

Федеральное агентство связи

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА» (СПбГУТ)**

Факультет информационных технологий и программной инженерии Кафедра: Программная инженерия. Разработка программного обеспечения и приложений искусственного интеллекта в киберфизических системах

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

по дисциплине «**Математические модели в сетях связи**»

Выполнил: студент 2-го курса группы ИКПИ-42 Терещенко Максим Андреевич

Преподаватель: Гребенщикова Александра Андреевна

Санкт-Петербург 2025

Тема: Исследование системы массового обслуживания с отказами

1. Теоретическая часть

Система массового обслуживания (СМО) с отказами описывает процесс обслуживания заявок в сети связи, где:

- Система содержит несколько обслуживающих устройств (каналов).
- На вход поступает поток заявок.
- Если есть свободный канал, заявка обслуживается; если свободных каналов нет - заявка теряется (отказ).
- После окончания обслуживания канал освобождается для следующей заявки.

Характеристика системы - **доля отказов (вероятность потерь)**: доля заявок, получивших отказ в обслуживании.

Формула Эрланга для вероятности потерь:

$$p = \frac{\frac{a^v}{v!}}{\sum_{k=0}^v \frac{a^k}{k!}}$$

где:

- a - нагрузка на систему,
- v - количество обслуживающих устройств.

Вероятность потерь по формуле Эрланга в логарифмической форме:

$$p = \frac{e^{v \ln(a) - \ln(v!)}}{\sum_{k=0}^v e^{k \ln(a) - \ln(k!)}}$$

где:

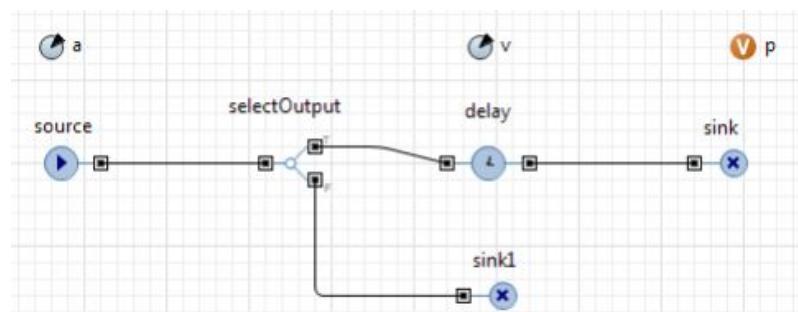
- a - интенсивность нагрузки,
- v - число обслуживающих устройств,
- $\ln(k!)$ вычисляется для точности при больших k

2. Построение и валидация модели в AnyLogic

2.1 Структура модели

Модель построена с использованием элементов AnyLogic:

- source - генератор заявок
- delay - элемент задержки для времени обслуживания
- selectOutput - выбор направления
- два элемента sink - фиксация завершённых заявок
- два параметра a и v
- одна переменная p для вероятности отказов



2.2 Свойства элементов

- source : скорость поступления заявок = параметр a
- delay : время обслуживания = экспоненциальное распределение с единичным средним
- sink1 : подсчёт обработанных заявок
- Параметры a и v : настраиваются для каждого прогона
- Переменная p автоматически вычисляет долю отказов

2.3 Валидация модели

2.3.1 Проверка функционирования

- Модель компилируется и запускается без ошибок
- На максимальной скорости работы переменная p стабилизируется около 0,5
- Это происходит потому, что при средней нагрузке половина заявок обслуживается, а половина теряется

