

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora no programable y no gráfica.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$. Se pide:

a) Halla su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

b) Calcular el valor de $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$.

a)

Al no anularse el denominador para ningún valor real de x, el dominio de definición de la curva es \mathbb{R} .

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la de-

derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\underline{\underline{y' > 0, \forall x \in R \Rightarrow \text{La curva es monótona creciente}}}$$

Al ser monótona creciente en su dominio no tiene máximos ni mínimos relativos.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 + 6x) \cdot (x^2 + 1)^2 - x^2(x^2 + 3) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 + 6x) \cdot (x^2 + 1) - x^2(x^2 + 3) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4x^5 + 4x^3 + 6x^3 + 6x - 4x^5 - 12x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-2x^3 + 6x}{(x^2 + 1)^3} = \\ &= \underline{\underline{\frac{-2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}}} \end{aligned}$$

Una función es cóncava (\cap) cuando $f''(x) > 0$ y convexa (\cup) cuando $f''(x) < 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \quad ; \quad -2x(x^2 - 3) = 0 \quad ; \quad \underline{x_1 = 0} \quad ; \quad x^2 - 3 = 0 \quad ; \quad \underline{x_2 = -\sqrt{3}} \quad ; \quad \underline{x_3 = \sqrt{3}}.$$

La función $f(x)$ es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$. Por ser $f''(x) = 0$, los intervalos alternativos de concavidad y convexidad son : $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$.

Considerando un valor del intervalo $(0, \sqrt{3})$, por ejemplo $x = 1$:

$$f''(1) = \frac{-2 \cdot (1^2 - 3)}{(1^2 + 1)^3} = \frac{-2 \cdot (-2)}{2^3} = \frac{4}{8} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Convexidad}}}.$$

$$\underline{\underline{\text{Concavidad } (\cap) \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)}}$$

$$\underline{\underline{\text{Convexidad } (\cup) \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})}}$$

Una función tiene puntos de inflexión para los valores de x que anulen la segunda derivada; esta condición, que es necesaria, no es suficiente, por lo que es necesario que no se anule la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;; \; \underline{x_2=-\sqrt{3}} \;; \; \underline{x_3=\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{(-6x^2+6) \cdot (x^2+1)^3 - 2x(x^2-3) \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^6} = \\ &= \frac{(-6x^2+6) \cdot (x^2+1) - 2x(x^2-3) \cdot 3 \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-6x^4 - 6x^2 + 6x^2 + 6 - 12x^4 + 36x^3}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{-18x^4 + 36x^3 + 6}{(x^2+1)^4} = \frac{-6(3x^4 - 6x^3 - 1)}{(x^2+1)^4} \end{aligned}$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \Rightarrow O(0, 0)}} \;; \; f'''(\sqrt{3}) \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \Rightarrow A\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}}.$$

$$\text{Por simetría: } \underline{\underline{P.I. \Rightarrow B\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty \Rightarrow \underline{\underline{No tiene.}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2+1=0 \;; \; x \notin R \Rightarrow \underline{\underline{No tiene.}}$$

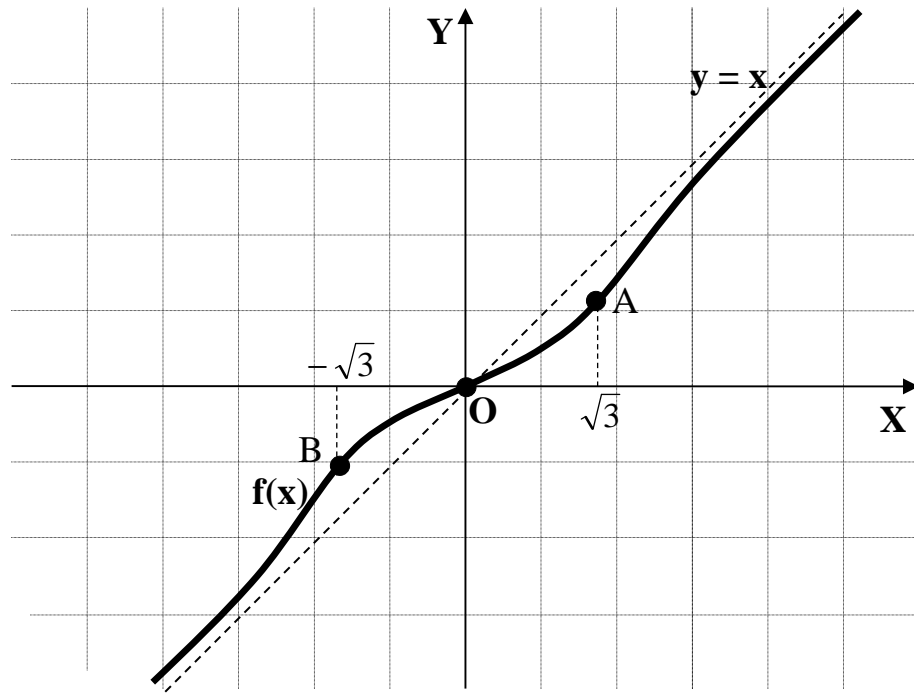
Oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \underline{\underline{1 = m}}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = \underline{\underline{0 = n}}$$

