

Analiza III R

Notatki wykładowe

Uwagi: niniejszy skrypt z pewnością zawiera trochę błędów, szczególnie natury typograficznej. Warto je zgłaszać autorowi. Ponadto, spora część działu o rachunku prawdopodobieństwa nie została jeszcze spisana.

Wykładowcy:
dr hab. Katarzyna Grabowska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

1 Geometria różniczkowa	5
Powtórka z Analizy II	5
Objętość kuli B_n	5
Pole powierzchni sfery n -wymiarowej	8
Strumień pola przez ramkę	9
Lemat Poincare	11
Forma pierwotna do 1-formy na \mathbb{R}^2	12
Dowód Lematu Poincare	15
Szukanie potencjału wektorowego	18
Wstęp do twierdzenia Stokesa	19
Twierdzenie Stokesa	20
Rozmaitość z brzegiem	20
Gładki rozkład jedności	22
Dowód twierdzenia Stokesa	23
Klasyczne wersje twierdzenia Stokesa	24
2 Analiza zespolona	28
Różniczkowanie w sensie zespolonym	28
Przekształcenia \mathbb{C} -liniowe	28
Różniczkowanie w sensie rzeczywistym i zespolonym	29
Operatory $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$	32
Funkcje holomorficzne	32
Baza dualna przestrzeni i formy na \mathbb{C}	33
Całkowanie funkcji holomorficznych	35
Twierdzenie Cauchy'ego	35
Własności funkcji holomorficznych	37
n -te pochodne funkcji holomorficznych	39
Nierówności całkowite	40
Szeregi	42
Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szereg Taylora	43
Ważne funkcje holomorficzne	45
Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szereg Laurenta	49
Całkowanie przez Residua	52
Klasyfikacja osobliwości	53
Całki z funkcji trygonometrycznych (po okresie)	55
Całki z funkcji wymiernych	56
Całki z funkcji postaci $Q(x) \exp(iax)$	57
Inne całki	59

Całki po kości	62
Residuum w nieskończoności	65
Własności funkcji meromorficznych	69
3 Teoria miary, rachunek prawdopodobieństwa	72
Algebry zbiorów	72
Miara Lebesgue'a	73
Miara zewnętrzna	76
Funkcje mierzalne	82
Całka Lebesgue'a	83
Własności całki Lebesgue'a	85
Całki z parametrem	92
Elementy rachunku prawdopodobieństwa	92
Prawdopodobieństwo warunkowe, zdarzenia niezależne, wzór Bayesa . . .	94
Zmienne statystyczne	94
4 Teoria dystrybucji	96
Dystrybucje	96
Operacje na dystrybucjach	97
Różniczkowanie dystrybucji	98
Przesunięcie, mnożenie dystrybucji przez funkcję	101
Zbieżność ciągu dystrybucji	102
Wzory Sochockiego	103
Rząd dystrybucji	104
Nośnik dystrybucji	105
Transformata Fouriera funkcji	107

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Powtórka z Analizy II

16 paź 2020

Objętość kuli B_n

Obszar całkowania dany jest przez:

$$B_n = \left\{ (x^1, \dots, x^n) : \sum_{i=1}^n (x^i)^2 \leq 1 \right\}$$

Objętość będzie dana przez całkę Riemanna z 1:

$$\int_{B_n} 1 \, dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

Jak mamy współrzędne w przestrzeni \mathbb{R}^n to mamy związane z nimi wektory **bazy standardowej** w przestrzeni stycznej: $\mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n) \rightsquigarrow (\partial_1, \dots, \partial_n)$.

Jak całkujemy to jest potrzebna jakaś miara objętości, np. iloczyn skalarny i w bazie st. jest on przyjemną macierzą diagonalną:

$$(\partial_i \mid \partial_j)_{\text{st}} = [g]_{\text{st}} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

Do całkowania jest nam potrzebna również kanoniczna forma objętości $\Omega_n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ i wtedy przechodzimy z całki Riemanna do obiektu z geometrii różniczkowej:

$$\int_{B_n} dx^1 \dots dx^n = \int_{(B_n, \iota_+)} \Omega_n$$

Musimy najpierw zamienić zmienne na takie współrzędne wielo-sferyczne. Działają bardzo podobnie jak zwykle biegunowe i sferyczne. A oto algorytm ich tworzenia.

Bierzemy najpierw st: $(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n)$ i ruszając tylko ostatnie dwie zmienne przekształcamy je na biegunowe sf1: $(x^1, \dots, x^{n-2}, r^{n-1}, \phi^{n-1})$ takie, że:

$$\begin{cases} x^{n-1} = r^{n-1} \cos \phi^{n-1} \\ x^n = r^{n-1} \sin \phi^{n-1} \end{cases}$$

Teraz trzeba napisać macierz zamiany zmiennych czyli macierz identyczności z bazy sf1 do st. Wspomnienia z algebry:

Twierdzenie 1 (Zmiana formy dwuliniowej przy zmianie bazy).

$$[g]_{\text{sf1}}^{\text{sf1}} = \begin{pmatrix} [\text{id}]_{\text{sf}}^{\text{st}} \end{pmatrix}^{\top} \begin{matrix} [g]_{\text{st}}^{\text{st}} & [\text{id}]_{\text{sf}}^{\text{st}} \end{matrix}$$

iloczyn skalarny w nowej bazie = macierz zamiany w nowych \top · iloczyn skalarny w starej bazie · macierz zamiany w nowych

Wracając do wcześniejszego liczenia, w układzie biegunowym mamy:

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial_y \\ &= \cos \phi \cdot \partial_x + \sin \phi \cdot \partial_y \\ \partial_\phi &= -r \sin \phi \cdot \partial_x + r \cos \phi \cdot \partial_y \end{aligned}$$

Wówczas w bazie standardowej,

$$[\partial_r]^{\text{st}} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}, \quad [\partial_\phi]^{\text{st}} = \begin{bmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z bazy do bazy składa się z wektorów nowej bazy zapisanej w starej bazie, czyli w naszym przypadku:

$$[\text{id}]_{\text{sf1}}^{\text{st}} = \text{diag}(1, \dots, 1) \oplus \begin{bmatrix} \cos \phi^{n-1} & -r^{n-1} \sin \phi^{n-1} \\ \sin \phi^{n-1} & r^{n-1} \cos \phi^{n-1} \end{bmatrix} = M_1$$

Teraz robimy drugą zamianę bazy. Startujemy z sf1. Bierzymy dwie ostatnie współrzędne metryczne x^{n-2} , r^{n-1} i będą nowe współrzędne sf2: $(x^1, \dots, r^{n-2}, \phi^{n-2}, \phi^{n-1})$ takie, że:

$$\begin{cases} x^{n-2} = r^{n-2} \cos \phi^{n-2} \\ r^{n-1} = r^{n-2} \sin \phi^{n-2} \end{cases}$$

przy czym $r^{n-2} \in (0, \infty)$, natomiast w odróżnieniu od $\phi^{n-1} \in (0, 2\pi)$, mamy $\phi^{n-2} \in (0, \pi)$. A jest tak dlatego, że $r^{n-1} > 0$, zatem większe argumenty sinusa by nam to psuły. W przejściu sf1 \rightarrow sf2 zostaje taka sama ostatnia zmienna ϕ^{n-1} zatem

$$[\text{id}]_{\text{sf2}}^{\text{sf1}} = \underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1)}_{(n-3) \times (n-3)} \oplus \begin{bmatrix} \cos \phi^{n-2} & -r^{n-2} \sin \phi^{n-2} \\ \sin \phi^{n-2} & r^{n-2} \cos \phi^{n-2} \end{bmatrix} \oplus \text{diag}(1) = M_2$$

Możemy tak zamieniać dalej. Wtedy,

$$\begin{aligned} [g]_{\text{sf2}}^{\text{sf2}} &= M_2^{\top} [g]_{\text{sf1}}^{\text{sf1}} M_2 \\ &= M_2^{\top} M_1^{\top} [g]_{\text{st}}^{\text{st}} M_1 M_2 \\ &= M_2^{\top} M_1^{\top} M_1 M_2 \\ &= M_2^{\top} \left[\underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1)}_{n-2} \oplus \text{diag}\left(1, (r^{n-1})^2\right) \right] M_2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że to pojedyncze przekształcenie de facto działa nam za każdym razem na jakies dwa elementy z macierzy klatkowej.

$$\begin{aligned} &= \text{diag}\left(1, \dots, 1, (r^{n-2})^2, (r^{n-1})^2\right) \\ &= \text{diag}\left(1, \dots, 1, (r^{n-2})^2, (r^{n-2} \sin \phi^{n-2})^2\right) \end{aligned}$$

Widzimy już co się będzie działo jak będziemy dalej przesuwali sf2 do sf(n-1): $(r, \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{n-1})$, gdzie

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \phi^1 \\ r^2 = r \sin \phi^1 \end{cases}$$

Wówczas,

$$\begin{aligned} [g]_{\text{sf}(n-1)}^{\text{sf}(n-1)} &= \begin{bmatrix} \cos \phi^1 & \sin \phi^1 \\ -r \sin \phi^1 & r \cos \phi^1 \end{bmatrix} \text{diag}\left(1, 1, (r^2)^2, \dots, (r^{n-1})^2\right) \begin{bmatrix} \cos \phi^1 & -r \sin \phi^1 \\ \sin \phi^1 & r \cos \phi^1 \end{bmatrix} \\ &= \text{diag}\left(1, r^2, (r \sin \phi^1)^2, (r \sin \phi^1 \sin \phi^2)^2, \dots, (r \sin \phi^1 \sin \phi^2 \dots \sin \phi^{n-2})^2\right) \end{aligned}$$

Teraz bardzo łatwo policzymy wyznacznik macierzy diagonalnej:

$$\sqrt{\det g} = r^{n-1} (\sin \phi^1)^{n-2} \dots (\sin \phi^{n-2})$$

Przypomnijmy sobie pewną całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^n \phi \, d\phi &= -\sin^{n-1} \phi \cos \phi \Big|_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \cos^2 \phi \, d\phi \\ &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \, d\phi - (n-1) \int_0^\pi \sin^n \phi \, d\phi \end{aligned}$$

Dostajemy wzór rekurencyjny:

$$(*) = \int_0^\pi \sin^n \phi \, d\phi = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \, d\phi$$

Teraz rozważamy względem parzystości:

1. $n = 2k$

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \int_0^\pi \sin^{2k-4} \phi \, d\phi = \frac{(2k-1)(2k-3) \dots 3}{2k(2k-2) \dots 4} \int_0^\pi \sin^2 \phi \, d\phi \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \pi \end{aligned}$$

2. $n = 2k+1$

$$(*) = \frac{2k!!}{(2k+1)!!} \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = 2 \cdot \frac{2k!!}{(2k+1)!!}$$

Teraz możemy policzyć objętość kuli n -wymiarowej.

$$\Omega_n = r^{n-1} (\sin \phi^1)^{n-2} \cdots (\sin \phi^{n-2}) dr \wedge d\phi^1 \wedge \cdots \wedge d\phi^{n-1}$$

W kategoriach całki Riemanna mamy zamianę zmiennych postaci:

$$dx^1 \cdots dx^n = \det(M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1) dr \cdots d\phi^{n-1}$$

Nie robiliśmy tego w taki sposób, bo bezpośrednie mnożenie tych macierzy zamiany zmiennych jest bardzo kłopotliwe. Z formami różniczkowymi i iloczynem skalarnym wyszło prościej.

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{2k} &= \int_0^R r^{2k-1} dr \int_0^\pi (\sin \phi^1)^{2k-2} d\phi^1 \cdots \int_0^\pi \sin \phi^{2k-2} d\phi^{2k-2} \int_0^{2\pi} d\phi^{2k-1} \\ &= \frac{1}{2k} R^{2k} \cdot 2\pi \cdot \left(\text{te wszystkie współczynniki} \right. \\ &\quad \left. \text{co się poskracają} \right) = R^{2k} \frac{1}{2k} \frac{1}{(2k-2)!!} \pi^k 2^k \\ &= \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \end{aligned}$$

To samo powtarzamy dla przypadku nieparzystego.

$$\text{Vol}_{2k+1} = \frac{\pi^k 2^{k+1}}{(2k+1)!!} R^{2k+1}$$

Pole powierzchni sfery n -wymiarowej

Wygodniej będzie liczyć pole $(n-1)$ -wymiarowej sfery zanurzonej w \mathbb{R}^n .

Przepis na formę objętości:

1. Zanurzenie $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$
2. Metryka w \mathbb{R}^n
3. Obcięcie formy do S^{n-1}
4. Produkcja formy objętości i całkowanie.

Obcięcie oznacza ustalenie $r = R$. Wtedy przestajemy formę obliczać na wektorze dr i wymiar macierzy spada.

$$g_{|S^{n-1}} = \text{diag}\left(R^2, (R \sin \phi^1)^2, \dots, (R \sin \phi^1 \cdots \sin \phi^{n-2})^2\right)$$

Pole powierzchni sfery to będzie całka z obciętej formy objętości:

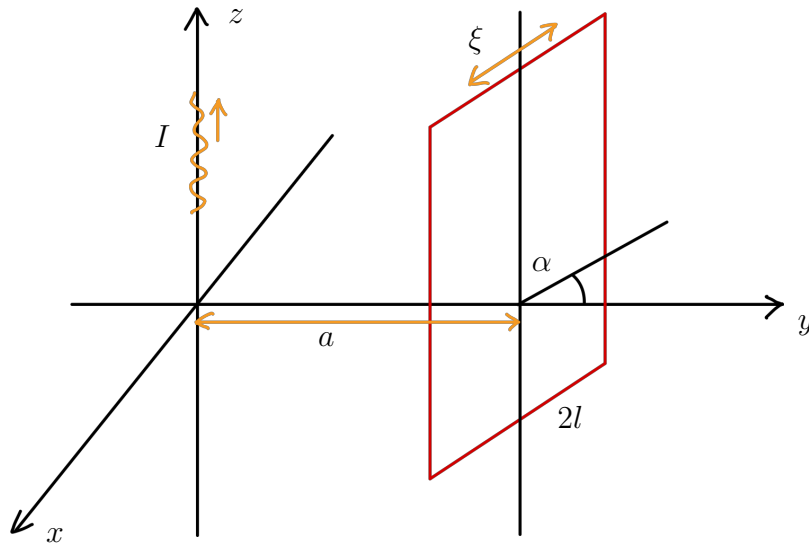
$$S = \int_{(S^{n-1}, i_+)} \Omega = \int_{(S^{n-1}, i_+)} \sqrt{\det g_{|S^{n-1}}} d\phi^1 \wedge \cdots \wedge d\phi^{n-1}$$

Rachunkowo to ta sama całka co poprzednio z pominięciem całki po r , wobec tego

$$= \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!} R^{2k-1}, & n = 2k \\ \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!} R^{2k}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Przy czym pamiętamy, że n to wymiar przestrzeni, w której zanurzamy.

Strumień pola przez ramkę



Rysunek 1.1: ramka

Potencjał wektorowy \vec{A} pola \vec{B} :

$$\vec{A}(x, y, z) = -K \log \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Strumień pola przez powierzchnię liczymy definiując pole normalne \vec{n} , wyznaczamy element powierzchni $d\sigma$ i całkujemy po powierzchni Σ .

$$\int_{\Sigma} (\vec{n} | \vec{x}) d\sigma$$

Wprowadźmy w otoczeniu Σ układ współrzędnych taki jaki byłby wygodny (x^1, \dots, x^n) : $\Sigma = \{x^1 = 0\}$, $\|\partial_{x^1}\| = 1$, $(\partial_{x^1} | \partial_{x^i}) = 0$. Czyli $\vec{n} = \partial_{x^1}$. Wówczas rachunki są prostsze, bo metryka wygląda:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow d\sigma = \sqrt{\det g} dx^2 \cdots dx^n$$

Weźmy nasze pole $\vec{x} = x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2 + \cdots + x^n \partial_n$. Z założenia mamy, że $(\vec{n} | \vec{x}) = x^1$, zatem:

$$\int_{\Sigma} (\vec{n} | x) d\sigma = \int_{\Sigma} x^1 \sqrt{\det g} dx^2 \cdots dx^n$$

Używając geometrii różniczkowej można prościej. Mamy powierzchnię zanurzoną $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ i formę objętości $\Omega = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Popatrzmy na pole wektorowe x zwężone z Ω (tensorowo $\Omega_{[a_1 \dots a_n]} x^{a_1}$):

$$x \lrcorner \Omega = \sqrt{\det g} (x^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n - x^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots \pm x^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1})$$

Zauważmy, że na powierzchni Σ z wyżej wybranymi współrzędnymi $x^1 = 0$, zatem przy obcięciu formy Ω do powierzchni zerują się wszystkie wedge, które zawierają dx^1 .

$$x \lrcorner \Omega|_{\Sigma} = \sqrt{\det g} x^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Licząc całkę z tej zwężonej formy,

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma,+)} x \lrcorner \Omega &= \int_{(\Sigma,+)} \sqrt{\det g} x^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_{\Sigma} x^1 \sqrt{\det g} dx^2 \cdots dx^n \end{aligned}$$

Wyrażenie po lewej stronie jest obiektem czysto geometrycznym i nie zależy od współrzędnych. Możemy więc olać tę metodę ze szczególnym układem i liczyć ten obiekt po lewej.

Wracając do naszego zadania. Mamy liczyć strumień pola $B = \text{rot } A$ czyli chcemy całkować $B \lrcorner \Omega = dG(A)$ (z definicji rotacji A), gdzie $G: TM \rightarrow T^*M$ jest iloczynem skalarnym. Użyjemy współrzędnych walcowych.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = r dr \wedge d\phi \wedge dz$$

Liczymy $G(A)$ gdzie A było dane w wyżej.

$$\begin{aligned} G(A) &= -K \log r dz \quad (\text{tensorowo } g_{ab} A^a = A_b) \\ dG(A) &= -K \frac{1}{r} dr \wedge dz = K \frac{1}{r} dz \wedge dr \end{aligned}$$

Musimy wprowadzić parametryzację ramki.

$$\begin{cases} y = a + \xi \cos \alpha \\ x = -\xi \sin \alpha \\ z = z \end{cases}, \quad \xi \in [-l, l], z \in [-l, l]$$

Formę zdefiniowaną na całym \mathbb{R}^3 musimy obciąć do samej ramki.

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ 2r dr &= 2x dx + 2y dy \\ dr &= \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy = \frac{1}{r} (\xi \sin \alpha (d\xi) \sin \alpha + (a + \xi \cos \alpha) d\xi \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{r} (a \cos \alpha + \xi) d\xi \end{aligned}$$

Teraz możemy liczyć dalej.

$$\begin{aligned} dG(A) &= K \frac{1}{r} dx \wedge dr \\ dG(A)|_{\Sigma} &= K \frac{1}{r} dz \wedge \left(\frac{1}{r} (a \cos \alpha + \xi) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{r^2} K (a \cos \alpha + \xi) dz \wedge d\xi \\ r^2 &= \xi^2 + a^2 + 2a\xi \cos \alpha \end{aligned}$$

Liczymy ostatecznie całkę.

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma,+)} dG(A) &= \int_{\Sigma} -\frac{1}{r^2} K (a \cos \alpha + \xi) d\xi dz \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-l}^l dz \int_{-l}^l d\xi K \frac{2a \cos \alpha + 2\xi}{a^2 + 2a\xi \cos \alpha + \xi^2} \end{aligned}$$

Licznik jest pochodną mianownika po ξ . Funkcja nie zależy też od z .

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} 2lK \ln(a^2 + 2al \cos \alpha + l^2) \Big|_{-l}^l \\ &= -Kl \ln \left(\frac{a^2 + 2al \cos \alpha + l^2}{a^2 - 2a\xi \cos \alpha + l^2} \right) \\ &= Kl \ln \left(\frac{a^2 + l^2 - 2al \cos \alpha}{a^2 + l^2 + 2al \cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

Policzyliśmy strumień pola B bez liczenia pola B . Ale teraz to pole też możemy prosto wyliczyć bo znamy jego ogólną postać ze wzoru ze zwężeniem.

$$B = \frac{K}{r^2} \partial_{\phi} = \frac{K}{r} \vec{e}_{\phi}$$

Wykład 2: Lemat Poincare

19 paź 2020

Niech $\alpha \in \Omega^k(M)$. Jeśli $d\alpha = 0$ to forma jest zamknięta. Jeśli $\alpha = d\beta$ to forma jest zupełna. Poza tym $d^2 = 0$. Stąd **każda forma zupełna jest zamknięta**.

Zadamy pytanie czy jest implikacja w drugą stronę oraz jak szukać formy pierwotnej.

Przykład zastosowania B, A oraz $B = \text{rot } A$, czyli $B \lrcorner \Omega = dG(A)$. Zatem szukanie formy pierwotnej sprowadza się do szukania potencjału wektorowego pola. Pole, które może mieć potencjał wektorowy to $d(B \lrcorner \Omega) = \text{div}(B) = 0$, czyli pole, które ma zerową dywergencję. $\text{div } B$ jest formą zamkniętą i ma swój potencjał wektorowy, czyli jest formą zupełną.

$E = \text{grad } \phi$, czyli $G(E) = d\phi$. Forma, która jest różniczką (forma zupełna) ma z kolei zerową rotację. $\text{rot } E \lrcorner \Omega = dG(E) = d^2\phi = 0$.

Przykład motywacyjny

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2}, \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ d\alpha &= d\left(\frac{y \, dx}{x^2 + y^2}\right) - d\left(\frac{x \, dy}{x^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \wedge dx - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} [y^2 - x^2 - y^2 + x^2] dx \wedge dy \\ &= 0\end{aligned}$$

Forma α jest formą zamkniętą. Czy α jest formą zupełną? Jaka to funkcja?...

Forma pierwotna do 1-formy na \mathbb{R}^2

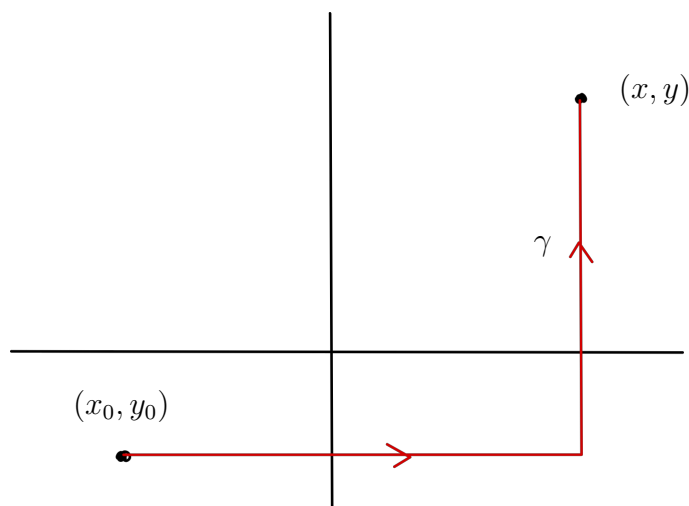
Najpierw najprostszy przypadek. Weźmy 1-formę $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $d\beta = 0$. $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}\beta &= f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy \\ d\beta &= f_y(x, y) \, dy \wedge dx + g_x(x, y) \, dx \wedge dy \\ &= (g_x - f_y) \, dx \wedge dy\end{aligned}$$

Stąd jest warunek na zerowanie się formy:

$$g_x = f_y$$

Weźmy $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $dh = \beta$. Proponujemy to jako funkcję pierwotną dla formy β .



Rysunek 1.2: Ścieżka całkowania.

$$h(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt$$

Funkcje podcałkowe są gładkie, zatem są ciągłe i możemy używać twierdzeń dla całek z parametrem.

$$dh = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x f(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y g(x, t) dt \right) dy$$

Przy różniczkowaniu funkcji podcałkowych dużo się upraszcza, zatem:

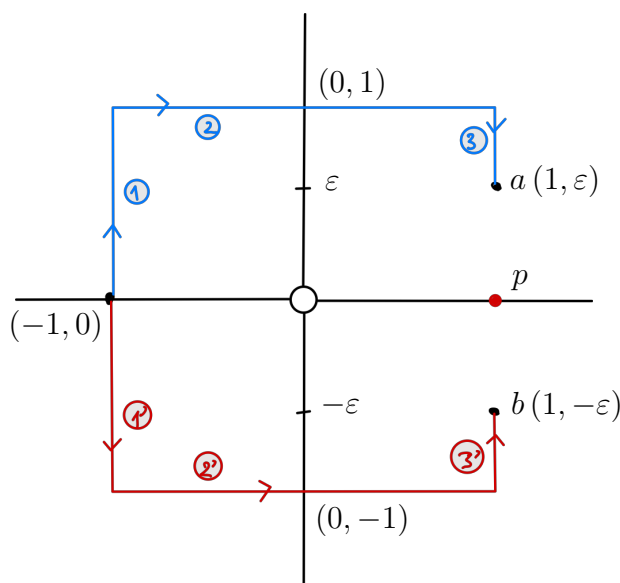
$$= \left[f(x, y_0) + \int_{y_0}^y g_x(x, t) dt \right] dx + [g(x, y)] dy$$

Warunek z góry możemy dać nam $g_x = f_y$.

$$\begin{aligned} &= \left[f(x, y_0) + \int_{y_0}^y f_t(x, t) dt \right] dx + g(x, y) dy \\ &= [f(x, y_0) + f(x, y) - f(x, y_0)] dx + g(x, y) dy \\ &= f(x, y) dx + g(x, y) dy = \beta \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że h jest funkcją pierwotną dla formy β . Przepis na tę formę obejmował całkowanie formy po pewnej arbitralnie ustalonej drodze. Cały rachunek zależał od tego gdzie się postawi (x_0, y_0) . To wskazuje na fakt, że funkcja pierwotna nie jest jednoznacznie wyznaczona. Ustalanie początkowego punktu powoduje zmianę funkcji pierwotnej o stałą.

Teraz pora na jakiś przykład nie istnienia formy pierwotnej.



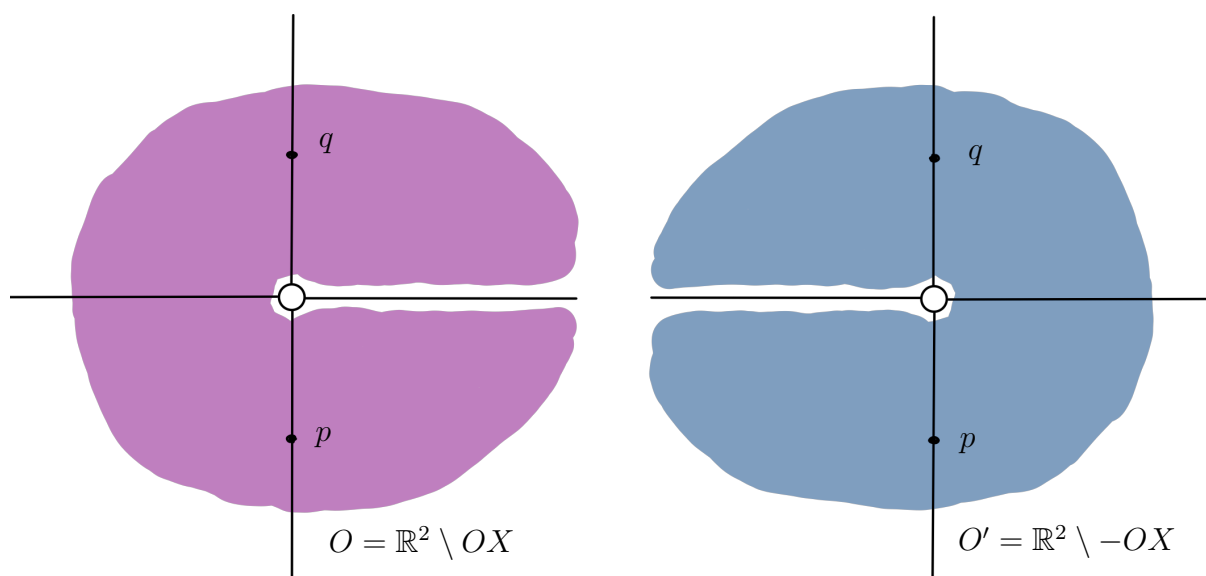
Rysunek 1.3: Dwie równoważne drogi całkowania.

