1 Постановка

Рассматривается задача

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u(r)}{\partial r}\right) = f(r), \quad r \in \Omega = \mathbb{R}_{\geq 0}, \tag{1.1}$$

$$\lim_{r\to 0} r^2 \frac{\partial u(r)}{\partial r} = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. \tag{1.2}$$

Обозначим $\mathcal{T}_h$ разбиение Ω (одним из элементов разбиения является множество $K_\infty = [a, \infty)$, $a \in \Omega$), так что

$$\Omega = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_h} K \tag{1.3}$$

С помощью $\mathcal{F}_h$ обозначим все поверхности элементов $K \in \mathcal{T}_h$. Далее, определим множество граничных поверхностей

$$\mathcal{F}_h^B = \{\Gamma \in \mathcal{F}_h; \Gamma \in \partial\Omega\}, \tag{1.4}$$

и внутренних

$$\mathcal{F}_h^I = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^B. \tag{1.5}$$

Для подхода к численному решению задачи (1.1-1.2), для начала рассмотрим билинейную форму

$$A_h(u, v) = (f, v), \tag{1.6}$$

$$-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r}\,dx + \sum_{\Gamma\in\mathcal{F}_h^I}\int_\Gamma r^2\left(\mathbf{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial r}\right\rangle[v] - \mathbf{n}\left\langle\frac{\partial v}{\partial r}\right\rangle[u]\right)dS = \int_\Omega r^2 f v\,dx, \tag{1.7}$$

действующую в пространстве

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega); v|_K \in H^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{1.8}$$

с нормой

$$\|v\|_{H^k(\Omega,\mathcal{T}_h)} = \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|v\|^2_{H^k(K)}\right)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Приближенное решение будем искать в конечном пространстве

$$S_{hp} = \{v \in L^2(\Omega); v|_K \in P_p(K)\,\forall K \in \mathcal{T}_h\}, \tag{1.10}$$

которое является подпространством $H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)$. $P_p(K)$ в (1.10) обозначает пространство полиномов степени $\leq p$ на K.

В качестве базисных функций на каждой из областей решения используются полиномы Лагранжа, построенные на точках ЧГЛ (Чебышева-Гаусса-Лобатто)

$$x_n = -\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right), \quad n = 0, 1, ..., N, \tag{1.11}$$

отображенных с отрезка $[-1, 1]$ на $[a, \infty)$ или $[a, b]$ одной из двух функций: $m_a(x)$ либо $m_a^b(x)$, соответственно

$$m_a(x) = \frac{1+x}{1-x} + a, \quad m_a^b(x) = \frac{1}{2}(b-a)x + \frac{1}{2}(b+a). \tag{1.12}$$

Таким образом вычисление значений базисных функций состоит из двух шагов:

- С помощью обратных функций к $m_a(x)$, $m_a^b(x)$ точки с произвольного множества переносятся на $K_r = [-1, 1]$.

- Производится барицентрическая интерполяция с полученными точками на K_r.

При интегрировании используются формулы Гаусса-трапеций, которые позволяют избежать сложностей, связанных с вычислением подынтегральной функции в крайних точках.

2 Анализ численного метода

$$|A_h(u,v)| \le \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K r^2 |\frac{du}{dr}\frac{dv}{dr}|\,dr + \sum_{x\in\mathcal{F}_h^I} r^2 |\langle\frac{du}{dr}\rangle[v]|\big|_{r=x} + \sum_{x\in\mathcal{F}_h^I} r^2 |\langle\frac{dv}{dr}\rangle[u]|\big|_{r=x}, \tag{2.1}$$

из неравенства Коши для суммы и для интегралов следует

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K r^2 |\frac{du}{dr}\frac{dv}{dr}|\,dr \le |u|_{H^1_{r^2}(\Omega,\mathcal{T}_h)} |v|_{H^1_{r^2}(\Omega,\mathcal{T}_h)}. \tag{2.2}$$

Для двух других слагаемых снова используем формулу Коши для произведения функций и получаем

$$|A_h(u,v)| \le |u|_{H^1_{r^2}(\Omega,\mathcal{T}_h)} |v|_{H^1_{r^2}(\Omega,\mathcal{T}_h)} + \sum_{F_h^I} r^2 \langle\frac{du}{dr}\rangle^2 \sum_{F_h^I} r^2 [v]^2 + \sum_{F_h^I} r^2 \langle\frac{dv}{dr}\rangle^2 \sum_{F_h^I} r^2 [u]^2. \tag{2.3}$$

Используя неизвестное числовое неравенство приходим к произведению норм

$$|A_h(u,v)| \le \left(|u|^2_{H^1} + \sum_{F_h^I} r^2 \left(\langle\frac{du}{dr}\rangle^2 + [u]^2 \right) \right)^{1/2} \left(|v|^2_{H^1} + \sum_{F_h^I} r^2 \left(\langle\frac{dv}{dr}\rangle^2 + [v]^2 \right) \right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

где $H_1 = H^1_{r^2}(\Omega, \mathcal{T}_h)$. Таким образом получили необходимую норму

$$\|u\|_{H_h^1} = \left(|u|^2_{H^1_{r^2}(\Omega,\mathcal{T}_h)} + \sum_{F_h^I} r^2 \left(\langle\frac{du}{dr}\rangle^2 + [u]^2 \right) \right)^{1/2}, \tag{2.5}$$

и соответствующее неравенство

$$A_h(u,v)| \le \|u\|_{H_h^1} \|v\|_{H_h^1}. \tag{2.6}$$

В итоге всех манипуляций получаем

$$e_h = u_h - u = \xi + \eta, \quad \xi = u_h - \Pi_h u \ \in V_h, \quad \eta = \Pi_h u - u \in W_h. \tag{2.7}$$

$$A(e_h, v_h) = 0, \quad v_h \in V_h, \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует

$$A_h(e_h, \xi) = A_h(\xi, \xi) + A_h(\eta, \xi) = 0. \tag{2.9}$$

$$A_h(v,v) = |v|^2_{H^1(\Omega,\mathcal{T}_h)} \tag{2.10}$$

$$\|\xi\|^2 \le A_h(\xi,\xi) = -A_h(\eta,\xi) \le \|\eta\|\|\xi\| \tag{2.11}$$

откуда следует

$$\|\xi\| \le \|\eta\| \tag{2.12}$$

и в итоге

$$\|e_h\| \le \|\xi\| + \|\eta\| \le 2\|\eta\| \tag{2.13}$$

2.1 По поводу погрешности интерполяции

Нужно получить какую-либо оценку для

$$\|v - \Pi_h v\|_{W_h} \le ?? \tag{2.14}$$

3 Аналитическое решение

Правая часть $f = \exp(-r)$.

Общее решение

$$u_g(r) = \frac{e^{-r}(2+r) - C_1 + rC_2}{r} \tag{3.1}$$

Пределы

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = C_2, \tag{3.2}$$

$$\lim_{r\to 0} r^2 u'(r) = C_1 - 2. \tag{3.3}$$

Частное решение тогда имеет вид

$$u(r) = e^{-r} + \frac{2e^{-r}}{r} - \frac{2}{r} \tag{3.4}$$