

Федеральное агентство связи

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА» (СПбГУТ)**

Факультет информационных технологий и программной инженерии Кафедра: Программная инженерия. Разработка программного обеспечения и приложений искусственного интеллекта в киберфизических системах

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

по дисциплине «**Математические модели в сетях связи**»

Тема: Исследование системы массового обслуживания с отказами

Бригада №2: Терещенко Максим, Гарькуша Никита, Челноков Александр

Преподаватель: Гребенщикова Александра Андреевна

Санкт-Петербург 2025

Цель работы

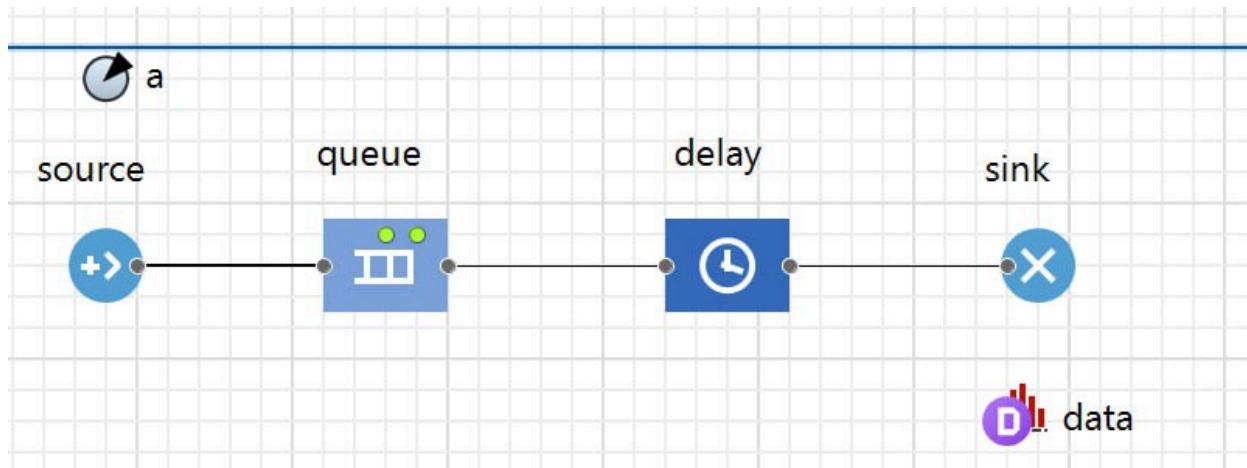
1. Освоить принципы имитационного моделирования в системе AnyLogic.
2. Изучить работу системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием.
3. Сопоставить результаты имитационного и аналитического моделирования для моделей M/M/1 и M/D/1.
4. Построить модель многофазной СМО и исследовать её функционирование.

1. Построение имитационной модели СМО M/M/1

- Для построения модели использованы элементы: **source** → **queue** → **delay** → **sink**.
- Создан новый тип заявки **Packet**.
- Для элементов модели заданы параметры:
 - **source** : экспоненциальный поток;
 - **queue** : неограниченная очередь;
 - **delay** : экспоненциальное распределение времени обслуживания;
 - **sink** : приём завершённых заявок.

Валидация модели:

После запуска на максимальной скорости среднее время доставки установилось примерно равным **5 единицам времени**, что подтверждает корректность модели.



