Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математической статистики и случайных процессов

Курсовая работа
студента 306 группы
Панфилова Игоря Александровича

Процесс восстановления в марковской случайной среде

Научный руководитель:
профессор д.ф.-м.н.
Афанасьев Валерий Иванович

Москва
2025

1 Введение

Целью настоящей работы является обобщение результатов классической теории восстановления на случай процесса восстановления в случайной среде. Для этого процесса устанавливается закон больших чисел.

Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задана случайная среда – последовательность случайных величин $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, причем $\boldsymbol{\xi}$ является однородной марковской цепью с множеством состояний $\{1, 2\}$. Пусть также на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задана последовательность положительных случайных величин $\{\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \ldots\}$. Пусть при фиксации случайной среды $\boldsymbol{\xi}$ последовательность $\{\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \ldots\}$ обладает следущими свойствами:

1) элементы последовательности $\{\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \ldots\}$ независимы в совокупности,
2) если $\xi_i = 1, i \in \mathbf{N}$, то $\mathcal{Z}_i$ имеет функцию распределения $F(x), x \in \mathbf{R}$,
3) если $\xi_i = 2, i \in \mathbf{N}$, то $\mathcal{Z}_i$ имеет функцию распределения $G(x), x \in \mathbf{R}$.

Положим $S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Z}_i$ при $n \in \mathbf{N}$ и $\nu(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$ при $t > 0$. Процесс $\{\nu(t), t > 0\}$ будем называть процессом восстановления в случайной среде.

Удобно пользоваться альтернативной схемой. Пусть на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ заданы две последовательности положительных случайных величин $\{X_1, X_2, \ldots\}$ и $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$, такие, что при фиксированной среде

1) элементы последовательности $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots\}$ независимы в совокупности,
2) элементы последовательности $\{X_1, X_2, \ldots\}$ имеют функцию распределения $F(x), x \in \mathbf{R}$,
3) элементы последовательности $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ имеют функцию распределения $G(x), x \in \mathbf{R}$.

На первом шаге из пары X_1, Y_1 выбирается первая случайная величина, если $\xi_1 = 1$, или вторая случайная величина, если $\xi_1 = 2$. Обозначим выбранную случайную величину Z_1. На втором шаге выбор делается их X_2, Y_2 с помощью величины ξ_2 и т.д. Другими словами, при $i \in \mathbf{N}$

$$Z_i = X_i I_{\{\xi_i = 1\}} + Y_i I_{\{\xi_i = 2\}}. \tag{1}$$

2 Конечномерные распределения

Введем вероятностную меру $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ для работы с событиями при условии фиксированной среды $\boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(\ldots) = \mathbf{P}(\ldots \mid \boldsymbol{\xi}),$$

причем по этой мере последовательности $\{X_1, X_2, ...\}$ и $\{Y_1, Y_2, ...\}$ обладают свойствами 1-3 (см. Введение).

Докажем, что конечномерные распределения последовательностей $\{\mathcal{Z}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ и $\{Z_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ совпадают. Для любого $n \in \mathbf{N}$ и для любых борелевских множеств $A_1, \ldots, A_n$ имеем, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{Z}_1 \in A_1, \ldots, \mathcal{Z}_n \in A_n) = \mathbf{E}\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathcal{Z}_1 \in A_1, \ldots, \mathcal{Z}_n \in A_n)$$

$$= \mathbf{E}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathcal{Z}_i \in A_i).$$

При фиксированной среде случайная величина $\mathcal{Z}_i$ имеет функцию распределения $F(\cdot)$, если $\xi_i = 1$, или функцию распределения $G(\cdot)$, если $\xi_i = 2$, поэтому при фиксированной среде распределение $\mathcal{Z}_i$ совпадает с распределением случайной величины $X_i I_{\{\xi_i=1\}} + Y_i I_{\{\xi_i=2\}}$. С учетом этого, продолжим последнее равенство:

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathcal{Z}_i \in A_i) = \mathbf{E}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(X_i I_{\{\xi_i=1\}} + Y_i I_{\{\xi_i=2\}} \in A_i)$$

$$= \mathbf{E}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_i \in A_i) = \mathbf{E}\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_n \in A_n)$$

$$= \mathbf{P}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_n \in A_n).$$

Найдем эти конечномерные распределения. Для любых борелевских множеств A_1, A_2 по свойству аддитивности вероятности и по формуле (1) имеем, что

