Laborator 8: Drumuri minime

Obiective laborator

- Înțelegerea conceptelor de cost, relaxare a unei muchii, drum minim
- Prezentarea si asimilarea algoritmilor pentru calculul drumurilor minime

Importanţă – aplicaţii practice

Algoritmii pentru determinarea drumurilor minime au multiple aplicații practice si reprezintă clasa de algoritmi pe grafuri cel mai des utilizata:

- Rutare in cadrul unei rețele (telefonice, de calculatoare etc.)
- Găsirea drumului minim dintre doua locații (Google Maps, GPS etc.)
- Stabilirea unei agende de zbor in vederea asigurării unor conexiuni optime
- Asignarea unui peer / server de fișiere in funcție de metricile definite pe fiecare linie de comunicație

Concepte

Costul unei muchii si al unui drum

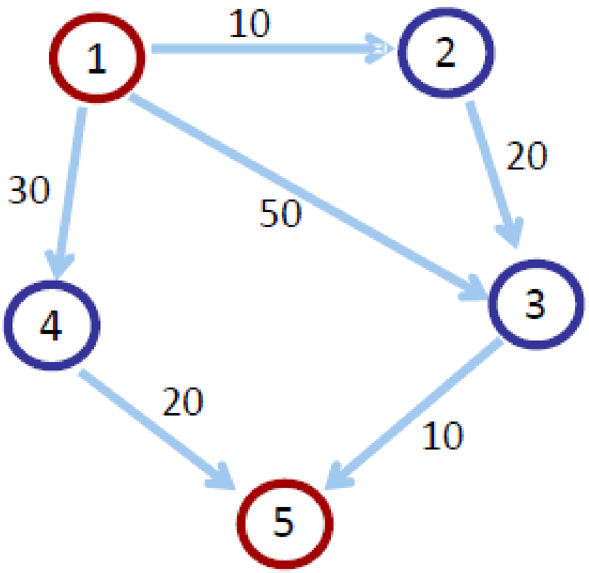
Fiind dat un graf orientat G = (V, E), se considera funcția w: E → W, numita funcție de cost, care asociază fiecărei muchii o valoare numerica. Domeniul funcției poate fi extins, pentru a include si perechile de noduri intre care nu exista muchie directa, caz in care valoarea este +∞ . Costul unui drum format din muchiile p12 p23 … p(n-1)n, având costurile w12, w23, …, w(n-1)n, este suma w = w12 + w23 + … + w(n-1)n.

In exemplul alăturat, costul drumului de la nodul 1 la 5 este:

drumul 1: w14 + w45 = 30 + 20 = 50

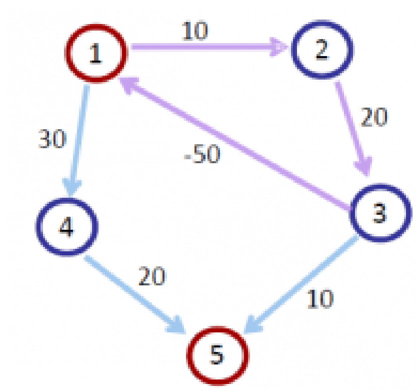
drumul 2: w12 + w23 + w35 = 10 + 20 + 10 = 40

drumul 3: w13 + w35 = 50 + 10 = 60



Drumul de cost minim

Costul minim al drumului dintre doua noduri este minimul dintre costurile drumurilor existente intre cele doua noduri. In exemplul de mai sus, drumul de cost minim de la nodul 1 la 5 este prin nodurile 2 si 3. Deși, in cele mai multe cazuri, costul este o funcție cu valori nenegative, exista situații in care un graf cu muchii de cost negativ are relevanta practica. O parte din algoritmi pot determina drumul corect de cost minim inclusiv pe astfel de grafuri. Totuși, nu are sens căutarea drumului minim in cazurile in care graful conține cicluri de cost negativ – un drum minim ar avea lungimea infinita, intricat costul sau s-ar reduce la fiecare reparcurgere a ciclului:



In exemplul alăturat, ciclul 1 → 2 → 3 → 1 are costul -20.

