Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математической статистики и случайных процессов

Курсовая работа
студента 306 группы
Панфилова Игоря Александровича

Встроенная дискретная броуновская извилина

Научный руководитель:
профессор д.ф.-м.н.
Афанасьев Валерий Иванович

Москва
2024

Пусть $X_1, ...$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Положим $S_0 = 0,\ S_k = X_1 + ... + X_k,\ k \in \mathbf{N}$, и введем случайную величину $\beta_n = \max\{i:\ i \leq n,\ S_i = 0\}$. В работе изучается последовательность случайных величин

$$\eta_{2n} = \frac{|S_{\beta_{2n}+\lfloor(2n-\beta_{2n})/2\rfloor}|}{\sqrt{2n-\beta_{2n}}},$$

для этой последовательности устанавливается

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\eta_{2n} \xrightarrow{d} W^+(1/2),$$

где $W^+(1/2)$ *– броуновская извилина в точке 1/2, а знак* $\xrightarrow{d}$ *означает сходимость по распределению.*

1. Найдем предел при $n \to \infty$ следующей вероятности:

$$\mathbf{P}\left(a < \eta_{2n} \leq b\right),$$

где $0 \leq a < b$. Разложим эту вероятность в следующую сумму, воспользовавшись аддитивностью вероятности

$$\mathbf{P}\left(a < \eta_{2n} \leq b\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\left(a < \frac{|S_{2k+\lfloor(2n-2k)/2\rfloor}|}{\sqrt{2n-2k}} \leq b,\ \beta_{2n} = 2k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(a < \frac{|S_{n+k}|}{\sqrt{2n-2k}} \leq b,\ \beta_{2n} = 2k). \qquad (1)$$

Введем обозначения:

$$u_{2n} = \mathbf{P}(S_{2n} = 0),$$

$$p_{2n}(a,b) = \mathbf{P}\Big(a < \frac{|S_n|}{\sqrt{2n}} \leq b\ \Big|\ S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0\Big).$$

Событие $\{S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0\}$ есть объединиение двух событий: $\{S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0\}$ и $\{S_1 < 0, ..., S_{2n} < 0\}$, причем вероятности этих двух событий равны в силу симметрии, откуда получаем соотношение

$$\mathbf{P}(S_1 \neq 0, ..., S_{2n} \neq 0, a < \frac{|S_n|}{\sqrt{2n}} \leq b)$$

$$= \mathbf{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0, a < \frac{|S_n|}{\sqrt{2n}} \leq b)$$

$$+\mathbf{P}(S_1 < 0, ..., S_{2n} < 0, a < \frac{|S_n|}{\sqrt{2n}} \le b)$$

$$= 2\mathbf{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0, a < \frac{|S_n|}{\sqrt{2n}} \le b)$$

$$= 2\mathbf{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0)\mathbf{P}\Big(a < \frac{|S_n|}{\sqrt{2n}} \le b \;\Big|\; S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0\Big). \qquad (2)$$

Для вероятности $u_{2n}/2$ справедливо равенство (доказательство см., например, в [1], гл.1, §10)

$$\frac{u_{2n}}{2} = \mathbf{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0). \qquad (3)$$

При помощи марковского свойства случайного блуждания и формул (2) – (3) преобразуем следующую вероятность, где $k = 0, 1, ..., n$:

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{|S_{n+k}|}{\sqrt{2n-2k}} \le b,\ \beta_{2n} = 2k\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \ne 0, ..., S_{2n} \ne 0, a < \frac{|S_{n+k}|}{\sqrt{2n-2k}} \le b\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(S_{2k} = 0, S_{2k+1} - S_{2k} \ne 0, ..., S_{2n} - S_{2k} \ne 0, a < \frac{|S_{n+k} - S_{2k}|}{\sqrt{2n-2k}} \le b\right)$$

$$= \mathbf{P}(S_{2k} = 0)\mathbf{P}(S_1 \ne 0, ..., S_{2n-2k} \ne 0, a < \frac{|S_{n-k}|}{\sqrt{2(n-k)}} \le b)$$

$$= u_{2k}u_{2n-2k}p_{2n-2k}(a, b). \qquad (4)$$

Используя формулы (1) и (4), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(a < \eta_{2n} \le b\right) = \sum_{k=0}^{n} u_{2k}u_{2n-2k}p_{2n-2k}(a, b). \qquad (5)$$