Weźmy formę $\alpha = \frac{y}{r^2} dx - \frac{x}{r^2} dy$. Naturalnie ta forma jest zdefiniowana na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Liczymy pomocnicze całki.

$$\begin{aligned} \int \frac{y dx}{x^2 + y^2} &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C \\ \int \frac{x dy}{x^2 + y^2} &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C \\ h(a) &= \underbrace{-\arctan\left(\frac{y}{-1}\right)\bigg|_0^1}_1 + \underbrace{\arctan\left(\frac{x}{1}\right)\bigg|_{-1}^1}_2 - \underbrace{\arctan\left(\frac{y}{1}\right)\bigg|_1^\varepsilon}_3 \\ &= -\arctan(-y)\bigg|_0^1 + \arctan(x)\bigg|_{-1}^1 - \arctan(y)\bigg|_1^\varepsilon \\ &= \pi - \arctan \varepsilon \\ h(b) &= \underbrace{-\arctan(-y)\bigg|_0^{-1}}_{1'} + \underbrace{\arctan(-x)\bigg|_{-1}^1}_{2'} - \underbrace{\arctan(y)\bigg|_{-1}^\varepsilon}_{3'} \\ &= -\pi + \arctan \varepsilon \end{aligned}$$

Teraz dążymy do punktu p , zatem $a, b \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} p$. Otrzymujemy $h(a) \rightarrow \pi$ oraz $h(b) \rightarrow -\pi$. Dostajemy różne wyniki, zatem nasz przepis zawiódł. Okazuje się, że niezależnie od wybranego przepisu będzie źle.

Wprowadźmy sobie dwa biegunowe układy współrzędnych na tym obszarze.



Rysunek 1.4: Dwa biegunowe układy współrzędnych.

$$O: \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}, \phi \in (0, 2\pi), \quad O': \begin{cases} x = r' \cos \phi' \\ y = r' \sin \phi' \end{cases}, \phi' \in (-\pi, \pi)$$

Zauważmy, że nasza forma wyraża się w tych współrzędnych jako: $\alpha = -d\phi = -d\phi'$. Stąd,

$$h_0(r, \phi) = -\phi, \quad h_1(r', \phi') = -\phi'$$

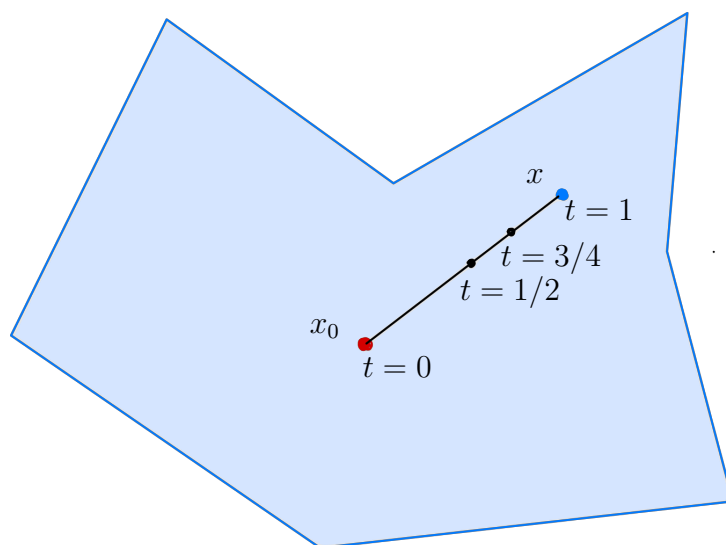
Gdyby istniała funkcja f której szukamy, dobrze określona na całym $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ to te funkcje h musiałyby się różnić od f o stałą: $f = h_0 + \phi_0 = h_1 + \phi_1$. Policzmy sobie $f(p)$ i $f(q)$.

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{3\pi}{2} + \phi_0 = -\frac{\pi}{2} + \phi_1 \\ \phi_1 &= \phi_0 + 2\pi \\ f(q) &= \frac{\pi}{2} + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + \phi_1 \\ \phi_0 &= \phi_1 \end{aligned}$$

To jest sprzeczność. Nie da się więc dobrać takich stałych, aby dostać funkcję określoną na całym \mathbb{R}^2 (dla tej formy). Czyli dla formy α nie istnieje funkcja pierwotna. Widzimy więc, że nie zawsze da się znaleźć formę pierwotną. Muszą być jakieś nietrywialne założenia. Póki co widzimy, że jeśli 1-forma jest określona na całym \mathbb{R}^2 to da się znaleźć funkcję pierwotną, ale jeśli mamy wyjęty punkt $(0, 0)$ to nie musi się dać.

Wykład 3: Dowód Lematu Poincare

Definicja 1 (Obszar gwiaździsty). Obszar nazywamy gwiaździstym względem punktu x_0 , jeśli wraz z każdym punktem x zawiera cały odcinek łączący x i x_0 .



Rysunek 1.5: Obszar gwiaździsty.

Twierdzenie 2 (Lemat Poincare). Każda forma zamknięta α : $d\alpha = 0$ na obszarze gwiaździstym w \mathbb{R}^n jest zupełna, czyli $\alpha = d\beta$.

Wystarczy, żeby zbiór był gwiaździsty względem dowolnego punktu.

Dla dowolnych powierzchni zbiór musi być ściągalny.

Dowód. Dowód jest konstruktywny, czyli zapewnia nam metodę szukania takich form pierwotnych. Niech O – obszar gwiaździsty w \mathbb{R}^n względem 0 , otwarty. Definiujemy odwzorowanie F :

$$[0, 1] \times O \ni (t, x) \xrightarrow{F} tx \in O$$

Przykładowo, $F(1, \cdot) = \text{id}_O$, $F(0, \cdot) = 0$. Generalnie, F nosi nazwę odwzorowania ściągającego. Potrzebujemy jeszcze odwzorowania na przestrzeni form różniczkowych.

$$\Omega^{k+1}([0, 1] \times O) \xrightarrow{K} \Omega^k(O)$$

Jest to liniowe odwzorowanie ze względu na mnożenie przez liczby (nie przez funkcje). Możemy oddzielnie zdefiniować 2 typy form, które mogą się pojawić.

$$\begin{aligned} a(t, x) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ b(t, x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}} \end{aligned}$$

Dla tego drugiego rodzaju form odwzorowanie znika:

$$K\left(b(t, x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k+1}}\right) = 0$$

Dla pierwszego rodzaju,

$$K\left(a(t, x) dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \left(\int_0^1 a(t, x) dt\right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Będziemy chcieli udowodnić, że $dK(F^*\alpha) + K(dF^*\alpha) = \alpha$. Teraz po prostu sprawdzamy rachunkowo ten wzór. $\alpha = \alpha(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(O)$.

Zacniemy od pullbacku formy α .

$$F^*\alpha = \alpha(tx^1, \dots, tx^n) dt x^{i_1} \wedge \dots \wedge \underbrace{dx^{i_k}}_{t dx^{i_k} + x^{i_k} dt}$$

Mamy iloczyn zewnętrzny, zatem pojawiają się wyrazy albo z $1 dt$ albo t w ogóle się nie pojawia.

$$= \underbrace{\alpha(tx) t^k dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{\text{nie daje wkładu do } K} + \sum_{m=1}^k t^{k-1} x^{i_m} (-1)^{m-1} \alpha(tx) dt \wedge \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{\text{bez } i_m}$$

Teraz liczymy następną rzecz:

$$K(F^*\alpha) = \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \left(\int_0^1 x^{i_m} \alpha(tx) t^{k-1} dt \right) \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{\text{bez } i_m}$$

Teraz różniczkujemy po x :

$$\begin{aligned} dK(F^*\alpha) &= \sum_{n=1}^k \underbrace{(-1)^{m-1}}_{\text{znika}} \left(\int_0^1 \alpha(tx) t^{k-1} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m} \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge \underbrace{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}}_{\text{bez } i_m} \\ &= k \left(\int_0^1 \alpha(tx) t^{k-1} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \left(\text{druga część} \right) \end{aligned}$$

Teraz liczymy różniczkę $dF^*\alpha = F^*d\alpha$.

$$\begin{aligned} F^*d\alpha &= F^* \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \\ &= t^{k+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x^j}(tx) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + t^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial x^j}(tx) x^j dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + t^k \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j}(tx) x^{i_m} (-1)^m dt \wedge dx^j \wedge \underbrace{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}}_{\text{bez } i_m} \end{aligned}$$

Pierwszy składnik nie daje wkładu do K .

$$\begin{aligned} K(dF^*\alpha) &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 x^j t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^m x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^j \wedge \underbrace{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}}_{\text{bez } i_m} \end{aligned}$$

Tak! Jakby jeszcze nie było tego widać, policzyliśmy oba składniki dowodzonej tożsamości. Teraz trzeba je dodać. Te części zawierające podwójne sumy są jednakowe z dokładnością do znaku. W związku z tym, te części mają znak przeciwny. Po dodaniu się zerują. Zostaje wówczas:

$$\begin{aligned} dK(F^*\alpha) + K(dF^*\alpha) &= k \left(\int_0^1 \alpha(tx) t^{k-1} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 x^j t^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \left\{ \int_0^1 \left[k t^{k-1} \alpha(tx) + t^k \sum_{j=1}^n x^j \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} \right] dt \right\} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \left\{ \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k \alpha(tx)) dt \right\} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= t^k \alpha(tx) \Big|_0^1 dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \alpha(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - 0 = \alpha \end{aligned}$$

Dowiedliśmy tego wzoru. Sprawdźmy co, jeśli $d\alpha = 0$. Wówczas,

$$K(dF^*\alpha) = K(F^*d\alpha) = 0$$

W związku z tym,

$$\alpha = dK(F^*\alpha)$$

Otrzymaliśmy więc wzór na formę pierwotną β .

Uwaga 1.

$$\beta = K(F^*\alpha)$$

■

Najlepszą metodą liczenia formy pierwotnej jest jej zgadnięcie. Metoda liczenia z lematu jest ciężka. Policzmy to sobie.

Szukanie potencjału wektorowego

Znaleźć potencjał wektorowy dla pola:

$$B(x, y, z) = (x + y) \frac{\partial}{\partial x} + (x + z) \frac{\partial}{\partial y} + (y - z) \frac{\partial}{\partial z}$$

Mówimy, że B ma potencjał wektorowy jeśli $B = \text{rot } A$. Wiemy, że $\text{rot } A \lrcorner \Omega = dG(A)$. B może więc mieć potencjał wektorowy, gdy $d(B \lrcorner \Omega) = 0$, czyli $(\text{div } B)\Omega = 0$. Policzmy więc dywergencję naszego pola.

$$\text{div } B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 1 + 0 - 1 = 0$$

Pole jest określone na całym \mathbb{R}^3 , możemy więc skorzystać z lematu Poincare. W naszym przypadku pole przerobimy na formę zwięzając je z formą objętości na \mathbb{R}^3 .

$$\omega = B \lrcorner \Omega = (x + y) dy \wedge dz + (x + z) dz \wedge dx + (y - z) dx \wedge dy$$

Szukamy formy pierwotnej do powyższej formy. Forma pierwotna powinna być postaci $K(F^*\omega)$.

$$\begin{aligned} F: [0, 1] \times \mathbb{R}^3 &\ni (t, x, y, z) \mapsto (tx, ty, tz) \in \mathbb{R}^3 \\ F^*\omega &= (tx + ty) d(ty) \wedge d(tz) + (tx + tz) d(tz) \wedge d(tx) + (ty - tz) d(tx) \wedge d(ty) \\ &= t^2(x + y)y dt \wedge dz - t^2(x + y)z dt \wedge dy + t^3(x + y) dy \wedge dz \\ &\quad + t^2(x + z)z dt \wedge dx - t^2(x + z)x dt \wedge dz + t^3(x + z) dz \wedge dx \\ &\quad + t^2(y - z)x dt \wedge dy - t^2(y - z)y dt \wedge dx + t^3(y - z) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Wyrażenia bez dt nie dają wkładu do K . Porządkujemy to, co ma dt .

$$\begin{aligned} &= t^2(xy + y^2 - x^2 - xz) dt \wedge dz + t^2(-xz - yz + xy - xz) dt \wedge dy \\ &\quad + t^2(xz + z^2 - y^2 + yz) dt \wedge dx + R(x, y, z) \end{aligned}$$

Liczymy całkę pomocniczą: $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

$$K(F^*\omega) = \frac{1}{3}(xz + z^2 - y^2 + yz) dx + \frac{1}{3}(xy - 2xz - yz) dy + \frac{1}{3}(xy + y^2 - x^2 - xz) dz$$

Teraz należałoby sprawdzić, że to jest dobra forma pierwotna, bo lemat Poincare jest błędogeny. Załóżmy, że to sprawdziliśmy i się zgadza.

Pytano o potencjał wektorowy, więc musimy przejść do postaci wektorowej.

$$A = G^{-1}(\alpha)$$

Na szczęście we współrzędnych kartezjańskich iloczyn G i G^{-1} są takie same, zatem:

$$A = \frac{1}{3}(xz + z^2 - y^2 + yz) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}(xy - 2xz - yz) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{3}(xy + y^2 - x^2 - xz) \frac{\partial}{\partial z}$$

Definicja 2 (Ściąganie do punktu a). Uwaga! Jeśli nie ściągamy do punktu 0, tylko $a \in \mathbb{R}^n$, to odwzorowanie ściągające definiujemy następująco:

$$[0, 1] \times O \ni (t, x) \xrightarrow{F} a + t(x - a) \in O$$

Wstęp do twierdzenia Stokesa

Zacznijmy od rachunku motywacyjnego. Jesteśmy na \mathbb{R}^2 . Biorę jakąkolwiek 1-formę.

$$\begin{aligned}\alpha &= f(x, y) dx + g(x, y) dy \\ d\alpha &= [g_x(x, y) - f_y(x, y)] dx \wedge dy\end{aligned}$$

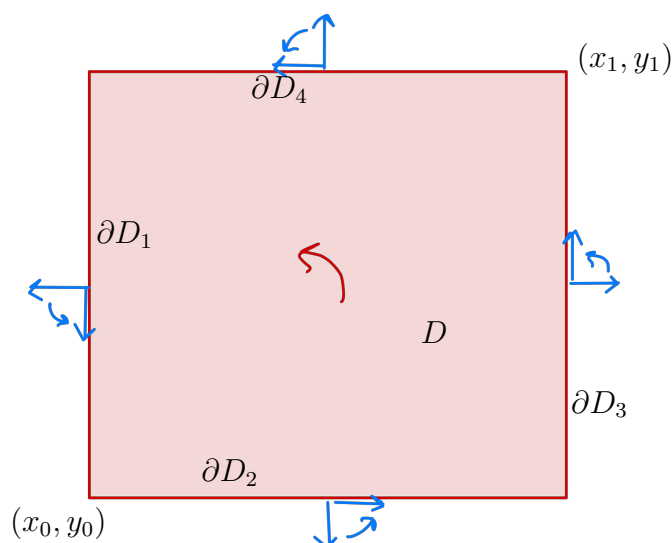
Będziemy liczyli całkę z tej formy po prostokącie.

$$\begin{aligned}\int_{(D,+)} d\alpha &= \int_{(D,+)} [g_x - f_y] dx \wedge dy \\ &= \int_D (g_x - f_y) dx dy \\ &= \int_D g_x dx \wedge dy - \int_D f_y dx dy \\ &= \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} g_x(x, y) dx - \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f_y dy \\ &= \int_{y_0}^{y_1} dy [g(x_1, y) - g(x_0, y)] - \int_{x_0}^{x_1} dx [f(x, y_1) - f(x, y_0)] \\ &= \int_{y_0}^{y_1} g(x_1, y) dy + \int_{y_1}^{y_0} g(x_0, y) dy + \int_{x_1}^{x_0} f(x_1, y) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0) dx\end{aligned}$$

Jak się spojrzy to widać, że odpowiednie całki odpowiadają całkowaniu po brzegach naszego prostokąta.

$$= \int_{(\partial D_3, \partial +)} \alpha + \int_{(\partial D_1, \partial +)} \alpha + \int_{(\partial D_4, \partial +)} \alpha + \int_{(\partial D_2, \partial +)} \alpha$$

Orientację dobieramy tak, że pierwszy wektor rysuję na zewnątrz obszaru, dobieram drugi tak by orientacja była taka sama jak wyjściowa, wtedy drugi wektor wskazuje kierunek całkowania.



Rysunek 1.6: prostokąt

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Stokesa). Niech M będzie zwartą zorientowaną powierzchnią z brzegiem wymiaru n i niech ω będzie $(n-1)$ -formą na M . Wówczas,

$$\int_{(M, \iota)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial \iota)} \omega$$

Wykład 4: Twierdzenie Stokesa

Rozmaitość z brzegiem

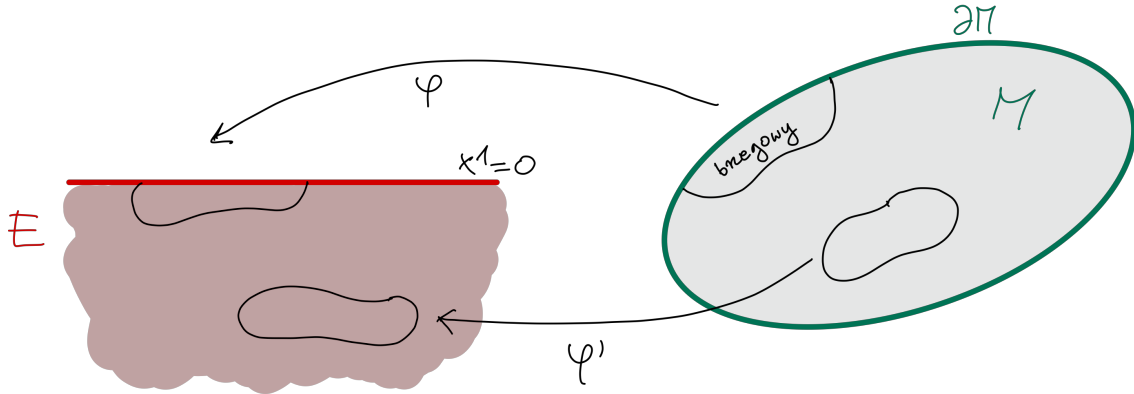
26 paź 2020

Wzorcową rozmaitość z brzegiem nazwalibyśmy podzbiór $E \subset \mathbb{R}^n$: $E = \{(x^1, \dots, x^n) : x^1 \leq 0\}$, gdzie zbiory otwarte w E to zbiory otwarte w \mathbb{R}^n przecięte z E . Brzeg takiej rozmaitości określilibyśmy jako $\partial E = \{x^1 = 0\}$. Możemy mieć dwa typy zbiorów otwartych:

- $O \cap E = O$ (zwykły)
- $U \cap E \neq U$ (zawiera kawałek brzegu)

Dwa typy zbiorów otwartych odpowiadają dwóm typom układów współrzędnych – brzegowy lub wewnętrzny.

Definicja 3 (Gładka rozmaitość z brzegiem). M jest gładką rozmaitością z brzegiem, jeśli dla każdego $q \in M$ istnieją zbiory otwarte $V \subset M$ i $U \subset E$ oraz homeomorfizm $\phi: V \rightarrow U$ taki, że jeśli $V \cap V' \neq \emptyset$, odwzorowanie $\phi' \circ \phi^{-1}$ jest gładkie tam, gdzie określone.



Rysunek 1.7: Rozmaitość z brzegiem.

Uwaga 2. ∂M jest gładką rozmaitością bez brzegu.

Dowód. Jeśli $(V_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest atlasem na M , to możemy wybrać tylko te układy brzegowe i zdefiniować otwarte pokrycie brzegu: $(\tilde{V}_\beta, \phi_\beta)_{\beta \in B}$ gdzie $\tilde{V}_\beta = V_\beta \cap \partial M$, $B = \{\alpha \in A: V_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset\}$ jest atlasem ∂M . Dostajemy zwyczajną rozmaitość z wymiarem o 1 mniejszym. ■

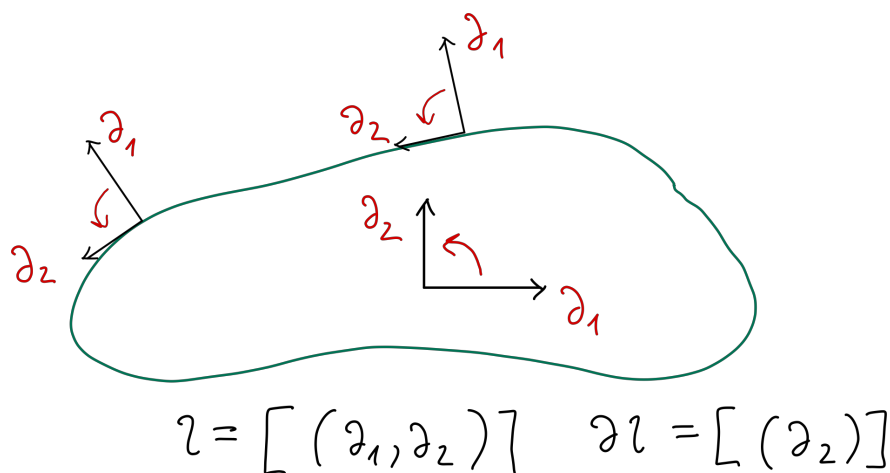
Twierdzenie 4. M jest orientowalna, czyli można wybrać na niej atlas zgodny – takie pokrycie dziedzinami układów współrzędnych, że macierze przejścia między poszczególnymi bazami mają dodatni wyznacznik. Wówczas ∂M też jest orientowalna.

Dowód. Bierzymy dowolne dwa układy brzegowe, o pewnym przecięciu. Obcinamy je do samego brzegu i patrzymy czy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Macierz przejścia to obcięta macierz przejścia między całymi układami na M o cały pierwszy rząd i kolumnę ($x^1 = 0 = y^1$). Skoro cała wyjściowa macierz ma dodatni wyznacznik i a_{11} jest dodatnie, to cała obcięta podmacierz też ma dodatni wyznacznik. ■

Skoro ∂M też jest orientowalna, to opisujemy orientację indukowaną jako tą, która powstaje poprzez usunięcie pierwszych współrzędnych x^1, y^1 .

Definicja 4 (Orientacja indukowana). Posługując się klasami równoważności,

$$\begin{aligned} \iota &= [(\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \dots, \partial_{x^n})] \\ \partial \iota &= [(\partial_{x^2}, \dots, \partial_{x^n})] \end{aligned}$$



Rysunek 1.8: Orientacja 1-wymiarowego brzegu.

Gładki rozkład jedności

Definicja 5. Gładkim rozkładem jedności na M związanym z atlasem $(O_i, \phi_i)_{i \in I}$ nazywamy układ gładkich funkcji $(\alpha_i)_{i \in I}$ o własnościach:

1. $\text{supp } \alpha_i \subset O_i$
2. każdy punkt $q \in M$ ma otoczenie U takie, że $U \cap \text{supp } \alpha_i \neq \emptyset$ jedynie dla skończonej liczby indeksów i .
3. $0 \leq \alpha_i \leq 1, \forall p \in M \sum_{i \in I} \alpha_i(p) = 1$

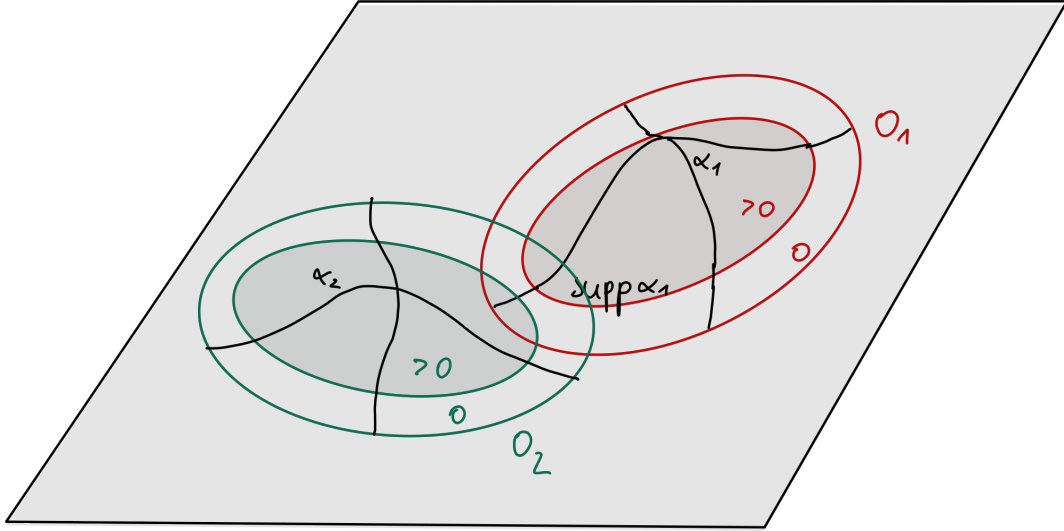
Definicja 6 (Rozmaitość parazwarta). Dla każdego pokrycia otwartego istnieje drobniejsze od niego pokrycie lokalnie skończone – każdy punkt rozmaitości ma otoczenie otwarte, które ma niepusty przekrój jedynie ze skończoną liczbą elementów tego pokrycia.

Twierdzenie 5 (bez dowodu). Na rozmaitości parazwartej istnieje gładki rozkład jedności.

Gładki rozkład jedności może się nam przydać do całkowania po dużych obszarach. Co jeśli obszar całkowania D nie mieści się całkowicie w jednym układzie współrzędnych?

$$\int_{(D, i)} \omega = \int_{(D, i)} \omega \sum_{j \in J} \alpha_j = \sum_{j \in J} \int_{(O_j \cap D, i)} \alpha_j \omega$$

gdzie $O_j \cap D \neq \emptyset$ jedynie dla skończonej liczby indeksów, bo D jest zwarty.



Rysunek 1.9: Gładki rozkład jedności.

Ciekawostka Do konstrukcji gładkich rozkładów jedności używa się funkcji gładkich o zwartym nośniku, takich jak:

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right), & x \in (1, 2) \\ 0, & x \notin (1, 2) \end{cases}$$

Dowód twierdzenia Stokesa

Niech M będzie zwartą rozmaitością z brzegiem. $(O_i, \phi_i)_{i \in I}$ jest skończonym atlasem zgodnym, z orientacją. Mamy też odpowiedni rozkład jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$.

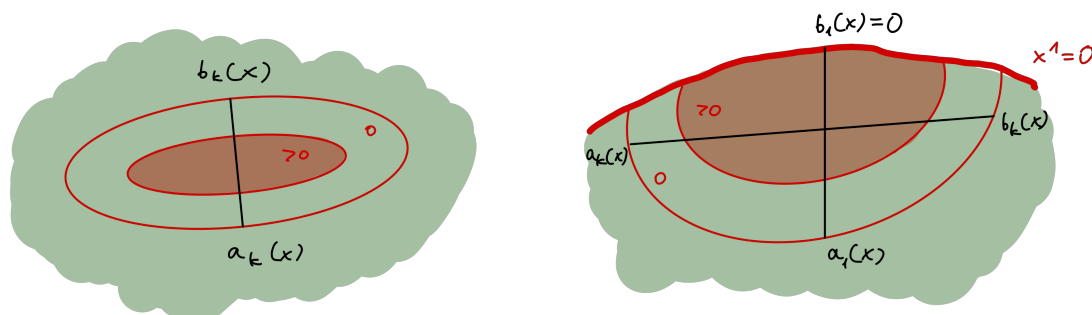
Dowód.

$$\begin{aligned} d\omega &= d(1 \cdot \omega) = d\left(\omega \sum \alpha_i\right) = \sum_i d(\alpha_i \omega) \\ \int_{(M, \iota)} d\omega &= \sum \int_{(O_i, \iota)} d(\alpha_i \omega) \end{aligned}$$

Różniczkowane formy można zapisać w odpowiednich układach współrzędnych. $\alpha_i \omega = f_k^i(x) dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n$, gdzie indeks k oznacza, że nie ma dx_i^k . Dla każdego i liczymy osobno.

$$\begin{aligned} \int_{(\phi_i(O_i), \iota)} d\left(f_k^i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\right) &= \int_{(\phi_i(O_i), \iota)} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\partial f_k^i}{\partial x^k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_k (-1)^{k-1} \int_{\phi_i(O_i)} \frac{\partial f_k^i}{\partial x^k} dx^1 \dots dx^n \\ &= \sum_k (-1)^{k-1} \int_{D_k} \underbrace{dx^1 \dots dx^n}_{\text{bez } x^k} \int_{a_k(x^2, \dots)}^{b_k(x^2, \dots)} \frac{\partial f_k^i}{\partial x^k} dx^k = (*) \end{aligned}$$

Jeśli układ współrzędnych jest wewnętrzny, to $f_k^i = 0$ poza zwartym zbiorem, czyli na granicach całkowania. Tak samo wygląda sytuacja, gdy układ jest brzegowy, ale całkujemy po zmiennej innej niż x^1 . Wkład niezerowy dostajemy więc tylko dla układu brzegowego i $k = 1$.



