



Nom : Anass El Moubaraki // Mohamed Maadili

Ecole : *Centrale Nantes*

Formation : Cycle ingénieur troisième année

Option : Datasim

Optimisation convexe non lisse pour l'estimation du coefficient de reproduction R lié à la Covid-19

Résumé : *Ce TP a pour objectif d'effectuer une estimation régularisée du coefficient de reproduction lié à la Covid-19 noté R en utilisant une pénalisation sur le Laplacien avec la norme l_1 et ce en utilisant le cadre mathématique de l'optimisation convexe non lisse.*

Travaux pratiques encadrés par :

Mr Medi Latif

Doctorant (LS2N - CNRS/École Centrale de Nantes/Nantes Université).

Mr Gwenael Samain

Doctorant (LS2N - CNRS/École Centrale de Nantes/Nantes Université).

Table des matières

1	Introduction	3
2	Préliminaires	4
2.1	Exercice 1	4
2.2	Exercice 2	4
2.3	Exercice 3	5
3	Présentation du modèle épidémiologique	7
4	Approche par maximum de vraisemblance	8
5	Approche régularisée avec pénalisation l_1 sur le Laplacien	12
5.1	Résultats numériques	13
6	Approche régularisée avec pénalisation l_2^2 sur le Laplacien	18
7	Conclusions	23
8	Annexes	24

1 Introduction

L'estimation "efficace" du coefficient de reproduction \mathbf{R} est une étape primordiale pour déterminer la dynamique de la pandémie. Dans ce contexte, nous nous intéresserons à l'estimation du coefficient de reproduction \mathbf{R} lié à la Covid-19 et défini comme étant le nombre moyen de cas secondaires causés par un individu standard atteint du virus pendant sa période de contagion. Pour se faire nous présenterons dans un premier temps les données épidémiologiques mises à notre disposition. Dans un second temps, nous présenterons un modèle statistique basé sur les données et à partir duquel nous estimerons \mathbf{R} .

Pour se faire, nous procéderons en première approche à l'estimation du coefficient de reproduction à partir de la méthode par maximum de vraisemblance puis nous utiliserons les outils de l'optimisation convexe non lisse pour résoudre un problème d'optimisation combinant un terme de fidélité aux données et régularisation avec la norme l_1 et enfin nous étudierons une approche régularisée avec une pénalisation l_2^2 (méthode de Tikhonov). Pour chaque algorithme utilisée nous vérifierons grossièrement la convergence numérique en nous appuyant sur l'évolution des itérés de la fonction objectif.

Enfin, nous étudierons la dynamique de la pandémie à partir des différents estimateurs obtenus.

2 Préliminaires

2.1 Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $g : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ deux fonctions propres et semi-continues-inférieurement tq $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset$

$$\text{Mq } \forall x \in \mathbb{R}^T \quad \partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x) \quad (1)$$

Réponse :

Soient $x \in c$ et $(u, v) \in \partial f(x) \times \partial g(x)$.

$$\begin{aligned} (u, v) \in \partial f(x) \times \partial g(x) &\Rightarrow \begin{cases} (\forall y \in \mathbb{R}^T) : f(y) - f(x) \geq \langle u, y - x \rangle \\ (\forall y \in \mathbb{R}^T) : g(y) - g(x) \geq \langle v, y - x \rangle \end{cases} \\ &\Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R}^T) : f(y) + g(y) - f(x) - g(x) \geq \langle u, y - x \rangle + \langle v, y - x \rangle \\ &\Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R}^T) : f(y) + g(y) - (f(x) + g(x)) \geq \langle u + v, y - x \rangle \\ &\Rightarrow (u + v) \in \partial(f+g)(x) \end{aligned}$$

Si f est convexe et continument différentiable alors :

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

Nous obtenons alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^T \quad \nabla f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x) \quad (2)$$

2.2 Exercice 2

Soit $y \in \mathbb{R}^T$ et $\gamma \in \mathbb{R}^+$

On considère :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 \end{cases}$$

Calculons $\text{prox}_{\gamma f}(z)$ pour $z \in \mathbb{R}^T$.

Réponse :

Soit $z \in \mathbb{R}^T$ et $\gamma \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
0 \in \partial(\gamma f + \frac{1}{2}\|z - \cdot\|_2^2)(\text{prox}_{\gamma f}(z)) &\Leftrightarrow 0 \in \partial(\gamma \frac{1}{2}\|y - \cdot\|_2^2 + \frac{1}{2}\|z - \cdot\|_2^2)(\text{prox}_{\gamma f}(z)) \\
&\Leftrightarrow 0 = \frac{\gamma}{2}\nabla(\|y - \cdot\|_2^2)(\text{prox}_{\gamma f}(z)) + \frac{1}{2}\nabla(\|z - \cdot\|_2^2)(\text{prox}_{\gamma f}(z)) \\
&\Leftrightarrow \gamma(\text{prox}_{\gamma f}(z) - y) + \text{prox}_{\gamma f}(z) - z = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 + \gamma)\text{prox}_{\gamma f}(z) = \gamma y + z \\
&\Leftrightarrow \text{prox}_{\gamma f}(z) = \frac{\gamma y + z}{1 + \gamma}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$(\forall z \in \mathbb{R}^T) : \text{prox}_{\gamma f}(z) = \frac{\gamma y + z}{1 + \gamma}$$

Nous traçons dans la figure 1 l'opérateur proximal associé à la norme l_2^2 en dimension 1.