Зафиксируем $\delta > 0$ – малое число. Введем обозначения

$$P_1(\delta, n, a, b) = \sum_{0 \le k \le \delta n} u_{2k}u_{2n-2k}p_{2n-2k}(a, b),$$

$$P_2(\delta, n, a, b) = \sum_{\delta n < k \le (1-\delta)n} u_{2k}u_{2n-2k}p_{2n-2k}(a, b),$$

$$P_3(\delta, n, a, b) = \sum_{(1-\delta)n < k \le n} u_{2k}u_{2n-2k}p_{2n-2k}(a, b).$$

По формуле (5) имеем, что

$$\mathbf{P}\left(a < \eta_{2n} \le b\right)$$

$$= P_1(\delta, n, a, b) + P_2(\delta, n, a, b) + P_3(\delta, n, a, b). \tag{6}$$

Оценим вероятность $P_1(\delta, n, a, b)$. По свойствам вероятности для любого $\delta > 0$ справедлива оценка

$$P_1(\delta, n, a, b) = \sum_{0 \le k \le \delta n} u_{2k} u_{2n-2k} p_{2n-2k}(a, b) \le \sum_{0 \le k \le \delta n} u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{7}$$

В книге [1] в главе 1, §10, доказывается, что сумма в правой части подчиняется закону арксинуса, а значит, по неравенствам (7) имеем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} P_1(\delta, n, a, b) \le \lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} \sum_{0 \le k \le \delta n} u_{2k} u_{2n-2k} = 0,$$

откуда получаем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} P_1(\delta, n, a, b) = 0. \tag{8}$$

Аналогично для $P_3(\delta, n, a, b)$ можно получить верхний предел

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} P_3(\delta, n, a, b) = 0. \tag{9}$$

2. Изучим теперь основную сумму $P_2(\delta, n, a, b)$. Для этого найдем предел при $n \to \infty$ для вероятности $p_{2n}(a, b)$. Сформулируем теорему, известную в более общем виде как функциональная предельная теорема Иглхарта, которую он доказал в работе [2]. Докажем её частный случай для нашей модели простого симметричного случайного блуждания для конечномерного распределения, отвечающего моменту $t = 1/2$.

Теорема 2. *Пусть $S_1, S_2, ...$ – простое симметричное случайное блуждание, $0 \le a < b < \infty$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} p_{2n}(a, b) = \mathbf{P}(a < W^+(1/2) \le b),$$

где W^+ – броуновская извилина.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются несколько утверждений.

Лемма 1. *Пусть $m, n \in \boldsymbol{N}$, $m < n$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_1 > 0, ..., S_{n-1} > 0, S_n = m) = \frac{m}{n} \mathbf{P}(S_n = m).$$

Доказательство. Утверждение леммы напрямую следует из теоремы о баллотировке (доказательство см., например., в [3], гл.3, §2). $\square$

Введем обозначения

$$L_n = \min_{1 \le i \le n} \{S_i\},$$

$$N(c,d)=\int\limits_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{-x^2}{2}}dx.$$

Лемма 2. *Пусть $x,y\in \boldsymbol{R}$, $0\le x<y<+\infty$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ для всех натуральных $m\in(x\sqrt{2n},y\sqrt{2n}]$ при всех достаточно больших n выполнены неравенства*

$$2N(0,\sqrt{2}x)(1-\varepsilon)\le \mathbf{P}(L_n>-m)\le 2N(0,\sqrt{2}y)(1+\varepsilon).$$

Доказательство. Очевидно, верна цепочка вложений для событий

$$\{L_n>-x\sqrt{2n}\}\subseteq\{L_n>-m\}\subseteq\{L_n>-y\sqrt{2n}\},$$

откуда получаем неравенства

$$\mathbf{P}(L_n>-x\sqrt{2n})\le \mathbf{P}(L_n>-m)\le \mathbf{P}(L_n>-y\sqrt{2n}). \tag{10}$$

Пусть $t\in\mathbf{R}$. По свойствам вероятностной меры

$$\mathbf{P}(L_n>t)=1-\mathbf{P}(L_n\le t). \tag{11}$$

С помощью преобразования путей, в главе 6 в книге [4] устанавливается, что

$$\mathbf{P}(L_n\le t,S_n>t)=\mathbf{P}(L_n\le t,S_n<t).$$

Тогда имеем, что

$$\mathbf{P}(L_n\le t)=\mathbf{P}(L_n\le t,S_n=t)+\mathbf{P}(L_n\le t,S_n>t)$$

$$+\mathbf{P}(L_n\le t,S_n<t)=2\mathbf{P}(L_n\le t,S_n<t)+\mathbf{P}(S_n=t)$$

$$=2\mathbf{P}(S_n<t)+\mathbf{P}(S_n=t). \tag{12}$$

По центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty}2\mathbf{P}(S_n<t\sqrt{2n})=2N(-\infty,t). \tag{13}$$