Rysunek 1.10: Możliwe obszary i granice całkowania.

Zobaczmy co się dzieje dla $k = 1$. Wówczas całkować kończymy na brzegu, zatem $b_k(x) = b_1(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{D_1} dx^2 \cdots dx^n \int_{a_1(x)}^{b_1(x)} \frac{\partial f_1^i}{\partial x^1} dx^1 &= \int_{D_1} dx^2 \cdots dx^n f_1^i(0, x^2, \dots, x^n) \\ \int_{(M,i)} d\omega &= \sum_i (*) = \sum_i \int_{\phi_i(O_i) \cap \{x^1=0\}} f_1^i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n \end{aligned}$$

Rozkład jedności obcięty do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu.

$$\begin{aligned} &= \sum_i \int_{(O_i \cap \partial M, \partial \iota)} (\alpha_i \omega)(0, \dots) \\ &= \int_{(\partial M, \partial \iota)} \omega \end{aligned}$$

■

Klasyczne wersje twierdzenia Stokesa

Definicja 7 (Klasyczne operatory). Niech $\Omega = \sqrt{\det G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ będzie formą objętości.

Gradient $\text{grad}(f)$:

$$\text{grad}(f) = G^{-1} \circ df$$

Dywergencja $\text{div}(X)$:

$$\text{div}(X)\Omega = d(X \lrcorner \Omega)$$

Rotacja $\text{rot}(A)$:

$$\text{rot}(A) \lrcorner \Omega = d(G \circ A)$$

Laplasjan Δf :

$$(\Delta f)\Omega = d[(G^{-1} \circ df) \lrcorner \Omega]$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego-Greena

$$\int_D \text{div } X \, d\vartheta = \int_{\partial D} (\vec{n} \mid X) \, d\sigma$$

gdzie $\dim D = 3$.

Dowód. Przetłumaczamy pojawiające się wyrażenia na język form różniczkowych.
 $d\vartheta$ – element objętości, czyli forma objętości Ω ,
 $d\sigma$ – element powierzchni, czyli forma objętości na powierzchni związana z $g|_{\partial D}$ i orientacją indukowaną – Σ . Wzór przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \int_{(D, \imath)} (\text{div } X)\Omega &= \int_{(\partial D, \partial \imath)} (\vec{n} \mid X)\Sigma \\ \int_{(D, \imath)} (\text{div } X)\Omega &= \int_{(D, \imath)} d(X \lrcorner \Omega) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{(\partial D, \partial \imath)} X \lrcorner \Omega \end{aligned}$$

Formy objętości definiujemy we współrzędnych. Wybierzmy współrzędne takie, że w dziedzinie O układu mamy:

$$O \cap \partial D = \{x^1 = 0\}, \quad \vec{n} = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \mid \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = 0$$

dla $i > 1$. Jeśli nie uda się to na całym D , to korzystamy wówczas z rozkładu jedności.

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\det G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ \Sigma &= \sqrt{\det G|_{\partial D}} dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned}$$

Oba wyznaczniki są jednak równe.

$$X \lrcorner \Omega = \sqrt{\det G} (X^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n - X^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots)$$

Wszystkie człony z dx^1 są zerowe, bo obcieliśmy do $x^1 = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{(\partial D, \partial \iota)} X \lrcorner \Omega &= \int_{(\partial D, \partial \iota)} X^1 \sqrt{\det G} dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_{(\partial D, \partial \iota)} (\vec{n} \mid X) \Sigma = \int_{\partial D} (\vec{n} \mid X) d\sigma\end{aligned}$$

■

Klasyczne twierdzenie Stokesa

$$\int_S (\vec{n} \mid \operatorname{rot} X) d\sigma = \int_{\partial S} (\vec{t} \mid X) dl$$

gdzie $\dim S = 2$, \vec{n} jest wektorem normalnym do powierzchni, \vec{t} wektorem stycznym do krzywej będącej brzegiem powierzchni, a dl elementem długości tej krzywej.

Dowód. Dowodząc poprzedniego twierdzenia udało nam się ustalić, że:

$$\int_S (\vec{n} \mid A) d\sigma = \int_{(S, \iota)} A \lrcorner \Omega$$

Weźmy więc $A = \operatorname{rot} X$.

$$\begin{aligned}\int_S (\vec{n} \mid \operatorname{rot} X) d\sigma &= \int_{(S, \iota)} \operatorname{rot} X \lrcorner \Omega = \int_{(S, \iota)} d(G \circ X) \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{(\partial S, \partial \iota)} G \circ X\end{aligned}$$

Weźmy dowolny układ współrzędnych i rozpiszmy: $G \circ X = g_{ij} X^i dx^j$. Wybierzmy również parametryzację brzegu, zgodną z orientacją: $I \ni r \mapsto (x^1(r), x^2(r), x^3(r)) \in \partial S$.

$$\int_{(\partial S, \partial \iota)} G \circ X = \int_I g_{ij}(r) X^i(r) \dot{x}^j dr$$

Policzmy jednostkowy wektor styczny \vec{t} i inne pojawiające się wyrażenia:

$$\begin{aligned}\partial_r &= \dot{x}^1 \partial_1 + \dot{x}^2 \partial_2 + \dot{x}^3 \partial_3 = \|\partial_r\| \vec{t} \\ g_{ij} X^i \dot{x}^j &= (X \mid \partial_r) = (X \mid \vec{t}) \|\partial_r\| \\ dl &= \|\partial_r\| dr\end{aligned}$$

Stąd,

$$\int_{(\partial S, \partial \iota)} G \circ X = \int_I (\vec{t} \mid X) \|\partial_r\| dr = \int_{\partial S} (\vec{t} \mid X) dl$$

■

Wzory Greena

$$\begin{aligned}\int_D (\operatorname{grad} f \mid \operatorname{grad} h) \, d\vartheta &= - \int_D f \Delta h \, d\vartheta + \int_{\partial D} f(\vec{n} \mid \operatorname{grad} h) \, d\sigma \\ \int_D (f \Delta h - h \Delta f) \, d\vartheta &= \int_{\partial D} [f(\vec{n} \mid \operatorname{grad} h) - h(\vec{n} \mid \operatorname{grad} f)] \, d\sigma\end{aligned}$$

Dowód. Wzór drugi jest trywialnym następstwem pierwszego, skupimy się więc na udowodnieniu pierwszego z nich.

$$\int_{\partial D} f(\vec{n} \mid \operatorname{grad} h) \, d\sigma = \int_{\partial D} (\vec{n} \mid f \operatorname{grad} h) \, d\sigma$$

Z twierdzenia, Ostrogradskiego-Greena,

$$= \int_D \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) \, d\vartheta$$

Przyjrzyjmy się tej dywergencji,

$$\operatorname{div}(fX)\Omega = d[(fX) \lrcorner \Omega] = d[f(X \lrcorner \Omega)] = df \wedge (X \lrcorner \Omega) + f d(X \lrcorner \Omega)$$

Przyjrzyjmy się pewnemu wyrażeniu, które się zaraz przyda:

$$0 = X \lrcorner (df \wedge \Omega) = \langle df, X \rangle \Omega - df \wedge (X \lrcorner \Omega)$$

Stąd, w wyżej rozważanej dywergencji rozpoznajemy,

$$\operatorname{div}(fX)\Omega = \langle df, X \rangle \Omega + f \operatorname{div}(X)\Omega$$

Teraz można przekształcić całkę.

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) \, d\vartheta &= \int_D \langle df, \operatorname{grad} h \rangle \, d\vartheta + \int_D f \operatorname{div} \operatorname{grad} h \, d\vartheta \\ &= \int_D (\operatorname{grad} f \mid \operatorname{grad} h) \, d\vartheta + \int_D f \Delta h \, d\vartheta\end{aligned}$$

■

Rozdział 2

Analiza zespolona

Wykład 5: Różniczkowanie w sensie zespolonym

Przekształcenia \mathbb{C} -liniowe

30 paź 2020

\mathbb{C} można traktować jak dwuwymiarową przestrzeń wektorową nad \mathbb{R} lub jednowymiarową przestrzeń wektorową nad \mathbb{C} . \mathbb{C} jako zbiór to jest \mathbb{R}^2 , zatem:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & f(x,y) &= (u(x,y), v(x,y)) \end{aligned}$$

Jak różniczkować funkcje $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ doskonale wiemy.

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + f'(x,y) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + R(\dots)$$

Ta pochodna to jest odwzorowanie $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, czyli macierz 2×2 . Ale można też na to spojrzeć w ujęciu 1-wymiarowej przestrzeni nad \mathbb{C} . Odwzorowania liniowe $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polegają na mnożeniu przez liczbę zespoloną: $z \mapsto wz$. Każde odwzorowanie \mathbb{C} -liniowe jest \mathbb{R} -liniowe. Niech $w = a + ib$, $z = x + iy$.

$$x + iy \mapsto (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Spróbujmy to zapisać jako mnożenie macierzy.

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{bmatrix}$$

Czyli odwzorowania \mathbb{C} -liniowe to są szczególne odwzorowania \mathbb{R} -liniowe zapisane takimi macierzami.

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{C} &\rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ a + ib &\mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Odwzorowanie to ma szczególne własności:

$$\begin{aligned} \det(\psi(a+ib)) &= |a+ib|^2 \\ \psi(a+ib) &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Innymi słowy, jest to skalowanie + obrót, tzn. złożenie jednokładności z obrotem.

Różniczkowanie w sensie rzeczywistym i zespolonym

Z punktu widzenia rzeczywistego, możemy zapisać:

$$f(x + \delta x + i(y + \delta y)) = f(x + iy) + f'(x + iy) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + R(x + iy, \delta x + i\delta y)$$

$$f'(x + iy) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Definicja 8 (Różniczkowalność w sensie rzeczywistym). f jest różniczkowalna w punkcie $z = x + iy$ (w sensie rzeczywistym) jeśli istnieje $f'(z)$, czyli odwzorowanie \mathbb{R} -liniowe $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że reszta spełnia:

$$\frac{|R(x + iy, \delta x + i\delta y)|}{|\delta x + i\delta y|} \xrightarrow{\delta x + i\delta y \rightarrow 0} 0$$

Definicja 9 (Różniczkowalność w sensie zespolonym). f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w $z = x + iy$ jeśli jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym i $f'(z)$ jest odwzorowaniem \mathbb{C} -liniowym.

Oznacza to, że:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Te dwie równości nazywamy warunkami Cauchy'ego-Riemanna. Wówczas,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \dots$$

Przykład $f: z \mapsto z^2$

$$(x + iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$f'(z) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

$$f'(z) = 2x + i2y = 2z$$

Czyli de facto,

$$(z^2)' = 2z$$

Czy działa stary wzór na pochodną z granicą ilorazu różnicowego? Na \mathbb{R}^2 iloraz różnicowy niezbyt da się zapisać, ale na \mathbb{C} już tak. Pytamy czy:

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}$$

Okazuje się, że rzeczywiście ten wzór działa.

Twierdzenie 6. f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie $z \iff$ istnieje granica ilorazu różnicowego. Wówczas granica ta jest pochodną $f'(z)$.

Dowód. Najpierw w prawo.

$$f(z + \delta z) = f(z) + f'(z)\delta z + R(z, \delta z)$$

$$f(z + \delta z) - f(z) = f'(z)\delta z + R(z, \delta z)$$

$$\frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} = f'(z) + \frac{R(z, \delta z)}{\delta z}$$

Teraz chcemy przejść do granicy przy $\delta z \rightarrow 0$. Wiadomo, że wartość bezwzględna tej reszty rzeczywiście dąży do 0.

$$\left| \frac{R(z, \delta z)}{\delta z} \right| \xrightarrow{\delta z \rightarrow 0} 0$$

Jednakże jeśli moduł liczby zespolonej dąży do zera to również sama liczba zespolona dąży do zera. Stąd,

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} = f'(z)$$

Teraz dowodzimy w drugą stronę. Załóżmy, że:

$$\begin{aligned} w &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0: |\delta z| < \Delta &\implies \left| w - \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z} \right| < \varepsilon \\ &\implies \left| \frac{1}{\delta z} (w\delta z - f(z + \delta z) + f(z)) \right| < \varepsilon \\ &\implies \left| \underbrace{f(z + \delta z) - f(z) - w\delta z}_{R(z, \delta z)} \right| < \varepsilon \delta z \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $R(z, \delta z) \in K(0, \varepsilon \delta z)$, czyli $\frac{R(z, \delta z)}{\delta z} \in K(0, \varepsilon)$. Oznacza to, że w granicy:

$$\left| \frac{R(z, \delta z)}{\delta z} \right| < \varepsilon$$

Jest to tożsame z warunkiem zanikania reszty, zatem funkcja jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym oraz $f'(z) = w$. Ponieważ ta pochodna jest mnożeniem przez liczbę zespoloną to widzimy, że spełniony jest warunek różniczkowalności w sensie zespolonym. ■

Przykłady

$$\begin{aligned} z &\mapsto z^3 \\ \frac{(z + \delta z)^3 - z^3}{\delta z} &= \frac{3z^2\delta z + 3z(\delta z)^2 + (\delta z)^3}{\delta z} = 3z^2 + 3z\delta z + (\delta z)^2 \\ &\rightarrow 3z^2 \end{aligned}$$

Wszystko przebiega tak samo jak było w \mathbb{R} . Sprawdźmy teraz funkcję „specyficzną” zespoloną.

$$\begin{aligned} z &\mapsto \bar{z} \\ \frac{\overline{z + \delta z} - \bar{z}}{\delta z} &= \frac{\bar{z} + \overline{\delta z} - \bar{z}}{\delta z} = \frac{\overline{\delta z}}{\delta z} \end{aligned}$$

I teraz tutaj może być różnie. Jeśli $\delta z = \delta x$, czyli jeśli zmierzamy wzdłuż osi rzeczywistej, to zmierzamy do 1. Jeśli natomiast $\delta z = i\delta y$, to

$$\frac{\overline{\delta z}}{\delta z} = \frac{-i\delta y}{i\delta y} = -1$$

Stąd wniosek, że ta pochodna nie istnieje. W sensie zespolonym funkcja ta nie jest różniczkowalna, natomiast w sensie rzeczywistym jest.

Definicja 10 (Funkcja holomorficzna). Funkcję różniczkowalną w sensie zespolonym w każdym punkcie obszaru otwartego Ω nazywamy holomorficzną na Ω . Zbiór funkcji holomorficzych oznaczamy przez $\mathcal{A}(\Omega)$.

Uwaga 3. Obowiązują „zwykłe” prawa różniczkowania, znane z \mathbb{R} .

Uwaga 4. $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{A}(f(\Omega))$.

Z twierdzenia o lokalnej odwracalności dla reprezentacji $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, f^{-1} jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym oraz $(f^{-1})'(w) = 1/f'(z)$, $w = f(z)$. Trzeba jeszcze wtedy sprawdzić, że macierz $1/f'(z)$ również odpowiada mnożeniu przez liczbę zespoloną.

Operatory $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$

Będziemy myśleć o $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. W tym \mathbb{R}^2 mamy kanoniczny układ współrzędnych (x, y) . W każdym punkcie $z = (x, y) = x + iy$ możemy rozważyć przestrzeń styczną $T_z \mathbb{R}^2 = T_z \mathbb{C} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$. Jest to rzeczywista przestrzeń wektorowa.

Druga interpretacja – wektory styczne to pewne operatory różniczkowania działające na funkcje $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Czy da się je rozszerzyć na funkcje o wartościach zespolonych? Musi zachodzić podstawowy warunek:

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

Weźmy $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $g(z) = U(x, y) + iV(x, y)$. Zdefiniujmy sobie:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Zaczynamy sprawdzanie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [(u + iv)(U + iV)] = \frac{\partial}{\partial x} [uU - vV + i(uV + vU)] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} U + u \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} V - v \frac{\partial V}{\partial x} + i \left[\frac{\partial u}{\partial x} V + u \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} U + v \frac{\partial U}{\partial x} \right] \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) U + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (iV) + (u + iv) \frac{\partial U}{\partial x} + (u + iv) \frac{\partial V}{\partial x} i \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (U + iV) + (u + iv) \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned}$$

Udało nam się więc rozszerzyć $\partial/\partial x$ na funkcje o wartościach w \mathbb{C} .

Wykład 6: Funkcje holomorficzne

Definicja 11 (Kompleksyfikacja). Niech V będzie przestrzenią wektorową nad \mathbb{R} wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. W iloczynie kartezjańskim $V \times V$ wprowadzamy mnożenie przez liczbę zespoloną:

$$\begin{aligned} (x + iy)(v, w) &= (xv - yw, yv + xw) \\ V^{\mathbb{C}} &= (V \times V, \mathbb{C}, \circ, +) \end{aligned}$$

02 lis 2020

$$(T_z \mathbb{C})^{\mathbb{C}} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

Weźmy $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $f = u + iv$. Liczymy,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_0 + i \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_0 = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2i \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= 2f'(z) \end{aligned}$$

Stąd wynika pomysł, by wprowadzić oznaczenie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Wówczas, $\partial f / \partial z = f'(z)$ oraz $\partial f / \partial \bar{z} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) \right) \end{aligned}$$

Pochodne mieszane się zerują, zatem

$$= \frac{1}{4} \Delta$$

Stąd,

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v$$

Część rzeczywista i urojona laplasjanu funkcji holomorficcznych znika i takie funkcje u, v na \mathbb{R}^2 nazywamy harmonicznymi.

Baza dualna przestrzeni i formy na \mathbb{C}

Jak będzie wyglądała baza dualna? Niech $a, c \in \mathbb{C}$. Nakładamy warunki, by:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle a dx + b dy, \partial_z \rangle = \frac{1}{2}(a - ib) \\ 0 &= \langle a dx + b dy, \partial_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}(a + ib) \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu, $a = 1$, $b = i$ a zatem:

$$dz = dx + i dy$$

Analogicznie,

$$d\bar{z} = dx - i dy$$

Taka jest baza przestrzeni dualnej. Możemy więc myśleć o formach o wartościach zespolonych, całkować je po krzywych. Możemy też różniczkować zewnętrznym. Rozważmy to.

Weźmy $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ różniczkowalną w sensie rzeczywistym.

$$\begin{aligned} df &= d(u(x, y) + iv(x, y)) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \end{aligned}$$

Podmieniamy dx, dy na bazy dualne.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] dz + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] d\bar{z} \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} \right] dz + \left[\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right] d\bar{z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned}$$

Widzimy, że algebraicznie to wszystko się nam pięknie zbiera do czegoś co intuicyjnie ma dla nas sens. Co jeśli f byłaby holomorficzna? Wówczas $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, zatem

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Wiemy już, że możemy różniczkować formy. Zastanówmy się, czy możemy je całkować.

Przykład Weźmy formę/funkcję $f(z) = z^2 dz$. Mamy krzywą γ , będącą ćwiartką okręgu jednostkowego $r(t) = e^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^{\pi/2} (e^{it})^2 d(e^{it}) = \int_0^{\pi/2} e^{2it} i e^{it} dt \\ &= i \int_0^{\pi/2} e^{3it} dt \\ &= i \int_0^{\pi/2} (\cos(3t) + i \sin(3t)) dt \\ &= i \left[\frac{1}{3} \sin(3t) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3} i \cos(3t) \Big|_0^{\pi/2} \right] = -\frac{1}{3} i - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Całkowanie funkcji holomorficznych

Teraz policzymy różniczkę szczególnej formy – takiej, której współczynnikiem jest funkcja holomorficzna.

$$\begin{aligned} d(f(z) dz) &= d[(u(x, y) + iv(x, y))(dx + i dy)] \\ &= d[u dx + iu dy + iv dx - v dy] \\ &= -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Teraz patrzę, że mam funkcję holomorficzną, czyli:

$$= 0$$

Stąd prosty wniosek.

Uwaga 5. Jeśli $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ to $f(z) dz$ jest zamknięta.

Ma to dalekosiężne konsekwencje.

Twierdzenie 7. Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Bierzemy regularny obszar (nadający się do całkowania – zwarty, z brzegiem kawałkami krzywą gładką) $D \subset \Omega$. Wówczas,

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0$$

Dowód. Z twierdzenia Stokesa:

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = \int_{(D,+)} d(f(z) dz) = 0$$

■

Uwaga 6. Niech Ω będzie obszarem jednospójnym. Weźmy $f(z) \in \mathcal{A}(\Omega)$, $a, z \in \Omega$. $\gamma: a \rightarrow z$. Wówczas,

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

nie zależy od krzywej, tylko od końców krzywej.

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

Twierdzenie Cauchy'ego

Twierdzenie 8 (Giacinto Morera). Jeśli f jest ciągła na Ω i $\int_a^z f(\zeta) d\zeta$ nie zależy od drogi dla dowolnych $a, z \in \Omega$, to

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$$

jest holomorficzna oraz

$$F'(z) = f(z)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} F(z + \delta z) - F(z) &= \int_a^{z+\delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_a^z f(\zeta) d\zeta \\ &= \int_z^{z+\delta z} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Niech $\zeta = z + t\delta z$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} d\zeta &= \delta z dt \\ \frac{F(z + \delta z) - F(z)}{\delta z} &= \frac{1}{\delta z} \int_0^1 f(z + t\delta z) \delta z dt \\ \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \delta z) - F(z)}{\delta z} &= \lim_{\delta z \rightarrow 0} \int_0^1 f(z + t\delta z) dt \end{aligned}$$

Jest to całka zwarta z parametrem. Warunek wejścia z granicą pod znak całki jest taki, żeby f była ciągła jako funkcja trzech zmiennych $(t, \delta x, \delta y)$. Ten warunek jest spełniony z założenia twierdzenia.

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \lim_{\delta z \rightarrow 0} f(z + t\delta z) dt \\ &= \int_0^1 f(z) dt = f(z) \end{aligned}$$

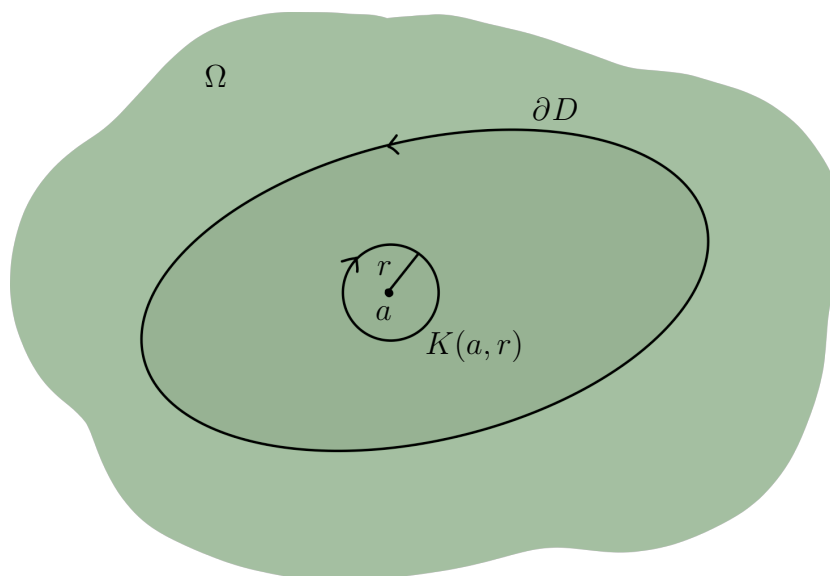
To kończy dowód. ■

Uwaga 7 (Wzór Cauchy'ego). $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $D \subset \Omega$. $a \in \text{Int}(D)$. Wówczas,

$$2\pi i f(a) = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z - a} &\in \mathcal{A}(\Omega \setminus \{a\}) \\ 0 &= \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz + \oint_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z - a} dz \\ \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - a} dz &= \oint_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z - a} dz \end{aligned}$$



Rysunek 2.1: Wzór Cauchy'ego

Niech $z = a + re^{i\phi}$. $dz = rie^{i\phi} d\phi$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\phi})}{a + re^{i\phi} - a} rie^{i\phi} d\phi \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \stackrel{\text{def}}{=} F(r) \end{aligned}$$

Ostatnia całka nie zależy od r , gdyż jakbyśmy całkowali po mniejszym okręgu $C_{a,\rho}$, gdzie $\rho < r$, to obie całki byłyby równe. Stąd $F(r)$ jest stała. Możemy więc w szczególności rozważyć granicę w $r \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} F(r) &= \lim_{r \rightarrow 0} F(r) = \lim_{r \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a) d\phi = 2\pi i f(a) \end{aligned}$$

To kończy dowód. ■

Znając wartości funkcji na brzegu jestem w stanie wyliczyć wartości funkcji holomorficzej w każdym punkcie wewnątrz obszaru! Funkcje holomorficze są bardzo „sztywne”. Wynika stąd na przykład, że nie istnieją funkcje holomorficze o zwartych nośnikach.

Wykład 7: Własności funkcji holomorficzych

06 lis 2020 **Zadanie 1** Mamy kontur $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 3\}$. $C = \partial K(-i, 3)$. Orientację nadajemy dodatnią. Obliczyć całkę $\oint_C \frac{\sin z}{z + i} dz$.

$$\oint_C \frac{\sin z}{z + i} dz = \oint_C \frac{\sin z}{z - (-i)} \stackrel{?}{=} 2\pi i \sin(-i)$$

Można użyć twierdzenia Cauchy'ego, jeśli \sin w dziedzinie zespolonej jest holomorficzny. Zapiszmy to w taki sposób,

$$\begin{aligned}\sin(x + iy) &= \sin(x) \cos(iy) + \cos(x) \sin(iy) \\ \cos \alpha &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}\end{aligned}$$

Zapostulujmy, że te wzory są również spełnione dla $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\cos(iy) &= \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y \\ \sin(iy) &= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y\end{aligned}$$

Stąd,

$$\sin(z) = \underbrace{\sin(x) \cosh(y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{\cos(x) \sinh(y)}_{v(x,y)}$$

Sprawdzamy warunki C-R.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \cos x \cosh y, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin x \sinh y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\sin x \sinh y, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \cos x \cosh y\end{aligned}$$

Równania C-R są spełnione, zatem tak zdefiniowana funkcja \sin zmiennej zespolonej jest funkcją holomorficzną. Zadanie zatem sprowadza się do policzenia:

$$\begin{aligned}\sin(-i) &= i \sin(i) = -i \sinh(1) = -i \frac{e - e^{-1}}{2} \\ \oint_C \frac{\sin z}{z - (-i)} &= \pi \left(e - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

Zadanie 2 Treningowe wstępne zadanie dotyczące funkcji holomorficzych. Mamy daną $v(x, y) = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$. Sprawdzić, czy v może być częścią urojonej funkcji holomorficzej? Znaleźć tę funkcję.

To sprawdzenie sprowadza się do sprawdzenia czy $\Delta v = 0$, bo jeśli f jest holomorficzną, to jej części Re oraz Im są harmoniczne. Można sprawdzić, że Laplasjan, rzeczywiście się zeruje. Przejdźmy od razu do szukania funkcji. Trzeba sprawdzić C-R.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-2(x+1)y}{[(x+1)^2 + y^2]^2} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ u(x, y) &= \int \frac{2(x+1)y}{[(x+1)^2 + y^2]^2} dy = (x+1) \int \frac{y dy}{[(x+1)^2 + y^2]^2} \\ &= (x+1) \frac{-1}{(x+1)^2 + y^2} + g(x)\end{aligned}$$

Funkcję g można odnaleźć z drugiego zestawu równań $C - R$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= g'(x) - \frac{[(x+1)^2 + y^2] - 2(x+1)(x+1)}{[(x+1)^2 + y^2]^2} \\ &= g'(x) - \frac{y^2 - (x+1)^2}{[(x+1)^2 + y^2]^2}\end{aligned}$$

Porównuję z drugą pochodną,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(x+1)^2 + y^2 - 2y^2}{[\dots]^2} = \frac{(x+1)^2 - y^2}{[\dots]^2}$$

Stąd,

$$\begin{aligned}g'(x) &= 0 \\ g(x) &= z_0 \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Wobec tego, jak wygląda nasza funkcja f ?

$$f(x+iy) = \frac{-(x+1)+iy}{(x+1)^2+y^2} + z_0 = \begin{vmatrix} x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{vmatrix} =$$

Powinno dać się to sprowadzić do postaci funkcji od $z \in \mathbb{C}$. Jeśli się nie uda, to znaczy, że gdzieś popełniliśmy błąd. My bądźmy sprytniejsi. Zauważmy, że mianownik to moduł z przesuniętej o 1.

$$= \frac{-\overline{(z+1)}}{(z+1)\overline{(z+1)}} + z_0 = \frac{-1}{z+1} + z_0$$

Funkcja ta jest nie określona w punkcie $z = -1$.

n -te pochodne funkcji holomorficzych

Weźmy $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $z \in \Omega$ oraz $\gamma(t) = \zeta(t) + i\eta(t)$, $t \in [a, b]$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\xi(t) + i\eta(t))}{\xi(t) + i\eta(t) - z} (\dot{\xi}(t) + i\dot{\eta}(t)) dt \stackrel{\text{def}}{=} F(x, y)$$

Różniczkując w tym przypadku mogę wejść z operatorem pod znak całki,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t) - x - iy)^2} \dot{\gamma}(t) dt \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t) - x - iy)^2} (-1)(-i)\dot{\gamma}(t) dt \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\end{aligned}$$

Ta pochodna jest różniczkowalna w sposób ciągły w sensie rzeczywistym, ponieważ istnieją wszystkie ciągle pochodne cząstkowe. Chcemy sprawdzić, czy jest to różniczkowalne w sensie zespolonym. Sprowadza się to do policzenia pochodnej uzyskanego f' po $\partial/\partial\bar{z}$. Okazuje się, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{z}\partial z} = 0$$

zatem f' jest holomorficzna. Zabawę można kontynuować i otrzymać następujący wniosek.

