases}$$

Откуда получаем решение:

$$e^{-\frac{m}{2}w} = F(x) + G(t)$$

$$-\frac{m}{2} w = \ln(F+G)$$

$$\Rightarrow \quad w(x,t) = \frac{1}{m} \ln \frac{1}{(F+G)^2}$$

Вернемся к $u(x,t)$:

$$u = \frac{1}{m} \ln \frac{1}{(F+G)^2} + f - g$$

подставляем f и g:

$$u(x,t) = \frac{1}{m}\ln\frac{\frac{2}{m}F_x G_t}{(F+G)^2}$$

N-солитонные решения

$$\dot{u} + 6uu' + u''' = 0$$

$$u(x,t) = 2[\ln(F)]_{xx}$$

$$F = \det(F_{nm})$$

$$F_{nm} = \delta_{nm} + \frac{2(\alpha_n\alpha_m)^{1/2}}{\alpha_n+\alpha_m}f_n$$

$$f_n = \exp(\alpha_n(x-x_n)+\alpha_n^3 t)$$

Проверим справедливость формулы для односолитонного решения:

$$N = 1$$

$$F = 1 + \frac{2\alpha}{\alpha+\alpha}f = 1 + f = 1 + \exp(\alpha(x-\delta)+\alpha^3 t)$$

$$u(x,t) = 2(\ln F)_{xx} = 2\left(\frac{f_x}{1+f}\right)_x = 2\left(\frac{f_{xx}}{1+f} - \frac{f_x^2}{(1+f)^2}\right) = \ldots$$

Пусть $\alpha(x-\delta)+\alpha^3 t = \Phi$.

$$\ldots = 2\left(\frac{\alpha^2 f}{1+f} - \frac{\alpha^2 f^2}{(1+f)^2}\right) = 2\alpha^2\left(\frac{f(1+f)-f^2}{(1+f)^2}\right) =$$

$$= 2\alpha^2\left(\frac{f}{(1+f)^2}\right) = \frac{2\alpha^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{f}}+\sqrt{f}\right)^2} = \alpha^2\frac{1/2}{\mathrm{ch}^2(\frac{\alpha}{2}(x-\delta)+\frac{\alpha^3}{2}t)}$$

Посмотрим на $N = 2$:

$$||F_{nm}|| = \begin{pmatrix} 1+f_1 & \frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2}f_1 \\ \frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2}f_2 & 1+f_2 \end{pmatrix}$$

$$F = \det(||F_{nm}||) = (1+f_1)(1+f_2) - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}f_1f_2 =$$

$$= 1 + f_1 + f_2 + f_1f_2\left(1 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right) =$$

$$= 1 + f_1 + f_2 + \underbrace{\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}}_{A} f_1 f_2$$

$$u = 2(\ln F)_{xx} = 2\left(\frac{F}{F_x}\right)_x = 2\left(\frac{F_{xx}}{F} - \frac{(F_x)^2}{F^2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{f_1'' + f_2'' + A(f_1'f_2 + f_1f_2')'}{F} - \frac{(f_1' + f_2' + A(f_1'f_2 + f_1f_2'))^2}{F^2}\right)$$

Посмотрим асимптотику данного решения при $f_1 \sim 1, \quad f_2 << 1$:

$$u_{as} = 2\left(\frac{f_1''}{1 + f_1} - \frac{(f_1)^2}{(1 + f_1)^2}\right)$$

видно, что ведет себя как односолитонное решение!

Лекция 7

Многосолитонные решения

Преобразование Бэклунда для КдФ (преобразование Миуры):

$$P(u) = \dot{u} + 6uu' + u''' = 0$$

$$Q(v) = v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0$$
$$u = -(v_x + v^2 + \lambda)$$
$$P(u) = -(\partial_x + 2v)Q(v)$$

Запишем модифицированное преобразование Миуры:

$$u = -(\epsilon w_x + 2\epsilon^2 w^2 + w) \quad (*)$$

$$v(x,t) \to w(x,t)$$

Подставим $v = \epsilon w + \kappa$ в исходное преобразование Миуры:

$$\lambda = \kappa^2, \ \ 2\epsilon\kappa = 1$$

Получаем

$$P(u) = -(\partial_x + 2(\epsilon w + \kappa) = -(\epsilon\partial_x + 2\epsilon^2 w + 1)\tilde{Q}(w)$$
$$\tilde{Q} = \frac{1}{\epsilon}Q(\epsilon w + \kappa) = (w_t - 6(\epsilon^2 w^2 + w)w_x + w_{xxx})$$

$$\boxed{\text{Уравнение Гарднера: } w_t - 6(\epsilon^2 w^2 + w)w_x + w_{xxx} = 0} \qquad (1)$$

Видно, что (1) можно переписать в виде сохраняющегося тока:

$$w_t = (2\epsilon^2 w^3 + 3w^2 - w_{xx})_x$$

Попробуем найти решение w в виде разложения по ϵ:

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x,t)\epsilon^k$$

подставим в (*):

$$\epsilon^0: \quad w_0 = -u$$
$$\epsilon^1: \quad 0 = -(w_0)_x - w_1 \Rightarrow w_1 = u_x$$
$$\epsilon^2: \quad w_2 = -u_{xx} - u^2$$
$$\epsilon^3: \quad w_3 = -u_{xxx} - 4u_x u$$

$$\epsilon^4: \quad w_4 = -u_{xxxx} - 2(u_x u)_x - (u_x)^2 + 2u^3$$

Посмотрим на сохраняющиеся токи, зная ϵ^i. В нулевом порядке по ϵ будет:

$$(w_0)_t = (3w_0^2 - (w_0)_{xx})_x, \quad w_0 = -u,$$

т. е. мы буквально получаем отсюда первый интеграл движения

$$I_1 = \int u(x,t)dx.$$

Теперь посмотрим, что будет в первом порядке по ϵ:

$$(w_1)_t = (6w_0 w_1 - (w_1)_{xx})_x, \quad w_1 = u_x$$

И т. д., видно что все интегралы движения будут вида

$$I_{2k} = \int w_{2k}(x,t)dx$$

(нечетные интегралы пропадают, т.к. они будут полными производными)

В частности,

$$I_4 = \int (2u^3 - (u_x)^2)dx$$

Вспомним уравнения движения для цепочки Тоды:

$$\dot{x}_i(t) = p_i(t)$$

$$\dot{p}_i(t) = 2\left(e^{2(x_{i-1}-x_i)} - e^{2(x_i - x_{i+1})}\right)$$

Гамильтониан цепочки Тоды из N узлов:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} e^{2(x_i - x_{i+1})}$$

Далее можно получить уравнение замкнутое относительно x_i:

$$\ddot{x}_i(t) = 2\left(e^{2(x_{i-1}-x_i)} - e^{2(x_i - x_{i+1})}\right)$$

Делаем замену:

$$t \;\to\; \frac{t}{4}, \quad 2x_i \;\to\; x_i$$

В итоге,

$$\ddot{x}_i(t) = e^{(x_{i-1}-x_i)} - e^{(x_i - x_{i+1})} \qquad (**)$$

○ граничные условия для цепочки: открытые.

Введем дополнительные координаты q_i и напишем линейные уравнения:

$$\dot{x}_i = e^{x_i - q_i} + e^{q_{i-1}-x_i} - \lambda,$$

$$\dot{q}_i = e^{x_i - q_i} + e^{q_i - x_{i+1}} - \lambda,$$

т. е. есть два набора координат: $\{q_i\}$ и $\{x_i\}$.

Утверждение. Новые координаты $\{q_i\}$ также удовлетворяют уравнению $(**)$.

Вспомним модель синус-Гордона:

$$u_{xt} = \sin u$$

Для этого уравнения также можно написать преобразования Бэклунда:

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \dfrac{u+v}{2}, \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases},$$

v — решение уравнения $v_{xt} = \sin v$.

