

# Relazione di Laboratorio 2

## Esperienza A2

### A.A. 2023/2024

Luciano Leotta  
Matricola 556372

21/11/2023

## 1 Cenni teorici

Lo scopo di questo esperimento è la verifica delle relazioni che sussistono tra la resistenza di un materiale e la sua temperatura attraverso l'utilizzo di un ponte di Wheatstone. Un ponte di Wheatstone è un particolare circuito, cosiffatto:

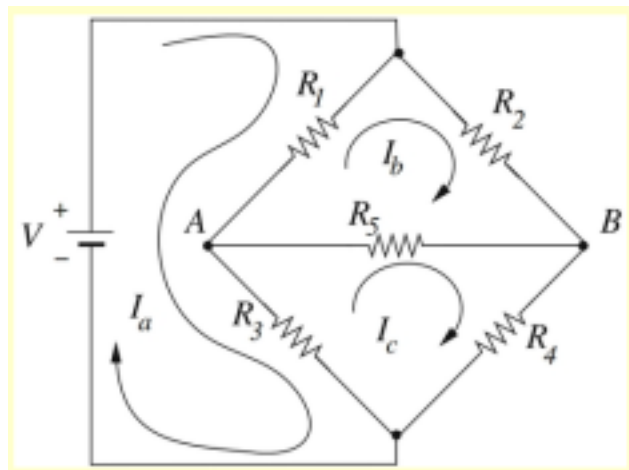


Figure 1: Ponte di Wheatstone

Si nota che tale circuito possiede  $n = 4$  nodi e  $r = 6$  rami, ergo  $m = 3$  maglie, ricordando che  $m = r - n + 1$ . Utilizzando il metodo delle maglie di kirchhoff e svolgendo i calcoli (vedasi [B](#)), si ha per un ponte bilanciato:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (1.1)$$

Dalla [1.1](#) si nota che conoscendo 3 resistenze del ponte di Wheatstone, la quarta risulta univocamente determinata.

Si consideri la seconda legge di Ohm

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1.2)$$

in cui  $\rho$  è la resistività del materiale di cui è composta la resistenza  $R$ ,  $l$  è la lunghezza ed  $S$  l'area della sezione della resistenza. Risulta evidente che  $R$  è direttamente proporzionale alla sua resistività  $\rho$ : essa è una grandezza che dipende dalle caratteristiche del materiale, ed in particolare, dipende dalla temperatura a cui si trova. Per i metalli la legge di dipendenza  $R(T)$  ha forma:

$$R(T) = R(T_0) \cdot [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (1.3)$$

Mentre per gli NTC vale:

$$R(T) = R(T_0) \cdot \exp\left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right] \quad (1.4)$$

## 2 Strumenti e metodo di misura

### 2.1 Strumenti utilizzati

Strumenti utilizzati per eseguire l'esperimento:

- Multimetro digitale Rigol DM3058SE
- Termometro a bulbo con sensibilità di  $\pm 1^\circ C$
- Galvanometro a zero centrale
- Batteria Duracell da 4,5V
- Breadbord
- Fornello con agitatore
- Beker in vetro con acqua
- Supporti metallici
- Cavi a banana e a coccodrillo
- Pulsante
- Resistenze nominali da  $470\Omega$  e  $560\Omega$
- Reostato a cassetta con valori selezionabili tra  $0\Omega$  e  $9999,9\Omega$
- Resistenza incognita metallica
- Termistore incognito NTC (Negative Temperature Coefficient)

## 2.2 Realizzazione esperimento

Al fine di misurare la resistenza incognita è stato costruito un ponte di Wheatstone come nel seguente schema:

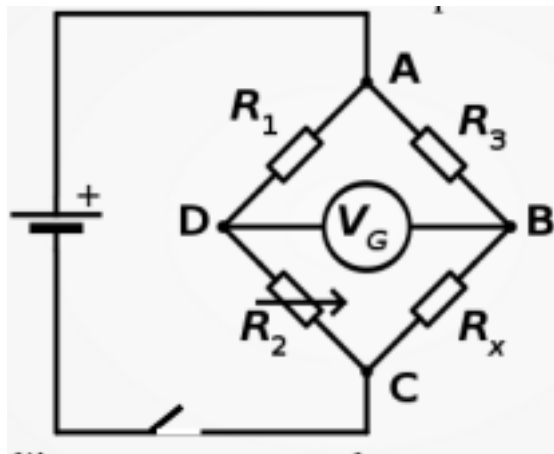
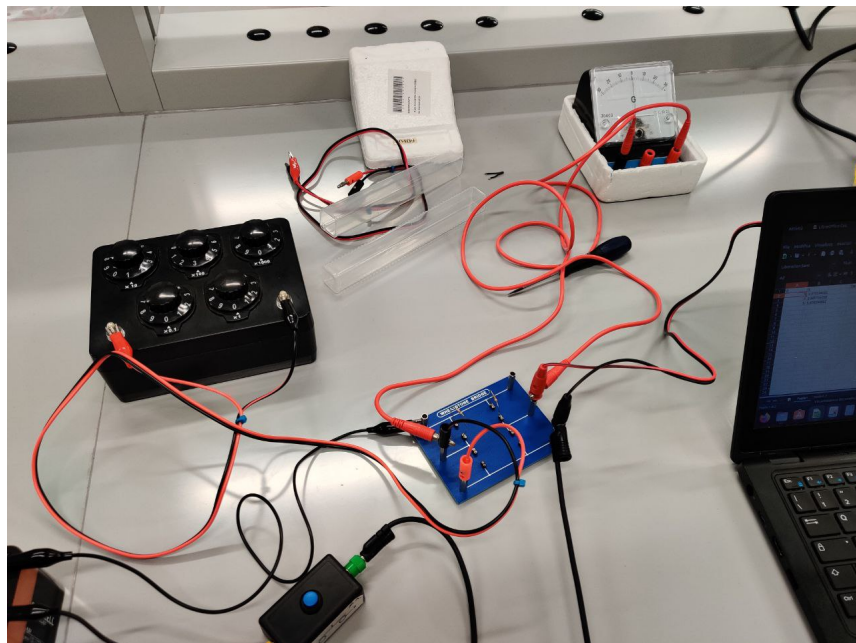
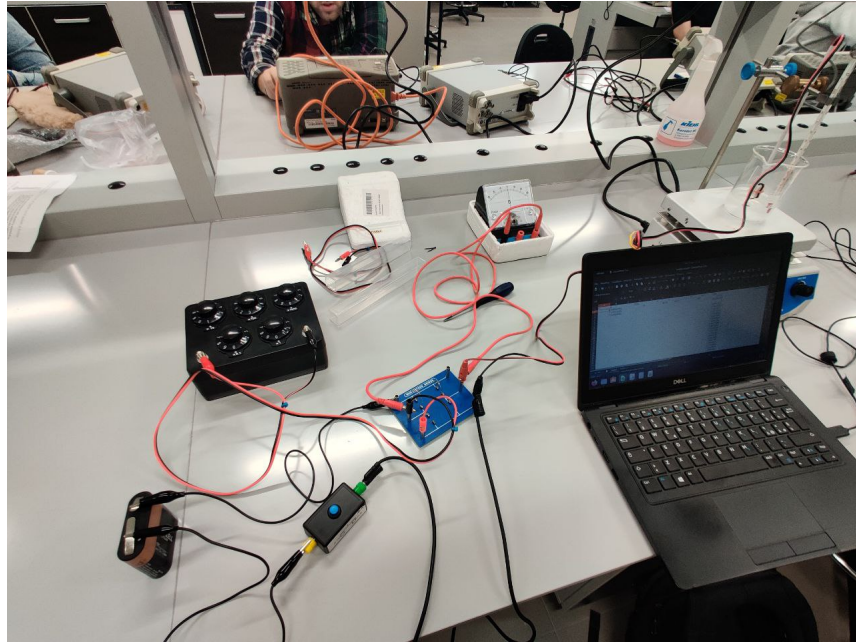