drumul 1: w12 + w23 + w35 = 10 + 20 + 10 = 40

drumul 2: (w12 + w23 + w31) + w12 + w23 + w35 = -20 + 10 + 20 + 10 = 20

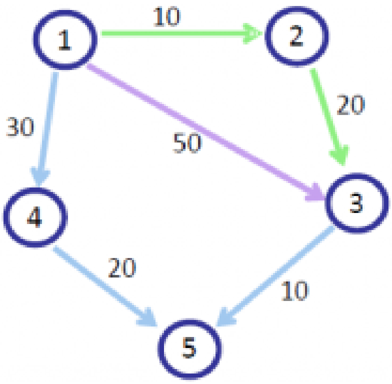
drumul 3: (w12 + w23 + w31) + (w12 + w23 + w31) + w12 + w23 + w35 = -20 + (-20) + 10 + 20 + 10 = 0

Relaxarea unei muchii

Relaxarea unei muchii v1 - v2 consta in a testa daca se poate reduce costul ei, trecând printr-un nod intermediar u. Fie w12 costul inițial al muchiei de la v1 la v2, w1u costul muchiei de la v1 la u, si wu2 costul muchiei de la u la v2. Daca w > w1u + wu2, muchia directa este înlocuita cu succesiunea de muchii v1 - u, u - v2.

In exemplul alăturat, muchia de la 1 la 3, de cost w13 = 50, poate fi relaxata la costul 30, prin nodul intermediar u = 2, fiind înlocuita cu succesiunea w12, w23.

Toţi algoritmii prezentaţi in continuare se bazează pe relaxare pentru a determina drumul minim.



Drumuri minime de sursa unica

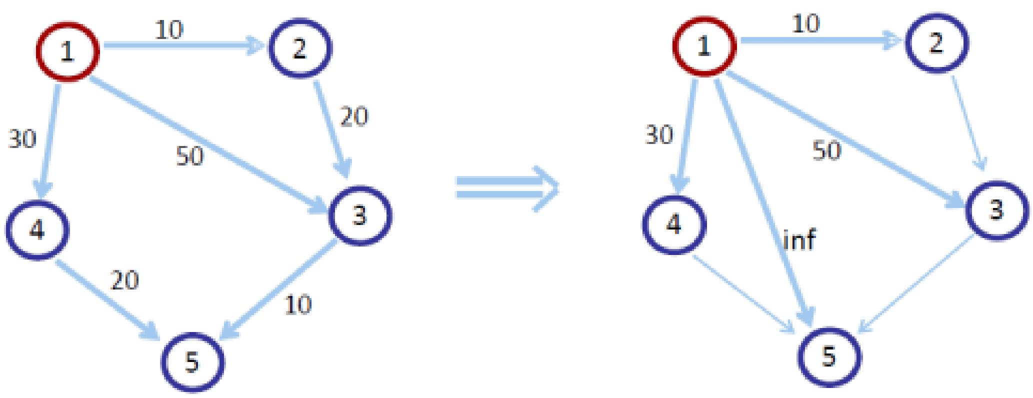
Algoritmii din aceasta secţiune determina drumul de cost minim de la un nod sursa, la restul nodurilor din graf, pe baza de relaxări repetate.

Algoritmul lui Dijkstra

Dijkstra poate fi folosit doar in grafuri care au toate muchiile nenegative.

Algoritmul este de tip Greedy:
optimul local căutat este reprezentat de costul drumului dintre nodul sursa s si un nod v. Pentru fiecare nod se retine un cost estimat d[v], iniţializat la început cu costul muchiei s → v, sau cu +∞, daca nu exista muchie.

In exemplul următor, sursa s este nodul 1. Iniţializarea va fi:



Aceste drumuri sunt îmbunătăţite la fiecare pas, pe baza celorlalte costuri estimate.

Algoritmul selectează, in mod repetat, nodul u care are, la momentul respectiv, costul estimat minim (fata de nodul sursa). In continuare, se încearcă sa se relaxeze restul costurilor d[v]. Daca d[v] < d[u] + wuv , d[v] ia valoarea d[u] + wuv.

