

Relazione di Laboratorio 2

Esperienza A3

A.A. 2023/2024

Luciano Leotta
Matricola 556372

22/11/2023

1 Cenni teorici

Lo scopo di questa esperienza è determinare la resistività di diverse barrette a base di grafite dalla seconda legge di Ohm

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1.1)$$

in cui ρ è la resistività del materiale di cui è composta la resistenza R , l è la lunghezza ed S l'area della sezione della resistenza.

La 1.1 enuncia che la resistenza di uno oggetto dipende sia dalle sue caratteristiche fisiche, descritte da ρ , sia dalle sue caratteristiche geometriche, descritte da l e da S . In particolare si evince che una resistenza è direttamente proporzionale alla sua lunghezza e inversamente proporzionale alla sua sezione.

2 Strumenti e metodo di misura

Strumenti utilizzati per eseguire l'esperimento:

- Barrette a base di grafite di durezza B, 2B, 8B, HB e 2H
- Multimetro digitale Rigol DM3058SE
- Supporto di stabilizzazione
- Calibro con nonio con sensibilità $0,02mm$
- Cavi a coccodrillo

Al fine di determinare la resistività delle diverse barrette si è utilizzato il multimetro in configurazione ohmetro 4-Wire. Tale configurazione è stata usata, come indicato dal costruttore dello strumento, per diminuire l'errore associato alle misure di resistenza effettuate. In questa

configurazione il multimetro fa anche da generatore, erogando una tensione ai connettori Hi-Lo. Dunque, sono stati collegati gli elettrodi Hi-Lo agli estremi della barretta ed è stato scelto un punto di zero, a cui è stato collegato un morsetto. Tenuto fisso il punto di zero, si è utilizzato un altro morsetto per misurare la resistenza. Spostando il secondo morsetto a diverse distanze dal punto di zero e misurando la resistenza della specifica configurazione, è possibile verificare 1.1. In particolare, per le diverse configurazioni, si hanno ρ e S costanti, l variabile. Essendo le barrette di forma cilindrica, la sezione è determinata da

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad (2.1)$$

in cui d è il diametro della barretta.

Tale procedura è stata ripetuta per tutte le barrette di grafite. Le diverse distanze e il diametro delle barrette sono state determinate con un calibro con nonio.

3 Analisi dati

Le incertezze statistiche delle misure sono state ritenute molto più piccole rispetto alle sensibilità di tutti gli strumenti utilizzati, dunque per ogni misura presa è stata considerata come incertezza la sensibilità dello strumento usato per effettuare tale misura.

Diametri misurati:

- Per la barretta B: $d = (8.00 \pm 0.02)mm$
- Per la barretta HB: $d = (7.26 \pm 0.02)mm$
- Per la barretta B: $d = (7.10 \pm 0.02)mm$
- Per la barretta 8B: $d = (7.06 \pm 0.02)mm$
- Per la barretta 2H: $d = (7.50 \pm 0.02)mm$

Dunque, da 2.1, le sezioni sono:

- Sezione B: $S = (50.26 \pm 0.25)mm^2$
- Sezione HB: $S = (41.40 \pm 0.23)mm^2$
- Sezione B: $S = (39.59 \pm 0.22)mm^2$
- Sezione 8B: $S = (39, 14 \pm 0.22)mm^2$
- Sezione 2H: $S = (44.18 \pm 0.24)mm^2$

Gli errori ΔS sono stati calcolati, su ciascuna sezione, con

$$\Delta S = \sqrt{\left(\frac{dS}{d} \Delta d \right)^2} = \pi \frac{d}{2} \Delta d \quad (3.1)$$

R_1	ΔR_1	Unità di misura	l	Δl	Unità di misura
0.37	0.01	Ω	16.88	0.02	mm
0.43	0.01	Ω	26.88	0.02	mm
0.46	0.01	Ω	33.86	0.02	mm
0.50	0.01	Ω	42.74	0.02	mm
0.54	0.01	Ω	51.10	0.02	mm
0.59	0.01	Ω	61.58	0.02	mm
0.64	0.01	Ω	71.82	0.02	mm
0.68	0.01	Ω	79.90	0.02	mm
0.74	0.01	Ω	91.20	0.02	mm
0.77	0.01	Ω	96.00	0.02	mm

Table 1: Barretta 2B

R_2	ΔR_2	Unità di misura	l	Δl	Unità di misura
0.81	0.01	Ω	14.12	0.02	mm
0.89	0.01	Ω	21.22	0.02	mm
0.96	0.01	Ω	30.06	0.02	mm
1.06	0.01	Ω	40.72	0.02	mm
1.12	0.01	Ω	46.42	0.02	mm
1.18	0.01	Ω	54.74	0.02	mm
1.26	0.01	Ω	62.90	0.02	mm
1.32	0.01	Ω	70.00	0.02	mm
1.43	0.01	Ω	82.20	0.02	mm
1.51	0.01	Ω	91.00	0.02	mm

Table 2: Barretta HB

R_3	ΔR_3	Unità di misura	l	Δl	Unità di misura
0.33	0.01	Ω	19.26	0.02	mm
0.37	0.01	Ω	26.12	0.02	mm
0.41	0.01	Ω	34.52	0.02	mm
0.46	0.01	Ω	43.84	0.02	mm
0.49	0.01	Ω	49.76	0.02	mm
0.53	0.01	Ω	59.04	0.02	mm
0.57	0.01	Ω	67.40	0.02	mm
0.60	0.01	Ω	73.54	0.02	mm
0.65	0.01	Ω	84.86	0.02	mm
0.71	0.01	Ω	96.18	0.02	mm

Table 3: Barretta B

R_4	ΔR_4	Unità di misura	l	Δl	Unità di misura
0.20	0.01	Ω	18.44	0.02	<i>mm</i>
0.24	0.01	Ω	27.30	0.02	<i>mm</i>
0.27	0.01	Ω	31.62	0.02	<i>mm</i>
0.29	0.01	Ω	41.98	0.02	<i>mm</i>
0.32	0.01	Ω	50.72	0.02	<i>mm</i>
0.35	0.01	Ω	58.00	0.02	<i>mm</i>
0.39	0.01	Ω	68.90	0.02	<i>mm</i>
0.43	0.01	Ω	78.70	0.02	<i>mm</i>
0.45	0.01	Ω	84.78	0.02	<i>mm</i>
0.48	0.01	Ω	96.26	0.02	<i>mm</i>

Table 4: Barretta 8B

R_5	ΔR_5	Unità di misura	l	Δl	Unità di misura
0.73	0.01	Ω	17.04	0.02	<i>mm</i>
0.89	0.01	Ω	26.00	0.02	<i>mm</i>
1.11	0.01	Ω	37.14	0.02	<i>mm</i>
1.32	0.01	Ω	48.38	0.02	<i>mm</i>
1.49	0.01	Ω	57.82	0.02	<i>mm</i>
1.64	0.01	Ω	65.72	0.02	<i>mm</i>
1.82	0.01	Ω	75.60	0.02	<i>mm</i>
1.98	0.01	Ω	84.16	0.02	<i>mm</i>
2.06	0.01	Ω	87.58	0.02	<i>mm</i>
2.21	0.01	Ω	96.24	0.02	<i>mm</i>

