

# Laborator 2 & 3: Greedy și Programare Dinamică

---

## Obiective laborator

---

- Înțelegerea noțiunilor de bază legate de tehnicile greedy și programare dinamică;
- Însușirea abilităților de analiză în vederea conceperii algoritmilor de tip greedy și programare dinamică pentru rezolvarea diferitelor probleme;
- Însușirea abilităților de implementare a algoritmilor bazați pe greedy și programare dinamică.

## Importanță – aplicații practice

---

În general tehnicile de tip Greedy sau Programare Dinamică sunt folosite pentru rezolvarea problemelor de optimizare. Acestea pot adresa probleme în sine sau pot fi subprobleme dintr-un algoritm mai mare. De exemplu, algoritmul Dijkstra pentru determinarea drumului minim pe un graf alege la fiecare pas un nod nou urmărind algoritmul greedy.

Exista însă probleme care ne pot induce în eroare. Astfel, există probleme în care urmărind criteriul Greedy nu ajungem la soluția optimă. Este foarte important să identificăm cazurile când se poate aplica Greedy și cazurile când este nevoie de altceva. Alteori această soluție neoptimă este o aproximare suficientă pentru ce avem nevoie. Problemele NP-complete necesită multă putere de calcul pentru a găsi optimul absolut. Pentru a optimiza aceste calcule mulți algoritmi folosesc decizii Greedy și găsesc un optim foarte aproape de cel absolut.

Programarea dinamică are un câmp larg de aplicare, aici amintind genetica (sequence alignment), teoria grafurilor (algoritmul Floyd-Warshall), metode de antrenare a rețelelor neurale (Adaptive Critic training strategy), limbaje formale și automate (algoritmul Cocke-Younger-Kasami, care analizează dacă și în ce fel un șir poate fi generat de o gramatică independent de context), implementarea bazelor de date (algoritmul Selinger pentru optimizarea interogării relaționale) etc.

## Prezentarea generală a problemei

---

### Greedy

---

“greedy” = “lacom”. Algoritmii de tip greedy vor să construiască într-un mod cât mai rapid soluția unei probleme. Ei se caracterizează prin luarea unor decizii rapide care duc la găsirea unei soluții potențiale a problemei. Nu întotdeauna asemenea decizii rapide duc la o soluție optimă; astfel ne vom concentra atenția pe identificarea acelor anumite tipuri de probleme pentru care se pot obține soluții optime.

Algoritmii greedy se numără printre cei mai direcți algoritmi posibili. Ideea de bază este simplă: având o problema de optimizare, de calcul al unui cost minim sau maxim, se va alege la fiecare pas decizia cea mai favorabilă, fără a evalua global eficiența soluției. În general există mai multe soluții posibile ale problemei. Dintre acestea se pot selecta doar anumite soluții optime, conform unor anumite criterii. Scopul este de a găsi una dintre acestea sau dacă nu este posibil, atunci o soluție cât mai apropiată, conform criteriului optimal impus.

Trebuie înțeles faptul că rezultatul obținut este optim doar dacă un optim local conduce la un optim global. În cazul în care deciziile de la un pas influențează lista de decizii de la pasul următor, este posibilă obținerea unei valori neoptimale. În astfel de cazuri, pentru găsirea unui optim absolut se ajunge la soluții supra-polinomiale. De aceea, dacă se optează pentru o astfel de soluție, algoritmul

trebuie însoțit de o demonstrație de corectitudine. Descrierea formală a unui algoritm greedy este următoarea:

```
function greedy(C)
// C este mulțimea candidaților
// în S construim soluția
S ← ∅
while not solutie(C) and C ≠ ∅
x ← un element din C care minimizează/maximizează select(x)
C ← C \ {x}
if fezabil(S ∪ {x}) then S ← S ∪ {x}
return S
```

Este ușor de înțeles acum de ce acest algoritm se numește "greedy": la fiecare pas se alege cel mai bun candidat de la momentul respectiv, fără a studia alternativele disponibile în moment respectiv și viabilitatea acestora în timp.

