

# **Федеральное агентство связи**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА» (СПбГУТ)**

Факультет информационных технологий и программной инженерии Кафедра: Программная инженерия. Разработка программного обеспечения и приложений искусственного интеллекта в киберфизических системах

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6**

по дисциплине **«Математические модели в сетях связи»**

### **Тема: ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПРИОРИТЕТНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ**

Бригада №2: Терещенко Максим, Гарькуша Никита, Челноков Александр

**Преподаватель:** Гребенщикова Александра Андреевна

Санкт-Петербург 2025

# 1. Система массового обслуживания с приоритетным обслуживанием

Цели данной работы:

1. Освоить систему имитационного моделирования.
2. Изучить модели СМО с приоритетным обслуживанием.

## 2. Построение имитационной модели

### 2.1. Построение структуры модели СМО M/M/1 в AnyLogic

Для построения модели используются элементы:

source , delay , queue , sink , parameter , четыре элемента *данные гистограммы*, гистограмма и слайдер.

### 2.2. Определение свойств элементов модели

Свойства элементов модели соответствуют требованиям СМО M/M/1 с приоритетным обслуживанием.

### 2.3. Валидация модели

#### 2.3.1. Проверка функционирования

Интенсивность нагрузки:  $\alpha = 0.9 / 3$  (три источника дают общую нагрузку 0.9).

После запуска на максимальной скорости среднее время доставки:

- все заявки —  $\approx 5$  ед. вр.
- приоритет 2 — 2.1 ед. вр.
- приоритет 1 — 3.3 ед. вр.
- приоритет 0 — 9.5 ед. вр.

#### 2.3.2. Сравнение с аналитической моделью

Провести серию прогонов с разными значениями  $\alpha$ .

Результаты занести в таблицу 1.

**Аналитические формулы:**

$$W_K = \frac{\sum_{i=1}^K \rho_i}{(1 - R_K)(1 - R_{K-1})}, \quad K = 2, 3$$

$$R_K = \sum_{i=1}^K \rho_i$$

$$R_{K-1} = \sum_{i=1}^{K-1} \rho_i$$

$$\rho_i = a_i = \frac{a}{\mu t}$$

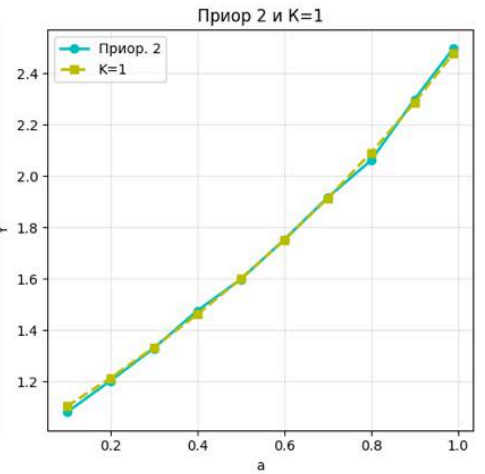
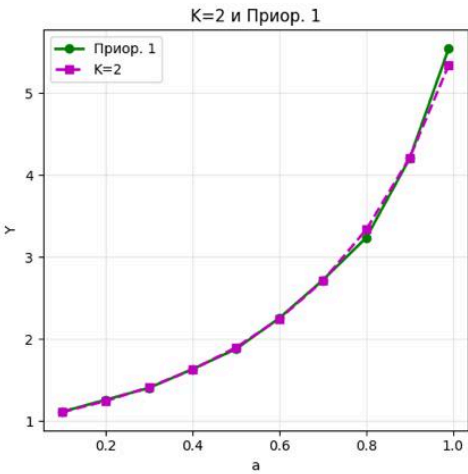
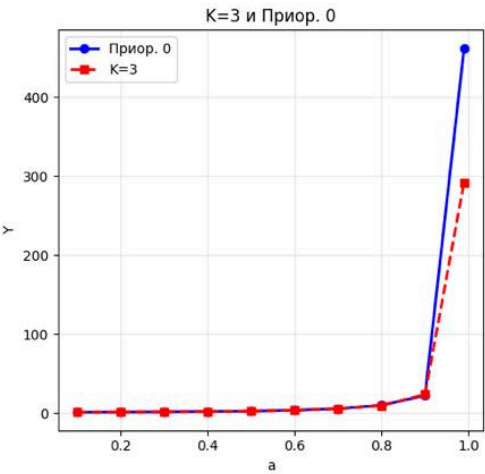
Для приоритета 1:

$$W_1 = \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i}{1 - \rho_1}$$

$$T_K = W_K + t$$

Таблица 1 – Оценки времени доставки для различных интенсивностей (М/М/1):

