**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Сибирский государственный университет геосистем и технологий» Кафедра высшей математики**

ПРЕДЕЛЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

**Учебно-методическое пособие**

**для обучающихся на 1 курсе всех направлений обучения в СГУГиТ**

**Учебно-методическое пособие составил:**

**доцент кафедры высшей математики Мартынов Геннадий Павлович,**

**Новосибирск, 2019**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГЕОСИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ»

(СГУГиТ)

Г.П. Мартынов

ПРЕДЕЛЫ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие

*для обучающихся на 1 курсе всех направлений обучения*

Новосибирск СГУГиТ 2019

*УДК 517*

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор, НГТУ,

*Костюченко В.Я.*

### Мартынов, Г.П.

М 294 Пределы в примерах и задачах, учебно-методическое пособие. / Г.П. Мартынов, – Новосибирск: СГУГиТ, 2019. – 27 с.

Учебно-методическое пособие составлено сотрудником кафедры высшей ма- тематики Сибирского государственного университета геосистем и технологий: доцентом Г.П. Мартыновым. Пособие предназначено для обучающихся на 1 курсе всех специальностей и направлений обучения в СГУГиТ. Оно содержит краткую теорию (определения, формулы и теоремы) раздела «Пределы и непрерывность», примеры решения типовых задач, типовые задания по 30 вариантам, вопросы для повторения по данной теме и библиографический список рекомендуемой литера- туры.

УДК 517

 Мартынов Г.П., 2019

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

1. **Предел последовательности. Предел функции на бесконечности и в точке**..4
2. **Бесконечно большие и бесконечно малые. Свойства бесконечно малых**

и бесконечно больших 7

1. [Теоремы о пределах 9](#_TOC_250003)
2. [Непрерывность функции, точки разрыва 12](#_TOC_250002)
3. [Типовые задания 22](#_TOC_250001)

[Вопросы для повторения 26](#_TOC_250000)

Библиографический список рекомендуемой литературы 27

1. **Предел последовательности. Предел функции на бесконечности и в точке**

**Вводное слово.** Понятие предела функции играет фундаментальную роль во всём математическом анализе. Первое корректное определение предела числовой функции было дано известным французским математиком О. Коши в 1821 г. Сим- вол ***lim****,* употребляемый в обозначении предела, составляется из первых трёх букв латинского слова ***limes*** (французского ***limite***), обозначающего «предел».

**Определение 1.1.** Рассмотрим функцию *yn*  *f* *n*, где *n* – натуральное чис-

ло. Значения. принимаемые функцией *f* *n*, образуют, как говорят, последова-

тельность:

*y*1 ,

*y*2 ,

*y*3 , ...,

*yn* ,

*yn* 1 , ... . Более точно: п*оследовательностью* на-

зывается множество чисел, перенумерованных с помощью натуральных чисел и расположенных в порядке возрастания номеров.

**Определение 1.2.** *Число А* называется *пределом последовательности*

*y*1 , *y*2 , *y*3 , ..., *yn* , *yn* 1 , ..., если для любого сколь угодно малого, наперед задан-

ного положительного числа  существует номер *M*, такой, что при всех

*n*  *M* 

*уn*  *A*

  . А записывается это так:

*l i m*

*n* 

*yn*  *A* .

**Например.** Члены геометрической прогрессии:

1 , 1 ,

2 4

1 , 1 ,

8 16

1 , ...,

32

1 ,...;

2*n*

*yn* 

*f* *n*  1

2*n*

, стремятся к нулю ( *l i m*

*n* 

*yn*  0), пото-

му что:

1  0    2*n*  1

 *n*  log

 1  , тем самым для любого сколь угод-

2*n* 

2   

но малого, наперед заданного положительного числа  мы нашли номер *M*, такой,





что: при всех

*n*  *M* 

*уn*  0

  ( *M* 1 *E* (log 2 (1/  ) , где *Е* (*х*) – целая часть *х*).

Рассмотрим теперь функцию

*y*  *f* *x*

непрерывного аргумента *x* и введем

сначала понятие предела. Поставим следующую задачу: в течение дня наполняе- мость станций метрополитена является функцией времени. Пусть *х* – это время, тогда *f* (*x*) – это количество пассажиров на перроне данной станции метрополите- на. Чем ближе будет подходить время к «часу пик», тем больше будет пассажиров на перроне, тем больше становится потребность в поездах метро, тем меньше должен быть интервал движения метро. Получается, что чем точнее мы будем знать истинное (предельное) значение *х*0 «часа пик» – тем точнее будем знать ис- тинное (предельное) количество А пассажиров на станций – тем меньше времени будут терять люди на ожидание

транспорта. *у*

**Определение 1.3.** *Число А* есть

*предел функции f* *x*, *х**D*, при *А +* 

*y = f (x)*

*x*  *x*0 **,** если для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа   0 существует   0 , что

*А*  о

*А* – 

для всех

*х**D*,

удовлетворяющих

неравенству 0  *x*  *x*0   , будет *0*

*х*0 

*х*0 *х*0  *х*

справедливо неравенство

*f* *x* *A*   .

Рис. 1.1

Точка

*x*0 , к которой стремится независимая переменная *x***,** называется *пре-*

*дельной точкой*. Мы пишем:

*x*  *x*0 , т. е. точка *x* стремится к точке

*x*0 ; это озна-

чает, что мы придаем значения *x*, сколь угодно приближающиеся к *x*0 , но не рав-

ные *x*0 (вообще говоря). Функция *y*  *f* *x* может быть и не определена в пре-

дельной точке; достаточно, чтобы функция была определена в какой-нибудь

-окрестности этой точки.

Геометрическая иллюстрация наличия *у* функции *f* *x* предела при *x*  *x*0

дана на рис. 1.1.

Если функция имеет предел, то только один, ибо значения функции для зна- чений аргумента, приближающихся к предельной точке, должны быть как угодно близки к какому–то постоянному числу и, следовательно, не могут быть одновре- менно близки к двум разным постоянным числам.

**Например.** Если *f* *x*  *C* , для всех *x*, где *С* – постоянная, то разность

*С*  *С*  0 и, значит, меньше любого наперед заданного положительного числа  .

Следовательно, *l i m С*  *С* .

*x*  *x*0

**Определение 1.4.** Пусть функция *y*  *f* *x*

определена на полуинтервале

 *а*;   . *Число А* называется *пределом функции*

*y*  *f* *x* при *x*  , если для

любого сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа  сущест-

вует число *M*, такое, что для всех

*х*  *M* 

*f* (*x*)  *A*

  . А записывается это так:

*l i m*

*x* 

*f* (*x*)  *A* или

*f* *x*  *A* при

*x*  .

Геометрический смысл предела функции при *x*   иллюстрируют сле- дующие графики на рис. 1.2 – 1.4:

1. Функция *y*  *f*1*x* приближается к своему пределу *А*, возрастая, при

*x*   (рис. 1.2).

1. Функция
2. Функция

*A* + 

*у*

*y = f*1 *(x)*

*М*

*х*

*A*

*A* - 

*0*

*y*  *f*2 *x* при

*y*  *f*3*x* при

*x*   приближается к пределу *А*, убывая (рис. 1.3).

*x*   приближается к пределу, колеблясь (рис. 1.4).

*у*

*y = f*2 *(x)*

*0*

*М*

*x*

*A* + 

*A* - *А*

Рис. 1.2 Рис. 1.3

Определение и геометрический смысл предела функции при шенно аналогичны.

