Cum reverentia lectoribus

Руслана КОЛІСНИК, Вадими МИРОНИК, Володимир КОВДРИШ

Методичні рекомендації

Поверхні другого порядку

ФМІ, 2025 рік, ЧНУ

Зміст

Розділ 1

Конус другого порядку

Означення.

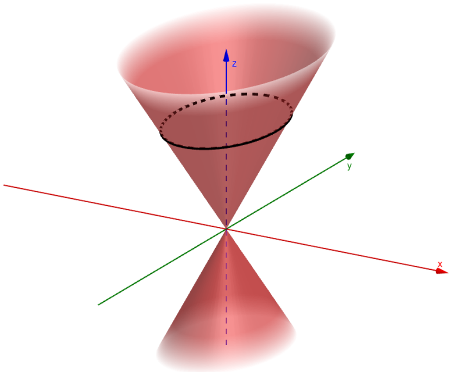
Конусом 2-го порядку називається поверхня, рівняння якої в спеціально-підібраній прямокутній системі координат має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad a \geq b \tag{1.1}$$

З (1.1) випливає, що початок координат є центром симетрії даної поверхні, при цьому точка $O(0,0,0)$ – вершина конуса. Вісі координат, координатні площини є вісями симетрії та площинами симетрії відповдно. Точки які лежать на даній поверхні володіють такими властивостями: якщо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежать на поверхні (1.1), при чому $M_0 \neq O$ то даній поверхні належать усі точки прямої OM_0, яка проходить через центр конуса та точку M_0.

Справді, нехай $M(x, y, z)$ лежить на даній прямій, тоді очевидно $x = \lambda x_0$, $y = \lambda y_0$, $z = \lambda z_0$, $\lambda \neq 0$, якщо $M \neq M_0$. Тоді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \lambda^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0$. Отже, поверхня конуса (1.1) утворюється прямими, які проходять через вершини конуса. Для того, щоб мати вигляд даної поверхні, досить перетнути її площинами паралельними xOy. Отже, перетинаємо (1.1) площиною $z = h$. Рівняння лінії перетину мають вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, z=h$. Якщо $h=0$, то дістаємо точку O. Якщо $h\neq 0$, то лінія перетину – еліпс, канонічне рівняння якого має вигляд

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2}=1, z=h$$



Розділ 2

Асимптотичний конус гіперболоїдів

Означення.

Гіперболоїди (один – однопорожнистий, другий – двопорожнистий) які задаються рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \tag{2.1}$$

називаються *спряженими*

Означення.

Конус II порядку, рівняння якого має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{2.2}$$

називається *асимптотичним конусом* гіперболоїдів (2.1)

Теорема.

Будь-яка площина, яка проходить через вісь Oz перетинає поверхні (2.1) по спряженим гіперболам, а конус (2.2) по двох прямих, які є асимптотами для даних гібербол

Зауваження.

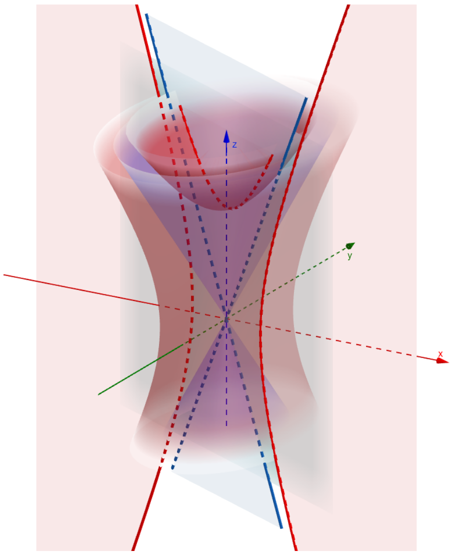
Зазначимо, що для будь-якої сім'ї гіперболоїдів

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = C$$

Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

є асимптотичним



Розділ 3

Еліптичний параболоїд

Означення.

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, рівняння якої в спеціально-підбраній прямокутній системі координат має вигляд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, p > 0, q > 0, p \geq q \qquad (3.1)$$

З (3.1) випливає, що віссю симетрії даної поверхні є вісь Oz площинами симетрії є площини xOz та yOz. Зазначимо ще, що якщо $p = q$, то поверхня (3.1) є поверхнею обертання, яка одержується при обертанні параболи $y^2 = 2qz$ навколо осі Oz

Перетнемо дану поверхню площиною $z = h$. Рівняння лінії перетину при цьому мають вигляд

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, z = h$$

Якщо $h < 0$, то дана площина поверхню (3.1) не перетинає.