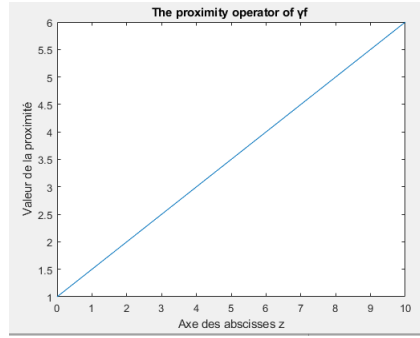


FIGURE 1 – Allure de l'opérateur proximal associé à la norme l_2^2

2.3 Exercice 3

$$(\forall y \in \mathbb{R}^T)(\forall \gamma \in \mathbb{R}^+) : \text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_1}(y) = (\max(0, |y_i| - \gamma) \text{sign}(y_i))_{1 \leq i \leq T}$$

En effet, on pourra remarquer dans un premier temps que $\|\cdot\|_1$ est séparable. Il suffit donc d'effectuer une minimisation par indice fixé et donc résoudre le problème suivant pour chaque composante :

$$\underset{z \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} \gamma|z| + \frac{1}{2}(y - z)^2 = \underset{z \in \mathbb{R}}{\text{argmin}} \begin{cases} 2(\gamma - y)z + y^2 + z^2 & \text{si } z \geq 0 \\ -2(\gamma + y)z + y^2 + z^2 & \text{si } z \leq 0 \end{cases}$$

Cela revient alors à chercher le minimiseur d'un polynôme unitaire d'ordre 2 sur un ouvert.

Nous traçons dans la figure 2 l'opérateur proximal associé à la norme l_1 en dimension 1.

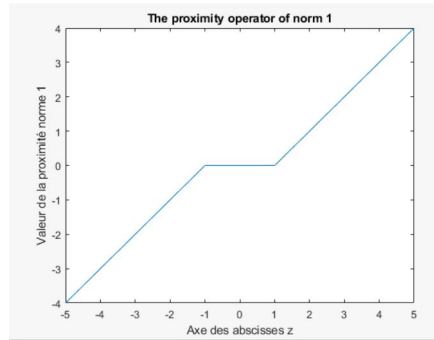


FIGURE 2 – Allure de l'opérateur proximal associé à la norme l_1

3 Présentation du modèle épidémiologique

Pour notre étude, nous avons comme données le nombre de nouvelles infections quotidiennes en France pendant une durée T égale à 70 jours. Nous les notons $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_T)$ où $Z_t \in \mathbb{N}$ désigne le nombre de nouvelles infections enregistrées au jour t . Afin de quantifier et de surveiller l'intensité d'une épidémie, le suivi des nouvelles infections n'est pas suffisant. En effet, s'intéresser au nombre d'infections c'est détecter une vague épidémique après sa survenue. De plus la figure 3 montre que \mathbf{Z} est aberrant à cause de l'absence de recensement de données pendant les week-ends. Pour cela, nous nous intéresserons à l'estimation du coefficient de reproduction à partir du modèle statistique suivant :

$$\forall t \geq 1 \ (Z_t | Z_1 \dots Z_{t-1}, R_t) \sim \text{Poisson}(R_t \times \Phi_t^Z) \quad (3)$$

$$\Phi_t^Z = \sum_{i=1}^{\min(t, \tau_\phi)} Z_{t-i} \phi_i \quad (4)$$

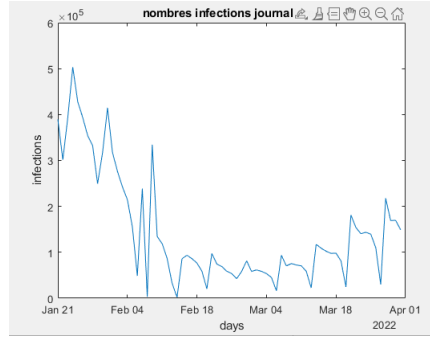


FIGURE 3 – Représentation du nombre d'infections journalières

4 Approche par maximum de vraisemblance

Pour estimer \mathbf{R} nous chercherons en première approche à minimiser la divergence de kullback-Leibler définie par :

$$D_{KL}(\mathbf{Z}|\Phi^{\mathbf{Z}} \odot \mathbf{R}) = \sum_{t=1}^T d_{KL}(Z_t|\Phi_t^Z \odot R_t) \quad (5)$$

avec :

$$d_{KL}(Z_t|\Phi_t^Z \odot R_t) = \begin{cases} Z_t \log(\frac{Z_t}{R_t \Phi_t^Z}) + R_t \Phi_t^Z - Z_t & \text{si } Z_t > 0 \text{ et } R_t > 0 \\ R_t \Phi_t^Z & \text{si } Z_t = 0 \text{ et } R_t \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Pour se faire nous commençons par remarquer que notre fonctionnelle est séparable. Il suffit alors d'étudier $p_t \rightarrow d_{KL}(Z_t|p_t)$.