Uwaga 8. Każda funkcja holomorficzna jest różniczkowalna w sensie zespolonym nieskończenie wiele razy. Wzór na n -tą pochodną wyraża się wzorem:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Nierówności całkowe

Uwaga 9. $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $K(a, r) \subset \Omega$

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a, r)} f(x + iy) dx dy$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \int_{K(a, r)} f(x + iy) dx dy &= \int_{\left| \begin{array}{l} z = a + \rho e^{i\phi} \\ x = \operatorname{Re}(a) + \rho \cos \phi \\ y = \operatorname{Im}(a) + \rho \sin \phi \end{array} \right|} f(x + iy) dx dy \\ &= \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) d\phi \end{aligned}$$

Teraz zauważamy, że drugą część całki iterowanej można policzyć z twierdzenia Cauchy'ego.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, \rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \left| \begin{array}{l} \zeta = a + \rho e^{i\phi} \\ d\zeta = \rho i e^{i\phi} d\phi \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) d\phi$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{K(a, r)} f(x + iy) dx dy &= \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) d\phi \\ &= \pi f(a) r^2 \end{aligned}$$

Nazywamy to (kolejnym) twierdzeniem o wartości średniej. ■

Uwaga 10 (Nierówność Cauchy’ego). $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $K(a, r) \subset \Omega$

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z=a+re^{i\phi}} |f(z)|$$

Dowód. Zapisujemy wzór na n -tą pochodną funkcji holomorficzej dla obszaru będącym naszym kołem.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial K(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

Parametryzujemy okrąg jak zwykle,

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\phi})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\phi}} r e^{i\phi} d\phi \\ &= \frac{n!}{2\pi i r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) e^{-ni\phi} d\phi \end{aligned}$$

Dostawiam moduły i kontynuuję rachunki.

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(a) \right| &= \frac{n!}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) e^{-ni\phi} d\phi \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^n} 2\pi \sup_{\partial K} |f(z)| \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 9 (Twierdzenie Liouville’a). Funkcja holomorficzna na całym \mathbb{C} i ograniczona jest stała.

Dowód. Niech $M \in \mathbb{R}$ będzie ograniczeniem funkcji, czyli $|f(z)| < M$. Weźmy $\zeta \in \mathbb{C}$ i dowolne $r > 0$.

$$\left| f^{(n)}(\zeta) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z=\zeta+re^{i\phi}} |f(z)| \leq \frac{n!}{r^n} M$$

Ponadto $1/r^n$ jest dowolnie małe, zatem

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| f^{(n)}(\zeta) \right| < \text{dowolna liczba dodatnia} \\ f^{(n)}(\zeta) &= 0 \end{aligned}$$

Skoro każda pochodna jest zerowa, to f musi być stała.

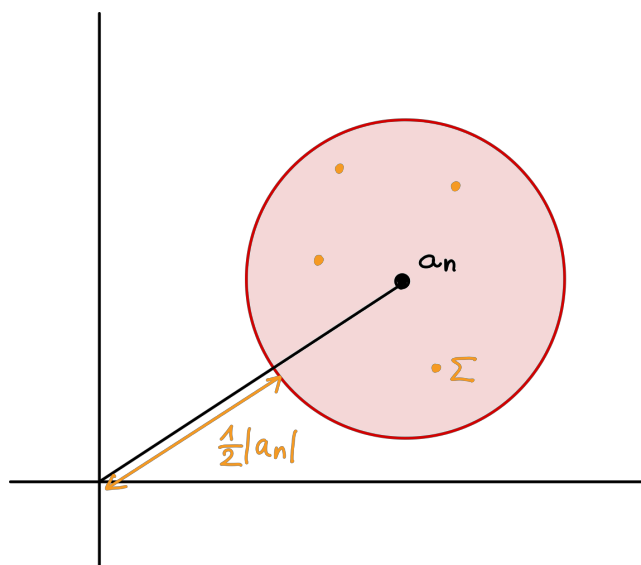
■

Twierdzenie 10 (Twierdzenie Gaussa). Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych stopnia > 0 ma przynajmniej jeden pierwiastek.

Dowód. Niech $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Załóżmy, że w nie ma pierwiastków w \mathbb{C} . W takim razie $f(z) = 1/w(z)$ jest holomorficzną na całym \mathbb{C} . Rozważmy również funkcję pomocniczą $w(z)/z^n = a_n + \dots + a_0/z^n$.

$$\left| \frac{w(z)}{z^n} \right| = \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \stackrel{|z| > R}{>} \frac{1}{2} |a_n|$$

Ostatnia nierówność jest następstwem faktu, że dla dostatecznie dużych z (co do modułu), wszystkie wyrazy po a_n mogą być dowolnie małe. W szczególności więc $\exists R$, takie że od pewnego momentu, gdy $|z| > R$, nierówność zaczyna pracować.



Rysunek 2.2: Wizualizacja chodzi o to, że można dobrać takie R , dla którego szacowana funkcja będzie w takim obszarze.

Szacujemy dalej, pamiętając iż $|z| > R$.

$$\begin{aligned} |w(z)| &> \frac{1}{2} |a_n| |z|^n \\ |f(z)| &< \frac{2}{|a_n| |z|^n} < \frac{2}{|a_n| R^n} \end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że dla $|z| > R$, $f(z)$ jest ograniczona. Ponadto $f(z)$ musi być również ograniczona w kole $|z| < R$, gdyż funkcja ciągła na obszarze zwartym jest ograniczona. Ponadto, funkcja $f(z)$ jest z założenia holomorficzną, zatem z twierdzenia Liouville'a musi być stała. Stąd wniosek, że również $w(z)$ musi być stała, co jest sprzeczne z założeniem $\deg w(z) \geq 1$. To kończy dowód. ■

Bezpośrednim następstwem tego twierdzenia jest zasadnicze twierdzenie algebry! Mając pierwiastek stopnia n , wiemy że ma on pierwiastek zespolony, po czym dzielimy ten wielomian przez $(z - z_0)$ otrzymując wielomian o stopień mniejszy. I tak dalej aż otrzymamy n pierwiastków.

Wykład 8: Szeregi

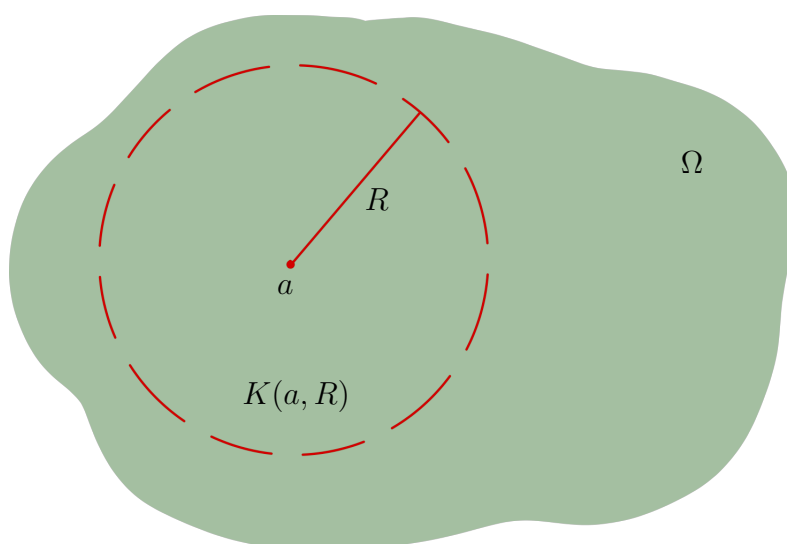
09 lis 2020 Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szereg Taylora

Okazuje się, że dla funkcji holomorficznych nie zdarza się tak jak czasem w \mathbb{R} , że rozwinięcie w szereg nie jest zbieżne do tej samej funkcji. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 11. Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $a \in \Omega$, $K(a, R) \subset \Omega$, gdzie $R > 0$ jest dowolne, byle się zmieścić w obszarze holomorficzności. Wówczas, szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

jest zbieżny niemal jednostajnie w $K(a, R)$ do funkcji f .



Rysunek 2.3: Obszar rozwinięcia w szereg Taylora.

Dowód. Aby wykazać zbieżność niemal jednostajną wystarczy pokazać, że jest to zbieżność jednostajna na każdym takim kole K o promieniu $r < R$. Zapiszmy nierówność Cauchy'ego:

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!}{R^n} \sup_{z=a+Re^{i\phi}} |f(z)|$$

Dowodzimy jednostajnej zbieżności na $\overline{K(a, r)}$ dla $r < R$. Skorzystamy z kryterium jednostajnej zbieżności Weierstrassa: jeśli dla pewnego $a_n > 0$, $\sum a_n$ jest zbieżny oraz $\forall_n |u_n(z)| < a_n$, to $\sum u_n(z)$ jest jednostajnie zbieżny.

$$|c_n| = \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| = \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leq \frac{n!}{n!R^n} \sup_{\partial K} |f(z)| = \frac{C}{R^n}$$

Dla $z \in \overline{K(a, r)}$,

$$|c_n(z - a)^n| \leq \frac{C}{R^n} r^n = C \left(\frac{r}{R} \right)^n$$

Dostaliśmy oszacowanie przez wyraz szeregu geometrycznego z $|q| < 1$, czyli zbieżnego. Na mocy kryterium Weierstrassa i wobec dowolności r , rozważany szereg jest niemal jednostajnie zbieżny na $K(a, R)$. Teraz trzeba rozważyć zbieżność do samej f . Niech $r' < r$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{\zeta - a}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta \end{aligned}$$

Całkę z sumą można zamienić bo mamy do czynienia z szeregiem jednostajnie zbieżnym, a rachunki prowadzimy w obszarze tej zbieżności.

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint_{\partial K(a, r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

Rozpoznajemy w tym wzór na n -tą pochodną funkcji holomorficzej!

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Z r i r' możemy się dowolnie zbliżyć do R , zatem w całym $K(a, R)$ szereg jest zbieżny do funkcji $f(z)$. ■

Uwaga 11. Każda funkcja holomorficzna jest również funkcją analityczną, czyli zadaną przez zbieżny szereg.

Twierdzenie 12 (Obszar zbieżności rozwinięcia). Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem w \mathbb{C} . $1/R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ jest funkcją holomorficzną w $K(z_0, R)$. Ponadto, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Dowód. Dowód analogiczny do tego na Analizie II. ■

Ważne funkcje holomorficzne

Funkcje trygonometryczne Oczywiście wszystkie przekształcenia i własności algebraiczne funkcji są takie same, bo to czysta algebra i nie ma znaczenia czy z jest rzeczywiste, czy zespolone. Natomiast,

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

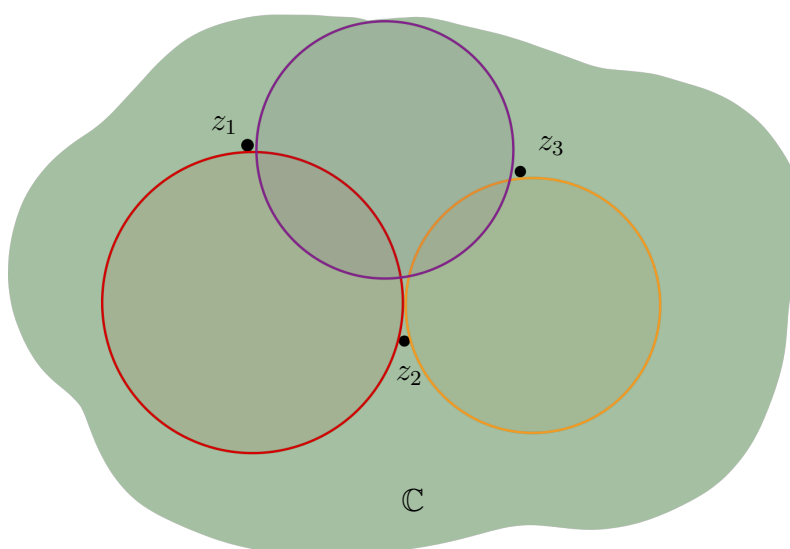
$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Ponadto, w dziedzinie zespolonej funkcje trygonometryczne już niekoniecznie są periodyczne.

Funkcje wymierne

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\})$$

gdzie $\{z_i\}$ to zbiór pierwiastków wielomianu $Q(z)$. Aby dostać rozwinięcie takich funkcji, rozkładamy je na ułamki proste i rozwijamy w każdym kole, które omija osobliwości.



Rysunek 2.4: Przykładowe rozwinięcia funkcji wymiernej z ominięciem osobliwości.

$$\mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \ni \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

przy czym należy pamiętać, że ostatni szereg w tej postaci jest zbieżny w $K(0, 1)$. Spróbujmy rozwinąć tę funkcję w punkcie $2 - i$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-z+(2-i)-(2-i)} = \frac{1}{1-(2-i)-(z-2+i)} \\ &= \frac{1}{i-1} \frac{1}{1-\frac{z-(2-i)}{i-1}} = \frac{1}{i-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-(2-i))^n}{(i-1)^n}\end{aligned}$$

Uwaga 12. Wnioski z Twierdzenia Liouville’a:

1. Jeśli $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ (Ω spójny) taka, że $\forall_n f^{(n)}(a) = 0$ to f jest stała na Ω .
2. Jeśli dwie funkcje holomorficzne mają równe wszystkie pochodne w pewnym punkcie na Ω , to różnią się o stałą.
3. Miejsca zerowe funkcji holomorficznej są izolowane – każde dwa miejsca zerowe mają rozłączne otoczenia.

Dowód (3). Pierwsze dwa punkty są trywialne. Trzeci dowodzimy ad absurdum. Załóżmy, że istnieje punkt skupienia a miejsc zerowych. Stąd istnieje ciąg $a = \lim a_n$, gdzie $f(a_n) = 0$.

$$f(a) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$$

Wówczas sam punkt skupienia jest miejscem zerowym, tj. $f(a) = 0$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Przyjmijmy, że $k: f^{(k)}(a) \neq 0$, wcześniejsze są równe zero.

$$\begin{aligned}&= (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(a)}{(k+n)!} (z-a)^n = (z-a)^k g(z) \\ g(a_n) &= \frac{f(a_n)}{(a_n-a)^k} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) &= g(a) = 0\end{aligned}$$

Doszliliśmy do sprzeczności, bo zakładaliśmy, że od k wzwyż pochodne f się nie zerują. ■

Logarytm Definicja logarytmu rzeczywistego wyglądała tak:

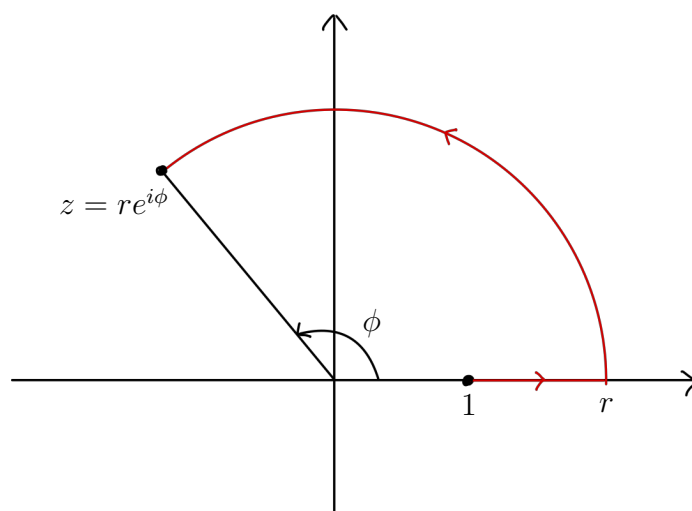
$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Moglibyśmy spróbować czegoś podobnego dla dziedziny zespolonej.

$$\log(z) = \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

Całki na \mathbb{C} są na ogół po krzywej. Taka postać pojawiła się dotąd tylko raz, gdy całka nie zależała od krzywej całkowania. Tak było, gdy funkcja podcałkowa była holomorficzna. Nasza funkcja taka jest wszędzie poza 0. Stwarza to problemy z obieganiem punktu osobliwego przy całkowaniu. Można wybrać standardową drogę, ale wciąż obiegając po pełnym okręgu, całka mi się nie wyzeruje tylko dostanę $2\pi i$. Innymi słowy, argument nie jest jednoznacznie wyznaczony w poniższym wyrażeniu.

$$\begin{aligned}\log(z) &= \int_1^r \frac{1}{x} dx + \int_0^\phi \frac{1}{re^{i\phi}} ire^{i\phi} d\phi \\ &= \log|z| + i \arg(z)\end{aligned}$$



Rysunek 2.5: Klasyczna droga całkowania dla logarytmu.

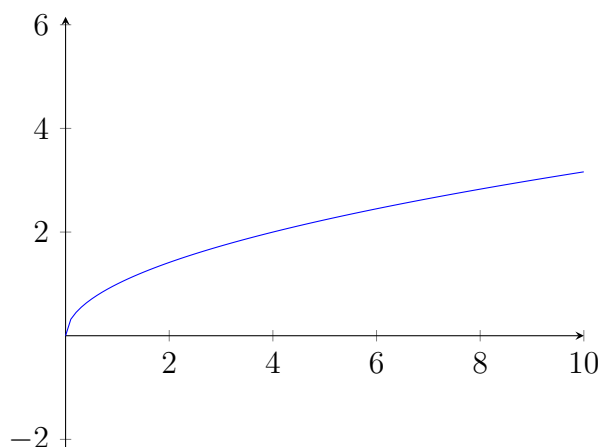
Można wybrać z tego mówiąc, że logarytm definiujemy tylko jako funkcję holomorficzną na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Taki logarytm nazywa się gałęzią główną logarytmu i określa przez $\text{Log}(z)$.

Innym sposobem radzenia sobie z tym problemem jest rozważanie Powierzchni Riemanna.

Wykład 9

13 lis 2020 **Pierwiastek** Najpierw przypomnijmy jak to wyglądało w \mathbb{R} . Rozwijamy w szereg w $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{1 + (x - 1)} = \sqrt{1 + t} = (1 + t)^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - (k-1) \right) t^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (x - 1)^k\end{aligned}$$

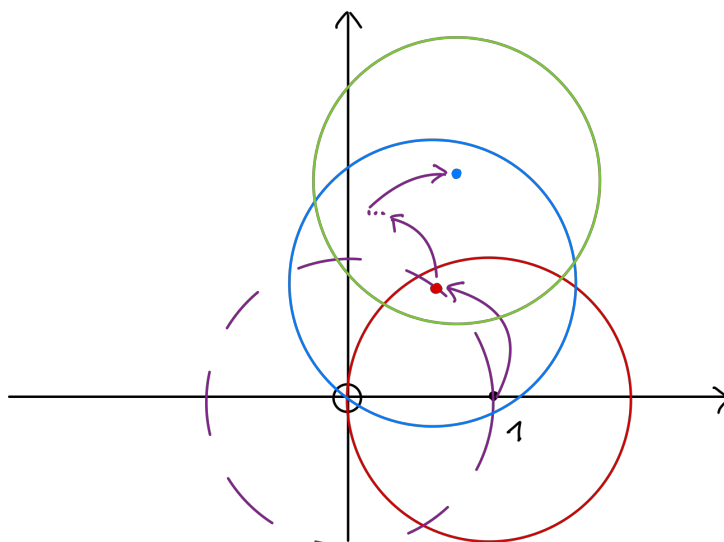
Rysunek 2.6: $x \in \mathbb{R}_+ : x \mapsto \sqrt{x}$

To ma promień zbieżności $R = 1$ i to nam definiuje pierwiastek dla $x \in (0, 2]$ (dla $x = 0$ szereg jest niezbieżny).

Teraz uogólniamy na dziedzinę zespoloną.

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (z-1)^k$$

Taka mała dziedzina $z \in K(1, 1)$ to jednak trochę dla nas za mało. Można postąpić **metodą przedłużania analitycznego**. Wybieramy w kole zbieżności jakiś punkt. Teraz rozwijamy funkcję w szereg, wokół tego punktu. Możemy to zrobić bo funkcję holomorficzną można rozwinąć w każdym punkcie, na którym jest holomorficzna. Dostajemy wobec tego większy obszar zbieżności.



Rysunek 2.7: Idea przedłużenia analitycznego pierwiastka.

Jak tak będziemy rozwijać kolejno na kolejnych punktach okręgu jednostkowego, to po

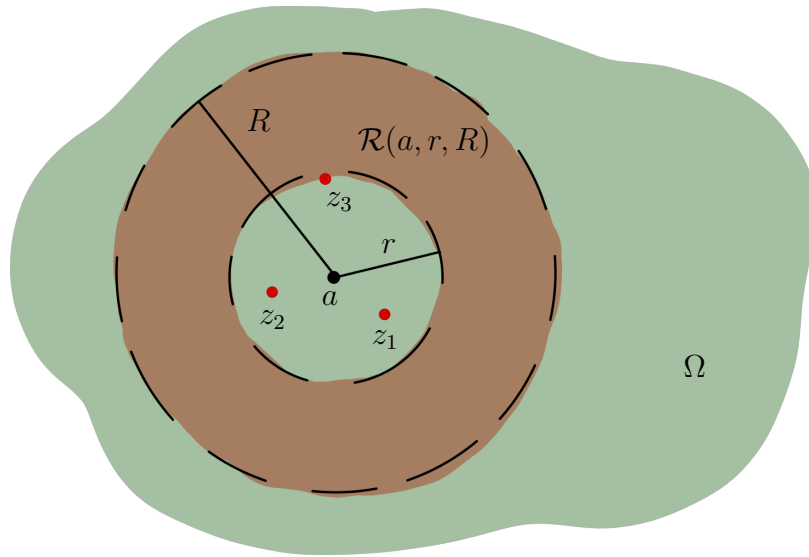
zatoczeniu koła nie wrócimy do tej samej funkcji, tylko dostaniemy ten drugi pierwiastek. Funkcja przestaje być wtedy jednoznaczna.

$$x^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \log x\right)$$

$$\exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \log r + \frac{1}{2} i\phi\right) = \sqrt{r} e^{1/2 i\phi}$$

W takiej reprezentacji dobrze widać tę niejednoznaczność (bo argument, będący logarytmem jest niejednoznaczny).

Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szereg Laurenta



Rysunek 2.8: Pierścień otwarty $\mathcal{R}(a, r, R)$, który nie zawiera osobliwości $\{z_1, z_2, z_3\}$.

Twierdzenie 13 (Laurent). Pierścień otwarty $\mathcal{R}(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$. Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, gdzie $\mathcal{R}(a, r, R) \subset \Omega$. Wybieramy $z \in \mathcal{R}(a, r, R)$. Wówczas, f rozwija się w szereg:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n = \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - a)} + a_0 + a_1(z - a) + \cdots$$

Szereg jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie. Ponadto,

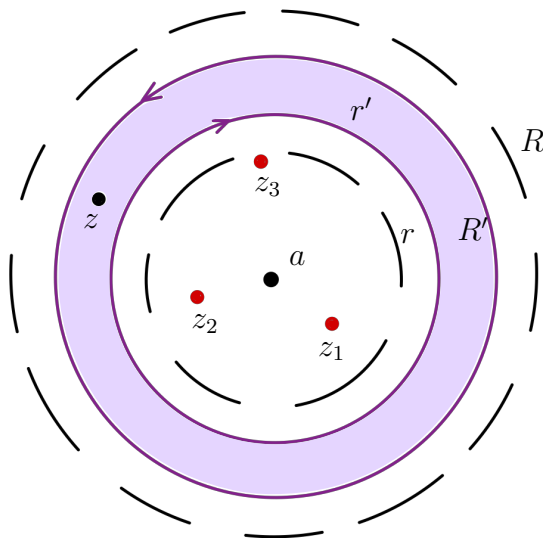
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

gdzie $r < \rho < R$ (mieści się w pierścieniu).

W szczególności, weźmy $n = -1$. Wówczas,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, \rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-1+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(a, \rho)} f(\zeta) d\zeta$$

Jeden wyraz szeregu daje nam extra całkę. To jest kwintesencja całkowania przez residua, do czego dojdziemy. Można uzyskać całkę poprzez znajomość rozwinięcia w szereg.



Rysunek 2.9: Dowód twierdzenia Laurent.

Dowód. Wybieramy dodatkowo dwa promienie $r < r' < R' < R$. Wówczas $\mathcal{R}(a, r', R') \subset \Omega$. Ponadto, $r' < |z - a| < R'$. Ze wzoru Cauchy'ego,

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \int_{\partial \mathcal{R}(a, r', R')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \\ &= \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

Pierwszą całkę liczymy jak w dowodzie twierdzenia Taylora, drugą trochę inaczej.

$$\begin{aligned} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{\zeta - a}{(\zeta - a) + a - z} d\zeta \\ &= \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta \end{aligned}$$

Moduł tego ułamka w mianowniku jest < 1 ,

$$\begin{aligned} &= \oint_{C_{R'}} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \right] d\zeta \\ &= \oint_{C_{R'}} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = (*) \end{aligned}$$

Weźmy jeszcze $r < r' < r'' \leq |z - a| \leq R'' < R' < R$. Chcemy pokazać jednostajną zbieżność.

$$\begin{aligned} \left| f(\zeta) \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| &= |f(\zeta)| \frac{|z-a|^n}{|\zeta-a|^{n+1}} \\ &\leq \frac{|f(\zeta)|(R'')^n}{(R')^{n+1}} \leq \frac{M}{R'} \left(\frac{R''}{R'} \right)^n \end{aligned}$$

Jest to wyraz szeregu liczbowego zbieżnego. Na podstawie kryterium Weierstrassa, nasz szereg jest zbieżny jednostajnie. Możemy więc zamienić kolejność sumowania i całkowania.

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

Teraz liczymy drugą całkę.

$$\begin{aligned} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a) + (a-z)} d\zeta = \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(z-a) \left[\frac{\zeta-a}{z-a} - 1 \right]} d\zeta \\ &= \oint_{C_{r'}} \frac{-f(\zeta)}{(z-a)} \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} d\zeta \end{aligned}$$

Po zapisaniu jako szereg,

$$\begin{aligned} &= \oint_{C_{r'}} \frac{-f(\zeta)}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-a}{z-a} \right)^n d\zeta \\ &= \oint_{C_{r'}} \sum_{n=0}^{\infty} (-f(\zeta)) \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta = (**) \end{aligned}$$

Pytanie, czy znów można zamienić kolejność,

$$\left| f(\zeta) \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \right| \leq M \frac{(r')^n}{(r'')^{n+1}} = \frac{M}{(r'')} \left(\frac{r'}{r''} \right)^n$$

Znów oszacowaliśmy przez zbieżny szereg liczbowy, zatem można zamienić kolejność sumowania i całkowania:

$$(**) = - \sum_{k=-\infty}^{-1} (z-a)^k \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta$$

Teraz wszystko można poskładać. Ostatecznie $C_{R'}$ i $C_{r'}$ zastępujemy C_ρ dla $r < \rho < R$. Pokazaliśmy niemal jednostajną zbieżność na zwartym pierścieniu $\overline{\mathcal{R}}(a, r'', R'')$. ■

Przykład Weźmy funkcję wymierną,

$$f(z) = \frac{2zi}{(1-z)(z+i)^2} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{(z+i)^2}$$

Będziemy rozwijać w $\mathcal{R}(-i, 0, \sqrt{2})$, tj. na takim obszarze, którego brzeg zawiera osobliwości (ale wewnątrz oczywiście nie, co wystarczy).