Table 5: Barretta 2H

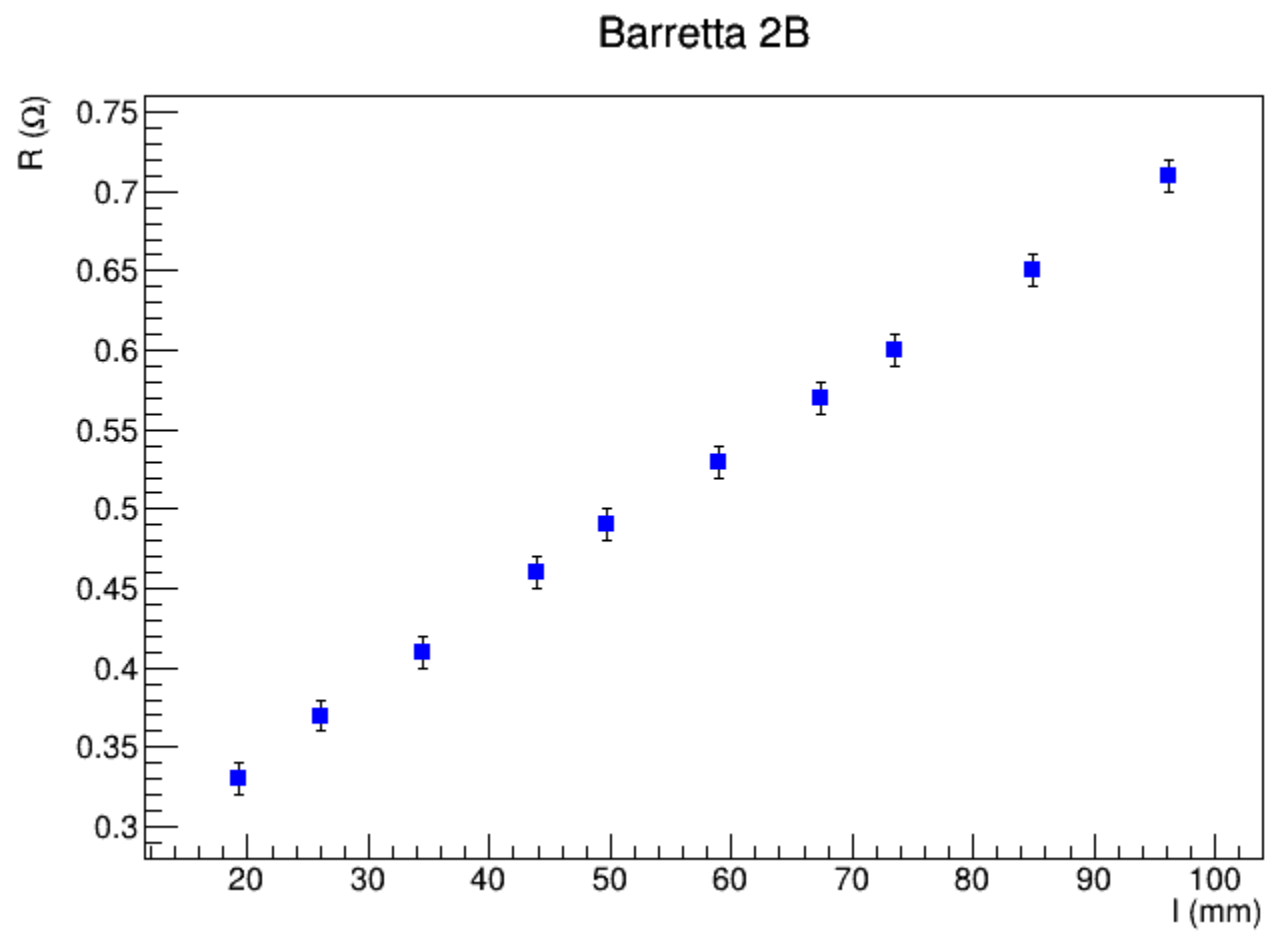


Figure 1: Plot Barretta 2B

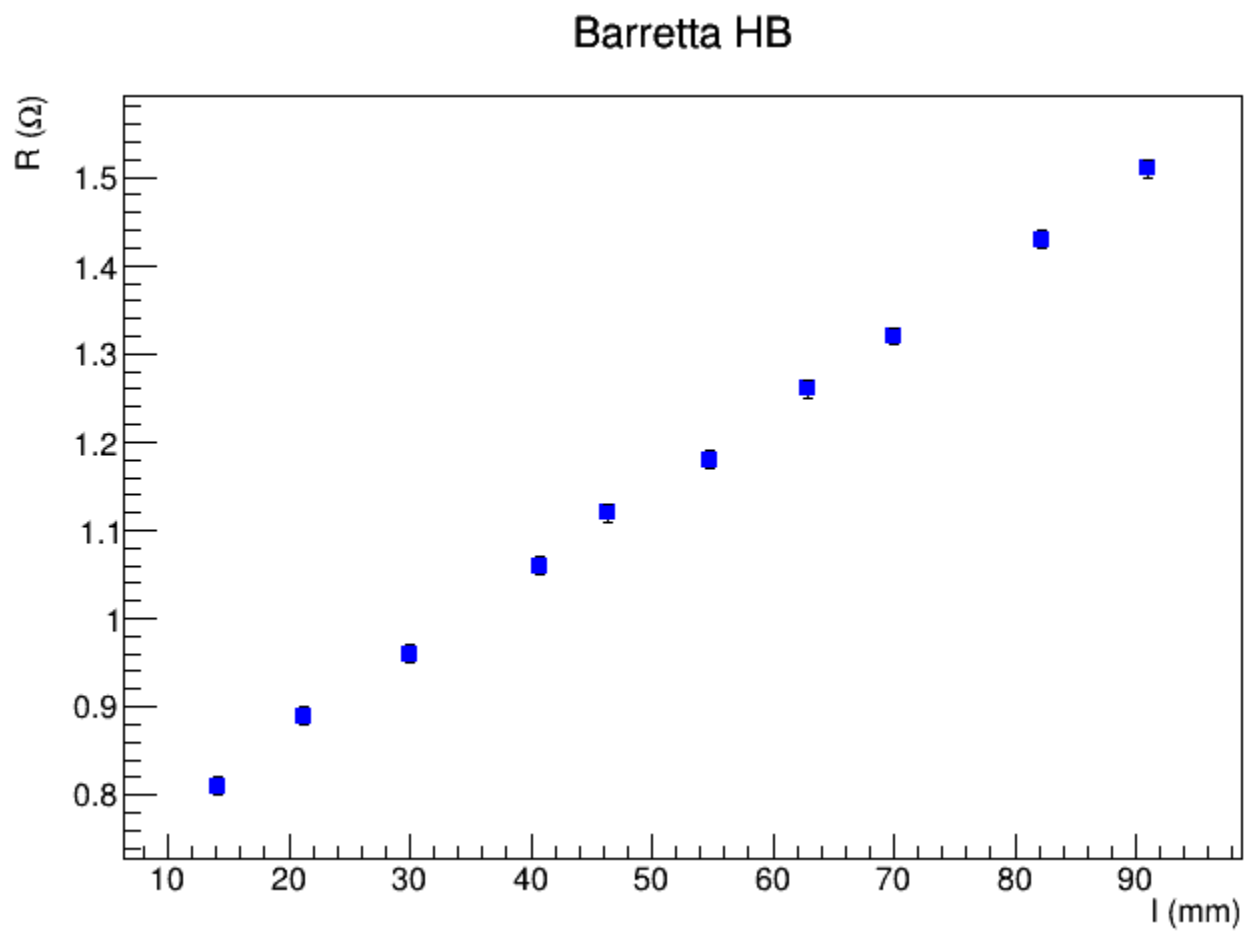


Figure 2: Plot Barretta HB

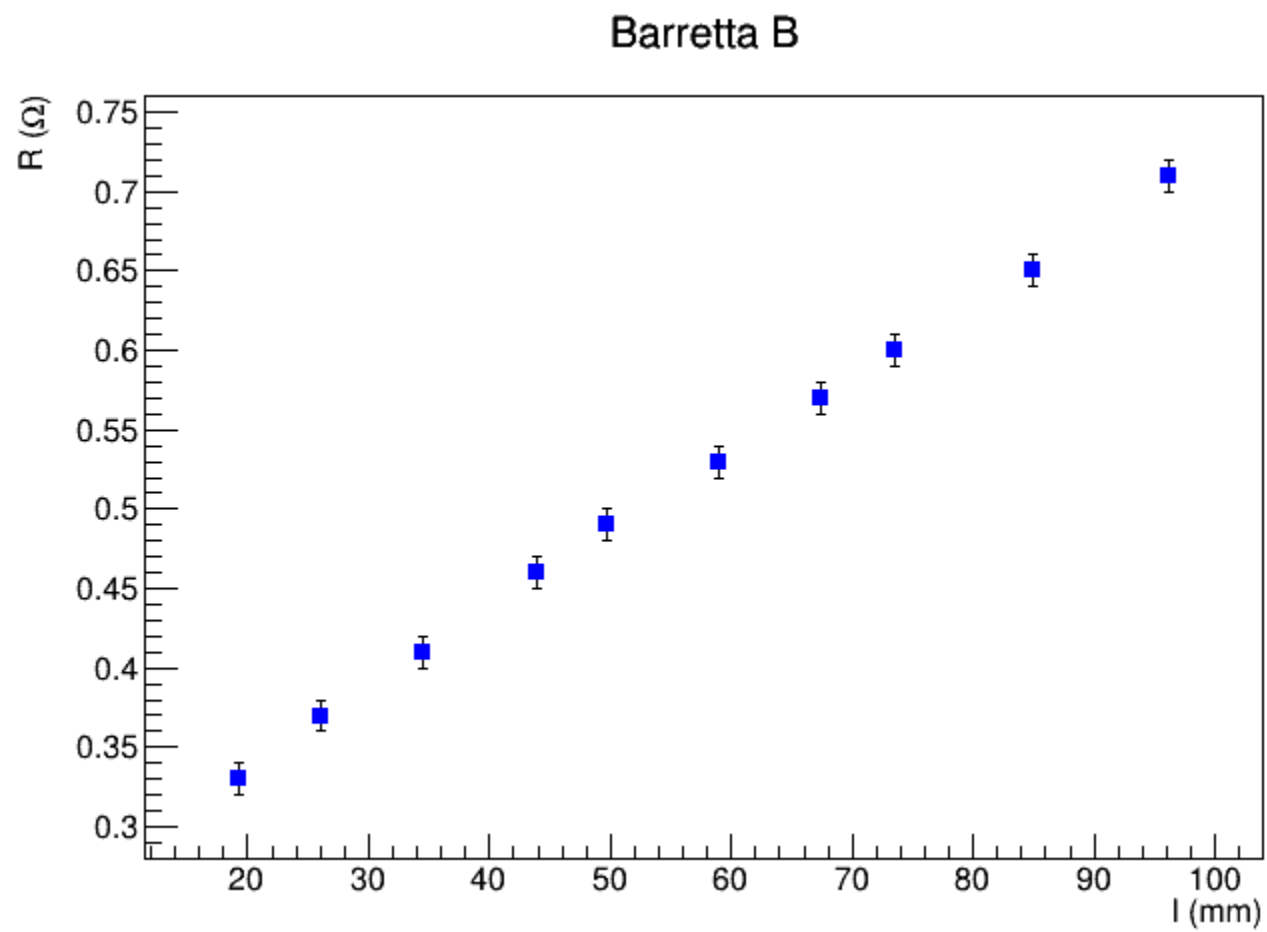


Figure 3: Plot Barretta B

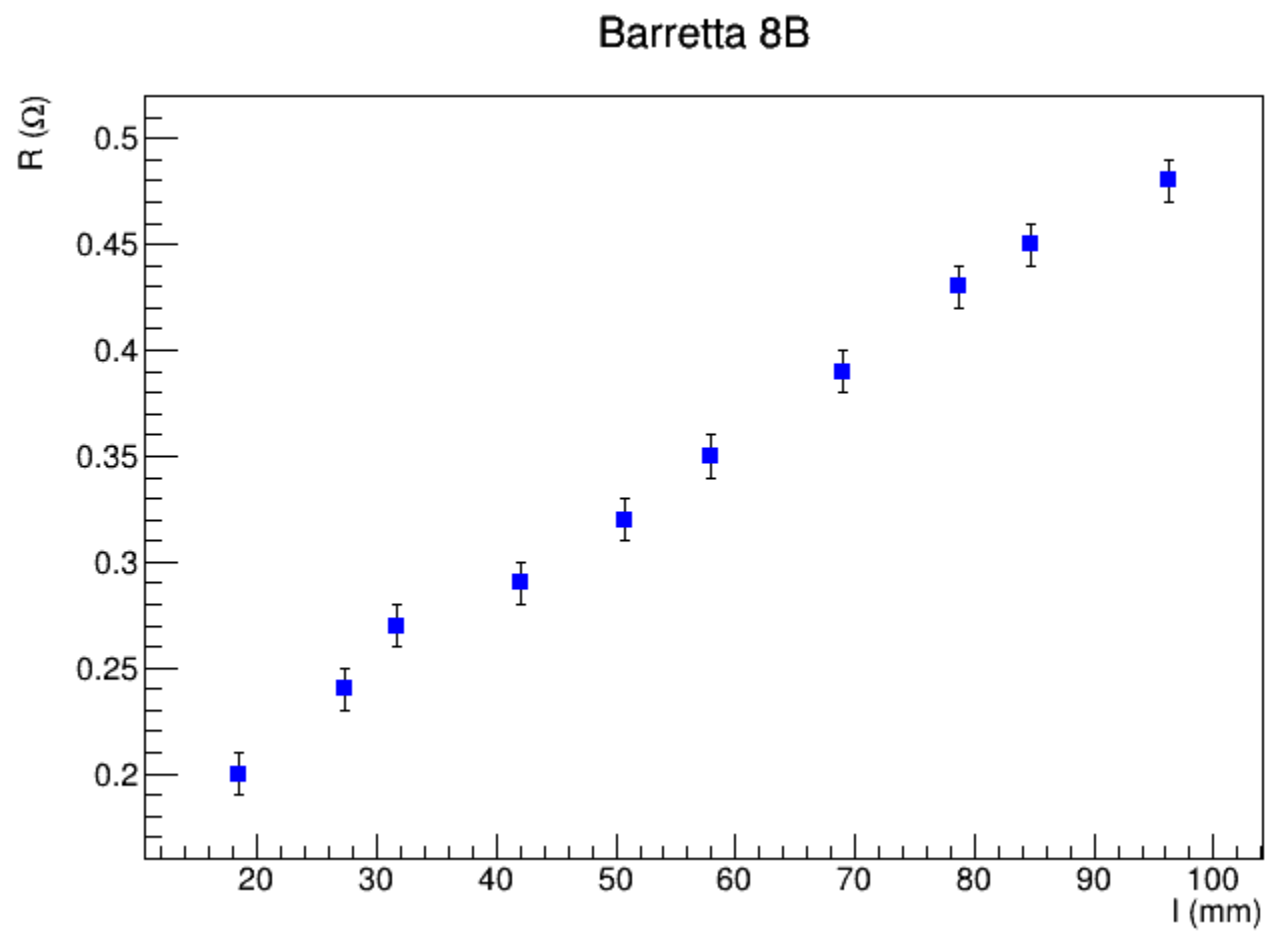


Figure 4: Plot Barretta 8B

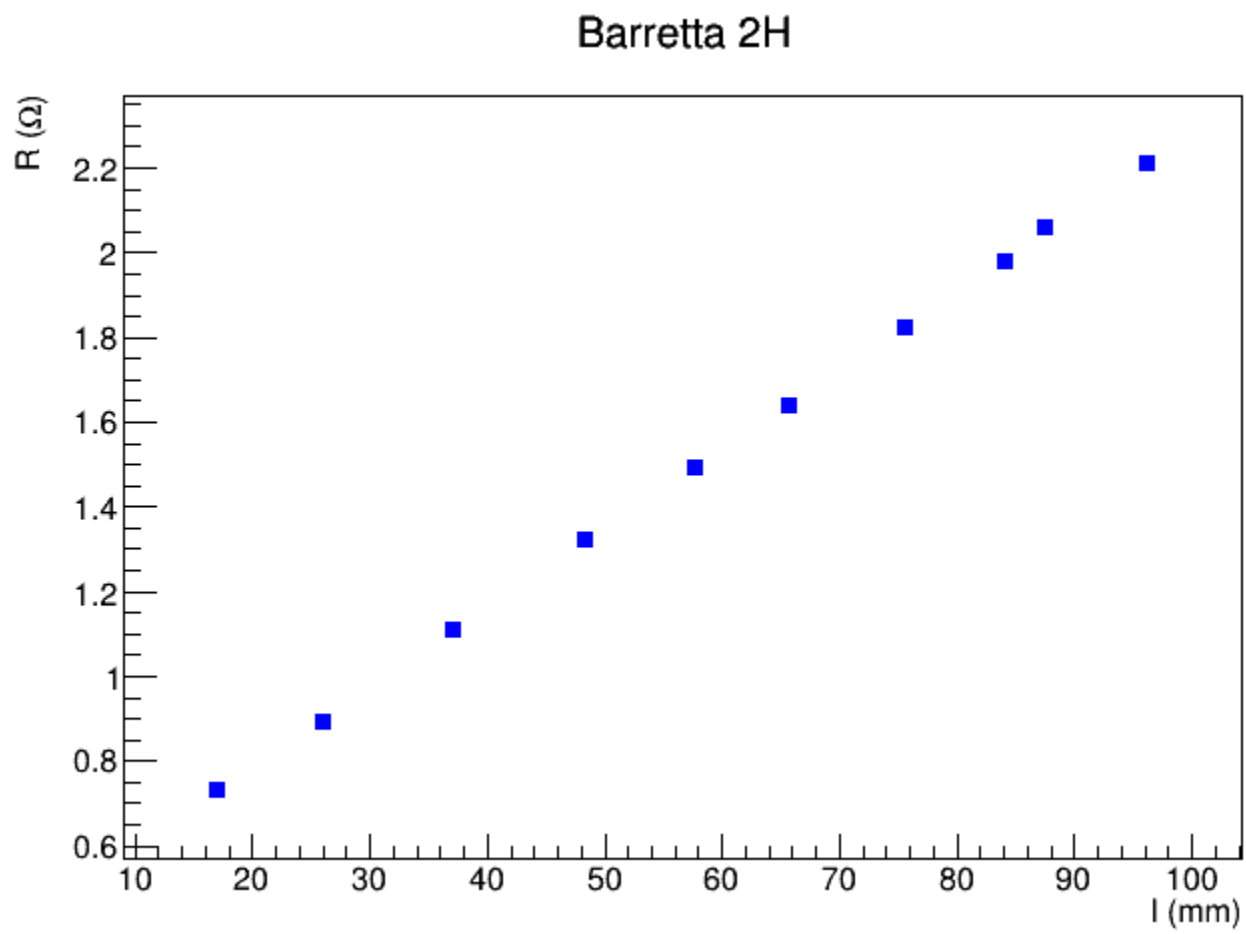


Figure 5: Plot Barretta 2H

3.1 Best fit

La procedura di best fit che è stata utilizzata per l'analisi dei dati è basata sulla minimizzazione del χ^2 così definito:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - F(x_i))^2}{\sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial F(x_i)}{\partial x} \sigma_{x_i}\right)^2} \quad (3.2)$$

dove gli y_i sono i valori della variabile dipendente misurata, gli $F(x_i)$ sono i valori previsti dal modello nella sua forma funzionale (cioè dipendenti dai parametri che si desidera trovare), gli x_i sono i valori misurati della variabile indipendente, i σ_{y_i} sono gli errori associati alla variabile dipendente, i σ_{x_i} sono gli errori associati alla variabile indipendente ed N il numero di valori su cui si sta effettuando la procedura di best fit.

Per verificare 1.1 è stata eseguita una procedura di best fit, modellizzata nel seguente modo:

$$Y = MX \quad (3.3)$$

con $Y = R$, $X = l$ ed $M = \frac{\rho}{S}$.