Commençons alors par une visualisation de cette dernière pour quelques valeurs de Z_t fixé afin d'avoir une idée sur ses propriétés analytique-géométriques. Nous traçons dans les figures 4, 5 et 6 l'allure de la divergence de kullback-Leibler en dimension 1 pour différentes valeurs des données Z

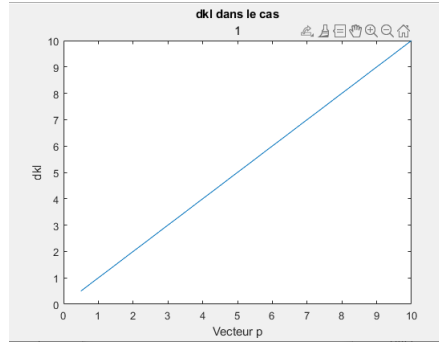


FIGURE 4 – Allure de d_{KL} pour $Z = 0$

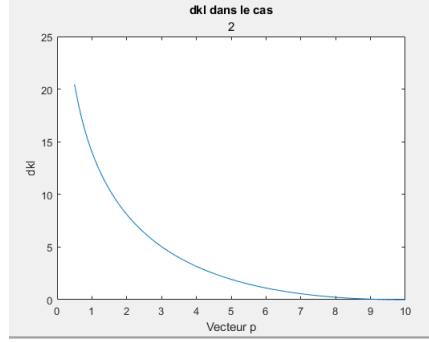


FIGURE 5 – Allure de d_{KL} pour $Z = 10$

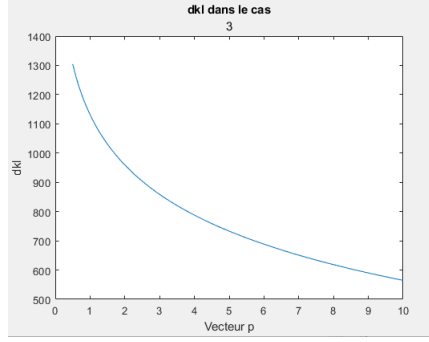


FIGURE 6 – Allure de d_{KL} pour $Z = 250$

Montrons que $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ est convexe et différentiable. Pour cela nous distinguons deux cas : ($Z_t > 0$ et $Z_t = 0$).

Premier cas ($Z_t > 0$) : Dans ce cas $\text{dom}(d_{KL}(Z_t|\cdot)) = \mathbb{R}^{+*}$ et

$$(\forall p_t \in \mathbb{R}^{+*}) : d_{KL}(Z_t|p_t) = Z_t \log\left(\frac{Z_t}{p_t}\right) + p_t - Z_t$$

Ainsi :

$$(\forall p_t \in (\mathbb{R}^{+*}) : d_{KL}(Z_t|p_t) = Z_t \log(Z_t) - Z_t + p_t - Z_t \log(p_t)$$

la fonction $-\log$ et la fonction identité sont convexe et différentiable sur $\text{dom}(d_{KL}(Z_t|\cdot))$. Par conséquent, $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ est convexe différentiable.

Deuxieme cas ($Z_t = 0$) : Dans ce cas $\text{dom}(d_{KL}(Z_t|\cdot)) = \mathbb{R}^+$ et

$$(\forall p_t \in \mathbb{R}^{+*}) : d_{KL}(Z_t|p_t) = p_t$$

La fonction identité est convexe et différentiable sur $\text{dom}(d_{KL}(Z_t|\cdot))$. Par conséquent, $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ est convexe différentiable.

Le gradient de la divergence de Kullback-Leibler est-il lipschitzien?

Premier cas ($Z_t > 0$) :

Dans ce cas la dérivée (gradient en dimension 1) de $p_t \rightarrow d_{KL}(Z_t|\cdot)$ s'écrit sous la forme de $p_t \rightarrow 1 + \frac{C}{p_t}$ où C est une constante qui dépend des données. Or la fonction $p_t \rightarrow \frac{1}{p_t}$ n'est pas lipschitzienne sur \mathbb{R}^{+*} car sa dérivée $p_t \rightarrow -\frac{1}{p_t^2}$ n'est pas bornée sur ce domaine. Typiquement elle tend vers ∞ quand p_t tend vers 0.

