

Федеральное агентство связи

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ ИМ. ПРОФ. М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧА» (СПбГУТ)

Факультет информационных технологий и программной инженерии Кафедра: Программная инженерия. Разработка программного обеспечения и приложений искусственного интеллекта в киберфизических системах

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

по дисциплине «Математическое и программное обеспечение киберфизических систем»

Тема: Модель Эрланга (M/M/V/0)

Выполнил: студент 2-го курса группы ИКПИ-42 Терещенко Максим Андреевич

Преподаватель: Гребенщикова Александра Андреевна

Санкт-Петербург 2025

Цель работы:

Получение навыков расчёта качества обслуживания по модели Эрланга.

1. Теоретические сведения

1.1. Общие положения

В системе с коммутацией каналов большой ёмкости, когда число источников нагрузки **N** велико, а параметр потока от одного источника **a** мал, поведение одного источника мало влияет на суммарный поток вызовов.

Тогда суммарный поток вызовов:

$$A = N \cdot a$$

является практически постоянной величиной и не зависит от состояния системы.

Такой поток называется **простейшим**, и для него выполняется:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{V-1} = \lambda > 0, \quad \mu_x = x\mu$$

1.2. Предположения модели Эрланга

Модель Эрланга справедлива при следующих условиях:

- вызовы поступают по **пуассоновскому потоку** интенсивности λ ;
- время обслуживания подчиняется **экспоненциальному распределению** с параметром $\mu > 0$;
- если все линии заняты, вызов **теряется**;
- любая свободная линия доступна для любого поступающего вызова;
- система работает в **стационарном режиме**.

1.3. Основные зависимости

Распределение вероятностей состояний:

$$P[x] = \frac{(A^x / x!)}{\sum_{i=0}^V (A^i / i!)}$$

где

$A = \frac{\lambda}{\mu}$ – поступающая нагрузка первого рода,
 $x = 0, 1, 2, \dots, V$.

Вероятность потерь (формула Эрланга, первая форма):

$$E_V(A) = \frac{A^V / V!}{\sum_{i=0}^V (A^i / i!)}$$

Потери по времени, вызовам и нагрузке совпадают:

$$\text{Потери} = E_V(A)$$

Рекуррентная формула Эрланга:

$$E_0(A) = 1$$
$$E_V(A) = \frac{A \cdot E_{V-1}(A)}{V + A \cdot E_{V-1}(A)}$$

2. Ход работы

2.1. Система М/М/V/0 с параметрами $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Пусть:

- нагрузка первого рода $A = x_1 + 1 = 3$ Эрланга,
- число обслуживающих приборов $V = x_2 + 1 = 4$.

1) Нагрузка первого рода

Нагрузка первого рода – это среднее число занятых линий при поступающем потоке вызовов интенсивности λ и среднем времени обслуживания $1/\mu$.

Физически это мера средней занятости системы вызовами.

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

2) Распределение вероятностей состояний

Для системы M/M/V/0 с параметрами:

- $x_1 = 2 \rightarrow$ нагрузка первого рода: $A = x_1 + 1 = 3$ Эрланга
- $x_2 = 3 \rightarrow$ число обслуживающих приборов: $V = x_2 + 1 = 4$

Вероятность того, что в системе будет занято x каналов, рассчитывается по формуле:

$$P[x] = \frac{A^x / x!}{\sum_{i=0}^V A^i / i!}$$

Вычислим сумму для нормировки:

$$\sum_{i=0}^4 \frac{3^i}{i!} = 1 + 3 + 4.5 + 4.5 + 3.375 = 16.375$$

Тогда вероятности состояний:

Состояние x	Формула $P[x] = \frac{A^x / x!}{\Sigma}$	Вероятность
0	1 / 16.375	0.061
1	3 / 16.375	0.183
2	4.5 / 16.375	0.275
3	4.5 / 16.375	0.275
4	3.375 / 16.375	0.206

3) Вероятность потерь (по рекуррентной формуле)

