# Exercício 02: Sistemas de equações

Bárbara Machado* nº 58126, Ismael Turé* nº 58144

O objetivo do relatório foi estudar métodos de resolução de sistemas de equações lineares e não lineares, com o intuito de compreender os diferentes algoritmos usados e as suas vantagens e desvantagens.

## I. Circuito Elétrico

Neste exercício é proposto um sistema de equações para encontrar correntes num circuito elétrico:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 0 + R_2 I_2 - R_1 I_3 = -V_2 \\ -R_3 I_1 + 0 - R_3 I_1 = -V_1 - V_2 \end{cases} \tag{1}$$

Onde $V_1 = 5V$, $V_2 = 2V$ e $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$.

Aplicou-se o método da substituição inversa para $R_3 = 0$ e $R_3 = 2$, obtendo-se em ambos $(I_1, I_2, I_3) = (9.5, 2.5, 7.0)$. Abaixo encontram-se as duas matrizes que obtemos para cada um dos sistemas:

$$R_3 = 0 : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right] \quad R_3 = 2 : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

Este método ignora coeficientes abaixo da diagonal principal, portanto, para $R_3 = 0$ (matriz triangular superior), o método aplica-se corretamente. Quando $R_3 = 2$, o método ignora este coeficiente, logo o resultado será igual ao anterior.

De seguida, foi utilizado o Método de Eliminação de Gauss, sem escolha de pivot, para os mesmos valores de $R_3$. Neste caso, a matriz é simplificada até ficar na forma triangular superior e a partir daí implementa-se a substituição inversa. Para $R_3 = 0$ obtém-se os mesmos resultados da alínea anterior, como seria esperado, e para $R_3 = 2$ temos $(I_1, I_2, I_3) = (2.375, 0.125, 2.25)$. Uma vez que a função transformou a matriz numa triangular superior e retornou os valores do método da substituição inversa, estes valores estão correctos. Fazendo uso do método para $R_3 = 2$ mas com $R_2 = 0$, ficamos com o sistema na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right]$$

Como o elemento $a_{21}$ é nulo, o elemento $a_{22}$ mantém-se nulo e ao usá-lo como pivot para a eliminação da segunda coluna, ocorre um erro de divisão por 0. Perante este problema, implementou-se o método de eliminação de Gauss com escolha de pivot, com metodologia semelhante com a diferença que em cada iteração analisa a coluna considerada e utiliza o coeficiente de maior valor absoluto. Obteu-se assim $(I_1, I_2, I_3) = (2.5,\ 0.5,\ 2.0)$.

As soluções obtidas foram verificadas com uso da função LinearSolve[] (Mathematica). Verificamos que este obtém os valores exatos (não comete nenhum dos erros da Substituição Inversa ou Eliminação de Gauss sem pivot). Traçou-se o gráfico dos valores $I_1, I_2, I_3$ calculados pelo método de Gauss com escolha parcial de pivot em função de $V_2$, para $R_2 = 2$ e $R_3 = 2$ e foram retiradas as funções correspondentes do Mathematica, também representadas no gráfico seguinte.

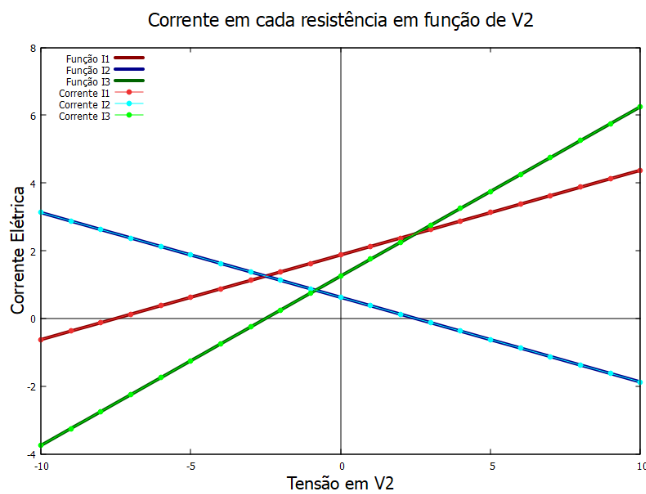


Figura 1. Valores das correntes em função de $V_2$

Verifica-se que as retas coincidem corroborando a autenticidade dos valores, pelo que se conclui que o Mathematica utilizará um método baseado na Eliminação de Gauss com pivot.

Em suma, podemos afirmar que o método de Gauss com pivot é o método mais completo pois está preparado para lidar com qualquer tipo de sistema linear. Os outros dois podem ser mais rápidos pois têm menos cálculos por iteração mas são muito dependentes das condições iniciais.