Якщо $h = 0$, то площина xOy перетинає поверхню (3.1) в одній точці, точці $O(0, 0, 0)$, яка називається вершиною еліптичного параболоїда.

Якщо $h > 0$, то в перетині одержуємо еліпс, розміщений у площині $z = h$, канонічне рівняння якого має вигляд

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2} = 1, z = h$$

Центр еліпса $(0, 0, h)$.

При перетені поверхні (3.1) площиною xOz дістаємо лінію, рівняння якої мають вигляд $\frac{x^2}{p} = 2z, y = 0$, тобото це є парабола вигляду $x^2 = 2pz, y = 0$

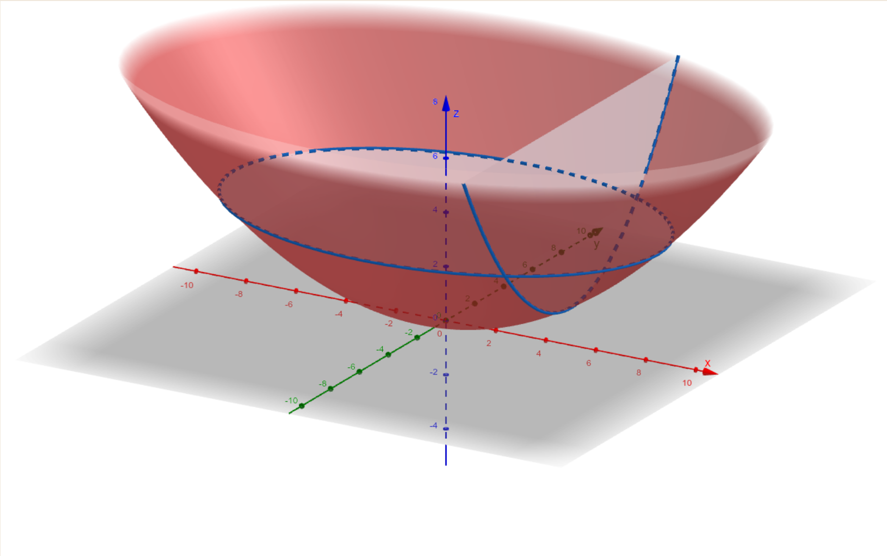
Аналогічно при перетині (3.1) площиною yOz дістанемо параболу, канонічне рівняння якої має вигляд $y^2 = 2qz, x = 0$.

Отже, параметри p, q це відповідні параметри парабол, які одержуються при перетині даної поверхні площинами xOz, yOz.

Далі перетнемо (3.1) площиною $y = t$. В результаті дістанемо лінію, рівняння якої мають вигляд $\frac{x^2}{p} + \frac{t^2}{q} = 2z, y = t \Leftrightarrow \frac{x^2}{p} = 2z - \frac{t^2}{q}, y = t \Leftrightarrow x^2 = 2p(z - \frac{t^2}{2q}), y = t$

Одержане рівняння – рівняння параболи з центром у точці $0, t, \frac{t^2}{2q}$ вісь параболи має рівняння $x = 0, y = t$ напрям якої співпадає з напрямом вісі Oz. Аналогічно розглядається випадок перетину поверхні (3.1) площиною $x = t$. В результаті дістанемо параболу рівняння якої має вигляд

$$y^2 = 2q\left(z - \frac{t^2}{2p}\right)$$


z
x
y

Розділ 4

Гіперболічний параболоїд

Означення.

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, рівняння якої в спеціально підібраній прямокутній системі координат має вигляд

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, p > 0, q > 0, p \geq q \qquad (4.1)$$

З (4.1) випливає, що якщо $p \neq q$ то дана поверхня має одну вісь симетрії Oz.

Площинами симетрії є площини xOz, yOz. Зазначимо, що якщо $p = q$, то дана поверхня має дві вісі симетрії $y = x$ та $y = -x$

Розділ 5

Циліндри 2-го порядку