Dacă un candidat este inclus în soluție, rămâne acolo, fără a putea fi modificat, iar dacă este exclus din soluție, nu va mai putea fi niciodată selectat drept un potențial candidat.

## Exemplu de problema rezolvabilă cu tehnica Greedy

Fie un șir de  $N$  numere pentru care se cere determinarea unui subșir de numere cu suma maximă. Un subșir al unui șir este format din caractere (nu neapărat consecutive) ale șirului respectiv, în ordinea în care acestea apar în șir.

Pentru numerele 1 -5 6 2 -2 4 răspunsul este 1 6 2 4 (suma 13).

Se observa ca tot ce avem de făcut este sa verificam fiecare număr dacă este pozitiv sau nu. În cazul pozitiv, îl introducem în subșirul soluție.

## Problema cuielor

Fie  $N$  scânduri de lemn, descrise ca niște intervale închise cu capete reale. Găsiți o mulțime minimă de cuie astfel încât fiecare scândură să fie bătută de cel puțin un cui. Se cere poziția cuielor. Formulată matematic: găsiți o mulțime de puncte de cardinal minim  $M$  astfel încât pentru orice interval  $[a_i, b_i]$  din cele  $N$ , să existe un punct  $x$  din  $M$  care să aparțină intervalului  $[a_i, b_i]$ . Complexitate:  $O(N \log N)$   
Exemplu:

- intrare:  $N = 5$ , intervalele:  $[0, 2]$ ,  $[1, 7]$ ,  $[2, 6]$ ,  $[5, 14]$ ,  $[8, 16]$
- ieșire:  $M = \{2, 14\}$
- explicație: punctul 2 se afla în primele 3 intervale, iar punctul 14 în ultimele 2

Soluție: Se observa că dacă  $x$  este un punct din  $M$  care nu este capăt dreapta al nici unui interval, o translație a lui  $x$  la dreapta care îl duce în capătul dreapta cel mai apropiat nu va schimba intervalele care conțin punctul. Prin urmare, exista o mulțime de cardinal minim  $M$  pentru care toate punctele  $x$  sunt capete dreapta.

Astfel, vom crea mulțimea  $M$  folosind numai capete dreapta în felul următor:

- cât timp au mai rămas intervale nemarcate:
- selectăm cel mai mic capăt dreapta,  $B_{\min}$ ; acesta trebuie să fie în  $M$ , deoarece este singurul punct care se afla în interiorul intervalului care se termină în  $B_{\min}$

- marcăm toate intervalele nemarcate care conțin  $B_{\min}$
- adăugăm  $B_{\min}$  la  $M$

Pentru a obține o complexitate redusă, sortăm inițial toate cele  $2N$  capete și le parcurgem de la stânga la dreapta. Pentru fiecare punct distingem cazurile:

- dacă este capăt stânga, introducem intervalul în lista de „intervale în procesare” și trecem mai departe;
- dacă este capăt dreapta și intervalul respectiv nu conține nici un punct din  $M$ , atunci am găsit cel mai mic capăt dreapta al unui interval nemarcat, introducem capătul în  $M$  și marcăm toate intervalele din lista de intervale în procesare;
- dacă este capăt dreapta și intervalul din care face parte este deja marcat, trecem mai departe.

Complexitate:

- sortare:  $O(N \log N)$
- parcurgerea capetelor:  $O(N)$
- adăugarea și ștergerea unui interval din lista de intervale în procesare:  $O(1)$
- total:  $O(N \log N)$

## Programare Dinamică

---

Programare dinamică presupune rezolvarea unei probleme prin descompunerea ei în subprobleme și rezolvarea acestora. Spre deosebire de divide et impera, subproblemele nu sunt disjuncte, ci se suprapun.