Deuxieme cas ($Z_t = 0$) :

Dans ce cas, $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ se réduit à l'identité et son gradient est lipschitzien sur $dom(d_{KL}(Z_t|\cdot)) = \mathbb{R}^+$

Conclusion

Nous supposons que nous disposons de données non triviales c'est à dire que $\mathbf{Z} \neq 0$ (Nos données ne sont pas toutes nulles ce qui est conforme à la réalité) alors $D_{KL}(\mathbf{Z}|\cdot)$ n'est pas lipschitzien.

Nous notons dans ce qui suit \mathbf{R}^{MLE} l'estimateur obtenu par maximum de vraisemblance.

Par séparabilité de D_{KL} , nous calculons les composantes de \mathbf{R}^{MLE} par minimisation terme à terme. Nous cherchons alors

$$\nabla d_{KL}(Z_t|\Phi^{\mathbf{Z}} \odot R_t^{MLE}) = 0 \text{ si } Z_t > 0$$

Sinon $R_t^{MLE} = 0$ (minimiseur de l'identité sur \mathbb{R}^+)

$$\begin{aligned} \nabla d_{KL}(Z_t|\Phi^{\mathbf{Z}} \odot R_t^{MLE}) = 0 & \Leftrightarrow d'_{KL}(Z_t|\Phi_t^{\mathbf{Z}} \odot R_t^{MLE}) = 0 \\ & \Leftrightarrow 1 - \frac{Z_t}{\Phi_t^{\mathbf{Z}} R_t^{MLE}} = 0 \\ & \Leftrightarrow R_t^{MLE} = \frac{Z_t}{\Phi_t^{\mathbf{Z}}} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\mathbf{R}^{MLE} = \frac{\mathbf{Z}}{\Phi^{\mathbf{Z}}}$$

Nous traçons l'allure de \mathbf{R}^{MLE} dans la figure 7

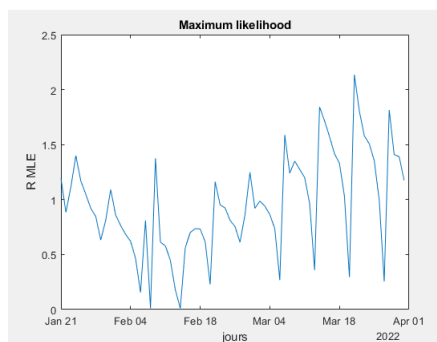


FIGURE 7 – Estimateur de maximum de vraisemblance

Commentaire

L'estimateur de maximum de vraisemblance ne permet pas de déterminer la dynamique de la pandémie. En effet, il adopte une allure similaire aux données (ce qui est conforme a la théorie $\mathbf{R}^{\text{MLE}} = \frac{\mathbf{Z}}{\Phi \mathbf{Z}}$). Pour remédier a ce problème nous devons opter pour une approche régularisante qui nous permettra d'obtenir des estimateurs lissés dans le temps et fidèle au modèle épidémiologique.

5 Approche régularisée avec pénalisation l_1 sur le Laplacien

Nous cherchons dans cette section à résoudre le problème suivant :

$$\min_{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^T} D_{KL}(\mathbf{Z}|\Phi^{\mathbf{Z}} \odot \mathbf{R}) + \lambda \|\mathbf{D}_2 \mathbf{R}\|_1 \quad (7)$$

Nous pouvons remarquer dans un premier temps que la méthode forward-backward ne peut pas être appliquée vu que la fonction D_{KL} n'est pas de gradient lipschitz. Nous utiliserons alors un algorithme primal-duale plus générale faisant intervenir moins d'hypothèses.

Pour cela nous calculons dans un premier temps $\text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot)}(x)$. Pour simplifier les calculs, nous pouvons remarquer que l'expression de $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ pour $Z_t = 0$ s'obtient par un prolongement continu de l'expression de $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ pour $Z_t > 0$. Nous calculerons alors l'opérateur proximal associé à $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ pour ce deuxième cas.

Nous allons résoudre :

$$0 \in \partial(\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot) + \frac{1}{2}\|x - \cdot\|_2^2)(\text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot)}(x))$$

Puisque $d_{KL}(Z_t|\cdot)$ est convexe continument différentiable alors nous résolvons

$$\gamma - \frac{\gamma Z_t}{\text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot)}(x)} + \text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot)}(x) - x = 0$$

où la variable que nous cherchons est $\text{prox}_{\gamma f}(x)$.

Pour cela nous sommes amenés à résoudre l'équation de second degré suivante :

$$(\gamma - x)\text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot)}(x) - \gamma Z_t + (\text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot)}(x))^2 = 0$$

En calculant le discriminant nous gardons la solution positive qui appartient au domaine de $d_{KL}(Z_t|\cdot)$.

