ЗВІТ

Вступ

Сьогодні метод скінченних елементів (finite element method) є одним з найпоширеніших методів числового розв'язування задач математичної фізики та механіки суцільного середовища. Він ґрунтується на варіаційному формулюванні крайової задачі та дискретизації Рітца–Гальоркіна з використанням поліноміальних базисних функцій, а саме – функцій Куранта, що зрештою приводить до системи лінійних алгебричних рівнянь з тридіагональною матрицею, до якої можна легко застосувати метод прогонки та відшукати значення розв'язку у вузлах вибраної сітки, які можуть бути розподілені як рівномірно, так і – у деяких випадках для поліпшення точності – нерівномірно.

Постановка задачі

З використанням методу скінченних елементів знайти кусково-лінійне наближення до розв'язку стаціонарної крайової задачі конвекції-дифузії-реакції:

$$\begin{cases} \text{Задано коефіцієнт дифузії } \mu = \mu(x), \\ \text{"вектор" конвективного перенесення } \beta = \beta(x), \\ \text{коефіцієнт біохімічного розпаду } \sigma = \sigma(x), \\ \text{інтенсивність джерел домішки } f = f(x) \text{ та} \\ \text{константи } u_0,\, u_1 \in \mathbb{R}. \\ \text{Знайти густину домішки } u = u(x) \text{ таку, що} \\ -\dfrac{d}{dx}\left(\mu \dfrac{du}{dx}\right) + \beta \dfrac{du}{dx} + \sigma u = f \quad \text{на } \ \Omega = (0,1), \\ u(0) = u_0, \\ \dfrac{du}{dx}(1) = u_1. \end{cases}$$

(1) крайова з-ча

Для зручності введемо заміну:

$u = u_0 + \tilde{u}$

Тоді отримаємо

$$\begin{cases} -(\mu\tilde{u}')' + \beta\tilde{u}' + \sigma\tilde{u} = f_1\,, \\ \tilde{u}(0) = 0 \\ \tilde{u}'(1) = u_1 \end{cases} \qquad f_1 = f - u_0\sigma$$

(2) варіаційна з-ча

з методу Гальоркіна

Варіаційне формулювання задачі

Н_простір

$$
\begin{cases}
\text{знайти } u \in V = \{v \in H^1(0,1) \mid v(0) = 0\} \text{ таку, що} \\
a(u,v) = \langle l, v \rangle, v \in V \\
a(u,v) = \int_0^1 [\mu u'v' + \beta u'v + \sigma uv]dx \\
\langle l, v \rangle = \int_0^1 f_1 v dx + u_1 \mu(1) v(1)
\end{cases}
$$

нев. від

/ · v

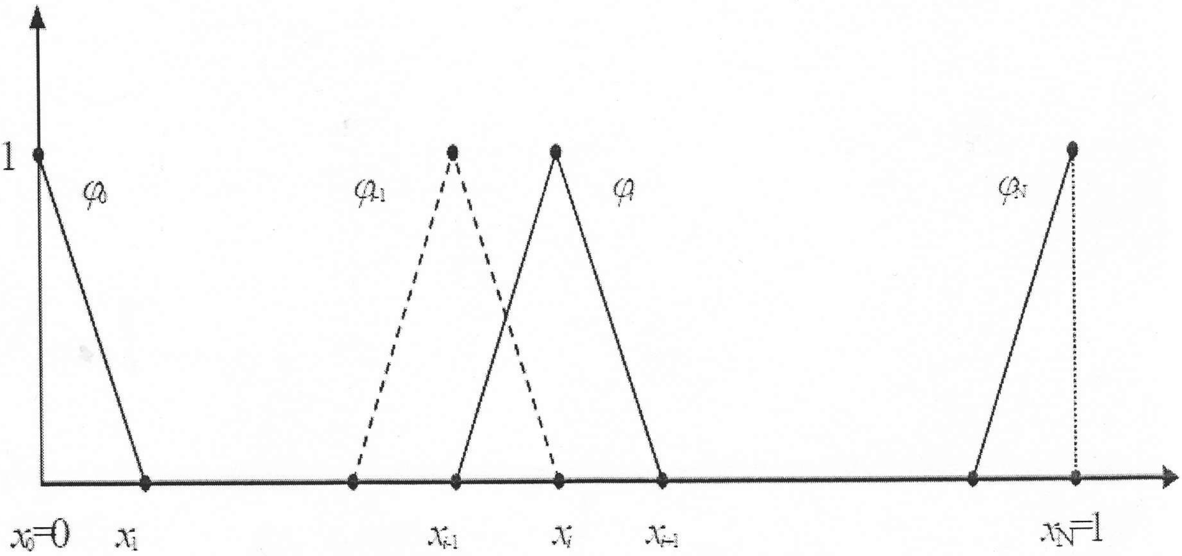
Алгоритм розв'язування

1. Переформулювання крайової задачі у варіаційну.
2. Використання методу Гальоркіна.
3. За базисні функції вибираємо функцій Куранта на відрізку [0,1] $\{\varphi_i\}$, $i = 0 \ldots N$;