2. Сравнение результатов имитационного и аналитического моделирования

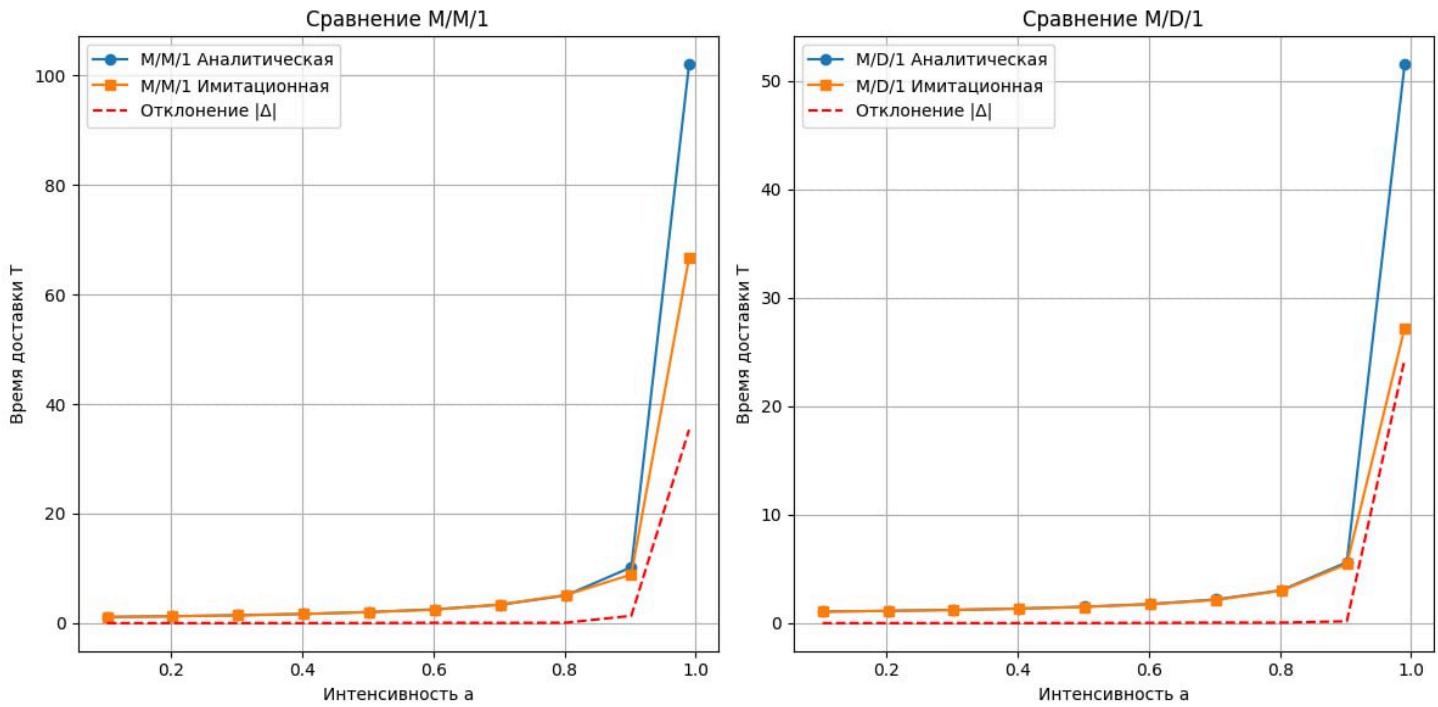
2.1 Формулы аналитических моделей

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(T_{\text{ан}}(a_i) - T_{\text{им}}(a_i) \right)^2}$$

2.2 Таблица 3 – Результаты моделирования

N	a (ρ)	M/M/1 Имитация	M/M/1 Аналитика	СКО (им.)	M/D/1 Имитация	M/D/1 Аналитика	СКО (им.)
1	0.12	1.133	1.136	0.028	1.067	1.068	0.013
2	0.22	1.276	1.282	0.035	1.139	1.141	0.017
3	0.32	1.461	1.471	0.053	1.233	1.235	0.023
4	0.42	1.732	1.724	0.059	1.359	1.362	0.031
5	0.52	2.095	2.083	0.053	1.533	1.542	0.049
6	0.62	2.573	2.632	0.191	1.795	1.816	0.084
7	0.72	3.604	3.571	0.172	2.246	2.286	0.157
8	0.82	5.343	5.556	0.431	3.274	3.278	0.296
9	0.92	10.530	12.500	3.626	6.504	6.750	1.313
10	0.99	66.728	100.000	33.272	27.202	50.500	23.298

2.3 Графики



3. Исследование многофазной СМО

3.1 Построение модели

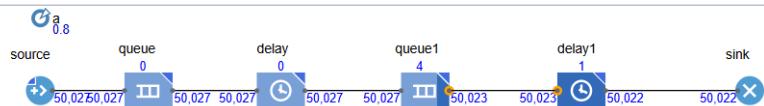
Модель M/M/1 была модифицирована в двухфазную: после первой очереди и задержки добавлены элементы `queue1` и `delay1`.