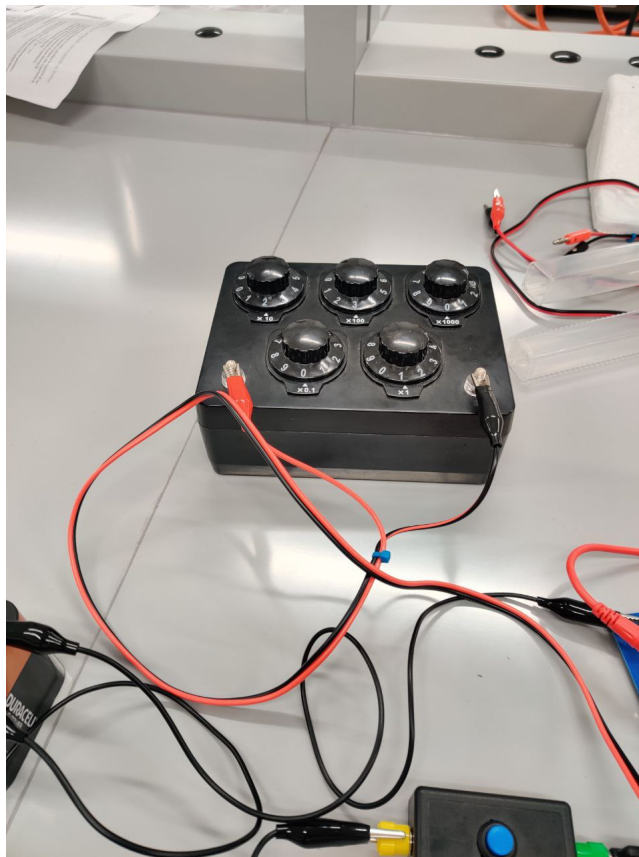
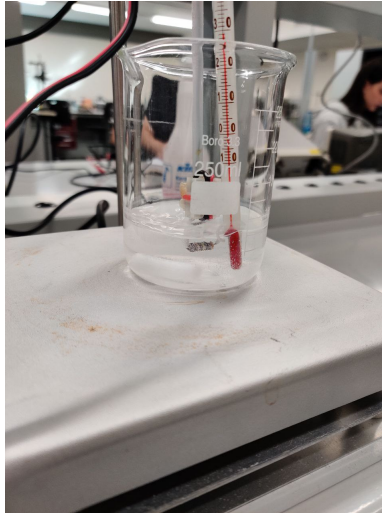
Figure 2: Schema ponte di Wheatstone realizzato

Per ottenere una misura ad un preciso istante di temperatura, non è necessario una continua alimentazione del circuito, dunque è possibile risparmiare consumo di batteria tramite un pulsante che chiuda il circuito solo per il tempo necessario ad effettuare la misura. La resistenza  $R_x$  ed un termometro sono stati immersi, tramite dei supporti metallici, in un beker contenente acqua corrente. Chiudendo il circuito, tramite il pulsante, e utilizzando il galvanometro si osserva se l'intensità di corrente da esso misurata risulti nulla o no. Chiameremo il ponte "bilanciato" quando il galvanometro segna corrente nulla, "sbilanciato" altrimenti. Definiamo il "bilanciamento del ponte" come la procedura di variazione della resistenza  $R_2$ , tramite il reostato a cassetta, allo scopo di riportare il ponte alla condizione bilanciata. Per evitare di danneggiare il galvanometro, si effettua un primo bilanciamento grezzo, collegando il galvanometro con una resistenza di protezione. In seguito si scollega la resistenza di protezione e si esegue un bilanciamento del ponte più preciso. Successivamente viene riscaldata la resistenza incognita tramite un fornello con agitatore magnetico. Variando la temperatura, varierà il valore della resistenza incognita  $R_x$  e il ponte si sbilancerà, di conseguenza, al fine di ribilanciarlo è necessario variare la resistenza  $R_2$ . Una volta bilanciato, è possibile ricavare il valore  $R_x$  tramite la seguente relazione, derivata dalla 1.1:

$$R_x = \frac{R_3}{R_1} R_2 \quad (2.1)$$

Dunque misurando contemporaneamente il valore  $R_2$  che bilancia il ponte e il valore della temperatura a cui si trova  $R_x$ , si può evincere la variazione  $R_x$  in funzione della temperatura e studiare la relazione funzionale  $R_x(T)$ . Tale procedura è stata ripetuta anche per la seconda resistenza incognita.





### 3 Analisi dati

#### 3.1 Misura resistenza metallica

Le incertezze statistiche delle misure sono state ritenute molto più piccole rispetto alle sensibilità di tutti gli strumenti utilizzati, dunque per ogni misura presa è stata considerata come

incertezza la sensibilità dello strumento usato per effettuare tale misura. I valori di  $R_1$  e  $R_3$  sono stati determinati con un multimetro Rigol e valgono:

$R_1 = (462.9 \pm 0.1)\Omega$  e  $R_3 = (553.3 \pm 0.1)\Omega$ .

I valori di  $R_2$  misurati sono:

$R_2$	$\Delta R_2$	Unità di misura	$T$	$\Delta T$	Unità di misura
310	0.5	$\Omega$	22	1	$^{\circ}C$
315	0.5	$\Omega$	25	1	$^{\circ}C$
321	0.5	$\Omega$	30	1	$^{\circ}C$
328	0.5	$\Omega$	35	1	$^{\circ}C$
337	0.5	$\Omega$	42	1	$^{\circ}C$
341	0.5	$\Omega$	45	1	$^{\circ}C$
347	0.5	$\Omega$	50	1	$^{\circ}C$
352.5	0.5	$\Omega$	55	1	$^{\circ}C$
359.5	0.5	$\Omega$	60	1	$^{\circ}C$
365	0.5	$\Omega$	65	1	$^{\circ}C$
374	0.5	$\Omega$	71	1	$^{\circ}C$
380	0.5	$\Omega$	77	1	$^{\circ}C$
384	0.5	$\Omega$	80	1	$^{\circ}C$
390	0.5	$\Omega$	85	1	$^{\circ}C$
396	0.5	$\Omega$	89	1	$^{\circ}C$

Table 1: Valori di  $R_2$  a determinate temperature ( $^{\circ}C$ )

Le incertezze associate ad  $R_2$  sono state determinate considerando  $0.5\Omega$  come il minimo valore di variazione dell'ago del galvanometro.

Dunque i valori di  $R_m$  risultano da 2.1 (con  $R_m = R_x$ ):

$R_m$	$\Delta R_m$	Unità di misura	$T$	$\Delta T$	Unità di misura
370.4	0.6	$\Omega$	295	1	$K$
376.4	0.6	$\Omega$	298	1	$K$
383.7	0.6	$\Omega$	303	1	$K$
391.9	0.6	$\Omega$	308	1	$K$
402.7	0.6	$\Omega$	315	1	$K$
407.6	0.6	$\Omega$	318	1	$K$
414.7	0.6	$\Omega$	323	1	$K$
421.3	0.6	$\Omega$	328	1	$K$
429.7	0.6	$\Omega$	333	1	$K$
436.3	0.6	$\Omega$	338	1	$K$
447.0	0.6	$\Omega$	344	1	$K$
454.2	0.6	$\Omega$	350	1	$K$
459.0	0.6	$\Omega$	353	1	$K$
466.1	0.6	$\Omega$	358	1	$K$
473.3	0.6	$\Omega$	362	1	$K$

Table 2: Valori della resistenza metallica  $R_m$  a determinate temperature( $K$ )

Per valutare l'errore su  $R_m$  si è propagato l'errore da [2.1](#) usando:

$$\Delta R_x = \sqrt{\left(\frac{\partial R_x}{\partial R_2} \Delta R_2\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_3} \Delta R_3\right)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_1} \Delta R_1\right)^2} \quad (3.1)$$

