

УДК 681.324

ЗАСТОСУВАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В. Трушевський^{*}, Г. Шинкаренко^{*}, Н. Щербина^{**}**

^{}Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000*

*^{**}Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79601*

*^{***}Політехніка Опольська, вул. Любошицька, 5, м. Ополь, 45043, Польща*

Розглянуто питання побудови рекурентної штучної нейронної мережі (ШНМ) для розв'язування нестационарних задач теплопровідності. За основу роботи ШНМ взято ідею мультисіткового ітераційного методу. Просторово-часову дискретизацію задачі виконано з застосуванням проекційно-сіткової схеми методу скінченних елементів (МСЕ). Цільовою функцією навчання побудованої ШНМ вибрано мінімізацію відхилення варіаційного рівняння задачі теплопровідності. Виконано порівняльний аналіз отриманих результатів з іншими числовими методами. На конкретних прикладах показано, що обчислення з використанням ШНМ дають змогу одержати розв'язки з меншою похибкою.

Ключові слова: нестационарна задача теплопровідності, мультисітковий метод, рекурентні штучні нейромережі, проекційно-сіткова схема МСЕ.

1. ВСТУП

З розвитком обчислювальної техніки та програмного забезпечення для розв'язування початково-крайових задач, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних зі сталими чи змінними коефіцієнтами, поряд із класичними методами відокремлення змінних, інтегральних перетворень тощо [1, 2, 8] зазвичай застосовують добре опрацьовані числові методи [7, 10, 12].

Один з поширених підходів до розв'язування нестационарних задач ґрунтується на редукції їх до послідовності стаціонарних задач, частковій дискретизації задачі за часом. Зазначимо, що процедура зведення задач диференціальних рівнянь з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь часто є корисною, тому що алгоритми розв'язування цих рівнянь ліпше розроблені, ніж алгоритми прямого розв'язування рівнянь з частинними похідними. Наприклад, у роботі [11] часткову дискретизацію нестационарної задачі теплопровідності виконують за часом з використанням методу Рунге й отримують послідовність стаціонарних задач, розв'язки яких будують чисельно. У [3] для наближеного розв'язування початково-крайової задачі теплопровідності застосовують метод колокації за часом. У [7] наведено різні скінченнорізницеві апроксимації для диференціального рівняння, що описує нестационарну теплопровідність однорідного тонкого стрижня та досліджено похибки апроксимації. У [4], зокрема, досліджено точність наближеного розв'язку нестационарної одновимірної задачі теплопровідності з використанням

запропонованих скінченних схем різного порядку точності за просторовою змінною x та часом t .

Розв'язки багатьох задач математичної фізики і механіки мають великі локальні градієнти розв'язку, що істотно ускладнює пошук достовірного, фізично коректного результату з використанням традиційних підходів [4, 13]. Як засвідчують результати досліджень, щоб достовірно визначити поведінку розв'язку в областях з великими градієнтами, необхідно застосовувати високоточні методи [15]. Зокрема, у [4] на конкретних прикладах з'ясовано, що класичні скінченно різницеві схеми низьких порядків точності незадовільно описують розв'язки задач з великими градієнтами. Натомість обчислювальні схеми високих порядків точності, наприклад, побудовані за допомогою узагальнених методів Рунге–Кутта, дають хороші наближення до точних розв'язків.

Ми розглянемо альтернативний підхід для наближеного розв'язування початково-крайової задачі теплопровідності, що ґрунтується на реалізації проекційно-сіткової схеми мультисітковим методом на рекурентній штучній нейронній мережі. Апробацію алгоритму виконаємо на задачі теплопровідності стрижня та дослідимо достовірність отримуваних результатів шляхом порівняння їх з розв'язками, що знайдені іншими методами [3, 10].

2. ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Основним об'єктом нашого дослідження буде початково-крайова задача теплопровідності вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти розподіл температури } u = u(x, t) \text{ такий, що} \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Lu(x, t) = f(x, t); \\ Lu := -\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u \quad \forall (x, t) \in (0, 1) \times (0, T]; \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]; \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

де $\mu = \mu(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ та $u_0 = u_0(x)$ – задані функції; деталі та фізичну інтерпретацію див. у [12].

3. ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Для побудови відповідної до (1) варіаційної задачі введемо простір допустимих функцій

$$V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(1) = 0\}$$

а також білінійні форми

$$m(u, v) := \int_0^1 u v dx \quad \forall u, v \in H = L^2(0, 1); \quad (2)$$

$$c(u, v) := \int_0^1 \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} v + \sigma u v \right) dx \quad \forall u, v \in V \quad (3)$$

та лінійний функціонал

$$\langle l, v \rangle := \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H. \quad (4)$$

Тоді варіаційне формулювання початково-крайової задачі (1) набуде вигляду

$$\begin{cases} \text{задано } u_0 \in V, l \in L^2(0, T; V'); \\ \text{знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ таку, що} \\ m(u'(t), v) - c(u(t), v) = \langle l(t), v \rangle \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (5)$$

Тут і далі ми вважаємо, що дані задачі (5) задовольняють такі умови регулярності та знаковизначеності:

$$\mu, \beta, \sigma \in L^\infty(0, 1), f \in L^2(0, T; H^{-1}(0, 1)), u_0 \in H; \quad (6)$$

$$\mu(x) \geq \mu_0 = \text{const} > 0, \quad \sigma(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } [0, 1]. \quad (7)$$

Можна переконатися (див. наприклад, [12]), що умови (6) та (7) гарантують існування єдиного розв'язку $u = u(x, t)$ еволюційної варіаційної задачі (5) такого, що $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$. Принагідно зазначимо, що в цьому випадку білінійна форма $c(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow R$ породжує нову (енергетичну) норму

$$\|v\|_V := \sqrt{c(u, v)} \quad \forall v \in V, \quad (8)$$

еквівалентну нормі $\|\cdot\|_{1, \Omega}$ простору Соболева $H^1(\Omega)$.

Нижче, на підставі міркувань, які наведено в [12], побудуємо проекційно-сіткову схему наближеного розв'язування еволюційної варіаційної задачі теплопровідності (5), яку пізніше візьмемо за основу структури нашої ШНМ.

4. НАПІВДИСКРЕТИЗАЦІЯ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ЗА ЧАСОМ

Поділимо відрізок часу $[0, T]$ на N_T частин $[t_j, t_{j+1}]$ сталої довжини $\Delta t = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, \dots, N_T$. Визначимо кускову апроксимацію $u_{\Delta t} = u_{\Delta t}(t) \in V$ температури $u = u(t) \in V$ у такий спосіб: на кожному кроці поділу часового відрізка шуканий розподіл температури будемо наближати лінійною функцією вигляду

$$\begin{cases} u_{\Delta t}(x, t) := u^j(x)[1 - \omega(t)] + u^{j+1}(x)\omega(t) \\ \equiv u^j(x) + \dot{u}^{j+1}(x)\Delta t\omega(t), \quad \dot{u}^{j+1}(x) := \frac{u^{j+1}(x) - u^j(x)}{\Delta t}, \\ \omega(t) := \frac{t - t_j}{\Delta t} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T - 1. \end{cases} \quad (9)$$

Згідно з означенням (9), намагаємося апроксимувати температуру неперервною в часі кусково-лінійною функцією, яку цілком описують її (поки що невідомі) вузлові значення $u^m \in V$ у моменти часу t_m . Якщо підставити у вираз (9)

значення $u^m = u(t_m)$, $m = 0, \dots, N_T$, то одержимо кусково-лінійний інтерполяційний поліном, який описує розподіл температури на проміжку часу $[0, T]$.

Лінійний функціонал варіаційної задачі (4) будемо апроксимувати кусково-сталим у часі функціоналом так:

$$l(t) \cong l_{\Delta t}(t) \equiv l_m := l(t_m + \frac{1}{2}\Delta t) \quad \forall t \in (t_m, t_{m+1}), \quad m = 0, \dots, N_T - 1. \quad (10)$$

Тепер, використовуючи проекційну схему, наведену в [12], побудуємо однокрокову рекурентну схему для інтегрування еволюційної задачі (5) в часі:

$$\begin{cases} \text{задано початковий розподіл } u^0 = u_0, \text{ значення} \\ \text{кроку інтегрування } \Delta t > 0 \text{ та параметра схеми } \theta \in [0, 1]; \\ \text{знайти пару } \{u^{j+1}, u^{j+1}\} \in V \times V \text{ таку, що} \\ m(\dot{u}^{j+1}, v) + \theta \Delta t c(\dot{u}^{j+1}, v) = \langle l_j, v \rangle - c(u^j, v) \quad \forall v \in V, \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t \dot{u}^{j+1}, \quad j = 0, \dots, N_T - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Ця схема на кожному кроці дає змогу обчислити спочатку значення швидкості зміни температури $\dot{u}^{j+1} \in V$ як розв'язок її варіаційного рівняння, а тоді одразу перерахувати також вузлові значення апроксимації $u^{j+1} \in V$. Тоді відповідно до означення (9) в разі потреби можна відшукати значення апроксимації температури у будь-якій точці часового проміжка $[0, T]$.