$$
\varphi_i(x) = \left\{
\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{ll}
0, & 0 \le x < x_{i-1} \\
\dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} < x \le x_i
\end{array}\right\} i = N \\
\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i < x \le x_{i+1} \\
0, & x_{i+1} < x \le 1
\end{array}\right\} i = 0
\end{array}
\right\} i = \overline{1, N-1}.
$$

Де h_i – відповідний крок, тобто відстань між x_i і x_{i+1}.

Графік:



Примітка: у базис не включаємо функцію φ_0, оскільки з умови, накладеної на простір V, $v(0) = 0$, а $\varphi_0(0) = 1$.

4. Наступний крок – обчислення інтегралів та формування матриці, з якої зможемо знайти коефіцієнти q_i.
Введемо позначення: $Aq = L$:

$$A = \begin{pmatrix} a(\varphi_{1,}\varphi_1) & a(\varphi_{1,}\varphi_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a(\varphi_{2,}\varphi_1) & a(\varphi_{2,}\varphi_2) & a(\varphi_{2,}\varphi_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(\varphi_{3,}\varphi_2) & a(\varphi_{3,}\varphi_3) & a(\varphi_{3,}\varphi_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(\varphi_{N-1,}\varphi_{N-2}) & a(\varphi_{N-1,}\varphi_{N-1}) & a(\varphi_{N-1,}\varphi_N) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a(\varphi_{N,}\varphi_{N-1}) & a(\varphi_{N,}\varphi_N) \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} < l, \varphi_1 > \\ < l, \varphi_2 > \\ \dots \\ < l, \varphi_{N-1} > \\ < l, \varphi_N > \end{pmatrix}$$

де

$$a(\varphi_{i,}\varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\mu\varphi_i{}'\varphi_i{}' + \beta\varphi_i{}'\varphi_i + \sigma\varphi_i\varphi_i]dx$$

$$a(\varphi_{N,}\varphi_N) = \int_{x_{N-1}}^{x_N} [\mu\varphi_N{}'\varphi_N{}' + \beta\varphi_N{}'\varphi_N + \sigma\varphi_N\varphi_N]dx$$

$$a(\varphi_{i-1,}\varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\mu\varphi_{i-1}{}'\varphi_i{}' + \beta\varphi_{i-1}{}'\varphi_i + \sigma\varphi_{i-1}\varphi_i]dx$$

$$a(\varphi_{i,}\varphi_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\mu\varphi_i{}'\varphi_{i+1}{}' + \beta\varphi_i{}'\varphi_{i+1} + \sigma\varphi_i\varphi_{i+1}]dx$$

$$< l, \varphi_{i,} >= \int_0^1 f_1\varphi_i dx + u_1\mu(1)\varphi_i(1)$$

До цієї матриці завдяки її тридіагональності можна застосувати метод прогонки, суть якого полягає в такому:

Система має такий вигляд:

$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$,

де $a_1 = 0$ та $c_n = 0$. В матричній формі це записується так:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Розв'язок проводиться в два кроки, як і в методі Гауса, прямому, та зворотному. В прямому ході ми обчислюємо:

$$c'_1 = \frac{c_1}{b_1};\ c'_i = \frac{c_i}{b_i - c'_{i-1} a_i},\ i = \overline{2, n-1}$$

та

$$d'_1 = \frac{d_1}{b_1};\ d'_i = \frac{d_i - d'_{i-1} a_i}{b_i - c'_{i-1} a_i},\ i = \overline{2, n}$$

Тепер розв'язок знаходимо зворотнім ходом:

$$x_n = d'_n$$

$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1};\ i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

5. Знайшовши коефіцієнти, можна з легкістю знайти наше шукане наближення u_h за формулою

$$u_h(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i$$

Аналіз результатів, таблиці, графіки

Для зручності перевірки програми візьмемо такі дані:

$\mu = 1$

$\beta = 0$

$\sigma = 0$

$u_0 = 0$

$u_1 = \cos(1)$

$f = \sin(x)$

Легко побачити, що за такого «розкладу» шуканою функцією $u(x)$ буде функція $\sin(x)$.

Для демонстрації роботи наведено такі приклади.

Приклад 1.