Далее напомним общую детерминантную формулу решения уравнения КдФ:

$$\dot{u} + 6uu' + u''' = 0$$

$$u = 2(\ln F)_{xx}$$

$$F = \det(F_{ij})$$

$$F_{nm} = \delta_{nm} + 2\frac{\sqrt{\alpha_n \alpha_m}}{\alpha_n + \alpha_m} f_n, \quad n, m = 1, ..., N (N \text{ — число солитонов})$$

$$f_n = \exp(\alpha_n(x + \alpha_n^2 t) - \alpha_n x_n) = e^{\theta_n}$$

В случае, если $N = 2$:

$$||F_{nm}|| = \det \begin{pmatrix} 1 + f_1 & 2\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} f_1 \\ 2\frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} f_2 & 1 + f_2 \end{pmatrix} = 1 + f_1 + f_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\alpha_1 + \alpha} f_1 f_2$$

Результат для двухсолитонного решения:

$$u = 2(\ln F)_{xx} = 2\frac{F_{xx}}{F} - 2\left(\frac{F_x}{F}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{\alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2} + A(\alpha_1 + \alpha_2)e^{\theta_1+\theta_2}}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A^{\theta_1+\theta_2}}\right)_x$$

Будем смотреть случай: $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$. Посмотрим на поведение первого солитона, если $\theta_1 \sim 0$:

$$\theta_1 = \alpha_1(x + \alpha_1^t) - \delta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\delta_1}{\alpha_1} - \alpha_1^2 t$$

Тогда θ_2 запишется, как

$$\theta_2 = \alpha_2(x + \alpha_2^2 t) - \delta_2 = \alpha_2\left(\frac{\delta_1}{\alpha_1} - \alpha_1^2 t + \alpha_2^2 t\right) - \delta_2 = \alpha_2(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\delta_1 - \delta_2$$

Т. к. $\alpha_2^2 - \alpha_1^2 > 0$, $\theta_2 \to \pm\infty$ при $t \to \pm\infty$. Теперь посмотрим отдельно, как решение для $N = 2$ ведёт себя в далеком прошлом ($t \to -\infty$):

$$\left.\begin{matrix} e^{\theta_1} \sim 1 \\ e^{\theta_2} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad u = 2\left(\frac{\alpha_1 e^{\theta_1}}{1+e^{\theta_1}}\right)_x = 2\left(\frac{\alpha_1^2 e^{\theta_1}}{1+e^{\theta_1}} - \frac{\alpha_1^2 e^{2\theta_1}}{(1+e^{\theta_1})^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_1/2)}$$

(видно, что амплитуда совпадает со скоростью),

т. е. у нас возник только один солитон.

В далеком будущем ($t \to +\infty$):

$$u = 2\left(\frac{\alpha_2 + A(\alpha_1+\alpha_2)e^{\theta_1}}{1+Ae^{\theta_1}}\right)_x = 2\left(\frac{-e^{-\theta_1}\alpha_1\alpha_2}{e^{-\theta_1}+A} - \frac{(e^{-\theta_1}\alpha_2 + A(\alpha_1+\alpha_2))(-\alpha_1 e^{-\theta_1})}{(e^{-\theta_1}+A)^2}\right) =$$

$$= 2\frac{-A\alpha_1\alpha_2 e^{-\theta_1} + A(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1 e^{-\theta_1}}{(e^{-\theta_1}+A)^2} = \frac{2A\alpha_1 e^{-\theta_1}}{(e^{-\theta_1+A})^2} = 2\frac{A\alpha_1^2}{(e^{-\theta_1/2}+Ae^{\theta_1/2})^2} =$$

$$= 2\frac{\alpha_1^2}{(A^{-1/2}e^{-\theta_1/2}+A^{1/2}e^{\theta_1/2})^2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{\operatorname{ch}^2(\frac{\theta_1+\Delta}{2})},$$

где $A = e^{\Delta}$.

Мы видим, что на бесконечности выживает один солитон. Это либо первый солитон (если мы положим $\theta_1 \sim 0$), либо второй (если мы положим $\theta_2 \sim 0$). То есть это действительно двухсолитонное решение (Рис. 4.).

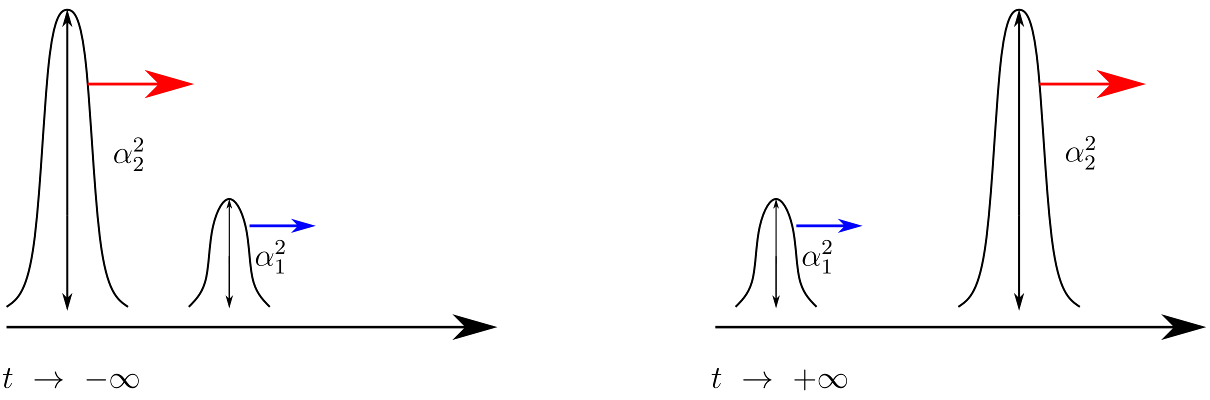

Рис. 4.

Видно, что при $t \to +\infty$ и $\theta_1 \sim 0$ первый солитон приобрел фазовый сдвиг:

$$\delta_1 \ \to \ \delta_1 - \frac{\Delta}{\alpha_1}$$

Если бы мы изначально фиксировали $\theta_2 \sim 0$, то сдвиг был бы у второго солитона:

$$\delta_2 \ \to \ \delta_2 + \frac{\Delta}{\alpha_2}$$

Введем обозначения:

$$\delta x_1 \equiv -\frac{\Delta}{\alpha_1}$$

$$\delta x_2 \equiv \frac{\Delta}{\alpha_2}$$

Тогда имеет место соотношение:

$$\boxed{\alpha_1 \delta x_1 + \alpha_2 \delta x_2 = 0}$$

А это на самом деле есть не что иное, как закон сохранения импульса! Он говорит нам о том, что центр масс двух солитонов движется равномерно и прямолинейно. Но что здесь импульс? Для ответа на этот вопрос вспомним первые интегралы движения, которые мы получали ранее:

$$H \sim \int u^2(x,t)dx$$

$$p \sim \int u(x,t)dx$$

Посчитаем интеграл для импульса на односолитонном решении:

$$\int u(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2}{\operatorname{ch}^2(\frac{\alpha x}{2} + \mathrm{const}\ )}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2}{\operatorname{ch}^2(\frac{\alpha x}{2})}dx = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x\alpha)}{(e^{\alpha x/2} + e^{-\alpha x/2})^2} =$$

$$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(e^{y/2} + e^{-y/2})^2} = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^y dy}{(e^y + 1)^2} = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(z+1)^2} = -\alpha \frac{1}{z+1}\bigg|_1^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \quad p \sim \alpha$$

Лекция 8

Уравнение Хироты и его решение

Пользуясь методом Хироты, воспроизведем двухсолитонное решение. В предыдущей лекции мы искали u в виде

$$u = 2(\ln F)_{xx} = 2\left(\frac{F_x}{F}\right)_x$$

Подставим это выражение в уравнение КдФ, которое сначала преобразуем:

$$\dot{u} + 6uu' + u''' = u_t + \partial_x(3u^2 + u_{xx}) = 0$$

Рассчитаем частные производные:

$$u_t = 2\partial_x\left(\frac{F_{xt}}{F} - \frac{F_xF_t}{F^2}\right)$$

$$u_x = 2\partial_x\left(\frac{F_{xx}}{F} - \frac{F_x^2}{F^2}\right) = 2\left(\frac{F_{xxx}}{F} - 2\frac{F_xF_{xx}}{F^2} + 2\frac{F_x^3}{F^3}\right)$$

$$u_{xx} = 2\left(\frac{F'''}{F} - \frac{4F'F''' + 3(F'')^2}{F^2} + 12\frac{(F')^2F''}{F^3} - 6\frac{(F')^4}{F^4}\right)$$