Asíntota oblicua: $y = x$

La representación aproximada de la función es la siguiente:



b)

Para calcular $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$ calculamos, en primer lugar, la integral indefinida:

$$\frac{\begin{array}{r} x^3 \\ -x^3 \\ 0 \end{array}}{\begin{array}{r} -x \\ -x \end{array}} \quad \begin{array}{l} \boxed{x^2 + 1} \\ x \end{array}$$

$$A = \int \frac{x^3}{x^2 + 1} \cdot dx = \int \left(x + \frac{-x}{x^2 + 1} \right) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{-x}{x^2 + 1} \cdot dx = \frac{x^2}{2} + A_1 = A$$

$$A_1 = \int \frac{-x}{x^2 + 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} -x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right. \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} L t = -\frac{1}{2} L (x^2 + 1) = A_1$$

$$\text{Sustituyendo en A el valor obtenido de } A_1: \quad A = \frac{x^2}{2} - L(x^2 + 1)$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} - L(x^2 + 1) \right]_0^1 = \left[\frac{1^2}{2} - L(1^2 + 1) \right] - \left[\frac{0^2}{2} - L(0^2 + 1) \right] = \frac{1}{2} - L2 - 0 + L1 =$$

$$= \frac{1}{2} - L2 + 0 = \frac{1}{2} - L2 = \underline{\underline{\frac{1-2L2}{2}}} = I$$

2º) Se considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = z$ y el punto $P(1, 8, 2)$.

a) Hállese el punto A de la recta r tal que el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ es perpendicular a r.

b) Determinése el plano π que es paralelo a r, pasa por $B(5, 1, 0)$ y por el simétrico del punto P respecto de r.

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\vec{u} = (3, 2, 1)$.

Los puntos genéricos de r son de la forma $A'(1 + 3\lambda, 2 + 2\lambda, \lambda)$.

El vector genérico de origen cualquier punto de r y extremo $P(1, 8, 2)$ es:

$$\vec{v} = \overrightarrow{A'P} = P - A' = (1 - 1 - 3\lambda, 8 - 2 - 2\lambda, 2 - \lambda) = (-3\lambda, 6 - 2\lambda, 2 - \lambda).$$

Para que \vec{v} y $\vec{u} = (3, 2, 1)$ sean perpendiculares su producto tiene que ser 0:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-3\lambda, 6 - 2\lambda, 2 - \lambda) \cdot (3, 2, 1) = 0 \Rightarrow -9\lambda + 12 - 4\lambda + 2 - \lambda = 0 \;; \; 14 = 14\lambda \;; \; \underline{\lambda = 1}.$$

El punto de la recta es $A(4, 4, 1)$ y el vector pedido es:

$$\underline{\underline{\vec{v} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1, 8, 2) - (4, 4, 1) = (-3, 4, 1)}}$$

b)

El punto P' , simétrico de $P(1, 8, 2)$ con respecto a la recta r es el siguiente:

El plano π' , perpendicular a r por P, es el que tiene como vector normal al vector director de la recta r, $\vec{u} = (3, 2, 1)$, y contiene al punto P:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 3x + 2y + z + D = 0 \\ P(1, 8, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 2 + D = 0 \;; \; \underline{D = -21} \Rightarrow \underline{\underline{\pi' \equiv 3x + 2y + z - 21 = 0}}$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv 3x + 2y + z - 21 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + \lambda - 21 = 0 \;; \; 3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + \lambda - 21 = 0 \;;$$

$$14\lambda = 14 \quad ;; \quad \underline{\lambda = 1} \Rightarrow \underline{N(4, 4, 1)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N \quad ;; \quad (4, 4, 1) - (1, 8, 2) = (x, y, z) - (4, 4, 1) ;;$$

$$(3, -4, -1) = (x - 4, y - 4, z - 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 4 = 3 \rightarrow \underline{x = 7} \\ y - 4 = -4 \rightarrow \underline{y = 0} \\ z - 1 = -1 \rightarrow \underline{z = 0} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P'(7, 0, 0)}$$

El plano π pedido contiene al punto B(5, 1, 0) y tiene como vectores directores al vector director de la recta r, $\overrightarrow{u} = (3, 2, 1)$, por ser paralelo a ella y, por contener a los puntos B y P', al vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BP'} = P' - B = (7, 0, 0) - (5, 1, 0) = (2, -1, 0)$.