N	a	Время доставки T					
		Имитационная модель			Аналитическая модель		
		Приор 0	Приор 1	Приор 2	K=3	K=2	K=1
1	0,1	1,131	1,116	1,081	1,11904762	1,11083744	1,10344828
2	0,2	1,289	1,262	1,203	1,28846154	1,24725275	1,21428571
3	0,3	1,528	1,407	1,33	1,53571429	1,41666667	1,33333333
4	0,4	1,964	1,636	1,476	1,90909091	1,62937063	1,46153846
5	0,5	2,468	1,881	1,598	2,5	1,9	1,6
6	0,6	3,503	2,259	1,752	3,5	2,25	1,75
7	0,7	5,659	2,722	1,916	5,375	2,71195652	1,91304348
8	0,8	9,779	3,239	2,061	9,57142857	3,33766234	2,09090909
9	0,9	22,227	4,207	2,298	23,5	4,21428571	2,28571429
10	0,99	461,969	5,55	2,498	292,176471	5,34591747	2,47761194



### 3. Исследование СМО M/D/1 с приоритетным обслуживанием

Изменить свойства delay для перехода к M/D/1.

Провести серию прогонов и занести результаты в таблицу 2.

**Аналитические формулы:**

$$W_K = \frac{1 - \sum_{i=1}^K \rho_i (1 + (\sigma_i/t_i)^2)}{2(1 - R_K)(1 - R_{K-1})}, \quad K = 2, 3$$

$$R_K = \sum_{i=1}^K \rho_i$$

$$R_{K-1} = \sum_{i=1}^{K-1} \rho_i$$

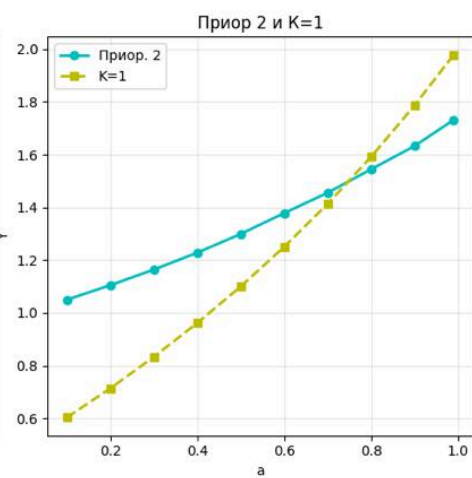
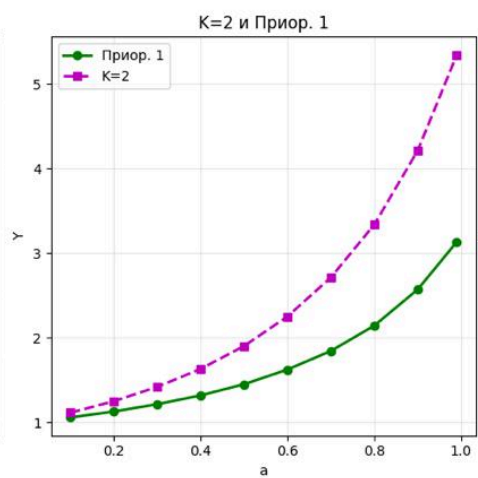
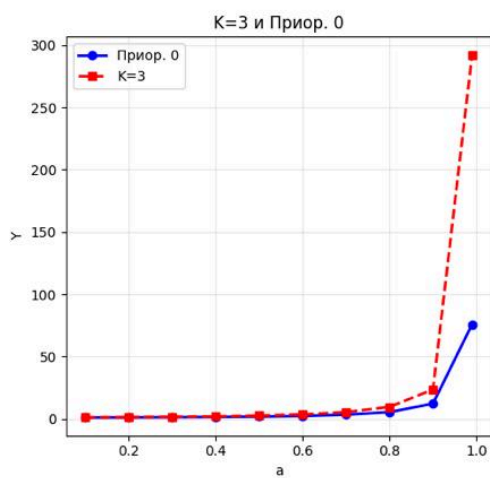
$$\rho_i = a_i = \frac{a}{\mu t}$$