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{i_1, i_2 \in \{1,2\}} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2;\ \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2)$$

$$= \sum_{i_1, i_2 \in \{1,2\}} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(X_j I_{\{\xi_j=1\}} + Y_j I_{\{\xi_j=2\}} \in A_j, j \in \{1,2\};\ \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2). \quad (2)$$

Так как среда $\boldsymbol{\xi}$ фиксирована, событие $\{\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2\}$ является достоверным лишь для одной пары $\{i_1, i_2\}$, где $i_1, i_2 \in \{1,2\}$, а для остальных пар мера $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ этих событий равна нулю, поэтому по формуле (2) имеем, что

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2)$$

$$= \sum_{i_1, i_2 \in \{1,2\}} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(X_j I_{\{\xi_j=1\}} + Y_j I_{\{\xi_j=2\}} \in A_j, j \in \{1,2\}) I_{\{\xi_1=i_1, \xi_2=i_2\}}. \quad (3)$$

В фиксированной среде $\boldsymbol{\xi}$ случайные величины $\{X_1, Y_1, X_2, Y_2\}$ независимы в совокупности, а значит, по формуле (3) имеем, что

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2) = \sum_{i_1, i_2 \in \{1,2\}} p_{i_1}(A_1) p_{i_2}(A_2) I_{\{\xi_1=i_1, \xi_2=i_2\}}, \quad (4)$$

где для борелевского множества A

$$p_1(A) = \int\limits_A dF, \quad p_2(A) = \int\limits_A dG.$$

Совершенно аналогично предыдущему рассуждению можно показать, что для любого $m \in \mathbf{N}$ и для любых борелевских множеств $A_1, \ldots, A_m$

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_m \in A_m)$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,2\}} p_{i_1}(A_1) \ldots p_{i_m}(A_m) I_{\{\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_m = i_m\}}. \tag{5}$$

Теперь перейдем к мере $\mathbf{P}$. С учетом формулы (5) имеем, что

$$\mathbf{P}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_m \in A_m) = \mathbf{E}\,\mathbf{I}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_m \in A_m)$$
$$= \mathbf{E}(\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}}\,\mathbf{I}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_m \in A_m)) = \mathbf{E}\,\mathbf{P}_{\boldsymbol{\xi}}(Z_1 \in A_1, \ldots, Z_m \in A_m)$$
$$= \mathbf{E} \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,2\}} p_{i_1}(A_1) \ldots p_{i_m}(A_m) I_{\{\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_m = i_m\}}$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m \in \{1,2\}} p_{i_1}(A_1) \ldots p_{i_m}(A_m)\, \mathbf{P}(\xi_1 = i_1, \ldots, \xi_m = i_m).$$

3 Промежутки независимости

Зафиксируем начальное состояние цепи $\boldsymbol{\xi}$, то есть положим $\xi_1 = 1$. Это означает, что цепь изначально пребывает в состоянии 1, и она будет в этом состоянии какое-то случайное время, пока впервые не перейдет в состояние 2. Далее она будет пребывать в состоянии 2 еще какое-то случайное время, пока не вновь не перейдет в состояние 1, и т.д. Формализуем эти случайные величины, пусть

$\delta_1^{(1)}$ – время первого пребывания цепи в состоянии 1,
$\delta_1^{(2)}$ – время первого пребывания цепи в состоянии 2,
$\delta_2^{(1)}$ – время второго пребывания цепи в состоянии 1,
$\delta_2^{(2)}$ – время второго пребывания цепи в состоянии 2 и т.д.

Лемма 1. *Случайные величины $\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(2)}, \ldots$ являются независимыми по мере $\mathbf{P}$. Более того, случайные величины $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \ldots$ одинаково распределены и имеют геометрическое распределение с параметром p_{12}, и случайные величины $\delta_1^{(2)}, \delta_2^{(2)}, \ldots$ тоже одинаково распределены и имеют геометрическое распределение с параметром p_{21}.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $m \in \mathbf{N}$ случайные величины $\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)}, \ldots, \delta_m^{(1)}, \delta_m^{(2)}$ независимы, и установить одинаковую распределенность случайных величин $\delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_m^{(1)}$ и одинаковую распределенность $\delta_1^{(2)}, \ldots, \delta_m^{(2)}$. Докажем это для $m = 2$. Для любых $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{N}$ положим