La expresión general de π es la siguiente:

$$\pi(B; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 2(y-1) - 3z - 4z + (x-5) = 0 \quad ;; \quad x - 5 + 2y - 2 - 7z = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + 2y - 7z - 7 = 0}}$$

CUESTIONES

1ª) Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{L2^{\text{sen } x}}{e^x - 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{L2^{\text{sen } x}}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot L2}{e^x - 1} = \frac{0 \cdot L2}{e^0 - 1} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet er.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{L2 \cdot \cos x}{e^x} = \frac{L2 \cdot 1}{e^0} = \frac{L2}{1} = L2$$

2ª) Hallar los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^3$ es paralela a la recta de ecuación $y = 3x + 2$.

La pendiente de la recta es $m = 3$.

La pendiente a una curva en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x)=3x^2 = m = 3 \Rightarrow 3x^2 = 3 ;; x^2 = 1 ;; \underline{x_1 = 1} ;; \underline{x_2 = -1}.$$

Los puntos de tangencia son: $f(1)=1 \Rightarrow \underline{A(1, 1)}$ y $f(-1)=-1 \Rightarrow \underline{B(-1, -1)}$.

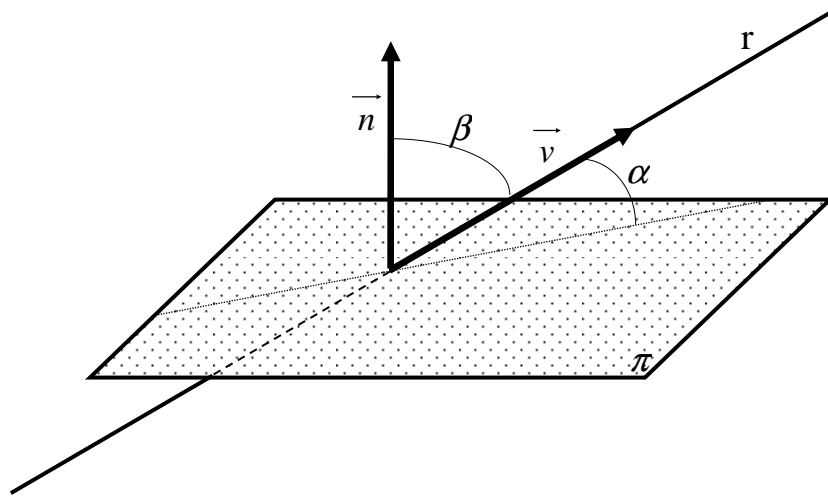
Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$, aplicada a los puntos A y B con $m = 3$:

$$y - 1 = 3 \cdot (x - 1) = 3x - 3 ;; y = 3x - 2 \Rightarrow \underline{\underline{Recta\ tangente: t_1 \equiv 3x - y - 2 = 0.}}$$

$$y + 1 = 3 \cdot (x + 1) = 3x + 3 ;; y = 3x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{Recta\ tangente: t_2 \equiv 3x - y + 2 = 0.}}$$

3ª) Determinar el ángulo que forma la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 4$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector \vec{v} director de r y un vector \vec{n} , normal al plano π .

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \quad (*)$$

Un vector director de r es $\vec{v} = (2, 3, 1)$ y un vector normal de π es $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

$$\begin{aligned} \cos \beta = \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(2, 3, 1) \cdot (1, 1, -1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2+3-1}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{42}} = 0'6172 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc. sen} 0'6172 = \underline{\underline{38^\circ 06' 47'' = \alpha}} \end{aligned}$$

4ª) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} -x & -1 & 2x \\ 2x & -x & -1-x \\ -1 & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2x \\ -2x & x & 1+x \\ -1 & 2x & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad 8x^3 - (1+x) - 2x^2 - 2x^2(1+x) = 0 \quad ;; \quad 8x^3 - 1 - x - 2x^2 - 2x^2 - 2x^3 = 0 \quad ;;$$