Grafico 1

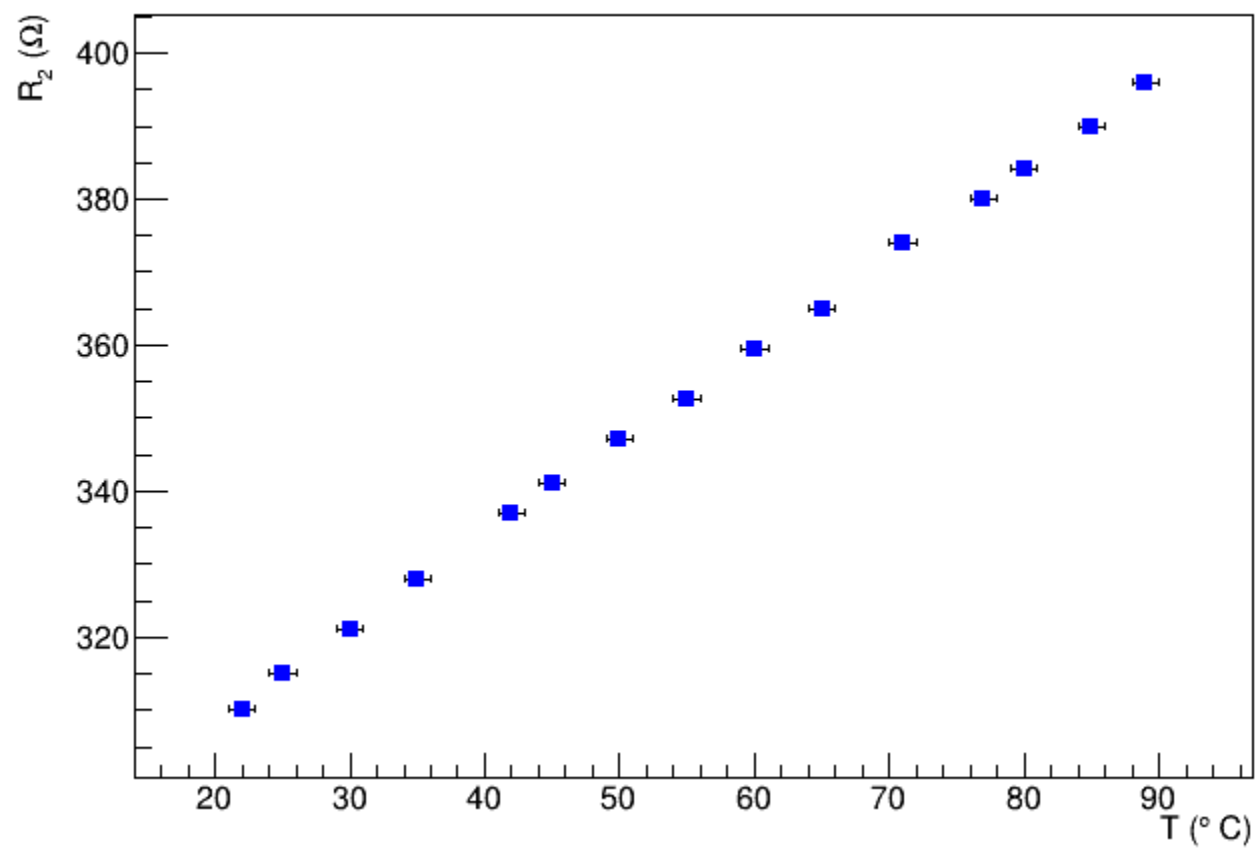


Figure 3: Plot Table 1: Valori di  $R_2$  a determinate temperature ( $^{\circ}\text{C}$ )



Grafico 2

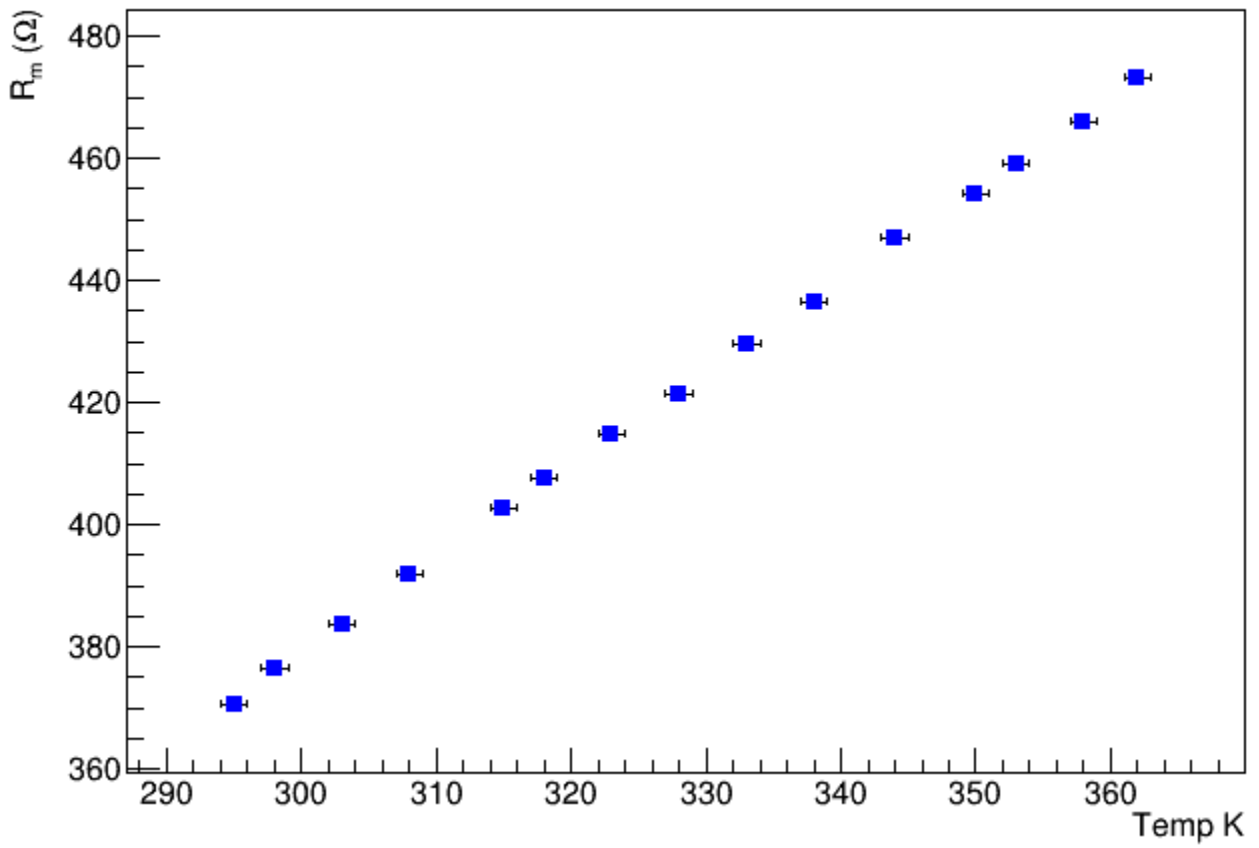


Figure 4: Plot Table 2: Valori della resistenza metallica  $R_m$  a determinate temperature ( $K$ )

### 3.2 Misura resistenza NTC

I valori di  $R_1$  e  $R_3$  sono stati determinati con un multimetro Rigol e valgono:  $R_1 = (462.9 \pm 0.1)\Omega$  e  $R_3 = (553.3 \pm 0.1)\Omega$ .

I valori di  $R_2$  misurati sono:

$R_2$	$\Delta R_2$	Unità di misura	$T$	$\Delta T$	Unità di misura
315.0	0.5	$\Omega$	31	1	$^{\circ}C$
271.0	0.5	$\Omega$	36	1	$^{\circ}C$
234.0	0.5	$\Omega$	40	1	$^{\circ}C$
191.0	0.5	$\Omega$	46	1	$^{\circ}C$
164.0	0.5	$\Omega$	51	1	$^{\circ}C$
140.0	0.5	$\Omega$	55	1	$^{\circ}C$
120.0	0.5	$\Omega$	60	1	$^{\circ}C$
100.0	0.5	$\Omega$	66	1	$^{\circ}C$
88.5	0.5	$\Omega$	70	1	$^{\circ}C$
77.0	0.5	$\Omega$	75	1	$^{\circ}C$
63.0	0.5	$\Omega$	82	1	$^{\circ}C$
56.0	0.5	$\Omega$	86	1	$^{\circ}C$
49.0	0.5	$\Omega$	91	1	$^{\circ}C$

Table 3: Resistenza  $R_2$  durante misura NTC

Le incertezze associate ad  $R_2$  sono state determinate considerando  $0.5\Omega$  come il minimo valore di variazione dell'ago del galvanometro.