Для приоритета 1:

$$W_1 = \frac{1 - \sum_{i=1}^M \rho_i (1 + (\sigma_i/t_i)^2)}{2(1 - \rho_1)}$$

$$T_K = W_K + t$$

N	a	Время доставки T					
		Имитационная модель			Аналитическая модель		
		Приор 0	Приор 1	Приор 2	K=3	K=2	K=1
1	0,1	1,06	1,055	1,05	1,11904762	1,11083744	0,10344828
2	0,2	1,146	1,125	1,105	1,28846154	1,24725275	0,21428571
3	0,3	1,272	1,212	1,164	1,53571429	1,41666667	0,33333333
4	0,4	1,46	1,316	1,228	1,90909091	1,62937063	0,46153846
5	0,5	1,745	1,448	1,299	2,5	1,9	0,6
6	0,6	2,227	1,622	1,378	3,5	2,25	0,75
7	0,7	3,3158	1,842	1,455	5,375	2,71195652	0,91304348
8	0,8	5,361	2,142	1,544	9,57142857	3,33766234	1,09090909
9	0,9	12,182	2,57	1,632	23,5	4,21428571	1,28571429
10	0,99	75,847	3,133	1,731	292,176471	5,34591747	1,47761194



## 4. Выводы по работе

- Для M/M/1 результаты имитации близки к аналитическим при невысокой нагрузке; при высоких нагрузках задержки низших приоритетов растут сильнее.
- Переход к M/D/1 показал меньшую дисперсию времени обслуживания и более стабильную работу системы.
- Имитационное моделирование наглядно демонстрирует влияние приоритетов и позволяет сравнивать результаты с аналитическими расчётами.

## Приложение

Код для аналитики таблицы 1

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

# Параметры системы

```
a_values = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99]
```

```
M = 3
```

```
t_avg = 1 # среднее время обслуживания
```

```
results_W1 = []
```

```
results_W2 = []
```

```
results_W3 = []
```

```
for a in a_values:
```

```
    # Интенсивность нагрузки для каждого приоритета (равномерное распределение)
```

```
    a_i = a / M # интенсивность поступления для каждого приоритета
```

```
    rho_i = a_i * t_avg #  $\rho_i = a_i * t_{avg}$ 
```

```
    # Вычисляем  $R_K = \sum_{i=1}^K \rho_i$ 
```

```
    R_0 = 0
```

```
    R_1 = rho_i # для K=1
```

```
    R_2 = 2 * rho_i # для K=2
```

```
    R_3 = 3 * rho_i # для K=3
```

```
    # Числитель для всех формул:  $\sum_{i=1}^M \rho_i * t_{avg}$ 
```

```
    # Но  $t_{avg} = 1$ , поэтому  $\sum_{i=1}^M \rho_i * 1 = \sum_{i=1}^M \rho_i = R_3$ 
```

```
    numerator = R_3
```

```
    # Для приоритета K=1 (высший приоритет)
```

```
    W_1 = numerator / (1 - R_1)
```

```
    results_W1.append(W_1)
```

```
    # Для приоритета K=2
```

```
    W_2 = numerator / ((1 - R_1) * (1 - R_2))
```

```
    results_W2.append(W_2)
```

```
    # Для приоритета K=3
```

```
    W_3 = numerator / ((1 - R_2) * (1 - R_3))
```

```
    results_W3.append(W_3)
```

```
for i in results_W3:
```



```
print(i)
```

Код для второй аналитика

```
# Версия с  $\sigma_i = 1$ 
sigma_i = 1 # среднеквадратическое отклонение

results_W1_MD1_sigma1 = []
results_W2_MD1_sigma1 = []
results_W3_MD1_sigma1 = []
a_values = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99]
for a in a_values:
    # Интенсивность нагрузки для каждого приоритета
    a_i = a / 3
    rho_i = a_i * 1

    # Вычисляем R_K
    R_1 = rho_i
    R_2 = 2 * rho_i
    R_3 = 3 * rho_i

    # Вычисляем сумму с учетом  $\sigma_i = 1$ 
    sum_term = 0
    for i in range(3):
        sum_term += rho_i * 1 * (1 + (sigma_i / 1)**2)

    # Для приоритета K=1
    W_1 = sum_term / (1 - R_1)
    results_W1_MD1_sigma1.append(W_1)

    # Для приоритетов K=2,3 (M/D/1 формула с коэффициентом 1/2)
    W_2 = (1/2) * sum_term / ((1 - R_1) * (1 - R_2))
    results_W2_MD1_sigma1.append(W_2)

    W_3 = (1/2) * sum_term / ((1 - R_2) * (1 - R_3))
    results_W3_MD1_sigma1.append(W_3)

for i in results_W3_MD1_sigma1:
    print(i)
```