Тогда

$$2\partial_x\left(\frac{F_{xt}}{F} - \frac{F_xF_t}{F^2} + 6\left(\frac{F_{xx}}{F} - \frac{F_x^2}{F^2}\right)^2 + \frac{F_{xxxx}}{F} - \frac{4F_xF_{xxx} + 3(F_{xx})^2}{F^2} + 12\frac{(F_x)^2F_{xx}}{F^3} - 6\frac{(F_x)^4}{F^4}\right) =$$

$$= 2\partial_x\left(\frac{F_{xt}}{F} - \frac{F_xF_t}{F^2} + 3\frac{F_{xx}^2}{F^2} + \frac{F_{xxxx}}{F} - 4\frac{F_xF_{xxx}}{F^2}\right) = 0$$

Получается частная производная какого-то выражения. Интегрирование даёт

$$F_{xt}F - F_xF_t + 3F_{xx}^2 + FF_{xxxx} - 4F_xF_{xxx} = CF^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

С помощью разных перенормировок и сдвижек можно обнулить константу C и получить *билинейное уравнение Хироты*:

$$\boxed{F_{xt}F - F_xF_t + 3F_{xx}^2 + FF_{xxxx} - 4F_xF_{xxx} = 0}$$

Это уравнение обладает многими замечательными свойствами. В частности, оно инвариантно относительно преобразования

$$F \;\to\; e^{\mu x}F$$

Берем $F(x,t)$ и делаем формальное разложение по некоторому параметру ϵ:

$$F(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i f^{(i)}(x,t)$$

$$\text{в нулевом порядке } \epsilon^0: \quad \text{тривиально}$$

$$\epsilon^1: \quad f^{(1)}_{xt} + f^{(1)}_{xxxx} = 0$$

$$\epsilon^2: \quad f^{(2)}_{xt} + f^{(2)}_{xxxx} - f^{(1)}_x f^{(1)}_t + f^{(1)}_{xt} f^{(1)} + f^{(1)}_{xxxx} f^{(1)} + 3 f^{(1)}_{xx} f^{(1)}_{xx} - 4 f^{(1)}_x f^{(1)}_{xxx} = 0$$

$$\epsilon^3: \quad f^{(3)}_{xt} + f^{(3)}_{xxxx} + (f^{(2)}_{xt} + f^{(2)}_{xxxx}) f^{(1)} + (f^{(1)}_{xt} + f^{(1)}_{xxxx}) f^{(2)} - f^{(2)}_x f^{(1)}_t - f^{(1)}_x f^{(2)}_t +$$
$$+3(f^{(1)}_{xx} f^{(2)}_{xx} + f^{(2)}_{xx} f^{(1)}_{xx}) - 4(f^{(1)}_x f^{(2)}_{xxx} + f^{(2)}_x f^{(1)}_{xxx}) = 0$$

$$\epsilon^n: \quad f^{(n)}_{xt} + f^{(n)}_{xxxx} + \sum_{k=1}^{n-1} [f^{(n-k)}(f^{(k)}_{xt} + f^{(k)}_{xxxx}) - f^{(n-k)}_x (f^{(k)}_t + 4 f^{(k)}_{xxx}) + 3 f^{(n-k)}_{xx} f^k_{xx}] = 0$$

А теперь возьмем $f^{(1)}$ в виде

$$f^{(1)} = e^{\alpha x + \beta t + \delta}$$

Тогда

$$\epsilon^1: \quad \alpha\beta + \alpha^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\alpha^3$$

При таком виде $f^{(1)}$ мы видим из уравнений на $\epsilon^2, \epsilon^3,$ ..., что мы можем рассмотреть решение, где

$$f^{(2)} = f^{(3)} = ... = f^{(i)} = ... = 0$$

Лекция 9

Производные Хироты

Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ), 1895 год:

$$\dot{u} + 6uu' + u''' = 0$$

$$u = u(x,t), \quad \dot{u} = \frac{\partial}{\partial t}u, \quad u' = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0 \ \text{ (физичное решение)}$$

Условие нулевой кривизны:

$$[L, A] = 0$$

$$L = \partial_x^2 + u(x,t) + \lambda$$

$$A = \partial_t + M = \partial_t + 4(\partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u')$$

Как мы обсуждали ранее, будем искать решение КдФ в виде

$$u = 2\,(\ln F)_{xx}$$

$$F_{xt}F - F_xF_t + 3F_{xx}^2 + F_{xxxx}F - 4F_xF_{xxx} = 0$$

Функцию $F(x,t)$ можно представить в виде ряда

$$F(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \epsilon^i f^{(i)}(x,t)$$

и получить

$$f^{(1)} = e^{\alpha(x-\alpha^2t)+\delta}$$

или

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}, \quad \text{где} \quad \theta_i = \alpha_i(x - \alpha_i^2 t) + \delta_i$$

Производная Хироты

$$(*) \quad D_t^n D_x^m f\cdot g = (\partial_t - \partial_{t'})^n(\partial_x - \partial_{x'})^m f(x,t)g(x',t')\Big|_{x'=x,\ t'=t}$$

Возьмем $f = f(x)$ и $g = g(x)$, тогда

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(D_x^k f \cdot g\right) y^k$$

Запишем $(*)$ в виде

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{y_1^m y_2^n}{m!n!} D_t^n D_x^m f \cdot g = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{y_1^m y_2^n}{m!n!} (\partial_t - \partial_{t'})^n (\partial_x - \partial_{x'})^m f(x,t) g(x',t') \Big|_{x'=x,\ t'=t}$$

т. к. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, получаем

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{y_1^m y_2^n}{m!n!} D_t^n D_x^m f \cdot g = e^{y_1 D_x + y_2 D_t} f \cdot g$$

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{y_1^m y_2^n}{m!n!} (\partial_t - \partial_{t'})^n (\partial_x - \partial_{x'})^m f(x,t) g(x',t') \Big|_{x'=x,\ t'=t} = e^{y_1(\partial_x - \partial_{x'})} e^{y_2(\partial_t - \partial_{t'})} f(x,t) g(x',t') \Big|_{x'=x,\ t'=t}$$

$$e^{y_1 D_x + y_2 D_t} f \cdot g = e^{y_1(\partial_x - \partial_{x'})} e^{y_2(\partial_t - \partial_{t'})} f(x,t) g(x',t') \Big|_{x'=x,\ t'=t}$$

Воспользуемся тем, что $e^{a\frac{\partial}{\partial x}} f(x) = f(x+a)$. Итого

$$e^{y_1 D_x + y_2 D_t} f \cdot g = f(x+y_1, t+y_2) g(x-y_1, t-y_2)$$

Разложим $f(x+y)g(x-y)$ при малых y

$$f(x+y)g(x-y) = \left(f(x) + y f'(x) + \frac{y^2}{2} f''(x) + \frac{y^3}{6} f'''(x) + \ldots \right) \times$$

$$\times \left(g(x) - y g'(x) + \frac{y^2}{2} g''(x) - \ldots \right) =$$

$$= f(x)g(x) + y(f'g - fg') + \frac{y^2}{2}(f''g - 2f'g' + fg'') + \frac{y^3}{3!}(f'''g - 3f''g' + 3f'g'' - fg''') +$$

$$+ \frac{y^4}{4!}(f''''g - 4f'''g' + 6f''g'' - 4f'g''' + fg'''') + \ldots$$

Следовательно

$$(D_x^1 f \cdot g) = (f' - f\partial) g$$

$$D_x^2 f \cdot g = (f'' - 2f'\partial + f\partial^2) g$$

$$D_x^3 f \cdot g = (f''' - 3f''\partial + 3f'\partial^2 - f\partial^3) g$$

$$D_x^4 f \cdot g = (f'''' - 4f'''\partial + 6f''\partial^2 - 4f'\partial^3 + f\partial^4) g$$

Если $f = g$, нечетные степени производных Хироты равняются нулю!