*x*  

совер-

**Определение 1.5.** Пусть функция *y*  *f* *x* определена на области *D*

( *D*  ; *a**b*; , *a*  *b* ). *Число А* называется *пределом функции*

*y*  *f* *x*

при

*x*  , если для любого сколь угодно малого, наперед заданного положительного

числа  существует число *M*, такое, что при всех *х*  *M* 

*f* (*x*)  *A*

  . А за-

писывается это так: *l i m f* (*x*)  *A* или *f* *x*  *A* при

*x*  

*x*  .

На рис. 1.5 приведена геометрическая иллюстрация предела при (здесь *М* есть максимальное из двух положительных чисел *М* 1 и *М* 2).

*у*

*А* + 

*А*

*А* - 

*y = f*4 (*x*)

- *М* 1

*0*

*М* 2

*х*

*x*  

*у*

*А* + 

*А*

*y = f*3 (*x*)

*0 М х*

Рис. 1.4

Рис. 1.5

### Бесконечно большие и бесконечно малые. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших

В разделе 1 предел определялся как некоторое конечное число *А* ( *А*  ), од- нако можно дать определение бесконечного предела – в этом случае возникает понятие бесконечно большой величины.

**Определение 2.1.** Функция

*y*  *f* *x*, *х**D*,

называется *бесконечно большой*

*величиной* при

*х*  *х*0 , если для любого сколь угодно большого положительного

числа *М* всегда существует положительное число , такое что для всех *х* *D* ,

удовлетворяющих двойному неравенству:

0  *х*  *х*0

 

*f* (*х*)

* *M* . В этом

случае говорят, что «предел модуля функции *f* (*x*) при

*х*  *х*0

бесконечен», а запи-

сывается это так: *l i m f* *x*   .

*x*  *x*0

**Определение 2.2.** Функция *f* *x* *ограничена на области D*, если существует

такое число *М* > 0, что *f* *x*  *M* , для всех *x**D*.

**Определение 2.3.** Функция *y*  *f* *x*, *х**D*,

называется *бесконечно малой ве-*

*личиной* при

*х*  *х*0 , если

*l i m*

*x*  *x*0

*f* *x*  0.

Аналогично определяются бесконечно большие и бесконечно малые величи-

ны при

*x*  , при

*x*   и при

*x*   .

Эти величины играют очень важную роль в математическом анализе. Между ними существует простая связь, которую мы сформулируем в виде теоремы 4.2.

**Теорема 2.1.** Если *f* *x* **–** бесконечно большая величина при *х*  *х*0 , то

1.  *f* *x* – бесконечно малая величина при *х*  *х*0 ; если *f* *x* **–** бесконечно малая

величина при *х*  *х*0 , то 1 *f* *x* – бесконечно большая величина при *х*  *х*0 .

**Замечание.** Аналогичная связь существует между бесконечно малыми и бес-

конечно большими при *x*  .

**Например.** Функция

*f* *x*  *x*2

при

*x*  0

– бесконечно малая величина; а

функция *f* (*x*)  *x*2 при *x*  0 – бесконечно большая величина.

**Теорема 2.2.** Если  *х* и  *х* – бесконечно малые величины при

*х*  *х*0 , *m* (*x*) и *n* (*x*) – бесконечно большие при *х*  *х*0 , то

* 1. сумма бесконечно малых ( *х* +  *х*) тоже является бесконечно ма-

лой при *х*  *х*0 ;

* 1. разность бесконечно малых ( *х* –  *х*) тоже является бесконечно

малой при *х*  *х*0 ;

* 1. произведение бесконечно малых

*х*  (*x*)

также является бесконечно

малой при *х*  *х*0 ;

* 1. произведение

*C* *х*

бесконечно малой на постоянную также является

бесконечно малой при *х*  *х*0 ;

* 1. произведение

*m* *х* *n* (*x*)

двух бесконечно больших есть бесконечно

большая при *х*  *х*0 ;

* 1. произведение

*C*  *m* *х*, *С*  0,

бесконечно большой на постоянную так-

же является бесконечно большой при *х*  *х*0 ;

* 1. сумма *C*  *m* *х* постоянной и бесконечно большой также является бес-

конечно большой при *х*  *х*0 ;

* 1. если  (*х*) - ограничена на некотором интервале, содержащем точку *х*0,

то  (*х*)

*m* (*x*)

является бесконечно малой при

*х*  *х*0 ;

**Замечание.** В данной теореме 2.2 вместо *х*0 может быть . Данная теорема может быть использована при доказательстве теорем о пределах (см. п. 3).

**Определение 2.4.** Если  *х*,  *х* и  *х*  *х*  *х*0 – бесконечно малые вели-

чины при

*х*  *х*0 и

*l i m*

*x*  *x*0

 *x*  *k* , то величины  *х* и

 *x*

 

 *х* называются:

**а)** *эквивалентными* бесконечно малыми при

*х*  *х*0 , если *k* =1;

**б)** бесконечно малыми *одного порядка малости* при *х*  *х*0 , если

*k* 1 *и k*  0 ;

**в)** если же *k* = 0, то говорят, что бесконечно малая величина

 *х* имеет более

высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой

 *x*

 *х* при

*х*  *х*0 .

**г)** если

*l i m*

*x*  *x*0

  *х*  *р*

 *k*  0, *р*  0, *р* – вещественное число, то говорят , что

бесконечно малая  (*x*)

имеет порядок малости, равный *р*, по сравнению с беско-

нечно малой  *х* при *х*  *х*0 .

**д)** если же не существует мыми бесконечно малыми.

*l i m*

*x*  *x*0

 *x* , то

 *x*

 *х* и

 *х*

называются несравни-

**Например.** *х* *x*  sin (1/ *x*) и  *х* *x* - несравнимые бесконечно малые при

*х*  0.

**Замечание.** Таблица эквивалентных бесконечно малых при ведена в разделе 5.

*х*  0

будет при-

### Теоремы о пределах

**Теорема 3.1 (основная теорема о пределах).** Существование предела

*l i m f* *x*  *A* эквивалентно существованию такой -окрестности точки *х*0, на ко-

*x*  *x*0

торой имеет место следующее представление функции *y*  *f* *x*, *х**D*, в виде:

где  (*x*)

– бесконечно малая при

*f* (*x*)  *A*  (*x*) , (3.1)

*х*  *х*0 .

### Доказательство

1. Пусть существует предел

*l i m*

*x*  *x*0

*f* *x*  *A* . Тогда по определению 1.3 для

любого сколь угодно малого, наперед заданного числа  > 0 существует число

 > 0, что для всех *х* *D* , удовлетворяющих двойному неравенству:

0  *х*  *х*0

 

*f* (*х*)  *А*

  . Рассмотрим функцию

 (*х*)  *f*

(*x*)  *A*, *х**D*,

то-

гда для этой функции выполняется следующее: для любого сколь угодно малого,

наперед заданного числа  > 0 существует число  > 0, что для всех *х* *D* , удовле-

творяющих двойному неравенству: 0  *х*  *х*0    (*х*)  0   , то есть

*l i m* *x*  0 , что в соответствии с определением 1.5 означает, что  (*х*) – беско-

*x*  *x*0

нечно малая при

*х*  *х*0 . Поэтому на этой -окрестности точки *х*0 имеет место

представление:  (*х*)  *f*

(*x*)  *A*, *х**D*,

где  (*х*) – бесконечно малая при

*х*  *х*0 , то

есть справедливо (3.1), что и требовалось доказать.

1. Пусть существует -окрестность *U xo* точки *х*0, на которой имеет место сле-

дующее представление функции *y*  *f* *x*, *х**D*, в виде: *f* (*x*)  *A*  (*x*) , где  (*x*)

– бесконечно малая при *х*  *х*0 . Докажем, что существует предел

*l i m*

*x*  *x*0

*f* *x*  *A* .