Nous obtenons alors par séparabilité de D_{KL} :

$$\text{prox}_{\gamma D_{KL}(\mathbf{Z}|\cdot)}(x) = \left(\frac{x_t - \gamma + \sqrt{|x_t - \gamma|^2 + 4\gamma Z_t}}{2} \right)_{1 \leq t \leq T}$$

Nous pouvons déduire pour $\tau > 0$ $\text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\tau)}(x)$ à partir de $\text{prox}_{\gamma d_{KL}(Z_t|\cdot)}(x)$ en utilisant la propriété d'échelle de l'opérateur proximal. Il s'ensuit que :

$$\text{prox}_{\gamma D_{KL}(\mathbf{Z}|\Phi^{\mathbf{Z}} \odot \cdot)}(x) = \left(\frac{x_t - \gamma \Phi_t + \sqrt{|x_t - \gamma \Phi_t|^2 + 4\gamma Z_t}}{2} \right)_{1 \leq t \leq T}$$

De plus nous avons aussi déterminé l'expression de l'opérateur proximal associée à $\lambda \|\cdot\|_1$. Ce dernier vérifie :

$$(\forall y \in \mathbb{R}^T)(\forall (\gamma, \lambda) \in (\mathbb{R}^+)^2) \text{prox}_{\gamma\lambda\|\cdot\|_1}(y) = (\max(0, |y_i| - \gamma\lambda) \text{sign}(y_i))_{1 \leq i \leq T}$$

Nous construisons maintenant la matrice du Laplacien \mathbf{D}_2 .

$\mathbf{D}_2 \in \mathcal{M}_{T-2, T}(\mathbb{R})$ et vérifie

$$(\mathbf{D}_2)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \text{ et } j = i + 2 \\ -2 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.1 Résultats numériques

En pratique, nous utiliserons des données normalisées pour accélérer la convergence. Pour cela nous montrons tout d'abord que :

$$D_{KL}(\mathbf{Z}^{\text{norm}} | \Phi^{\mathbf{Z}^{\text{norm}}} \odot \cdot) = \alpha D_{KL}(\mathbf{Z} | \Phi^{\mathbf{Z}} \odot \cdot)$$

où $\mathbf{Z}^{\text{norm}} = \frac{\mathbf{Z}}{\alpha}$ Soit $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^T$:

$$\begin{aligned} d_{KL}(Z_t^{\text{norm}} | \Phi^{\mathbf{Z}_t^{\text{norm}}} \odot \cdot \mathbf{R}) &= Z_t^{\text{norm}} \log\left(\frac{Z_t^{\text{norm}}}{R_t \Phi^{\mathbf{Z}_t^{\text{norm}}}}\right) + R_t \Phi^{\mathbf{Z}_t^{\text{norm}}} - Z_t^{\text{norm}} \\ &= \alpha Z_t \log\left(\frac{\alpha Z_t}{\alpha R_t \Phi^{\mathbf{Z}_t}}\right) + \alpha R_t \Phi^{\mathbf{Z}_t} - \alpha Z_t \\ &= \alpha \left(Z_t \log\left(\frac{Z_t}{R_t \Phi^{\mathbf{Z}_t}}\right) + R_t \Phi^{\mathbf{Z}_t} - Z_t \right) \\ &= \alpha d_{KL}(Z_t | \Phi^{\mathbf{Z}_t} \odot \cdot \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Cette égalité nous permet de déduire que nous obtenons les mêmes estimateurs en normalisant avec un même coefficient les données et le coefficient de régularisation.

Choix des paramètres :

Nous choisissons le nombre d'itérations maximal $k_{\max} = 10^6$ et $\sigma = \tau = \frac{0.99}{\|\mathbf{D}_2\|_2}$ et nous utilisons la forme normalisée des données i.e $\frac{\mathbf{Z}}{\text{std}(\mathbf{Z})}$ et $\frac{\Phi^{\mathbf{Z}}}{\text{std}(\mathbf{Z})}$.

Vérification de la convergence

Pour cela, nous traçons l'allure des itérés de la fonction objectif pour différents niveaux de régularisation $\lambda \in \{0.5, 3.5, 15, 50, 150, 250\}$