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1/2(1-i)}{z+i} + \frac{1/2(1-i)}{(z+i)^2}$$

Druga część jest już gotowa do rozwinięcia w $-i$. Wówczas widzimy też, że $a_n = 0$ dla $n < -2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1+i-i-2} = \frac{1}{(1+i)-(i+z)} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{1-\frac{i+z}{1+i}} \\ &= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right)^n (i+z)^n \end{aligned}$$

To rozwinięcie działa, gdyż $|i+z| < \sqrt{2}$ oraz $|1+i| = \sqrt{2}$, zatem $|i+z|/|1+i| < 1$.

Przykład' Teraz chcielibyśmy rozwinąć to samo w $\mathcal{R}(0, 1, \infty)$. Każdy z tych ułamków prostych rozwijamy osobno.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(\frac{1}{z}-1)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$|z| > 1$, zatem $|1/z| < 1$.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \end{aligned}$$

Teraz drugi składnik,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(i)^n}{z^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-i)^{-n-1} z^n \end{aligned}$$

Ostatni składnik,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+i)^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z+i} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{z^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (n+1)}{z^{n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^{n-2} (n-1)}{z^n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-2} (-i)^{-n-2} (n+1) z^n \end{aligned}$$

Teraz, na końcu trzeba wziąć te 3 części dodać pamiętając, że były jeszcze współczynniki A, B, C .

Wykład 10: Całkowanie przez Residua

16 lis 2020

Twierdzenie 14 (Bez dowodu). Jeśli $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-a)^k$ w $\mathcal{R}(a, r, R)$ to f jest holomorficzną w $\mathcal{R}(a, r, R)$ oraz

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta, \quad r < \rho < R$$

Oznacza to, że rozwinięcie w szereg Laurent jest zawsze jednoznaczne. Dany szereg odpowiada danej funkcji.

Klasyfikacja osobliwości

Jeśli funkcja f jest holomorficzną w pierścieniu $\mathcal{R}(a, 0, R)$, czyli osobliwość $z = a$ jest izolowana, to:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n}_{\text{część główna rozwinięcia}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

Przyjmując założenie o $z = a$, będącym osobliwością izolowaną, definiujemy...

Definicja 12 (Osobliwość usuwalna). Jeśli $b_n = 0$ dla $n < 0$, czyli część główna rozwinięcia zanika, to $f(a) = b_0$ nazywamy osobliwością usuwalną. Wówczas $f \in \mathcal{A}(K(a, R))$.

Przykładowo, $f(z) = \sin z/z$ ma osobliwość usuwalną w $z = 0$, gdyż $\lim_{z \rightarrow 0} \sin z/z = 1$.

Definicja 13 (Biegun rzędu n). Jeśli $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k < -n \quad b_k = 0$ oraz $b_{-n} \neq 0$, tj.

$$f(z) = \frac{b_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{b_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + b_0 + b_1(z-a) + \cdots$$

to osobliwość w $z = a$ nazywamy biegunem rzędu n . Biegun rzędu 1 nazywamy biegunem prostym.

Tutaj wylania się nawet cała klasa przykładów. Zauważmy, że funkcje wymierne postaci $f(z) = P(z)/Q(z)$ mają bieguny w pierwiastkach wielomianu $Q(z)$. W szczególności, dla $Q(z) = (z-z_1)(z-z_2)^2 w(z)$, z_1 jest biegunem rzędu 1, z_2 jest biegunem rzędu 2.

Innym przykładem jest $f(z) = (1 - e^z)/z^2$, gdzie dla $z = 0$ jest biegun prosty (rzędu 1), bo jak się rozwinie e^z w szereg to się skraca potęgą w mianowniku i zostaje $1/z + 1/2 + \cdots$.

Definicja 14 (Punkt istotnie osobliwy). Jeśli część główna rozwinięcia zawiera nieskończenie wiele wyrazów $\neq 0$, to osobliwość w $z = a$ jest nazywana punktem istotnie osobliwym.

Przykład:

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{n!} = \cdots + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1$$

Funkcja ta ma punkt istotnie osobliwy $z = 0$.

A co z osobliwościami nieizolowanymi? Przykładowo w $z = 0$, $f(z) = 1/\sin(1/z)$ ma osobliwość nieizolowaną, co możemy pokazać następująco. $f(z)$ ma jeszcze osobliwości w $z_k = \frac{1}{k\pi}$ – te są izolowanymi biegunami prostymi. Ponadto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$$

Wobec tego mamy ciąg osobliwości zbieżny do osobliwości $z = 0 \implies$ jest ona osobliwością nieizolowaną. W takim wypadku nasze definicje nic nie rozstrzygają.

Definicja 15 (Residuum). Niech z_0 będzie izolowanym punktem osobliwym funkcji f . Współczynnik b_{-1} w rozwinięciu w szereg Laurent nazywamy residuum oraz piszemy $b_{-1} = \text{Res}_{z_0} f$.

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K(z_0, \rho)} f(z) dz$$

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z_0} f$$

Jest to po prostu całka wokół punktu izolowanego.

Jak to się może przydać? Rozważmy, że chcemy całkować po dużym konturze, wewnątrz którego mamy więcej punktów izolowanych niż 1.

Uwaga 13 (Całkowanie przez residua).

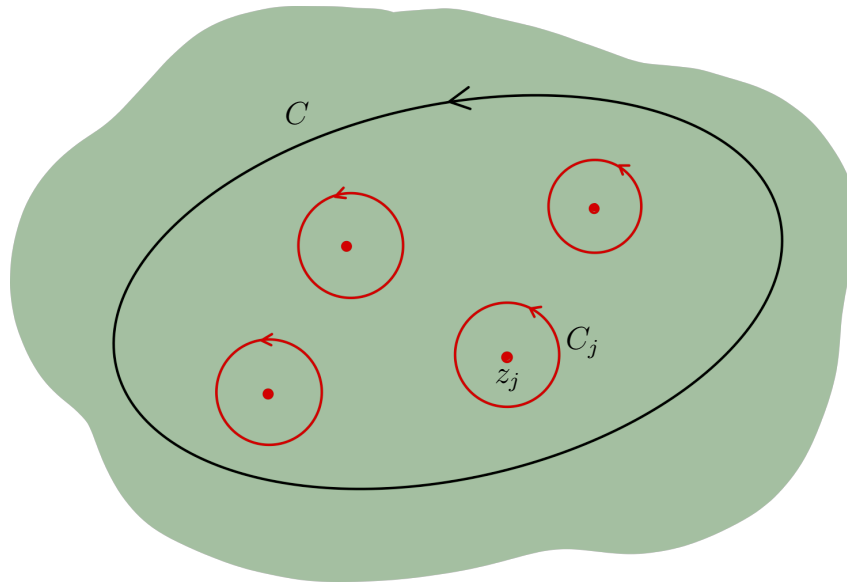
$$\oint_C f(z) dz = \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f$$

Dowód. Rozważmy całkę po $C \cup (\bigcup C_j)$, gdzie C jest zorientowane przeciwwzgarowo, a C_j zegarowo. Wówczas wnętrze tego konturu jest obszarem holomorficzności $f(z)$, zatem na podstawie twierdzenia Stokesa, całka po takim konturze się zeruje. Stąd,

$$0 = \oint_C f(z) dz + \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz$$

$$\oint_C f(z) dz = - \sum_{j=1}^n \oint_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f$$

■



Rysunek 2.10: Całkowanie przez residua.

Całki z funkcji trygonometrycznych (po okresie)

Policzmy taką całkę $F = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \cos t}$, $a > b$.

Wprowadźmy podstawienie, które nas przeniesie do dziedziny zespolonej.

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

gdzie $z = e^{it} \in C(0, 1)$.

$$\begin{aligned} F &= \oint_{C(0,1)} \frac{dz / iz}{a + \frac{b}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{i} \oint_{C(0,1)} \frac{dz}{az + \frac{b}{2} z^2 + \frac{b}{2}} \\ &= \frac{1}{i} \oint \frac{2 dz}{bz^2 + 2az + b} = (*) \end{aligned}$$

Teraz interesują nas osobliwości tej funkcji wymiernej.

$$\begin{aligned} b \left(z^2 + 2 \frac{a}{b} z + 1 \right) &= b \left(\left(z + \frac{a}{b} \right)^2 - \frac{a^2}{b^2} + 1 \right) \\ &= b \left(z + \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right) \left(z + \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \right) \\ z_0 &= \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} - \frac{a}{b} \in K(0, 1) \end{aligned}$$

Drugi pierwiastek nie jest nam potrzebny, bo jest poza obszarem całkowania.

$$(*) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f) \frac{1}{i}$$

Teraz myślimy jak policzyć residuum. W z_0 jest biegun prosty, zatem jak chcemy rozwinąć w szereg, to mamy

$$f(z) = \frac{2}{b(z - z_1)(z - z_0)} = \frac{\text{Res}_{z_0}}{(z - z_0)} + \dots$$

Stąd,

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{2}{b(z_0 - z_1)} = \frac{2}{b\left(\sqrt{\Delta} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \sqrt{\Delta}\right)} \\ &= \frac{1}{b\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}}\end{aligned}$$

Stąd,

$$(*) = F = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Całki z funkcji wymiernych

Policzmy całkę $F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$.

Mianownik ma oczywiście pierwiastki zespolone, ale na osi rzeczywistej nie ma ani jednego. Technika liczenia takiej całki polega na rozszerzeniu funkcji podcałkowej na płaszczyznę zespoloną, tj.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$$

Całkować ją będziemy po brzegu półkola górnego (bo chcemy trafić z konturem na oś rzeczywistą). Najpierw promień R bierzemy skończony, następnie przechodzimy do granicy.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= F + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz\end{aligned}$$

Liczmy całkę po Γ_2 ,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} &= \int_0^\pi \frac{R^2 e^{2i\phi} R i e^{i\phi}}{R^4 e^{4i\phi} + 1} d\phi = \frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{i e^{3i\phi}}{e^{4i\phi} + 1/R^4} d\phi \\ \left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| &\leq \frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{d\phi}{|e^{4i\phi} + 1/R^4|} \leq \frac{1}{R} \frac{\pi}{1 - 1/R^4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

W związku z tym,

$$F = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\text{Res}_{e^{i\pi/4}} f + \text{Res}_{e^{3i\pi/4}} f)$$

Teraz badamy residua,

$$\frac{z^2}{z^4 + 1} = z^2 \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)}$$

gdzie $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5i\pi/4}, e^{7i\pi/4})$. Są to bieguny proste, zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_i} f &= \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) f(z) \\ \operatorname{Res}_{z_1} f &= \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} \\ &= \frac{e^{i\pi/2}}{(e^{i\pi/4} - e^{3i\pi/4})(e^{i\pi/4} - e^{5i\pi/4})(e^{i\pi/4} - e^{7i\pi/4})} \\ &= e^{i\pi/2} \frac{1}{e^{i\pi/2}(e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4})e^{3i\pi/4}(e^{-i\pi/2} - e^{i\pi/2})e^{i\pi}(e^{-3i\pi/4} - e^{3i\pi/4})} \\ &= \frac{1}{(-2i)^3} \frac{1}{\frac{1}{2}(-1)e^{3i\pi/4}} = \frac{i}{4} e^{-3i\pi/4} \end{aligned}$$

Analogicznie dla drugiej osobliwości z_2 .

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_2} f &= \frac{i}{4} e^{3i\pi/4} \\ \operatorname{Res}_{z_1} f + \operatorname{Res}_{z_2} f &= \frac{i}{4} (e^{-3i\pi/4} + e^{3i\pi/4}) \\ &= \frac{i}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -i \frac{\sqrt{2}}{4} \\ F &= -2\pi i \cdot \frac{i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Wykład 11

20 lis 2020 **Całki z funkcji postaci $Q(x) \exp(iax)$**

Tego typu całki liczy się w transformacie Fouriera, są przydatne w mechanice kwantowej, teorii pola itd.

Kiedy $a > 0$, tj. $f(x) = Q(x)e^{iax}$ to całkujemy po dodatnim półokręgu, a jak $a < 0$ to po dolnym półokręgu. Pokażemy, że w obu przypadkach całka po łuku zanika w nieskończoności.

Lemat 1 (Lemat Jordana). Niech f będzie funkcją ciągłą określoną w górnej (dolnej) półpłaszczyźnie. Jeśli $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, to

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0$$

gdzie C_R jest górnym półokręgiem dla $a > 0$ i dolnym dla $a < 0$.

Dowód. Potrzebne oszacowanie: $\sin \phi \geq \frac{2}{\pi} \phi$ dla $\phi \in [0, \pi/2]$.

Niech $a > 0$, czyli C_R jest górnym półokręgiem.

$$\int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = \int_0^\pi e^{iaR(\cos \phi + i \sin \phi)} f(Re^{i\phi}) Rie^{i\phi} d\phi$$

Przechodzimy do szacowania modułów.

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| e^{iaR(\cos \phi + i \sin \phi)} f(Re^{i\phi}) Rie^{i\phi} \right| d\phi \\ &= \int_0^\pi e^{-aR \sin \phi} R \left| f(Re^{i\phi}) \right| d\phi \end{aligned}$$

Pamiętamy, że f jest ciągła, zatem mogą całość oszacować wstawiając supremum.

$$\begin{aligned} &\leq \underbrace{\sup_{\phi \in [0, \pi]} \left| f(Re^{i\phi}) \right|}_{M(R)} \int_0^\pi e^{-aR \sin \phi} R d\phi \\ &= M(R) 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \phi} R d\phi \\ &\leq 2M(R) \int_0^{\pi/2} e^{-aR \frac{2}{\pi} \phi} R d\phi \end{aligned}$$

W wykładniku jest już wyraz liniowy, zatem możemy to obliczyć wprost.

$$\begin{aligned} &= -2M(R) R \frac{\pi}{2aR} e^{-aR \frac{2}{\pi} \phi} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= M(R) \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

To kończy nasz dowód, bo dla dolnej płaszczyzny przebiegałby on praktycznie identycznie. ■

Przykład Policzmy $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx$. Założenia lematu Jordana są spełnione.

Aby dostać całkę z Lematu Jordana, to musimy dodać całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx$. Ta całka jest całką z antysymetrycznej funkcji po symetrycznym odcinku, zatem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

Gdzie naszym $Q(x) = (x^2 + a^2)^{-2}$. Wykładnik jest dodatni, więc całkujemy po górnym okręgu. Ponadto, $(x^2 + a^2)^2 = (z + ia)^2(z - ia)^2$. Więcej tu nie ma do roboty, zatem:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx &= 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)^2} \right) \\ f(z) &= \frac{e^{iz}}{(z - ia)^2(z + ia)^2} = \frac{b_{-2}}{(z - ia)^2} + \frac{b_{-1}}{(z - ia)} + b_0 + b_1(z - ia) + \dots \\ f(z)(z - ia)^2 &= b_{-2} + b_{-1}(z - ia) + b_0(z - ia)^2 + \dots \\ \frac{d}{dz} [f(z)(z - ia)^2] &= b_{-1} + 2b_0(z - ia) + \dots \end{aligned}$$

Stąd,

$$\lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} [f(z)(z - ia)^2] = b_{-1} = \operatorname{Res}_{ia} f(z)$$

Aplikujemy to do naszego przypadku,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z + ia)^2} \right] &= e^{iz} \frac{i(z + ia) - 2}{(z + ia)^3} \Big|_{z=ia} = e^a \frac{-2a - 2}{(2ia)^3} \\ &= e^{-a} \frac{2a + 2}{8ia^3} = e^{-a} \frac{a + 1}{4a^3 i} \end{aligned}$$

Koniec końców,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \frac{a + 1}{4e^a a^3 i}$$

i się skraca, bo powinno wyjść coś rzeczywistego. Jakby się nie skróciło to znak, że mamy gdzieś błąd.

$$= \frac{\pi}{2} \frac{a + 1}{e^a a^3}$$

Twierdzenie 15 (Residuum w biegunie). Jeśli funkcja f ma w z_0 biegun rzędu k , to residuum w punkcie z_0 jest równe

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

Inne całki

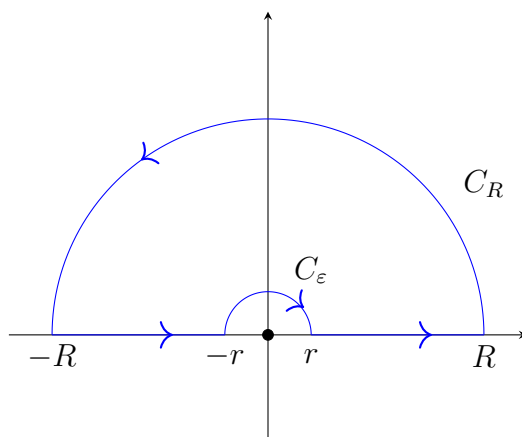
Policzmy $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. Nie jest to całka należąca do listy „standardowych” postępowań.

Jest to całka zbieżna bezwzględnie. Trzeba przerobić funkcję podcałkową na funkcję zespoloną, np. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(1 - e^{2iz})$. Zauważmy również, że funkcja jest parzysta, zatem możemy liczyć ją na całej prostej \mathbb{R} i potem wziąć połowę.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}(1 - e^{2iz})}{x^2} dx \\ f(z) &= \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} \end{aligned}$$

Wyjściowa funkcja nie miała osobliwości w 0, natomiast $f(z)$ niewątpliwie ma tam biegun rzędu 1, ponieważ w rozwinięciu jedno z z licznika się skróci.

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{C_R} f(z) dz + \oint_{C_r} f(z) dz + \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_r^R f(x) dx \\ \oint_{C_R} f(z) dz &= \oint_{C_R} \frac{dz}{z^2} - \oint_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Rysunek 2.11: Kontur słoń. $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$

Pierwsza całka zanika, bo mianownik jest dwa stopnie wyższy od licznika, a druga również easy, bo spełnia założenia lematu Jordana. $f(z)$ ma w $z = 0$ biegun prosty. Rozważmy więc funkcję holomorficzną g taką, że

$$f(z) = \frac{g(z)}{z}$$

Niech Γ_r będzie częścią okręgu od ϕ_0 do ϕ_1 .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} \frac{g(z)}{z} dz &= \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{g(re^{i\phi})}{re^{i\phi}} rie^{i\phi} d\phi = i \int_{\phi_0}^{\phi_1} g(re^{i\phi}) d\phi \\ \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{g(z)}{z} dz &= \lim_{r \rightarrow 0} i \int_{\phi_0}^{\phi_1} g(re^{i\phi}) d\phi \end{aligned}$$

Możemy wejść pod całkę, bo funkcja podcałkowa jest holomorficzna, po skończonym odcinku.

$$= i \int_{\phi_0}^{\phi_1} g(0) d\phi = i(\phi_1 - \phi_0)g(0) = \text{Res}_0 f(z)$$

Zauważmy, że to działa tylko jak f ma biegun prosty, bo inaczej nie można by wejść z granicą pod całkę (nie byłoby pod nią funkcji holomorficzej).

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} &= i(\pi - 0) \text{Res}_0 f \\ f(z) &= \frac{1 - (1 + 2iz + \frac{1}{2}(2iz)^2 + \dots)}{z^2} \\ &= -\frac{2i}{z} - \frac{1}{2}(2i)^2 + \dots \end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \text{Res}_0 f &= -2i \\ \oint_{C_r} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} &= i\pi(-2i) = 2\pi \end{aligned}$$

Wracamy do wyjściowej całki I .

$$\begin{aligned} 0 &= 4I - 2\pi \\ I &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Przeprowadzone rachunki doprowadzają nas do lematu.

Lemat 2. Niech z_0 będzie biegunem pierwszego rzędu funkcji f . Wtedy,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = i\phi \operatorname{Res}_{z_0} f$$

Kiedy to jest biegun wyższego rzędu, to takich całek po częściach okręgu nie można już liczyć w taki sposób.

Rozpoznawanie rodzaju punktów osobliwych funkcji zespolonych jest, jak widać, potrzebne. Możemy dostosować sposób prowadzenia rachunków do konkretnej sytuacji.

Uwaga 14. Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega \setminus \{z_0\})$. Punkt z_0 jest osobliwością usuwalną \iff istnieje otoczenie V punktu z_0 takie, że f jest ograniczona na V .

Dowód. Dowód w prawo: oczywisty.

Dowód w lewo: f ograniczona na $V \setminus \{z_0\}$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$$

Gdyż $z - z_0 \rightarrow 0$, a $f(z)$ ograniczone. Niech,

$$\begin{aligned} g(z) &= \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases} \\ g'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \end{aligned}$$

Potrafimy policzyć pochodną, zatem $g \in \mathcal{A}(V)$. Możemy ją więc rozwinąć w szereg Taylora w $K(z_0, r) \subset V$.

$$\begin{aligned} g(z) &= \underbrace{g_0}_{g(z_0)=0} + \underbrace{g_1}_{g'(z_0)=0} (z - z_0) + g_2(z - z_0)^2 + \dots \\ &= (z - z_0)^2 [g_2 + g_3(z - z_0) + \dots] \end{aligned}$$

Wyraz w nawiasie to funkcja holomorficzna na $K(z_0, r)$.

$$[g_2 + g_3(z - z_0) + \dots] = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = f(z)$$

Stąd wniosek, że $f(z)$ jest holomorficzna. ■

Wykład 12

Całki po kości

23 lis 2020

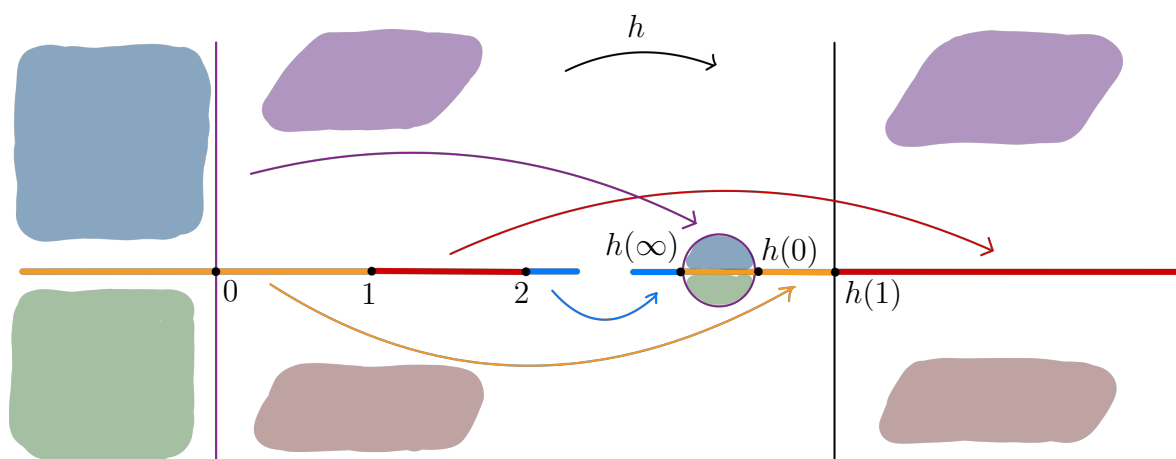
Policzmy całkę $\int_1^2 (x+1) \sqrt[6]{\frac{x-1}{2-x}} dx$. Jak tylko widzimy jakiś pierwiastek w sensie zespolonym, to od razu widzimy wieloznaczność funkcji i konieczność wybierania dobrej gałęzi logarytmu. Przeanalizujmy funkcję:

$$f(z) = (z+1) \sqrt[6]{\frac{z-1}{2-z}}$$

Przyjrzyjmy się homografii, która znajduje się pod pierwiastkiem. Zespolone homografie to są bardzo ciekawe funkcje, są przekształceniami konforemnymi, tj. zachowują kąty między krzywymi. Bardzo łatwo można je również rozszerzyć do sfery Riemanna, tj. traktować je jako odwzorowania $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

$$h(z) = \frac{z-1}{2-z} = -1 + \frac{1}{2-z}$$

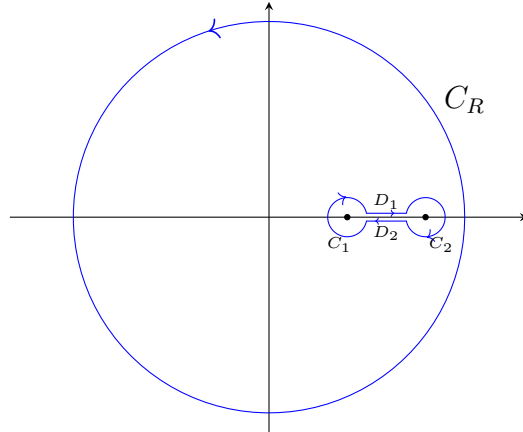
Zobaczmy jak działa ta konkretna homografia w dziedzinie zespolonej.

Rysunek 2.12: $h(z)$

Analizując poszczególne punkty i ich obrazy widzimy gdzie przechodzą konkretne proste. W szczególności prosta rzeczywista przechodzi w prostą rzeczywistą, natomiast prosta urojona przecina punkt w nieskończoności i 0, zatem musi przecinać punkty $h(\infty)$ i $h(0)$, co oznacza, że przechodzi na okrąg, gdyż okręgi uogólnione w homografiach przechodzą na okręgi uogólnione.

Ciekawie też jest się przyjrzeć jak wyglądają linie $x = \text{const.}$ i $y = \text{const.}$ dla $z = x + iy$. Wiemy, że proste przechodzą na proste lub okręgi. Ponadto wszystkie obrazy prostych

przecinają się w obrazie nieskończoności (tak jak wszystkie proste x, y przecinają się w nieskończoności).



Rysunek 2.13: Kontur kość $\Gamma = C_1(r) \cup C_2(r) \cup D_1(\varepsilon) \cup D_2(\varepsilon) \cup C_R$, gdzie $R \rightarrow \infty$, $r, \varepsilon \rightarrow 0$. Ta kość działa tak, że otacza zegarowo granice całkowania, tj. $z \in \{1, 2\}$.