Dunque i valori di  $R_n$  risultano da 2.1 (con  $R_n = R_x$ ):

$R_n$	$\Delta R_n$	Unità di misura	$T$	$\Delta T$	Unità di misura
376.5	0.6	$\Omega$	304	1	$K$
323.9	0.6	$\Omega$	309	1	$K$
279.7	0.6	$\Omega$	313	1	$K$
228.3	0.6	$\Omega$	319	1	$K$
196.0	0.6	$\Omega$	324	1	$K$
167.3	0.6	$\Omega$	328	1	$K$
143.4	0.6	$\Omega$	333	1	$K$
119.6	0.6	$\Omega$	339	1	$K$
105.8	0.6	$\Omega$	343	1	$K$
92.0	0.6	$\Omega$	348	1	$K$
75.3	0.6	$\Omega$	355	1	$K$
66.9	0.6	$\Omega$	359	1	$K$
58.6	0.6	$\Omega$	364	1	$K$

Table 4: Resistenza NTC  $R_n$  in funzione della temperatura

Per valutare l'errore su  $R_n$  è stata usata la 3.1.

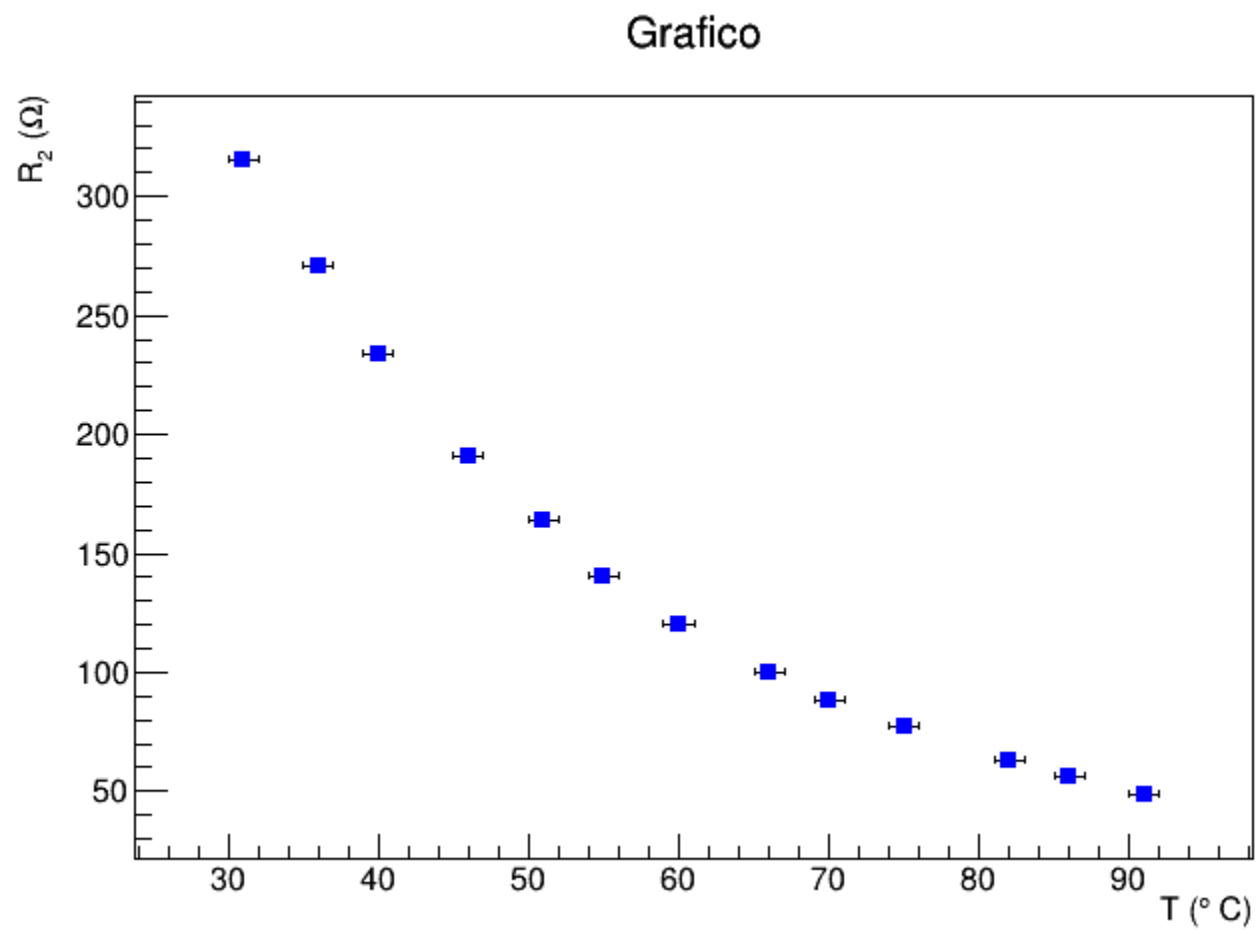


Figure 5: Plot Table 3: Resistenza  $R_2$  durante misura NTC

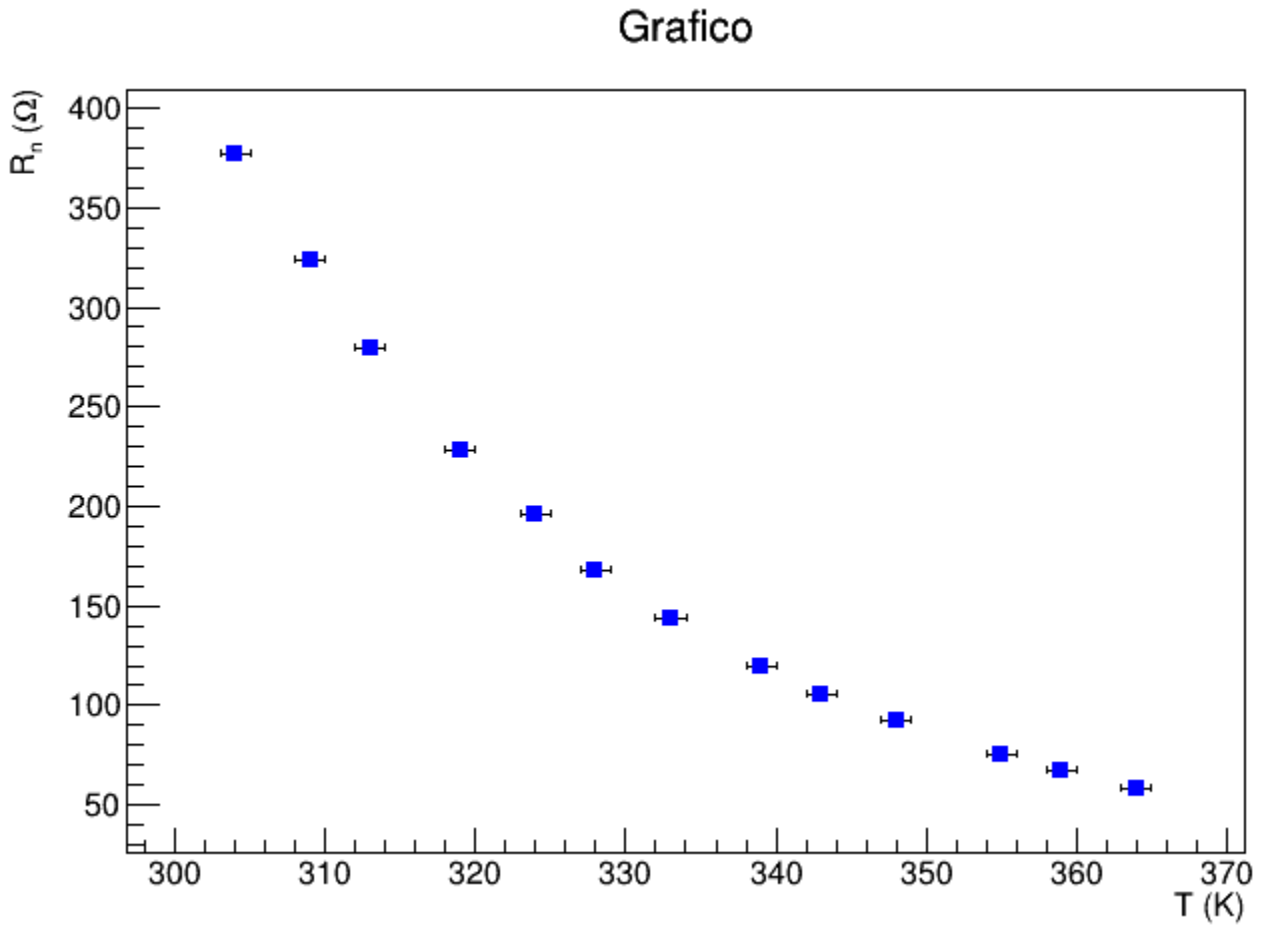


Figure 6: Plot Table 4: Resistenza NTC  $R_n$  in funzione della temperatura

### 3.3 Best fit

Per verificare le leggi funzionali 1.3, 1.4 si è effettuata una procedura di best fit. Per 1.3 si è usato il modello

$$Y = MX \quad (3.2)$$

con  $Y = R_m(T) - R_m(T_0)$ ,  $X = T - T_0$  ed  $M = R(T_0)\alpha$ .