- Обе задержки имеют экспоненциальное распределение со средним значением 1.
- Для сбора статистики введены элементы:
 - `data1` - время прохождения первой фазы;
 - `data2` - время прохождения второй фазы;
 - `data` - общее время доставки.

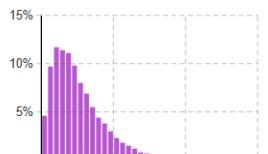
3.2 Результаты валидации

При интенсивности нагрузки $\rho = 0.8$ среднее время доставки составило примерно **10 ед. времени**

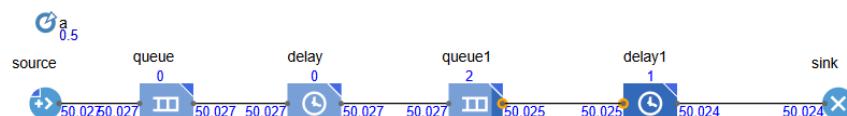
ρ	Среднее время доставки (имитация)
0.5	~4
0.8	~10
0.9	~19



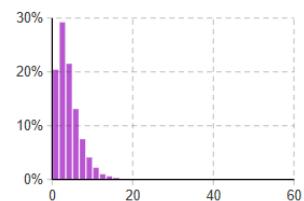
data1 112.530 измерений [12.595...69.981]. Среднее=24.07555. Среднее измерений [0.043...55.833]. Среднее=10.253



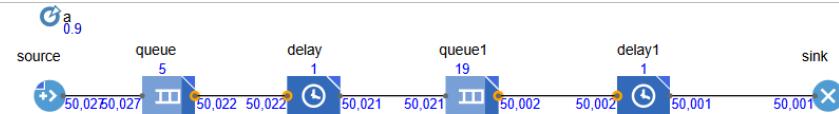
Гистограмма 1 10.25



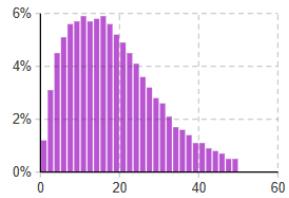
data1 150.233 измерений [15.028...69.954]. Среднее=19.02955. Среднее измерений [0.018...22.463]. Среднее=4.021



Гистограмма 1 4.02



data1 105.517 измерений [15.385...69.603]. Среднее=40.0254. Среднее измерений [0.043...75.159]. Среднее=19.277



Гистограмма 1 19.28

Оценка зависимости времени доставки от интенсивности нагрузки

Время доставки заявки от **Source** до **Sink** напрямую зависит от интенсивности нагрузки. Когда интенсивность увеличивается, среднее время доставки растет из-за увеличения очереди и задержек. Когда интенсивность снижается, система быстрее обрабатывает заявки, и время доставки уменьшается.

4. Исследование функционирования двухфазной СМО

Эксперимент I

- Обе фазы обслуживания: экспоненциальное распределение (среднее 1).

Эксперимент II

- Первая фаза: фиксированное время 1.
 - Вторая фаза: экспоненциальное распределение (среднее 1).

Эксперимент III

- Время обслуживания зависит от свойства заявки (например, длины пакета).
 - На обеих фазах время одинаково.