Pentru a evita recalcularea porțiunilor care se suprapun, rezolvarea se face pornind de la cele mai mici subprobleme și folosindu-ne de rezultatul acestora calculăm subproblema imediat mai mare. Cele mai mici subprobleme sunt numite subprobleme unitare, acestea putând fi rezolvate într-o complexitate constantă, ex: cea mai mare subsecvență dintr-o mulțime de un singur element.

Pentru a nu recalcula soluțiile subproblemelor ce ar trebui rezolvate de mai multe ori, pe ramuri diferite, se reține soluția subproblemelor folosind o tabelă (matrice uni, bi sau multi-dimensională în funcție de problemă) cu rezultatul fiecărei subprobleme. Aceasta tehnică se numește *memoizare*.

Aceasta tehnică determină „valoarea” soluției pentru fiecare din subprobleme. Mergând de la subprobleme mici la subprobleme din ce în ce mai mari ajungem la soluția optimă, la nivelul întregii probleme. Motivul pentru care aceasta tehnică se numește Programare Dinamică este datorată flexibilității ei, „valoarea” schimbându-și înțelesul logic de la o problemă la alta. În probleme de minimizarea costului, „valoarea” este reprezentată de costul minim. În probleme care presupun identificarea unei componente maxime, „valoarea” este caracterizată de dimensiunea componentei.

După calcularea valorii pentru toate subproblemele se poate determina efectiv mulțimea de elemente care compun soluția. „Reconstrucția” soluției se face mergând din subproblemă în subproblemă, începând de la problema cu valoarea optimă și ajungând în subprobleme unitare. Metoda și recurența variază de la problemă la problemă, dar în urma unor exerciții practice va deveni din ce în ce mai facil să le identificați.

Aplicând aceasta tehnică determinăm una din soluțiile optime, problema putând avea mai multe soluții optime. În cazul în care se dorește determinarea tuturor soluțiilor optime, algoritmul trebuie combinat cu unul de backtracking în vederea construcției soluțiilor.

Aplicarea acestei tehnici de programare poate fi descompusă în următoarea secvență de pași: 1. Identificarea structurii și a metricilor utilizate în caracterizarea soluției optime; 2. Determinarea unei metode de calcul recursiv pentru a afla valoarea fiecărei subprobleme; 3. Calcularea "bottom-up" a acestei valori (de la subproblemele cele mai mici la cele mai mari); 4. Reconstrucția soluției optime pornind de la rezultatele obținute anterior.

## Exemple de probleme

---

Programarea Dinamică este cea mai flexibilă tehnică din programare. Cel mai ușor mod de a o înțelege presupune parcurgerea cât mai multor exemple.

O problema clasică de Programare Dinamică este determinarea celui mai lung subșir strict crescător dintr-un șir de numere. Un subșir al unui șir este format din caractere (nu neapărat consecutive) ale șirului respectiv, în ordinea în care acestea apar în șir.

Exemplu: pentru șirul 24 12 15 15 8 19 răspunsul este șirul 12 15 19

Se observa că dacă încercăm o abordare greedy nu putem stabili nici măcar elementul de început într-un mod corect. Totuși, problema se poate rezolva "muncitorește" (forța brută) folosind un algoritm care alege toate combinațiile de numere din șir, validează că șirul obținut este strict crescător și îl reține pe cel de lungime maximă, dar aceasta abordare are complexitatea temporală  $O(N!)$ . Cu optimizări, este posibil să se ajungă la  $O(2^N)$ .

O metoda de rezolvare mai eficientă folosește Programarea Dinamică. Începem prin a stabili pentru fiecare element lungimea celui mai lung subșir strict crescător care începe cu primul element și se termină în elementul respectiv. Numim aceasta valoare  $best_i$  și aplicăm formula recursivă  $best_i = 1 + \max(best_j)$ , cu  $j < i$  și  $elem_j < elem_i$ .