$f(z) = (z+1)h(z)^{1/6}$ jest holomorficzną wewnątrz Γ (tj. na zewnątrz kości). Wieloznaczność funkcji pierwiastkowych w dziedzinie zespolonej oznacza konieczność wybrania dobrej gałęzi logarytmu. Z naszych obrazków wynika, że:

$$h(z)^{1/6} = \exp\left(\frac{1}{6} \log(h(z))\right)$$

dla $\log \omega = \log |\omega| + i\phi$, $\phi \in (0, 2\pi)$

Przykłady:

$$z = 0, h(z) = -\frac{1}{2}, \sqrt[6]{-\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{6} \log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}i\pi\right) = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z = 1 + i, h(z) = \frac{1+i-1}{2-1-i} = \frac{i}{1-i} = \frac{1}{2}(-1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$\sqrt[6]{h(1+i)} = 2^{-1/12} e^{i\frac{\pi}{8}}$$

Dla nas istotne jest sprawdzenie obrazów D_i w kości, gdy dążą do granicy.

$$h(x+i\varepsilon) = \frac{x+i\varepsilon-1}{2-x-i\varepsilon} = \frac{(x-1)(2-x)-\varepsilon^2}{(2-x)^2+\varepsilon^2} + i\frac{\varepsilon}{(2-x)^2+\varepsilon^2}$$

Gdy $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$h(z) \rightarrow h(x), \quad \arg(h(z)) \rightarrow 0^+$$

$$[h(x+i\varepsilon)]^{1/6} \rightarrow [h(x)]^{1/6}$$

Analogicznie,

$$h(x-i\varepsilon) = \frac{(x-1)(2-x)-\varepsilon^2}{(2-x)^2+\varepsilon^2} + i\frac{-\varepsilon}{(2-x)^2+\varepsilon^2}$$

Tym razem jednak gdy $\varepsilon \rightarrow 0^+$,

$$h(z) \rightarrow h(z), \quad \arg(h(z)) \rightarrow 2\pi^-$$

$$[h(x - i\varepsilon)]^{1/6} \rightarrow [h(x)]^{1/6} e^{2\pi i/6}$$

Uzbrojeni i uświadomieni możemy przystąpić do liczenia całki.

$$\oint_{\Gamma} f(z) = 0$$

$$\int_{D_1} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^2 f(x) dx = I$$

$$\int_{D_2} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_2^1 f(z) e^{i\frac{\pi}{3}} dx = -e^{i\frac{\pi}{3}} I$$

Aby oszacować całki po okręgach dobrze jest wiedzieć jak działa na nie funkcja $h(z)$.

$$h(z) = \omega = \frac{z-1}{2-z}, \quad z = \frac{2\omega+1}{1+\omega}$$

Niech $\omega = x + iy$.

$$z = \frac{2x + 2iy + 1}{1 + x + iy}$$

Policzmy obraz $C_1: |z-1| = r$:

$$z-1 = \frac{2x + 2iy + 1}{1 + x + iy} - 1 = \frac{x + iy}{x + 1 + iy}$$

$$|z-1|^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} = r^2$$

Teraz znajdujemy równanie opisujące obraz.

$$0 = (1-r^2)x^2 - 2r^2x - r^2 + (1-r^2)y^2$$

$$\frac{r^2}{1-r^2} = x^2 - 2\frac{r^2}{1-r^2}x + y^2$$

$$\frac{r^2}{(1-r^2)^2} = \left(x - \frac{r^2}{1-r^2}\right)^2 + y^2$$

Stąd,

$$h(C_1) = C\left(\frac{r^2}{1-r^2}, \frac{r}{1-r^2}\right)$$

Podobnie,

$$h(C_2) = C\left(-1, \frac{1}{r}\right)$$

$$h(C_R) = C\left(-1 - \frac{2}{R^2-4}, \frac{R}{R^2-4}\right)$$

Przystępujemy do szacowania całek.

$$\begin{aligned}
 \left| \oint_{C_1} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} (2 + re^{i\phi}) \sqrt[6]{\frac{re^{i\phi}}{1 - re^{i\phi}}} rie^{i\phi} d\phi \right| \\
 &\leq \int_0^{2\pi} r |2 + re^{i\phi}| \left| \left(\frac{re^{i\phi}}{1 - re^{i\phi}} \right)^{1/6} \right| d\phi \\
 &\leq r(2 + r) \int_0^{2\pi} \left| \exp \left[\frac{1}{6} \log \left(\frac{r^2}{1 - r^2} + \frac{r}{1 - r^2} e^{i\alpha} \right) \right] \right| d\phi = (*) \\
 \left| \exp \left(\frac{1}{6} \log \left[\frac{r}{1 - r^2} (r + e^{i\alpha}) \right] \right) \right| &= \left(\frac{r}{1 - r^2} \right)^{1/6} \left| \exp \left(\frac{1}{6} \log(r + e^{i\alpha}) \right) \right| \\
 &= \left(\frac{r}{1 - r^2} \right)^{1/6} \exp \left(\frac{1}{6} \log |r + e^{i\alpha}| \right) \leq \left(\frac{r}{1 - r^2} \right)^{1/6} (1 + r)^{1/6}
 \end{aligned}$$

Stąd kończymy szacowanie całki:

$$(*) \leq r(2 + r) 2\pi \left(\frac{r}{1 - r^2} \right)^{1/6} (1 + r)^{1/6} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

Dokładnie tak samo postępujemy z drugą całką.

$$\begin{aligned}
 \left| \oint_{C_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \left(3 + re^{i\phi} \left(-1 + \frac{1}{r} e^{i\beta} \right)^{1/6} \right) rie^{i\phi} d\phi \right| \\
 &\leq r(3 + r) \int_0^{2\pi} \left| \exp \left(\frac{1}{6} \log \frac{1}{r} (-r + e^{i\beta}) \right) \right| d\phi \\
 &\leq r(3 + r) \frac{1}{r^{1/6}} (1 + r)^{1/6} 2\pi \\
 &= 2\pi r^{5/6} (3 + r) (1 + r)^{1/6} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0
 \end{aligned}$$

I (prawie) grande finale!

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{C_R} f(z) dz - \oint_{C_1 \cup C_2 \cup D_1 \cup D_2} f(z) dz \\
 &= \oint_{C_R} f(z) dz + \int_{D_1} f(z) dz + \int_{D_2} f(z) dz - \oint_{C_1 \cup C_2} f(z) dz \\
 \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= I(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) + \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz \\
 I(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz
 \end{aligned}$$

Koniec końców zostaliśmy z jedną całką, która już się nie zeruje (inaczej coś by było mocno bez sensu). Policzmy ją używając pojęcia residuum w nieskończoności.

Wykład 13: Residuum w nieskończoności

Definicja 16 (Otoczenie ∞). Rozważmy zbiór $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Otoczeniem ∞ nazwiemy każdy zbiór otwarty w \mathbb{C} zawierający zewnętrznie pewnego koła $\overline{K}(0, R)$. Otoczenie nieskończoności (będące zbiorem otwartym) można wrazić jako

$$O \supset \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$$

Topologicznie, $\overline{\mathbb{C}}$ możemy sobie wyobrażać jako sferę, w której ∞ jest jednym z biegunów. Metrycznie to się oczywiście nie zgadza. Takie utożsamienie ma swoją nazwę i jest to **Sfera Riemanna**.

Definicja 17. Mówimy, że funkcja f jest holomorphyzna w ∞ jeśli funkcja $z \mapsto f(1/z)$ jest holomorphyzna w $z = 0$.

Funkcję holomorphyzną na zbiorze $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(0, R)$ można rozwinąć w szereg Laurenta traktując ten zbiór jak pierścień o mniejszym promieniu R i większym ∞ . Zazwyczaj ∞ jawnie nie należy do dziedziny funkcji, jednak jeśli f jest holomorphyzna na $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(0, R)$ to możemy mówić, że ∞ jest izolowanym punktem osobliwym.

W zależności od rozwinięcia f wyróżniamy 3 przypadki.

1. Istnieje $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ i granica jest różna od ∞ , to mówimy, że f ma osobliwość usuwalną w ∞ i kładziemy $f(\infty) = a_0$.

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-k}}{z^k} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0$$

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$$

Zobaczmy przykłady.

$$h(z) = \frac{1-z}{z-2} = \frac{1-z}{z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

dla $|z| > 2$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k - \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^l = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l}{z^l} - 1 \\ &= -1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \dots - \frac{4}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{1}{2z} - 1 \\ h(\infty) &= -1 \end{aligned}$$

Innym ciekawym przykładem jest $f(z) = e^{1/z}$.

$$f(z) = e^{1/z} = \dots + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{z} + 1$$

$$f(\infty) = 1$$

2. Jeśli istnieje różna od 0 i różna od ∞ granica $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k}$ to mówimy, że f ma w ∞ biegun rzędu k .

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k$$

Każdy wielomian stopnia k ma biegun rzędu k w nieskończoności. Podobnie każda funkcja wymierna, która ma stopień licznika o k wyższy od mianownika.

3. Jeśli granica $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ nie istnieje, to f ma w ∞ osobliwość istotną.

Przykładem jest funkcja $f(z) = e^z$.

Podobnie jak było ze zwykłymi osobliwościami, w ∞ może być osobliwość nieizolowana. Przykładowo $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ma osobliwości w $z = k\pi$ i nie rozwija się ona w żadnym otoczeniu ∞ . Wizualnie, ciąg osobliwości $z = k\pi$ można widzieć jako ciąg coraz bliższych punktów na południku sfery Riemanna, o punkcie skupienia w biegunie.

Definicja 18. Niech $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Jeśli jedynymi punktami osobliwymi f w Ω są bieguny to f nazywamy meromorficzną w Ω .

Twierdzenie 16. Każda funkcja meromorficzna w $\overline{\mathbb{C}}$ jest wymierna.

Dowód. Sfera Riemanna $\overline{\mathbb{C}}$ jest zbiorem zwartym. Osobliwości f mają być biegunami, zatem w szczególności są izolowane. Oznacza to, że jest ich skończona liczba. Gdyby nie była skończona, to z punktów osobliwych można wybrać ciąg, a z niego podciąg zbieżny. Granica tego ciągu również musi być punktem osobliwych i do tego nieizolowanym. Sprzeczność. Mamy więc bieguny $\{z_1, z_2, \dots, z_n, \infty\}$. Wokół każdej osobliwości rozwijamy funkcję w szereg w pierścieniu $\mathcal{R}(z_i, 0, R_i)$:

$$f(z) = \sum_{k=-k_i}^{k_\infty} a_k^{(i)} z^k$$

oraz w nieskończoności:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k_\infty} a_k^{(\infty)} z^k$$

Z każdego rozwinięcia możemy wziąć części osobliwe, tj.

$$g_i(z) = \sum_{k=-k_i}^{-1} a_k^{(i)} z^k$$

$$g_\infty(z) = \sum_{k=1}^{k_\infty} a_k^{(\infty)} z^k$$

Wzięliśmy te części po to aby stworzyć pewną funkcję holomorficzną na \mathbb{C} . Niech,

$$h(z) = f(z) - g_\infty(z) - \sum g_i(z)$$

$h(z)$ ma jedynie osobliwości usuwalne, zatem jest holomorficzną na całym \mathbb{C} , ograniczona po dookreśleniu w ∞ (skończona granica), czyli jest stała i $h(z) = h_0$.

$$f(z) = h_0 + \underbrace{g_\infty(z)}_{\text{wielomian}} + \underbrace{\sum g_i(z)}_{\text{wymierna}}$$

Stąd wniosek, że f również jest funkcją wymierną, co kończy dowód. ■

Definicja 19 (Residuum w ∞). Residuum w nieskończoności definiujemy następująco:

$$\text{Res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz$$

Tym razem jest to całka zegarowa, gdzie R jest takie, by w $\mathbb{C} \setminus K(0, R)$ nie było osobliwości innych niż ∞ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz &\stackrel{w=1/z}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1/R} f\left(\frac{1}{w}\right) \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1/R} \underbrace{\frac{f(1/w)}{w^2}}_{g(w)} dw = -a_1 \\ &= -\frac{1}{2\pi i} 2\pi i \text{Res}_0 g(w) = -\text{Res}_0 g(w) \end{aligned}$$

Rozwińmy $f(1/w)$ w $\mathcal{R}(0, 0, 1/R)$,

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{n-2} \\ &= \dots + \frac{a_{-1}}{w^3} + \frac{a_0}{w^2} + \frac{a_1}{w} + a_2 + \dots \\ \text{Res}_0 g &= a_1 \end{aligned}$$

Wystarczy więc równoważnie mieć rozwinięcie $f(1/w)$ wokół $w = 0$.

Uwaga 15. Residuum w ∞ liczy się ze wzoru:

$$\text{Res}_\infty f = -\text{Res}_0(f(1/w)w^{-2})$$

Wróćmy do liczonej wcześniej całki po kości.

$$\begin{aligned} -2\pi i \text{Res}_\infty f &= \oint_{C_R} (z+1) \left(\frac{z-1}{2-z}\right)^{1/6} dz \\ f\left(\frac{1}{w}\right) &= \left(\frac{1}{w} + 1\right) \underbrace{\left(\frac{1-w}{2w-1}\right)^{1/6}}_{l(w)^{1/6}} \end{aligned}$$

$l(w)$ jest holomorficzną w otoczeniu $w = 0$ oraz $l(0) = -1$, co jako argument funkcji zewnętrznej $z \mapsto z^{1/6}$ daje również holomorficzną $l(w)^{1/6}$ w tym otoczeniu, można więc tam ją rozwinąć w Taylora.

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{w} + 1 \right) (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots) \\ &= \frac{b_0}{w} + (b_1 + b_0) + (b_1 + b_2)w + \dots \end{aligned}$$

Stąd,

$$\text{Res}_0 g = b_1 + b_2$$

Oba wyrazy są wyrazami z rozwinięcia funkcji $k(w) = l^{1/6} = \exp\left(\frac{1}{6} \log l(w)\right)$ w zerze.

$$\begin{aligned} b_0 &= (l(0))^{1/6} = (-1)^{1/6} = e^{i\frac{\pi}{6}} \\ b_1 &= k'(0), \quad b_2 = \frac{1}{2}k''(0) \\ k'(0) &= \exp\left(\frac{1}{6} \log \frac{1-w}{2w-1}\right)' \Big|_{w=0} = k(0) \frac{1}{6} \frac{l'(0)}{l(0)} = \frac{1}{6} e^{i\frac{\pi}{6}} \\ k''(z) &= k(z) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{l'(z)}{l(z)}\right)^2 + k(z) \frac{1}{6} \frac{l''(z)l(z) - (l'(z))^2}{(l(z))^2} \\ k''(0) &= \frac{19}{36} e^{i\frac{\pi}{6}} \\ a_1 = b_1 + b_2 &= \frac{12+19}{72} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{31}{72} e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

W końcu jesteśmy w stanie obliczyć tę całkę.

$$\begin{aligned} I(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz \\ &= -(-2\pi i \text{Res}_\infty f) = -2\pi i \text{Res}_0 g \\ &= -2\pi i a_1 = -\frac{31\pi i}{36} e^{i\frac{\pi}{6}} \\ 1 - e^{i\frac{\pi}{3}} &= e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = -e^{i\frac{\pi}{6}} 2i \sin \frac{\pi}{6} = -ie^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} -ie^{i\frac{\pi}{6}} I &= -\frac{31}{36} \pi i e^{i\frac{\pi}{6}} \\ I &= \frac{31\pi}{36} \end{aligned}$$

Własności funkcji meromorficznych

Zauważmy, że zbiór funkcji meromorficznych na Ω , oznaczany jako $\mathcal{M}(\Omega)$, jest przestrzenią wektorową nad \mathbb{C} . Ponadto, jeśli $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$ to $fg \in \mathcal{M}(\Omega)$ zatem zbiór funkcji meromorficznych jest algebrą. Jeśli dodatkowo Ω jest spójny to f/g też jest meromorficzna i wtedy $\mathcal{M}(\Omega)$ jest ciałem.

Twierdzenie 17. Jeśli $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ to $f' \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Dowód. Jeśli f ma w z_0 biegun rzędu k to w otoczeniu z_0 f można zapisać jako $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, gdzie $g(z_0) \neq 0$. Wtedy f' ma biegun rzędu $k + 1$ w z_0 oraz:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -k(z - z_0)^{-k-1}g(z) + (z - z_0)^{-k}g'(z) \\ &= (z - z_0)^{-(k+1)}[-kg(z) + (z - z_0)g'(z)] \end{aligned}$$

Funkcja w nawiasie jest holomorficzna w z_0 : $-kg(z_0) \neq 0$. f' ma w Ω jedynie bieguny więc jest meromorficzna. ■

Twierdzenie 18. Niech $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$. Jeśli f ma w z_0 zero rzędu k to $f'(z)$ ma w z_0 zero rzędu $k - 1$.

Jeśli f ma w z_0 biegun rzędu k to $f'(z)$ ma w z_0 biegun rzędu $k + 1$.

Dowód. Skoro $f(z_0) = 0$ i zero jesr rzędu k , to $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, gdzie g jest meromorficzna i $g(z_0) \neq 0$, oraz g jest regularna w otoczeniu z_0 .

$$\begin{aligned} f'(z) &= k(z - z_0)^{k-1}g(z) + (z - z_0)^k g'(z) \\ &= (z - z_0)^{k-1}[kg(z) + (z - z_0)g'(z)] \end{aligned}$$

w z_0 : $kg(z_0) \neq 0$. Niech z_0 będzie biegunem f . Przyjrzyjmy się ilorazowi f'/f .

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}, \quad f'(z) = \frac{-kg(z) + (z - z_0)g'(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-kg(z) + (z - z_0)g'(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \cdot \frac{(z - z_0)^k}{g(z)} \\ &= -\frac{k}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

W pierwszym członie mamy biegun z residuum $-k$, drugi człon jest regularny w otoczeniu z_0 .

Teraz niech z_0 będzie zerem f rzędu k .

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^k g(z) \\ f'(z) &= (z - z_0)^{k-1}[kg(z) + (z - z_0)g'(z)] \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

Sytuacja taka sama jak w przypadku, gdy z_0 było biegunem. ■

Podsumowując, jeśli f ma w z_0 biegun rzędu k to f'/f ma w z_0 biegun prosty z residuum $-k$.

Jeśli f ma w z_0 zero rzędu k , to f'/f ma w z_0 biegun prosty z residuum k .

Twierdzenie 19. Niech Ω będzie obszarem spójnym, $0 \neq f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $D \subset \Omega$ jest zwartym obszarem z brzegiem. Wówczas,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_z - N_b$$

gdzie N_z to liczba zer f w D (z krotnościami) a N_b to liczba biegunów (z krotnościami).

Dowód. Jest to prosty wniosek z efektu powyższych rozważań. ■

Rozdział 3

Teoria miary, rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 14: Algebry zbiorów

30 lis 2020

Definicja 20 (Algebra zbiorów). Algebrą zbiorów \mathcal{P} nazywamy rodzinę $\mathcal{P} \subset 2^X$ gdzie X jest pewnym wyjściowym zbiorem (przestrzenią), taką że:

$$A, B \in \mathcal{P} \implies A \cup B \in \mathcal{P}, A \cap B \in \mathcal{P}, A \setminus B \in \mathcal{P}, X \in \mathcal{P}$$

Definicja 21 (σ -algebra zbiorów). σ -algebrą zbiorów nazywamy algebrę zbiorów, która spełnia dodatkowy warunek: jeśli $A_n \in \mathcal{P}$ dla $n \in \mathbb{N}$ to $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$.

W szczególności, przecięcie σ -algebr jest σ -algebrą. Zatem, σ -algebry można generować. Mianowicie, dla dowolnej rodziny zbiorów istnieje najmniejsza σ -algebra zawierająca tę rodzinę zbiorów. Taką algebrę nazywamy σ -algebrą generowaną przez rodzinę zbiorów. Ważnym przykładem jest σ -algebra generowana przez rodzinę zbiorów otwartych ustalonej przestrzeni metrycznej – jest to σ -algebra zbiorów Borelowskich.

W tym miejscu przyjmijmy kilka konwencji używanych przez następne wykłady. Jeśli $A \cap B = \emptyset$ to zamiast $A \cup B$ będziemy pisać $A \sqcup B$. Symbolem $\overline{\mathbb{R}}_+$ oznaczmy zbiór $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, gdzie $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$.

Definicja 22 (Funkcja addytywna). $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ nazywamy addytywną jeśli $\phi(A \sqcup B) = \phi(A) + \phi(B)$.

W dalszym ciągu będziemy pomijać trywialną funkcję addytywną $\phi(A) = \infty$. Przykładem (nietrywialnej) funkcji addytywnej jest funkcja przypisująca zbiorowi jego moc.

Definicja 23 (Funkcja σ -addytywna). $\phi: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ nazywamy σ -addytywną jeśli

$$\phi\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$$

Funkcja addytywna ϕ spełnia warunki:

- $\phi(\emptyset) = 0$
- $\phi(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \phi(A_1) + \phi(A_2) + \dots + \phi(A_n)$
- $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$
- $A \subset B \implies \phi(A) \leq \phi(B)$
- $\phi(A \setminus B) = \phi(A) - \phi(A \cap B)$

Dowody tych własności są elementarne, więc skryba pozwoli je sobie ominąć.

Uwaga 16. Jeśli ϕ jest σ -addytywna i rozważamy ciąg wstępujący $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, wówczas

$$\phi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A_n)$$

Dowód. Niech $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, przy czym stawiamy $B_1 = A_1$. Wówczas, $A_n = A_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_n$. Podobnie, $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Teraz rozważamy działanie funkcji σ -addytywnej ϕ .

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \phi(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A_n) \end{aligned}$$

■

Definicja 24 (Miara). Miarą nazywamy σ -addytywną funkcję $\mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ na σ -ciele \mathcal{P} .

Ciekawym i prostym przykładem miary jest miara Diraca. Niech $\mathcal{P} = 2^X$ oraz $a \in X$. Wówczas zdefiniujemy $\delta_a: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ taką, że

$$\begin{aligned} \delta_a(A) &= 1 & a \in A \\ \delta_a(A) &= 0 & a \notin A \end{aligned}$$

Wykład 15: Miara Lebesgue'a

Rozważmy kostki otwarte, domknięte lub inne.

04 gru 2020

Uwaga 17. Różnica dowolnych dwóch kostek jest rozłączną sumą kostek.

Dowód. Niech $I = I_1 \times \dots \times I_n$ oraz $J = J_1 \times \dots \times J_n$ gdzie I_i, J_i to odcinki z końcami lub bez. Poglądowo, $I_i = (a_i, b_i)$ oraz $J_i = (c_i, d_i)$. Zbiór punktów krańcowych $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ wyznacza trzy odcinki $\{K_i^1, K_i^2, K_i^3\}$ (niektóre być może trywialne jeśli któreś z elementów tego zbioru są tożsame). Suma, przecięcie i obie różnice $I \cup J, I \cap J, I \setminus J, J \setminus I$ składają się z kostek postaci $K_1^{\alpha_1} \times K_2^{\alpha_2} \times \dots \times K_n^{\alpha_n}$ gdzie $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Niektóre kostki będą trywialne, ale nic to nie zmienia. ■

Definicja 25 (Miara kostki). Dla kostki D , miara kostki dana jest przez

$$m(D) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Póki co, słowo „miara” będzie nadużywane. Dopóki nie wejdziemy w to głębiej, będzie to jedynie semantyka, nie miara w sensie definicyjnym.

Definicja 26 (Zbiór elementarny). Zbiór elementarny $A = \bigsqcup_{i=1}^n D_i$ to skończona suma rozłącznych kostek. Rodzinę zbiorów elementarnych oznaczamy przez \mathcal{E} .

Uwaga 18. Rodzina zbiorów elementarnych prawie jest algebrą zbiorów. Prawie, gdyż $\mathbb{R}^n \notin \mathcal{E}$.

$$A, B \in \mathcal{E} \implies A \cup B \in \mathcal{E}, A \cap B \in \mathcal{E}, A \setminus B \in \mathcal{E}$$

Uwaga 19 (Miara zbioru elementarnego).

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n D_i, \quad m(A) = \sum_{i=1}^n m(D_i)$$

Posiadamy już \mathcal{E} – rodzinę zbiorów elementarnych, $m: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ i wiemy o niej, że jest:

- addytywna: $m(A \sqcup B) = m(A) + m(B)$
- monotoniczna: $A \subset B \implies m(A) \leq m(B)$
- $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$

Teraz chcielibyśmy się zająć uogólnianiem, bowiem wiemy, że \mathcal{E} nie jest σ -algebrą i zbiory, które liczymy są dla nas jeszcze zbyt małe.

Zbiory elementarne zazwyczaj nie są ani otwarte ani domknięte. Możemy je jednak przybliżać zbiorami otwartymi od góry i domkniętymi od dołu.

Uwaga 20. Weźmy dowolny $A \in \mathcal{E}$. Wówczas, $\forall \varepsilon > 0 \exists C$ domknięty i O otwarty w \mathcal{E} takie, że $C \subset A \subset O$ oraz

$$m(O) - \varepsilon \leq m(A) \leq m(C) + \varepsilon$$

Teraz zajmmy się zbadaniem σ -addytywności m .

Twierdzenie 20. Niech $A, A_n \in \mathcal{E}$ oraz $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Wówczas,

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Dowód. Weźmy zbiór elementarny C domknięty, $C \subset A$ taki, że C jest mniejszy od A o mniej niż $\varepsilon/2$. Naturalnie $m(C) \leq m(A)$ ale $m(A) \leq m(C) + \varepsilon/2$. Weźmy również O_n otwarty, elementarny, przykrywający A_n . $A_n \subset O_n$ oraz $m(O_n) \leq m(A_n) + \varepsilon/2^{n+1}$. Suma ciągu zbiorów O_n jest otwartym pokryciem C , gdyż

$$C \subset A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

O jest ograniczony i domknięty, więc zwarty. Oznacza to, że z $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ można wybrać skończone podpokrycie C

$$C \subset \bigcup_{n=1}^N O_n$$

W takim razie,

$$\begin{aligned} m(C) &\leq \sum_{n=1}^N m(O_n) \\ m(A) &\leq m(C) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^N m(O_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{n=1}^N \left[m(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right] + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

W takim razie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon$$

zatem

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

■

Twierdzenie 21. m jest σ -addytywna.

Dowód. Weźmy $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gdzie $A, A_n \in \mathcal{E}$. Z jednej strony $A \supset \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz

$$m(A) \geq \sum_{n=1}^N m(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Z drugiej strony, z poprzedniego twierdzenia wiemy, że $A \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ oraz

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

Porównując obie nierówności wnioskujemy, że

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

■

Miara zewnętrzna

Weźmy dowolny podzbiór E przestrzeni \mathbb{R}^n . Istnieje ciąg elementarnych zbiorów otwartych A_n taki, że $E \subset \bigcup A_n$ chociażby dlatego, że \mathbb{R}^n ma tę własność.

Definicja 27 (Miara zewnętrzna). Miarą zewnętrzną E nazywamy

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

gdzie inf liczymy po wszystkich ciągach otwartych (A_n) takich, że $E \subset \bigcup A_n$.

Jeśli E jest elementarny to $\mu^*(E) = m(E)$. Dowodzi się to podobnie jak poprzednie twierdzenie o σ -addytywności m .

μ^* ma oczywiste własności:

- $\forall E \quad \mu^*(E) \geq 0$
- $E_1 \subset E_2 \implies \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$

Wykład 16

Uwaga 21. Miara zewnętrzna jest subaddytywna:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

07 gru 2020

Dowód.

$$E_n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{ni}$$

gdzie A_{ni} są elementarne.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_{ni}) &\leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n &\subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{ni} \\ \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leq \sum_n \sum_i m(A_{ni}) \leq \sum_n \left[\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right] \\ &= \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Wobec dowolności ε ,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_n \mu^*(E_n)$$

To kończy dowód. ■

Zasadniczo, miara zewnętrzna μ^* jest już tą miarą, do której chcieliśmy prowadzić nasze uogólnienia. Nie mamy wciąż jednak σ -ciała, na którym ta miara miałaby być miarą w pełnym tego słowa znaczeniu.

Definicja 28 (Odległość między zbiorami).

$$\rho(A, B) = \mu^*(A \Delta B)$$

Własności:

- $\rho(A, A) = 0$
- $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
- $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$
- $\rho(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2)$
- $\rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leq \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2)$
- $\rho(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \leq \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2)$

ρ jest bliskie metryce, jednak nią nie jest bo nie spełnia warunku $\rho(A, B) = 0 \implies A = B$ oraz może być nieskończona. Z tego powodu, obcięta do zbiorów skończonych, jest pseudometryką.

Definicja 29 (Zbiór skończenie mierzalny). Zbiór X nazywamy zbiorem skończenie mierzalnym w sensie Lebesgue’a jeśli istnieje ciąg A_n zbiorów elementarnych taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, X) = 0$.
Rodzinę zbiorów skończenie mierzalnych oznaczamy przez \mathfrak{M}_F .

Uwaga 22. Jeśli X jest skończenie mierzalny w sensie Lebesgue a to $\mu^*(X) < \infty$.

Dowód.

$$\begin{aligned}\mu^*(X) &= \rho(X, \emptyset) \leq \rho(X, A_n) + \rho(A_n, \emptyset) \\ \mu^*(A_n) &= m(A_n) < \infty\end{aligned}$$

Dla dużych n , $\rho(X, A_n)$ może być dowolnie małe. Stąd

$$\mu^*(X) < \infty$$

■

Jest to zasadniczo uzasadnieniem tej nazwy „skończenie mierzalny”.

Definicja 30 (Rodzina zbiorów mierzalnych). Rodzinę zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a nazywamy rodziną przeliczalnych sum zbiorów skończenie mierzalnych. Rodzinę tę oznaczamy przez \mathfrak{M} . Miarę zewnętrzną μ^* obciętą do \mathfrak{M} nazywamy miarą Lebesgue’a.

Twierdzenie 22. \mathfrak{M} jest σ -ciałem.

Dowód. Najpierw pokazujemy, że \mathfrak{M}_F jest prawie $(\mathbb{R}^n \notin \mathfrak{M}_F)$ algebrą zbiorów. $X, Y \in \mathfrak{M}_F$, $A_n \rightarrow X$, $B_n \rightarrow Y$.

$$\rho(X \cup Y, A_n \cup B_n) \leq \rho(X, A_n) + \rho(Y, B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Stąd, $X \cup Y \in \mathfrak{M}_F$

$$\rho(X \cap Y, A_n \cap B_n) \leq \rho(X, A_n) + \rho(Y, B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Stąd, $X \cap Y \in \mathfrak{M}_f$

$$\rho(X \setminus Y, A_n \setminus B_n) \leq \rho(X, A_n) + \rho(Y, B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Stąd, $X \setminus Y \in \mathfrak{M}_F$. Teraz, \mathbb{R}^n to przeliczalna suma kostek.

$$\begin{aligned}X &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \quad Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \\ X \cup Y &= \bigcup_{n, m} X_n \cup Y_m \in \mathfrak{M}_F \\ X \cap Y &= \bigcup_{n, m} X_n \cap Y_m \in \mathfrak{M}_F\end{aligned}$$

Z pokazaniem $X \setminus Y$ jest problem. Potrzebny jest lemat, który udowodnimy zaraz.

$$\begin{aligned} X \setminus Y &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \right) \setminus Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \setminus Y \\ X_n \setminus Y &= X_n \setminus (X_n \cap Y) \\ \mu(X_n \cap Y) &\leq \mu(X_n) < \infty \end{aligned}$$

Stąd $X_n \cap Y \in \mathfrak{M}_F$. ■

Przed lematem musimy sprawdzić addytywność μ na \mathfrak{M}_F .