## II. Sistemas de Blocos e Molas

Neste exercício, pretendemos encontrar as posições de equilíbrio de um sistema de blocos e molas.

$$\begin{cases} 3\left(x_2 - x_1\right) - 2x_1 = -80 \\ 3\left(x_3 - x_2\right) - 3\left(x_2 - x_1\right) = 0 \\ 3\left(x_4 - x_3\right) - 3\left(x_3 - x_2\right) = 0 \\ 3\left(x_5 - x_4\right) - 3\left(x_4 - x_3\right) = 60 \\ -2x_5 - 3\left(x_5 - x_4\right) = 0 \end{cases}$$

Foi utilizado o método de Gauss-Seidel sem relaxação para resolver o sistema com uma precisão de $10^{-4}$. É importante referir que este método é iterativo e, consequentemente, a matriz associada ao sistema deve ser diagonalmente dominante (como é o caso). Posteriormente, recorremos ao uso da função Solve[] do Mathematica, e obtivemos os seguintes resultados:

| $x$ | C++ | Mathematica |
|---|---|---|
| $x_1$ | 20.7157 | $\frac{145}{7} = 20.7143$ |
| $x_2$ | 7.8590 | $\frac{55}{7} = 7.8571$ |
| $x_3$ | $-4.9981$ | $-5.0$ |
| $x_4$ | $-17.8556$ | $\frac{-125}{7} = -17.8571$ |
| $x_5$ | $-10.7134$ | $\frac{-75}{7} = -10.7143$ |

Os valores obtidos para $x_3$ no Mathematica são exatos, logo o método não é iterativo, o que nos conduz a pensar que pode ter sido usada a Eliminação de Gauss com pivot ou a Decomposição LU. Uma possível complicação associada a este método é a divergência. Assim, adicionamos ao sistema uma constante de relaxação para alterar a velocidade do processo de convergência.

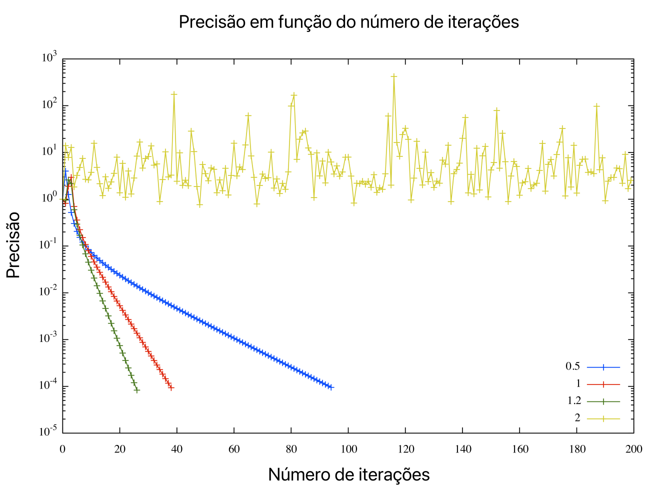


Figura 2. Valores das correntes em função de $V_2$

Analisando o gráfico, podemos constatar que o método converge para todos os valores de $\lambda$ usados à exceção de $\lambda = 2$, uma vez que, sendo excessivo, resulta numa oscilação entre valores muito superiores e inferiores aos pretendidos (o passo em cada iteração é demasiado grande), não conseguindo convergir. Verificamos também que $\lambda = 1.2$ é o valor mais eficiente, uma vez que converge em menos iterações e $\lambda = 0.5$ o menos eficiente, pois necessita de um número superior de iterações.

Resumidamente, podemos dizer que este método é útil quando conjugado com um fator $\lambda$ adequado. Podemos ter menos cálculos e obter um resultado razoavelmente aproximado, porém este método também depende do tipo de matriz inicial, o que pode ser uma desvantagem.

## III. Sistemas de Equações Não Lineares

Era pedido que se determinasse as soluções de um dado sistema de equações não lineares graficamente com o método de Newton:

$$\begin{cases} x^2 = 5 - y^2 \\ y + 1 = x^2 \end{cases}$$

Graficamente (com recurso ao Mathematica) obtiveram-se como soluções (-1.60049, 1.56157) e (1.60049, 1.56157):

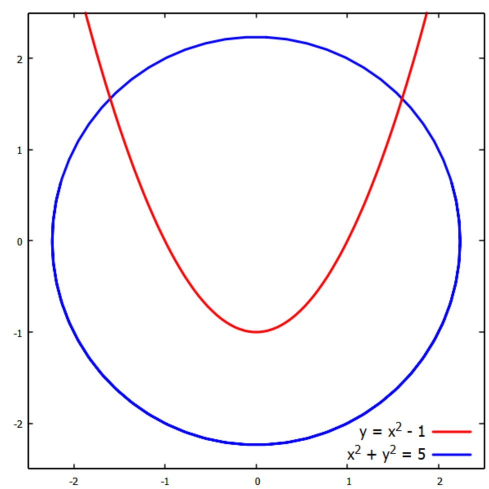


Figura 3. Representação gráfica do sistema não linear

Como se trata de um sistema multivariável, podemos escrever a matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}$$

Implementámos o método de Newton, fazendo uso do método de eliminação de Gauss com escolha de pivot. Para valores iniciais de $x$ e $y$ $(1, 1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -2)$ os valores obtidos foram, respetivamente, $(1.6005, 1.5616)$, $(-1.6055, 1.5616)$ e $(3.4421, -2.5616)$. Nos dois primeiros vetores, o método retorna a interseção mais próxima, já para o último, os valores estão excessivamente afastados da interseção mais próxima e o método não consegue convergir.

Para sistemas de equações não lineares, conclui-se que o método de Newton é bastante eficaz, sendo que apenas é preciso fornecer valores próximos da solução e a matriz jacobiana do sistema, para funcionar corretamente.