По формулам (11) – (13), а также по свойствам стандартного нормального распределения, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(L_n>-x\sqrt{2n})=1-2N(-\infty,-\sqrt{2}x)=2N(0,\sqrt{2}x).$$

Совершенно аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(L_n>-y\sqrt{2n})=2N(0,\sqrt{2}y).$$

Отсюда, а также из неравенств (10), элементарных свойств предела и ограниченности функции распределения следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. *Для любого $m \geq 0$ и для любого $n \in \boldsymbol{N}$ выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 2m) \geq \mathbf{P}(S_n = 2m + 2).$$

Доказательство. Если $\mathbf{P}(S_{2n} = 2m + 2) = 0$, то неравенство очевидно. Пусть $\mathbf{P}(S_{2n} = 2m + 2) > 0$. Распределение S_{2n} известно, см., например, главу 3 в книге [3]. Рассмотрим отношение

$$\frac{\mathbf{P}(S_{2n} = 2m)}{\mathbf{P}(S_{2n} = 2m + 2)} = \frac{C_{2n}^{n-m}}{C_{2n}^{n-m-1}} = \frac{(n-m-1)!(n+m+1)!(2n)!}{(n-m)!(n+m)!(2n)!}$$

$$= \frac{n+m+1}{n-m} > 1.$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 4. *Пусть $x, y \in \boldsymbol{R}$, $0 \leq x < y < +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для всех натуральных $m \in (x\sqrt{2n}, y\sqrt{2n}]$ при всех достаточно больших n выполнены неравенства*

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} e^{-y^2}(1 - \varepsilon) \leq \mathbf{P}(S_n = m) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} e^{-x^2}(1 + \varepsilon).$$

Доказательство. Докажем сперва для четных n, будем писать везде $2n$ вместо n. Положим

$$\xi_1 = X_1 + X_2, \quad \xi_2 = X_3 + X_4, ..., \quad \xi_n = X_{2n-1} + X_{2n}, ... ,$$

$$\zeta_n = \xi_1 + ... + \xi_n.$$

Случайные величины ξ_i одинаково распределены и являются центрально решетчатыми величинами с максимальным шагом 2, при этом $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = 2$. В этих условиях справедлива локальная теорема Гнеденко (доказательство см., например, в [5], гл. 8, §41): при $n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{2n}}{2} \mathbf{P}(\zeta_n = 2k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-k^2}{n}\right) \to 0,$$

причем это соотношение выполнено равномерно по целым k. Отсюда следует, что при $n \to \infty$ равномерно по k выполнено соотношение

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 2k) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-k^2}{n}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Функция $f(t) = \exp(-t^2)$ убывает при $t > 0$. Тогда для любого целого $k \in (x\sqrt{n}, y\sqrt{n}]$ выполнены неравенства

$$0 < e^{-y^2} \leq e^{-\frac{k^2}{n}} \leq e^{-x^2},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 2k) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-k^2}{n}} (1 + o(1)). \tag{14}$$

В силу леммы 3 выполнены неравенства

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 2\lceil y\sqrt{n}\rceil) \geq \mathbf{P}(S_{2n} = 2k) \geq \mathbf{P}(S_{2n} = 2\lfloor y\sqrt{n}\rfloor).$$

Применим к концам этого неравенства формулу (14), тогда получим, что при всех достаточно больших n верны неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-\lceil x\sqrt{n}\rceil^2}{n}} (1 + \varepsilon) \geq \mathbf{P}(S_{2n} = 2k) \geq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-\lfloor y\sqrt{n}\rfloor^2}{n}} (1 - \varepsilon). \tag{15}$$

Если $m = 2k$, то есть m есть четное число, то для $\mathbf{P}(S_{2n} = m)$ мы доказали неравенства (15). Рассмотрим теперь нечетные n. В силу формулы полной вероятности справедлива формула

$$\mathbf{P}(S_{2n+1} = 2m + 1) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}(S_{2n} = 2m) + \mathbf{P}(S_{2n} = 2m + 2)),$$

из которой следует, что неравенства (15) верны и для нечетных значений S_n при всех достаточно больших n

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-\lceil x\sqrt{n}\rceil^2}{n}} (1 + \varepsilon) \geq \mathbf{P}(S_{2n+1} = 2m + 1) \geq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-\lfloor y\sqrt{n}\rfloor^2}{n}} (1 - \varepsilon).$$