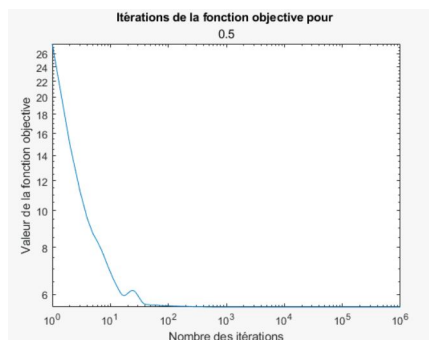


FIGURE 8 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 0.5$

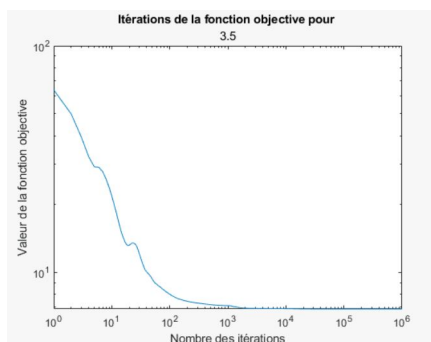


FIGURE 9 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 3.5$

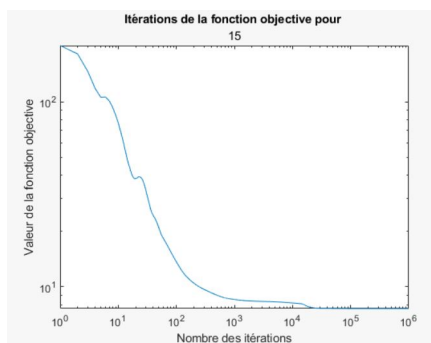


FIGURE 10 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 15$

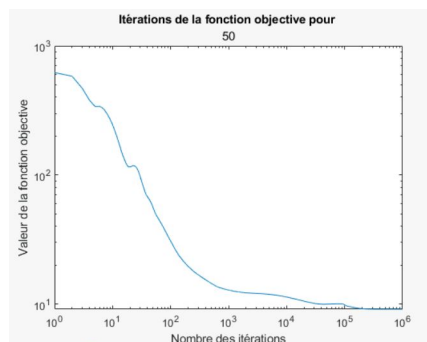


FIGURE 11 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 50$

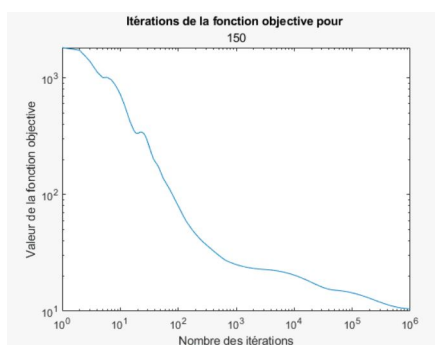


FIGURE 12 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 150$

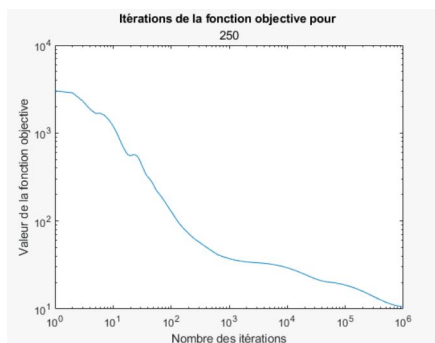


FIGURE 13 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 250$

Commentaire :

L'analyse de l'évolution des itérés de la fonction objectif pour la gamme de niveaux de régularisation explorée met en évidence une décroissance suivie d'un plateau de saturation qui reflète la convergence numérique.

Estimées du coefficient de reproduction

Nous traçons les estimées de \mathbf{R} pour la gamme de niveaux de régularisation choisie.