Для повноти викладу, відповідно до [12], зазначимо, що однокрокова рекурентна схема (11) є безумовно стійкою (щодо вибору величини кроку інтегрування Δt) для кожного $2\theta \geq 1$ і її похибка є величиною $O(\Delta t^2)$ за умови, що виконується рівність $2\theta = 1$. У разі $2\theta \neq 1, 2$ похибка вжитої тут схеми дискретизації в часі (11) є величиною $O(\Delta t)$.

5. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗАДАЧІ ЗА ПРОСТОРОВОЮ ЗМІННОЮ: МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Поділимо проміжок $[0, 1]$ на N однакових частин (скінченних елементів) (x_i, x_{i+1}) , $h = x_{i+1} - x_i = 1/N$, $i = 0, \dots, N$. На утвореній системі вузлів $\{x_i\}_{i=0}^N$ побудуємо систему кусково-лінійних функцій Куранта $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^N$ [6] з такими властивостями:

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 0, \dots, N. \quad (12)$$

З цієї системи виберемо функції $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{N-1}(x)$ за базис підпростору апроксимацій $V_h \subset V$, $\dim V_h = N - 1$. З огляду на однокрокову рекурентну схему (11) будемо шукати наближення до її розв'язку елементами із простору V_h такого вигляду:

$$\begin{cases} u^{j+1}(x) \equiv u_h^{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{N-1} q_n^{j+1} \varphi_n(x), \\ u^j(x) \equiv u_h^j = \sum_{n=1}^N w_n^j \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0,1], j = 0, \dots, N_T, \end{cases} \quad (13)$$

з невідомими коефіцієнтами $q^{j+1} = (q_1^{j+1}, \dots, q_{N-1}^{j+1}) \in R^{N-1}$ та $w^j = (w_1^j, \dots, w_{N-1}^j) \in R^{N-1}$, відповідно.

Якщо у варіаційне рівняння напівдискретизованої задачі (11) підставити розвинення (13) та по черзі приймати $v = \varphi_k$, $k = 1, \dots, N-1$, то отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$\sum_{n=1}^{N-1} \{ m(\varphi_n, \varphi_k) + \Delta t \theta c(\varphi_n, \varphi_k) \} q_n^{j+1} = \langle l_j, \varphi_k \rangle - \sum_{n=1}^{N-1} c(\varphi_n, \varphi_k) w_n^j, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (14)$$

або в матричному записі

$$[M + \Delta t \theta C] q^{j+1} = L_j - C w^j, \quad j = 0, \dots, N_T - 1. \quad (15)$$

У (15) уведено такі позначення:

$$M := \{ m(\varphi_n, \varphi_k) \}_{n,k=1}^{N-1}, \quad C := \{ c(\varphi_n, \varphi_k) \}_{n,k=1}^{N-1}, \quad L_j := \{ \langle l_j, \varphi_k \rangle \}_{k=1}^{N-1}. \quad (16)$$

Можна довести, що матриця

$$R(\Delta t, \theta) := M + \Delta t \theta C \quad (17)$$

системи рівнянь (15) є додатно визначеною і, отже, ця система однозначно розв'язувана відносно вектора q^{j+1} . Ця процедура здійснення, якщо ми попередньо визначимо правило обчислення вектора u^j у правій частині цієї системи; точніше, достатньо задати таке правило обчислення для u^0 .

З огляду на це застосуємо метод Гальоркіна до початкової умови варіаційної задачі (11), а саме: підставимо розвинення $u_h^0(x)$ до згаданої початкової умови і приймемо у ній $v = \varphi_k$, $k = 1, \dots, N-1$. Унаслідок нескладних перетворень отримаємо задачу лінійної алгебри вигляду

$$\begin{cases} \text{задано початковий розподіл } u_0 \in H; \\ \text{знайти вектор } w^0 = (w_1^0, \dots, w_{N-1}^0) \in R^{N-1} \text{ такий, що} \\ \sum_{n=1}^{N-1} m(\varphi_n, \varphi_k) w_n^0 = m(u_0, \varphi_k), \quad k = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (18)$$

Оскільки білінійна форма $m(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow R$ є скалярним добутком на просторі H , то задача (18) має єдиний розв'язок і, як наслідок, знаходимо функцію

$$u_h^0(x) = \sum_{n=1}^N w_n^0 \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0,1], \quad (19)$$

яка є ортогональною проекцією початкового розподілу температури u_0 на простір V_h .