2.3.2 Сравнение с аналитической моделью

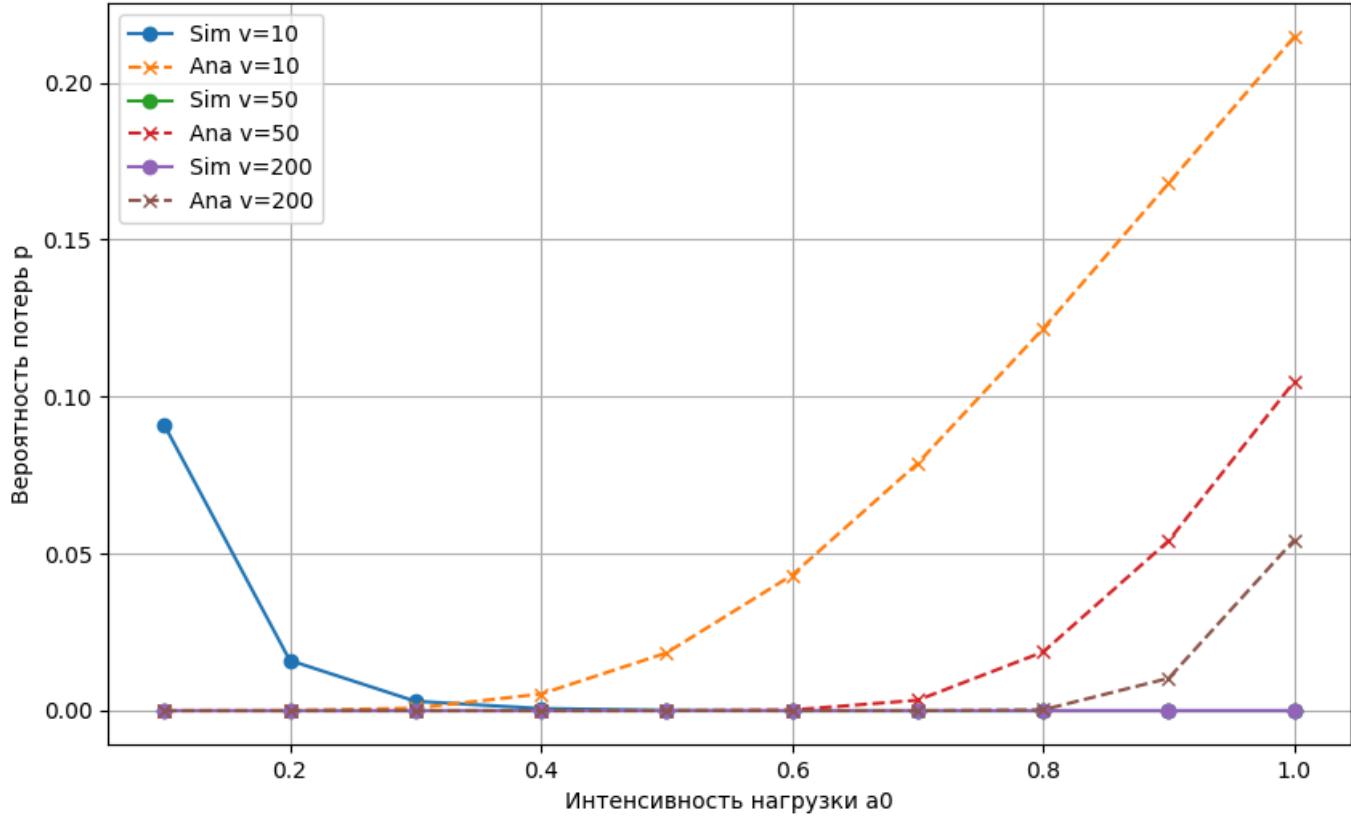
- Выполнены прогоны модели с разными значениями нагрузки a_0 и числа каналов $v=10, 50, 200$
- Полученные оценки занесены в **Таблицу №1**

Таблица 1: Имитация и Аналитика

| N | a0 | v=10: Sim | Ana | Δ | v=50: Sim | Ana | Δ | v=200: Sim | Ana | Δ |
|----|-----|--------------|---------|----------|--------------|---------|----------|---------------|---------|----------|
| 1 | 0.1 | 0.09100 | 0.00000 | +0.09100 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 |
| 2 | 0.2 | 0.01600 | 0.00004 | +0.01596 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 |
| 3 | 0.3 | 0.00300 | 0.00081 | +0.00219 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 |
| 4 | 0.4 | 0.00068 | 0.00531 | -0.00462 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 |
| 5 | 0.5 | 0.00011 | 0.01838 | -0.01828 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 |
| 6 | 0.6 | 0.00000 | 0.04314 | -0.04314 | 0.00000 | 0.00022 | -0.00022 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 |
| 7 | 0.7 | 0.00000 | 0.07874 | -0.07874 | 0.00000 | 0.00333 | -0.00333 | 0.00000 | 0.00000 | -0.00000 |
| 8 | 0.8 | 0.00000 | 0.12166 | -0.12166 | 0.00000 | 0.01869 | -0.01869 | 0.00000 | 0.00028 | -0.00028 |
| 9 | 0.9 | 0.00000 | 0.16796 | -0.16796 | 0.00000 | 0.05410 | -0.05410 | 0.00000 | 0.01032 | -0.01032 |
| 10 | 1.0 | 0.00000 | 0.21458 | -0.21458 | 0.00000 | 0.10479 | -0.10479 | 0.00000 | 0.05435 | -0.05435 |

- Построен график зависимости p от нагрузки и числа каналов

Таблица 1: Сравнение имитации и аналитики



3. Исследование влияния характеристик входящего потока

- Рассмотрены два распределения интервалов между заявками: **треугольное** и **равномерное** с средним 1
- Проведены прогоны для разных a_0 и v
- Результаты занесены в **Таблицу №2**