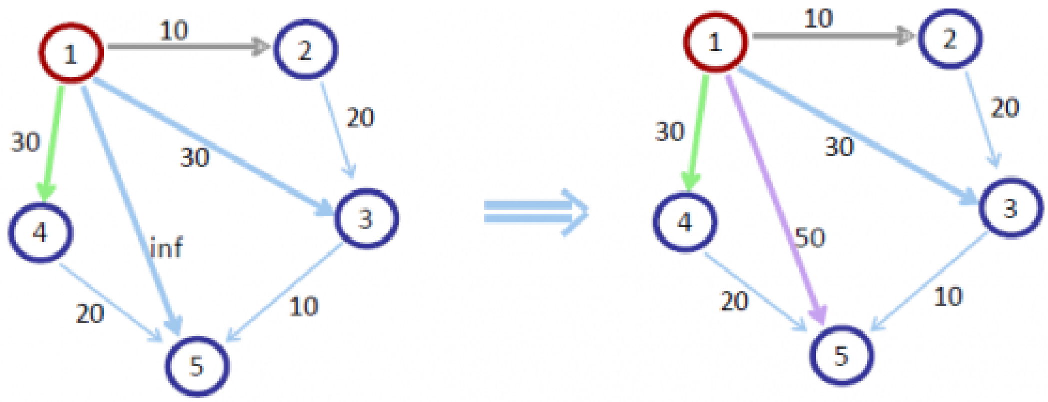
Pentru a tine evidenta muchiilor care trebuie relaxate, se folosesc doua structuri: S (mulţimea de vârfuri deja vizitate) si Q (o coada cu priorităţi, in care nodurile se afla ordonate după distanta fata de sursa) din care este mereu extras nodul aflat la distanta minima. In S se afla iniţial doar sursa, iar in Q doar nodurile spre care exista muchie directa de la sursa, deci care au d[nod] < +∞.

In exemplul de mai sus, vom inițializa S = {1} si Q = {2, 4, 3}.

La primul pas este selectat nodul 2, care are d[2] = 10.
Singurul nod pentru care d[nod] poate fi relaxat este 3 : d[3] = 50 > d[2] + w23 = 10 + 20 = 30

După primul pas, S = {1, 2} si Q = {4, 3}.

La următorul pas este selectat nodul 4, care are d[4] = 30.
Pe baza lui, se poate modifica d[5] : d[5] = +∞ > d[4] + w45 = 30 + 20 = 50



După al doilea pas, S = {1, 2, 4} si Q = {3, 5}.

La următorul pas este selectat nodul 3, care are d[3] = 30, si se modifica din nou d[5]: d[5] = 50 > d[3] + w35 = 30 + 10 = 40.

Algoritmul se încheie când coada Q devine vida, sau când S conține toate nodurile. Pentru a putea determina si muchiile din care este alcătuit drumul minim căutat, nu doar costul sau final, este necesar sa reținem un vector de părinți P. Pentru nodurile care au muchie directa de la sursa, P[nod] este inițializat cu sursa, pentru restul cu null.

Pseudocodul pentru determinarea drumului minim de la o sursa către celelalte noduri utilizând algoritmul lui Dijkstra este:

```
Dijkstra(sursa, dest):
selectat(sursa) = true
foreach nod in V // V = multimea nodurilor
    daca exista muchie[sursa, nod]
        // initializam distanta pana la nodul respectiv
        d[nod] = w[sursa, nod]
        introdu nod in Q
        // parintele nodului devine sursa
        P[nod] = sursa
    altfel
        d[nod] = +∞ // distanta infinita
        P[nod] = null // nu are parinte

// relaxari succesive
cat timp Q nu e vida
    u = extrage_min (Q)
    selectat(u) = true
    foreach nod in vecini[u] // (*)
        /* daca drumul de la sursa la nod prin u este mai mic decat cel curent */
        daca not selectat(nod) si d[nod] > d[u] + w[u, nod]
```

```
            // actualizeaza distanta si parinte
            d[nod] = d[u] + w[u, nod]
            P[nod] = u
            /* actualizeaza pozitia nodului in coada prioritara */
            actualizeaza (Q,nod)

// gasirea drumului efectiv
Initializeaza Drum = {}
nod = P[dest]
cat timp nod != null
    insereaza nod la inceputul lui Drum
    nod = P[nod]
```