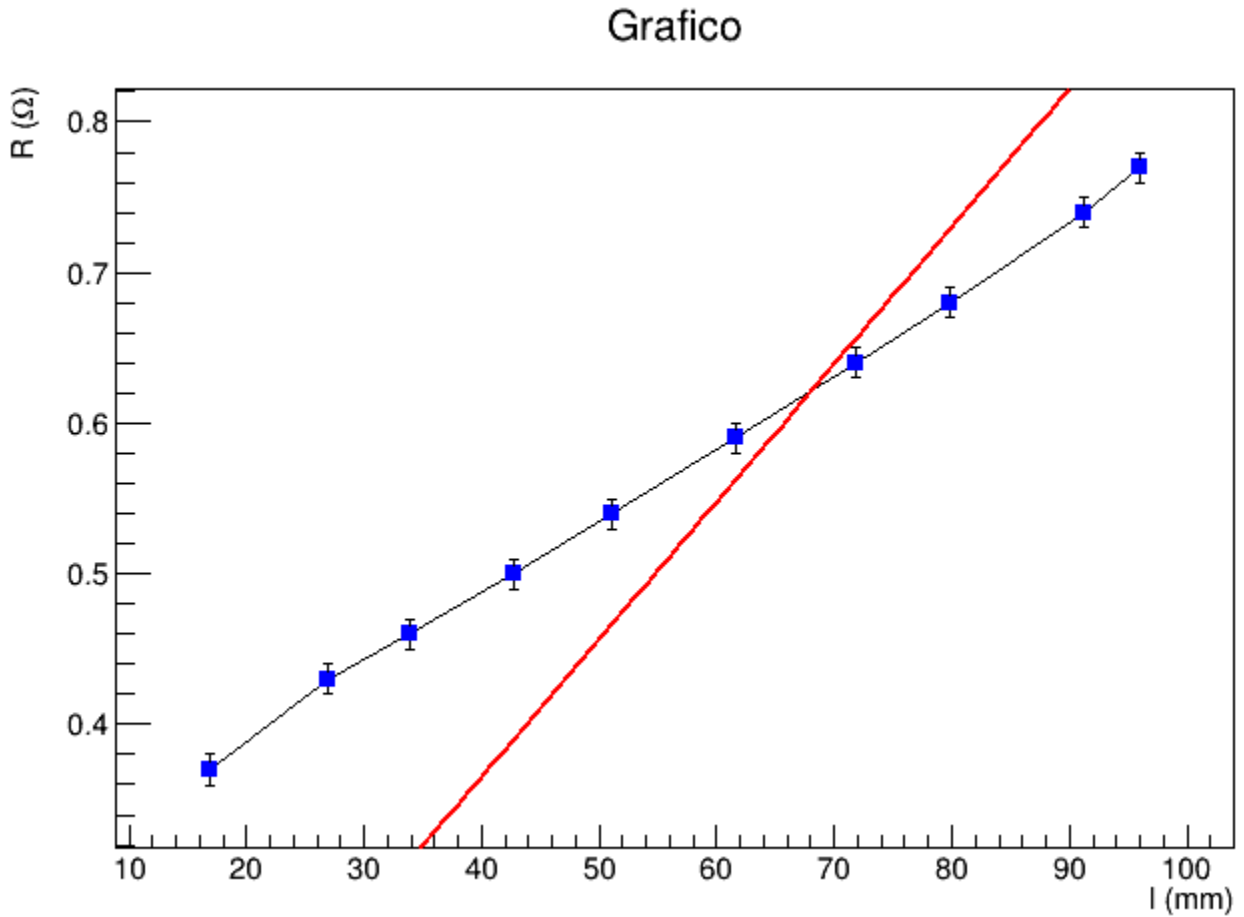


Figure 6: Best fit con 1 parametro; barretta 2B

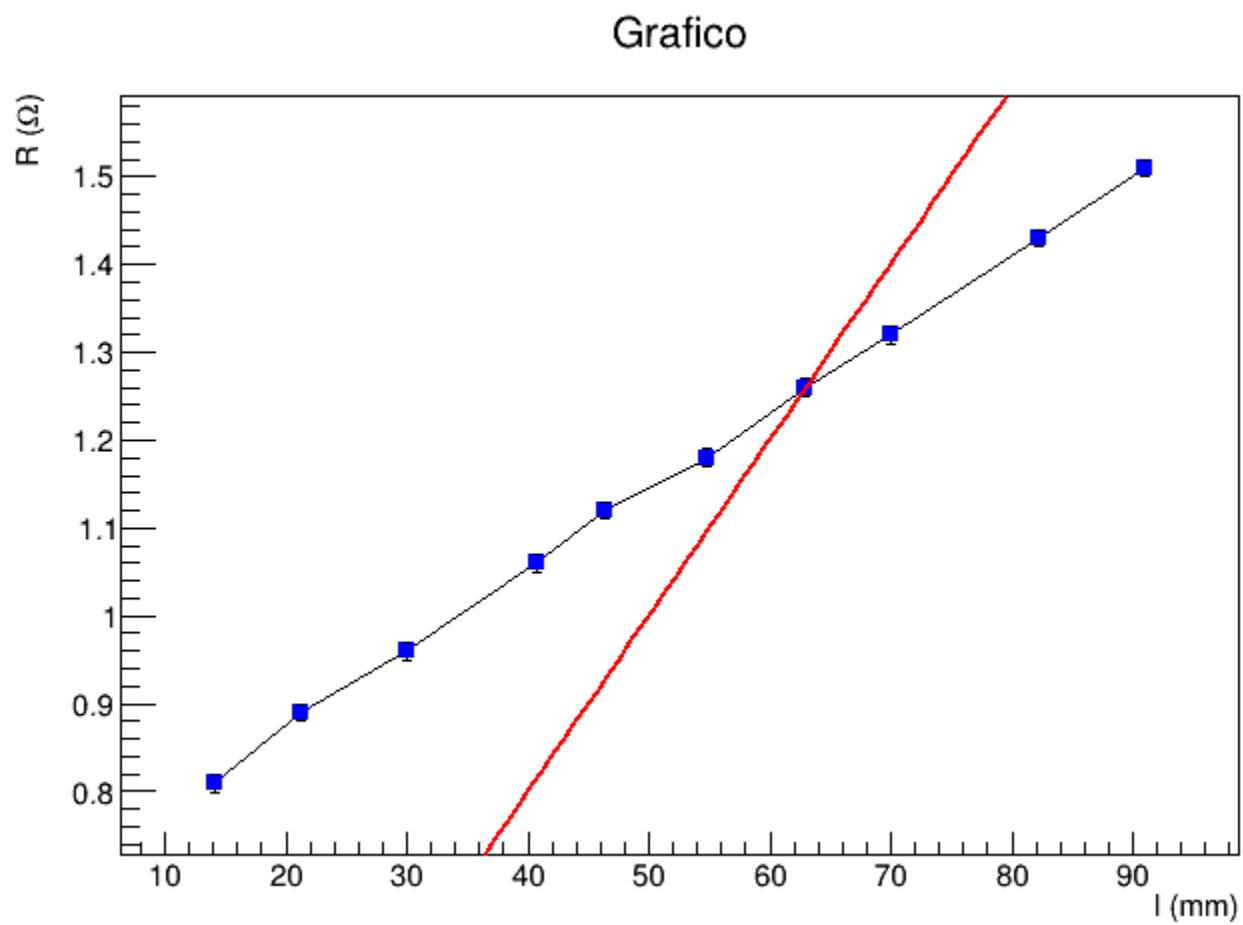


Figure 7: Best fit con 1 parametro; barretta HB

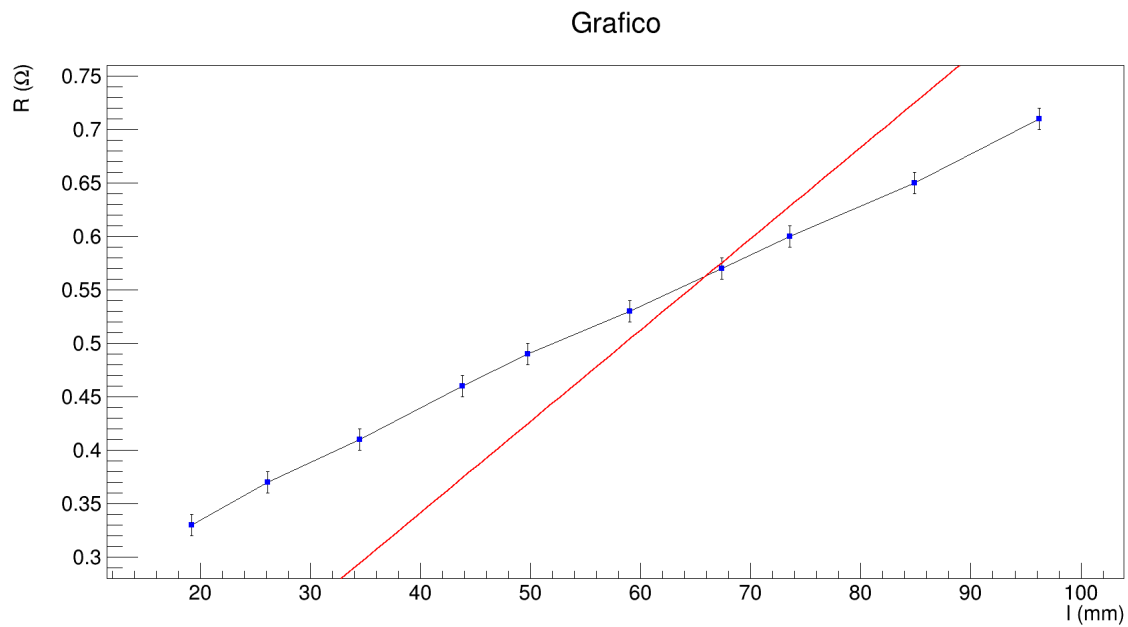


Figure 8: Best fit con 1 parametro; barretta B

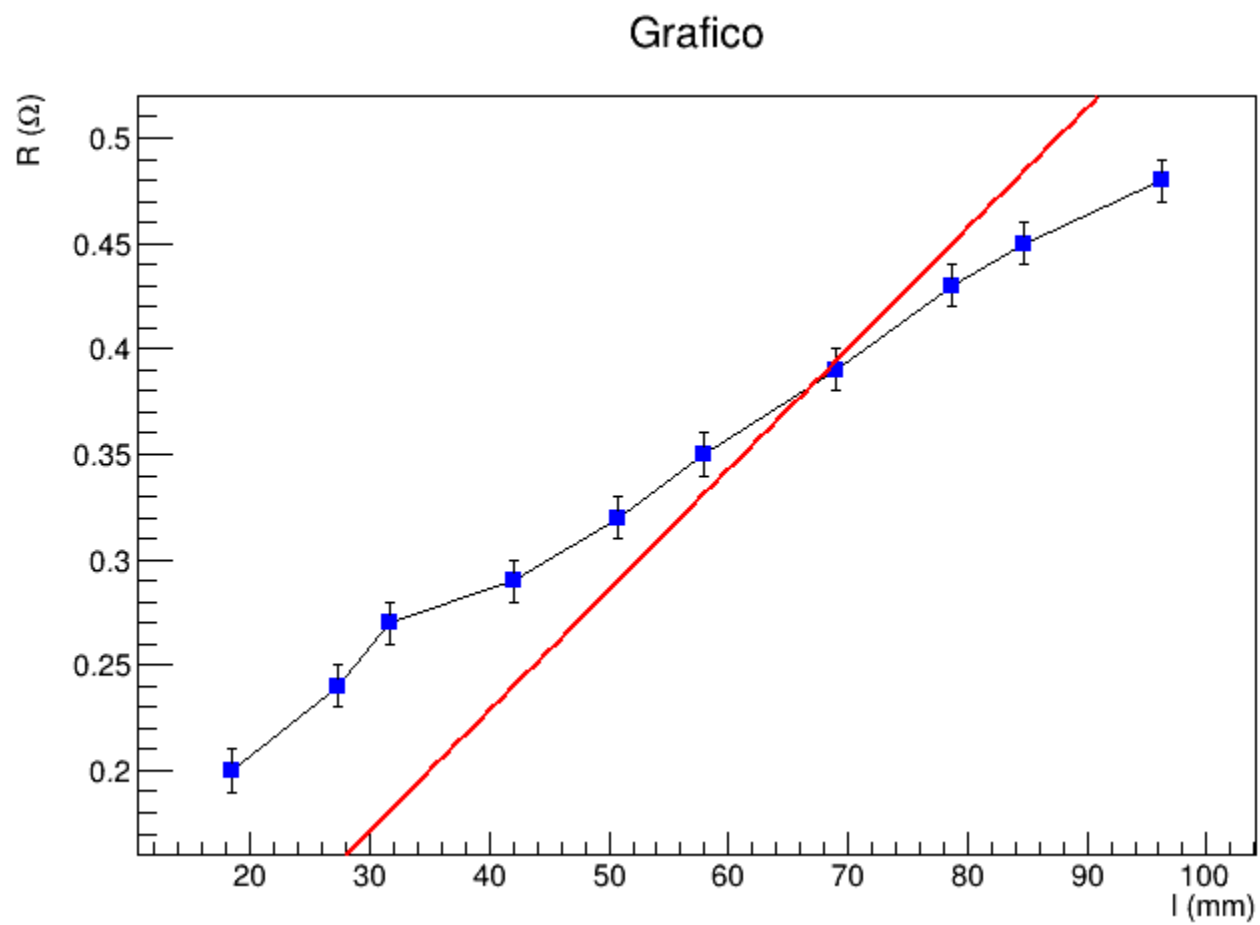


Figure 9: Best fit con 1 parametro; barretta 8B

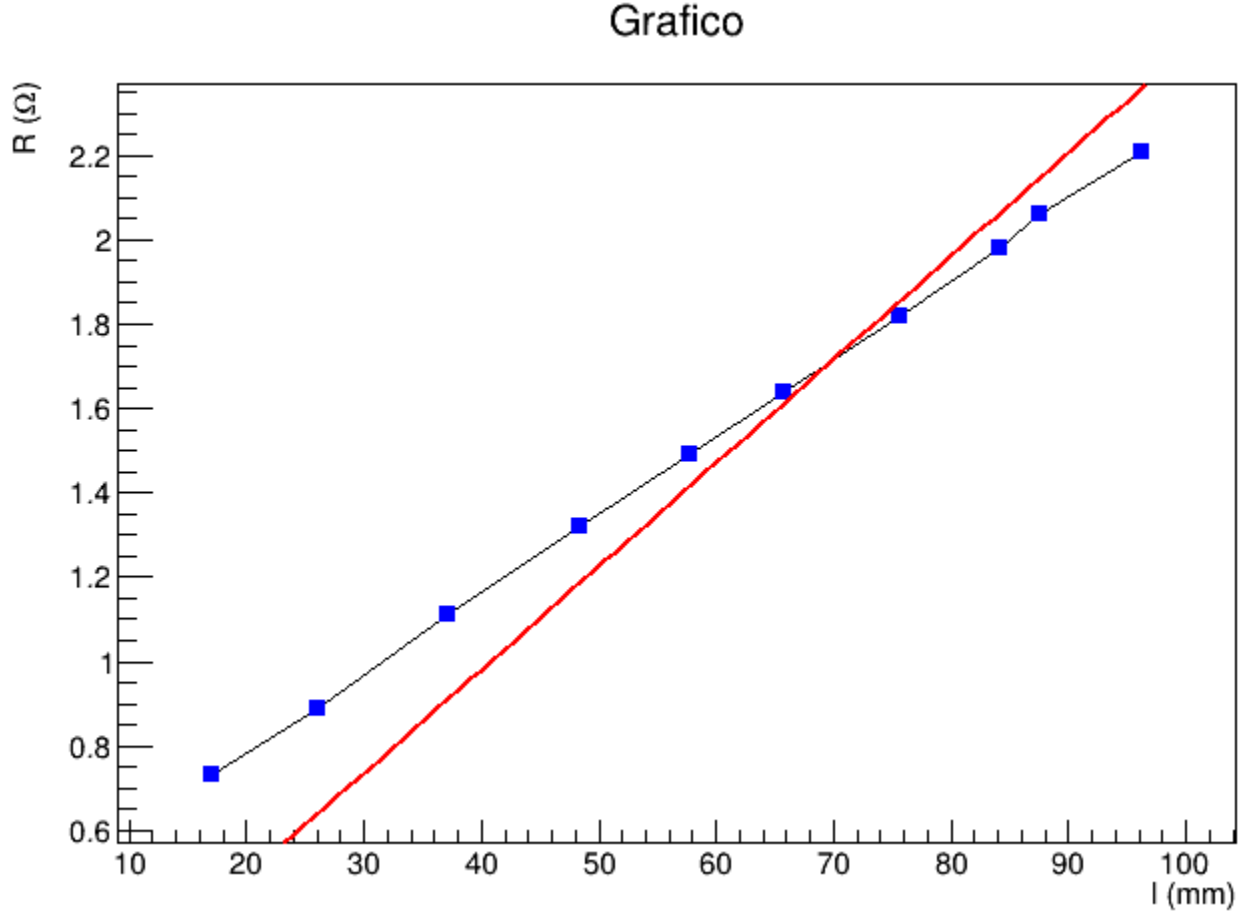


Figure 10: Best fit con 1 parametro; barretta 2H

I parametri calcolati con la procedura di best fit per il modello 3.3 sono:

- $M = (9.13 \pm 0.05)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$; Per la barretta 2B
- $M = (20.01 \pm 0.06)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$; Per la barretta HB
- $M = (8.54 \pm 0.05)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$; Per la barretta B
- $M = (5.72 \pm 0.05)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$; Per la barretta 8B
- $M = (24.52 \pm 0.05)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$; Per la barretta 2H

Dai grafici 6, 7, 8, 9, 10 si nota che la procedura di best fit sul modello 3.3 non produce un risultato coerente. Infatti, considerando gli scarti dei valori misurati dai valori attesi dal modello, per ciascuna barretta, si ha (ignorando le incertezze associate):

$Y - F(X)$	Unità di misura	X	Unità di misura
0.2178	Ω	16.88	mm
0.1835	Ω	26.88	mm
0.1478	Ω	33.86	mm
0.1057	Ω	42.74	mm
0.0722	Ω	51.00	mm
0.0266	Ω	61.58	mm
-0.0209	Ω	71.82	mm
-0.0487	Ω	79.90	mm
-0.0889	Ω	91.20	mm
-0.1038	Ω	96.00	mm