Чтобы найти $D_x D_t f$ нужно выделить коэффициент при $y_1 y_2$ в разложении $f(x + y_1, t + y_2)g(x - y_1, t - y_2)$:

$$(f + y_1\partial_x f + y_2\partial_t f + y_1 y_2 \partial_{xt} f + ...)(g - y_1\partial_x g - y_2\partial_t g + y_1 y_2\partial_{xt} g + ...) =$$

$$= ... + y_1 y_2(-\partial_x f \partial_t g - \partial_t f \partial_x g + \partial_{xt} f g + f\partial_{xt} g + ...$$

$$\Rightarrow D_x D_t f \cdot f = 2(\partial_x \partial_t f \cdot f - \partial_x f \partial_t f)$$

Из $D_x^4 f \cdot g$ получим

$$D_x^4 f \cdot f = 2 f_{xxxx} f - 8 f_{xxx} f_x + 6 f_{xx}^2 = 2(f_{xxxx} f - 4 f_{xxx} f_x + 3 f_{xx}^2)$$

Тогда уравнение Хироты можно записать в виде

$$\boxed{D_x D_t F \cdot F + D_x^4 F \cdot F = 0}$$

Можно взять полином от производных Хироты и записать уравнение:

$$P(D_1,\ D_2,\ D_3,\ ...)F \cdot F = 0,$$

где полином $P(...)$ четный и $P(0,\ 0,\ 0,\ ...) = 0$.

Лекция 10

Функция Бейкера-Ахиезера

Вспомним, как мы вводили иерархию КП. Мы стартовали с оператора

$$L = \partial + \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \partial^{-i} \quad (*)$$

Затем

$$[L, A] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \partial_{t_m} + M_m \\ M_m &= (L^m)_+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow [L, \partial_{t_m} + (L^m)_+] = 0$$

Можно также ввести спектральный параметр z (константа)

$$[L + z, A_m] = 0$$

Это коммутационное соотношение можно рассматривать, как систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (L+z)\psi = 0 \\ A_m \psi = (\partial_{t_m} + M_m)\psi = 0 \end{cases}$$

Функция ψ — это функция Бейкера-Ахиезера. С помощью нее можно находить u:

$$(\partial^2 + u + z)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{(\partial^2 + z)\psi}{\psi}$$

Из $(*)$ можно выразить производную через L:

$$\partial = L + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} L^{-i}$$

$$L^{-1} = \partial^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k \partial^{-k}$$

Т. к. L и L^{-1} псевдодифференциальные операторы и $L \cdot L^{-1} = 1$.

$$M_m = (L^m)_+ = L^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} L^{-i}$$

$$M_1 = \partial_x = L + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)}(t) L^{-i}$$

Возьмем A_m в виде $\partial_m - M_m$ и рассмотрим уравнение на ψ:

$$(\partial_m - M_m)\psi = 0$$

$$\partial_m\psi = M_m\psi$$

$$\partial_m\psi = (L^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(m)}L^{-i})\psi$$

Заменим $L+z$ на $L-z$ (верно с точностью до обращения времени) и рассмотрим уравнение

$$(L-z)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad L\psi = z\psi$$

Откуда,

$$(L^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(m)}L^{-i})\psi = (z^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(m)}z^{-i})\psi$$

$$\frac{\partial_m\psi}{\psi} = \partial_m(\ln\psi) = (z^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(m)}z^{-i})$$

интегрируем и получаем

$$\ln\psi = \sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\psi_i(t)z^{-i} + \mathrm{const}\ ,$$

где t_m — собственное время и $\partial_m\psi_i(t) = \sigma_i^{(m)}$.

Положим const $= 0$, тогда

$$\psi = \exp(\sum_{i=1}^{+\infty} t_m z^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\psi_i(t)z^{-i}) = w(z,t)\exp(\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m),$$

где $w(z,t) = \exp(\sum_{i=1}^{+\infty}\psi_i(t)z^{-i}) = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t)z^{-i}$.

Вспомним, что $t_1 = x$

$$e^{\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m} = e^{xz + \sum_{m=2}^{+\infty} t_m z^m}$$

$$(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t)z^{-i})e^{\sum_{m=1}^{\infty} t_m z^m} = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i(t)\partial^{-i})e^{xz + \sum_{m=2}^{+\infty} t_m z^m} = W(\partial)e^{\xi(z,t)}$$

Тогда уравнение системы можно переписать в виде

$$(L-z)We^{\xi} = 0$$

$$LWe^{\xi} = Wze^{\xi} = W\partial e^{\xi}$$

Откуда

$$\Rightarrow \quad L = W\partial W^{-1} \text{ (как калибровочное преобразование)}$$

W — одевающий оператор.
Второе уравнение системы преобразуется как

$$(\partial_m - M_m)\psi = 0$$

$$\partial_m W e^{\xi} = M_m W e^{\xi}$$

$$\partial_m W e^{\xi} = (\partial_m W)e^{\xi} + W\partial_m e^{\xi} = \{\partial_m e^{\xi} = \partial^m e^{\xi}\} = (\partial_m W)e^{\xi} + W\partial^m e^{\xi}$$

Операторное соотношение:

$$M_m W = \partial_m W + W\partial^m \quad \Big| \times W^{-1}$$

$$M_m = (\partial_m W)W^{-1} + W\partial^m W^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad (L^m)_- = -(\partial_m W)W^{-1}$$

$$\partial_m \psi(t) = \sigma_i^{(m)} \quad \Rightarrow \quad \partial\psi_i = \sigma_i^{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_m \sigma_i^{(1)} = \partial_x(\partial_m \psi_i) \quad \Rightarrow \quad \sigma_i^{(1)} \text{ — плотность интеграла движения}$$

Посмотрим на вычет от L^m:

$$-\mathrm{Res}\ L^m = \mathrm{Res}\ \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} L^{-i} = \sigma_1^{(m)} \ \ (\text{т. к. } L^{-1} = \partial^{-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \partial^{-i})$$

$$\partial_k \sigma_1^{(m)} = -\mathrm{Res}\ \partial_k L^m = -\mathrm{Res}\ [M_k, L^m] = -\partial_x(...)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1^{(m)} \text{ — плотность интеграла движения}$$

Таким образом, мы получили два набора плотностей интегралов движения, значит они должны быть связаны

$$\partial M_m = \partial L^m + \partial \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} L^{-i}$$

$$\partial = L + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} L^{-i}$$

Итого

$$\partial M_m = L^{m+1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} L^{m-i} + \sum_{i=1}^{+\infty} (\partial\sigma_i^{(m)} L^{-i} + \sigma_i^{(m)} \partial L^{-i})$$

Возьмем положительную проекцию от левой и правой частей равенства

$$\partial M_m = M_{m+1} + \sum_{i=1}^{m-1} \sigma_i^{(1)} M_{m-i} + \sigma_1^{(m)} \quad \Big| \times \ln\psi$$

$$\partial M_m \ln\psi = (M_{m+1} + \sum_{i=1}^{m-1} \sigma_i^{(1)} M_{m-i} + \sigma_1^{(m)}) \ln\psi$$

$$\sigma_i^{(m+1)} = \partial_m \sigma_i^{(1)} + \sigma_{i+1}^{(m)} + \sigma_{m+i}^{(1)} - \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^{(1)} \sigma_i^{(m-j)} + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j^{(1)} \sigma_{i-j}^{(m)}$$

Лекция 11

Тау-функция для иерархии Кадомцева-Петвиашвили

$$L = \partial + \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \partial^{-i}, \quad M_n = (L^n)_+$$

$$\frac{\partial}{\partial t_n} L = [M_n, L]$$

$$u_i = u_i(t_1, t_2, t_3, ...), \quad \text{т. к. } \frac{\partial}{\partial t_n}\frac{\partial}{\partial t_m} L = \frac{\partial}{\partial t_m}\frac{\partial}{\partial t_n} L$$

Условие нулевой кривизны $\Leftrightarrow$ условие совместности системы уравнений:

$$\begin{cases} (\partial_m - M_m)\psi = 0 \\ L\psi = z\psi \end{cases}$$

Вся информация о иерархии КП содержится в функции ψ.
Утверждение 1. Функция Бейкера-Ахиезера всегда представима в виде

$$\psi(z,t) = (1 + \sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t) z^{-i}) e^{(\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m)},$$

где $t = \{t_1, t_2, t_3, ...\}$.