Имеем: *f* (*x*)  *A*  (*x*)

- бесконечно малая при *х*  *х*0 . По определению 2.3

бесконечно малой:

*l i m*

*x*  *x*0

*x*  0 , а по определению 1.3 предела функции:

для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа  > 0 существует число

1 > 0, что для всех

*х* *D*,

*х**U xo* , удовлетворяющих двойному неравенству:

0  *х*  *х*0

1 

 (*х*)  0

  . Подставляя в последнее, получим:

*f* (*x*)  *A*  (*x*), получаем: 0  *х*  *х*0

1  *f* (*х*)  *А*   , что по определению

4.17 означает существование предела

*l i m f* *x*  *A* . Теорема 3.1 доказана.

*x*  *x*0

Далее с помощью основной теоремы 3.1 о пределах и с помощью свойств бесконечно малых доказываются все остальные теоремы о пределах.

Пусть *l i m f* *x*  *A* , *l i m g**x*  *B* , тогда имеют место следующие теоре-

*x*  *x*0 *x*  *x*0

мы о пределах.

### Теорема 3.2 (о линейности предела).

*l i m*

*x*  *x*0

 *m* 

*f* *x*  *n*  *g**x*   *m*  *A*  *n*  *B* , (3.2)

где *m* и *n* – произвольные числа.

### Теорема 3.3 (о пределе произведения и частного).

*l i m*  *f* *x* *g**x*  *A*  *B* , (3.3)

*x**x*0

*f* *x* *A*

*l i m*

*x*  *x*0

*g**x*  *B*

при

*B*  0 . (3.4)

### Теорема 3.4 (о предельном переходе в неравенстве).

Пусть *f* *x*  *g**x* для всех *x* из некоторой -окрестности точки

*x*0 , тогда:

*А*  *l im*

*x*  *x*0

*f* *x* 

# l i m

*x*  *x*0

*g**x*  *B* . (3.5)

### Теорема 3.5 (о пределе промежуточной переменной).

Пусть в некоторой -окрестности точки *x*0 имеет место неравенство:

*f* *x*   *x*  *g**x* и

## l im

*x*  *x*0

*f* *x*  *l i m*

*x*  *x*0

*g**x*  *A*. Тогда

# l i m

*x*  *x*0

 *x*  *A*. (3.6)

### Теорема 3.6 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел).

Если функция *f* *x* имеет конечный предел – число *А* при *х*  *х*0 , то она ог-

раничена в некотором интервале, содержащем точку

*х*0 .

**Определение 3.1.** Последовательность

*y*1 ,

*y*2 , ...,

*yn* , ... *ограничена сверху*,

если если

*уп*  *M yn*  *k*

для всех *n***;** *ограничена снизу*, если для всех *n.*

*уп*  *m*

для всех *n;* ограничена,

Укажем теорему как *признак существования предела последовательности*.

**Теорема 3.7.** Если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел.

**Замечание.** Предел последовательности может и не существовать. Например:

последовательность

*y*1 ,

*y*2 , ...,

*yn* , ..., где

*уn* 1 (1)*n* , не имеет предела. Дока-

жем это от противного. Пусть существует

*l i m*

*n* 

*уn*  *A* , тогда по определению

1.2 для любого сколь угодно малого, наперед заданного числа  > 0 существует

номер *М*, такой, что для всех

*n*  *M* 

*yn*  *А*

  . Поэтому, при

*n*1  *M* , *n*2

* *M* 

*y*  *y*

1 2

*n n*

 2 . Возьмем

  0,1, тогда существует номер *М*,

такой, что

*n*1  *M* , *n*2

* *M* 

*y*  *y*

1 2

*n n*

 0,2 . Возьмем

*n*1  *M* , *n*2

* *M* , где *n*1

– четное число, а *n*2 – нечетное число, тогда

*уn*1  2,

*уn*2

 0 

*уn*1  *уn*2

 2, а

должно быть:

*y*  *y*

1 2

*n n*

 0,2. Полученное противоречие указывает на отсутст-

вие предела у данной последовательности.

**Определение 3.2.** Введём понятие одностороннего (*левого* и *правого*) предела

функции. Будем писать: *х*  *х*0  0 ; «*x* стремится к

*х*0 слева», если

*х*  *х*0 и

*x*  *x*0 . Аналогично пишем:

*x*  *x*0 . Обозначим:

*х*  *х*0  0; «*x* стремится к

*х*0 справа», если

*х*  *х*0 и

*l i m*

*x* *x*0  0

*f* *x* 

*f* *x*0

 0 – *предел функции*

*f* *x* *слева*;

*l i m*

*x* *x*0  0

*f* *x* 

*f* *x*0

 0 – *предел функции*

*f* *x* *справа***.**

**Например:** пусть функция

*f* *x*

задана так:

*f* (*x*)  *x* 2 ,



2  *x*,

## при при

*x*  0; , тогда,

*x*  0;

используя теоремы 3.2 и 3.3 о пределах, можно доказать:

*l i m*

*x* 0

*f* *x*  *l i m f*

*x* 0

*x*  0

*x* 

*l i m*

*x* 0

*x* 2  *l i m*

*x* 0

*x*  *l i m x*  0  0  0 , т. е.

*x* 0

*f*  0  0 ,

*l i m*

*x* 0

*f* *x*  *l i m f*

*x* 0

*x*  0

*x* 

*l i m*

*x* 0

(2  *x*)  2 

*l i m x*  2  0  2**,** т. е.

*x* 0

*f*  0  2 ;

или геометрически на рис. 3.1.



*у*

2 *f* (+0)

*0 f* (–0)

*х*

**Теорема 3.8.** Существование левого и

правого пределов функции *f* *х* в точке *х*0 и

их равенство – *необходимое и достаточное условие* существования предела функции в

точке

*х*0 ; в этом случае:

*А*  *А*  *А*

(где

*А* 

*f* *х*0  0). (3.7)

Рис.3.1

### Непрерывность функции, точки разрыва

**Определение 4.1.** Функция

*f* *х***,**

*x*  *D* , называется *непрерывной* в точке

*х*0  *D* , если

*l i m*

*x*  *x*0

*f* *x* *f*

*x*0 . Функция

*f* *х***,**

*x*  *D* , называется *непрерывной*

на области *D*, если она непрерывна в каждой точке *х*0  *D* . Точка *х*1 называется

точкой разрыва функции *f* *х***,** *x*  *D* , если в этой точке функция не является не-

прерывной, причем в этом случае говорят, что функция имеет разрыв в точке *х*1.

Графически же непрерывность функции *y*  *f* *x* означает непрерывность её

графика как линии на плоскости *Oxy*. А в точках разрыва график функции разры- вается на части как линия на плоскости *Oxy*.

Имеет место следующая теорема (*критерий непрерывности*).

**Теорема 4.1.** Функция *f* *х***,** *x*  *D* , непрерывна в точке *x*0  *D* тогда и только

тогда, когда односторонние пределы в точке значению функции в этой точке:

*х*0 совпадают между собой и равны

*f* (*x*0 ) 

*f* (*x*0  0) 

*f* (*x*0  0), (4.1)

Как видно, например, из рис. 4.1, в точке

*х*0 разрыва функции

*f* *х*

её левая

«половина графика» не соединяется с «правой половиной», т. е. график «разорвал-

ся», а поэтому

*у*

*f* *х* в точке

*х*0 имеет разрыв.