Table 6: Scarti barretta 2B

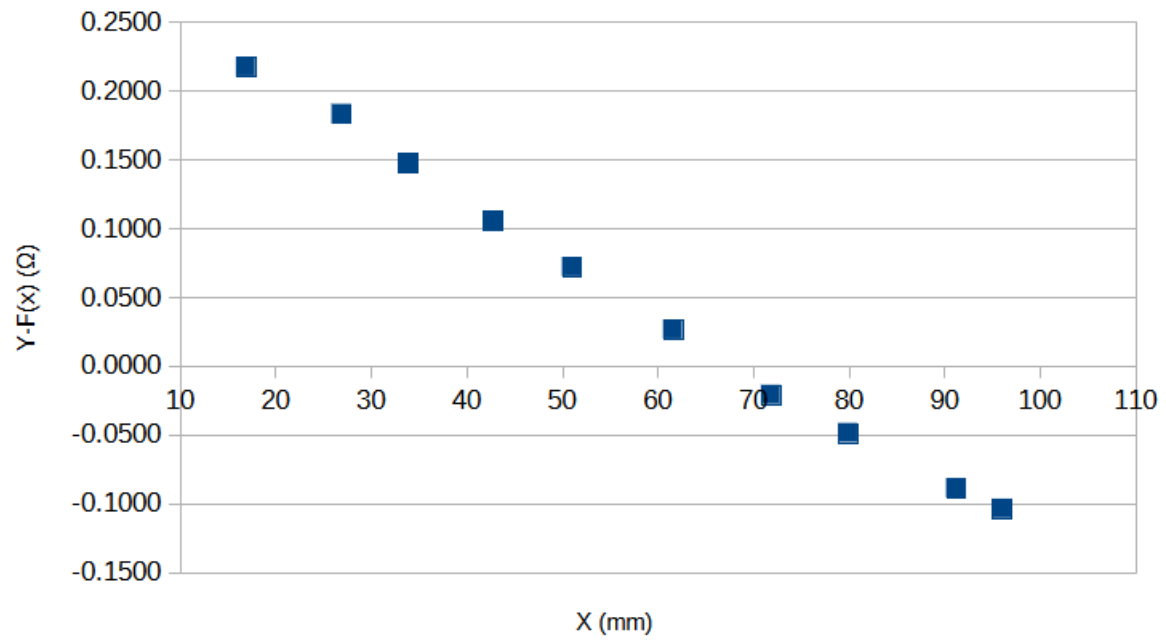


Figure 11: Plot Scarti barretta 2B

$Y - F(X)$	Unità di misura	X	Unità di misura
0.5294	Ω	14.12	mm
0.4673	Ω	21.22	mm
0.3594	Ω	30.06	mm
0.2410	Ω	40.72	mm
0.1869	Ω	46.42	mm
0.0864	Ω	57.74	mm
-0.0029	Ω	62.90	mm
-0.0800	Ω	70.00	mm
-0.2182	Ω	82.20	mm
-0.3093	Ω	91.00	mm

Table 7: Scarti barretta HB

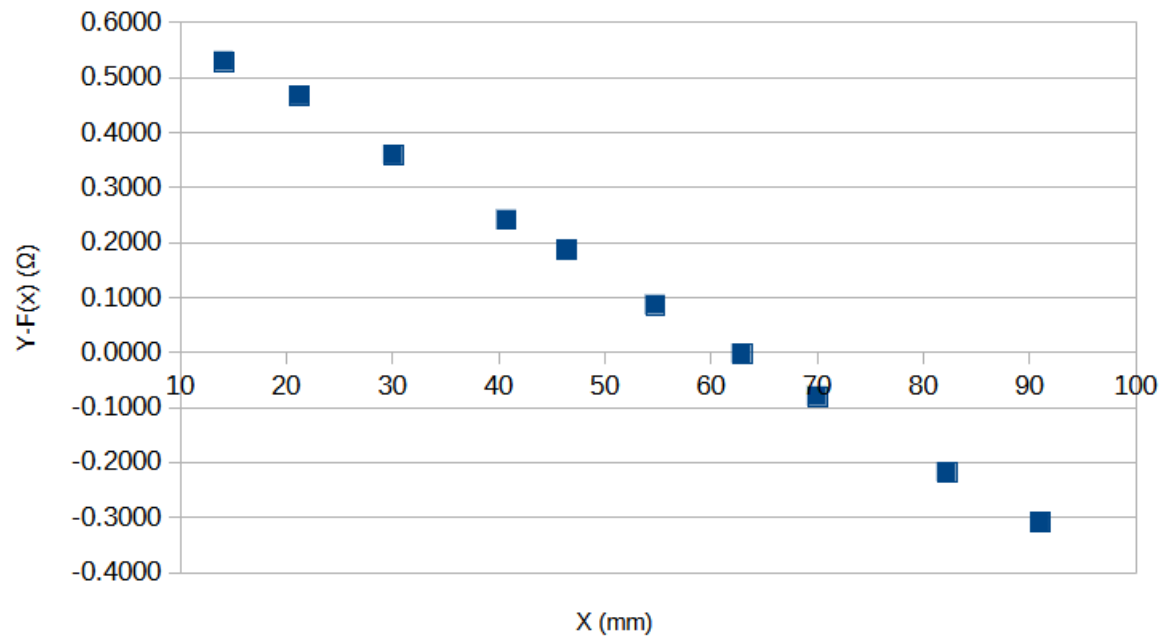


Figure 12: Plot Scarti barretta HB

$Y - F(X)$	Unità di misura	X	Unità di misura
0.1665	Ω	19.26	mm
0.1449	Ω	26.12	mm
0.1142	Ω	34.52	mm
0.0826	Ω	43.84	mm
0.0610	Ω	49.76	mm
0.0248	Ω	59.04	mm
-0.0046	Ω	67.40	mm
-0.0291	Ω	73.54	mm
-0.0718	Ω	84.86	mm
-0.1105	Ω	96.18	mm

Table 8: Scarti barretta B

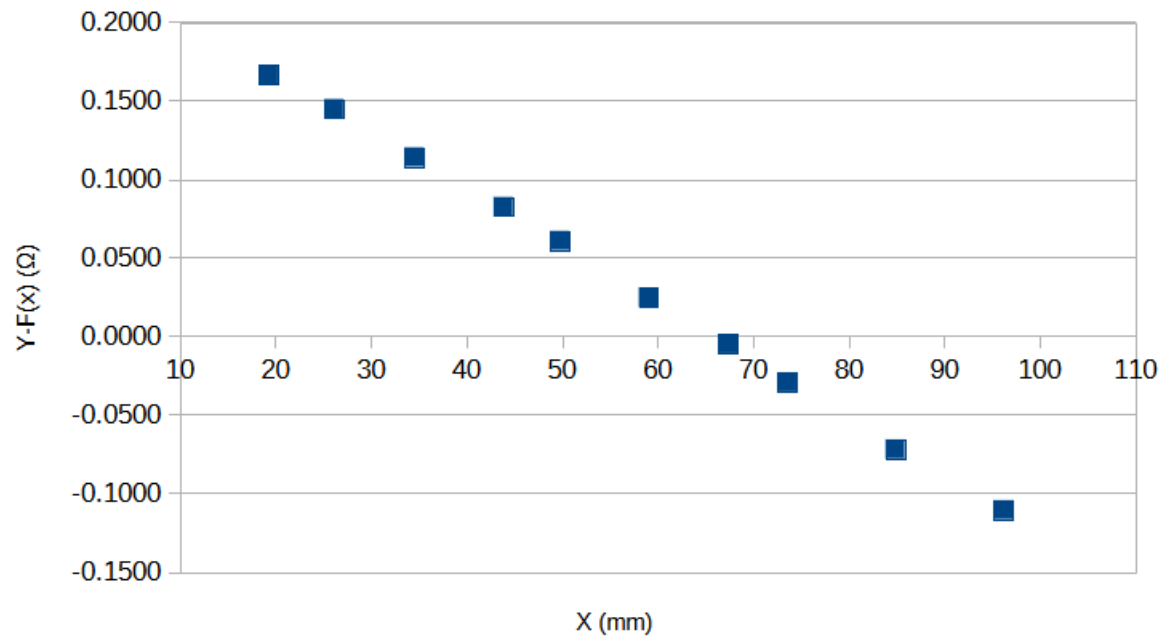


Figure 13: Plot Scarti barretta B

$Y - F(X)$	Unità di misura	X	Unità di misura
0.0976	Ω	18.44	mm
0.0819	Ω	27.30	mm
0.0892	Ω	31.62	mm
0.0520	Ω	41.98	mm
0.0330	Ω	50.72	mm
0.0174	Ω	58.00	mm
-0.0039	Ω	68.90	mm
-0.0229	Ω	78.70	mm
-0.0357	Ω	84.78	mm
-0.0673	Ω	96.26	mm

Table 9: Scarti barretta 8B

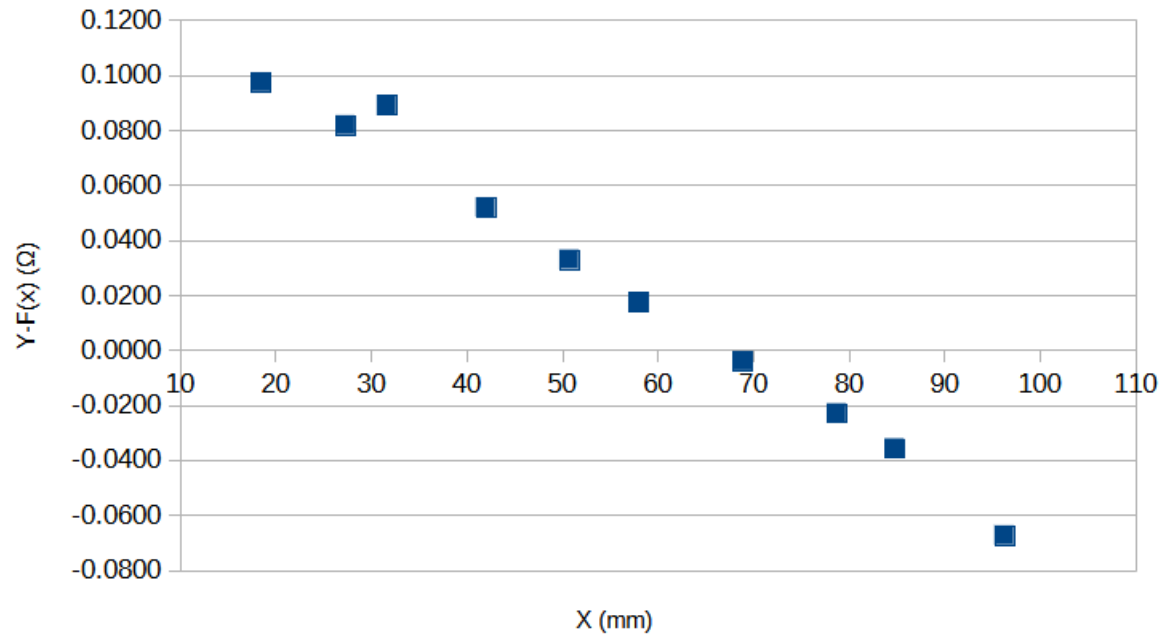


Figure 14: Plot Scarti barretta 8B

$Y - F(X)$	Unità di misura	X	Unità di misura
0.3121	Ω	17.04	mm
0.2554	Ω	26.00	mm
0.1952	Ω	37.14	mm
0.1335	Ω	48.38	mm
0.0750	Ω	57.82	mm
0.0273	Ω	65.72	mm
-0.0273	Ω	75.60	mm
-0.0310	Ω	84.16	mm
-0.0819	Ω	87.58	mm
-0.1482	Ω	96.24	mm