Отсюда получаем неравенства для любых целых m таких, что $x\sqrt{2n} < m \leq y\sqrt{2n}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-\lceil x\sqrt{n}\rceil^2}{n}} (1 + \varepsilon) \geq \mathbf{P}(S_n = m) \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{-\lfloor y\sqrt{n}\rfloor^2}{n}} (1 - \varepsilon).$$

откуда, в силу непрерывности экспоненциальной функции, следует утверждение леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. В книге [3] в главе 3 устанавливается асимптотика

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n верны неравенства

$$\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{\pi n}} \leq u_{2n} \leq \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{\pi n}}. \tag{17}$$

Зафиксируем $\{x_i\}_{i=0}^N$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. По определению условной вероятности

$$p_{2n}(a, b) = \frac{\mathbf{P}(a < |S_n|/\sqrt{2n} \leq b,\ S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0)}{\mathbf{P}(S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0)}. \tag{18}$$

Разложим вероятность из числителя в сумму по аддитивности вероятности и воспользуемся марковским свойством:

$$\mathbf{P}\Big(a < \frac{|S_n|}{\sqrt{2n}} \le b,\ S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0\Big)$$

$$= \sum_{a\sqrt{2n} < m \le b\sqrt{2n}} \mathbf{P}(S_n = m,\ S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0)$$

$$= \sum_{a\sqrt{2n} < m \le b\sqrt{2n}} \Big[\ \mathbf{P}(S_n = m,\ S_1 > 0, ..., S_{2n} > 0)$$

$$\times \mathbf{P}(S_1 > -m, ..., S_n > -m)\ \Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{x_{i-1}\sqrt{2n} < m \le x_i\sqrt{2n}} \mathbf{P}(S_n = m,\ S_1 > 0, ..., S_n > 0)\mathbf{P}(L_n > -m),$$

причем суммирование ведется лишь по тем m, четность которых совпадает с четностью n. По леммам 1, 2, 4 для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n для m таких, что $x_{i-1}\sqrt{2n} < m \le x_i\sqrt{2n}$, справедливы неравенства

$$\frac{m}{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} e^{-x_i^2} 2N(0, \sqrt{2}x_{i-1})(1-\varepsilon)^2$$

$$\le \mathbf{P}(S_n = m,\ S_1 > 0, ..., S_n > 0)\mathbf{P}(L_n > -m)$$

$$\le \frac{m}{n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} e^{-x_{i-1}^2} 2N(0, \sqrt{2}x_i)(1+\varepsilon)^2. \tag{19}$$

Справедлива очевидная оценка для суммы целых чисел с одинаковой четностью в промежутке $(x_{i-1}\sqrt{2n}, x_i\sqrt{2n}]$

$$\sum_{x_{i-1}\sqrt{2n} < m \le x_i\sqrt{2n}} m \quad \le \quad x_i\sqrt{2n} \sum_{x_{i-1}\sqrt{2n} < m \le x_i\sqrt{2n}} 1$$

$$\le x_i n(x_i - x_{i-1} + \frac{1}{\sqrt{2n}}). \tag{20}$$

Аналогично можно получить нижнюю оценку

$$x_{i-1} n(x_i - x_{i-1} - \frac{1}{\sqrt{2n}}) \quad \le \sum_{x_{i-1}\sqrt{2n} < m \le x_i\sqrt{2n}} m \tag{21}$$

Оценим формулу (18). Для числителя воспользуемся неравенствами (19)-(21), а для знаменателя воспользуемся неравенством (17), получаем, что

$$\frac{(1-\varepsilon)^2}{1+\varepsilon} 4\sqrt{2} \sum_{i=1}^{N} x_{i-1} e^{-x_i^2} N(0, \sqrt{2}x_{i-1})(x_i - x_{i-1} - \frac{1}{\sqrt{2n}})$$

$$\leq p_{2n}(a,b)$$
$$\leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} 4\sqrt{2} \sum_{i=1}^{N} x_i e^{-x_{i-1}^2} N(0, \sqrt{2} x_i)(x_i - x_{i-1} + \frac{1}{\sqrt{2n}}).$$

Перейдем к пределу сначала при $n \to \infty$, затем при $diam\{x_i\}_{i=0}^N \to 0$, и, наконец, при $\varepsilon \to 0$

$$\int_a^b 4\sqrt{2} x e^{-x^2} N(0, \sqrt{2} x) dx \leq \varliminf_{n\to\infty} p_{2n}(a,b) \leq \varlimsup_{n\to\infty} p_{2n}(a,b)$$
$$\leq \int_a^b 4\sqrt{2} x e^{-x^2} N(0, \sqrt{2} x) dx,$$