- $A, B \in \mathfrak{M}$ – przynajmniej jeden ze zbiorów ma miarę skończoną. Wówczas,

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \rho(A, B)$$

Jeśli obie miary są nieskończone to nie ma problemu. Trzeba się zająć przypadkiem, gdy obie miary są skończone.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \rho(A, \emptyset) \leq \rho(A, B) + \rho(B, \emptyset) = \rho(A, B) + \mu(B) \\ \mu(A) - \mu(B) &\leq \rho(A, B) \end{aligned}$$

W drugą stronę,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \rho(B, \emptyset) \leq \rho(B, A) + \rho(A, \emptyset) = \rho(A, B) + \mu(A) \\ \mu(B) - \mu(A) &\leq \rho(A, B) \end{aligned}$$

Stąd,

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \rho(A, B)$$

- Weźmy ciąg zbiorów mierzalnych taki, który przybliża zbiór X . $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $X_n \in \mathfrak{M}_F$ i $\lim \rho(X_n, X) = 0$.

$$\begin{aligned} |\mu_n - \mu(X)| &\leq \rho(X_n, X) \rightarrow 0 \\ \mu(X_n) &\rightarrow \mu(X) \end{aligned}$$

- Weźmy $A, B \in \mathfrak{M}_F$ przybliżane przez A_n, B_n .

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_n) + \mu(B_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (m(A_n) + m(B_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (m(A_n \cup B_n) + m(A_n \cap B_n)) \\ &= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \end{aligned}$$

Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \sqcup B)$. Jest to właśnie warunek addytywności.

Lemat 3. $x \in \mathfrak{M}_F \iff \mu(X) < \infty$

Dowód. Niech $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, gdzie $X_n \in \mathfrak{M}_F$. Niech $E_1 = X_1$, $E_2 = X_2 \setminus X_1$, $E_3 = X_3 \setminus X_2$ itd. Wówczas,

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^N X_n &= \bigsqcup_{n=1}^N E_n \\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^N X_n\right) &= \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^N E_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(E_n) \\ X \supset \bigsqcup_{n=1}^N E_n &\implies \mu(X) \geq \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^N E_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(E_n) \end{aligned}$$

Zachodzi to dla każdego N , zatem

$$\mu(X) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Z drugiej strony wiemy, że miara jest subaddytywna, zatem

$$\mu(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \\ \rho\left(X, \bigcup_{n=1}^N X_n\right) &= \rho\left(X, \bigsqcup_{n=1}^N E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Niech,

$$Z_N = \bigsqcup_{n=1}^N E_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} X$$

Rozważmy ciąg $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset X$. Każdy $Z_i \in \mathfrak{M}_F$, zatem jest granicą pewnego ciągu zbiorów elementarnych. Weźmy $(Z_{N,k}) \in \mathcal{E}$ będący ciągiem zbiorów elementarnych.

$$\begin{aligned} Z_{N,k} &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} Z_N \\ \rho(Z_N, Z_{N,k}) &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Spośród tych zbiorów chcemy wybrać ciąg zbieżny do X . $\forall m \in \mathbb{N} \exists N_m \in \mathbb{N} : \rho(X, Z_{N,m}) < 1/2^{m+1}$. Jak już wybraliśmy indeksy N_m , to wybieramy z tych Z_i wyrazy coraz bliższe do X . $\exists_{k_m \in \mathbb{N}} : \rho(Z_{N_m}, Z_{N_m, k_m}) < 1/2^{m+1}$.

$$\mathbb{N} \ni m \mapsto Z_{N_m, k_m} \in \mathcal{E}$$

$$\rho(X, Z_{N_m, k_m}) \leq \rho(X, Z_{N_m}) + \rho(Z_{N_m}, Z_{N_m, k_m}) \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Stąd $X \in \mathfrak{M}_F$. ■

Wykład 17

11 gru 2020

Twierdzenie 23. μ jest miarą na \mathfrak{M} .

Dowód. Niech $X = \bigsqcup_x E_n$, gdzie $E_n \in \mathfrak{M}$. Jeśli $\forall n \mu(E_n) < \infty$ to $E_n \in \mathfrak{M}_F$. Wiemy, że

$$\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Jeśli przynajmniej jeden E_n ma $\mu(E_n) = \infty$, to szereg jest rozbieżny (z monotoniczności miary: $\mu(X) \geq \mu(E_n) = \infty$). ■

Twierdzenie 24. Mierzalne są: zbiory otwarte, zbiory domknięte, zbiory borelowskie, zbiory miary Lebesgue'a zero, zbiory których miara zewnętrzna jest zero.

Dowód. Dowodzimy po kolei.

- Otwarte: rozważmy $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$. Jeśli zażądamy, by $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$, to takich kostek jest przeliczalnie wiele. Każdy zbiór otwarty jest sumą takich kostek, zatem jest przeliczalną sumą kostek. To jest mierzalne.
- Domknięte: są dopełnieniami otwartych. Dopełnienie zbioru mierzalnego jest mierzalne.
- Borelowskie: całe σ -ciało generowane przez mierzalne zbiory otwarte i domknięte musi być mierzalne.
- Miary zero: X jest miary zero, jeśli $\exists (D_n)$ ciąg kostek takich, że $X \subset \bigcup D_n$, $\sum m(D_n) < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \mu^*(X) &= \rho(X, \emptyset) = \rho\left(X, \bigcup D_n\right) + \rho\left(\bigcup D_n, \emptyset\right) \\ &\leq 2 \sum m(D_n) \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Miara zewnętrzna tego zbioru jest równa zero. Stąd miara Lebesgue'a tych zbiorów jest zerowa. ■

Przykład zbioru niemierzalnego Okazuje się, że istnienie zbioru niemierzalnego jest równoważne z przyjęciem aksjomatu wyboru!

Niech $x, y \in [0, 1]$ oraz wprowadzamy relację równoważności $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Skoro to relacja równoważności, to znaczy, że $[0, 1]$ jest rozłączną sumą wszystkich klas równoważności.

$$[0, 1] = \bigcup_{x \in [0, 1]} [x]$$

$$[x] \cap [y] = \emptyset, x \not\sim y$$

Niech A zawiera po jednym elemencie każdej klasy (tu wchodzi pewnik wyboru). Wykażemy, że A jest niemierzalny. Rozważmy $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Jest to również zbiór przeliczalny, zatem można go ustawić w ciąg $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$A_n = \{x: x = q_n + a, a \in A\}$$

1. Jeśli $n \neq m$ to $A_n \cap A_m = \emptyset$. Jeśli $x \in A_n$ i $x \in A_m$ to $\exists a, a' \in A: x = q_n + a = q_m + a'$. Wówczas $a - a' = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$ zatem $a \sim a'$. Skoro oba siedzą w A_n to $a = a'$, zatem $q_n = q_m$, a stąd $n = m$. Sprzeczność.
2. $\bigcup A_n \subset [-1, 2]$, gdyż $A \in [0, 1]$ oraz $q_n \in [-1, 1]$.
3. $[0, 1] \subset \bigcup A_n$. Niech $x \in [0, 1]$. Wówczas istnieje klasa $[x]$. Wobec tego $\exists a \in A: a \in [x]$. Stąd, $a - x \in \mathbb{Q}$ i $a - x \in [-1, 1]$. W związku z tym, $\exists n: q_n = a - x$. Stąd $x = q_n + a \in A_n$.

Założmy, że A jest mierzalny. Miara jest nieimiennicza ze względu na przesunięcia, zatem

$$\mu(A) = \mu(A_n)$$

$$\sum_n \mu(A) = \sum_n \mu(A_n) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu([-1, 2]) = 3$$

Stąd wnioskujemy, że każda z tych miar $\mu(A) = 0$, gdyż to suma jednakowych liczb. Z drugiej strony wiadomo, że $[0, 1] \subset \bigsqcup A_n$. Wobec tego $\mu([0, 1]) \leq \mu(\bigsqcup A_n)$, zatem $1 \leq 0$. Sprzeczność, czyli A jest niemierzalny.

Funkcje mierzalne

Definicja 31. Funkcję $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy mierzalną w sensie Lebesgue'a jeśli $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R}^m: f(x) > a\}$ jest mierzalny.
Równoważnie, $\{x: f(x) \leq a\}, \{x: f(x) \geq a\}, \{x: f(x) < a\}$.

W szczególności funkcje ciągłe są mierzalne (przeciwwobraz zbioru otwartego z definicji jest otwarty i mierzalny).

Całka Lebesgue'a Niech f będzie dodatnią funkcją mierzalną. Niech $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$ będzie podziałem $(0, \infty)$. Definiujemy sumę dolną:

$$S(\pi, f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(\{x: a_i < f(x) < a_{i+1}\})$$

Innymi słowy dzielimy wartości na przedziały i patrzymy na przeciwobrazy. Jeśli weźmiemy późniejszy podział, czyli $\pi' > \pi$ to $S(\pi', f) \geq S(\pi, f)$.

Definicja 32. f jest całkowalna w sensie Lebesgue'a jeśli ciąg uogólniony $\pi \rightarrow S(\pi, f)$ jest ograniczony (tzn. jest zbieżny bo wiadomo, że jest monotoniczny). Granica tego ciągu to całka Lebesgue'a. Zapisuje się to jako:

$$\int f \, d\mu$$

Lebesgue vs. Riemann Weźmy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Jedyny niezerowy wkład pochodzi od podziału $[a_i, a_{i+1}) \ni 1$. Ponadto, $a_1 \mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$, zatem ta całka istnieje i jest równa 0. Całka Riemanna tej funkcji nie istnieje, bo zbiór punktów nieciągłości nie jest miary zero.

Całki Lebesgue'a w fizyce Rozważa się zbiór funkcji $L^2(\mathbb{R}^3)$, nazywanych funkcjami całkowalnymi z kwadratem. Są to funkcje $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie istnieje $\int \bar{f} \cdot f \, d\mu = \int \|f\|^2 \, d\mu$. Taką całkę, funkcji f przyporządkowuje taki iloczyn skalarny 3/2 liniowy. Jest to iloczyn skalarny na zbiorze klas równoważności funkcji. $L^2(\mathbb{R}^3)$ to przestrzeń stanów w mechanice kwantowej.

Wykład 18: Całka Lebesgue'a

14 gru 2020 Uwaga: Funkcja całkowalna z kwadratem niekoniecznie musi znikać w nieskończoności! To uwaga na mechanikę kwantową...

Pisząc $\int f \, d\mu$ mieliśmy na myśli całkę po całym \mathbb{R} , natomiast całkując po dowolnym zbiorze mierzalnym, $\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu$, gdzie χ_E jest funkcją charakterystyczną zbioru E .

Uwaga 23. Niech $f_1, f_2, \dots, f_k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ mierzalne oraz F ciągła. Wtedy $h = F \circ (f_1, \dots, f_k): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna.

Dowód. $F^{-1}((a, \infty))$ jest otwarty, a więc jest sumą przeliczalnej liczby kostek.

$F^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ gdzie $D_n = (a_1^n, b_1^n) \times \cdots \times (a_k^n, b_k^n)$. Chcemy sprawdzić, czy $h^{-1}((a, \infty))$ jest mierzalny?

$$(f_1, \dots, f_k)^{-1}(D_n) = \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}((a_i^n, b_i^n)) \subset \mathbb{R}^m$$

$$h^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{i=1}^k f_i^{-1}((a_i^n, b_i^n))$$

Stąd wynika mierzalność h^{-1} . ■

Uwaga 24. Jeśli f, g mierzalne, to $|f|, f + g, fg, f/g$ są mierzalne, podobnie $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ i $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$.

Uwaga 25. Jeśli $\mu^*\left(\{x: f(x) \neq 0\}\right) = 0$ to f jest mierzalna.

Dowód. Niech $f^+ = \max\{0, f\}$ oraz $f^- = \max\{0, -f\}$. Dla $a \geq 0$:

$$f^{+ -1}((a, \infty)) \subset \underbrace{\{x: f(x) \neq 0\}}_{\text{miara zero}}$$

Dla $a < 0$,

$$f^{+ -1}((a, \infty)) = \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{mierzalny}}$$

Dla f^- podobnie. ■

Przez określenie „prawie wszędzie” rozumiemy wszędzie poza zbiorem miary zero.

Uwaga 26. Jeśli f mierzalna i $f = g$ prawie wszędzie: $\mu^*\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0$, to g jest mierzalna.

Dowód. Funkcja $g - f$ jest mierzalna, natomiast $g = (g - f) + f$. ■

Twierdzenie 25. Funkcja mierzalna i ograniczona na zbiorze miary skończonej jest całkowalna.

Dowód. Niech f będzie mierzalna i ograniczona. Bierzemy $E \in \mathfrak{M}$ oraz $\mu(E) < \infty$. Bierzemy też f^+, f^- . Stąd, $\forall_{x \in E} a \leq f(x) < b$.

$$[a, b) = [a_0 = a, a_1) \cup [a_1, a_2) \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n = b)$$

$$\overline{S} = \sum_i a_{i+1} \mu\left(f^{-1}([a_i, a_{i+1})) \cap E\right)$$

$$\underline{S} = \sum_i a_i \mu\left(f^{-1}([a_i, a_{i+1})) \cap E\right)$$

Szacujemy różnicę między sumą górną i dolną.

$$\begin{aligned} \overline{S}(\pi, f, E) - \underline{S}(\pi, f, E) &= \sum_i (a_{i+1} - a_i) \mu\left(f^{-1}([a_i, a_{i+1})) \cap E\right) \\ &\leq \max_i \{(a_{i+1} - a_i)\} \sum_i \mu\left(f^{-1}([a_i, a_{i+1})) \cap E\right) \\ &\leq \max_i \{(a_{i+1} - a_i)\} \mu(E) \end{aligned}$$

Przy drobniejszych podziałach (względem relacji skierowania) maksimum dąży do zera,

$$\xrightarrow{\sim} 0$$

■

Własności całki Lebesgue'a

1. $\mu(\{x: f(x) \neq 0\}) = 0 \implies \int d\mu = 0$
2. $\mu(E) = 0 \implies$ każda funkcja jest całkowalna i $\int_E f d\mu = 0$
3. $A \subset E$ są mierzalne i jeśli f całkowalna na E , to f całkowalna na A .
4. f mierzalna i ograniczona: $a \leq f(x) \leq b$ to $a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E)$
5. Multiplikatywność: f całkowalna na E to $\int_E (cf) d\mu = c \int_E f d\mu$
6. Jeśli $a \in \mathbb{R}$ to $\int_E (f + a) d\mu = \int_E f d\mu + a\mu(E)$

Brakuje liniowości i monotoniczności.

Twierdzenie 26. Jeśli funkcja f jest całkowalna to odwzorowanie

$$\mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_E f d\mu$$

jest σ -addytywne.

Dowód. Najpierw pokazujemy addytywność. Chcemy pokazać, że $\int_{A \sqcup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$. Bierzemy podział π odcinka $[0, \infty)$. Bierzemy $E = A \sqcup B$.

$$\begin{aligned} E_i &= E \cap f^{-1}([a_i, a_{i+1})) \\ A_i &= A \cap f^{-1}([a_i, a_{i+1})) \\ B_i &= B \cap f^{-1}([a_i, a_{i+1})) \\ A_i \sqcup B_i &= E_i \end{aligned}$$

Wypisujemy sumy dolne:

$$\begin{aligned} S(\pi, f\chi_E) &= \sum a_i \mu(E_i) \\ S(\pi, f\chi_A) &= \sum a_i \mu(A_i) \\ S(\pi, f\chi_B) &= \sum a_i \mu(B_i) \end{aligned}$$

Dodając ostatnie dwie sumy dostajemy tę pierwszą.

$$S(\pi, f\chi_E) = S(\pi, f\chi_A) + S(\pi, f\chi_B)$$

W granicy względem relacji skierowania \succ ,

$$\int_E f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$$

Teraz dowodzimy σ -addytywność dla $\mu(E) < \infty$. Stwierdzenie pomocnicze: Oznaczamy $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Teza:

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu$$

Bierzemy podział π zawierający liczby naturalne, tj, $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ zawiera podciąg liczb naturalnych. Stąd wynika, że podział $\rho: (0, 1, 2, \dots)$ jest grubszy niż π .

$$\begin{aligned} S(\rho, f) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mu(f^{-1}([n, n+1))) < \infty \\ \text{czyli} \quad \sum_{n=N}^{\infty} n \mu(f^{-1}([n, n+1))) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \\ S(\pi, f) - S(\pi, f_N) &= \sum_i a_i \mu(f^{-1}([a_i, a_{i+1}))) - \sum_{i: a_i < N} a_i \mu(f^{-1}([a_i, a_{i+1}))) \\ &\quad - N \mu(f^{-1}([N, \infty))) \\ &= \sum_{i: a_i \geq N} a_i \mu(f^{-1}([a_i, a_{i+1}))) - \sum_{i: a_i \geq N} N \mu(f^{-1}([a_i, a_{i+1}))) \\ &= \sum_{i: a_i \geq N} (a_i - N) \mu(f^{-1}([a_i, a_{i+1}))) \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} k \mu(f^{-1}([k, k+1))) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Wracamy do dowodu twierdzenia.

$$E = \bigsqcup_k E_k, \quad \mu(E) = \sum_k \mu(E_k) < \infty$$

Niech $\varepsilon > 0$ i korzystamy z pomocniczego twierdzenia.

$$\begin{aligned} \exists n_\varepsilon: \left| \int_E f \, d\mu - \int_E f_{n_\varepsilon} \, d\mu \right| &< \varepsilon \\ A_\varepsilon &= \{x \in E: f(x) \leq n_\varepsilon\} \end{aligned}$$

Poza tym zbiorem, $f_{n_\varepsilon} = n_\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \exists N_\varepsilon: \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \mu(E_k) &< \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon} \\ E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k &= \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{N_\varepsilon} E_k}_{E_\varepsilon} \cup \bigsqcup_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} E_k \\ \int_E f \, d\mu &= \int_{E_\varepsilon} f \, d\mu + \int_{E \setminus E_\varepsilon} f \, d\mu \\ E \setminus E_\varepsilon &= (E \setminus E_\varepsilon) \cap A_\varepsilon \sqcup E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon) \\ \int_{(E \setminus E_\varepsilon) \cap A_\varepsilon} f \, d\mu &\leq n_\varepsilon \mu((E \setminus E_\varepsilon) \cap A_\varepsilon) \\ \int_{E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)} f \, d\mu &= \int_{E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)} (f - n_\varepsilon) \, d\mu + n_\varepsilon \mu(E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)) \\ &\leq n_\varepsilon \mu(E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)) + \int_{E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)} (f - f_{n_\varepsilon}) \, d\mu \\ &\leq n_\varepsilon \mu(E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)) + \int_E (f - f_{n_\varepsilon}) \, d\mu \\ \int_{E \setminus E_\varepsilon} f \, d\mu &= \int_{(E \setminus E_\varepsilon) \cap A_\varepsilon} f \, d\mu + \int_{E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)} f \, d\mu \\ &\leq n_\varepsilon \mu((E \setminus E_\varepsilon) \cap A_\varepsilon) + n_\varepsilon \mu(E \setminus (E_\varepsilon \cup A_\varepsilon)) + \int_E (f - f_{n_\varepsilon}) \, d\mu \\ &= n_\varepsilon \mu(E \setminus E_\varepsilon) + \int_E (f - f_{n_\varepsilon}) \, d\mu < n_\varepsilon \frac{\varepsilon}{n_\varepsilon} + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Teraz,

$$\begin{aligned} \int_E f \, d\mu &= \int_{E_\varepsilon} f \, d\mu + \int_{E \setminus E_\varepsilon} f \, d\mu \\ \int_E f \, d\mu &= \int_{\bigsqcup_{n=1}^{N_\varepsilon} E_n} f \, d\mu + \int_{E \setminus E_\varepsilon} f \, d\mu \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \int_{E_n} f \, d\mu + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Stąd,

$$\int_E f \, d\mu - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \int_{E_n} f \, d\mu \leq 2\varepsilon$$

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$$

σ -addytywność dla $\mu(E) = \infty$.

Wprowadzamy $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_n$ i oznaczamy $B_\varepsilon = \{x \in E : f(x) > \varepsilon\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E$, $\mu(B_\varepsilon) < \infty$.

$$\int_{B_\varepsilon} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n \cap B_\varepsilon} f \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$$

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon} f \, d\mu$$

$$\int_E f \, d\mu \leq \sum_n \int_{E_n} f \, d\mu$$

Potrzebujemy jeszcze oszacowania w drugą stronę.

$$\sum_{n=1}^N \int_{E_n} f \, d\mu = \int_{\bigsqcup E_n} f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$$

Przy $N \rightarrow \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu$$

Te dwie nierówności prowadzą do równości. ■

Wykład 19

Twierdzenie 27 (Monotoniczność całki). f, g całkowalne na E i $f \leq g$, to

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$$

Dowód. Dowód robimy dla $f, g \geq 0$. Dowód będzie przebiegał inaczej niż w przypadku całki Riemanna. Niech $E_i = \{x \in E : a_i \leq f(x) < a_{i+1}\}$.

$$S(f, \pi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(E_i)$$

$$\int_E g \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} g \, d\mu$$

18 gru 2020

$\forall_{x \in E_i} : a_i \leq f(x) \leq g(x)$, to

$$a_i \mu(E_i) \leq \int_{E_i} g \, d\mu$$

Nierówność wynika z twierdzenia, że całka jest ograniczona przez miary razy funkcje stałe.

$$\begin{aligned} \forall_{\pi} : S(f, \pi) &\leq \int_E g \, d\mu \\ \int_E f \, d\mu &\leq \int_E g \, d\mu \end{aligned}$$

Stąd wynika, że sumy dolne dla funkcji f są ograniczone a to jest warunek całkowalności f mierzalnej. ■

Twierdzenie 28. Funkcja mierzalna jest całkowalna na $E \iff |f|$ jest całkowalna.

Dowód. Klasycznie już rozważamy funkcje f^+, f^- . Zaczynamy od wynikania w prawo. Definicja mówi, że f jest całkowalna, jeśli f^+, f^- są całkowalne. Niech $E = E_+ \sqcup E_-$, gdzie $E_+ = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$, $E_- = \{x \in E : f(x) < 0\}$. Jeżeli $x \in E_+$, to $f(x) = f^+(x) = |f(x)|$. Jeśli $x \in E_-$ to $|f(x)| = -f(x) = f^-(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{E_+} f \, d\mu &= \int_{E_+} f^+ \, d\mu = \int_{E_+} |f| \, d\mu \\ \int_{E_-} -f \, d\mu &= \int_{E_-} f^- \, d\mu = \int_{E_-} |f| \, d\mu \end{aligned}$$

Stąd $|f|$ jest całkowalna na E_+ i na E_- , zatem korzystając z addytywności jest całkowalna na E . Teraz dowód w drugą stronę.

$f^+ \leq |f|$, $f^- \leq |f|$. Z całkowalności $|f|$ i z udowodnionej monotoniczności wynika całkowalność f^+ i f^- a zatem całkowalność f . ■

Twierdzenie 29. Jeśli f, g są całkowalne na E to $f + g$

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$$

Dowód. 1. f, g ograniczone, $\mu(E) < \infty$

Niech $E_i = \{x \in E : a_i \leq f(x) < a_{i+1}\}$.

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_i a_i \mu(E_i), \quad \overline{S}(f, \pi) = \sum_i a_{i+1} \mu(E_i)$$

Przy ograniczoności obie sumy są skończone,

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \overline{S}(f, \pi)$$

Na E_i

$$a_i + g(x) \leq f(x) + g(x) \leq a_{i+1} + g(x)$$

Mamy udowodnioną taką własność:

$$\int_{E_i} (a_i + g) d\mu = a_i \mu(E_i) + \int_{E_i} g d\mu$$

Oraz monotoniczność:

$$a_i \mu(E_i) + \int_{E_i} g d\mu \leq \int_{E_i} (f + g) d\mu \leq a_{i+1} \mu(E_i) + \int_{E_i} g d\mu$$

sumujemy,

$$\underline{S}(f, \pi) + \int_E g d\mu \leq \int_E (f + g) d\mu \leq \overline{S}(f, \pi) + \int_E g d\mu$$

Teraz przy relacji skierowania \succ sumy dążą do całek i otrzymujemy

$$\int_E f d\mu + \int_E g d\mu = \int_E (f + g) d\mu$$

2. f, g dowolne, $\mu(E) < \infty$

Niech $f_n = \min\{f, n\}$.

$$(f + g)_n \leq f_n + g_n \leq (f + g)_{2n}$$

$$\int_E (f + g)_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu \leq \int_E (f + g)_{2n} d\mu$$

Przy $n \rightarrow \infty$, to zostają coraz większe fragmenty wyjściowych funkcji.

$$\int_E (f + g) d\mu \leq \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \leq \int_E (f + g) d\mu$$

Skrajne całki są równe, zatem mamy tę własność.

3. E dowolne

Niech $E_n = \{x \in E : n - 1 \leq \|x\| < n\}$. $E = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ + σ -addytywność całki daje żadaną własność. ■

Twierdzenie 30 (Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej). Dla całkownych $f_n \rightarrow f$ zbieżnych prawie wszędzie, tj. $\mu(\{x : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) = 0$. Ponadto, $|f_n(x)| \leq g(x)$ dla wszystkich n i prawie wszystkich x .

Wówczas f jest całkowna i $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Dowód. Poprawiając f_n, g, g na zbiorze miary 0 zakładamy, że $\forall_x f_n(x) \rightarrow f(x)$ oraz $\forall_x |f_n(x)| \leq g(x)$. Stąd, $|f(x)| \leq g(x)$ więc jeszcze mierzalność jest potrzebna do całkowności f .

$$\phi_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}$$

Ciąg ten jest rosnący oraz $\lim \phi_n(x) = \lim f_n(x) = f(x)$.

$$\{x: \phi_n(x) \geq a\} = \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x: f_k(x) > a\}$$

Każdy ze zbiorów w przecięciu jest mierzalny. Możemy to napisać jako sumę dopełnień.

$$\begin{aligned} \{x: f_k(x) > a\} &= \{x: f_k(x) \leq a\}' \\ \{x: \phi_n(x) \geq a\} &= \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x: f_k(x) \leq a\}' \end{aligned}$$

Taka suma zbiorów mierzalnych jest mierzalna.

$$\{x: f(x) \geq a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x: \phi_i(x) \geq a\}$$

Wobec tego $\{x: f(x) \geq a\}$ jest mierzalny, czyli f jest mierzalna.

Chcemy pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f - f_n) d\mu = 0$, $k_n(x) = |f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2g(x)$. Ustalamy $\varepsilon > 0$. Wiemy, że $\forall_x h_n(x) \rightarrow 0$. Trick: Bierzemy zbiór $E_1 = \{x: h_k(x) < \varepsilon g(x), k \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{aligned} E_2 &= \{x: h_k(x) < \varepsilon g(x) \leq h_1(x), k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \\ E_3 &= \{x: h_k(x) < \varepsilon g(x) \leq h_2(x), k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}\} \end{aligned}$$

W ten sposób dla każdego n ,

$$E_n = \{x: h_k(x) < \varepsilon g(x) \leq h_{n-1}(x), k \in \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n-1\}\}$$

Zauważmy, że E_n są parami rozłączne. Gdyby $x \in E_k \cap E_l$ dla $k > l$, to $h_l(x) < \varepsilon g(x) < h_{l-1}(x)$ oraz $h_k(x) < \varepsilon g(x) \leq h_{k-1}(x)$. Poprzedni numer to albo l albo większy od l . Dostajemy sprzeczność między tymi warunkami.

$$\int h_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} h_n d\mu = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{E_k} h_n d\mu + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{E_k} h_n d\mu$$

Funkcje podcałkowe możemy oszacować oraz końcówka zbieżnego szeregu nie jest zbyt duża.

$$\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n-1} \int_{E_k} g d\mu + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{E_k} h_n d\mu$$

Całkować mogą po całej przestrzeni, to na pewno będzie więcej (g było dodatnie).

$$\leq \varepsilon \int g d\mu + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{E_k} h_n d\mu$$

Ogon jest dostatecznie mały, tzn \exists_N : ogon $< \varepsilon$.

$$\leq \varepsilon \int g d\mu + \varepsilon = \varepsilon \underbrace{\left(\int_E g d\mu + 1 \right)}_{\text{skończone}}$$

Biorąc dobry ε możemy to zrobić dowolnie małe. W takim razie całka z modułu dąży do 0, zatem bez modułu też. I stąd mamy twierdzenie o majoryzowalności. ■

Całki z parametrem

Twierdzenie 31. (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $f: Y \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

- (1) $y \mapsto f(y, x)$ ciągła w y_0 dla prawie wszystkich x
- (2) $\forall_y x \mapsto f(y, x)$ jest całkowalna
- (3) $|f(y, x)| < g(x)$ dla $y \in O \in \tau_d$, $O \ni y_0$, g jest całkowalna i nazywana majorantą oraz patrzymy na prawie wszystkie x

Wówczas,

$$y \mapsto \int f(y, x) d\mu$$

jest ciągła w y_0

Twierdzenie 32. Y jest otwartym podzbiorem przestrzeni Banacha oraz $f: Y \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

- (1) $y \mapsto f(y, x)$ ma ciągłą pochodną kierunkową w kierunku e dla prawie wszystkich x
- (2) $\forall_y x \mapsto f(y, x)$ jest całkowalna
- (3) $|\nabla_e f(y, x)| \leq g(x)$ dla $y \in Y$ i prawie wszystkich x , g jest całkowalna

Wówczas,

$$y \xrightarrow{F} \int f(y, \cdot) d\mu$$

jest różniczkowalna w kierunku e , funkcje $\nabla_e f(y, \cdot)$ są całkowalne

$$\nabla_e F(y) = \int \nabla_e f(y, \cdot) d\mu$$

Wykład 20: Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Definicja 33 (Zdarzenie (doświadczenie) losowe). Doświadczenie, na którego wynik nie mamy wpływu. Również zdarzenia deterministyczne, ale dostatecznie złożone mogą być interpretowane w ten sposób, np. rzuty monetami.