6. ПОВНІСТЮ ДИСКРЕТИЗОВАНА ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

На підставі наведених вище міркувань сформулюємо наш головний інструмент наближеного розв'язування еволюційної варіаційної задачі теплопровідності (5). Таким інструментом є проекційно-сіткова схема, яка становить алгебричний запис повністю дискретизованої варіаційної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано вектор вузлових значень початкового розподілу} \\ \text{температури } w^0 = (w_1^0, \dots, w_{n-1}^0) \in R^{N-1}, \text{ величина} \\ \text{кроку інтегрування } \Delta t > 0 \text{ та параметра схеми } \theta \in [0, 1]; \\ \text{знайти пари векторів } \{q^{j+1}, w^{j+1}\} \in R^{N-1} \times R^{N-1} \text{ такі, що} \\ [M + \Delta t \theta C] q^{j+1} = L_j - C w^j, \\ w^{j+1} = w^j + \Delta t q^{j+1}, \quad j = 0, \dots, N_T - 1. \end{array} \right. \quad (20)$$

Наведемо розгорнутий запис системи лінійних алгебричних рівнянь зі схеми (20), елементи матриці й вектори правих частин якої обчислено за припущення, що коефіцієнти рівняння теплопровідності μ , β , σ є сталими. Як можна переконатися безпосередніми обчисленнями, які аналогічні до наведених у [12], у цьому випадку вони набувають такого вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0^{j+1} = 0, \\ \left[\frac{h}{6} + \Delta t \theta \left(-\frac{\mu}{h} - \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h}{6} \right) \right] q_{n-1}^{j+1} + 2 \left[\frac{h}{3} + \Delta t \theta \left(\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{3} \right) \right] q_n^{j+1} + \left[\frac{h}{6} + \Delta t \theta \left(-\frac{\mu}{h} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h}{6} \right) \right] q_{n+1}^{j+1} \\ = \frac{h}{6} [f(x_{n-1}, t_j + \Delta t/2) + 4f(x_n, t_j + \Delta t/2) + f(x_{n+1}, t_j + \Delta t/2)] \\ - \left[\left(-\frac{\mu}{h} - \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h}{6} \right) q_{n-1}^j + 2 \left(\frac{\mu}{h} + \frac{\sigma h}{3} \right) q_n^j + \left(-\frac{\mu}{h} + \frac{\beta}{2} + \frac{\sigma h}{6} \right) q_{n+1}^j \right], \quad n = 1, \dots, N-1, \\ q_N^{j+1} = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

Далі для числової реалізації схеми (21) побудуємо нейронну мережу, яка реалізує мультисітковий метод.

7. МУЛЬТИСІТКОВИЙ МЕТОД

Ідею мультисіткового методу опишемо на прикладі розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь (21), яку запишемо в операторному вигляді:

$$AQ = F, \quad (22)$$

де Q – невідомий вектор розподілу температур; F – відомий вектор правої частини системи (22).

Через Q_k позначимо наближене значення розв'язку на k -му кроці ітераційного процесу. Поточне значення похибки апроксимації v_k визначимо за формулою

$$v_k = Q - Q_k. \quad (23)$$

Відхил рівняння (22) визначимо у такий спосіб:

$$D_k = F - A Q_k. \quad (24)$$

Тоді з використанням формул (23) і (24) рівняння стосовно невідомого відхилу, що є еквівалентне (22), набуде вигляду

$$A v_k = D_k. \quad (25)$$

Розглянемо мультисіткові обчислення на послідовності сіток G^0, G^1 . Сітка G^0 має найменший крок дискретизації h_0 . Значення кроку дискретизації для сітки G^1 задамо так: $h_1 = 2h_0$. Перехід від сітки G^0 до сітки G^1 і навпаки виконують оператори рестрикції R_0^1 та пролонгації P_1^0 , відповідно [5]. Опишемо алгоритм мультисіткового методу на кожному кроці інтегрування в часі. Він складається з такої послідовності обчислень:

0) ініціалізація початкових значень невідомих векторів $Q_0^0 := 0, v_0^0 := 0, k := 0$;

1) згладжування на сітці G^0

$$Z := Q_k^0 - \rho(A^0 Q_k^0 - F_k^0), \text{ де } \rho - \text{коефіцієнт загасання [5];}$$