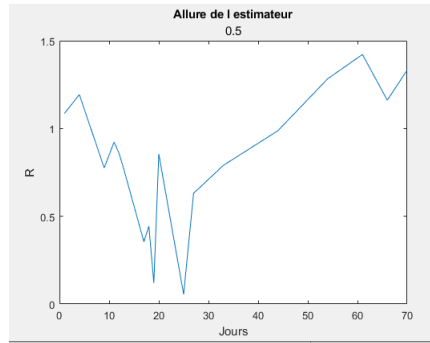


FIGURE 14 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 0.5$

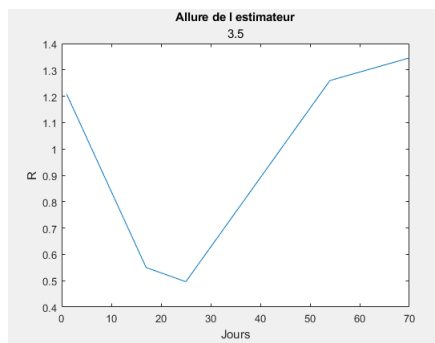


FIGURE 15 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 3.5$

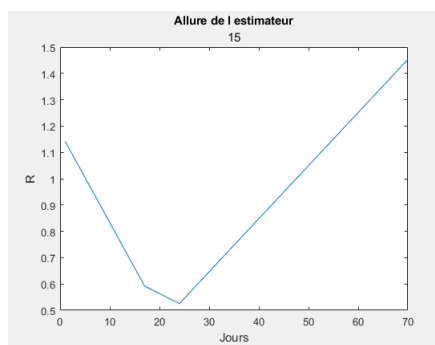


FIGURE 16 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 15$

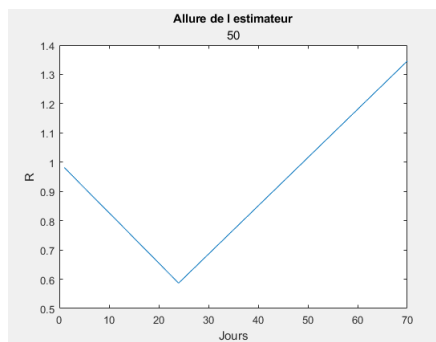


FIGURE 17 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 50$

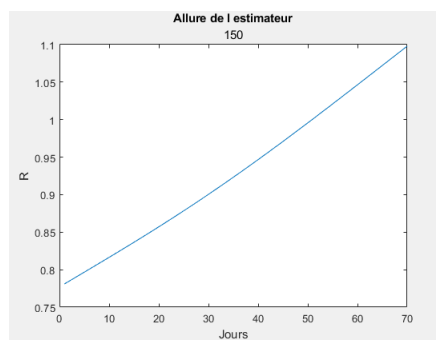


FIGURE 18 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 150$

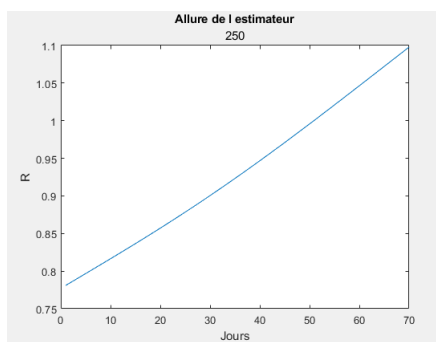


FIGURE 19 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 250$

6 Approche régularisée avec pénalisation l_2^2 sur le Laplacien

Choix des paramètres :

Nous choisissons le nombre d'itérations maximal $k_{max} = 10^5$ et $\sigma = \tau = \frac{0.99}{\|\mathbf{D}_2\|_2}$ et nous utilisons la forme normalisée des données i.e $\frac{\mathbf{Z}}{std(\mathbf{Z})}$ et $\frac{\Phi^{\mathbf{Z}}}{std(\mathbf{Z})}$.

Vérification de la convergence

Pour cela, nous traçons l'allure des itérés de la fonction objectif pour différents niveaux de régularisation $\lambda \in \{0.5, 3.5, 15, 50, 150, 250\}$

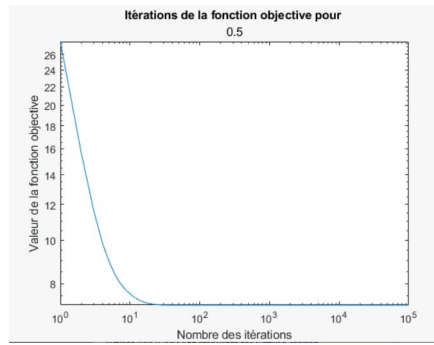


FIGURE 20 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 0.5$

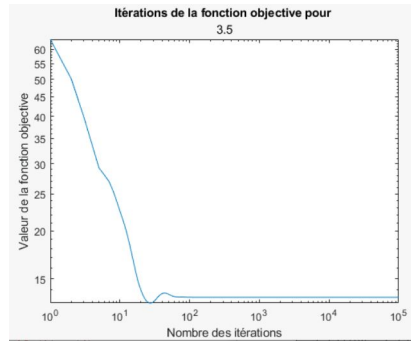


FIGURE 21 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 3.5$

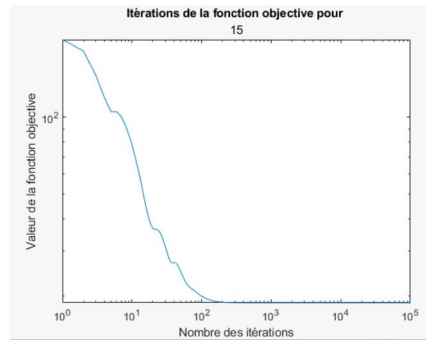


FIGURE 22 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 15$

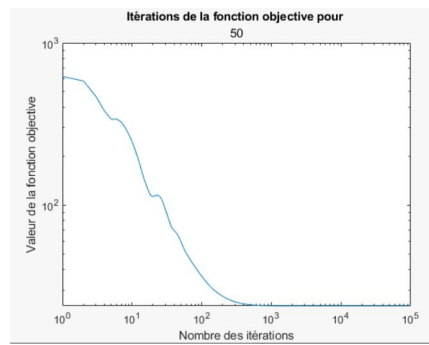


FIGURE 23 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 50$

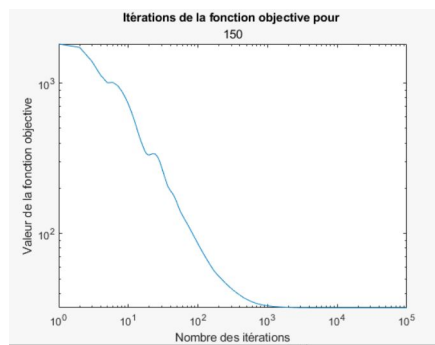


FIGURE 24 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 150$

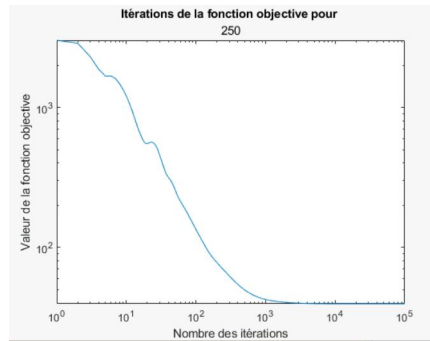


FIGURE 25 – Allure des itérés de la fonction objectif pour $\lambda = 250$

Commentaire :

L'analyse de l'évolution des itérés de la fonction objectif pour la gamme de niveaux de régularisation explorée met en évidence une décroissance suivie d'un plateau de saturation qui reflète la convergence numérique.