I valori usati per la verifica del modello, considerando  $T_0$  pari al primo valore di temperatura misurata, sono:

$Y$	$\Delta Y$	Unità di misura	$X$	$\Delta X$	Unità di misura
0.0	0.8	$\Omega$	0	1.4	$K$
6.0	0.8	$\Omega$	3	1.4	$K$
13.3	0.8	$\Omega$	8	1.4	$K$
21.5	0.8	$\Omega$	13	1.4	$K$
32.3	0.8	$\Omega$	20	1.4	$K$
37.2	0.8	$\Omega$	23	1.4	$K$
44.3	0.8	$\Omega$	28	1.4	$K$
50.9	0.8	$\Omega$	33	1.4	$K$
59.3	0.8	$\Omega$	38	1.4	$K$
65.9	0.8	$\Omega$	43	1.4	$K$
76.6	0.8	$\Omega$	49	1.4	$K$
83.8	0.8	$\Omega$	55	1.4	$K$
88.6	0.8	$\Omega$	58	1.4	$K$
95.7	0.8	$\Omega$	63	1.4	$K$
102.9	0.8	$\Omega$	67	1.4	$K$

Table 5: Fit1

Per determinare le incertezze  $\Delta X$  e  $\Delta Y$  sono state usate

$$\Delta Y = \sqrt{2}\Delta R_m \quad (3.3)$$

$$\Delta X = \sqrt{2}\Delta T \quad (3.4)$$

Dalla procedura di best fit si è ottenuto  $M = (1.541 \pm 0.015)\frac{\Omega}{K}$ . Dunque si ha  $\alpha = \frac{M}{R_m(T_0)} = (4.16 \pm 0.04)10^{-3}K^{-1}$ . Per determinare  $\Delta\alpha$  è stata usata

$$\Delta\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial M}\Delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{R_m(T_0)}\Delta R_m\right)^2} \quad (3.5)$$