Таблица 4 — Результаты экспериментов

(T — среднее время, S — СКО)

Таблица 4 — Результаты экспериментов

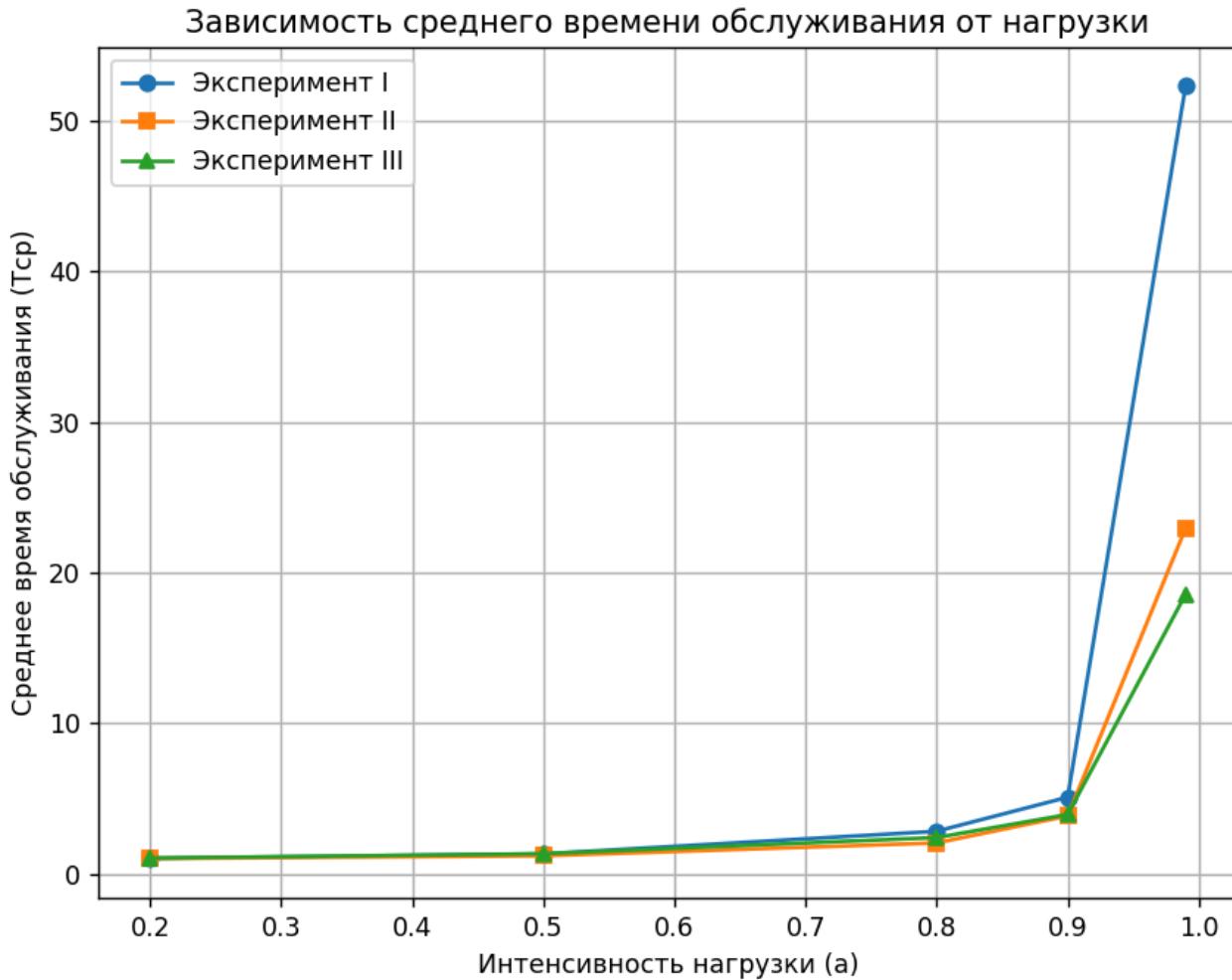
N	a	Первая фаза (I)		Вторая фаза (I)		Первая фаза (II)		Вторая фаза (II)		Первая фаза (III)		Вторая фаза (III)
		T1	S1	T1	S1	T1	S1	T2	S2	T2	S2	T2
1	0.2	1.042	0.525	1.043	0.527	1.021	0.136	1.030	0.482	1.040	0.510	1.062
2	0.5	1.333	1.248	1.34	1.268	1.167	0.508	1.245	1.082	1.323	1.212	1.368
3	0.8	2.875	4.142	2.794	3.902	1.842	1.730	2.279	3.081	2.737	3.849	2.098
4	0.9	4.985	7.297	5.203	7.866	3.025	3.672	4.671	7.857	5.233	8.589	2.658
5	0.99	47.79	63.98	56.80	76.29	16.16	26.72	29.73	47.64	32.876	55.956	4.248