Table 10: Scarti barretta 2H

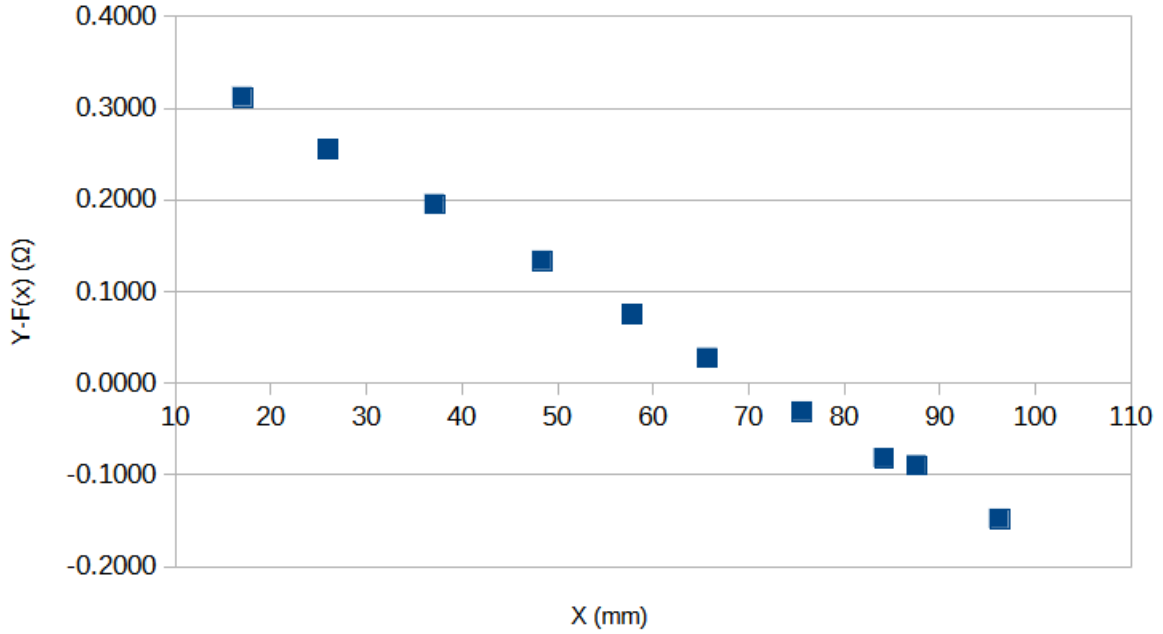


Figure 15: Plot Scarti barretta 2H

Dalle tabelle 6, 7, 8, 9, 10 e dai grafici 11, 12, 13, 14, 15, si evince che gli scarti non sono distribuiti casualmente, al contrario di come ci si aspetterebbe da una procedura di best fit. Ovvero, è assai improbabile che il modello 3.3 sia compatibile con le misure effettuate.

Non essendo riusciti a trovare dei best fit compatibili con il modello 3.3, si è considerato un modello:

$$Y = MX + Q \quad (3.4)$$

con $Y = R$, $X = l$ ed $M = \frac{R}{S}$. Il termine noto Q è stato considerato come un fattore spurio di resistenza.