Grafico 3

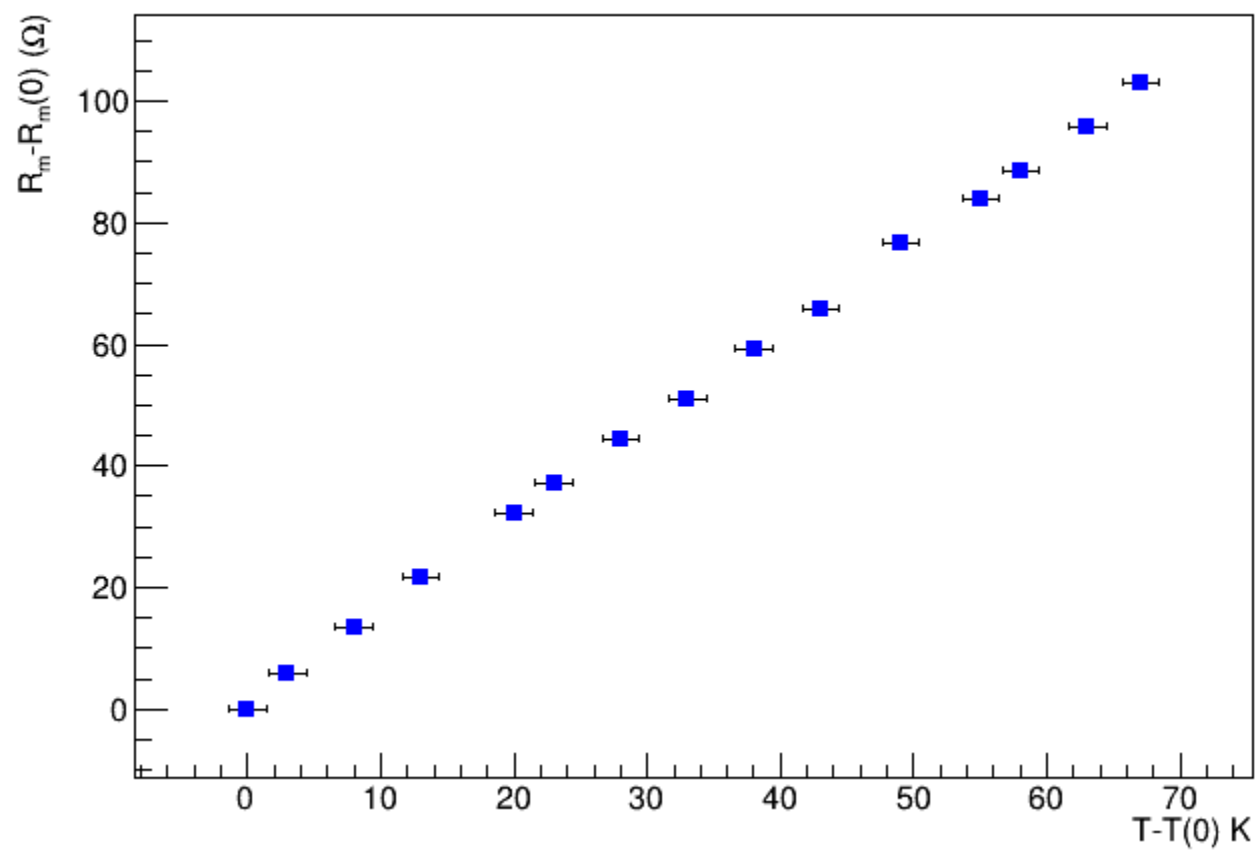


Figure 7: Plot dati fit 1

Grafico 3

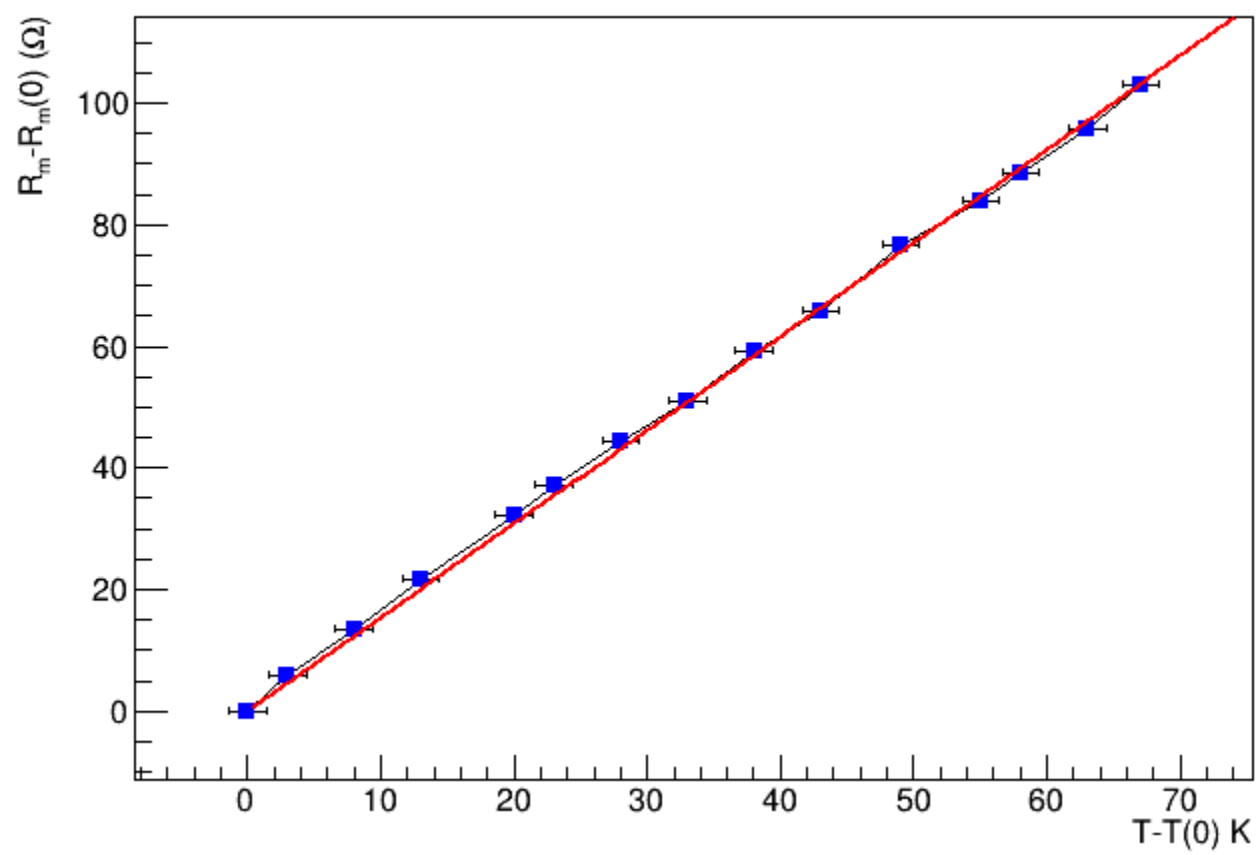


Figure 8: Best fit 1

Per 1.4 si è usato il modello:

$$Y = e^{MX} \quad (3.6)$$

con  $Y = \frac{R_n}{R_n(T_0)}$ ,  $X = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}$  ed  $M = -\beta$ .

I valori usati per la verifica del modello, considerando  $T_0$  pari al primo valore di temperatura misurata, sono:

$Y$	$\Delta Y$	$X$	$\Delta X$	Unità di misura
1.0000	0.0023	0.00000	1.52876E-05	$K^{-1}$
0.8603	0.0021	5.31757E-05	1.5044E-05	$K^{-1}$
0.7429	0.0020	9.44936E-05	1.4860E-05	$K^{-1}$
0.6063	0.0019	15.4529E-05	1.4602E-05	$K^{-1}$
0.5206	0.0018	20.286E-05	1.4402E-05	$K^{-1}$
0.4444	0.0017	24.0465E-05	1.4251E-05	$K^{-1}$
0.3810	0.0017	28.6200E-05	1.4072E-05	$K^{-1}$
0.3178	0.0017	33.9304E-05	1.3872E-05	$K^{-1}$
0.2810	0.0016	37.3674E-05	1.3746E-05	$K^{-1}$
0.2444	0.0016	41.5526E-05	1.3598E-05	$K^{-1}$
0.2000	0.0016	47.2140E-05	1.34057E-05	$K^{-1}$
0.1778	0.0016	50.3499E-05	1.3302E-05	$K^{-1}$
0.1556	0.0016	54.1730E-05	1.3180E-05	$K^{-1}$

Table 6: Fit 2 (La  $Y$  è adimensionale)

Per determinare le incertezze  $\Delta X$  e  $\Delta Y$  sono state usate:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial R_n} \Delta R_n\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial R_n(T_0)} \Delta R_n(T_0)\right)^2} \quad (3.7)$$

$$\Delta X = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial T_0} \Delta T_0\right)^2} \quad (3.8)$$

Dalla procedura di best fit si è ottenuto  $M = (-3399 \pm 40)K$ . Dunque si ha  $\beta = -M = (3399 \pm 40)K$ ; con  $\Delta\beta = \Delta M$ .