*у*



*f* (*x*0+0)

*f* (*x*0 )

*М*0 *y = f* (*x*)

*f* (*x*0–0)

*0 х*0 *х*

*0 х*0 *х*

(Функция непрерывна)

Рис. 4.1

(Функция имеет разрыв)

*у*



*f* (*x*0 +0)



*у*

*f* (*x*0 )

*М*0

*0*

*х*0

*х*

*f* (*x*0 ) *М*0

*f* (*x*0 – 0)

Рис. 4.2

*0 х*0 *х*

Рис. 4.3

### Классификация точек разрыва

**Определение 4.2.** Пусть

*x*0 – точка разрыва функции

*f* *х***,**

*x*  *D* , тогда

имеют место следующие типы разрывов:

1. Устранимый разрыв ***первого*** рода:

если *f* *x*0  0  *f* *x*0  0  *f* *x*0 , либо *f* *x*0  0 

*f* *x*0  0, а

*f* *x*0  не сущест-

вует (например, как на рис. 4.2).

1. Неустранимый разрыв ***первого*** рода, если односторонние пределы су-

ществуют, но не равны: *f* *x*0  0  *f* *x*0  0 (например, как на рис. 4.3).

1. Разрыв ***второго*** рода, если хотя бы один из пределов *f* *x*0  0

или

*f* *x*0  0 не существует или бесконечен (например, как на рис. 4.4, 4.5 и 4.6).

*y*

*0*

*x*0

*x*



*y*

*0*

*x*0

*x*

Рис. 4.4

Рис. 4.5

Рис. 4.6

*y*

*0*

*x*0 *x*

**Теорема 4.2.** Пусть задана функция

*y*  *f* *x*, *х**D*,

возьмем произвольный

*хо* *D*

и дадим ему бесконечно малое приращение  *х* . Пусть  *х* настолько ма-

ло, что *хо*   *х*  *х* *D* . Тогда соответствующее приращению  *х*

приращение

функции будет

 *y*  *f* *x* *f* ( *хo* ) . Если функция

*y*  *f* *x*, *х**D*,

непрерывна в

точке *хо* *D* , то

 *у*  0

*при*

 *х* 0.

### Доказательство

Согласно определению 1.3 и теореме 3.1 имеем: существует такая

-окрестность точки *х*0, на которой имеет место следующее представление (4.3)

функции: *f* (*x*)  *A*  (*x*) , где *А*  *f* (*xo* ),  (*x*) – бесконечно малая при *х*  *х*0 .

Тогда на этой -окрестности имеем:

 *y*  *f* *x* *f* ( *хo* )  *f* *xо*   (*х*)  *f* ( *хo* )  (*х*) 0 *при х*  *хо* (или, что

равносильно, при  *х*  0 ), поэтому  *у*  0 *при*  *х* 0, что и требовалось.

**Теорема 4.14 (непрерывность сложной функции).** Пусть функция *z*  *у*

определена в некоторой области *D*, а функция *y*  *f* *x* определена для всех *x* в

области *X*, при этом все *y*  *f* *x* лежат в области *D*. То есть задана сложная

функция *z*   *f* *x*, *x**Х****.*** Если функция *f* (*x*) непрерывна в точке *x*о*Х*, а функция

*у* непрерывна в соответствующей точке *yо* *D* , то и сложная функция

*z*   *f* *x* будет непрерывна в точке *x*о.

**Теорема 4.15.** Все элементарные функции непрерывны на области своего оп- ределения.

**Теорема 4.16.** Если функция

*y*  *f*

(*x*)

непрерывна на всём отрезке  *a*; *b* , то

1. на этом отрезке функция достигает своего наименьшего *m* и наибольшего *M*

значений;

1. функция

*y*  *f*

(*x*)

принимает все промежуточные значения, то есть, если число

*А* расположено между *m* и *M* ( *m*  *A*  *M* ), тогда обязательно найдётся хотя бы

один *х0* на отрезке  *a*; *b* , такой, что *f* (*xо* )  *A*.

### Образцы решения заданий по теме «Пределы и непрерывность»

Определение предела само по себе не даёт способов для его отыскания, ниже

приводятся некоторые правила и способы, с помощью которых можно найти неко- торые стандартные пределы, а затем можно находить пределы других функций.

Если функция *f* *х* непрерывна в точке *х*0, то можно использовать определе-

ние 4.1:

*l i m*

*x*  *x*0

*f* *x* *f*

*x*0 

- и получить ответ. А если точка *х*0 – точка разрыва

функции

*f* *х*, то возникают так называемые неопределенности. То есть неопре-

делённости возникают при попытке подставить предельное значение аргумента *х* в

функцию *f* *х*.

Основные неопределённости таковы:

0 

0 

 , 1 . Для «раскрытия»

   

,



любых неопределённостей обычно сначала неосновные неопределённости: (  0 ,   ,…) преобразованиями сводятся к основным неопределённостям,

а затем они «подгоняются» под замечательные пределы, либо производятся алгеб- раические сокращения, либо для нахождения предела используется таблица экви- валентных бесконечно малых.

**Замечание.** Во всех неопределенностях в фигурных скобках понимается сле- дующее: «0» – это бесконечно малая, «» – это бесконечно большая. Например:

0 

0 

- есть отношение двух бесконечно малых.

 

Имеют место два **з а м е ч а т е л ь н ы х п р е д е л а** , которые часто использу- ются, в том числе и при раскрытии неопределённостей:

### Теорема 4.17.

*l i m*

*u* 0

sin

*u*

*u*  1 – первый замечательный предел.

**Замечание:** этот стандартный предел обычно используется для раскрытия

неопределенности вида

0 при наличии тригонометрических функций.

0



 

### Теорема 4.18.

1 

## l i m

*u*  0

1  *u*

*u*  *e*,





 – второй замечательный предел.

 1  *z* 

*l i m*

1   

*z*

 *e*  2,718281... 

*z*     

**Замечание:** этот стандартный предел обычно используется для раскрытия

 

неопределенности вида 1 .

### Таблица эквивалентных бесконечно малых

При *u*  0 эквивалентны следующие бесконечно малые величины:

sin *u* ~ *u*, arcsin *u* ~ *u*, tg *u* ~ *u*, arctg *u* ~ *u*, ln (1 + *u*) ~ *u*, (e *u* – 1) ~ *u*, {(1 + *u*) *m* – 1} ~ *mu*.

Далее рассмотрим несколько примеров раскрытия неопределённостей.

**Примеры.** Найти пределы:

1. *l i m*

2 *n*3  3 *n* 2  5 *n*  4

3

    = [получена основная неопределённость] =



 

*n* 

4 *n*  2 *n*  3  

= [находим старшие степени в числителе, знаменателе и выносим за скобку] =

3  2 *n*3

3 *n* 2 5 *n* 4 

3 5 4

*n*  





*n*3 *n*3

  

*n*3 *n*3 

1.    

*n* 2 3

2  0  0  0 1

= *l i m*

   *l i m*

*n n*    .

*n* 

3  4 *n*3 2 *n* 3 

*n* 

4  2  3

4  0  0 2

*n*      2 3

 *n*3 *n*3 *n*3  *n n*





**Пояснение.** Дроби, у которых числитель постоянен, а знаменатель является бесконечно большой величиной, по теореме 2.2 являются бесконечно малыми, то есть стремятся к нулю.

1. *l i m*

3 *x* 2  5 *x* 1

3

    = [получена основная неопределённость] =



 

*x*  2 *x*

 4 *x*  9  

= [находим старшие степени в числителе, знаменателе и выносим за скобку] =

2  3 *x* 2 5 *x* 1  5 1

*x*  





*x* 2 *x* 2

 

*x* 2 

3   

*x* 2 3 3

= *l i m*

   *l i m x*  *l i m*

  0 .