Рівномірні вузли, кількість вузлів – 3, $h = 0.5$

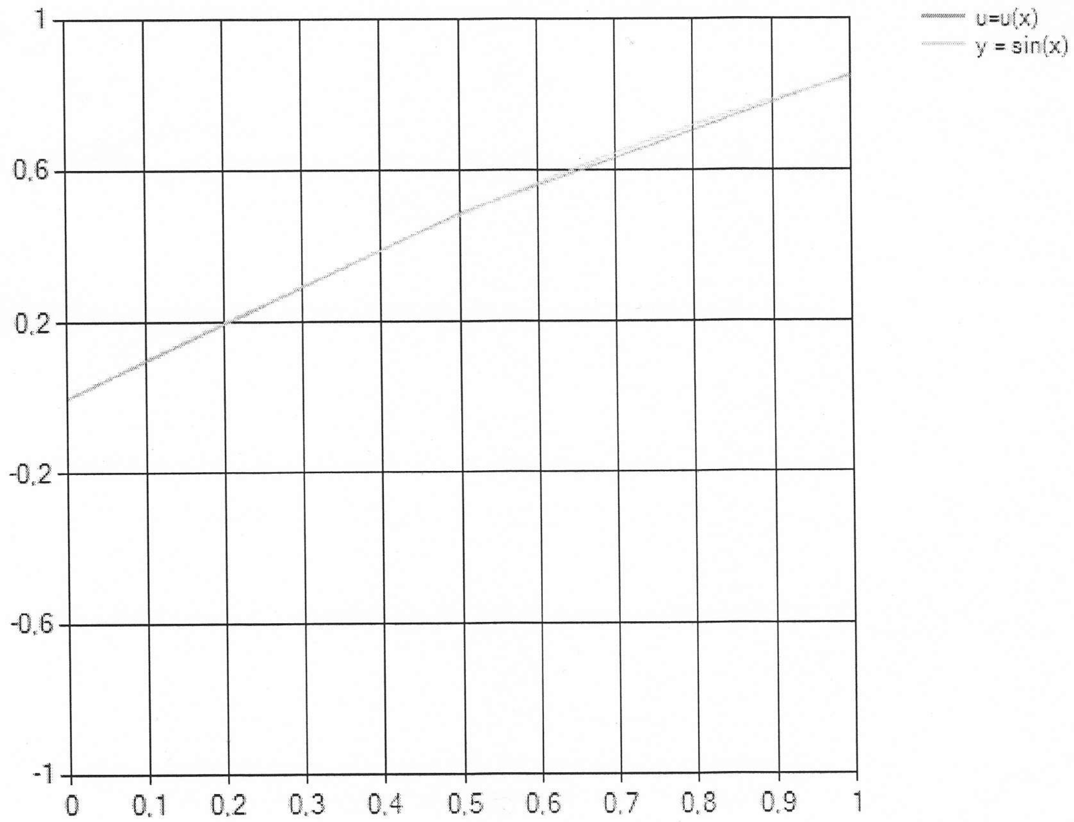
$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 3.9990234375 & -1.9990234375 \\ -1.9990234375 & 1.9990234375 \end{pmatrix}$$

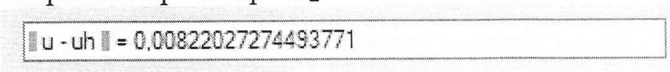
$$L = \begin{pmatrix} 0.24804297216111068 \\ 0.7240918586004953 \end{pmatrix}$$