Reprezentarea grafului ca matrice de adiacenta duce la o implementare ineficienta pentru orice graf care nu este complet, datorita parcurgerii vecinilor nodului u, din linia (*), care se va executa în |V| pași pentru fiecare extragere din Q, iar pe întreg algoritmul vor rezulta |V|^2 pași. Este preferata reprezentarea grafului cu liste de adiacenta, pentru care numărul total de operații cauzate de linia (*) va fi egal cu |E|. Complexitatea algoritmului este O(|V|^2+|E|) în cazul în care coada cu priorități este implementata ca o căutare liniara. În acest caz funcția extrage_min se executa în timp O(|V|), iar actualizează(Q) in timp O(1).

O varianta mai eficienta este implementarea cozii ca heap binar. Funcția extrage_min se va executa în timp O(lg|V|); funcția actualizează(Q) se va executa tot în timp O(lg|V|), dar trebuie cunoscuta poziția cheii nod în heap, adică heapul trebuie sa fie indexat. Complexitatea obținută este O(|E|lg|V|) pentru un graf conex.

Cea mai eficienta implementare se obține folosind un heap Fibonacci pentru coada cu priorități:

Aceasta este o structura de date complexa, dezvoltata în mod special pentru optimizarea algoritmului Dijkstra, caracterizata de un timp amortizat de O(lg|V|) pentru operația extrage_min si numai O(1) pentru actualizeaza(Q). Complexitatea obținută este O(|V|lg|V| + |E|), foarte bună pentru grafuri rare.

Algoritmul Bellman – Ford

Algoritmul Bellman Ford poate fi folosit si pentru grafuri ce conțin muchii de cost negativ, dar nu poate fi folosit pentru grafuri ce conțin cicluri de cost negativ (când căutarea unui drum minim nu are sens).
Cu ajutorul sau putem afla daca un graf conține cicluri. Algoritmul folosește același mecanism de relaxare ca si Dijkstra, dar, spre deosebire de acesta, nu optimizează o soluție folosind un criteriu de optim local, ci parcurge fiecare muchie de un număr de ori egal cu numărul de noduri si încearcă sa o relaxeze de fiecare data, pentru a îmbunătăți distanta până la nodul destinație al muchiei curente.

Motivul pentru care se face acest lucru este ca drumul minim dintre sursa si orice nod destinație poate sa treacă prin maximum |V| noduri (adică toate nodurile grafului), respectiv |V|-1 muchii; prin urmare, relaxarea tuturor muchiilor de |V|-1 ori este suficienta pentru a propaga până la toate nodurile informația despre distanta minima de la sursa.

Daca, la sfârșitul acestor |E|*(|V|-1) relaxări, mai poate fi îmbunătățită o distanță, atunci graful are un ciclu de cost negativ si problema nu are soluție.

Menținând notațiile anterioare, pseudocodul algoritmului este:

```
BellmanFord(sursa):
// initializari
foreach nod in V // V = multimea nodurilor
    daca muchie[sursa, nod]
        d[nod] = w[sursa, nod]
        P[nod] = sursa
```

```
    altfel
        d[nod] = +∞
        P[nod] = null
d[sursa] = 0
p[sursa] = null

// relaxari succesive
// cum in initializare se face o relaxare (daca exista drum direct de la sursa la nod =>
// d[nod] = w[sursa, nod]) mai sunt necesare |V-2| relaxari
for i = 1 to |V|-2
    foreach (u, v) in E   // E = multimea muchiilor
        daca d[v] > d[u] + w(u,v)
            d[v] = d[u] + w(u,v)
            p[v] = u;

// daca se mai pot relaxa muchii
foreach (u, v) in E
    daca d[v] > d[u] + w(u,v)
        fail (”exista cicluri negativ”)
```

Complexitatea algoritmului este în mod evident O(|E|*|V|).

