

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Движение тел внутри центра Галактики

Выполнил студент 213 группы, Супонин В.А.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН,
г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН Троицкий С.В.

Москва 2020

1 Введение.

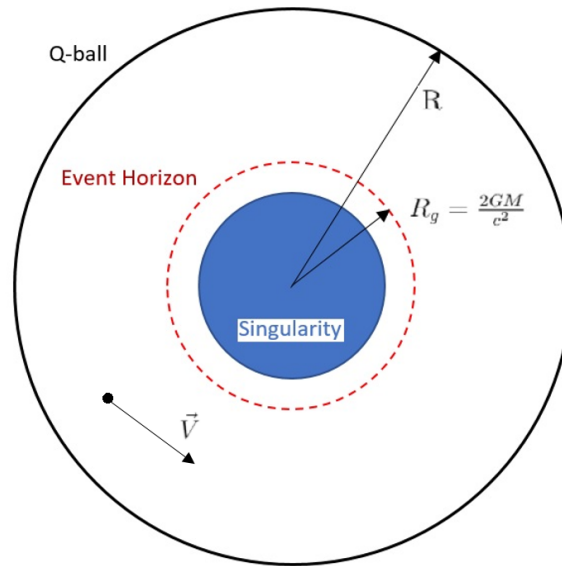
В последние годы интерес к изучению центра нашей Галактики только возрастал. В течение последних лет было получено огромное количество информации о центре Млечного Пути. Вследствие инфракрасного наблюдения за движением звезд, выяснено, что в центре нашей Галактики находится компактный объект, обладающий массой, превосходящей солнечную в четыре миллиона раз[1]. Данные характеристики свойственны черной дыре, которая, предположительно, располагается там.

Однако, в центре галактики может быть и сферически-симметричный массивный шар, состоящий из темной материи, плотного вещества, которое взаимодействует с другими объектами только при помощи сил гравитационного притяжения. То есть, иные тела, состоящие из барионов, свободно пролетают через данный шар, не испытывая диссипации.

Физическая модель данного объекта, как будет показано далее, с значительной точностью описывает наблюдаемые результаты, и она заметно проще, чем модель даже самой простой черной дыры, описываемой решением Шварцшильда. Схожие вопросы рассматриваются в [4].

2 Движение тела внутри сверхмассивного шара из темной материи.

Для нахождения уравнений движения рассмотрим удаленный космический объект, находящийся внутри шара из темной материи и обладающий некоторой начальной скоростью.



Будем рассматривать тела, размеры которых много меньше, чем характерные размеры в данной задаче, то есть, удаленный космический объект будем считать материальной точкой.

Как было сказано выше, тело не испытывает диссипации и взаимодействует с шаром только при помощи сил гравитационного притяжения. Так как, они являются центральными силами, то момент, создаваемый ими равен $[\vec{r} * \frac{F(r)}{r} \vec{r}] = \frac{F(r)}{r} [\vec{r} * \vec{r}] = 0$,

следовательно, для материальной точки выполняется закон сохранения момента импульса $\vec{M} = \vec{a}$ (\vec{a} -постоянный вектор), из этого можно сделать вывод, о том, что движение является плоским. Тогда, сопоставив центры начала координат и шара из темной материи, введем в данной плоскости полярные координаты $q_1 = \phi$, $q_2 = r$ и запишем закон сохранения момента импульса:

$$\vec{M} = [\vec{r} * \vec{p}] = \vec{a} \Rightarrow M = r^2 \dot{\phi} m \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{M}{r^2 m} \quad (1)$$

- M-модуль вектора момента импульса
- m-масса материальной точки

Так как, гравитационные силы притяжения являются потенциальными и других сил в системе нет, то выполняется закон сохранения полной механической энергии системы, который в полярных координатах можно записать следующим образом:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\phi}^2 r^2 + \dot{r}^2) + U(r) \quad (2)$$

- U(r)-зависимость потенциальной энергии от модуля радиус вектора
- E-полная энергия системы

Если сделать подстановку (1) \rightarrow (2) и выразить \dot{r} , то можно получить следующее выражение:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2 m^2}} \quad (3)$$

Найти зависимость U(r) можно из следующих соображений: для напряжённости поля гравитации Ньютона теорема Гаусса практически совпадает с таковой в электростатике. Поток вектора напряжённости гравитационного поля \vec{E} через любую замкнутую поверхность \vec{S} ($\vec{S} = S\vec{n}$, n -внешняя нормаль к поверхности) вычисляется следующим образом:

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = -4\pi G \int_{m_b} dm_b \quad (4)$$