Звідси

$$q = \begin{pmatrix} 0.486067415380803 \\ 0.84829021128061111 \end{pmatrix}$$

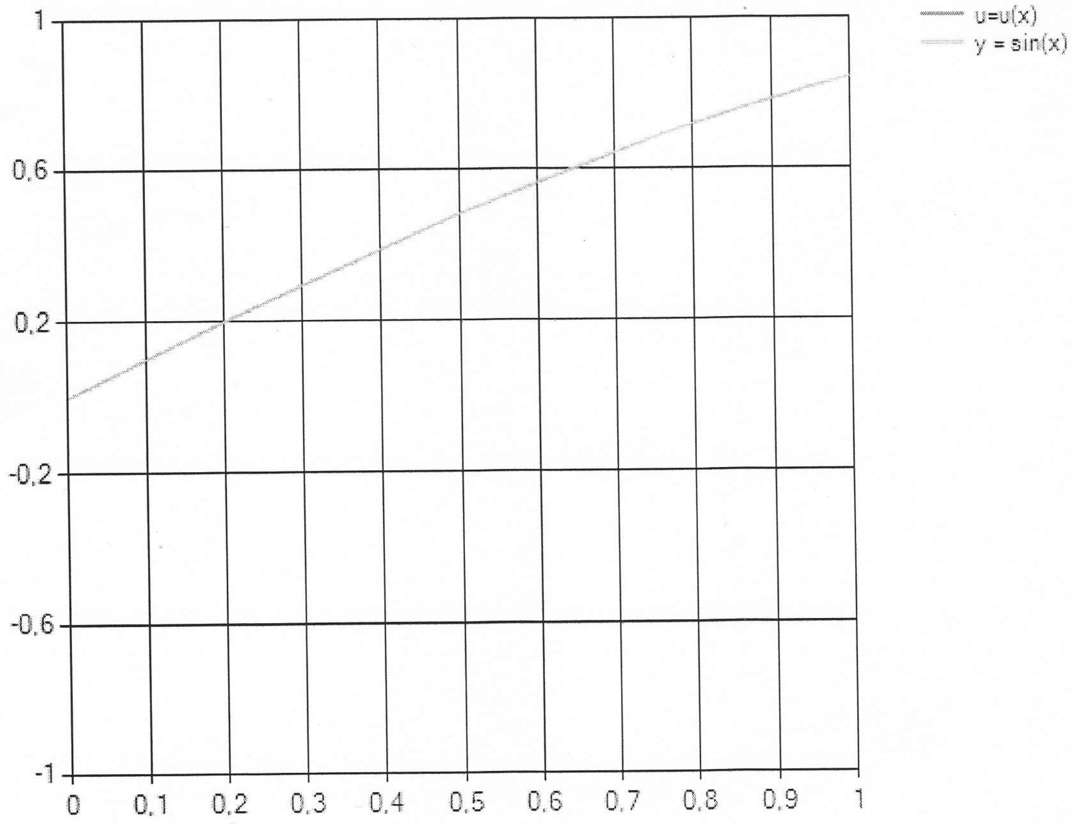


Норма в просторі L_2



Приклад 2.

50 рівномірних вузлів



(через громіздкість матриці не наводимо)

‖u - uh‖ = 0,000945964710282589

Приклад 3.

Нерівномірні вузли

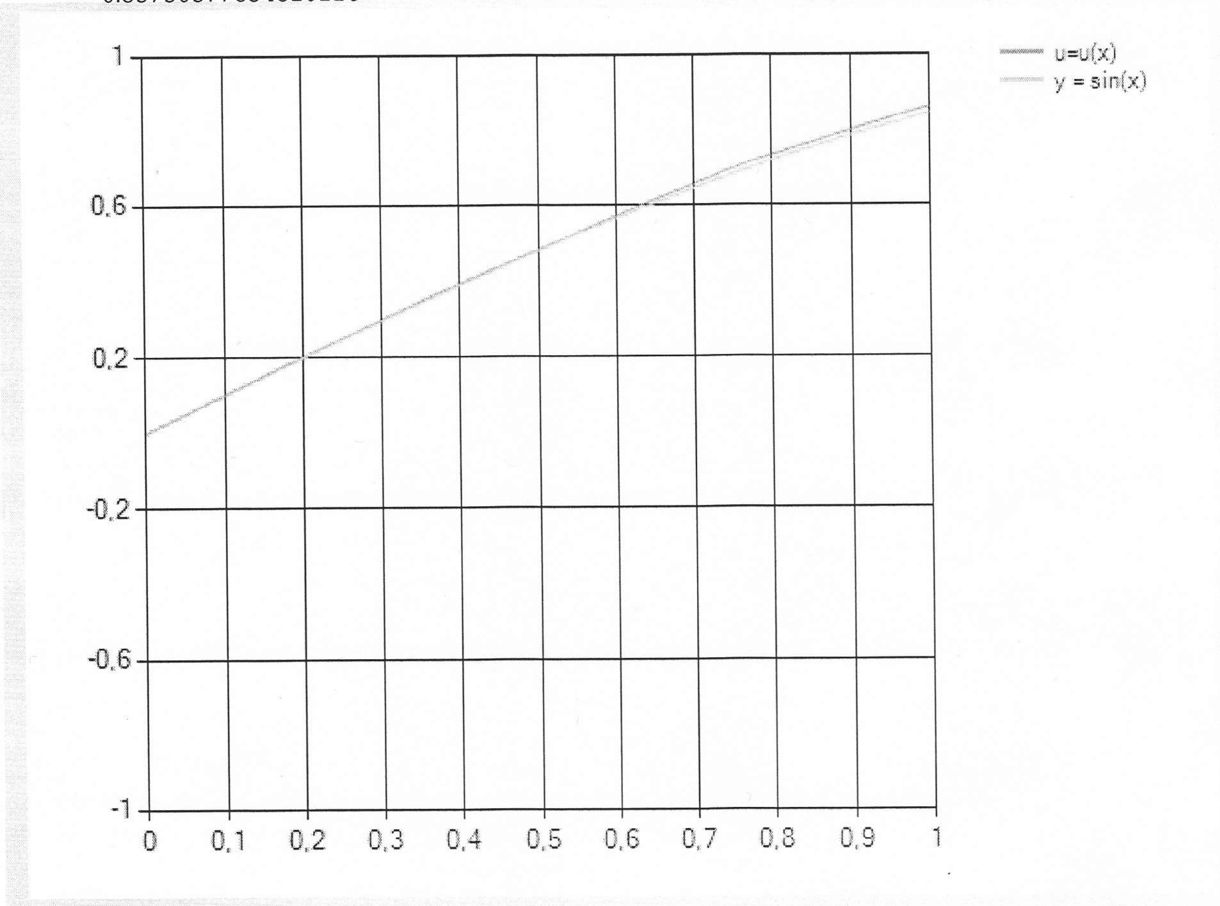
$x_0 = 0$, $x_1 = 0.05$, $x_2 = 0.17$, $x_3 = 0.37$, $x_4 = 0.64$, $x_5 = 0.67$, $x_6 = 0.71$, $x_7 = 0.76$, $x_8 = 0.95$, $x_9 = 1$