откуда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} p_{2n} = \int_a^b 4\sqrt{2} x e^{-x^2} N(0, \sqrt{2} x) dx.$$

Полученная подынтегральная функция совпадает с плотностью броуновской извилины в точке 1/2 (см. [4], главу 11)

$$p^+(x) = 4\sqrt{2}\, x \exp(-x^2) N(0, \sqrt{2} x), \qquad x > 0.$$

Тем самым теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n в силу ограниченности функции распределения выполнены неравенства

$$(1-\varepsilon) \int_a^b p^+(y) dy \leq p_{2n}(a,b) \leq (1+\varepsilon) \int_a^b p^+(y) dy. \tag{22}$$

3. Найдем предел суммы $P_2(\varepsilon, n, a, b)$ при $n \to \infty$. Оценим сумму $P_2(\delta, n, a, b)$. используя неравенства (22)

$$\sum_{\delta n < k \leq (1-\delta)n} (1-\varepsilon) u_{2k} u_{2n-2k} \int_a^b p^+(y) dy$$
$$\leq P_2(\delta, n, a, b)$$
$$\leq \sum_{\delta n < k \leq (1-\delta)n} (1+\varepsilon) u_{2k} u_{2n-2k} \int_a^b p^+(y) dy. \tag{23}$$

Заметим, что в верхней и в нижней оценке в неравенствах (23) встречается интегральная сумма арксинуса. Устремим в неравенствах (23) n к ∞, получим

$$(1-\varepsilon)\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx\int\limits_{a}^{b}p^{+}(y)dy$$

$$\leq \varliminf_{n\to\infty} P_2(\delta,n,a,b) \leq \varlimsup_{n\to\infty} P_2(\delta,n,a,b)$$

$$\leq (1+\varepsilon)\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx\int\limits_{a}^{b}p^{+}(y)dy.$$

Устремим ε к нулю, получим

$$\varliminf_{n\to\infty} P_2(\delta,n,a,b) = \varlimsup_{n\to\infty} P_2(\delta,n,a,b) = \int\limits_{\delta}^{1-\delta}\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx\int\limits_{a}^{b}p^{+}(y)dy,$$

следовательно, у $P_2(\delta,n,a,b)$ существует предел при $n\to\infty$. Далее, устремим δ к нулю, получим

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} P_2(\delta,n,a,b) = \int\limits_{0}^{1}\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}dx\int\limits_{a}^{b}p^{+}(y)dy = \int\limits_{a}^{b}p^{+}(y)dy. \qquad (24)$$

4. Получим основной результат. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в формуле (6), имеем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} P_1(\delta,n,a,b) + \varliminf_{n\to\infty} P_2(\delta,n,a,b) + \varliminf_{n\to\infty} P_3(\delta,n,a,b)$$

$$\leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a<\eta_{2n}\leq b\right)$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a<\eta_{2n}\leq b\right)$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} P_1(\delta,n,a,b) + \varlimsup_{n\to\infty} P_2(\delta,n,a,b) + \varlimsup_{n\to\infty} P_3(\delta,n,a,b).$$

Устремим δ к этих неравенствах к нулю, и по формулам (8), (9), (24) получаем, что

$$\int\limits_{a}^{b}p^{+}(y)dy \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a<\eta_{2n}\leq b\right)$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a<\eta_{2n}\leq b\right) \leq \int\limits_{a}^{b}p^{+}(y)dy,$$

Имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(a < \eta_{2n} \le b\right) = \int\limits_a^b p^+(y)dy = \mathbf{P}\left(a < W^+(1/2) \le b\right),$$

откуда следует, что исследуемая последовательность случайных величин $\{\eta_{2n}\}$ сходится по распределению при $n \to \infty$ к броуновской извилине в точке $1/2$.

Список литературы

[1] Ширяев А. Н., *Вероятность - 1.* МЦНМО, Москва, 2021.

[2] Iglehart D. L., Functional Central Limit Theorems for Random Walks Conditioned to Stay Positive. *Ann. Probab.* (1974) **2**, №4, 608-619.

[3] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложение.* Мир, Москва, 1964.

[4] Афанасьев В. И., *Случайные блуждания и ветвящиеся процессы.* МИАН, Москва, 2007.

[5] Гнеденко Б. В., *Курс теории вероятностей.* УРСС, Москва, 2004.