Пусть S-сфера радиуса r (r-меньше радиуса R шара из темной материи). Интегрируя (4), получим

$$F(r) = Em = -G \frac{mm_b}{R^3} r$$

- m-масса материальной точки
- m_b , R-масса и радиус шара из темной материи, соответственно
- G- гравитационная постоянная

Так как, \vec{F} -потенциальная, то

$$\vec{F} = -gradU(r) \Rightarrow G \frac{mm_b}{R^3} \vec{r} = gradU(r) \Rightarrow U(r) = G \frac{mm_b}{R^3} \int_r r dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(r) = G \frac{mm_b}{R^3} \frac{r^2}{2}$$

Сделав замену $k = G \frac{mm_b}{R^3}$ (5a) получим компактную итоговую формулу для потенциальной энергии

$$U(r) = \frac{k}{2} r^2 \quad (5)$$

Подставим (5) \rightarrow (3):

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{2} r^2 \right) - \frac{M^2}{r^2 m^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{d(r^2 - \frac{E}{k})}{\sqrt{(\frac{E^2}{k^2} - \frac{M^2}{km}) - (r^2 - \frac{E}{k})^2}} = dt$$

Так как $\frac{E^2}{k^2} - \frac{M^2}{km} > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{d(r^2 - \frac{E}{k})}{\sqrt{(\frac{E^2}{k^2} - \frac{M^2}{km}) - (r^2 - \frac{E}{k})^2}} &= \int dt \Rightarrow \arcsin\left(\frac{r^2 - \frac{E}{k}}{\sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{M^2}{km}}}\right) = 2\sqrt{\frac{k}{m}}t - t_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow r^2(t) &= \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{M^2}{km}} \sin(2\sqrt{\frac{k}{m}}t - t_0) + \frac{E}{k} \end{aligned} \quad (6)$$

Для (6) сделаем замену $A = \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{M^2}{km}}, w = 2\sqrt{\frac{k}{m}}, x_0 = \frac{E}{k}$

$$r^2(t) = A \sin(wt - t_0) + x_0 \quad (7)$$

Зависимость $\dot{\phi}(t)$ можно найти, если подставить (7) \rightarrow (1):

$$\dot{\phi} = \frac{M/m}{A \sin(wt - t_0) + x_0}$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int d\phi = \int \frac{M/m}{A \sin(wt - t_0) + x_0} dt \Rightarrow \phi(t) = \arctan\left(\frac{A + x_0 \tan(wt - t_0)}{\sqrt{x_0^2 - A^2}}\right) + \phi_0 \quad (8)$$

Найденные уравнения (7) и (8) описывают положение материальной точки, находящейся внутри шара из темной материи, в любой момент времени.

Также в решении данной задачи необходимо учесть эффект проекции. Самым простым примером служит замедление движения далеких от наблюдателя объектов. Проводя наблюдение за удаленным объектом с помощью оптического прибора, человек видит лишь проекцию траектории данного тела на плоскость, которая ортогональна лучу зрения [3].

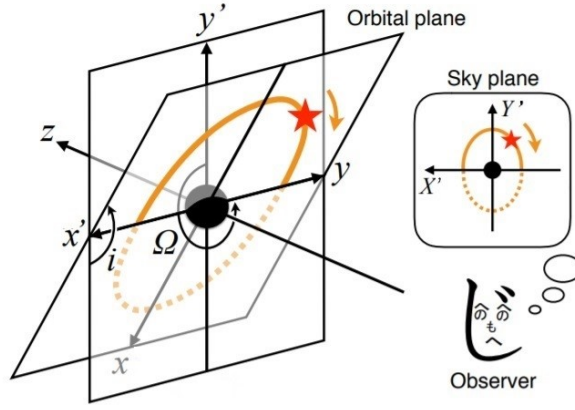


Рис. 1: Используемые системы координат

Начало системы координат совпадает с шаром. Положительные оси x' и y' параллельны плоскости неба, а положительная ось z направлена от наблюдателя. x и y параллельны плоскости движения материальной точки.

$$x' = \cos(i)x, y' = \cos(\Omega)y$$

$\cdot\Omega, i$ -углы между направляющими векторами осей y', y и x', x соответственно.

Тогда переход для полярных координат выглядит следующим образом:

$$r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{\cos^2(\Omega) + \cos^2(i)}r \quad (9)$$

$$\tan(\phi') = \frac{y'}{x'} = \frac{\cos(\Omega)}{\cos(i)} \tan(\phi) \quad (10)$$

Подставляя (7) \rightarrow (9) и (8) \rightarrow (10), получаем итоговые зависимости координат материальной точки от времени, которые учитывают эффект наблюдателя.