*x* 

3  2 *x*3 4 *x* 9  *x*  

4 9 

*x*  2 *x* 

*x*  





  

*x*3 *x*3 3 

*x*



*x*   2   

 *x* 2 *x*3 

1. *l i m*

2 *x* 2  3 *x*  2

2

  0  = [получена основная неопределённость] =

0

  

*x* 2 3 *x*

 5 *x*  2  

= [решаем квадратные уравнения:

2 *x* 2  3 *x*  2  0, 3 *x* 2  5 *x*  2  0 , находим их

корни и разлагаем квадратные трёхчлены на множители, а затем используем тео- ремы 3.2 и 3.3] =

= *l i m*

(2 *x* 1)  (*x*  2)  (*сокращаем*)  *l i m*

2 *x* 1 

*l i m*

*x*  2

(2  *х* 1)

 5 .

*x*  2

(3 *x* 1)  (*x*  2)

2 *x* 2  5 *x*  3

 0 

*x*  2

3 *x* 1

*l i m*

*x*  2

(3  *х* 1) 7

1. *l i m*

  0  = [получена основная неопределённость] =

*x* 1  

3  *x*  5  *x*

= [решаем квадратное уравнение:

1. *x* 2  5 *x*  3  0 , находим его корни и разлагаем

квадратный трёхчлен на множители] =

= *l i m*

3  *x*  5  *x*

*x* 1

(2 *x*  3)  (*x* 1)

= [домножим дробь на сопряжённое выражение] =

(2 *x*  3)  (*x* 1)   3  *x*   2 2

5  *x*

5  *x*



= *l i m*

3  *x*

5  *x*

3  *x*

*x* 1

5  *x*





 



 *т*. *к*. (*a*  *b*)  (*a*  *b*)  *a*

 *b* 

 *l i m*

*x* 1

(2 *x*  3)  (*x* 1)  3  *x* 

3  *x*  5  *x*

 *l i m*

*x* 1

(2 *х*  3) 

*l i m*

*x* 1



 

 *l i m*

*x* 1

= 1



 *l i m*

*x* 1

 (*сократим*)  4   1   2 .

 2 *x*  2

3  *x*

5  *x*

 2  (*x*  1)

  2 

*x* 1

4

4

*x* 1  

**Пояснение.** При решении этого примера использовались теоремы 3.2 и 3.3.

3  *x*

5  *x*

4

Кроме того, использовалось следующее:

*l i m*

*x* 1

 4,

*l i m*

*x* 1



. До-

кажем первое из этих равенств (второе – аналогично) с помощью замены ( *х* 1 *z* ) и таблицы эквивалентных бесконечно малых:

*l i m*

3  *x*

*x* 1

 (*х* 1 *z*,

*z*  0,

*х*  *z* 1, 3  *х*  4  *z*)  *l i m* 

*z* 0

4  *z*

 2  *l i m*

*z* 0

 (0,25*z*  *и*, *и*  0)  2  *l i m*

*и* 0

1 0,25 *z*

1 *и* 0,5 

[используем

таблицу и эквивалентных бесконечно малых и определение 2.4] =

 

 (1 *u*)0,5 1

  

 2    *l i m*   0,5 *и*  1   2  *l i m* (1  0,5*и*)  2  2  0,5  0  2  2  4 .

  *u* 0 

0,5 *и*

  

*u* 0

     

3  *x*

5  *x*

4

**Замечание.** Для доказательства того, что

*l i m*

*x* 1

 4,

*l i m*

*x* 1

 ,

можно использовать и непрерывность линейной и степенной функций (см. теоре- му 4.15).

1. *l i m*

sin (2 *x*)   0 

= [получена основная неопределённость с тригономет-

*tg* (3 *x*)

 0 

*x* 0  

рическими функциями, поэтому используем таблицу эквивалентных бесконечно

малых и определение 2.4: sin (2 *x*) ~ 2 *х*, *tg* (3 *x*) ~ 3 *х* при

*x*  0] =

= *l i m*

 sin (2 *x*)  3 *x*

 2 *x*  11 *l i m*

2 *x*  2 .



*x* 0  2 *x*

*tg* (3 *x*)



3 *x* 



*x* 0 3 *x* 3

1. *l i m*

1 cos(3 *x*)   0 

= [получена основная неопределённость с тригоно-

*x*  *tg* (2 *x*)

 0 

*x* 0  

метрическими функциями, имеем: 1 cos(3*x*)  2 sin 2 (1,5 *х*); далее используем таб-

лицу эквивалентных бесконечно малых:

2 sin 2 (1,5 *х*)

~ 2 (1,5 *х*)2 = 4,5 *х*2,

*tg* (2 *x*) ~ 2 *х* при

*x*  0, определение 2.4 и теоремы 3.2 и 3.3 о пределах] =

 2 sin 2 (1,5 *х*) 2 *х*

4,5 *x* 2 

4,5 *x* 2

= *l i m* 

 

2 *tg* (2 *x*)

2  11 *l i m*

 2,25.

2

*x* 0 

4,5 *х*

2

2 *x* 

*x* 0 2 *x*

1. *l i m*

*x* 0

1 3 *x*  *x*

 1 = [получена основная неопределённость типа второго

замечательного предела, делаем замену: 1 3 *x* 1 *u*, *u*  0,

*x*   *u* , 2   6 ] =

3 *x u*

 6 





1 6

 *l i m*

*u* 0

1 *u* 

*u*  *l i m*  1 *u*  *u* 

*u* 0  

 

 (*z* 6

 1 ) 

*z z z z z z*

= [далее используем теорему 3.3 о пределе произведения и частного] =



  *l i m*



 *u* 0



1

1 *u*  *u*

6









 *е* 6 .

  5     

2 *x*

1. *l i m*  1 *x* 

1 =[получена основная неопределённость типа

*x*   

второго замечательного предела, замена: 1 5 1 1 , *z* ,

*x*   5 *z*, 2 *x*  10 *z* ] =

= *l i m*

 1 1

10 *z*



 *l i m*

  1 1 



*z*

*x*

10







*z*

= [далее используем теорему 3.3 о

*z*  *z* 







*z*  

*z*  

 

1  *z*

10

пределе произведения и частного] =

 *l i m*  1  

 *е*10 .

 *z* 





*z*  

1. *l i m*

*x* 

 *x*   ln (*x*  5)  ln (*x* 1)    (  ) 

=[получена не основ-

ная неопределённость, сведём её к основной неопределённости; по свойствам ло-

*x*  5  *x*  5  *x* 

4  *x*

гарифма:

*x*   ln (*x*  5)  ln (*x* 1)  *x*  ln

 ln 

*x* 1

*x* 1 

 ln  1  ] =

*x*  1

 4  *x*

   

= *l i m*

ln  1 

*x* 1

= [используем непрерывность логарифмической

*x*   

функции (теорема 4.15)] = ln

*l i m*

 4

 1

  1  =

*x*  

*x* 1 

*x*



= [получена основная неопределённость типа второго замечательного преде-

ла, замена:

1 4

*x*  1

1 1 , *z* ,

*z*

*x*  4 *z* 1; используем теорему 3.3 о пределах

произведения и частного] =

 1 4 *z* 1 

=

ln

*l i m*

 1



 ln 

  1  *z* 4 

1 1   

*z*   *z* 

*l i m*



 *z*   

*z*   

*z*  

   

  1





  ln

*e* 4 1

 4 .

1. Исследовать функцию на непрерывность:

 1

 2 *х* 1;

,



*x*

*y*   *х* 1, 1 *x*  3;



 *х* 2  9, *х*  3.





### Решение

Данная функция *у* (*х*) является составной (неэлементарной). Она составлена из трёх функций:

*f*1 (*x*)  2 ,

*x*

*х* 1,

*f* 2 (*x*)  *х* 1, 1 *х*  3,

*f*3 (*x*)  *x* 2  9, *х*  3.