Estimées du coefficient de reproduction

Nous traçons les estimées de \mathbf{R} pour la gamme de niveaux de régularisation choisie.

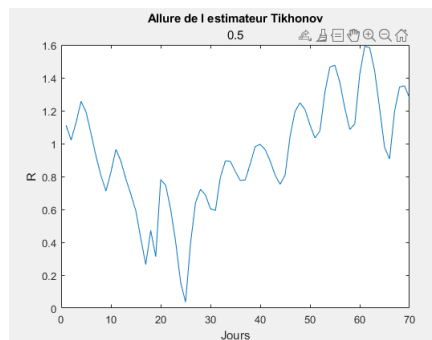


FIGURE 26 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 0.5$

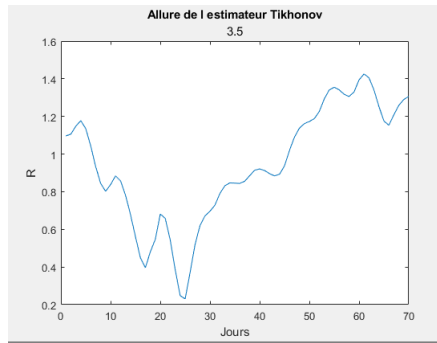


FIGURE 27 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 3.5$

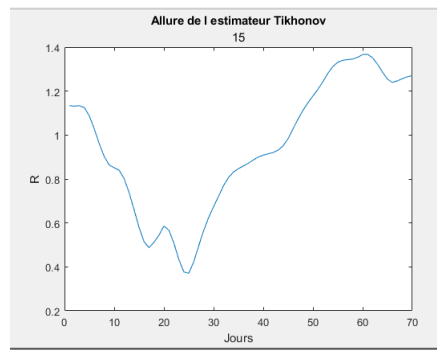


FIGURE 28 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 15$

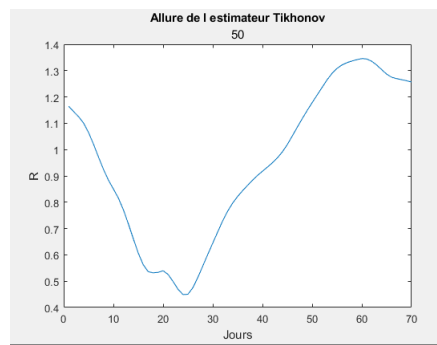


FIGURE 29 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 50$

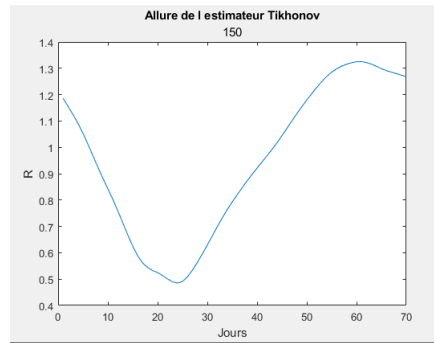


FIGURE 30 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 150$

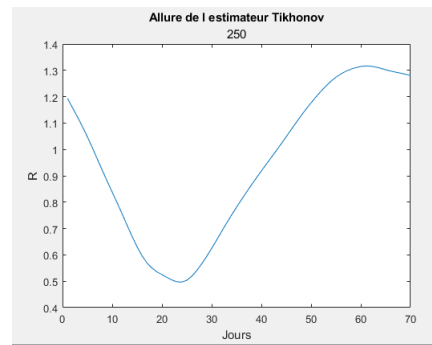


FIGURE 31 – Allure de $\hat{\mathbf{R}}$ pour $\lambda = 250$

7 Conclusions

En guise de conclusion, on peut remarquer que les deux algorithmes (Chambolle-Pock et Tikhonov) convergent. L'analyse de l'allure des estimées du coefficient de reproduction pour des niveaux de régularisation élevés et en utilisant une pénalisation l_2^2 montre que pendant notre période d'observation la pandémie s'atténue ($\mathbf{R} < 1$) pendant les 20 premiers jours (décroissance de \mathbf{R} puis connaît une expansion à partir du 45^{ème} jour \mathbf{R}). Nous obtenons des résultats similaires en appliquant une pénalisation l_1 quoique le lissage est différent (pour une pénalisation l_1 les estimées sont linéaires par morceaux et nous détectons des ruptures de pentes brusques alors que pour une pénalisation l_2^2 les estimées sont paraboliques par morceaux).

8 Annexes

Lien vers le code Matlab :

<https://github.com/Anasscobra/CSOPT-BARBARA.git>