$6x^3 - 4x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$ Resolviendo por Ruffini encontramos la única raíz real de la ecuación:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & & 6 & 2 & 1 \\ \hline & 6 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$6x^3 - 4x^2 - x - 1 = 0 \quad ;; \quad x(6x^2 + 2x + 1) = 0 \quad ;; \quad \underline{x_1 = 0} \quad ;; \quad 6x^2 + 2x + 1 = 0 \quad ;; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 24}}{2 \cdot 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x \notin R}$$

Solución: $x = 1.$

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) a) Discutir, según el valor del parámetro real α , el sistema
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x - \alpha y + z = \alpha \\ 3x + 2z = 5 \end{cases}$$

b) Interpretar la discusión realizada en a) en términos de la posición relativa de los planos dados por cada una de las tres ecuaciones del sistema.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -\alpha & 1 & \alpha \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\alpha + 3 + 3\alpha - 2 = 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 1.}$$

Para $\alpha \neq 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$

$$\text{Para } \alpha = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2.}$$

Téngase en cuenta que en M' se cumple que $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$.

Para $\alpha = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

b)

Para $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado, es decir, que la solución es única, lo que indica que los tres planos que representan las tres ecuaciones del sistema se cortan en un punto.

Los tres planos son secantes entre si y se cortan en un punto.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado y, como los rangos de las ma-

trices de coeficientes y ampliada tienen rango 2, indica que se cortan en una recta. Como los planos no son coincidentes ni paralelos,

Los tres planos se cortan en una recta.

2º) Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, definida en el intervalo $[0, 2\pi]$. Se pide:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos. Esbozar su gráfica.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas de ecuaciones $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, e $y=2$.

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio por ser la suma de dos funciones continuas en \mathbb{R} , que son $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

$$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \quad ;; \quad \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \underline{x_1 = \frac{\pi}{4}} \quad ;; \quad \underline{x_2 = \frac{5\pi}{4}}.$$

Las raíces que anulan la primera derivada dividen el dominio en los intervalos $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$, que son alternativamente, crecientes o decrecientes. Para determinar el crecimiento o decrecimiento consideramos un valor sencillo, por ejemplo, $x = \pi$ correspondiente al segundo intervalo:

$$f'(\pi) = \cos \pi - \operatorname{sen} \pi = -1 - 0 = -1 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Decreciente}}.$$

De lo anterior se deducen los siguientes periodos de crecimiento y decrecimiento:

$$\underline{\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente} \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)}}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo}} \\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: } P\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)}}.$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } Q\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)}}.$$

Los puntos de corte de la función con los ejes en su dominio, son los siguientes:

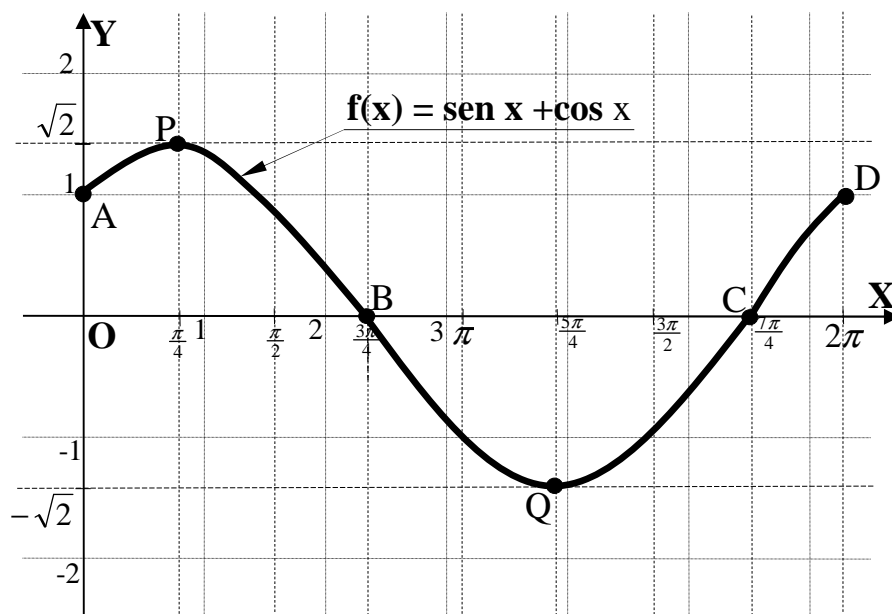
$$\text{Eje } OY \Rightarrow x=0 ;; y=f(0)=\text{sen } 0+\cos 0=0+1=1 \Rightarrow \underline{A(0, 1)}$$

$$\text{Eje } OX \Rightarrow f(x)=0 ;; \text{sen } x+\cos x=0 ;; \text{sen } x=-\cos x ;; \text{tag } x=-1 \Rightarrow x_1=\frac{3\pi}{4} ;;$$