2) обчислення відхилу на густішій сітці $d := F_k^0 - A^0 Z$;

3) операція рестрикції на грубшу сітку $D := R_0^1 d$;

4) згладжування похибки на сітці G^1

$$v_k^1 := v_k^1 - \rho(A^1 v_k^1 - D);$$

5) пролонгація похибки на сітку G^0

$$v_k^0 := P_1^0 v_k^1;$$

6) уточнення розв'язку на сітці G^0

$$Q_{k+1}^0 := Z + v_k^0;$$

7) повторення пунктів 1–6 до виконання умови збіжності

$$\|Q_{k+1}^0 - Q_k^0\| < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

8. СТРУКТУРА НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

Реалізуємо описаний мультисітковий метод на рекурентній нейронній мережі. Розв'язок задачі шукатимемо на множині з двох сіток. Загальний випадок для довільної кількості сіток розглянуто в [9]. Через G^0 позначимо сітку вузлів з кроком h . Наступну сітку вузлів G^1 отримаємо з попередньої шляхом збільшення кроку дискретизації у два рази. Нейрони ототожнимо з вузлами сіткової області, у якій побудуємо наближений розв'язок крайової задачі. Архітектура нейронної мережі складається з двошарової рекурентної мережі (див. Рис. 1). Зазначимо, що мережі такого типу допускають зворотні зв'язки, тобто обчислення в нейроні поточного шару відбуваються з урахуванням попереднього стану цього ж шару [14]. Припустимо, що кількість точок дискретизації області початково-крайової задачі (1) за просторовою змінною становить $N+1 = 2n+1$ ($n \geq 0$), тоді перший шар має $2n+1$ нейронів, а другий – $n+1$.

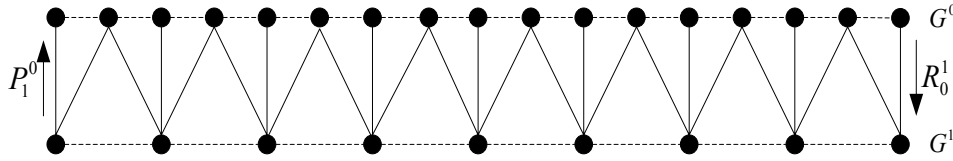


Рис. 1. Архітектура нейронної мережі.

Перехід від точнішої сітки до грубшої визначимо дією оператора рестрикції $R_0^1 : G^0 \rightarrow G^1$ у такий спосіб:

$$\begin{cases} q_0^1 = (R_0^1 Q^0)_0 = \frac{1}{2} \left(q_0^0 + \frac{q_1^0}{2} \right); \\ q_j^1 = (R_0^1 Q^0)_j = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{2j-1}^0}{2} + q_{2j}^0 + \frac{q_{2j+1}^0}{2} \right), j = 1, \dots, n-1; \\ q_n^1 = (R_0^1 Q^0)_n = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{2n-1}^0}{2} + q_{2n}^0 \right). \end{cases} \quad (26)$$

Оператор вузлової пролонгації $P_1^0 : G^1 \rightarrow G^0$ задамо у вигляді

$$\begin{cases} q_{2j}^0 = (P_1^0 Q^1)_{2j} = q_j^1, j = 0, \dots, n, \\ q_{2j+1}^0 = (P_1^0 Q^1)_{2j+1} = \frac{1}{2} (q_j^1 + q_{j+1}^1), j = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (27)$$

Нейрони першого шару мережі виконують дві функції: згладжування та уточнення розв'язку. Другий шар мережі забезпечує згладжування похибки розв'язку (див. алгоритм мультисіткового методу).

Лінійні оператори рестрикції (26) та пролонгації (27) визначають граф міжнейронних з'єднань і вагові коефіцієнти нейронної мережі [5]. Ми вважаємо, що ШНМ вже навчена. Зазначимо, що завдяки зміні коефіцієнтів операторів рестрикції та пролонгації можна проводити навчання ШНМ. У такому разі головним критерієм оцінки ефективності навчання ШНМ є цільова функція [14]. За допомогою цієї функції оцінюють, наскільки робота ШНМ відповідає бажаному результату. Цільовою функцією навчання рекурентної нейромережі є мінімізація норми відхилю $D_k^0 = F_k^0 - A^0 Q_k^0$.