Уравнения движения

Зависимости $\phi'(t)$ и $r'(t)$ являются уравнениями движения тела.

$$r' = \sqrt{\cos^2(\Omega) + \cos^2(i)} \sqrt{A \sin(wt - t_0) + x_0}$$

$$\tan(\phi') = \frac{\cos(\Omega)}{\cos(i)} \tan\left(\arctan\left(\frac{A+x_0 \tan(wt-t_0)}{\sqrt{x_0^2 - A^2}}\right) + \phi_0\right)$$

$$\cdot A = \sqrt{\frac{E^2}{k^2} - \frac{M^2}{km}}, w = 2\sqrt{\frac{k}{m}}, x_0 = \frac{E}{k}$$

$\cdot\Omega, i$ -углы между направляющими векторами осей y', y и x', x соответственно.

3 Сравнение с наблюдательными данными.

В [1] приведены результаты наблюдения за орбитальным движением около центра Галактики. Наблюдения производились 22 июля 2018 года интерференционным способом с помощью четырех телескопов в Европейской южной обсерватории (ESO)-Very Large Telescope. На рис. 2 приведены средние значения координат траектории центра масс наблюдаемого тела.

Так как, данные точки имеют значительные погрешности, то существует множество, подходящих для описания данного движения, моделей. Некоторые из них описаны в

[1] и [3]. Здесь будет проверен иной подход, модель Q-шара.

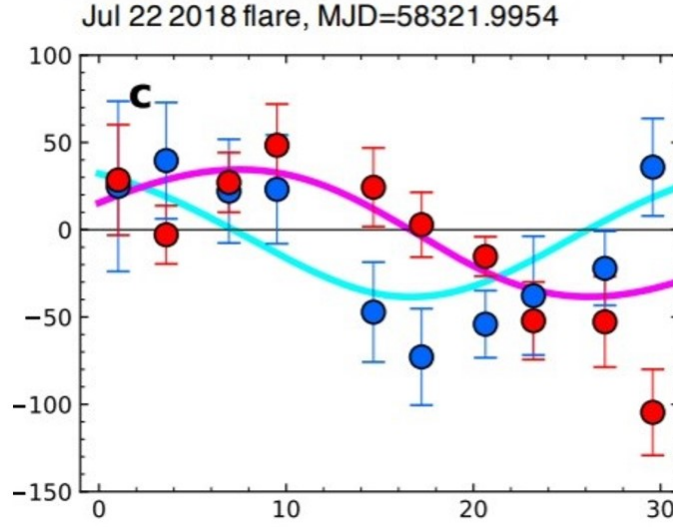


Рис. 2: Экспериментальные значения координат x' (red) и y' (blue) ($\mu arcsec$) от времени (min)

Уравнения движения, полученные ранее, материальной точки внутри шара из темной материи зависят от множества начальных параметров. МНК позволит получить оптимальный набор данных, при которых уравнения, полученные выше, наиболее точно описывают наблюдаемое в эксперименте движение.

В декартовых координатах:

$$x'(t) = r'(t) \cos(\phi'(t))$$

$$y'(t) = r'(t) \sin(\phi'(t))$$

Преобразуем зависимости $r(t)$, $\phi(t)$, чтобы уменьшить количество независимых параметров:

$$r(t) = \sqrt{A \sin(wt - t_0) + x_0} \Rightarrow r(t) = \sqrt{\frac{M}{\sqrt{km}} \sqrt{\frac{E^2 m}{M^2 k} - 1} \sin(wt - t_0) + \frac{E}{k}}$$

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{A + x_0 \tan(wt - t_0)}{\sqrt{x_0^2 - A^2}}\right) + \phi_0 \Rightarrow \phi(t) = \arctan\left(\sqrt{\frac{E^2 m}{M^2 k} - 1} + \frac{E\sqrt{m}}{M\sqrt{k}} \tan(wt - t_0)\right) + \phi_0$$

Сделаем замену $a = \sqrt{\frac{E^2 m}{M^2 k} - 1}$ и подставим получившиеся выражения в $x'(t)$, $y'(t)$:

$$x'(t) = \sqrt{\cos^2(\Omega) + \cos^2(i)} \sqrt{\frac{x_0 a}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin(wt - t_0) + x_0} * \cos\left(\arctan\left[\frac{\cos(\Omega)}{\cos(i)} \tan(\arctan[a + (a^2 + 1) \tan(wt - t_0)] + \phi_0)\right] + \pi k\right) \quad (11)$$

$$y'(t) = \sqrt{\cos^2(\Omega) + \cos^2(i)} \sqrt{\frac{x_0 a}{\sqrt{a^2 + 1}}} \sin(wt - t_0) + x_0 * \sin(\arctan[\frac{\cos(\Omega)}{\cos(i)} \tan(\arctan[a + (a^2 + 1) \tan(wt - t_0)] + \phi_0)] + \pi k) \quad (12)$$

$k = 0, 1$.