Aplicând acest algoritm obținem:

elem 24 12 15 15 8 19 best 1 1 2 2 1 3

Pentru 24 sau 12 nu există nici un alt element în stânga lor strict mai mic decât ele, de aceea au  $best$  egal cu 1. Pentru elementele 15 se poate găsi în stânga lor 12 strict mai mic decât ele. Pentru 19 se găsește elementul 15 strict mai mic decât el. Cum 15 deja este capăt pentru un subșir soluție de 2 elemente, putem spune că 19 este capătul pentru un subșir soluție de 3 elemente.

Cum pentru fiecare element din mulțime trebuie să găsim un element mai mic decât el și cu  $best$  maxim, avem o complexitate  $O(N)$  pentru fiecare element. În total rezultă o complexitate  $O(N^2)$ . Se pot obține și rezolvări cu o complexitate mai mică folosind structuri de date avansate. Atât soluția în  $O(N^2)$ , cât și o soluție în  $O(N \log N)$  poate fi găsită la [5] [<http://infoarena.ro/problema/scmax>]. Tot acolo se poate găsi și o listă de probleme mai dificile ce folosesc tehnica Programării Dinamice, adaptată în diferite forme.

Pentru a găsi care sunt elementele ce alcătuiesc subșirul strict crescător putem să reținem și o „cale de întoarcere”. Reconstrucția astfel obținută are complexitatea  $O(N)$ . Exemplu: subproblema care se termină în elementul 19 are subșirul de lungime maximă 3 și a fost calculată folosind subproblema care se termină cu elementul 15 (oricare din ele). Subșirul de lungime maximă care se termină în 15 a fost calculat folosindu-ne de elementul 12. 12 marchează sfârșitul reconstrucției fiind cel mai mic element din subșir.

O problema care admite o varietate mare de soluții este cea a subsecvenței de sume maxime. Enunțul poate fi găsit la [6] [<http://infoarena.ro/problema/ssm>].

## Concluzii și observații

---

Aceste 2 tehnici sunt flexibile și simpliste la nivel conceptual, dar cu ajutorul lor se pot rezolva probleme foarte complexe. În viitor este posibil să întâlniți algoritmi de Programare Dinamică pe arbori sau Greedy pe stări, unde fiecare stare este o matrice. Conceptele rămân neschimbate.

Aspectul cel mai important de reținut este că soluțiile găsite trebuie să reprezinte optimul global și nu doar local. Se pot confunda ușor problemele care se rezolvă cu Greedy cu cele care se rezolvă prin Programare Dinamică.

## Probleme laborator

---

Denumirile diferă între engleză și română! Nu știm din ce motive avem aceste diferențe între concepte și nici când au apărut pentru prima dată, dar considerăm că este bine să le cunoașteți. Atunci când citiți enunțuri în limba română sau engleză, ele se vor referi la lucruri diferite.

Daca avem un sir  $a_1, a_2, \dots, a_n$  atunci:

- **subșir** (*subsequence* in engleza) inseamna un vector  $v = (a(i_1), a(i_2), \dots, a(i_k))$  unde  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .
- **subsecvență** (*substring* in engleza) inseamna un subșir de forma  $a(i), a(i+1), a(i+2), \dots, a(i+k)$  adica un subsir cu elemente consecutive in sirul initial.

## Laborator 2

---

### Problema 1. [3p]

Se dă o lista de  $n$  spectacole, pentru care se cunosc ora de început **oi** și ora de sfârșit **os**. Se cere o programare optimă a unei săli de spectacol, astfel încât numărul de spectacole să fie maxim, și spectacolele să nu se suprapună.

### Problema 2. [4p]

- [2p] **a)** Într-un magazin din PAlești se află o casă de marcat.. În casa de marcat există un număr nelimitat de banconote cu valori în  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Știind că Dinamicel trebuie să primească un rest de  $x$  lei, determinați numărul minim de banconote prin care Dinamicel va primi restul.