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = s_1 + b_1,$$

$$s_3 = s_2 + a_2, \quad s_4 = s_3 + b_2.$$

Имеем, что

$$\mathbf{P}(\delta_1^{(1)} = a_1, \delta_1^{(2)} = b_1, \delta_2^{(1)} = a_2, \delta_2^{(2)} = b_2)$$

$$= \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{s_1}\{\xi_i = 1\} \bigcap_{i=s_1+1}^{s_2}\{\xi_i = 2\} \bigcap_{i=s_2+1}^{s_3}\{\xi_i = 1\} \bigcap_{i=s_3+1}^{s_4}\{\xi_i = 2\} \bigcap\{\xi_{s_4+1} = 1\}\Big)$$

$$= p_{11}^{a_1-1} p_{12} p_{22}^{b_1-1} p_{21} p_{11}^{a_2-1} p_{12} p_{22}^{b_2-1} p_{21}. \qquad (6)$$

Вероятность из левой части формулы (6) распалась в произведение множителей, каждый из которых зависит от значения только лишь одной случайной величины, а это означает их независимость. Просуммируем формулу (6) по всем значениям b_1, a_2, b_2, и в силу формулы полной вероятности получим, что

$$\mathbf{P}(\delta_1^{(1)} = a_1) = p_{11}^{a_1-1} p_{12} \frac{p_{21}}{1 - p_{22}} \frac{p_{12}}{1 - p_{11}} \frac{p_{21}}{1 - p_{22}} = p_{11}^{a_1-1} p_{12}. \qquad (7)$$

Просуммируем формулу (6) по всем значениям a_1, b_1, b_2 и получим, что

$$\mathbf{P}(\delta_2^{(1)} = a_2) = p_{11}^{a_2-1} p_{12}. \qquad (8)$$

Из формул (7), (8) следует, что случайные величины $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}$ имеют геометрическое распределение с параметром p_{12}. Аналогично можно получить, что

$$\mathbf{P}(\delta_1^{(2)} = b_1) = p_{22}^{b_1-1} p_{21}, \quad \mathbf{P}(\delta_2^{(2)} = b_2) = p_{22}^{b_2-1} p_{21},$$

что означает, что случайные величины $\delta_1^{(2)}, \delta_2^{(2)}$ имеют геометрическое распределение с параметром p_{21}.

Проведя совершенно аналогичные рассуждения, можно доказать, что утверждение верно и для любого $m > 2$. Тем самым, лемма доказана. $\square$

Обозначим $\tau_0 = 0$, а для $n \in \mathbf{N}$

$$\tau_{2n-1} = \tau_{2n-2} + \delta_n^{(1)}$$

$$\tau_{2n} = \tau_{2n-1} + \delta_n^{(2)}$$

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ положим

$$\zeta_n = \sum_{k=\tau_{n-1}+1}^{\tau_n} Z_k.$$

Введем производящие функции. Для каждого $m \in \mathbf{N}$ при $s \in [0,1]$ положим

$$f_m(s) = \sum_{k \in \mathbf{N}_0} s^k \, \mathbf{P}(\delta_m^{(1)} = k), \quad g_m(s) = \sum_{k \in \mathbf{N}_0} s^k \, \mathbf{P}(\delta_m^{(2)} = k).$$

В силу леммы 1 для любого $m \in \mathbf{N}$ и для всех $s \in [0,1]$ имеем, что

$$f_m(s) = f_1(s), \quad g_m(s) = g_1(s).$$

Лемма 2. *Случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ являются независимыми по мере $\mathbf{P}$. Более того, случайные величины $\zeta_2, \zeta_4 \ldots$ одинаково распределены, и случайные величины $\zeta_1, \zeta_3 \ldots$ тоже одинаково распределены.*

Доказательство. Положим при $\lambda > 0$

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dF(x), \quad \psi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dG(x).$$

Для любого $n \in \mathbf{N}$ покажем независимость случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n}$. Введем преобразование Лапласа случайного вектора $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n})$:

$$\chi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) = \mathbf{E} \exp\Big(- \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \zeta_k \Big), \ \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n} > 0.$$

Из свойств условного математического ожидания следует, что

$$\chi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}} \exp\Big(- \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \zeta_k \Big)). \tag{9}$$

По определению ζ_k имеем, что

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}} \exp\Big(- \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \zeta_k \Big) = \mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}} \exp\Big(- \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \sum_{m=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k} Z_m \Big). \tag{10}$$

Случайные величины τ_k, $k = 1, \ldots, 2n$, полностью определяются значениями случайных величин $\delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_n^{(2)}$, которые измеримы относительно сигма алгебры, порожденной $\boldsymbol{\xi}$. По определению, при фиксированной среде все случайные величины Z_m будут равны либо X_m, либо Y_m. Разобьем правую часть формулы (10) на слагаемые по формуле полной вероятности по значениям $\delta_1^{(1)}, \ldots, \delta_n^{(2)}$, и с учетом сказанного выше имеем, что