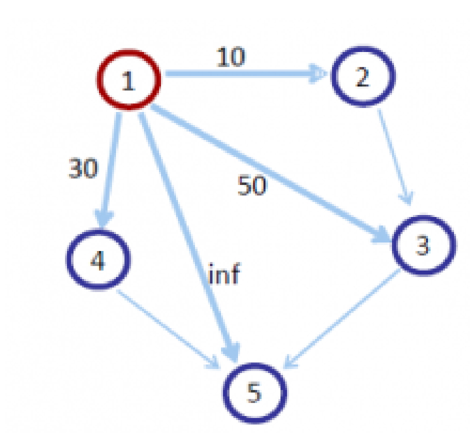
Drumuri minime intre oricare doua noduri

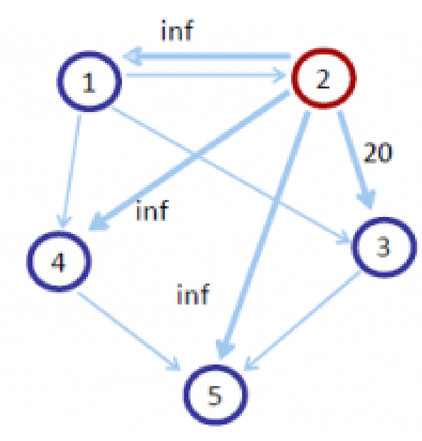
Floyd-Warshall

Algoritmii din aceasta secțiune determina drumul de cost minim dintre oricare doua noduri dintr-un graf. Pentru a rezolva aceasta problema s-ar putea aplica unul din algoritmii de mai sus, considerând ca sursa fiecare nod, pe rând, dar o astfel de abordare ar fi ineficienta.

Algoritmul Floyd-Warshall compara toate drumurile posibile din graf dintre fiecare 2 noduri, si poate fi utilizat si in grafuri cu muchii de cost negativ.

Estimarea drumului optim poate fi reținut intr-o structura tridimensionala d[v1, v2, k], cu semnificația – costul minim al drumului de la v1 la v2, folosind ca noduri intermediare doar noduri pana la nodul k. Daca nodurile sunt numerotate de la 1, atunci d[v1, v2, 0] reprezintă costul muchiei directe de la v1 la v2, considerând +∞ daca aceasta nu exista. Exemplu, pentru v1 = 1, respectiv 2:





Pornind cu valori ale lui k de la 1 la |V|, ne interesează să găsim cea mai scurta cale de la fiecare v1 la fiecare v2 folosind doar noduri intermedire din mulțimea {1, …, k}. De fiecare data, comparam costul deja estimat al drumului de la v1 la v2, deci d[v1, v2, k-1] obținut la pasul anterior, cu costul drumurilor de la v1 la k si de la k la v2, adică d[v1, k, k-1] + d[k, v2, k-1], obținutae la pasul anterior. Atunci, d[v1, v2, |V|] va conține costul drumului minim de la v1 la v2.

Pseudocodul acestui algoritm este:

```
FloydWarshall(G):
n = |V|
int d[n, n, n]
foreach (i, j) in (1..n,1..n)
    d[i, j, 0] = w[i,j] // costul muchiei, sau infinit
for k = 1 to n
    foreach (i,j) in (1..n,1..n)
        d[i, j, k] = min(d[i, j, k-1], d[i, k, k-1] + d[k, j, k-1])
```

Complexitatea temporala este O(|V|^3), iar cea spațială este tot O(|V|^3). O complexitate spațială cu un ordin mai mic se obține observând ca la un pas nu este nevoie decât de matricea de la pasul precedent d[i, j, k-1] si cea de la pasul curent d[i, j, k]. O observație și mai bună este că, de la un pas k-1 la k, estimările lungimilor nu pot decât sa scadă, deci putem sa lucram pe o singura matrice. Deci, spațiul de memorie necesar este de dimensiune |V|^2.