Grafico 4

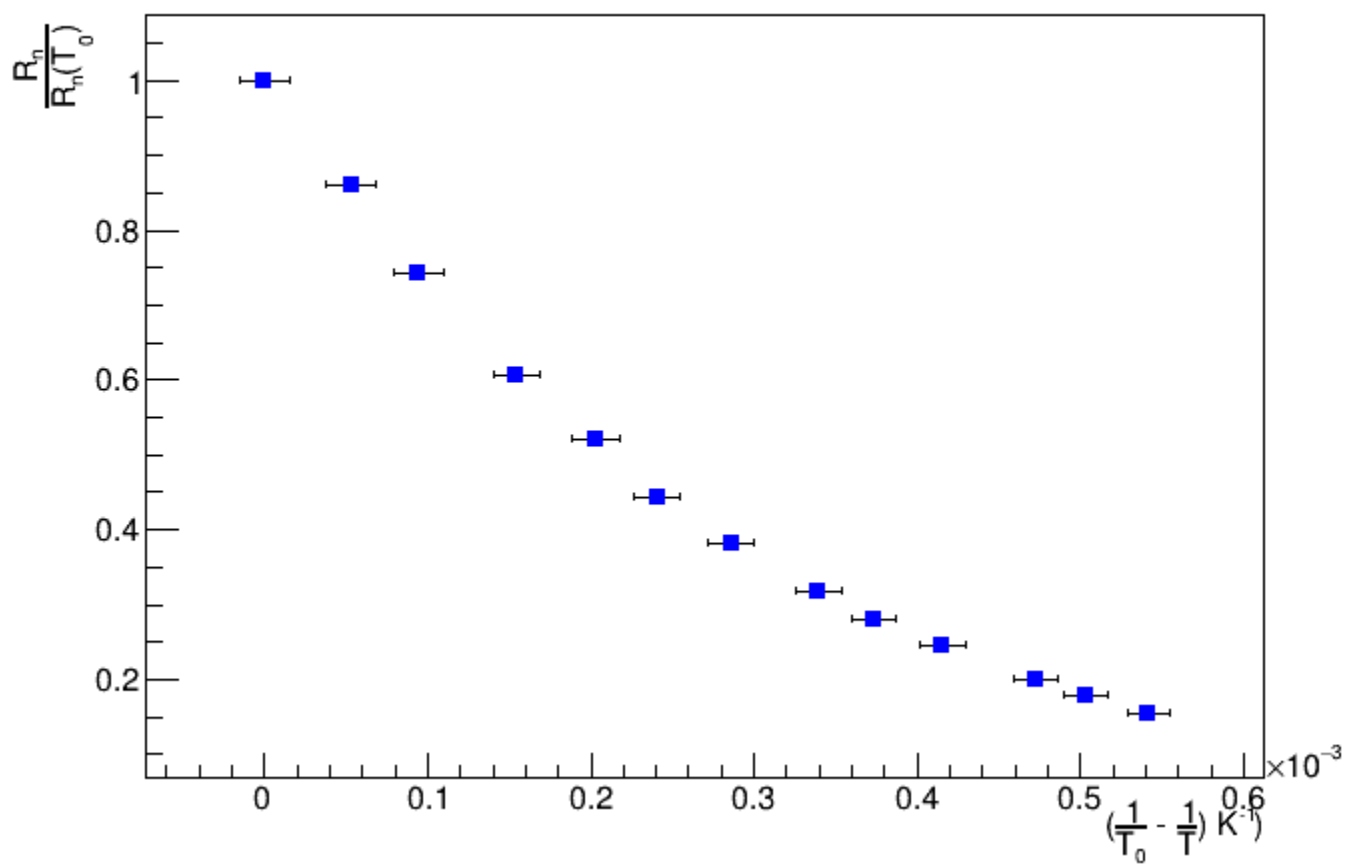


Figure 9: Plot dati fit 2

Grafico 4

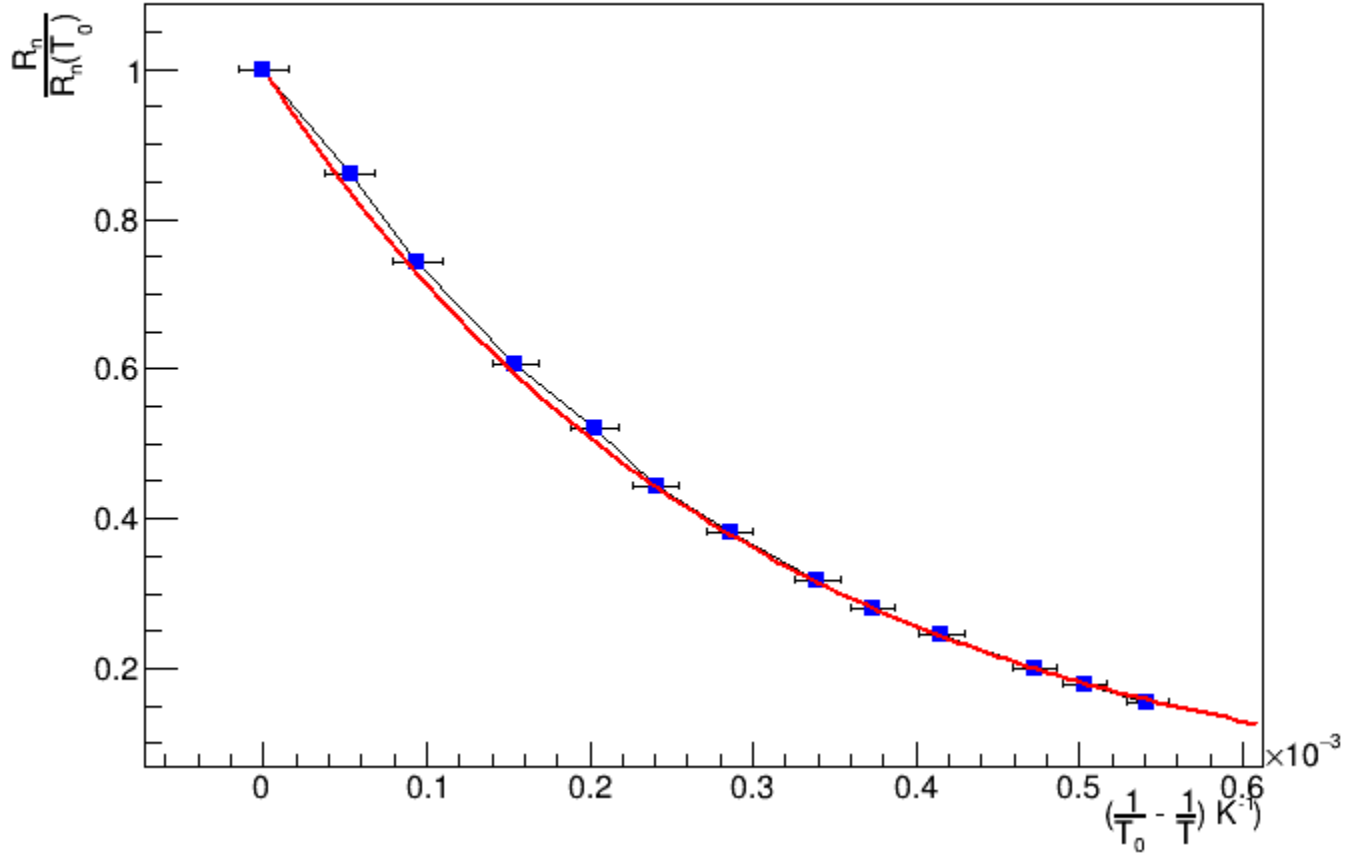


Figure 10: Best fit 2

## 4 Conclusioni

I valori calcolati tramite le procedure di best fit sono:

- $\alpha = (4.16 \pm 0.04)10^{-3}K^{-1}$  per il modello 1.3.
- $\beta = (3399 \pm 40)K$  per il modello 1.4.

Entrambe le procedure di best fit hanno mostrato un risultato concorde ai modelli previsti, rispettivamente 1.3 per la resistenza metallica e 1.4 per il termistore NTC. Considerato ciò, è possibile verificare, confrontando il valore ottenuto con valori tabellati nella letteratura scientifica, se il materiale utilizzato per costruire la resistenza sia davvero quello indicato dal costruttore. Per il termistore è possibile verificare se il valore della costante  $\beta$  rientri nei parametri indicati dal costruttore.

## Appendix A Multimetro

Un multimetro digitale è uno strumento in grado di misurare diverse grandezze, tra cui intensità di corrente (amperometro), differenza di potenziale (voltmetro) e valori di resistenza (ohmetro).

Di seguito si fornisce una breve descrizione sul funzionamento di questi strumenti.

### A.1 Amperometro

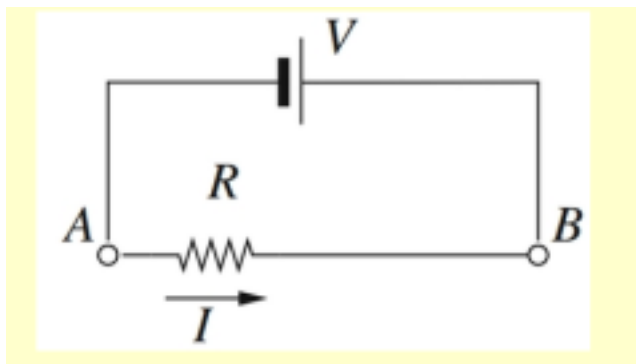


Figure 11: Circuito

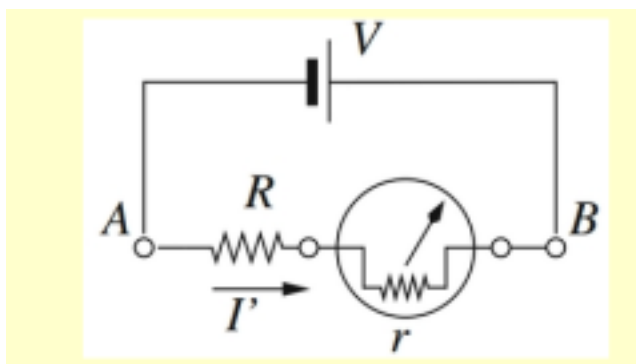


Figure 12: Circuito Amperometro

Un amperometro è uno strumento in grado di misurare l'intensità di corrente presente in un circuito. Lo strumento va collegato in serie al circuito di cui si vuole conoscere la corrente circolante. É necessario considerare che lo strumento introduce una resistenza interna che altera la misura. Applicando la prima legge di Ohm

$$V = RI \quad (\text{A.1})$$

Si ricava, utilizzando il principio di Thevenin

$$I' = \frac{V}{R + r} = \frac{V}{R} \left( \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \right) \quad (\text{A.2})$$

Dunque per avere una misura quanto più precisa possibile il rapporto  $\frac{r}{R} \rightarrow 0$  ; cioè  $r \ll R$  .