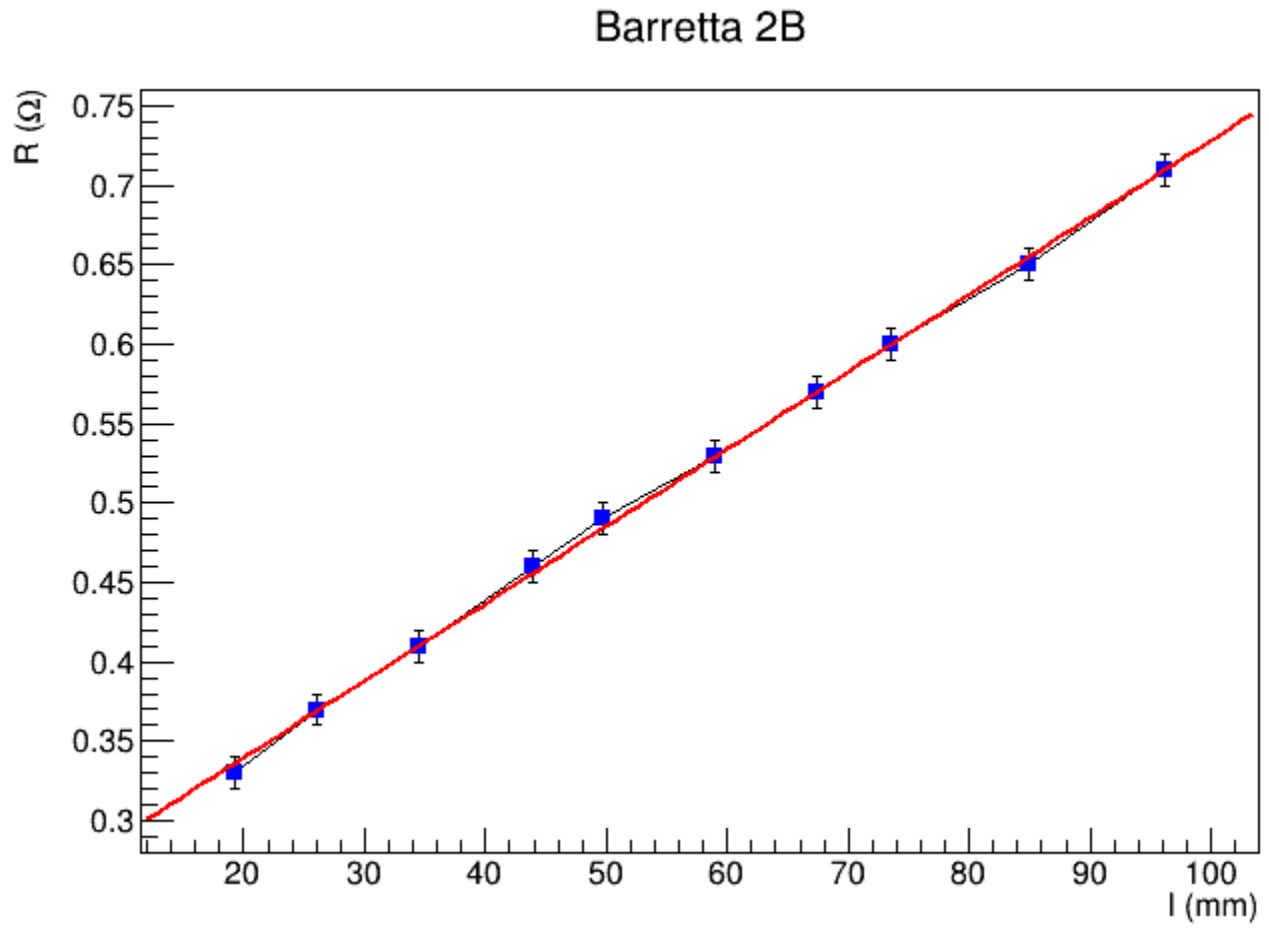


Figure 16: Best Fit Barretta 2B

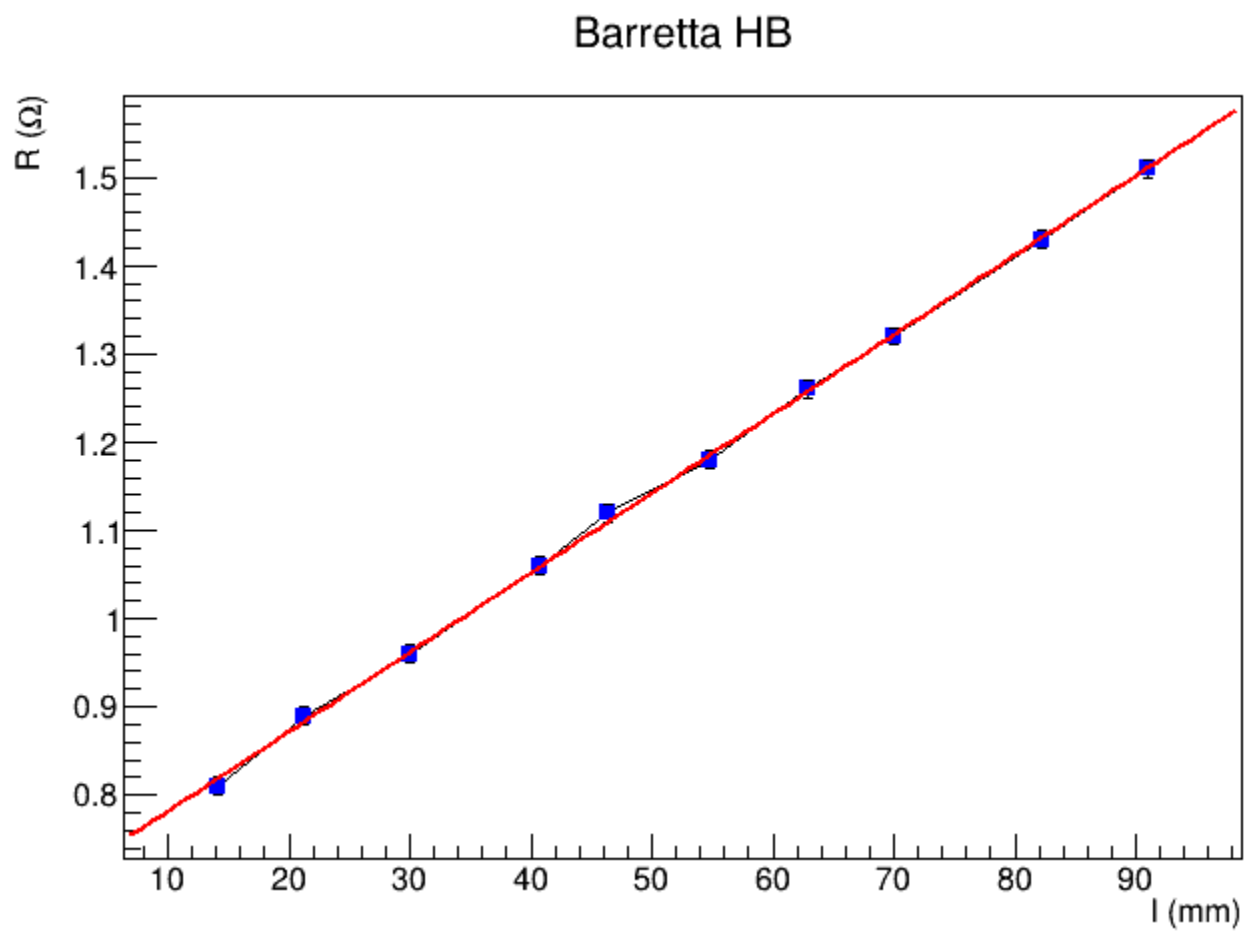


Figure 17: Best Fit Barretta HB

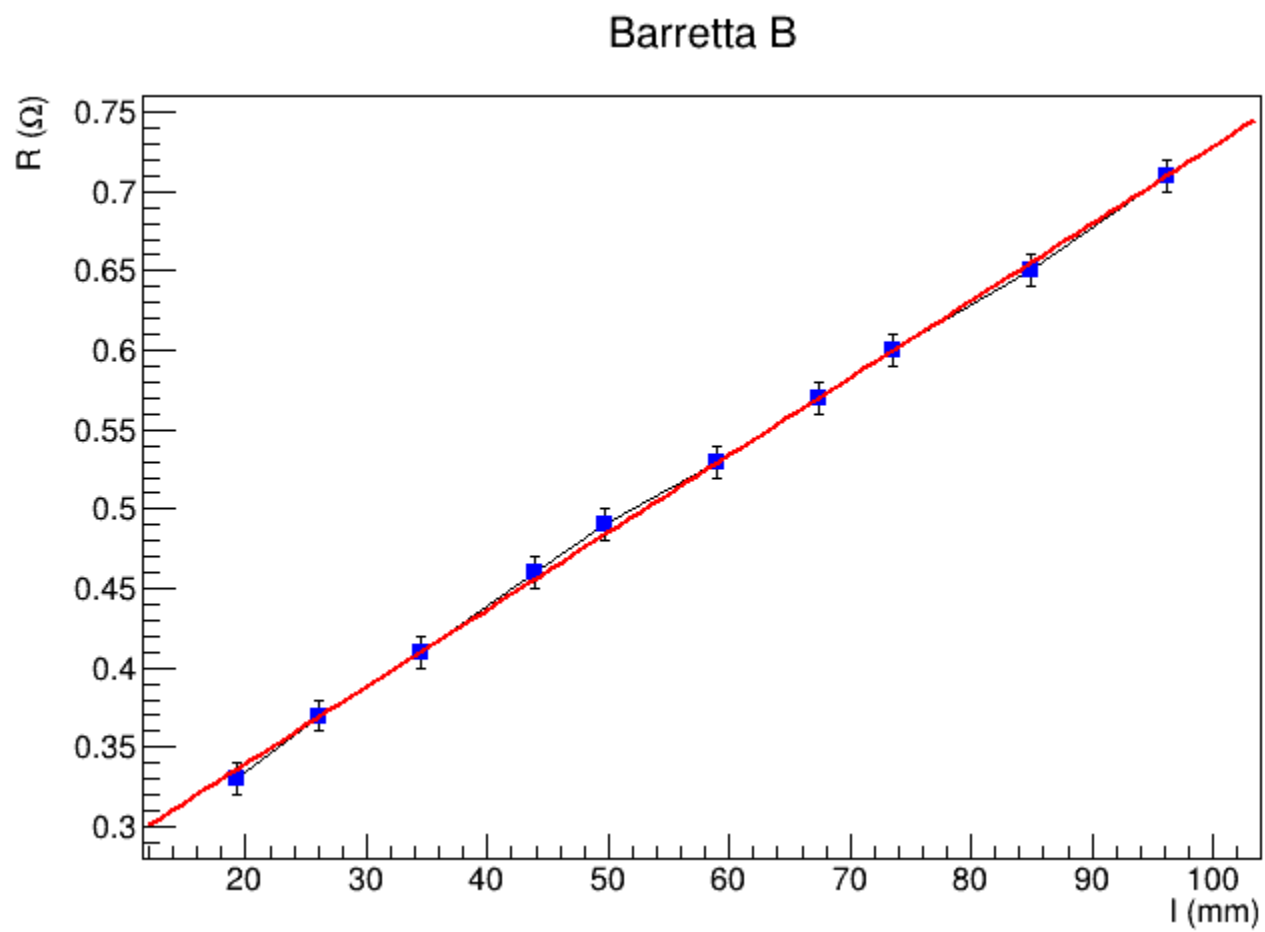


Figure 18: Best Fit Barretta B

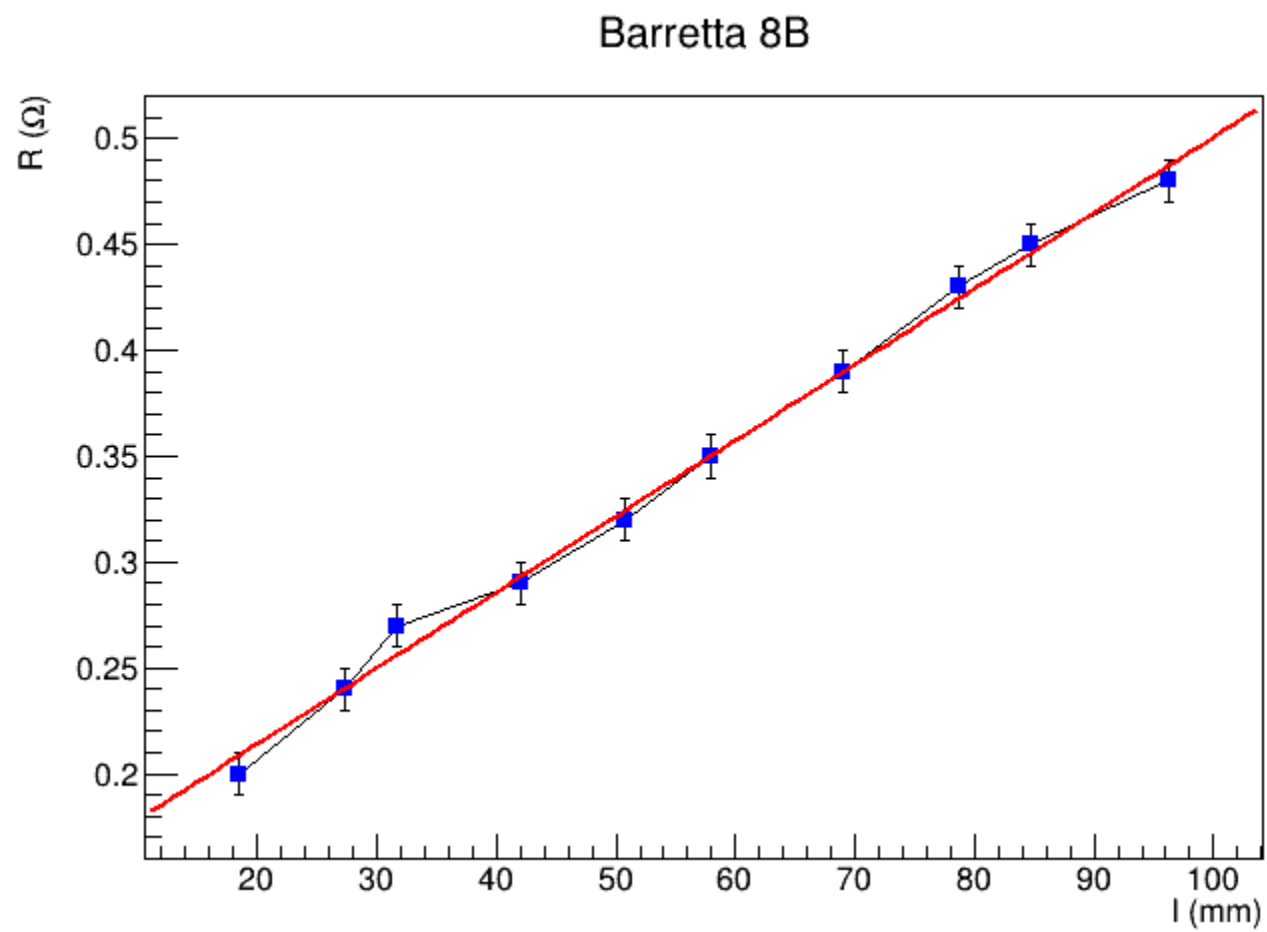


Figure 19: Best Fit Barretta 8B

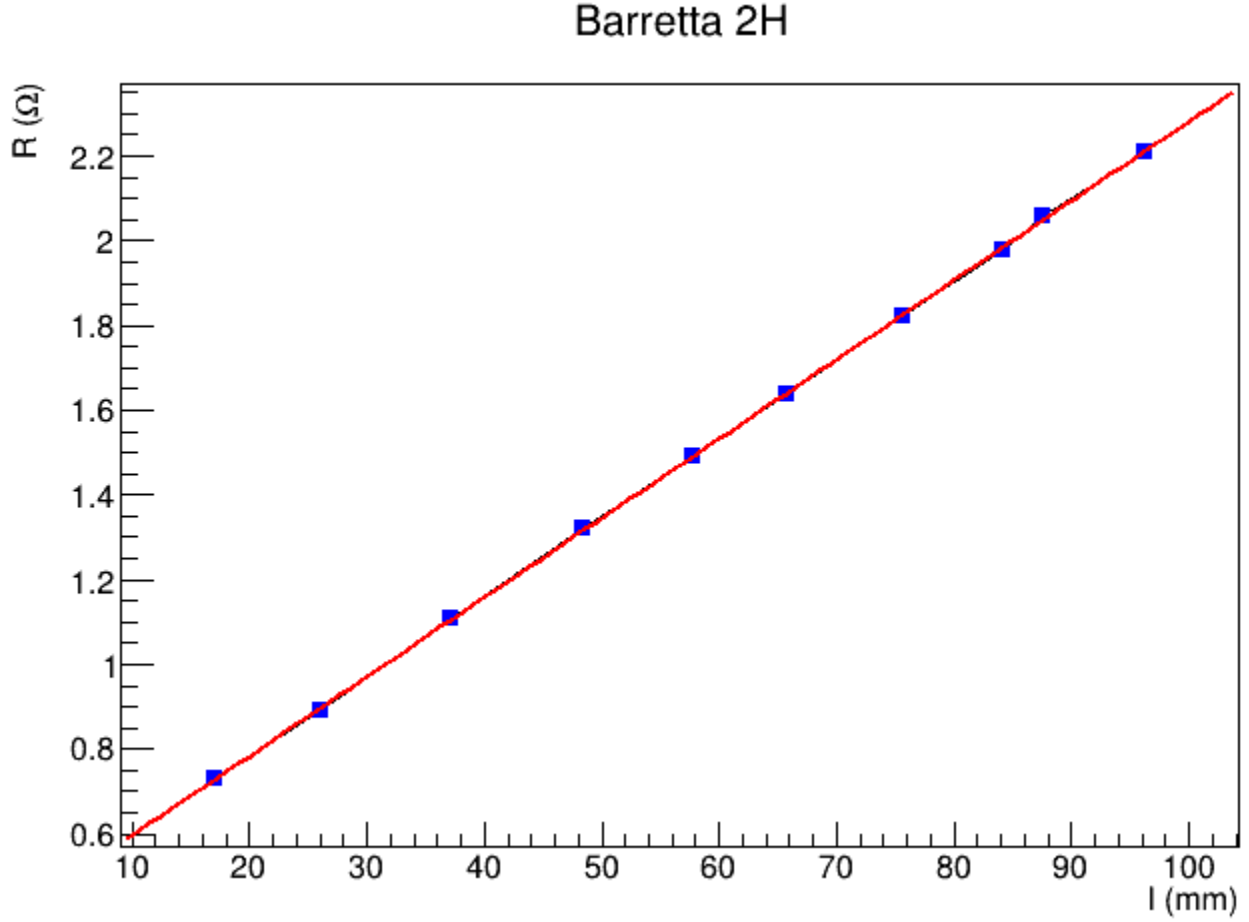


Figure 20: Best Fit Barretta 2H

I parametri ottenuti dalla procedura di best fit del modello 3.4 sono:

- Per la barretta 2B: $M = (4.86 \pm 0.13)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$, $Q = (0.243 \pm 0.008)\Omega$.
Ergo $\rho = MS = (0.244 \pm 0.007)\Omega mm$.
- Per la barretta HB: $M = (9.00 \pm 0.13)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$, $Q = (0.692 \pm 0.007)\Omega$.
Ergo $\rho = MS = (0.373 \pm 0.006)\Omega mm$.
- Per la barretta B: $M = (4.86 \pm 0.13)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$, $Q = (0.243 \pm 0.008)\Omega$.
Ergo $\rho = MS = (0.192 \pm 0.005)\Omega mm$.
- Per la barretta 8B: $M = (3.58 \pm 0.13)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$, $Q = (0.143 \pm 0.008)\Omega$.
Ergo $\rho = MS = (0.140 \pm 0.005)\Omega mm$.
- Per la barretta 2H: $M = (18.73 \pm 0.12)10^{-3} \frac{\Omega}{mm}$, $Q = (0.409 \pm 0.008)\Omega$.
Ergo $\rho = MS = (0.827 \pm 0.007)\Omega mm$.