Отже, з використанням побудованої нейронної мережі можемо відшукати швидкість зміни температури у заданий момент часу. Завдяки згладжуванню похибки розв'язку на грубшій сітці G^1 та уточнення розв'язку на точнішій сітці G^0 двошарова ШНМ дає змогу зменшити кількість арифметичних операцій, необхідних для визначення невідомого розподілу температур.

7. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Приклад 1. Розглянемо залежний від часу розподіл температур уздовж однорідного стрижня, на кінцях якого підтримується температура T_1 і T_2 ,

відповідно. Математичною моделлю цієї задачі є диференціальне рівняння параболічного типу [10]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (28)$$

за початкової умови

$$u(x, 0) = \sin \pi x + x \quad (29)$$

та граничних умов

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad (30)$$

де $u = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$ – безрозмірна величина температури.

Із застосуванням методу відокремлення змінних можна отримати аналітичний розв'язок початково-крайової задачі (28)–(30) вигляду

$$u = \exp(-\pi^2 t) \sin \pi x + x. \quad (31)$$

Надалі цей розв'язок використовуватимемо для порівняння з його апроксимаціями, знайденими нейромережовим методом.

Дослідимо вплив кількості нейронів на точність наближеного розв'язку початково-крайової задачі (28)–(30), знайденого нейромережовим методом з такими параметрами: $\rho = h^2/2$ ($h = 1/N$ – крок дискретизації за просторовою змінною), $\theta = 1/2$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\Delta t = h/2$.

У табл. 1 наведено результати обчислення безрозмірної температури u_H для різних значень параметра N – кількості нейронів першого шару мережі в різні моменти часу у вузлі $x = 0,5$. На підставі аналізу результатів табл. 1 можна зробити висновок, що зі збільшенням кількості нейронів наближений розв'язок u_H змагає до аналітичного u , обчисленого за формулою (31), з порядком збіжності p_h (відносно просторової змінної), близьким до другого. У випадку $N = 401$ абсолютна похибка апроксимації у цьому вузлі сітки становить $\varepsilon = 10^{-5}$.

Таблиця 1

Оцінка точності розв'язку

t	u_H , $N = 101$	u_H , $N = 201$	u_H , $N = 401$	u , формула (31)	p_h
0,02	1,320820	1,320860	1,320870	1,320870	2,00
0,04	1,173750	1,173810	1,173820	1,173830	2,00
0,06	1,053030	1,053100	1,053120	1,053120	1,81
0,08	0,953938	0,954015	0,954036	0,954041	1,88
0,10	0,872603	0,872681	0,872703	0,872708	1,82
0,12	0,805841	0,805918	0,805939	0,805944	1,88
0,14	0,751041	0,751115	0,751135	0,751140	1,87
0,16	0,706060	0,706129	0,706148	0,706153	1,85
0,18	0,669139	0,669203	0,669220	0,669225	1,93

0,20	0,638833	0,638891	0,638907	0,638911	2,07
------	----------	----------	----------	----------	------

Наведемо результати цієї задачі у різні моменти часу з кроком $\Delta t = 0,1$. Еволюцію в часі температури $u(x, t)$ в точці стрижня $x = 0,5$ відображено в табл. 2.

На підставі аналізу результатів, наведених у табл. 2, можна зробити висновок, що з часом похибка розв'язку прямує до нуля.

Таблиця 2

Еволюція охолодження стрижня в точці $x = 0,5$

t	$u_H, N = 401$	u	$(u - u_H) \times 10^8$
0,1	0,87270278	0,87270784	506,0
0,2	0,63890702	0,63891113	411,0
0,3	0,55177091	0,55177327	236,0
0,4	0,51929511	0,51929630	119,0
0,5	0,50719133	0,50719188	55,0
0,6	0,50268022	0,50268047	25,0
0,7	0,50099892	0,50099903	11,0
0,8	0,50037230	0,50037235	5,0
0,9	0,50013876	0,50013878	2,0

Приклад 2. Розглянемо сформульовану вище нестационарну задачу теплопровідності стрижня, що зводиться до розв'язання рівняння (28), за таких початкової та крайових умов [3]:

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 0. \quad (32)$$

Ефективність використовуваного методу засвідчена порівнянням результатів, отриманих на його підставі, з точним розв'язком u [3] цієї тестової задачі (табл. 3).