Используя МНК для (11), (12) и экспериментальных точек (рис. 1) можно получить следующие значения свободных параметров:

$$w = (0.18 \pm 0.02) \frac{1}{min}, a = 0.001 \pm 0.2, t_0 = (4.8 \pm 0.2) rad, p_0 = (-3.35 \pm 0.17) rad, x_0 = (1500 \pm 400) \frac{1}{\mu parsec^2}, \Omega = 0 rad, i = (0.7 \pm 0.2) rad$$

$$\cdot \mu parsec \approx 4.1 * 10^{-8} parsec$$

$$\cdot w = 2\sqrt{\frac{k}{m}}, x_0 = \frac{E}{k}, a = \sqrt{\frac{E^2 m}{M^2 k}} - 1$$

Сделав обратную замену, получим наиболее важное соотношения для m, k : $m \approx (120 \pm 16) * min^2 * k$ (12a)

Ниже приведены фиты точек (Рис. 2) зависимостями (11) и (12).

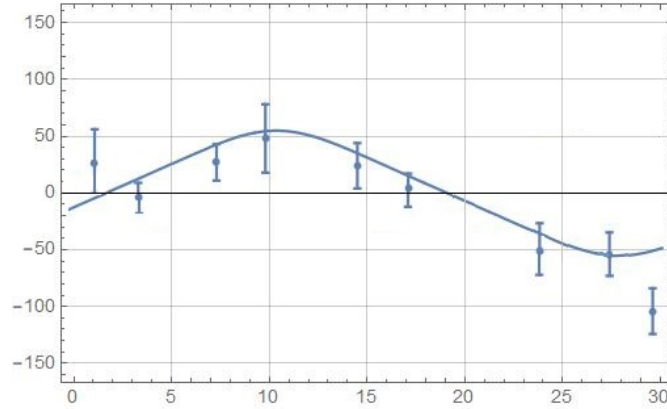


Рис. 3: Зависимость координаты x ($\mu parsec$) от времени t (min)

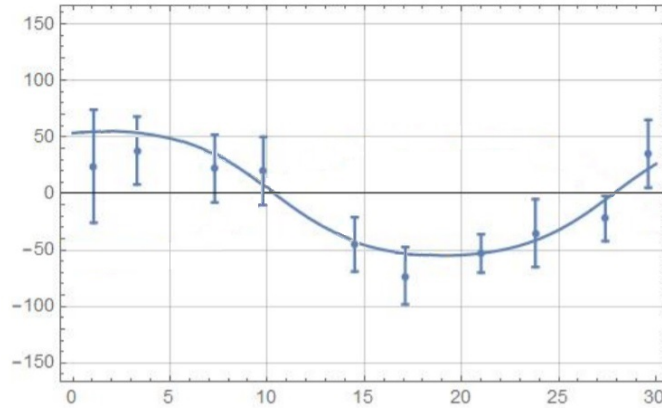


Рис. 4: Зависимость координаты y ($\mu parsec$) от времени t (min)

Исходя из видов рис. 3 и рис. 4, (11) и (12) с хорошей точностью описывают экспериментальные точки (Рис. 2), что говорит о правильности выбранной модели.

Как было сказано ранее, благодаря наблюдению за движением тел около центра нашей галактики, была получена оценка массы компактного объекта, находящегося в центре Млечного Пути. По данным приведенным [1], масса объекта составляет приблизительно 4 миллиона масс Солнца.

Используя соотношения (5а), (12а) и приняв массу шара m_b равной $4 * 10^6 m_s$ (m_s -масса Солнца), получим оценку на радиус объекта из черной материи:

$$120 * \min^2 * G \frac{m_b}{R^3} = 1 \Rightarrow R \approx (1 \pm 0.2) * 10^{-18} * \frac{parsec}{kg^{1/3}} * m_b^{\frac{1}{3}} \Rightarrow R = (2 \pm 0.4) * 10^{-6} * parsec \quad (13)$$

Выразим (13) через радиус Шварцшильда $R = (5 \pm 1) R_g$.

$$\cdot R_g \approx 4 * 10^{-7} * parsec$$

Радиус шара из темной материи

$$R = (5 \pm 1) R_g.$$

$$\cdot R_g \approx 4 * 10^{-7} * parsec\text{-радиус Шварцшильда.}$$

4 Релятивистское движение материальной точки внутри шара из темной материи.