Rescris, pseudocodul algoritmului arata astfel:

```
FloydWarshall(G):
n = |V|
int d[n, n]
foreach (i, j) in (1..n,1..n)
    d[i, j] = w[i,j] // costul muchiei, sau infinit
for k = 1 to n
    foreach (i,j) in (1..n,1..n)
        d[i, j] = min(d[i, j], d[i, k] + d[k, j])
```

Pentru a determina drumul efectiv, nu doar costul acestuia, avem doua variante:

1. Se retine o structura de părinți, similara cu cea de la Dijkstra, dar, bineînțeles, bidimensionala.
2. Se folosește divide et impera astfel:

- se caută un pivot k astfel încât cost[i][j] = cost[i][k] + cost[j][k]
- se apelează funcția recursiv pentru ambele drumuri → (i,k),(k,j)
- dacă pivotul nu poate fi găsit, afișăm i
- după terminarea funcției recursie afișăm extremitatea dreapta a drumului

Concluzii

- **Dijkstra**

– calculează drumurile minime de la o sursa către celelalte noduri
– nu poate fi folosit daca exista muchii de cost negativ
– complexitate minima O(|V|lg|V| + |E|) utilizând heapuri Fibonacci; in general O(|V|^2+|E|)

- **Bellman – Ford**

– calculează drumurile minime de la o sursă către celelalte noduri
– detectează existența ciclurilor de cost negativ
– complexitate O(|V| * |E|)

- **Floyd – Warshall**

– calculează drumurile minime intre oricare doua noduri din graf
– poate fi folosit in grafuri cu cicluri de cost negativ, dar nu le detectează
– complexitate O(|V|^3)

Referinţe:

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm [http://en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra's_algorithm]

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Bellman-Ford_algorithm [http://en.wikipedia.org/wiki/Bellman-Ford_algorithm]

[3] http://www.algorithmist.com/index.php/Floyd-Warshall's_Algorithm [http://www.algorithmist.com/index.php/Floyd-Warshall's_Algorithm]

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Binary_heap [http://en.wikipedia.org/wiki/Binary_heap]

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_heap [http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_heap]

[6] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein – Introducere în Algoritmi

[7] C. Giumale – Introducere în analiza algoritmilor

Probleme

1) Gigel vrea sa isi petreaca vacanta de Paste in Paris asa ca se hotaraste sa isi cumpere bilete de avion. Deoarece nu este foarte bun la matematica/informatica acesta va roaga pe voi sa il ajutati sa gaseasca biletele cele mai ieftine (indiferent de numarul de escale). Pentru a va ajuta, Gigel va pune la dispozitie posibile zboruri oferite de companie. [4 pct]

2) Fiind un prieten bun si avand mare incredere in voi, Gigel se ofera sa le gaseasca si prietenilor sai cele mai ieftine bilele pentru vacanta de Paste. Pentru a fi sigur ca nu a omis vacanta niciunui prieten, si precaut din fire, el va roaga sa ii alcatuiti o lista cu toate costurile cele mai mici intre oricare doua orase. [3 pct]

3) Deoarece perioada vacantei de Paste este o perioada a vacantelor, compania de zboruri aleasa de Gigel isi rasplateste clientii fideli! Astfel, angajatii companiei micsoreaza foarte mult preturile pe anumite rute (pana chiar si la costuri negative, pentru a oferi un discount mai mare pe rute mai lungi). Totusi, compania doreste sa nu ofere vacante pentru care un client sa nu plateasca nimic (ba mai mult, sa si castige). Aceasta va roaga pe voi sa detectati aceste situatii, in care un potential client pleaca dintr-un oras Y si se intoarce tot in Y, primind si bani de la companie (cicluri de cost negativ). [3 pct]

Bonus : De ce nu puteti folosi Dijkstra pe un graf cu arce de cost negativ? Modificati algoritmul astfel incat sa gaseasca solutia corecta chiar daca graful are arce de cost negative (dar nu si cicluri negative) [1 pct]

pa/laboratoare/laborator-08.txt · Last modified: 2013/04/12 19:31 by ivona.sevastian