Таблиця 3

Порівняння точності розв'язків

x	$t = 0,1$			$t = 0,2$		
	u	$u_H, N = 201$	$u_H, N = 401$	u	$u_H, N = 201$	$u_H, N = 401$
0,1	0,0689	0,06954	0,06799	0,1542	0,15482	0,15318
0,2	0,0458	0,04669	0,04546	0,1168	0,11774	0,11634
0,3	0,0300	0,03041	0,02947	0,0877	0,08814	0,08697
0,4	0,0192	0,01919	0,01849	0,0648	0,06485	0,06388
0,5	0,0095	0,01170	0,01121	0,0444	0,04672	0,04595
0,6	0,0066	0,00688	0,00655	0,0324	0,03272	0,03213
0,7	0,0038	0,00387	0,00366	0,0217	0,02189	0,02146
0,8	0,0020	0,00202	0,00190	0,0133	0,01336	0,01308
0,9	0,0008	0,00086	0,00080	0,0063	0,00631	0,00618

$\max_{0.1 \leq x \leq 0.9} u - u_H $	0,00220	0,00171	$\max \Delta$	0,00232	0,00155
$\frac{1}{9} \sum_{0.1 \leq x \leq 0.9} u - u_H $	0,00051	0,00050	$\Delta_{\text{середнє}}$	0,00055	0,00061

Таблиця 4

Результати обчислень методом колокації [3, с. 75]

x	$t = 0,1$			$t = 0,2$		
	$u^{(a)}$	$u^{(1)}$	$u^{(2)}$	$u^{(a)}$	$u^{(1)}$	$u^{(2)}$
0,1	0,0689	0,0702	0,0646	0,1542	0,1543	0,1560
0,2	0,0458	0,0482	0,0418	0,1168	0,1174	0,1181
0,3	0,0300	0,0324	0,0270	0,0877	0,0880	0,0873
0,4	0,0192	0,0212	0,0174	0,0648	0,0649	0,0632
0,5	0,0095	0,0134	0,0112	0,0444	0,0470	0,0449
0,6	0,0066	0,0082	0,0071	0,0324	0,0331	0,0311
0,7	0,0038	0,0048	0,0044	0,0217	0,0223	0,0206
0,8	0,0020	0,0025	0,0025	0,0133	0,0137	0,0125
0,9	0,0008	0,0011	0,0012	0,0063	0,0065	0,0059
$\max \Delta$		0,0039	0,0043	$\max \Delta$	0,0026	0,0018
$\Delta_{\text{ср}}$		0,0017	0,0018	$\Delta_{\text{ср}}$	0,0006	0,0010

На підставі порівняння обчислювальних результатів з використанням нейромережевого методу, наведених у табл. 3 та знайдених методом колокації за часом, зокрема, для вибраних базисних функцій $v_k(t)$ при $t = 0,1$ і $t = 0,2$ [3] (табл. 4), можна зробити висновок про високу досягну точність досліджуваного у цій роботі алгоритму: мультисітковий метод на ШНМ зменшує максимальну похибку розв'язку ($\max \Delta$) більше ніж удвічі, а середню похибку ($\Delta_{\text{середнє}}$) – більше ніж утричі. У табл. 4 через $u^{(a)}$ позначено аналітичний розв'язок початково-крайової задачі (28), (32), а через $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ – наближені розв'язки, знайдені методом колокації з використанням двох точок колокації за часом, з базисними функціями

$$v_k(t) = t e^{-kt} \text{ і } v_k(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_{k-1}), \\ \frac{1}{h^2} (t - t_{k-1})^2 e^{-(t-t_{k-1})}, & t \in [t_{k-1}, T] \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n, \text{ відповідно.}$$

За такого підходу розв'язування нестационарної задачі теплопровідності суттєвим є вибір базисних функцій у наближеному поданні розв'язку [3].

Таблиця 5

 Порівняння результатів тестової задачі (28)–(30) в точці $x = 0,5$ за різними методами

t	Точний розв'язок, формула (31)	Спектральний метод, [10, табл. 5.2]		Метод Гальоркіна, [10, табл. 1.7]		Метод ШНМ, $N = 401$
		$n = 5, u_a$	u_b	$n = 5, u_a$	u_b	
0,1	0,872708	0,8807	0,8828	0,87089	0,87089	0,872703
0,2	0,638911	0,6399	0,6420	0,63756	0,63756	0,638907

Примітка: n – кількість пробних функцій у наближеному наведенні розв'язку за зазначеними методами.

Порівняння результатів на основі ШНМ тестової початково-крайової задачі (28)–(30) з результатами, які отримані деякими класичними методами (табл. 5), також є ознакою його переваги.

Отже, отримані результати для розглянутих задач з використанням мультисіткового методу на основі рекурентних штучних нейронних мереж свідчать про обчислювальну ефективність методу.