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}} \exp\Big(- \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \sum_{m=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k} Z_m \Big)$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_{2n} \in \mathbf{N}} I_{\{\delta_1^{(1)} = i_1, \ldots, \delta_n^{(2)} = i_{2n}\}} \times$$

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}} \exp\Big(-\lambda_1 \sum_{k=\tau_0+1}^{\tau_1} X_k - \ldots - \lambda_{2n} \sum_{k=\tau_{2n-1}+1}^{\tau_{2n}} Y_k \Big)$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_{2n}\in\mathbf{N}} I_{\{\delta_1^{(1)}=i_1,\ldots,\delta_n^{(2)}=i_{2n}\}} \varphi^{i_1}(\lambda_1)\ldots\psi^{i_{2n}}(\lambda_{2n}) \tag{11}$$

Из формул (9) – (11) получаем, что

$$\chi(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_{2n}\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(\delta_1^{(1)} = i_1,\ldots,\delta_n^{(2)} = i_{2n})\varphi^{i_1}(\lambda_1)\ldots\psi^{i_{2n}}(\lambda_{2n}). \tag{12}$$

По лемме 1 случайные величины $\delta_1^{(1)},\ldots,\delta_n^{(2)}$ независимы, а значит, из формулы (12) получаем, что

$$\chi(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_{2n}\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(\delta_1^{(1)} = i_1)\ldots\mathbf{P}(\delta_n^{(2)} = i_{2n})\varphi^{i_1}(\lambda_1)\ldots\psi^{i_{2n}}(\lambda_{2n})$$

$$= \sum_{i_1\in\mathbf{N}} \varphi^{i_1}(\lambda_1)\,\mathbf{P}(\delta_1^{(1)} = i_1)\ldots \sum_{i_{2n}\in\mathbf{N}} \psi^{i_{2n}}(\lambda_{2n})\,\mathbf{P}(\delta_n^{(2)} = i_{2n})$$

$$= f_1(\varphi(\lambda_1))\; g_1(\varphi(\lambda_2))\ldots f_n(\varphi(\lambda_{2n-1}))\; g_n(\varphi(\lambda_{2n})). \tag{13}$$

Из формулы (13) видно, что преобразование Лапласа случайного вектора $(\zeta_1,\ldots,\zeta_{2n})$ распалось в произведение $2n$ множителей, каждый из которых зависит только лишь от одной соответствующей переменной $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n}$, а это влечет независимость случайных величин $\zeta_1,\ldots,\zeta_{2n}$ для любого $n\in\mathbf{N}$. При этом все производящие функции $f_i(\cdot)$ равны $f_1(\cdot)$, откуда следует, что преобразование Лапласа всех величин ζ_n с нечетным индексом n совпадает, что означает, что $\zeta_1,\zeta_3,\ldots$ распределены одинаково. Аналогично получаем, что $\zeta_2,\zeta_4,\ldots$ распределены одинаково. Лемма доказана. $\square$

4 Закон больших чисел

Вычислим математическое ожидание ζ_1 и ζ_2. Положим

$$\mu_1 = \int\limits_0^{+\infty} x dF(x), \quad \mu_2 = \int\limits_0^{+\infty} x dG(x).$$

По аддитивности вероятности и по свойствам последовательности $\{Z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ при фиксированной случайной среде имеем, что

$$\mathbf{E}\,\zeta_1 = \mathbf{E}\,\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\sum_{k=1}^{\tau_1} Z_k\Big) = \mathbf{E}\,\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}}\Big(\sum_{k=1}^{\delta_1^{(1)}} X_k\Big)$$

$$= \mathbf{E}\,\mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} I_{\{\delta_1^{(1)}=m\}} \sum_{k=1}^{m} X_k \Big) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{E}(I_{\{\delta_1^{(1)}=m\}} m\, \mathbf{E}_{\boldsymbol{\xi}}\, X_1)$$

$$= \mu_1 \sum_{m=1}^{+\infty} m\, \mathbf{P}(\delta_1^{(1)} = m) = \mu_1\, \mathbf{E}\, \delta_1^{(1)}. \tag{14}$$