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Данные из таблицы
data = [
    [0.1, 1.131, 1.116, 1.081, 2.131, 2.116, 2.081],
    [0.2, 1.289, 1.262, 1.203, 2.289, 2.262, 2.203],
    [0.3, 1.528, 1.407, 1.33, 2.528, 2.407, 2.33],
    [0.4, 1.964, 1.636, 1.476, 2.964, 2.636, 2.476],
    [0.5, 2.468, 1.881, 1.598, 3.468, 2.881, 2.598],
    [0.6, 3.503, 2.259, 1.752, 4.503, 3.259, 2.752],
    [0.7, 5.659, 2.722, 1.916, 6.659, 3.722, 2.916],
    [0.8, 9.779, 3.239, 2.061, 10.779, 4.239, 3.061],
    [0.9, 22.227, 4.207, 2.298, 23.227, 5.207, 3.298],
    [0.99, 461.969, 5.55, 2.498, 462.969, 6.55, 3.498]
]

# Преобразуем в numpy массив для удобства
data = np.array(data)

# Извлекаем данные
x = data[:, 0]

# Создаем фигуру с тремя субплотами
fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(18, 5))

# График 1: столбцы 2 и 5
ax1.plot(x, data[:, 1], 'b-o', label='Функция 1', linewidth=2, markersize=6)
ax1.plot(x, data[:, 4], 'r--s', label='Функция 2', linewidth=2, markersize=6)
ax1.set_xlabel('X')
ax1.set_ylabel('Y')
ax1.set_title('График 1: столбцы 2 и 5')
ax1.legend()
ax1.grid(True, alpha=0.3)

# График 2: столбцы 3 и 6
ax2.plot(x, data[:, 2], 'g-o', label='Функция 1', linewidth=2, markersize=6)
ax2.plot(x, data[:, 5], 'm--s', label='Функция 2', linewidth=2, markersize=6)
ax2.set_xlabel('X')
ax2.set_ylabel('Y')
ax2.set_title('График 2: столбцы 3 и 6')
ax2.legend()

```

```

ax2.grid(True, alpha=0.3)

# График 3: столбцы 4 и 7
ax3.plot(x, data[:, 3], 'c-o', label='Функция 1', linewidth=2, markersize=6)
ax3.plot(x, data[:, 6], 'y--s', label='Функция 2', linewidth=2, markersize=6)
ax3.set_xlabel('X')
ax3.set_ylabel('Y')
ax3.set_title('График 3: столбцы 4 и 7')
ax3.legend()
ax3.grid(True, alpha=0.3)

# Настраиваем внешний вид
plt.tight_layout()
plt.show()

# Дополнительно: все графики на одном рисунке для сравнения
plt.figure(figsize=(12, 8))

# График 1
plt.subplot(2, 2, 1)
plt.plot(x, data[:, 1], 'b-o', label='Функция 1', linewidth=2)
plt.plot(x, data[:, 4], 'r--s', label='Функция 2', linewidth=2)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.title('График 1: столбцы 2 и 5')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)

# График 2
plt.subplot(2, 2, 2)
plt.plot(x, data[:, 2], 'g-o', label='Функция 1', linewidth=2)
plt.plot(x, data[:, 5], 'm--s', label='Функция 2', linewidth=2)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.title('График 2: столбцы 3 и 6')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)

# График 3
plt.subplot(2, 2, 3)
plt.plot(x, data[:, 3], 'c-o', label='Функция 1', linewidth=2)
plt.plot(x, data[:, 6], 'y--s', label='Функция 2', linewidth=2)
plt.xlabel('X')

```

```
plt.ylabel('Y')  
plt.title('График 3: столбцы 4 и 7')  
plt.legend()  
plt.grid(True, alpha=0.3)
```

```
plt.tight_layout()  
plt.show() Код для графиков
```