Сначала исследуем каждую из этих составляющих (все они являются элемен- тарными функциями, поэтому по теореме 4.15 непрерывны на области своего оп- ределения) на непрерывность:

*f*1 (*x*)  2 ,

*x*

*х* 1,

* непрерывна при всех

*х*  0 ;

*f* 2 (*x*)  *х* 1, 1 *х*  3,

* непрерывна при всех *х*;

*f*3 (*x*)  *x* 2  9, *х*  3, – непрерывна при всех *х*.

Следовательно, пока выявилась одна точка разрыва. Найдём односторонние пределы (используя теорему 2.2):

*y* (0)  *f*1 (0)  *l i m*

*x* 0

*x*  0

2  2

*x*  0

  ,

*y* (0)  *f*1 (0)  *l i m*

*x* 0

*x*  0

2  2

*x*  0

  ,

так как односторонние пределы бесконечны, то *х* = 0 является точкой бесконечно- го разрыва второго рода.

Далее исследуем на непрерывность точки соединения различных составляю- щих функции *у* (*х*), то есть *х* = 1 и *х* = 3:

2

*x*

*y* (1) 

*x* 1

 2,

*y* (1  0)  *l i m y* (*x*)  *l i m*

2  2,

*y* (1  0)  *l i m y* (*x*)  *l i m*

(*x*  1)  2,

*x* 1

*x* 1

*x* 1 *x*

*x* 1

*x* 1

*x* 1

*x* 1

*x* 1

то есть выполняется критерий непрерывности: *y* (1)  *y* (1 0)  *y* (1 0) , поэтому в

точке *х* = 1 функция *у* (*х*) непрерывна. Затем: *y* (3)  *x* 2  9 

*x*  3

 0,

*y* (3  0)  *l i m y* (*x*)  *l i m*

(*x* 1)  4,

*y* (3  0)  *l i m y* (*x*)  *l i m*

(*x* 2  9)  0,

*x* 3

*x*  3

*x* 3

*x*  3

*x* 3

*x*  3

*x* 3

*x*  3

то есть односторонние пределы существуют, но не равны между собой, поэтому точка *х* = 3 является точкой неустранимого разрыва первого рода.

**Ответ:** функция *у* (*х*) непрерывна при всех *х*, кроме *х* = 0 и *х* = 3, причём точ- ка *х* = 0 является точкой бесконечного разрыва второго рода, а точка *х* = 3 – точ- кой неустранимого разрыва первого рода.



*у*

5/4

*0*

2

*х*

1. Исследовать на непрерывность:

*y*  5 .

1

4  3 *x*  2

### Решение

Данная функция является элементарной, поэто- му по теореме 4.15 она непрерывна при всех *x*  2 .

Найдём односторонние пределы:

Рис. 4.7

*y* (2  0)  *l i m*

*x* 2

5  5

1 1

 5

4  3 

 5

4  0

 5 ,

4

*x*  2

4  3 *x* 2

4  3 0

**Пояснения.** При

*х*  2,

*х*  2

величина (*х* – 2) является отрицательной и бес-

конечно малой, поэтому по теореме 2.2 величина

1

*х*  2

при

*х*  2,

*х*  2

будет яв-

ляться отрицательной и бесконечно большой, тогда

1.  

1

3

 1  0 . Аналогич-



но:

*y* (2  0)  *l i m*

*x* 2

5  5

1 1

 5

4  3 

 5

4  

 5  0,

 

*x*  2

4  3 *x* 2

4  3 0

то есть односторонние пределы существуют, но не равны между собой, поэтому точка *х* = 2 является точкой неустранимого разрыва первого рода (рис. 4.7).

**Ответ:** функция *у* (*х*) непрерывна при всех неустранимого разрыва первого рода.

*x*  2 , точка *х* = 2 является точкой

### ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

**Задача 1.** Найти предел

Лопиталя. **Таблица 1.**

*l i m* ( *f*

*x**a*

(*x*) / *g* (*x*)) ( *x*) , без помощи правила

**Задача 2.** Задана функция:



*y*(*x*)  *g*







*g*1(*x*), *если* : *x*  *a*;

2 (*x*), *если* : *a*  *x*  *b*; .

*g*3 (*x*), *если* : *x*  *b*.

Найти точки разрыва функции, если они существуют, определить характер точек разрыва и сделать схематический чертёж. **Таблица 2.**