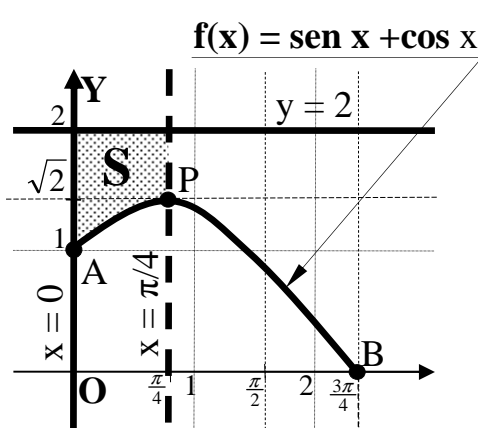
$$x_2=\frac{7\pi}{4} \Rightarrow \underline{B\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)} ;; C\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right).$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ es periódica de periodo 2π , se cumple que $f(0)=f(2\pi)$, por lo cual es punto de la función $D(2\pi, 1)$.

La representación gráfica (aproximada) de la función es la siguiente:



b)



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2 - (\text{sen } x + \cos x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 - \text{sen } x - \cos x) dx = \\ &= [2x + \cos x - \text{sen } x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \text{sen } \frac{\pi}{4} \right) - (2 \cdot 0 + \cos 0 - \text{sen } 0) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 + 0 = \frac{\pi}{2} - 1 = \underline{\underline{\frac{\pi - 2}{2}}} u^2 = S \end{aligned}$$

CUESTIONES

1ª) Sea $\alpha \neq 0$ un número real, y las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{\alpha}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$. Para el valor de α para el que r y s son paralelas, hallar el plano que las contiene.

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, \alpha)$ y $\overrightarrow{v_s} = (4, 2, -2)$.

Para que las rectas r y s sean paralelas es necesario que sus vectores directores sean linealmente dependientes:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{-2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}}.$$

Para determinar el plano π que contiene a las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

determinamos un vector \overrightarrow{w} que tenga como origen el punto de r, O(0, 0, 0), y como extremo el punto de s que se obtiene, por ejemplo, para $\lambda = 1$, A(5, 2, 1); $\overrightarrow{w} = (4, 2, -2)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(O; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad x - 5y + 4z - 5z + 2x - 2y = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x - 7y - z = 0}}$$

2ª) Estudiar, en función del parámetro λ , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$.

El rango de una matriz es el número de líneas (filas o columnas) que son linealmente independientes, o dicho de otra manera: es el orden del menor complementario de mayor dimensión que puede formarse en el determinante de la matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 1 - 1 + \lambda - (2-\lambda) - (2-\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 - 2 + \lambda - 4 + 2\lambda =$$

$$= -\lambda(4 - 4\lambda + \lambda^2) + 3\lambda - 6 = -4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 6 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad ; ; \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Las soluciones de la ecuación resultante son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 3$.

$$\text{Para } \lambda = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Rango } A = 2}}$$

$$\text{Para } \lambda = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Rango } A = 2}}$$

$$\text{Para } \lambda = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Rango } A = 2}}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } \begin{cases} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 2 \\ \lambda \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 3 \quad ; ; \quad \text{Para } \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 2}}$$

3ª) Probar que la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene alguna solución.

Considerando la función $f(x) = x^{2009} - e^x + 2$, que es continua en su dominio, que es \mathbb{R} , le es aplicable el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo real que se considere. Sea, por ejemplo, el intervalo $(-2, 0)$.

$$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^{2009} - e^{-2} + 2 = -2^{2009} - \frac{1}{e^2} + 2 < 0 \\ f(0) &= 0^{2009} - e^0 + 2 = 0 - 1 + 2 = 1 > 0 \end{aligned} \right\}$$

Según el Teorema de Bolzano, la función $f(x) = x^{2009} - e^x + 2$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(-2, 0)$, lo que prueba que

La ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene al menos una solución real (c.q.p.)

4ª) Calcular $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \quad ; \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 dt \\ x = t^2 \rightarrow (1+x) = 1+t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \cdot \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 2 \cdot \arctan t + C = \underline{\underline{2 \arctan \sqrt{x} + C = I}}$$