Доказательство:
Выразить ∂ через степени L

$$\partial = L + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)}(t) L^{-i}$$

$$M_m = L^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)}(t) L^{-i}$$

Подставляем $\psi(z,t)$ в $(\partial_m - M_m)\psi = 0$:

$$\partial_m \psi = M_m \psi = (L^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} L^{-i})\psi = (z^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} z^{-i})\psi$$

$$\partial_m(\ln\psi) = z^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} z^{-i}$$

решаем эту систему уравнений

$$\ln\psi = \sum_{m=1}^{+\infty} z^m t_m + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i(t) z^{-i}, \quad \text{где } \partial_m \psi_i(t) = \sigma_i^{(m)}$$

$$\psi = e^{\sum_{i=1}^{+\infty}\psi_i(t)z^{-i}} e^{\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m} = (1+\sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t)z^{-i}) e^{\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m}$$

$$\text{т. к. } t_1 = x: \quad e^{\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m} = e^{zx+\sum_{m=2}^{+\infty} t_m z^m} \qquad \left(\xi(z,t) \equiv \sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m\right)$$

$$\Rightarrow \quad \partial e^{\xi} = z \cdot e^{\xi}$$

$$\partial^n e^{\xi} = z^n e^{\xi} \quad (n \text{ — может быть и отрицательным})$$

$$\psi = (1+\sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t)\partial^{-i}) e^{\xi(z,t)} = W(z,\partial)e^{\xi(z,t)}$$

$W(z,\partial)$ — одевающий оператор

$$L = W\partial W^{-1}$$

$$\sigma_i^{(1)} = \partial_x \psi_i(t)$$

$$\partial_m \sigma_i^{(1)} = \partial_x \partial_m \psi_i^{(1)} = \partial_x(\sigma_i^{(m)}), \text{ т. е. } \partial_{t_m}\sigma_m^{(1)} = \partial_x(...) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_m^{(1)} \text{ — плотность тока}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Res } M_m = \text{Res }\left(L^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(m)}L^{-i}\right) = 0 \\ &-\text{Res } L^m = \text{Res } \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(m)}L^{-i} = \sigma_1^{(m)} \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{Res } M_m = \text{Res }\left(L^m + \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(m)}L^{-i}\right)$$

Продифференцируем это соотношение по k-тому времени

$$\partial_k \sigma_1^{(m)} = -\text{Res } \partial_k L^m$$

$$\partial_k \sigma_1^{(m)} = -\text{Res } [M_k, L^m] = -\partial(...)$$

$$\Rightarrow \sigma_1^{(m)} \text{ выступает в качестве плотности сохраняющегося тока}$$

Т. к. двух независимых наборов интегралов движения быть не может $\Rightarrow$ $\sigma_i^{(m)}$ должно выражаться через $\sigma_i^{(1)}$.

Утверждение 2.

$$\boxed{\sigma_1^{(n)} = n\sigma_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{n-1}\partial_m \sigma_{n-m}^{(1)}}$$

Доказательство:

$$\partial M_m = \partial L^m + \sum_{i=1}^{+\infty}(\sigma_i^{(m)\prime} + \sigma_i^{(m)}\partial)L^{-i} = \left(L + \sum_{i=1}^{+\infty}\sigma_i^{(1)}L^{-i}\right)L^m + \sum_{i=1}^{+\infty}(\sigma_i^{(m)\prime} + \sigma_i^{(m)}\partial)L^{-i} =$$

$$= L^{m+1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} L^{m-i} + \sum_{i=1}^{+\infty} (\sigma_i^{(m)\prime} + \sigma_i^{(m)} \partial) L^{-i} =$$

$$= \{\text{берем только полож. часть, т. к. } \partial M_m \text{ не имеет отрицательных степеней } \partial\} =$$

$$= M_{m+1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} M_{m-i} + \sigma_1^{(m)}$$

Далее действуем на функцию ψ:

$$1) \quad \partial M_m \psi = \partial \partial_m \psi = \partial_m \partial \psi = \partial_m \left(z + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} z^{-i} \right) \psi =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \partial_m \sigma_i^{(1)} z^{-i} \right) \psi + \left(z + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} z^{-i} \right) \partial_m \psi =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \partial_m \sigma_i^{(1)} z^{-i} \right) \psi + \left(z + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} z^{-i} \right) \left(z^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} z^{-i} \right) \psi =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \partial_m \sigma_i^{(1)} z^{-i} + z^{m+1} + \sum_{i=1-m}^{+\infty} \sigma_{m+i}^{(1)} z^{-i} + \sum_{i=0}^{+\infty} \sigma_{i+1}^{(m)} z^{-i} + \sum_{i=2}^{+\infty} z^{-i} \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_i^{(1)} \sigma_{i-j}^{(m)} \right) \psi$$

$$2) \quad \left(M_{m+1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} M_{m-i} + \sigma_1^{(m)} \right) \psi =$$

$$= \left(z^{m+1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m+1)} z^{-i} \right) \psi + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} \left(z^{m-i} + \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j^{(m-i)} z^{-j} \right) \psi + \sigma_1^{(m)} \psi$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях z, получаем равенства

$$\sigma_i^{(m+1)} = \partial_m \sigma_i^{(1)} + \sigma_{i+1}^{(m)} + \sigma_{m+i}^{(1)} - \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^{(1)} \sigma_i^{(m-j)} + \sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j^{(1)} \sigma_{i-j}^{(m)}$$

Чтобы получить итоговую формулу, сначала положим $i = n - m$:

$$\sigma_{n-m}^{(m+1)} = \partial_m \sigma_{n-m}^{(1)} + \sigma_{n-m+1}^{(m)} + \sigma_n^{(1)} - \sum_{j=1}^{m-1} \sigma_j^{(1)} \sigma_{n-m}^{(m-j)} + \sum_{j=1}^{n-m-1} \sigma_j^{(1)} \sigma_{n-m-j}^{(m)}$$

Далее берем сумму по m от 1 до $(n-1)$.
Рассмотрим квадратичные слагаемые при различных m:

$$m = 1: \quad \sum_{j=1}^{n-2} \sigma_j^{(1)} \sigma_{n-j-1}^{(1)} = \sigma_1^{(1)} \sigma_{n-2}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n-3} \sigma_j^{(1)} \sigma_{n-j-1}^{(1)} + \sigma_{n-2}^{(1)} \sigma_1^{(1)}$$

$$m = 2: \quad -\sigma_1^{(1)} \sigma_{n-2}^{(1)} + \sum_{j=1}^{n-3} \sigma_j^{(1)} \sigma_{n-j-2}^{(2)} = -\sigma_1^{(1)} \sigma_{n-2}^{(1)} + \sigma_1^{(1)} \sigma_{n-3}^{(2)} + \sigma_2^{(1)} \sigma_{n-4}^{(2)} + \ \ldots$$

$$m=3: \qquad -\sigma_1^{(1)}\sigma_{n-3}^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_{n-3}^{(1)} + \; ....$$

Видно, что квадратичные члены зануляются после взятия суммы по m:

$$\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_{n-m}^{(m+1)} = \sum_{m=1}^{n-1}\left(\partial_m\sigma_{n-m}^{(1)} + \sigma_{n-m+1}^{(m)} + \sigma_n^{(1)}\right)$$

$$\sum_{m=2}^{n}\sigma_{n-m+1}^{(m)} = (n-1)\sigma_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{n-1}\left(\partial_m\sigma_{n-m}^{(1)} + \sigma_{n-m+1}^{(m)}\right)$$

$$\sigma_1^{(n)} = (n-1)\sigma_n^{(1)} + \sigma_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{n-1}\partial_m\sigma_{n-m}^{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1^{(n)} = n\sigma_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{n-1}\partial_m\sigma_{n-m}^{(1)}$$

Полученное соотношение замечательно тем, что его можно решить!