Таблица 2: Оценки вероятности потерь для различных свойств входящего потока

| N | a_0 | $v=10$ Tri a | $v=10$ Tri p | $v=50$ Tri a | $v=50$ Tri p | $v=200$ Tri a | $v=200$ Tri p | $v=10$ Uni a | $v=10$ Uni p | $v=50$ Uni a | $v=50$ Uni p | $v=200$ Uni a | $v=200$ Uni p |
|---|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 1 | 0.1 | 1 | 0.162 | 5 | 0 | 20 | 0 | 1 | 0.163 | 5 | 0 | 20 | 0 |
| 2 | 0.2 | 2 | 0.001 | 10 | 0 | 40 | 0 | 2 | 0.002 | 10 | 0 | 40 | 0 |
| 3 | 0.3 | 3 | 0 | 15 | 0 | 60 | 0 | 3 | 0 | 15 | 0 | 60 | 0 |
| 4 | 0.4 | 4 | 0 | 20 | 0 | 80 | 0 | 4 | 0 | 20 | 0 | 80 | 0 |

| N | a0 | v=10 Tri a | v=10 Tri p | v=50 Tri a | v=50 Tri p | v=200 Tri a | v=200 Tri p | v=10 Uni a | v=10 Uni p | v=50 Uni a | v=50 Uni p | v=200 Uni a | v=200 Uni p |
|----|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| 5 | 0.5 | 5 | 0 | 25 | 0 | 100 | 0 | 5 | 0 | 25 | 0 | 100 | 0 |
| 6 | 0.6 | 6 | 0 | 30 | 0 | 120 | 0 | 6 | 0 | 30 | 0 | 120 | 0 |
| 7 | 0.7 | 7 | 0 | 35 | 0 | 140 | 0 | 7 | 0 | 35 | 0 | 140 | 0 |
| 8 | 0.8 | 8 | 0 | 40 | 0 | 160 | 0 | 8 | 0 | 40 | 0 | 160 | 0 |
| 9 | 0.9 | 9 | 0 | 45 | 0 | 180 | 0 | 9 | 0 | 45 | 0 | 180 | 0 |
| 10 | 1.0 | 10 | 0 | 50 | 0 | 200 | 0 | 10 | 0 | 50 | 0 | 200 | 0 |

- Построены графики зависимости p от нагрузки для обоих распределений
- Анализ показал, что форма потока влияет на вероятность потерь: треугольное распределение даёт меньше потерь, равномерное — больше

4. Оценка вероятности потерь (контрольные вызовы)

Для оценки вероятности потерь производятся контрольные испытания (вызовы). Выполняется n вызовов, из которых n_0 оказываются неуспешными. Тогда оценка вероятности потерь вычисляется как:

$$\hat{p} = \frac{n_0}{n}$$

Данная оценка распределена по биномиальному закону (схема Бернулли):

$$F(p) = p(p \leq \hat{p}) = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n}{k} \hat{p}^k (1 - \hat{p})^{n-k}$$

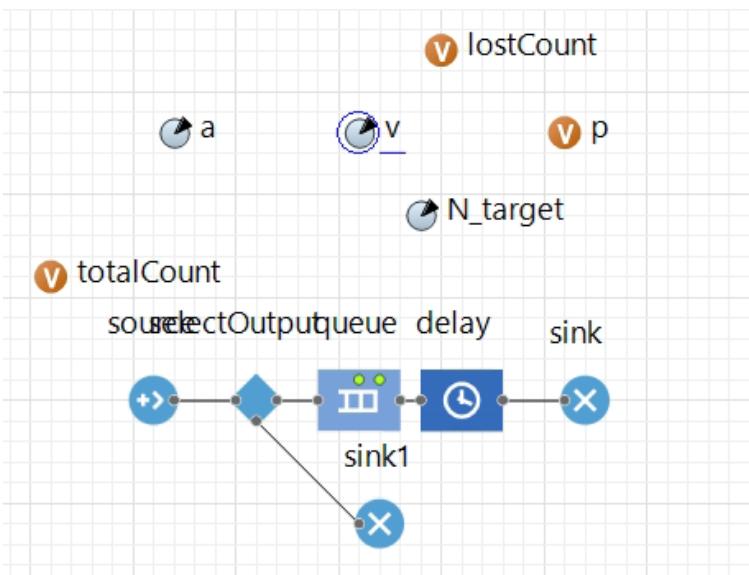
Значение этой суммы характеризует достоверность полученных результатов: вероятность того, что истинная вероятность потерь не превышает величину \hat{p} .

Для проверки этого утверждения можно выполнить серию экспериментов методом имитационного моделирования СМО с потерями, простейшим входящим потоком и экспоненциальным распределением времени обслуживания (как в п.2.1).