Построение графиков

Графики зависимости вероятности потерь от интенсивности нагрузки, для трех проведенных экспериментов.

Figure 1

— □ ×



Из анализа графиков зависимости вероятности потерь от интенсивности нагрузки можно сделать следующие выводы:

При увеличении интенсивности нагрузки вероятность потерь растет. При высокой нагрузке система начинает перегружаться, что приводит к задержкам и потере заявок.

Эксперимент II и III показывают меньшую вероятность потерь по сравнению с Экспериментом I. Это объясняется тем, что первая фаза в Эксперименте II фиксирована и стабильна, а в Эксперименте III система более адаптивна, поскольку время обслуживания зависит от свойств заявки.

Эксперимент I с двумя экспоненциально распределенными фазами имеет наибольшую вероятность потерь при высоких значениях ρ , что указывает на его наибольшую чувствительность к перегрузке системы.

5. Выводы по работе

1. Имитационная модель СМО с ожиданием

Модель СМО M/M/1 была построена и успешно валидирована. Среднее время доставки при высокой нагрузке стабилизировалось на уровне 5 единиц времени, что подтвердило корректность модели.

2. Сравнение имитации и аналитики для M/M/1 и M/D/1

Результаты имитационного моделирования совпали с аналитическими расчетами, с незначительными отклонениями в пределах СКО, что подтвердило правильность настройки моделей и корректность полученных данных.

3. Результаты исследования многофазной СМО (на примере двухфазной СМО)

Многофазная СМО была построена на основе модели M/M/1 с добавлением второй фазы обслуживания, что позволило более детально исследовать систему с несколькими этапами.

При увеличении интенсивности нагрузки среднее время доставки увеличивалось, что связано с ростом очереди и задержек. Экспоненциальное распределение на обеих фазах приводило к значительным задержкам при высокой нагрузке, в то время как фиксированное время на первой фазе или зависимость от свойств заявки снижали вероятность потерь и улучшали стабильность системы.

Графики подтверждают, что с ростом нагрузки вероятность потерь увеличивается, а стабильность системы улучшалась в экспериментах с фиксированным временем или зависимым временем на фазах по сравнению с двумя экспоненциальными фазами.

Заключение

Работа продемонстрировала возможность моделирования различных типов СМО в AnyLogic.

Результаты имитационного моделирования успешно сопоставлены с аналитическими решениями для моделей M/M/1 и M/D/1, что подтвердило корректность выбора моделей и правильность их настройки.