Рассчитаем:

$$E_0 = 1$$

$$E_1 = \frac{3}{1 + 3} = 0.75$$

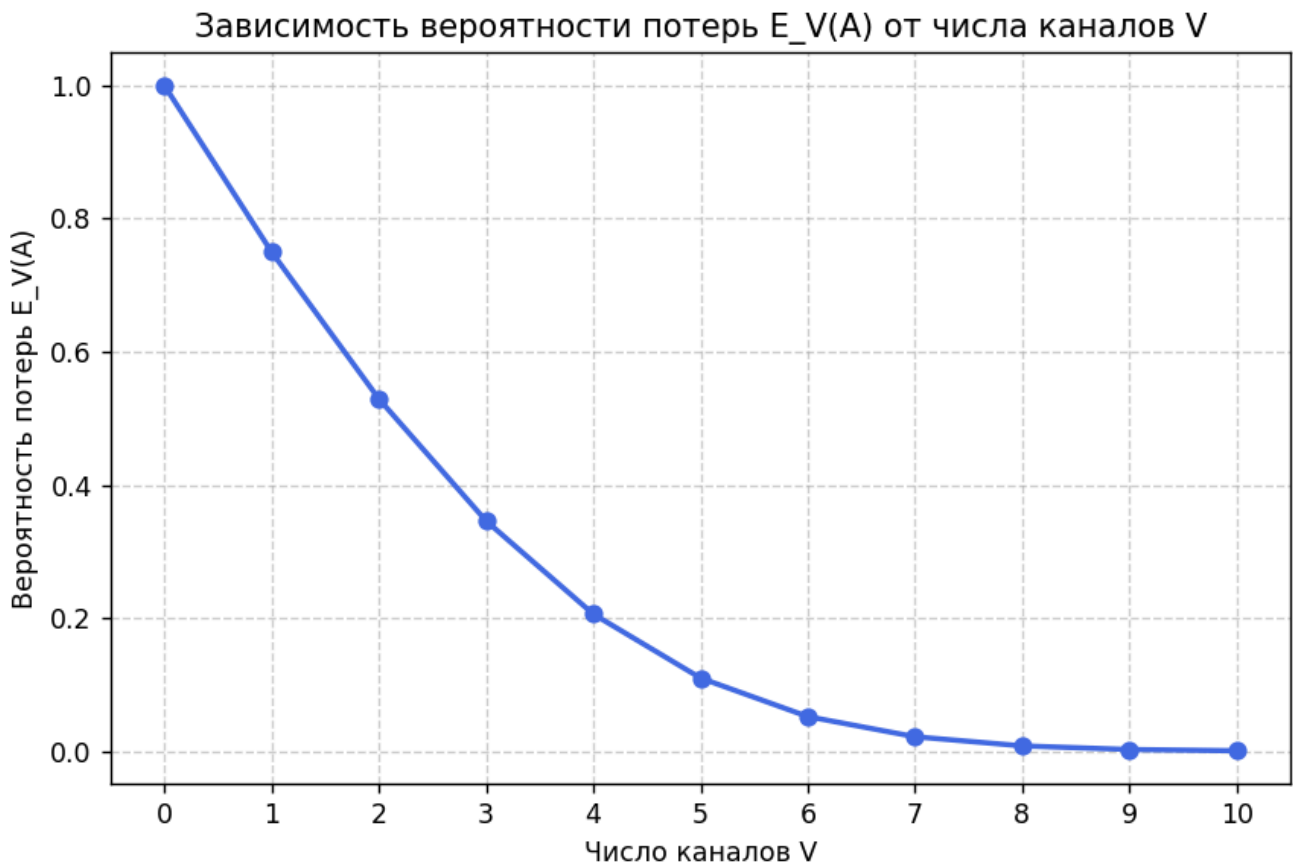
$$E_2 = \frac{3 \cdot 0.75}{2 + 3 \cdot 0.75} = 0.529$$

$$E_3 = \frac{3 \cdot 0.529}{3 + 3 \cdot 0.529} = 0.346$$

$$E_4 = \frac{3 \cdot 0.346}{4 + 3 \cdot 0.346} = 0.206$$

Результат:

Потери $E_4(A) = 0.206$, что соответствует вероятности отказа $\approx 20.6\%$.