**Таблица 1**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***f (x)*** | ***g (x)*** |  ***(x)*** | ***а*** |
| **1а** | *2x3 – 3x2 + 1* | *7x3 – 5x2 + x* | *1* | *∞* |
| **1б** | *x2 + x – 12* | *(5–x)½– (x+13)½* | *1* | *– 4* |
| **1в** | *sin2 (3x)* | *2x2* | *1* | *0* |
| **1г** | *3 – x* | *1* | *x / (2–x)* | *2* |
| **2а** | *2x – x2 + 5x 4* | *3x 4 – x + 2* | *1* | *∞* |
| **2б**  **2в 2г** | *(x+2)½ – (6–x)½*  *1 – cos (2x)*  *ln x – ln (x–1)* | *x2 – 3x + 2*  *3x2*  *(x + 1)–1* | *1*  *1*  *1* | *2*  *0*  *+∞* |
| **3а** | *2x7 – x 5 + x +1* | *x 2 – x 4 + 3x 7* | *1* | *∞* |
| **3б 3в**  **3г** | *(x+10)½ –(8–x)½*  *arcsin (3x) 2x –5* | *3x 2 + x – 2*  *2x 1* | *1*  *1*  *2x / (x–3)* | *–1*  *0*  *3* |
| **4а** | *11x 5 – x 3 + 3* | *2x + x 2+ 3x 5* | *1* | *∞* |
| **4б**  **4в 4г** | *(4+x)½ – (4–x) ½*  *1 –cos (2x) ln (x+3) – ln x* | *x 2+ x*  *1 – cos (3x)*  *(x+3)–1* | *1*  *1*  *1* | *0*  *0*  *+∞* |
| **5а** | *3x2 – 5x + 7* | *8 – 7x + 2x2* | *1* | *∞* |
| **5б 5в 5г** | *x 2– 5x +6*  *x sin (2x) 1 + x* | *(7–x)½ – (x+1) ½*  *1 – cos (2x) 1* | *1*  *1*  *(2+x) / x* | *3*  *0*  *0* |
| **6а** | *8x 9– x 7 – x 5 + 1* | *х 2– x 4+ x 6– x 9* | *1* | *∞* |
| **6б 6в 6г** | *8x 2– 3x – 5*  *x tgx*  *ln (x+9) – ln (x+3)* | *(3+x)½ – (5–x) ½*  *1 – cos (2x) x–1* | *1*  *1*  *1* | *1*  *0*  *+∞* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **7а** | *–2x 7+ x 5 + x +1* | *x 2+ x 4 – 5x7* | *1* | *∞* |
| **7б 7в 7г** | *(x+1)½ – (9–x) ½*  *arcsin 2 (3x)*  *2x – 9* | *3x2 + x – 52*  *2x3 1* | *1*  *1*  *2x / (x–5)* | *4*  *0*  *5* |
| **8а** | *11x 3 – x 5 + 3* | *2x – x 2 + 3x 5* | *1* | *∞* |
| **8б**  **8в 8г** | *(4–x) ½ – (4+x) ½*  *1 – cos (2x)2 ln (x+6) – ln x* | *x2 + x + x½ 1 – cos 2 (3x)*  *(x+3)–1* | *1*  *1*  *1* | *0*  *0*  *+∞* |
| **9а** | *3x 2 – 5x 4 + 7* | *8 – 7x 4+ 2x 2* | *1* | *∞* |
| **9б** | *2x 2 – 5x – 3* | *(7–x)½ – (x+1)½* | *1* | *3* |
| **9в** | *x 2 sin (2x)2* | *(1 – cos (2x))2* | *1* | *0* |
| **9г** | *4 – x* | *1* | *(2+x) / (x–3)* | *3* |
| ***№*** | ***f (x)*** | ***g (x)*** |  ***(x)*** | ***а*** |
| **10а** | *8x 5 + x 7 – x 9 + 1* | *х 2 + x 4 + x 6– x 9* | *1* | *∞* |
| **10б** | *18x 2 – 3x – 15* | *(3+x)½ – (5–x)½* | *1* | *1* |
| **10в 10г** | *x tg (x 3)*  *ln (x+9) – ln (x+1)* | *1 – cos (2x)2 x–1* | *1*  *1* | *0*  *+∞* |
| **11а** | *6x 7 – x 5 – x + 1* | *х 2 – x 4 –3x 7* | *1* | *∞* |
| **11б 11в 11г** | *(10–x)½ – (x+8)½*  *arcsin2 (3x) 2x – 3* | *3x 2 – x – 2*  *2x2 1* | *1*  *1*  *2x / (x–2)* | *1*  *0*  *2* |
| **12а** | *14x 5 – x 3– 3* | *2x + x 2 – 3x 5* | *1* | *∞* |
| **12б**  **12в 12г** | *(3+x)½ – (3–x)½*  *1 – cos 2 (2x) ln (x+5) –ln x* | *x 2 + x*  *1 – cos (3x)*  *(x+3)–1* | *1*  *1*  *1* | *0*  *0*  *+∞* |
| **13а** | *13x 2 + 5x – 7* | *8 + 7x –2x 2* | *1* | *∞* |
| **13б** | *x 2 +5x + 6* | *(7–x)½ – (x+13) ½* | *1* | *–3* |
| **13в** | *x½ sin 2 (2x)* | *1 – cos (2x)* | *1* | *0* |
| **13г** | *7 – x* | *1* | *(2+x) / (x–6)* | *6* |
| **14а** | *6x 9 + x 7 – x 5 +1* | *х 2 + x 4 – x 6 + x 9* | *1* | *∞* |
| **14б** | *8x 2 + 3x – 5* | *(3+x) ½ – (1–x) ½* | *1* | *–1* |
| **14в**  **14г** | *x ½ tg 2 x*  *ln (x+6) – ln (x+3)* | *1 – cos 2(2x) x–1* | *1*  *1* | *0*  *+∞* |
| **15а** | *8x 3 – x 2 + x 5* | *1 + 2x 2 – 3x 5* | *1* | *∞* |
| **15б** | *3x 2 + 5x – 22* | *(5+x)½ – (9–x)½* | *1* | *2* |
| **15в** | *x 2 arcsin (x 4)* | *sin2 (x) 3* | *1* | *0* |
| **15г** | *9 + x* | *1* | *x / (8+x)* | *–8* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **16а** | *2x 2 – 3x 4 + 11* | *2 – 5x 4 – x 2* | *1* | *∞* |
| **16б** | *9x – x 2 – 8* | *(3 – x)½ – (1+x)½* | *1* | *1* |
| **16в**  **16г** | *sin (3x) 2*  *ln (x+5) – ln (x+1)* | *1 –cos (2x)*  *x–1* | *1*  *1* | *0*  *+∞* |
| **17а** | *11x 3 – x 2 + 3* | *5x 4 + x 2 – x 3* | *1* | *∞* |
| **17б** | *9 – x 2* | *(4+x) ½ – (10–x) ½* | *1* | *3* |
| **17в** | *arcsin 2 (3x) 2* | *x 3 tg (2x)* | *1* | *0* |
| **17г** | *4 + x* | *1* | *2x / (3+x)* | *–3* |
| **18а** | *8x 5 – 4x 3 + 2x 6* | *1 + x 2 + x 4 – x 5* | *1* | *∞* |
| **18б**  **18в 18г** | *(x+3)½ – (5–x)½*  *cos 2 x – cos 3 x ln (x+4) – ln x* | *2x 2 + 7x – 9*  *3x 2*  *x–1* | *1*  *1*  *1* | *1*  *0*  *+∞* |
| ***№*** | ***f (x)*** | ***g (x)*** |  ***(x)*** | ***a*** |
| **19а** | *8x 5 – 4x 3 + 2x 6* | *1 + x 2 – x 4 – x 5* | *1* | *∞* |
| **19б**  **19в 19г** | *(x+5)½ – (9–x) ½*  *cos x – cos 2 x ln (x+4) – ln x* | *2x 2 – 7x + 6*  *3x 3*  *x–1* | *1*  *1*  *1* | *2*  *0*  *+∞* |
| **20а** | *8x 3 – x 2 + x* | *1+ 2x 2 – 3x 3* | *1* | *∞* |
| **20б** | *2x 2 – 5x + 2* | *(2+x)½ – (6 –x)½* | *1* | *2* |
| **20в** | *x arcsin x* | *sin 2 x* | *1* | *0* |
| **20г** | *9 – x* | *1* | *x / (8–x)* | *8* |
| **21а** | *2x 2 – 3x + 11* | *2 – 5x – x 2* | *1* | *∞* |
| **21б** | *x 2 – 9x + 8* | *(3+x)½ – (5–x)½* | *1* | *1* |
| **21в**  **21г** | *sin 2 (3x)*  *ln (x+5) – ln (x+1)* | *1 – cos (2x) x–1* | *1*  *1* | *0*  *+∞* |
| **22а** | *11x 3 – x 2 + 3* | *5x +x 2 – x 3* | *1* | *∞* |
| **22б** | *x 2 –9* | *(1+x)½ – (7–x)½* | *1* | *3* |
| **22в** | *arcsin 2 (3x)* | *x tg (2x)* | *1* | *0* |
| **22г** | *4 – x* | *1* | *2x / (3–x)* | *3* |
| **23а** | *8x 5 – 4x 3 + 2x* | *1 + x 2 – x 4 – x 5* | *1* | *∞* |
| **23б 23в 23г** | *(x+3)½ – (5–x)½*  *cos x – cos 3 x ln (x+1) – ln x* | *2x 2 – 7x + 5*  *3x 2*  *x–1* | *1*  *1*  *1* | *1*  *0*  *+∞* |
| **24а** | *6x 7 – x 5 – x 12 + 1* | *х 12 – x 4 – 3x 7* | *1* | *∞* |
| **24б**  **24в 24г** | *(10–x2)½ – (8+x2)½*  *arcsin 2 (3x)*  *2x – 3* | *3x 2 + x – 4*  *2x 2 + x 1* | *1*  *1*  *2x 2 / (2–x)* | *1*  *0*  *2* |
| **25а**  **25б** | *14x 5 – x 9 – 3*  *(9+x)½ – (9–x)½* | *2х + x 9 – 3x 5*  *2х 2 + x + x 3* | *1*  *1* | *∞*  *0* |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **25в 25г** | *1 – cos 2 (2x) ln (x+9) – ln x* | *1 – cos 3 (3x) (x+5)–1* | *1*  *1* | *0*  *+∞* |
| **26а** | *13x 2 + 5x 4 – 7* | *8 + 7x 4 – 2x 2* | *1* | *∞* |
| **26б** | *2x 2 + 5x – 3* | *(7–x)½ – (x+13)½* | *1* | *–3* |
| **26в** | *x1/3 sin 2 (2x)* | *1 – cos (2x)2* | *1* | *0* |
| **26г** | *7 – x* | *1* | *(2+ x2) / (x –6)* | *6* |
| **27а** | *15 – x 5 + x 7 – 6x 9* | *х 2 + x 4 – x 6 + x 9* | *1* | *∞* |
| **27б** | *18x 2 + 3x 3* | *(3+x 2)½ – (3–x 2)½* | *1* | *0* |
| **27в** | *x1/4 tg 2 (x 3)* | *1 – cos 2 (2x)* | *1* | *0* |
| **27г** | *ln (x+ 6) – ln (x+3)* | *x–2* | *1* | *+∞* |
| ***№*** | ***f (x)*** | ***g (x)*** |  ***(x)*** | ***а*** |
| **28а** | *x + 8x 2 – x 3* | *1 – 2x 2 – 3x 3* | *1* | *∞* |
| **28б** | *2x 2 + 5x – 18* | *(2 + x)½ – (6 – x)½* | *1* | *2* |
| **28в** | *x arcsin (x 3)* | *sin 2 (x 2)* | *1* | *0* |
| **28г** | *4 – x* | *1* | *x / (3–x)* | *3* |
| **29а** | *2x 2 +11– 3x 4* | *2 + 5x 4 – x 2* | *1* | *∞* |
| **29б** | *x 2 + 7x – 8* | *(3 – x)½ – (1 + x)½* | *1* | *1* |
| **29в**  **29г** | *sin 2 (3x)3*  *ln (x+3) – ln (x+1)* | *1 – cos (2x) 2*  *x–1* | *1*  *1* | *0*  *+∞* |
| **30а** | *3 + 11x 3 – x 4* | *5х 4 + x 2 – x 3* | *1* | *∞* |
| **30б** | *9 – x 2* | *(13–x)½ – (7+x)½* | *1* | *3* |
| **30в** | *arcsin 2 (3x)3* | *x½ tg (2x)2* | *1* | *0* |
| **30г** | *4 + x* | *1* | *2x / (3+x)* | *–3* |

