

25春期中 葛颢

(1)

(a) 构造一个非周期的马尔科夫链, 使得其存在不唯一的平稳分布, 且说明这与遍历定理不冲突

(b) 对分支过程, 若 $P(\xi = 0) = \frac{1}{3}, P(\xi = 2) = \frac{2}{3}$, 求其灭绝概率

(2)

(a)

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $E_0 \tau_2$

(b) 设有限状态 $S = \{1, 2, \dots, K\}$ 上的马氏链的转移矩阵 P 是双随机, 即

$$\sum_{i=1}^K p_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in S$$

求 P 的平稳分布

(3) 设 γ 是 $\{0, 1, 2\}$ 上的概率测度, 满足 $\gamma(0) > \gamma(2) > 0$, 随机变量 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ i. i. d, 同分布于 γ 。

设 $Y_0 = 0, Y_{n+1} = \max\{0, Y_n + \xi_{n+1} - 1\}, \forall n \geq 0$

求证 Y_n 是 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上的不可约马氏链, 且正常返。

(4) 设 $\{X_n\}_{n \geq 0}$ 是一个不可约非周期正常返的马氏链, 状态空间 S , 平稳分布记为 π 。若存在非负函数 $V: S \rightarrow [1, +\infty]$ 以及常数 $\lambda \in (0, 1)$ 和正数 $b < +\infty$, 使得对任意 $i \in S$, 有 $E[V(X_1)|X_0 = i] \leq \lambda V(i) + b$

证明: 存在非负常数 $M < +\infty, \rho \in (0, 1)$, 使得

$$E[V(X_n)|X_0 = i] \leq M V(i) \rho^n + \frac{b}{1 - \lambda}$$

(5) 求证对任意非负整数 L, N , 任意状态 i, j , 有如下不等式:

$$\sum_{n=L}^{n=N+L} p_{ij}(n) \leq \sum_{n=0}^{n=N} p_{jj}(n)$$

(6) 设 o 是定义在非负整数轴上的不可约马氏链的给定状态, 求证: 该马氏链常返, 如果下列方程存在解:

$$u_i \geq \sum_{j \neq o} p_{ij} u_j \quad \forall i \neq o$$

且 $u_i \rightarrow +\infty$ 当 $i \rightarrow +\infty$