2.2. Система M/M/360/0 при A = 1000 Эрланг

Для больших A и V точный прямой расчёт невозможен из-за переполнения чисел, поэтому используется рекуррентная формула.

$P[V]$ (вероятность, что все $V=360$ каналов заняты) = 0.64055978

Процент отказов = 64.06%

Доля обслуженных вызовов = 35.9440%

Обслуженная нагрузка (carried traffic) = 359.440222 Эрл.

Средняя загрузка одного канала = 0.998445 (~99.84%)

2.3. Описание систем различных типов

Система	Расшифровка	Характер потока	Характер обслуживания	Пример
M/M/50/0	Поток пуассоновский, время обслуживания экспоненциальное, 50 каналов, нет ожидания	Случайный поток вызовов	Случайная длительность обслуживания	Телефонная станция с 50 линиями
M/D/30/0	Пуассоновский поток, детерминированное обслуживание, 30 каналов	Поток случайный	Время обслуживания фиксированное	30 одинаковых автоматов с одинаковым временем работы
D/M/10/0	Детерминированный поток, случайное обслуживание, 10 каналов	Вызовы приходят строго через одинаковые интервалы	Случайное время обслуживания	Система контроля, где события происходят периодически, но обслуживаются случайно

3. Выводы

1. Модель Эрланга позволяет оценивать эффективность обслуживания систем с ограниченным числом каналов.
2. При увеличении нагрузки вероятность потерь растёт, но не линейно, а по насыщаемой зависимости.
3. Рекуррентная формула Эрланга удобна для вычислений при больших A и V , где прямой расчёт невозможен.
4. Для системы с $A=3$, $V=4$ потери составляют 20.6%, что соответствует умеренной загруженности.
5. Для больших систем ($A=1000$, $V=360$) вероятность потерь высока — $\approx 64.06\%$, что означает сильное блокирование при высокой нагрузке на канал.

```
### Приложение
### Код для графика:
```

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt

# Исходные данные
A = 3      # нагрузка (Эрланг)
V = 4      # число каналов

# Расчёт знаменателя (суммы  $\Sigma$ )
denominator = sum(A**i / math.factorial(i) for i in range(V + 1))

# Расчёт вероятностей состояний
probabilities = [(A**x / math.factorial(x)) / denominator for x in range(V + 1)]

# Вывод таблицы
print("| Состояние x | Формула ( $A^x / x!$ ) /  $\Sigma$  | Вероятность |")
print("|-----|-----|-----|")
for x, p in enumerate(probabilities):
    formula = f"{A**x / math.factorial(x):.3f} / {denominator:.3f}"
    print(f"| {x} | {formula} | {p:.3f} |")

# Построение графика
plt.bar(range(V + 1), probabilities, color='skyblue', edgecolor='black')
plt.title("Распределение вероятностей состояний P[x]")
plt.xlabel("Состояние x")
plt.ylabel("Вероятность P[x]")
plt.xticks(range(V + 1))
plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)
plt.show()

# # Пересчёт блокировки по рекуррентной формуле Эрланга (Erlang B recurrence):
A = 1000      # нагрузка (Эрланг)
V = 360      # число каналов

E = 1.0      #  $E_0 = 1$ 
for v in range(1, V + 1):
    E = (A * E) / (v + A * E)

print(f"E_{V}({A}) = {E:.8f}")
```

```

print(f"Процент отказов = {E * 100:.2f}%")
print(f"Доля обслуженных вызовов = {(1 - E) * 100:.2f}%")

# Дополнительно: обслуженная нагрузка и загрузка канала
carried_traffic = A * (1 - E)          # обслуженная нагрузка
utilization_per_channel = carried_traffic / V
print(f"Обслуженная нагрузка (carried traffic) = {carried_traffic:.3f} Эрл.")
print(f"Средняя загрузка одного канала = {utilization_per_channel:.4f} (≈{utilization_per_channel:.4f})")

```