Exemplu:

```
B = {1, 3, 4, 10, 60, 80}, x = 121
soluție: 3 bancnote (două de 60 și una de 1)
```

- [2p] **b)** În același magazin din PAlești, s-au scos din uz bancnotele vechi și în locul lor există banconote de  $B = \{100, 50, 10, 5, 1\}$ . Ajutați-l pe Lăcomel să primească restul de  $x$  lei cu un număr minim de banconote.

Putem folosi aceeași tehnică de la subpunctul a)? Care este diferența de complexitate între cele două soluții? Încercați să rezolvați acum subpunctul a) cu această tehnică.

Exemplu:

```
x = 91  
soluție: 6 bancnote (una de 50, patru de 10 și una de 1)
```

## Problema 3. [3p]

**3.1.** Dându-se două șiruri  $S1$  și  $S2$ , găsiți cel mai lung subșir comun a lor. Un subșir este o submulțime în care elementele păstrează ordinea relativă din șirul inițial.

Exemplu:

```
S1 = {P,R,O,G,R,A,M}, S2 = { R,A,N,D,O,M}  
soluție: {R,A,M} sau {R,O,M}
```

**3.2.** Dându-se un șir  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , găsiți cea mai lungă subsecvență a lui  $S$ ,  $S_{ij} = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}$  care este în același timp și palindrom.

## Laborator 3

---

### Problema 1. [3p]

X este student în anul 2 și din acest motiv, are de rezolvat un număr de  $N$  teme pe parcursul celui de-al doilea semestru. Fiecare temă  $i$  are un punctaj ( $P_i$ ) și poate fi rezolvată până la un anumit termen limită ( $D_i$ ). Fiind un student bun, X poate rezolva orice temă într-o singură zi. Ajutați-l pe X să-și planifice temele astfel încât să obțină un punctaj cât mai mare.

### Problema 2. [4p]

Într-un rucsac putem transporta "max\_weight" kilograme. Avem mai multe obiecte disponibile, caracterizate prin greutate ("weight") și valoare ("value").

a) [Greedy] Considerând că fiecare obiect poate fi împărțit în mai multe bucăți, decideți ce fracțiune din fiecare obiect putem pune în rucsac astfel încât acesta să aibă valoare maximă.

b) [PD] Considerând că obiectele nu pot fi secționare, decideți ce obiecte putem pune în rucsac pentru a obține valoare maximă.

### Problema 3. [3p]

Se dă o listă  $L$  cu  $N$  elemente întregi și un număr natural  $K < N$ . Se cere să se selecteze  $K$  subsecvențe (subliste de elemente consecutive în lista inițială) din  $L$ , astfel încât suma elementelor să fie maximă.

Exemplu:

$L = \{4, 10, -1, 6, -7, -4, 12, -10, 5, -2, 3\}$ ,  $K = 3$

Sol: suma = 37 pentru  $\{\{4,10,-1,6\}, \{12\}, \{5,-2,3\}\}$

## Referințe

---

[1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Greedy\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Greedy_algorithm) [[http://en.wikipedia.org/wiki/Greedy\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Greedy_algorithm)]

[2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic\\_programming](http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming)  
[[http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic\\_programming](http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming)]

[3] <http://ww3.algorithmdesign.net/handouts/Greedy.pdf>  
[<http://ww3.algorithmdesign.net/handouts/Greedy.pdf>]

[4] <http://ww3.algorithmdesign.net/handouts/DynamicProgramming.pdf>  
[<http://ww3.algorithmdesign.net/handouts/DynamicProgramming.pdf>]

[5] <http://infoarena.ro/problema/scmax> [<http://infoarena.ro/problema/scmax>]

[6] <http://infoarena.ro/problema/ssm> [<http://infoarena.ro/problema/ssm>]

[7] Capitolul IV din Introducere în Algoritmi de către T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein

pa/laboratoare/laborator-02.txt · Last modified: 2013/03/10 21:49 by traian.rebedea