8. ВИСНОВКИ

Отже, для розв'язування нестационарної задачі теплопровідності побудовано двошарову рекурентну ШНМ, яка реалізує проекційно-сіткову схему мультисітковим методом. З огляду на варіаційне формулювання цієї задачі для її дискретизації було застосовано проекційно-сіткову схему [2]. Внаслідок дискретизації за часовою змінною отримано однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі. Дискретизацію задачі теплопровідності за просторовою змінною виконано з використанням кусково-лінійних апроксимацій у вигляді функцій Куранта. Повністю дискретизовану задачу зредуковано до системи лінійних алгебричних рівнянь. Для її розв'язування застосовано рекурентну двошарову нейронну мережу. Вважали, що отримана ШНМ вже є навченою. Завдяки модифікації коефіцієнтів операторів рестрикції та пролонгації можна проводити навчання мережі. За критерій навчання ШНМ вибрано мінімізацію відхилення варіаційного рівняння задачі теплопровідності (5). У кожен момент часу нейронна мережа розв'язує систему лінійних алгебричних рівнянь (21). Перехід на наступний часовий шар відбувається за допомогою однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі (20).

Отримані числові результати свідчать про ефективність застосування побудованої ШНМ до розв'язування задач теплопровідності. Покращувати точність розв'язку можна завдяки збільшенню кількості нейронів та модифікації вагових коефіцієнтів мережі. Зазначимо, що побудована ШНМ дає змогу зменшити кількість арифметичних операцій необхідних для досягнення шуканого розв'язку внаслідок його уточнення на густішій сітці та згладжування на грубішій сітці.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Беляев Н. М., Рядко А. А.* Методы теплопроводности: Учебное пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 1. М.: Высш. шк., 1982. 327 с.
2. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. К.: Наук. думка, 1976. 282 с.
3. *Людкевич Й. В., Хапко Р. С., Олійник Т. М., Падалка М. В.* Метод колокації в нестационарних задачах математичної фізики // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. С. 72–76.
4. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Численное интегрирование начально-краевых задач с большими градиентами решения обобщенными методами Рунге Кутты // Мат. методы та фіз.-мех. поля. 2004. Т. 47. № 1. С. 43–62.
5. *Новотарський М. А., Нестеренко Б. Б.* Штучні нейронні мережі: обчислення // Праці Ін-ту математики НАН України. 2004. Т. 51–408 с.
6. *Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А.* Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці: Навч. посібник. Львів: Світ поліграфії, 1998. 184 с.

7. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. Трушевський В. М., Щербина Н. М. Наближене розв'язування лінійних крайових задач мультисітковим ітераційним нейронним методом. Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. Математика та інформатика. 2006. Вип. 11. С. 82–98.
10. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
11. Ханко Р. О. О численном решении внешних задач нестационарной теплопроводности методом интегральных уравнений // Обчисл. і прикл. математика. 1997. Вип. 82. С. 90–96.
12. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991. 88 с.
13. Щербина Н. М. Застосування числово-аналітичного методу до крайових задач з примезовим шаром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. Т. 47 № 1. С. 12–16.
14. Haykin S. Neural Networks: A comprehensive foundation, Prentice-Hall, New Jersey, 1999. 842 p.
15. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. Numerical Methods for Singular Singularly Perturbed Differential Equations. Berlin: Springer, 1995. 348 p.

APPLICATION OF NEURAL NETWORKS FOR SOLVING OF HEAT CONDUCTIVITY PROBLEMS

V. Trushevskyy*, G. Shynkarenko^{*,***}, N. Shcherbyna^{**}

**Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska str, 1, Lviv, 79000*

***Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS Ukraine,
Naukova str, 3-b, Lviv, 79601*

****Politechnika Opolska, Luboszycka 5, Opole, 45036, Polska*

This article considers the application of a recurrent artificial neural network for solving of non-stationary heat conductivity problems. A recurrent neural network has been constructed for implementation of the multi-grid method. Space-time discretization of a problem was created by use of the projective-grid scheme of a Finite Element Method (FEM). The purpose of the neural network training is to minimize the discrepancy of variational equation, which describes the problem. A comparative research neural network results with other methods was conducted. On the concrete examples it has been shown, that the results of calculation using new approach give good approximations to exact solutions.

Key words: non-stationary heat conductivity problem, multi-grid method, recurrent artificial neural network, projective-grid scheme of FEM.

*Стаття надійшла до редколегії 23.08.2007
Прийнята до друку 12.09.2007*