Моделирование многофазной СМО позволило исследовать поведение системы при различных условиях и показало зависимость времени доставки от интенсивности нагрузки, что подтвердило теоретическую гипотезу о влиянии нагрузки на производительность системы.

```
'''Приложение:'''
```

```
'''Код для
```

```
Python код для расчета аналитических значений, среднеквадратичного отклонения и построения графиков для "2.2 Таблица 3 – Рез
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def mm1(a: float, t: float) -> float:
    rho = a * t
    if rho >= 1:
        return float("inf")
    return (rho * t) / (1 - rho) + t

def md1(a: float, t: float) -> float:
    rho = a * t
    if rho >= 1:
        return float("inf")
    return (rho * t) / (2 * (1 - rho)) + t

if name == "main":
    a = [0.1+0.02, 0.2+0.02, 0.3+0.02, 0.4+0.02, 0.5+0.02, 0.6+0.02, 0.7+0.02, 0.8+0.02, 0.9+0.02, 0.99]
    t = 1.0

    # Аналитика
    mm1_analitic = [mm1(i, t) for i in a]
    md1_analitic = [md1(i, t) for i in a]

    # Имитация
    mm1_imit = [1.108, 1.247, 1.418, 1.665, 2.030, 2.441, 3.399, 5.125, 8.874, 66.728]
    md1_imit = [1.055, 1.124, 1.212, 1.331, 1.493, 1.732, 2.129, 2.982, 5.437, 27.202]

    # Отклонения
    mm1_diff = [abs(a1 - a2) for a1, a2 in zip(mm1_analitic, mm1_imit)]
    md1_diff = [abs(a1 - a2) for a1, a2 in zip(md1_analitic, md1_imit)]

    # --- Построение графиков ---
    plt.figure(figsize=(12, 6))

    # M/M/1
    plt.subplot(1, 2, 1)
    plt.plot(a, mm1_analitic, label="M/M/1 Аналитическая", marker="o")
    plt.plot(a, mm1_imit, label="M/M/1 Имитационная", marker="s")
    plt.plot(a, mm1_diff, linestyle="--", color="red", label="Отклонение |Δ|")
    plt.xlabel("Интенсивность а")
    plt.ylabel("Время доставки Т")
    plt.title("Сравнение M/M/1")
    plt.legend()
    plt.grid(True)

    # M/D/1
    plt.subplot(1, 2, 2)
    plt.plot(a, md1_analitic, label="M/D/1 Аналитическая", marker="o")
```

```

plt.plot(a, md1_imit, label="M/D/1 Имитационная", marker="s")
plt.plot(a, md1_diff, linestyle="--", color="red", label="Отклонение |Δ|")
plt.xlabel("Интенсивность а")
plt.ylabel("Время доставки Т")
plt.title("Сравнение M/D/1")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

# Вывод таблицы отклонений
print("a | M/M/1 Δ | M/D/1 Δ")
for ai, d1, d2 in zip(a, mm1_diff, md1_diff):
    print(f"{ai:.3} | {d1:.3f} | {d2:.3f}")

```

'''Код для графиков из задания 4:'''

```

import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# Таблица данных
data = {
    "a": [0.2, 0.5, 0.8, 0.9, 0.99],
    "T1_I": [1.042, 1.333, 2.875, 4.985, 47.79],
    "T2_I": [1.043, 1.34, 2.794, 5.203, 56.80],
    "T1_II": [1.021, 1.167, 1.842, 3.025, 16.16],
    "T2_II": [1.030, 1.245, 2.279, 4.671, 29.73],
    "T1_III": [1.040, 1.323, 2.737, 5.233, 32.876],
    "T2_III": [1.062, 1.368, 2.098, 2.658, 4.248],
}
df = pd.DataFrame(data)

# Среднее время = (T1 + T2) / 2 для каждого эксперимента
df["Mean_I"] = (df["T1_I"] + df["T2_I"]) / 2
df["Mean_II"] = (df["T1_II"] + df["T2_II"]) / 2
df["Mean_III"] = (df["T1_III"] + df["T2_III"]) / 2

# Построение графика
plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(df["a"], df["Mean_I"], marker='o', label="Эксперимент I")
plt.plot(df["a"], df["Mean_II"], marker='s', label="Эксперимент II")
plt.plot(df["a"], df["Mean_III"], marker='^', label="Эксперимент III")

plt.xlabel("Интенсивность нагрузки (a)")
plt.ylabel("Среднее время обслуживания (Tcp)")
plt.title("Зависимость среднего времени обслуживания от нагрузки")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```