Лекция 12

Решение уравнения для коэффициентов

Мы помним, что

$$\partial_m \psi_i(t) = \sigma_i^{(m)},$$

при $i = 1$:

$$\partial_m \psi_1(t) = \sigma_1^{(m)}$$

Если взять производную от левой и правой частей этого равенства, мы получим

$$\partial_k \partial_m \psi_1 = \partial_k \sigma_1^{(m)} = -\mathrm{Res}\ \partial_k L^m = -\mathrm{Res}\ [M_k, L^m] = \partial(...)$$

Т. е. $\psi_1 = \partial(...)$ — полная производная от чего-то.
Обычно берут

$$\psi_1 = \partial(-\ln \tau(t)),$$

это и есть **определение тау-функции**.

$$\sigma_1^{(m)} = \partial_m \psi_1 = -\partial_m \partial(\ln \tau)$$

Можно показать, что $\sigma_1^{(1)} = -u_1$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \partial^2 \ln \tau$$

Если мы будем переходить от иерархии КП к иерархии КдВ, то $u_1 \sim u$. Отсюда получается

$$u = \partial^2 \ln \tau$$

Если взять $\tau = F^2$, получим ранее используемую формулу:

$$u = 2\partial^2 \ln F$$

Мы записывали функцию Бейкера-Ахиезера, как

$$\psi(z,t) = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t) z^{-i}\right) e^{\xi(z,t)}, \quad \xi(z,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m$$

Экспоненту (префактор) в этом выражении можно разложить по степеням z.

Определение. Полиномы $p_n(t)$ определяются соотношением:

$$e^{\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n p_n(t)$$

Распишем несколько первых полиномов:

$$p_0(t) = 1$$

$$p_1(t) = t_1$$
$$p_2(t) = \frac{1}{2}t_1^2 + t_2$$
$$p_3(t) = \frac{1}{6}t_1^3 + t_1t_2 + t_3$$
$$p_4(t) = \frac{1}{24}t_1^4 + t_1t_3 + \frac{1}{2}t_1^2t_2 + \frac{1}{2}t_2^2 + t_4$$

Эти полиномы имеют теоретико-групповой смысл. Они связаны с характерами представлений группы $GL(N)$.

Определение. Пусть есть представление $T:\ G \to Matrix$ группы G. Характером представления группы называется функция на группе

$$\chi_T(g) = \mathrm{Tr}\ (T(g)),$$

где $g \in G$.

Свойства:

○ сопряженные элементы имеют один и тот же характер

$$\chi_T(g) = \chi_T(hgh^{-1})$$

○ у двух эквивалентных представлений характеры совпадают

Определение. Эквивалентные представления:

$$\tilde{T}(g) = ST(g)S^{-1}$$

Для компактных групп можно доказать, что если характеры представлений групп совпадают, то эти представления эквивалентны.

Определение. Представление называется разложимым, если с помощью преобразования эквивалентности его можно привести к блочно-диагональному виду.

Для простоты рассмотрения возьмем группу $U(N)$ (унитарных матриц размера $N \times N$). Пусть $g \in U(N)$, а T — определяющее представление группы $U(N)$. Другие представления можно строить как тензорное произведение T:

$$\tilde{T} = \underbrace{T \otimes T \otimes ... \otimes T}_{r}$$

○ T действует в пространстве $\mathbb{C}^N$(обозначим V)
○ $\tilde{T}$ действует в пространстве $\underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{r}$(обозначим $V^{\otimes r}$)

Элементом пространства V является вектор, а элементом пространства $V^{\otimes r}$ является тензор ранга $r:\quad \psi^{i_1 \dots i_r}$.
Очевидно, что представление $\tilde{T}$ является приводимым. В силу того, что группа $U(N)$ компактная, любое представление является разложимым. Чтобы выделить

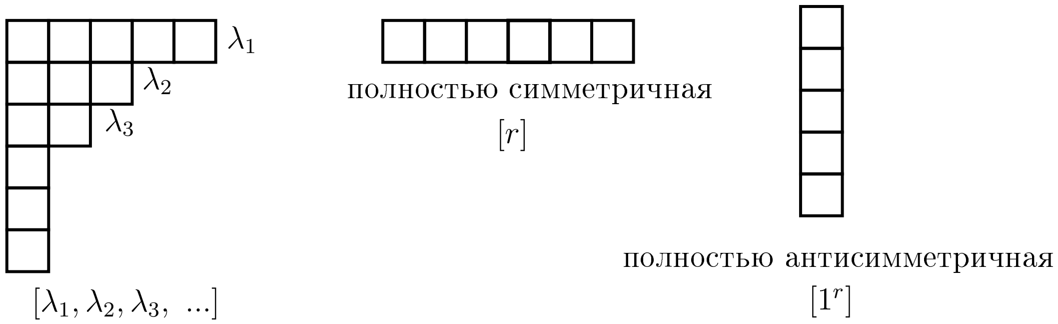

Рис. 5. Диаграммы Юнга

неприводимые представления из $\tilde{T}$, надо взять тензор ранга r и симметризовать его. Каждая симметризация отвечает диаграмме Юнга из r клеток (Рис. 5.).

Рассмотрим в представлении $\tilde{T}$ неприводимое подпредставление, которое соответствует полностью симметричному тензору $\psi^{(i_1 \dots i_r)}$.

$$\psi^i \vec{e}_i \in V$$

$$T(g)\psi^i = g^i_k \psi^k$$

$$\tilde{T}(g)\psi^{(i_1 \dots i_r)} = g^{i_1}_{k_1} \dots g^{i_r}_{k_r} \psi^{(k_1 \dots k_r)}$$

Т. к.

$$\chi_T(g) = \mathrm{Tr}\ (T(g)) = \mathrm{Tr}\ (ST(g)S^{-1}),$$

мы можем диагонализовать матрицу $T(g)$. Нам надо диагонализовать $g^{i_1}_{k_1} \dots g^{i_r}_{k_r}$, тогда следом (шпуром) будет сумма собственных значений

$$g^i_k = \delta^i_k x_k, \quad (x_k \text{ — собственные значения})$$

$$\Rightarrow \quad \chi_{[r]}(g) = \sum_{i_1 \le i_2 \le \dots \le i_r}^{N} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$$

Введем производящую функцию

$$A(z) = \sum_{r=1}^{+\infty} z^r \chi_{[r]}(g)$$

Её можно переписать в виде

$$\sum_{r=1}^{+\infty} z^r \chi_{[r]}(g) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{(1 - z x_k)} = \det \frac{1}{1 - zg}$$

Вспомним замечательную формулу

$$\boxed{\det A = e^{\mathrm{Tr}\ (\ln A)}}$$

Тогда

$$\det \frac{1}{1-zg} = e^{-\mathrm{Tr}\,(\ln(1-zg))} = e^{\mathrm{Tr}\,\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(zg)^k}{k}\right)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^k}{k}\mathrm{Tr}\,(g^k)\right),$$

т.к. справедливо разложение

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$$

Если мы положим, что $t_k = \frac{\mathrm{Tr}\,(g^k)}{k}$, то получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} z^r \chi_{[r]}(g) = e^{\sum_{k=1}^{+\infty} z^k t_k}$$

Таким образом, мы получили связь характеров с полиномами $p_n(t)$.

Утверждение. Имеют место следующие тождества

$$1) \quad \boxed{\partial_m p_n(t) = p_{n-m}(t)}$$

$$2) \quad \boxed{n p_n(\tilde{t}) = \sum_{m=1}^{n} t_m p_{n-m}(t),}$$

где $\tilde{t} = \{\frac{t_1}{1}, \frac{t_2}{2}, ..., \frac{t_k}{k}, ...\}$.

Утверждение. Решение уравнений на сигма-коэффициенты $\sigma_1^{(n)} = n\sigma_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{n-1}\partial_n\sigma_{n-m}^{(1)}$ имеет вид:

$$\sigma_k^{(1)} = p_k(-\tilde{\partial})\partial\ln\tau,$$

где $\tilde{\partial} = \{\frac{\partial_1}{1}, \frac{\partial_2}{2}, ..., \frac{\partial_k}{k}, ...\}$.