L'incertezza $\Delta\rho$ per ciascuna barretta è stata calcolata con:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\Delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial S}\Delta S\right)^2} \quad (3.5)$$

4 Conclusioni

Le resistività ottenute riordinate in ordine crescente sono:

- $\rho_{8B} = (0.140 \pm 0.005)\Omega\text{ mm}$; Barretta 8B
- $\rho_B = (0.192 \pm 0.005)\Omega\text{ mm}$; Barretta B
- $\rho_{2B} = (0.244 \pm 0.007)\Omega\text{ mm}$; Barretta 2B
- $\rho_{HB} = (0.373 \pm 0.006)\Omega\text{ mm}$; Barretta HB
- $\rho_{2H} = (0.827 \pm 0.007)\Omega\text{ mm}$; Barretta 2H

Si nota che le resistività risultano maggiori per le barrette con un grado di durezza più alto. Ciò non vale per la barretta 2B, la cui resistività risulta più alta rispetto alla barretta B. Questo potrebbe essere causato da diversi fattori: barretta non corrispondente a ciò che dichiara il costruttore, cambio delle condizioni di misura rispetto alle diverse barrette, collegamento non ottimale dei contatti. I termini noti Q del modello 3.4 riordinati in ordine crescente sono:

- $Q = (0.143 \pm 0.008)\Omega$; Barretta 8B
- $Q = (0.243 \pm 0.008)\Omega$; Barretta 2B
- $Q = (0.243 \pm 0.008)\Omega$; Barretta B
- $Q = (0.409 \pm 0.008)\Omega$; Barretta 2H
- $Q = (0.692 \pm 0.007)\Omega$; Barretta HB

Tali valori, però, non sono previsti da 1.1. Possono essere interpretati come dei valori di resistenza spuria introdotti dai collegamenti fatti per effettuare le misure, non presi in considerazione in prima approssimazione. In ogni caso la relazione di linearità prevista da 1.1 è in accordo le misure prese a meno di questo termine di resistenza spuria, che, dunque, potrebbe essere considerato un errore di tipo sistematico per ogni set di misure fatte.

Appendix A Multimetro

Un multimetro digitale è uno strumento in grado di misurare diverse grandezze, tra cui intensità di corrente (amperometro), differenza di potenziale (voltmetro) e valori di resistenza (ohmetro).

Di seguito si fornisce una breve descrizione sul funzionamento di questi strumenti.

A.1 Amperometro

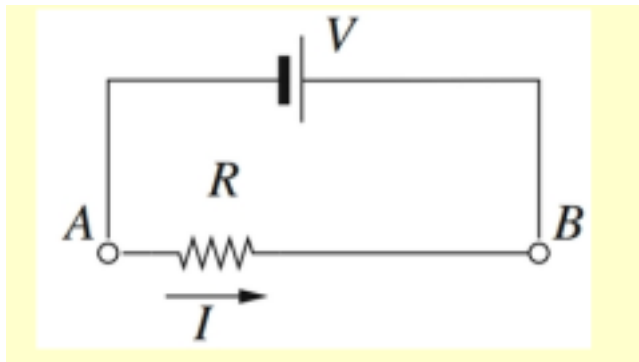


Figure 21: Circuito

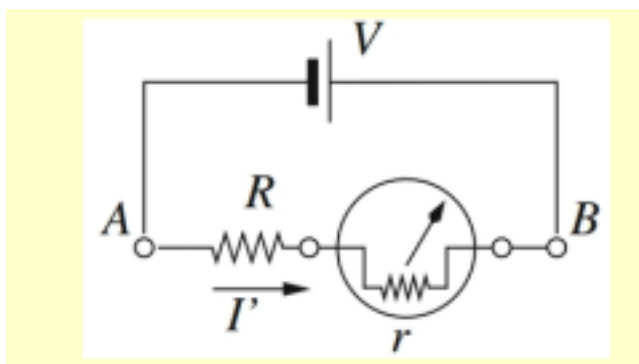


Figure 22: Circuito Amperometro

Un amperometro è uno strumento in grado di misurare l'intensità di corrente presente in un circuito. Lo strumento va collegato in serie al circuito di cui si vuole conoscere la corrente circolante. È necessario considerare che lo strumento introduce una resistenza interna che altera la misura. Applicando la prima legge di Ohm

$$V = RI \quad (\text{A.1})$$

Si ricava, utilizzando il principio di Thevenin

$$I' = \frac{V}{R + r} = \frac{V}{R} \left(\frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \right) \quad (\text{A.2})$$

Dunque per avere una misura quanto più precisa possibile il rapporto $\frac{r}{R} \rightarrow 0$; cioè $r \ll R$.

A.2 Voltmetro

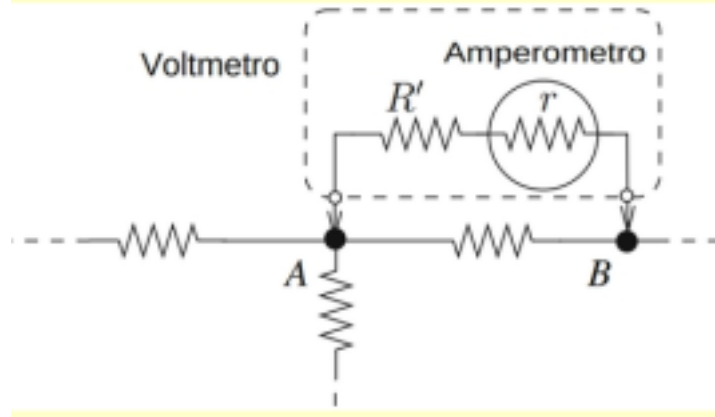


Figure 23: Circuito Voltmetro

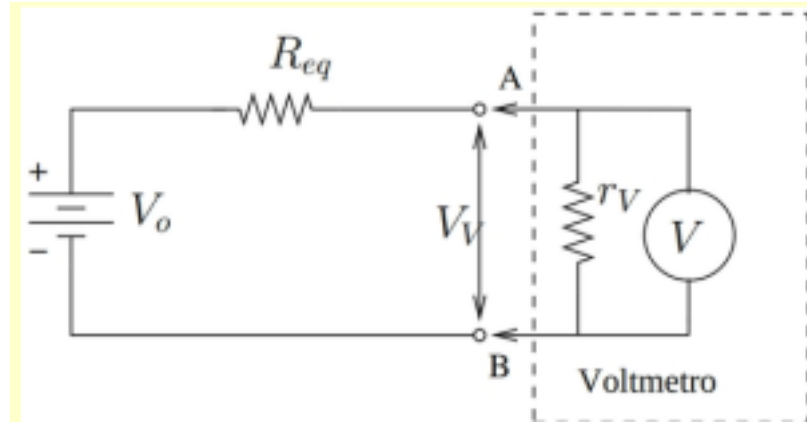


Figure 24: Circuito risultante Thevenin

Un voltmetro è uno strumento in grado di misurare la differenza di potenziale tra due punti di un circuito, esso non è altro che un amperometro utilizzato in un particolare circuito. Lo strumento va collegato in parallelo ai punti di cui si vuole conoscere la differenza di potenziale. È necessario considerare che lo strumento introduce una resistenza interna che altera la misurazione. Utilizzando A.1 si ricava, utilizzando il principio di Thevenin

$$V_v = I_v r_v = \frac{r_v}{R_{eq} + r_v} V_0 \quad (\text{A.3})$$

$$V_0 = \left(1 + \frac{R_{eq}}{r_v}\right) V_v \quad (\text{A.4})$$

Dunque per avere una misura quanto più precisa possibile il rapporto $\frac{R_{eq}}{r_v} \rightarrow 0$; cioè $r \gg R_{eq}$

A.3 Ohmetro

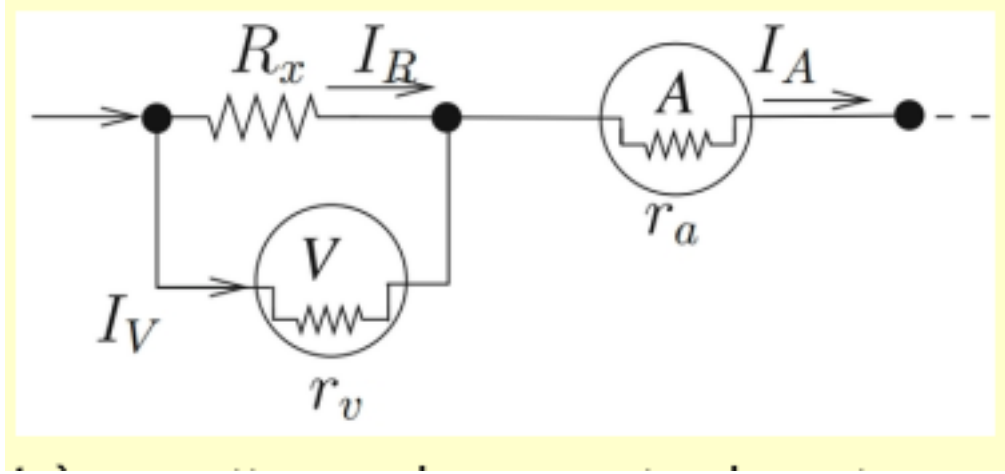


Figure 25: Circuito Ohmetro

Un ohmetro è uno strumento in grado di misurare un resistore. É possibile realizzarlo misurando contemporaneamente un caduta di tensione ai capi del resistore e l'intensità di corrente che lo attraversa, ergo utilizzando contemporaneamente un amperometro e un voltmetro. Naturalmente collegando gli strumenti altereremo la misurazione. Dalla [A.1](#)

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_R} \quad (\text{A.5})$$

Dalle leggi di Kirchoff

$$I_A = I_R + I_v \rightarrow I_v = \frac{I_R R_x}{r_v} \quad (\text{A.6})$$

$$I_R R_x = I_v r_v \rightarrow I_R = I_A \frac{r_v}{r_v + R_x} \quad (\text{A.7})$$

Combinando [A.5](#), [A.6](#) e [A.7](#) si ottiene

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_R} = \frac{\Delta V}{I_A} \left(1 + \frac{R_x}{r_v} \right) \quad (\text{A.8})$$

Risolvendo per R_x

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_A} \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{r_v I_A}} \right) \quad (\text{A.9})$$

Dalla [A.8](#) si nota che per avere una misura quanto più precisa possibile il rapporto $\frac{R_x}{r_v} \rightarrow 0$; cioè $R_x \ll r_v$

5 Bibliografia

- Slide A.A. 2023/2024, Professore F. Neri, Università degli Studi di Messina
- Documentazione root: <https://root.cern/doc/v628/>