Аналогично для ζ_2 имеем, что

$$\mathbf{E}\,\zeta_2 = \mu_2\, \mathbf{E}\, \delta_1^{(2)}. \tag{15}$$

Из леммы 2 следует, что случайные величины $\zeta_1 + \zeta_2, \zeta_3 + \zeta_4, \ldots$ независимы и одинаково распределены, а также являются положительными случайными величинами. Положим при $n \in \mathbf{N}$

$$S'_0 = 0, \qquad S'_n = \sum_{k=1}^{n} (\zeta_{2k-1} + \zeta_{2k}).$$

Отметим, что некоторые члены последовательности $\{S_n\}$ совпадают с некоторыми членами последовательности $\{S'_k\}$, так как состоят из одних и тех же слагаемых, а именно для всех $k \in \mathbf{N}$

$$S_{\tau_{2k}} = S'_k. \tag{16}$$

С учетом формул (15), (16), для последовательности $\{S'_n\}$ справедлив усиленный закон больших чисел: при $n \to \infty$

$$\frac{S'_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{E}(\zeta_1 + \zeta_2). \tag{17}$$

Для $t > 0$ положим

$$k(t) = \max\{k : \tau_{2k} \le t\}.$$

Заметим, что случайный процесс $k(t)$ является классическим однородным процессом восстановления с моментами восстановления

$$\tau_{2m} = S''_m = \sum_{i=1}^{m} (\delta_i^{(1)} + \delta_i^{(2)}), \quad m \in \mathbf{N}\,.$$

Справедлив усиленный закон больших чисел [см. 1, ch. 3, §3] для процессов восстановления.

Теорема 1. *Пусть $\{\eta_i\}$ –последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием, $T_n = \eta_1 + \ldots + \eta_n, N(t) = \max\{n : T_n < t\}$. Тогда*

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mathbf{E}\,\eta_1}, \quad t \to \infty.$$

Процесс $\{k(t) : t > 0\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому при $t \to \infty$

$$\frac{k(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mathbf{E}(\delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)})},$$

откуда, в частности, следует, что при $n \to \infty$

$$\frac{k(n)}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{\mathbf{E}(\delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)})}. \tag{18}$$

Для всех $n \in \mathbf{N}$ в силу возрастания S_i по i, а также по формуле (16) справедливы неравенства, которые играют для нас ключевую роль:

$$S'_{k(n)} = S_{\tau_{2k(n)}} \leq S_n \leq S_{\tau_{2(k(n)+1)}} = S'_{k(n)+1}.$$

Преобразуем последнюю формулу под закон больших чисел:

$$\frac{k(n)}{n}\frac{S'_{k(n)}}{k(n)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{S'_{k(n)+1}}{k(n)+1}\frac{k(n)+1}{n}. \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$a = \mathbf{E}(\zeta_1 + \zeta_2), \quad b = \mathbf{E}(\delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)}).$$

Из формул (17)–(19) и из теоремы о зажатой сходимости следует, что

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{a}{b}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < \mu_i < +\infty,\ i = 1, 2.$ *Тогда*

$$\frac{\nu(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{b}{a}, \quad t \to \infty.$$

Доказательство. По определению $\nu(t)$ имеем, что для любого $t > 0$ выполнены неравенства

$$S_{\nu(t)} \leq t \leq S_{\nu(t)+1}.$$

Преобразуем последние неравенства:

$$\frac{S_{\nu(t)}}{\nu(t)} \leq \frac{t}{\nu(t)} \leq \frac{S_{\nu(t)+1}}{\nu(t)}. \tag{21}$$

Докажем, что при $t \to \infty$

$$\nu(t) \xrightarrow{\text{п.н.}} +\infty. \tag{22}$$

По формуле (20) для почти всех $\omega \in \Omega$ найдутся такие постоянные $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, что при всех достаточно больших n

$$C_1 n \leq S_n \leq C_2 n. \tag{23}$$

Положим $\tilde{\nu}(t) = \max\{n : C_1 n \le t\}$. Ясно, что $\tilde{\nu}(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, а по формуле (23) имеем, что $\tilde{\nu}(t) \le \nu(t)$ п.н. при всех достаточно больших t, откуда следует формула (22).

Для почти всех исходов $\omega \in \Omega$ по формуле (20) и (22) имеем, что

$$\frac{S_{\nu(t,\omega)}(\omega)}{\nu(t,\omega)} \to \frac{a}{b}, \quad t \to \infty. \tag{24}$$

Из формул (21), (22) получаем, что

$$\frac{\nu(t)}{t} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{b}{a}, \quad t \to \infty.$$

Теорема доказана. $\square$

Список литературы

1. Ross S. M., *Stochastic Processes, 2nd Edition.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.