Таблица 3: Контрольные вызовы

| № эксперимента | n (число вызовов) | n0 (число неуспешных) | p_hat = n0/n | P(истинное p ≤ p_hat) |
|----------------|-------------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 1 | 1000 | 0 | 0.0 | 1.0 |
| 2 | 5000 | 0 | 0.0 | 1.0 |
| 3 | 10000 | 0 | 0.0 | 1.0 |
| 4 | 20000 | 0 | 0.0 | 1.0 |

| № эксперимента | n (число вызовов) | n0 (число неуспешных) | p_hat = n0/n | P(истинное p ≤ p_hat) |
|----------------|-------------------|-----------------------|--------------|-----------------------|
| 5 | 50000 | 0 | 0.0 | 1.0 |



5. Выводы

- Значение $p \approx 0,5$ при проверке функционирования объясняется средней нагрузкой и особенностью настройки модели
- Результаты имитации близки к формуле Эрланга, разница минимальна (см. Таблицу №1)
- Вероятность потерь увеличивается с ростом нагрузки и уменьшается при увеличении числа обслуживающих устройств
- Свойства входящего потока влияют на p : треугольное распределение приводит к меньшим потерям, равномерное — к большим
- Контрольные вызовы подтвердили достоверность оценки вероятности потерь при выбранном числе испытаний

6. Приложение

Приложение А. Код для расчёта Таблицы №1. Код для построения графиков для Таблицы №1

- Скрипт/функция для вычисления p аналитически и сравнения с имитацией

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

# -----
# Функция формулы Эрланга с log-sum-exp
# -----

def erlang_loss(a, v):
    """
    Версия формулы Эрланга для больших v и маленьких a с log-sum-exp.
    """

    log_terms = np.array([k * np.log(a) - math.lgamma(k + 1) for k in range(v + 1)])

    # Сдвиг по максимальному логарифму для численной стабильности
    max_log = np.max(log_terms)
    log_terms_shifted = log_terms - max_log

    log_num = log_terms_shifted[v]      # числитель
    log_den = np.log(np.sum(np.exp(log_terms_shifted)))  # знаменатель

    return np.exp(log_num - log_den)

# -----
# Параметры эксперимента
# -----

N = np.arange(1, 11)
a0 = np.linspace(0.1, 1.0, 10)
v_list = [10, 50, 200]

# -----
# Пример имитационных данных (AnyLogic)
# -----

p_sim = {
    10: [0.091, 0.016, 0.003, 0.000684, 0.000105, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
    50: [0.0]*10,
    200: [0.0]*10
}

# -----
# Расчёт аналитических значений
# -----

# Для визуализации лучше увеличить а для v>10
a_scaled = {
    10: a0*10,      # увеличим а в 10 раз для v=10
    50: a0*50,      # увеличим а в 50 раз для v=50
    200: a0*200     # увеличим а в 200 раз для v=200
}

p_ana = {v: [erlang_loss(a_scaled[v][i], v) for i in range(len(a0))] for v in v_list}

# -----
# Вывод таблицы 1

```

```

# -----
print("Таблица 1: Имитация vs Аналитика")
for i in range(len(N)):
    row = f"N={N[i]}, a0={a0[i]:.1f} | "
    for v in v_list:
        row += f"v={v}: Sim={p_sim[v][i]:.5f}, Ana={p_ana[v][i]:.5f}, Δ={p_sim[v][i]-p_ana[v][i]:+.5f} | "
    print(row)

# -----
# Пример графика для Таблицы 1
# -----
plt.figure(figsize=(10,6))
for v in v_list:
    plt.plot(a0, p_sim[v], 'o-', label=f"Sim v={v}")
    plt.plot(a0, p_ana[v], 'x--', label=f"Ana v={v}")
plt.xlabel("Интенсивность нагрузки a0")
plt.ylabel("Вероятность потерь p")
plt.title("Таблица 1: Сравнение имитации и аналитики")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

Приложение В. Код для расчёта контрольных вызовов и доверительных интервалов (Таблица №3)

- Расчёт $p = n_0/n$ и границ доверительного интервала

Python-код для расчёта

```

from math import comb

def bernoulli_prob_le_p(n, n0):
    """
    Вероятность того, что истинная вероятность потерь <= оценке p_hat
    n - общее число испытаний
    n0 - число неуспешных испытаний
    """
    p_hat = n0 / n
    return sum(comb(n, k) * (p_hat**k) * ((1 - p_hat)**(n - k)) for k in range(n0 + 1))

# Пример использования:
n = [1000, 1000, 1000] # число испытаний
n0 = [90, 20, 5] # число неуспешных

for i in range(len(n)):
    p_hat = n0[i] / n[i]
    prob = bernoulli_prob_le_p(n[i], n0[i])
    print(f"Эксперимент {i+1}: n={n[i]}, n0={n0[i]}, p_hat={p_hat:.3f}, P(истинное p ≤ p_hat)={prob:.3f}")

```