Тогда функцию Бейкера-Ахиезера можно записать в виде

$$\psi(z,t) = e^{\xi(z,t)}\left[\frac{\tau(\{t_m - \frac{1}{mz^m}\})}{\tau(t)}\right]$$

Лекция 13

Уравнения на коэффициенты полиномов

Вспомним утверждение, что функцию Бейкера-Ахиезера можно записать в виде

$$\psi(z,t) = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t) z^{-i}\right) e^{\xi(t,z)} \qquad (*)$$

и вспомогательные формулы

$$\partial = L + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(1)} L^{-i}$$

$$M_n = L^n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(n)} L^{-i}$$

$$\partial_m \psi = M_m \psi = \left(z^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \sigma_i^{(m)} z^{-i}\right)$$

$$\ln \psi = \sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i(t) z^{-i} + \text{const} \ , \quad \sigma_i^{(m)} = \partial_m \psi_i(t)$$

Формулу $(*)$ можно переписать, используя псевдодифференциальный оператор:

$$\psi(z,t) = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} w_i(t) \partial^{-i}\right) e^{\xi(t,z)} = W(\partial) e^{\xi(t,z)}$$

В частности, ранее мы получили запись L через W:

$$L = W \partial W^{-1}$$

Далее вспомним уравнения на сигма-коэффициенты

$$\sigma_1^{(n)} = n\sigma_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{n-1} \partial_m \sigma_{n-m}^{(1)}$$

Мы можем решить их, используя тау-функцию. В прошлой лекции мы заметили, что

$$\left.\begin{aligned} &\partial_m \psi_1 = \sigma_1^{(m)} \\ &\partial_k \partial_m \psi_1 = \partial_k \sigma_1^{(m)} = \partial(...) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi_1 = \partial(...)$$

$$\psi_1 := -\partial \ln(\tau)$$

Разложим префактор $e^{\xi(t,z)}$ по степеням z:

$$e^{\xi(t,z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n p_n(t), \qquad (**)$$

где $p_n(t)$ — полиномы.
Свойства $p_n(t)$:
1)

$$\boxed{\partial_m p_n(t) = p_{n-m}(t)}$$

Доказательство:
Берем (∗∗) и дифференцируем по t_m:

$$\partial_m e^{\xi(t,z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \partial_m z^n p_n(t)$$

$$z^m e^{\xi(t,z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n (\partial_m p_n(t))$$

$$e^{\xi(t,z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-m} (\partial_m p_n(t))$$

Откуда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n p_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-m} (\partial_m p_n(t))$$

и т. д.
2)

$$\boxed{n p_n(\tilde{t}) = \sum_{m=1}^{n} t_m p_{n-m}(\tilde{t})}$$

Доказательство:
Подействуем на левую часть (∗∗) дифференциальным оператором $z\frac{\partial}{\partial z}$, сделав замену $t \to \tilde{t}$:

$$z\frac{\partial}{\partial z} e^{\xi(\tilde{t},z)} = \left(z\frac{\partial}{\partial z}\xi(\tilde{t},z)\right) e^{\xi(\tilde{t},z)} = \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m t_m}{m} z^m\right) = \xi(t,z) e^{\xi(\tilde{t},z)}$$

$$\Rightarrow z\frac{\partial}{\partial z} e^{\xi(\tilde{t},z)} = z\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n p_n(\tilde{t})\right) = \left(\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n p_n(\tilde{t})\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n z^n p_n(\tilde{t}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^{n+m} p_n(\tilde{t})$$

и т. д.

В силу того, что p_n — полиномы, мы можем заменить параметры t на производные в свойстве 2):

$$n p_n(\tilde{\partial}) = \sum_{m=1}^{n} \partial_m p_{n-m}(\tilde{\partial}) \quad (\ast\ast\ast)$$

Далее

$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= -\partial \ln \tau, \\ \sigma_1^{(m)} &= \partial_m \psi_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sigma_1^{(m)} = -\partial_m \partial \ln \tau$$

Теперь берем тождество $(***)$ и обоими его частями действуем на функцию $\partial \ln \tau$:

$$np_n(\tilde{\partial})\partial \ln \tau = \left(\sum_{m=1}^{n-1} \partial_m p_{n-m}(\tilde{\partial}) + \partial_n\right) \partial \ln \tau$$

$$np_n(\tilde{\partial})\partial \ln \tau = \sum_{m=1}^{n-1} \partial_m p_{n-m}(\tilde{\partial})\partial \ln \tau - \sigma_1^{(n)}$$

Делаем замену $\partial \to -\partial$:

$$-np_n(-\tilde{\partial})\partial \ln \tau = \sum_{m=1}^{n-1} \partial_m p_{n-m}(-\tilde{\partial})\partial \ln \tau - \sigma_1^{(n)}$$

$$\sigma_1^{(n)} = np_n(-\tilde{\partial})\partial \ln \tau + \sum_{m=1}^{n-1} \partial_m p_{n-m}(-\tilde{\partial})\partial \ln \tau$$

Если сравнить последнее равенство с уравнениями на сигма-коэффициенты

$$\sigma_1^{(n)} = n\sigma_n^{(1)} + \sum_{m=1}^{n-1} \partial_m \sigma_{n-m}^{(1)},$$

можно сделать вывод о том, что имеет место соотношение:

$$\boxed{\sigma_n^{(1)} = p_n(-\tilde{\partial})\partial \ln \tau}$$

Лекция 14

Теория весов для простой алгебры Ли

Докажем, что решение для функции Бейкера-Ахиезера можно записать через тау-функцию в виде:

$$\psi(z,t) = e^{\xi(z,t)} \frac{\tau\left(\left\{t_m - \frac{1}{mz^m}\right\}\right)}{\tau(t)}$$

Используя соотношение $\sigma_n^{(m)} = \partial_m \psi_n(t)$, получим

$$\sigma_n^{(1)} = \partial \psi_n(t),$$

т. е. $\psi_n(t)$ есть интеграл от $\sigma_n^{(1)}$.

Но с другой стороны

$$\sigma_n^{(1)} = p_n(-\tilde{\partial})\partial \ln \tau,$$

следовательно

$$\psi_n(t) = p_n(-\tilde{\partial}) \ln \tau$$

Подставим выражение для $\psi_n(t)$ в формулу для $\ln \psi$

$$\ln \psi = \sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i(t) z^{-i}$$

и получим

$$\ln \psi = \xi(z,t) + \sum_{i=1}^{+\infty} z^{-i} p_i(-\tilde{\partial}) \ln \tau$$

Теперь нам осталось показать, что $\ln \psi$ можно также записать в виде

$$\ln \psi = \xi(z,t) + \ln \tau \left(\left\{t_m - \frac{1}{mz^m}\right\}\right) - \ln \tau$$

Для этого рассмотрим некоторую функцию f со сдвинутыми аргументами:

$$f = f\left(t_1 - \frac{1}{1z^1},\ \ t_2 - \frac{1}{2z^2},\ \ ...,\ \ t_k - \frac{1}{kz^k},\ \ ...\right)$$

Эту функцию также можно записать в виде некой экспоненты:

$$f = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\partial_n}{nz^n}\right) f(t)$$

Используя определение полиномов $p_n(t)$, получаем

$$f = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial_n}{nz^n}\right) f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} p_n(-\tilde{\partial}) f(t)$$

Развалим последнюю сумму на две:

$$f\left(\left\{t_m - \frac{1}{mz^m}\right\}\right) = f(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} z^{-n} p_n(-\tilde{\partial}) f(t)$$

Видно, что для окончания доказательства осталось положить $f(t) = \ln \tau(t)$. Получаем

$$\ln \tau\left(\left\{t_m - \frac{1}{mz^m}\right\}\right) - \ln \tau(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{-n} p_n(-\tilde{\partial}) \ln \tau(t)$$

С другой стороны, функцию Бейкера-Ахиезера можно записать в виде:

$$\psi(z,t) = \frac{V(z,t)\tau(t)}{\tau(t)},$$

где $V(z,t) = \exp(\sum_{m=1}^{+\infty} t_m z^m) \cdot \exp(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mz^m}\partial_m)$ — вершинный оператор.