**Таблица 2**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***№*** | ***g*1 *(x)*** | ***g*2 *(x)*** | ***g*3 *(x)*** | ***a*** | ***b*** |
| **1** | *– x 2 +1* | *2x – 1* | *x + 2* | *1* | *3* |
| **2** | *x + 3* | *– x +3* | *3 + x* | *0* | *4* |
| **3** | *x 2 +1* | *2x* | *x + 2* | *1* | *3* |
| **4** | *x – 3* | *x +1* | *3 + x* | *0* | *4* |
| **5** | *2x 2* | *x* | *2* | *0* | *1* |
| **6** | *x – 1* | *x 2* | *2x* | *0* | *2* |
| **7** | *(1 – x 2) 1/ 3* | *1* | *x– 2* | *0* | *2* |
| **8** | *cos x* | *1 – x* | *х 2* | *0* | *2* |
| **9** | *sin x* | *x* | *0* | *0* | *2* |
| **10** | *x* | *sin x* | *2* | *0* | *π /2* |
| **11** | *0* | *tg x* | *х* | *0* | *π /2* |
| **12** | *cos x* | *0* | *π /2* | *π /2* | *π* |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **13** | *2x 2* | *x* | *2 x* | *0* | *1* |
| **14** | *2x + 1* | *x 2 +1* | *2x* | *0* | *2* |
| **15** | *(1 + x 2)1/ 3* | *1* | *– x + 2* | *0* | *2* |
| **16** | *cos x* | *1 + x* | *– x 2* | *0* | *2* |
| **17** | *sin x* | *x* | *0* | *0* | *2* |
| **18** | *2x* | *3 sin x* | *2* | *0* | *π /2* |
| **19** | *0* | *2 tg x* | *x 2 – π* | *0* | *π /2* |
| **20** | *3 cos x* | *0* | *– π /2* | *π /2* | *π* |
| **21** | *2 x 2 – 1* | *cos x* | *tg x – 1* | *0* | *π* |
| **22** | *sin (2x)* | *х* | *1* | *0* | *π /2* |
| **23** | *2 x 2* | *x 3* | *2* | *0* | *1* |
| **24** | *x + 1* | *x 2– 1* | *7 – 2 x* | *0* | *2* |
| **25** | *(1 + x2)1/ 3* | *– 1* | *x – 3* | *0* | *2* |
| **26** | *cos x* | *1 + x* | *– x 2* | *0* | *2* |
| **27** | *sin x* | *х 2* | *0,5* | *0* | *2* |
| **28** | *x 3* | *sin x* | *2* | *0,5* | *π /2* |
| **29** | *0* | *tg x* | *x – π* | *0* | *π /2* |
| **30** | *cos x2* | *0* | *π /2* | *π /2* | *π* |
| ***№*** | ***g*1 *(x)*** | ***g*2 *(x)*** | ***g*3 *(x)*** | ***a*** | ***b*** |

### ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Определение предела функции на бесконечности и в точке.
2. Что такое бесконечно большие и бесконечно малые? Каковы свойства бесконечно малых?
3. Основная теорема о пределах (о связи предела, функции и бесконечно малой).
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах (предел суммы, разности, произведения и частного).
5. Что такое: основные и неосновные неопределённости. План раскрытия неопределённостей.
6. Первый и второй замечательные пределы, их применение для раскрытия неопределённостей.
7. Непрерывность функции, критерий непрерывности.
8. Точки разрыва функции и их классификация.
9. Непрерывность основных элементарных функций.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Мартынов, Г.П. Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебно-методический комплекс / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2014. – 1,61 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
2. Мартынов, Г.П. Рабочая программа дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методический документ / Г.П. Мартынов. –Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 18 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 04.07.2016, серия А № 001511/2016 / [www.informio.ru](http://www.informio.ru/).
3. Мартынов, Г.П. «Фонд оценочных средств дисциплины «Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва,

«ИНФОРМИО», 2016 – 14 с. // Свидетельство о публикации в СМИ

«ИНФОРМИО» от 15.11.2016, серия А № 002150/2016 / [www.informio.ru](http://www.informio.ru/).

1. Мартынов, Г.П. Организация самостоятельной работы студентов направления подготовки «Картография и геоинформатика» при изучении дисциплины

«Математика» [Электронный ресурс]: методическая разработка / Г.П. Мартынов. – Москва, «ИНФОРМИО», 2016 – 7 с. // Свидетельство о публикации в СМИ «ИНФОРМИО» от 26.07.2016, серия А № 001637/2016 / [www.informio.ru](http://www.informio.ru/).

1. Мартынов, Г.П. Математика для экологов и картографов [Электронный ресурс]: учебное пособие. Ч. 1. / Г.П. Мартынов. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 2,63 МБ. Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/
2. Мартынов, Г.П. Математика для картографов и экологов [Текст]: учебное пособие. В 4-х ч. Ч. 1 / Г.П. Мартынов. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. – 192 с.
3. Вербная, В.П. Математика для дистанционного обучения: учебное пособие, издание 2-ое, стереотипное (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – Новосибирск: СГУГиТ, 2016. –

278 с.

1. Вербная, В.П. Математика для дистанционного изучения [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов (Рекомендовано СибРУМЦ) / В.П. Вербная, Г.П. Мартынов, Е.С. Плюснина. – М.: ИНФОРМРЕГИСТР, 2013. – 230 с.

Режим доступа: http//www.lib/ssga.ru/

1. Мартынов, Г.П. Векторная алгебра в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Г.П. Мартынов. – Москва,

«ИНФОРМИО», 2017 – 39 с. // Свидетельство о публикации в СМИ

«ИНФОРМИО» от 11.01.2017, серия А № 000031/2017 / [www.informio.ru](http://www.informio.ru/).