## A.2 Voltmetro

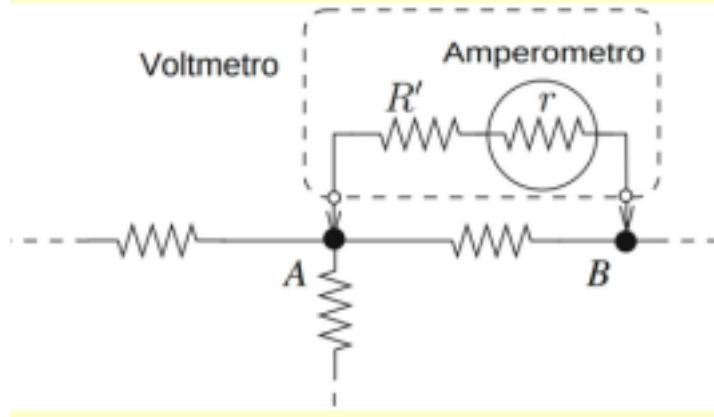


Figure 13: Circuito Voltmetro

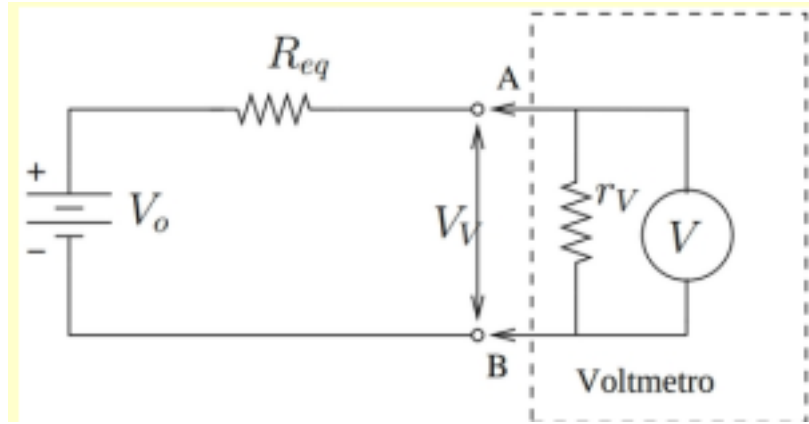


Figure 14: Circuito risultante Thevenin

Un voltmetro è uno strumento in grado di misurare la differenza di potenziale tra due punti di un circuito, esso non è altro che un amperometro utilizzato in un particolare circuito. Lo strumento va collegato in parallelo ai punti di cui si vuole conoscere la differenza di potenziale. È necessario considerare che lo strumento introduce una resistenza interna che altera la misurazione. Utilizzando [A.1](#) si ricava, utilizzando il principio di Thevenin

$$V_v = I_v r_v = \frac{r_V}{R_{eq} + r_v} V_0 \quad (\text{A.3})$$

$$V_0 = \left(1 + \frac{R_{eq}}{r_V}\right) V_v \quad (\text{A.4})$$

Dunque per avere una misura quanto più precisa possibile il rapporto  $\frac{R_{eq}}{r_v} \rightarrow 0$ ; cioè  $r \gg R_{eq}$

### A.3 Ohmetro

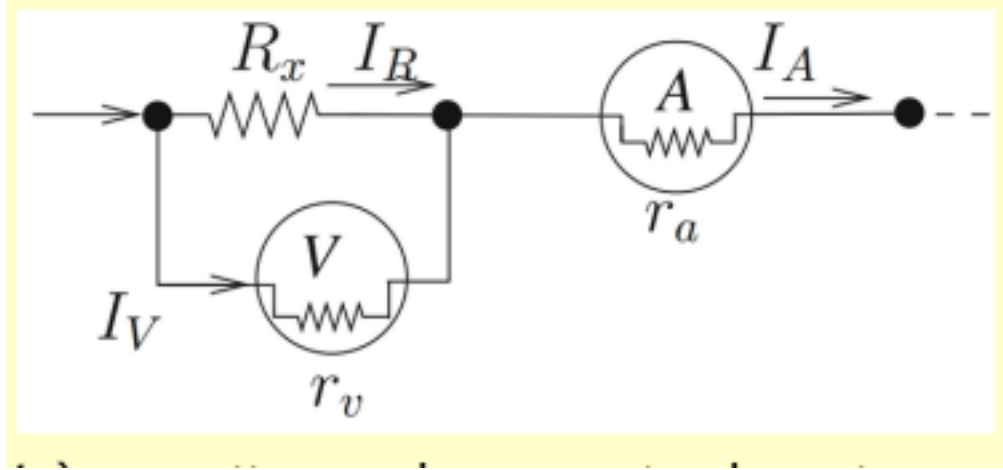


Figure 15: Circuito Ohmetro

Un ohmetro è uno strumento in grado di misurare un resistore. É possibile realizzarlo misurando contemporaneamente un caduta di tensione ai capi del resistore e l'intensità di corrente che lo attraversa, ergo utilizzando contemporaneamente un amperometro e un voltmetro. Naturalmente collegando gli strumenti altereremo la misurazione. Dalla [A.1](#)

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_R} \quad (\text{A.5})$$

Dalle leggi di Kirchoff

$$I_A = I_R + I_v \rightarrow I_v = \frac{I_r R_x}{r_v} \quad (\text{A.6})$$

$$I_R R_x = I_v r_v \rightarrow I_R = I_A \frac{r_v}{r_v + R_x} \quad (\text{A.7})$$

Combinando [A.5](#), [A.6](#) e [A.7](#) si ottiene

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_R} = \frac{\Delta V}{I_A} \left( 1 + \frac{R_x}{r_v} \right) \quad (\text{A.8})$$

Risolvendo per  $R_x$

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_A} \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{r_v I_A}} \right) \quad (\text{A.9})$$

Dalla [A.8](#) si nota che per avere una misura quanto più precisa possibile il rapporto  $\frac{R_x}{r_v} \rightarrow 0$ ; cioè  $R_x \ll r_v$

## Appendix B Risoluzione del Ponte di Wheatstone

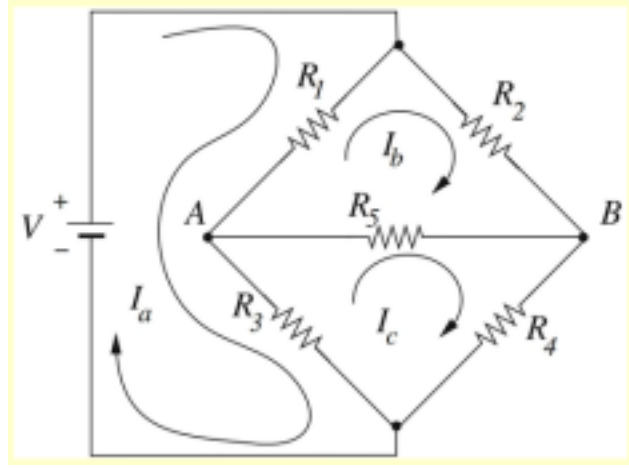


Figure 16: Ponte di Wheatstone

Utilizzando la seconda legge di Kirchhoff si ha

$$\begin{cases} R_1(I_a - I_b) + R_3(I_a - I_c) - V = 0 \\ R_2 I_b + R_5(I_b - I_c) + R_1(I_b - I_a) = 0 \\ R_3(I_c - I_a) + R_5(I_c - I_b) + R_4 I_c = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_a - R_1 I_b - R_3 I_c = V \\ -R_1 I_a + (R_1 + R_2 + R_5)I_b - R_5 I_c = 0 \\ -R_3 I_a - R_5 I_b + (R_3 + R_4 + R_5)I_c = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Scrivendo il sistema lineare in forma matriciale si ottiene

$$\begin{pmatrix} I_a & I_b & I_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Si calcola il determinante della matrice delle resistenze

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_1 & -R_3 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_4 + R_5 \end{vmatrix} = \quad (\text{B.4})$$

$$= R_3[R_4 R_5 + R_2(R_4 + R_5)] + R_1[R_4(R_3 + R_5) + R_2(R_3 + R_4 + R_5)] \quad (\text{B.5})$$

Ed utilizzando l'algoritmo di Cramer ricaviamo  $I_b$  e  $I_c$

$$I_b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & V & -R_3 \\ -R_1 & 0 & -R_5 \\ -R_3 & 0 & R_3 + R_4 + R_5 \end{vmatrix} = \frac{V}{\Delta} [R_5 R_3 + R_1(R_3 + R_4 + R_5)] \quad (\text{B.6})$$

$$I_c = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_1 & V \\ -R_1 & R_1 + R_2 + R_5 & 0 \\ -R_3 & -R_5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{V}{\Delta} [R_1 R_5 + R_3(R_1 + R_2 + R_5)] \quad (\text{B.7})$$

Si ricava  $I_5$

$$I_5 = I_b - I_c = \frac{V}{\Delta} (R_3 R_5 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_1 R_5 - R_1 R_5 - R_1 R_3 - R_2 R_3 - R_3 R_5) \quad (\text{B.8})$$

$$I_5 = \frac{V}{\Delta} (R_1 R_4 - R_2 R_3) \quad (\text{B.9})$$

Per un ponte bilanciato si ha  $I_5 = 0$ , cioè

$$R_1 R_4 - R_2 R_3 = 0 \quad (\text{B.10})$$

Dalla [B.10](#) si ricava [1.1](#).

## 5 Bibliografia

- Slide A.A. 2023/2024, Professore F. Neri, Università degli Studi di Messina
- Documentazione root: <https://root.cern/doc/v628/>