Мы можем выразить коэффициенты w_i через тау-функцию. Это даст нам билинейное уравнение для тау-функции, которое имеет вид:

$$\boxed{\operatorname{Res}_z \left[\tau\left(\left\{t_m - \frac{1}{mz^m}\right\}\right) \cdot \tau\left(\left\{t'_m + \frac{1}{mz^m}\right\}\right) \cdot e^{\xi(t-t',z)}\right] = 0}$$

План доказательства:

$$\psi(z,t) = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} w_i \partial^{-i}\right) e^{\xi(z,t)} = W e^{\xi(z,t)}$$

Введем дуальную функцию ψ^*:

$$\psi^*(z,t) = W^{*-1} e^{-\xi(z,t)}$$

Дуальный оператор:

$$< f, g >= \int dx f(x) g(x)$$

$$< Wf, g >=< f, W^* g >$$

Тогда

$$W = \sum w_i \partial^{-i}$$

$$W^* = \sum (-\partial)^i w_i$$

$$\psi^* = \frac{\tau\left(\left\{t_m + \frac{1}{mz^m}\right\}\right)}{\tau(t)} e^{-\xi}$$

Далее доказывается, что

$$\operatorname{Res}_z \left[\psi(t,z)\psi^*(t',z)\right] = 0 \quad (\text{т. к. } \operatorname{Res}_\partial [W, W^{*-1}] = 0)$$

В итоге, мы получаем билинейное уравнение на тау-функцию.

Простая алгебра Ли (нет инвариантных подалгебр):

$$\mathcal{A} : [X_a, X_b] = C_{ab}^d X_d, \quad \text{базис: } \{X_a\}, \quad a = 1, ..., \dim \mathcal{A}$$

$$\text{Метрика Киллинга: } g_{ab} = C_{ar}^d C_{bd}^r$$

Для простых алгебр Ли можно выделить специальный базис, базис Картана-Вейля. Для этого сначала нужно выделить подалгебру Картана.

Пример. Берем алгебру Ли $sp(2n, \mathbb{C})$. Её можно реализовать, взяв набор осцилляторов

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij},$$

а все образующие строятся как

$$a_i a_j,$$
$$a_i a_j^+,$$
$$a_i^+ a_j^+$$

Подалгебра Картана в примере: $H_i = a_i a_i^+$

Если есть метрика Киллинга, на ней можно ввести скалярное произведение:

$$A \in \mathcal{A}, \quad A = A^a X_a$$

$$(A, B) = A^a B^b a_{ab}, \quad \text{где } g_{ab} \text{ — метрика Киллинга}$$

В силу того, что для любой комплексной алгебры Ли есть компактная подалгебра, в алгебре Ли можно всегда выбрать такой базис, что все образующие можно ортогонализовать относительно скалярного произведения.
○ для простых и полупростых алгебр Ли метрика Киллинга невырождена, а для компактных алгебр Ли она ещё и положительно определенная.

Если мы выделим подалгебру Картана с базисом H_i, то мы сможем всегда добавить к этим генераторам набор генераторов, которые образуют ортогональное дополнение

$$(H_i, X_\alpha) = 0$$

$$[H_i, X_\alpha] = (h_i)_\alpha^\beta X_\beta, \quad (h_i)_\alpha^\beta = ad(H_i)$$
$$, \text{ т. к. } (H_i, [H, X_\alpha]) = 0$$

В ортогональном дополнении можно выбрать набор образующих E_α таких, что

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$$

Такие образующие называются корневыми. Из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ ..., \alpha_r$ можно записать корневой вектор:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^n$$

В базисе Картана-Вейля корневые вектора и есть структурные константы. В частности, можно доказать что

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \text{ — корень} \\ 0, & \text{если } \alpha+\beta \text{ — не корень} \end{cases}$$

$$\text{, т. к. } [H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha+\beta)_i [E_\alpha, E_\beta]$$

Все это позволяет ввести набор простых корней $E_\alpha^{(i)}$. И все остальные корни есть

$$\alpha = \sum_i n_i \alpha^{(i)}, \quad n_i \geq 0 (\text{полож. корни})$$

○ стоит отметить, что если α — корень, то $(-\alpha)$ — тоже корень.

Диаграммы Дынкина: каждому простому корню ставится в соответствие вершина, далее в зависимости от значения скалярного произведения $(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}$ рисуется линия между корнями

Теперь как строить представления?
Пространство Фока:

$$H = \sum_i a_i^+ a_i$$

$$a_i^+|0\rangle = ...$$

$$a_i|0\rangle = 0$$

Аналогичная конструкция есть в алгебрах Ли. Выберем некий вектор $|\mu\rangle$:

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle$$

т. к. H_i — r штук $\Rightarrow \quad |\mu\rangle = (\mu_1, \ ..., \mu_r)$ — весовой вектор(вес).
Определение. Вектор $|\mu\rangle$ называется старшим (вакуум), если

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle$$

и

$$E_\alpha = 0.$$

Все пространство состояний порождается действием отрицательных корней на старший вектор

$$|\lambda\rangle = E_{-\alpha}E_{-\beta}E_{-\gamma}...|\mu\rangle$$

Откуда вес λ:

$$\lambda = \mu - \alpha - \beta - \gamma - ...$$

У алгебры Ли есть присоединенное представление. На веса μ есть единственное условие

$$2\frac{(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \text{ — любой корень}$$

В частности, если взять простые корни, получим целые числа

$$2\frac{(\alpha^{(i)},\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(i)},\alpha^{(i)})}=K_{ij},$$

K_{ij} — *матрица Картана.*

Весовые вектора для всех представлений образуют весовую решётку. Среди всех векторов μ, есть r векторов, обладающих свойством

$$2\frac{(\mu^{(i)},\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)},\alpha^{(j)})}=\delta_{ij}$$

Эти веса называются фундаментальными. Все старшие веса есть комбинация фундаментальных весов:

$$\mu=\sum_i n_i\mu^{(i)},\quad n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Определение. В алгебре Ли существует квадратичный оператор Каземира:

$$C_2=X_aX_bg^{ab}$$

(этот оператор есть элемент обертывающей алгебры)

Оператор C_2 можно записать в базисе Картана-Вейля:

$$C_2=\sum_i H_iH^i+\sum_\alpha E_\alpha E_{-\alpha}$$

Определение. Существует также расщепленный оператор Каземира:

$$\hat{C}_2=X_a\otimes X_bg^{ab}$$

Этот оператор обладает свойством:
Если $g\in G$ — группа Ли, соответствующая алгебре Ли, то

$$(g\otimes g)\hat{C}_2=\hat{C}_2(g\otimes g)$$

или

$$(g\otimes g)\hat{C}_2(g^{-1}\otimes g^{-1})=\hat{C}_2$$

Пусть есть два старших вектора $|\Lambda\rangle$ и $|\Lambda'\rangle$ для представлений T и T'. Посчитаем выражение $\hat{C}_2|\Lambda\rangle\otimes|\Lambda'\rangle$

$$\hat{C}_2|\Lambda\rangle\otimes|\Lambda'\rangle=\left(\sum_i H_i\otimes H^i+\sum_\alpha E_\alpha\otimes E_{-\alpha}\right)|\Lambda\rangle\otimes|\Lambda'\rangle=$$

$$=(\Lambda,\Lambda')|\Lambda\rangle\otimes|\Lambda'\rangle$$

Теперь определим новый объект:

$$\tau_{\Lambda}^{g}(t) = \langle \Lambda | e^{H(t)} g | \Lambda \rangle,$$

где $H(t) = \sum_i H_i t_i, \quad g \in G$.

Введем коэффициенты x_n и y_n:

$$x_n := \frac{1}{2}(t'_n + t''_n)$$

$$y_n := \frac{1}{2}(t'_n - t''_n)$$

И рассмотрим выражение

$$e^{H(t') \otimes H(t'')} = \left(e^{H(y)} \otimes e^{-H(y)}\right) \left(e^{H(x)} \otimes e^{H(x)}\right)$$

$$e^{H(t') \otimes H(t'')} \hat{C}_2 = \left(e^{H(y)} \otimes e^{-H(y)}\right) \hat{C}_2 \left(e^{H(x)} \otimes e^{H(x)}\right)$$

Теперь возьмем левую и правую части этого выражения в обкладки

$$\langle \Lambda | \otimes \langle \Lambda' | e^{H(t') \otimes H(t'')} \hat{C}_2 | \Lambda \rangle \otimes | \Lambda' \rangle = \langle \Lambda | \otimes \langle \Lambda' | \left(e^{H(y)} \otimes e^{-H(y)}\right) \hat{C}_2 \left(e^{H(x)} \otimes e^{H(x)}\right) | \Lambda \rangle \otimes | \Lambda' \rangle$$

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

ФОНД
ВОЛЬНОЕ ДЕЛО

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