Рассмотрим движение той же самой материальной точки массой m в шаре из темной материи, но теперь ее скорость имеет сравнимую со скоростью света величину. Как и в нерелятивистском случае, в данной задаче выполняются законы сохранения полной механической энергии системы и момента импульса материальной точки (относительно центра шара).

Полная энергия системы[2]

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{k}{2} r^2$$

· p -импульс частицы

Если пользоваться полярными координатами в плоскости движения тела, то, как известно из механики

$$p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2$$

· p_r -радиальная компонента импульса

· M -постоянный момент импульса

Тогда:

$$E = c \sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2 c^2} + \frac{k}{2} r^2$$

Полное определение движения материальной точки в гравитационном поле удобнее

всего производить, исходя из уравнения Гамильтона-Якоби. Оно в полярных координатах имеет вид[2]

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{k}{2}r^2\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + m^2c^2 = 0 \quad (14)$$

Ищем S в виде

$$S = -Et + M\phi + f(r) \quad (15)$$

E, M -постоянные энергия, момент импульса тела

Подставим (15)→(14), в результате находим:

$$S = -Et + M\phi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{k}{2}r^2\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2} dr \quad (16)$$

Зависимость координаты r от времени t в квадратурах определяется равенством $\frac{\partial S}{\partial E} = a$ ($a - const$)

$$a = -t + \frac{1}{\partial E} \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{k}{2}r^2\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2} dr \Rightarrow t = a - \int \frac{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{k}{2}r^2\right)dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{k}{2}r^2\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2}} \quad (17)$$

Траектория движения определяется отношением $\frac{\partial S}{\partial M} = b$ ($b - const$)

$$b = \phi + \frac{1}{\partial M} \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{k}{2}r^2\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2} dr \Rightarrow \phi = b - \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{k}{2}r^2\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2}} \quad (18)$$

(17) и (18) являются уравнениями движения и траектории материальной точки, которые выражены в квадратурах.

5 Основные итоги.

В ходе выполнения курсовой работы была решена, в рамках ньютоновской механики, задача о движении тела внутри шара из темной материи, учтены эффекты проекции, получен фит наблюдений VLT и дана его возможная интерпретация в терминах параметров шара.

В рамках ньютоновской гравитации, были получены уравнения, выраженные в квадратурах, движения и траектории тела, скорость которого внутри шара из темной материи сравнима со скоростью света.

Выяснено, что модель массивного шара из темной материи с хорошей точностью описывает экспериментальные данные. Также, исходя из проведенного анализа, радиус шара превышает радиус черной дыры той же массы в 5 раз ($R = 5 \pm 0.5R_g$). Модель не была проверена и может кардинально измениться с учетом следующих факторов:

- 1) В проверенной модели предполагалось, что скорость материальной точки относительно шара много меньше, чем скорость света.
- 2) Около центра Млечного Пути находится множество космических объектов, которые так же обладают своим гравитационным полем и оказывают влияние на движение тела внутри шара из темной материи.
- 3) До этого момента рассматривалась гравитация Ньютона, которая не всегда подходит для описания движения в сильных гравитационных полях. Не мало экспериментальных и теоретических фактов, свидетельствующих о неточности гравитации Ньютона. К экспериментальным фактам относится, например, сдвиг перигелия орбиты Меркурия.

Список литературы

- [1] R Abuter, A Amorim, M Bauböck, JP Berger, H Bonnet, W Brandner, Y Clénet, V Coude Du Foresto, PT de Zeeuw, C Deen, et al. Detection of orbital motions near the last stable circular orbit of the massive black hole sgr a*. *Astronomy & Astrophysics*, 618:L10, 2018.
- [2] Lev Davidovich Landau and Evgeny Mikhaylovich Lifshits. *Field theory*. Moscow; Leningrad: State publishing house of technical and theoretical literature, 1941.
- [3] Tatsuya Matsumoto, Chi-Ho Chan, and Tsvi Piran. The origin of hotspots around sgr a*: Orbital or pattern motion. *arXiv preprint arXiv:2004.13029*, 2020.
- [4] Sergey Troitsky. Supermassive dark-matter q-balls in galactic centers? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(11):027, 2016.