$h_0=0.05$, $h_1=0.12$, $h_2=0.2$, $h_3=0.27$, $h_4=0.03$, $h_5=0.04$, $h_6=0.05$, $h_7=0.19$, $h_8=0.01$

$$A = \begin{pmatrix} 28.33014848 & -8.3328247 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8.3328247 & 13.33235677 & -4.99938964 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.99938964 & 8.7016496 & -3.70279947 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.70279947 & 37.03715477 & -33.3328247 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33.3328247 & 58.33255449 & -24.999237 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24.99923706 & 44.999691 & -19.99938964 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19.99938964 & 25.25548065 & -5.26251541 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.26251541 & 25.2633344 & -19.999389 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19.99938964 & 19.9993896 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.0052118466359436337 \\ 0.038106252442685562 \\ 0.087341016719171827 \\ 0.065659724639538619 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1583734474369228 \\ 0.098696069864837033 \\ 0.56110970481414812 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 0.0508101419094821 \\ 0.17212014756440155 \\ 0.36669855429976933 \\ 0.60577021326079317 \\ 0.63038564509772432 \\ 0.66321914651737479 \\ 0.70429631759372813 \\ 0.82944943509590285 \\ 0.85750577654820226 \end{pmatrix}$$



‖u - uh‖ = 0,00926301372716682

Висновки

Отже, завдяки методу скінченних елементів можна порівняно просто відшукати наближення нашої функції. Для цього потрібно використати квадратурні формули для обчислення інтегралів і метод для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. У програмі використано квадратурні формули трапеції, а також квадратурні формули Гауса, щоб забезпечити відносну точність правих частин. Щодо методу для обчислення СЛАР, то тут однозначно вибір падає на метод прогонки, що доволі простий у реалізації, а також ідеально підходить для матриці тридіагонального вигляду. Згущуючи сітку вузлів, можна зробити розв'язок точнішим, хоч це і потребуватиме більших часових ресурсів. Динаміку зміни похибки за тієї чи іншої сітки вузлів можна відстежувати завдяки обчисленню норми похибки в просторі $L2$.

Нехай є диф. р-ння з деякими крайовими умовами I роду

$$LU = f$$
$$u(0) = u_0$$
$$u(l) = u_1$$

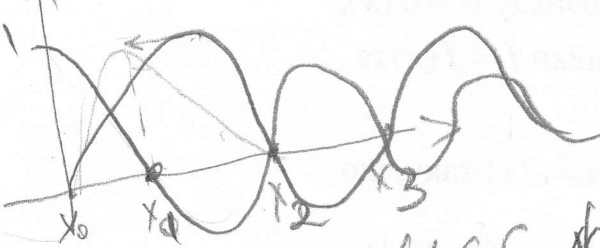
ст 12.

Наближений розв'язок буде =

$$u(x) \approx \varphi_0(x) + \sum \varphi_k(x) c$$

φ_0 - деяка непер. ф-ція, що задов. гр. крайові умови

φ_k - ЛНФ, які вуз. на (a,b) ... мають бути ...



Збірка з анг. МСЕ функції φ_i слід вибирати у такий спосіб щоб кожне з них = 1 у вузлі з одним номером та у решті = 0.