21 gru 2020

Definicja 34 (Zbiór zdarzeń elementarnych). Wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego. Oznaczenie Ω .

Przykładowo $\Omega = \mathbb{N}$ jeśli rzucamy monetą do czasu otrzymania orła i patrzymy na numer rzutu, w którym jest ten orzeł. Może też być $\Omega = [0, 1]$ przy okazji nieskończonej liczby rzutów.

Definicja 35. Zdarzenie to podzbiór Ω . Niekoniecznie wszystkie elementy 2^Ω muszą być dobre. Rodzinę zdarzeń oznaczamy przez \mathcal{F} . Rodzina ta powinna spełniać warunki:

- (1) $A \subset \mathcal{F} \implies A' = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
- (2) $\Omega \subset \mathcal{F}$ (stąd $\emptyset \in \mathcal{F}$)
- (3) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$ i $A \cup B \in \mathcal{F}$
- (4) Przeliczalna addytywność: $A_n \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Uwaga 27. \mathcal{F} jest σ -ciałem.

Definicja 36 (Prawdopodobieństwo).

$$P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

Prawdopodobieństwo powinno spełniać warunki:

$$\forall A \ P(A) \geq 0$$

- (1) $A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- (2) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- (3) $A \in \mathcal{F} \implies P(A') = 1 - P(A)$
- (4) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$
- (5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ oraz $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Wraz z ostatnim warunkiem, P jest miarą na \mathcal{F} .

Definicja 37 (Przestrzeń probabilistyczna). (Ω, \mathcal{F}, P) gdzie Ω jest zbiorem, $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ jest σ -ciałem podzbiorów a P jest unormowaną miarą na \mathcal{F} nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

Przykład Ω taki, że $\#\Omega < \infty$. Wówczas możemy przyjąć, że $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe, zdarzenia niezależne, wzór Bayesa

Definicja 38. Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A przy warunku B (i założeniu $P(B) > 0$) nazywamy:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wykład 21: Zmienne statystyczne

Przykład Ktoś proponuje nam udział w następującej grze: rzucamy 1 raz symetryczną kostką 2021. Wypłatę ustalamy według tableki. Czy na dłuższą metę opłaca się grać w tę grę?
Wypłaty: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{+2, -1, +4, -5, +3, -4\}$

Po n grach każdy wynik pojawi się średnio $n/6$ razy, zatem nasza wartość oczekiwana zysku to:

$$\frac{n}{6}(2 - 1 + 4 - 5 + 3 - 4) = -\frac{n}{6}$$

Na jedną partię wychodzi $-1/6$ zł, czyli na dłuższą metę gra nam się nie opłaca.

Definicja 39. Mówimy, że X ma wartość oczekiwaną/średnią jeśli istnieje $\int_{\Omega} |X| dP$, gdzie P to miara probabilistyczna na Ω . Wówczas,

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP$$

Zatem dla zmiennej dyskretnej,

$$E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i)$$

W jednowymiarowym rozkładzie ciągłym na \mathbb{R} ,

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

Dla rozkładów z przykładów z poprzedniego wykładu,

- Rozkład jest symetryczny zatem $E(X) = 7$
- $p(n) = (1 - p)^{n-1}p$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p = p \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = -p \frac{d}{dp} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n \right) \\ &= p \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

•

$$f(r) = \begin{cases} 0 & r \leq 0 \\ 2\frac{r}{R^2} & r \in (0, R) \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^R 2\frac{r}{R^2} r \, dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R r^2 \, dr = \frac{2}{3} \frac{1}{R^2}$$

- Ω – próby n -elementowe $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \rightarrow \{X_1, \dots, X_n\}$ są zmiennymi niezależnymi. Średnia X z prby

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots +$$

$$\dots$$

Własności średniej:

1. Jeśli $x \geq 0$ to $E(X) \geq 0$
2. $|E(X)| \leq E(|X|)$
3. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Wszystko to wynika z własności całki de facto.

Definicja 40. Jeśli istnieje $E((X - E(X))^2) < \infty$ to tę liczbę nazywamy wariancją zmiennej losowej X o wartościach rzeczywistych i oznaczam D^2X . Przez $DX = \sqrt{D^2X}$ oznaczamy odchylenie standardowe.

Rozdział 4

Teoria dystrybucji

Wykład 22: Dystrybucje

15 sty 2021

Definicja 41 (Przestrzeń funkcji próbnych). Weźmy otwarty obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funkcją próbną nazywamy $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jeśli jest gładka i ma zwarty nośnik, tj. $\exists K \subset \Omega$ zwarty i taki, że $\phi(x) = 0$ dla $x \in \Omega \setminus K$. Przestrzeń takich funkcji oznaczamy przez $\mathcal{D}(\Omega)$.

Ponieważ argumenty są rzeczywiste, to kwestie różniczkowalności są rozstrzygane w sensie rzeczywistym, nie mówimy o jakiejś holomorficzności. Z resztą, gdyby ϕ była holomorficzna to nie miałaby zwartego nośnika.

Chcemy jeszcze określić jakąś strukturę topologiczną tej przestrzeni, choćby poprzez zdefiniowanie zbieżności ciągów w tej przestrzeni.

Definicja 42. Ciąg $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do ϕ jeśli spełnione są warunki:

1. $\exists K \subset \Omega$ zwarty i taki, że $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{supp } \phi_n \subset K$
2. funkcje ϕ_n i wszystkie pochodne cząstkowe są zbieżne jednostajnie odpowiednio do ϕ i do pochodnych cząstkowych.

Jest to zasadniczo bardzo silny warunek zbieżności. Zbieżność jednostajna to jest zbieżność w normie supremum, tj. $f_n \xrightarrow{\text{jedn.}} f$ jeśli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0$$

lub równoważnie

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N) \quad \sup_X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

W związku z warunkiem zbieżności pochodnych cząstkowych będziemy musieli wprowadzić wygodną notację. Będziemy używali notacji wielowskaźnika. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Wówczas,

$$D^\alpha \phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{(\partial x^1)^{\alpha_1} (\partial x^2)^{\alpha_2} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}}$$

Przestawianie kolejności tych operatorów nie zmienia nam wyniku. Warunek zbieżności (2) możemy zapisać w tej notacji następująco:

$$\forall \alpha \quad D^\alpha \phi_n \xrightarrow{\text{jedn.}} D^\alpha \phi$$

Jest jeszcze inna możliwa notacja, tzw. półnormy. Niech K będzie zbiorem zwartym a l liczbą naturalną.

$$\|\phi\|_{K,l} = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)|$$

Jest to półnorma, tj. spełnia nierówność trójkąta, jest dodatnio jednorodna (jeśli funkcję mnożymy przez liczbę to wartość normy mnożymy przez moduł tej liczby), natomiast nie spełnia warunku $\|\phi\|_{K,l} = 0 \implies \phi = 0$. Natomiast, jakbyśmy obcięli to tylko do K , a nie rozważali całe Ω to oczywiście tam to już będzie norma.

Możemy zdefiniować zbieżność przez półnormę jako:

$$\phi_n \rightarrow 0 \iff \text{supp } \phi_n \in K \quad \wedge \quad \forall l \quad \|\phi_n\|_{K,l} \rightarrow 0$$

Definicja 43 (Dystrybucja). Dystrybucją na Ω nazywamy \mathbb{C} -liniowe i ciągle odwzorowanie $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$. Ciągłość oznacza, że jeśli $\phi_n \rightarrow 0$, to $T\phi_n \rightarrow 0$ (bo ciągłość jest równoważna ciągłości w zerze dla odwzorowań liniowych).

Przestrzeń dystrybucji będziemy określać jako $\mathcal{D}'(\Omega)$, jest to przestrzeń dualna do $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definicja 44 (Delta Diraca). $y \in \Omega$, $\delta_y: \mathcal{D}(\Omega) \ni \phi \mapsto \phi(y) \in \mathbb{C}$. Czyli, $\delta_y(\phi) = \phi(y)$

Definicja 45 (Dystrybucja regularna). Okazuje się, że istnieją pewne wyróżnione dystrybucje. Niech f będzie lokalnie całkowalna na Ω (tj. na każdym zwartym podzbiórze). Wówczas dystrybucję regularną definiujemy jako:

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx$$

Jest to dobrze zdefiniowane, bo nawet jeśli f nie jest całkowalna na całym Ω , to wiemy, że ϕ ma zwarty nośnik, czyli w efekcie $f\phi$ jest całkowalna na Ω .

Niech $y \in \Omega$, $e \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $\mathcal{D}(\Omega) \ni \phi \mapsto (\nabla_e \phi)(y)$ też jest dobrym przykładem dystrybucji.

Jeszcze jeden przykład, niech $D \subset \Omega$ mierzalny oraz:

$$T_D(\phi) = \int_D \phi(x) dx$$

ale to jest to samo co dystrybucja regularna odpowiadająca funkcji charakterystycznej, $T_D = T_{\chi_D}$.

Wykład 23: Operacje na dystrybucjach

Różniczkowanie dystrybucji

18 sty 2021

Możemy domagać się, żeby operacje były zdefiniowane na dystrybucjach regularnych tak, jak na zwykłych funkcjach, a resztę się dopasuje odpowiednio. Chcielibyśmy aby:

$$(T_f)' = T_{f'}$$

Zadziałajmy taką pochodną na funkcję próbną,

$$\begin{aligned} (T_f)'(\phi) &= T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x) \, dx \\ &= f(x)\phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x) \, dx \end{aligned}$$

Pierwszy składnik się zeruje ze względu na zwarty nośnik ϕ , zatem

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x) \, dx = -T_f(\phi')$$

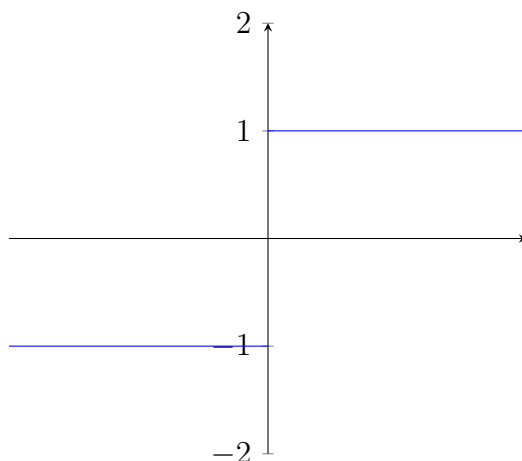
Zapiszmy więc propozycję pochodnej ogólnej dystrybucji:

Definicja 46 (Pochodna dystrybucji).

$$\begin{aligned} T'(\phi) &= -T(\phi') \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} T \right) \phi &= -T \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

Sprawdźmy tę definicję na przykładach. Ważnym przykładem jest funkcja Heaviside'a:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



Rysunek 4.1: $\vartheta(x)$

$$\begin{aligned}
T'_\vartheta(\phi) &= -T_\vartheta(\phi') = -\int_{\mathbb{R}} \vartheta(x)\phi'(x) dx = -\int_0^\infty \phi'(x) dx \\
&= -\phi(x) \Big|_0^\infty = \phi(0) = \delta_0(\phi) \\
T'_\vartheta &= \delta_0
\end{aligned}$$

Policzmy podobnie pochodną dystrybucji regularnej funkcji $f(x) = |x|$.

$$\begin{aligned}
T'_f(\phi) &= -T_f(\phi') = -\int_{\mathbb{R}} |x|\phi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 (-x)\phi'(x) dx - \int_0^\infty x\phi'(x) dx \\
&= x\phi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx - x\phi(x) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \phi(x) dx
\end{aligned}$$

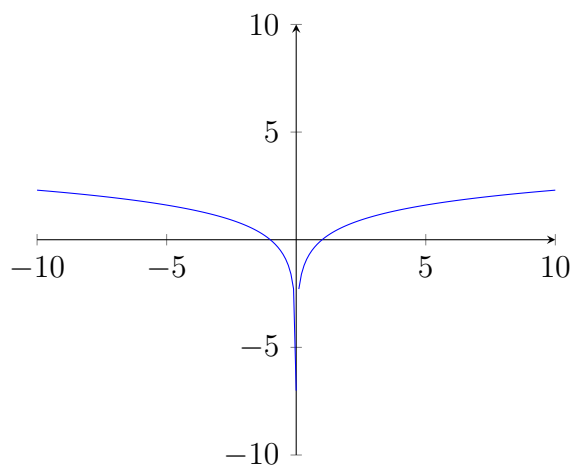
W $x = 0$ jest 0, a w $x = -\infty$ też, gdyż $\phi(-\infty) = 0$. Podobnie w drugim fragmencie.

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^0 -\phi(x) dx + \int_0^\infty \phi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn} x \cdot \phi(x) dx
\end{aligned}$$

Stąd,

$$T'_f = T_{\operatorname{sgn}}$$

Przećwiczmy sobie jeszcze liczenie na funkcji $f(x) = \log |x|$.



Rysunek 4.2

Ta funkcja f jest lokalnie całkowalna (również w okolicy zera), zatem nadaje się na

zadającą dystrybucję regularną.

$$\begin{aligned}
 T'_f(\phi) &= -T_f(\phi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log|x|\phi'(x) dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\phi'(x) dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \log x\phi'(x) dx \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\log(-x)\phi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x) dx - \log x\phi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x) dx \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\log \varepsilon \phi(-\varepsilon) + \log \varepsilon \phi(\varepsilon) + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right)
 \end{aligned}$$

Wyrażenie bez całki ma granicę zerową, zatem zostajemy tylko z całkami.

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right)$$

Zauważmy, że to co chcielibyśmy napisać, czyli że to jedna całka od $-\infty$ do ∞ to moglibyśmy skończyć z czymś w ogóle niecałkowalnym. Ale jeśli z lewej jak i prawej strony zbiegamy tak samo do tej de facto osobliwości, to taki zabieg nazywamy wartością główną:

$$\stackrel{\text{def}}{=} \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) (\phi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx$$

Wprowadzamy więc nowe oznaczenie:

$$T'_f = \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$$

Rozważmy teraz inny przykład. Weźmy $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = r^{-1}$. Chcemy policzyć Laplasjan dystrybucji regularnej tej funkcji (gdyż f jest lokalnie całkowalna).

$$\begin{aligned}
 \Delta T_f(\alpha) &= T_f(\Delta \alpha) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} (\Delta \alpha) r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{r \geq \varepsilon\}} \frac{\Delta \alpha}{r} d\vartheta = (*)
 \end{aligned}$$

Przypomnijmy sobie wzór Greena:

$$\int_D (f \Delta h - h \Delta f) d\vartheta = \int_{\partial D} [f(\vec{n} \mid \text{grad } h) - h(\vec{n} \mid \text{grad } f)] d\sigma$$

Kontynuujemy rachunek,

$$(*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\{r \geq \varepsilon\}} \alpha \Delta \frac{1}{r} d\vartheta + \int_{\{r=\varepsilon\}} \frac{1}{r} (\vec{n} \mid \text{grad } \alpha) d\sigma - \int_{\{r=\varepsilon\}} \alpha (\vec{n} \mid \text{grad } r^{-1}) d\sigma \right\}$$

Część objętościowa tej całki znika, gdyż radialna część Laplasjanu się zeruje. Zostaną tylko części powierzchniowe. $\vec{n} = -\partial_r$. Zatem wystarczy znać radialną część gradientu.

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ - \int_{\{r=\varepsilon\}} \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} d\sigma - \int_{\{r=\varepsilon\}} \alpha \frac{1}{r^2} d\sigma \right\}$$

Szacujemy moduł pierwszej całki.

$$\left| \int_{\{r=\varepsilon\}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \varepsilon^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right| \leq \varepsilon \int_{\{r=\varepsilon\}} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right| \sin \theta \, d\theta \, d\phi \leq \varepsilon 4\pi \sup_{\{r=\varepsilon\}} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$$

Zostaje zatem druga całka,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(- \int_{\{r=\varepsilon\}} \alpha \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(- \int_{\{r=\varepsilon\}} \alpha \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right) = -4\pi \alpha(0)$$

Wracamy do wyjściowej całki:

$$(*) = -4\pi \alpha(0) = -4\pi \delta_0(\alpha)$$

Stąd,

$$\Delta T_f = -4\pi \delta_0$$

Ten wzór może się kojarzyć trochę z elektrostatyką. Jeśli gęstość ładunku punktowego opiszemy deltą Diraca, to właśnie odpowiedzią jest potencjał Coulombowski $1/r$. To właśnie wyraża nam ten Laplacian.

Przesunięcie, mnożenie dystrybucji przez funkcję

Dla funkcji byśmy napisali $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$. Dla dystrybucji regularnej byśmy chcieli, aby:

$$\tau_h T_f = T_{\tau_h f}$$

Zobaczmy jak taka dystrybucja działa na funkcję próbną.

$$(\tau_h T_f)(\phi) = T_{\tau_h f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-h) \phi(x) \, dx$$

Niech $y = x - h$,

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi(y+h) \, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \tau_h^* \phi = T_f(\tau_h^* \phi)$$

Stąd, możemy zdefiniować pojęcie przesunięcia dowolnej dystrybucji.

Definicja 47. Przesunięcie dystrybucji T definiujemy jako:

$$\tau_h T = T \circ \tau_h^*$$

Definicja 48.

$$(fT)(\phi) = T(f\phi)$$

Warunki na funkcję f są takie, że ma być funkcją gładką (niekoniecznie o zwartym nośniku). Czyli $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$.

Zbieżność ciągu dystrybucji

Definicja 49. Mówimy, że $T_n \rightarrow T$ jeśli $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ zachodzi zbieżność ciągu liczbowego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\phi) = T(\phi)$$

Nazywa się to czasem słabą zbieżnością, bo mamy co prawda zbieżność w każdym punkcie, ale w każdym osobno.

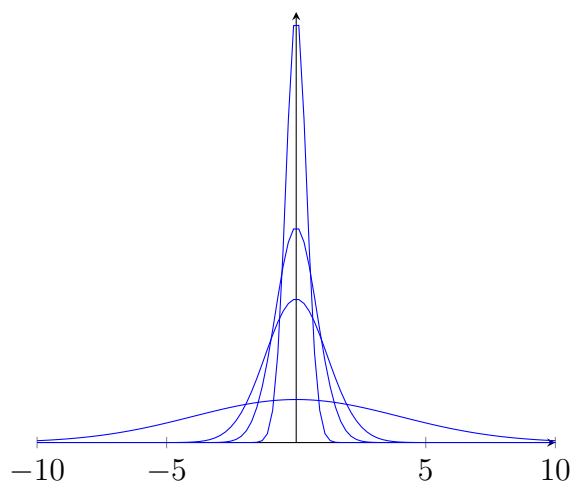
Definicja 50. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ciąg liczbowy $T_n(\phi)$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Możemy zadać pytanie, czy $\mathcal{D}'(\Omega)$ jest zupełna? Otóż tak! Ale nie będziemy tego dowodzić. W związku z tym, każdy ciąg Cauchy'ego w $\mathcal{D}'(\Omega)$ jest zbieżny.

Rozważmy rodzinę regularnych dystrybucji T_{f_ε} zadawanych przez funkcje $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ dla ustalonej f , spełniającej warunek:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Można użyć przykładowo $f(x) = e^{-\pi x^2}$.



Rysunek 4.3: Ciąg funkcji f_ε .

Zauważmy, że pole pod kolejnymi wykresami jest cały czas równe 1, ale szpiculec jest coraz bardziej ostry dla coraz większych ε .

$$T_{f_\varepsilon}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi(x) dx$$

Niech $y = x/\varepsilon$, $dy = dx/\varepsilon$,

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi(\varepsilon y) dy$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{f_\varepsilon}(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi(\varepsilon y) dy$$

Możemy zastosować twierdzenie o zbieżności majoryzowanej i wejść z granicą pod całkę, bo $|f(y)\phi(\varepsilon y)| \leq f(y) \sup_{\mathbb{R}} |\phi(x)|$. Supremum funkcji gładkiej o zwartym nośniku jest skończone.

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi(0) dx = \phi(0)$$

Okazuje się więc, że:

$$T_{f_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0$$

Oczywiście tę deltę można przybliżać na różne sposoby, my to robiliśmy za pomocą takich funkcji Gaussowskich.

Wzory Sochockiego

Niech $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon}$. Dodatek $i\varepsilon$ powoduje, że f jest lokalnie całkowalna. Może więc posłużyć jako funkcja definiująca dystrybucję. Sprawdźmy, czy potrafimy policzyć granicę tej jednoparametrowej rodziny dystrybucji.

$$T_{f_\varepsilon}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x + i\varepsilon} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x - i\varepsilon)\phi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

Zauważmy, że $\exists R: \text{supp } \phi \subset (-R, R)$.

$$= \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \phi(x) dx$$

$$= \int_{-R}^R \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\phi(x) - \phi(0)] dx + \int_{-R}^R \phi(0) \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = (*)$$

Zajmujemy się po kolei całkami.

$$0 = \int_{-R}^R \phi(0) \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Jako całka antysymetryczna po symetrycznym przedziale.

$$\int_{-R}^R \phi(0) \frac{-i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = -\phi(0)i\varepsilon \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = -\phi(0)i\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-R}^R \frac{dx}{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + 1}$$

$$= -\phi(0)i \operatorname{sgn} \varepsilon \tan^{-1} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \Big|_{-R}^R$$

$$= -\phi(0)i \left[\tan^{-1} \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) - \tan^{-1} \left(-\frac{R}{\varepsilon} \right) \right] \operatorname{sgn} \varepsilon$$

$$= -2\pi i \phi(0) \tan^{-1} \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) \operatorname{sgn} \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -i\phi(0)\pi$$

Powracamy do naszego wyjściowego rachunku.

$$(*) = \int_{-R}^R \frac{x^2 + i\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} - 2\pi i \phi(0) \operatorname{sgn} \varepsilon \tan^{-1} \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) dx$$

Interesuje nas granica w zerze względem ε .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-R}^R \frac{x^2 + i\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx$$

Pod całką mamy funkcję ciągłą i ograniczoną, gdyż $\phi(x) - \phi(0) = x\psi(x)$ a to jest funkcja gładka i ograniczona. Możemy spokojnie wejść z granicą pod znak całki.

$$= \int_{-R}^R \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx = \operatorname{vp} \left(\frac{1}{x} \right) (\phi(x))$$

Podsumowując,

Uwaga 28 (Wzory Sochockiego).

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{f_\varepsilon}(\phi) &= \operatorname{vp} \left(\frac{1}{x} \right) (\phi(x)) - i\phi(0)\pi \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} &= \operatorname{vp} \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi\delta_0 \end{aligned}$$

Wzory te pojawiają się intensywnie w kwantowej teorii pola.

Wykład 24

Rząd dystrybucji

22 sty 2021

Uwaga 29. Odwzorowanie liniowe $T: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ jest ciągłe $\iff \forall K \subset \Omega$ zwartego, $\exists l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \exists c_k \geq 0$ takie, że $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gdzie $\operatorname{supp} \phi \subset K$, zachodzi $|T\phi| \leq c_k \|\phi\|_{K,l}$

Dowód. Definicję półnormy już znamy. Dowód z prawej strony do lewej jest oczywisty. Dla K mamy c_k, l . Wtedy $\forall \phi$ wiemy, że $|T\phi| \leq c_k \|\phi\|_{K,l}$. Weźmy ciąg $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}: \phi_n \rightarrow 0$ i $\operatorname{supp} \phi_n \subset K$. Zachodzi ograniczenie $|T\phi_n| \leq c_k \|\phi_n\|_{K,l}$. Wszystkie te normy dążą do zera, zatem ciąg liczbowy $|T\phi_n|$ też musi być zbieżny do zera. To pokazuje, że odwzorowanie T jest ciągłe.

W drugą stronę będziemy dowodzili ad absurdum. Zaprzeczenie prawej strony: $\exists K \subset \Omega: \forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall c_k \geq 0 \exists \phi \in \mathcal{D}(\Omega): \operatorname{supp} \phi \subset K$, takie że $|T\phi| > c_k \|\phi\|_{K,l}$. Weźmy stosowne K (spełniające wszystkie warunki zaprzeczenia), dowolne l oraz $c_k = l$. Dla takich c_k, l wybieramy $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ spełniające warunek $|T\phi| > l \|\phi\|_{K,l}$. Niech

$$\begin{aligned} \phi_l &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\phi}{|T\phi|} \\ T(\phi_l) &= T \left(\frac{\phi}{|T\phi|} \right) = \frac{T(\phi)}{T(\phi)} = 1 \end{aligned}$$

Skonstruowaliśmy ciąg $(\phi_l)_{l \in \mathbb{N}}$. Policzmy pół normę.

$$\|\phi\|_{K,l} = \left\| \frac{\phi}{T\phi} \right\|_{K,l} = \frac{1}{|T\phi|} \|\phi_{kl}\| < \frac{1}{l}$$

Pokażemy, że $\phi_l \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. To jest równoważne warunkowi, że $\forall n \|\phi_l\|_{K,n} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$. Dla ustalonego n wystarczy wziąć $l > N$.

$$\|\phi_l\|_{K,n} \leq \|\phi_l\|_{K,l} < \frac{1}{l} \rightarrow 0$$

Pokazaliśmy, że $\phi_l \rightarrow 0$ i $T(\phi_l) = 1$ co jest sprzeczne z ciągłością. ■

To twierdzenie mówi nam ciekawą rzecz. Jeśli można wybrać jedno l dla wszystkich K zwartych, to wartość dystrybucji na funkcji można szacować używając pochodnych skończonego rzędu. Taką dystrybucję nazywamy dystrybucją skończonego rzędu.

Definicja 51 (Rząd dystrybucji). Dla dystrybucji skończonego rzędu, najmniejsze l nazywamy rzędem dystrybucji.

Przykłady

1. δ_0 jest rzędu zerowego. $\Omega = \mathbb{R}$, $K \subset \mathbb{R}$. $l = 0, c_k = 1$. Jeśli $0 \in K$ to $\delta_0(\phi) = \phi(0)$, $|\phi(0)| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)| = \|\phi\|_{K,0}$. Jeśli $0 \notin K$ to $\delta_0\phi = \phi(0) = 0$.
2. Dystrybucja regularna jest rzędu 0

$$\begin{aligned} |T_f(\phi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x) dx \right| = \left| \int_K f(x)\phi(x) dx \right| \\ &\leq \sup_{x \in K} |\phi(x)| \int_K |f(x)| dx = c_k \|\phi\|_{K,0} \end{aligned}$$

3. $(\delta_0)'$ jest rzędu 1

$$\begin{aligned} (\delta_0)'(\phi) &= -\phi'(0) \\ |\delta_0'(\phi)| &= |\phi'(0)| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)| + \sup_{x \in K} |\phi'(x)| = \|\phi\|_{K,1} \end{aligned}$$

4. $T(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{(k)}(k)$ jest rzędu nieskończonego.

Nośnik dystrybucji

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mamy $\mathcal{D}(\Omega)$ i $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definicja 52. Mówimy, że T jest zero na zbiorze $O \subset \Omega$ jeśli $T\phi = 0$ dla każdej funkcji $\phi: \text{supp } \phi \subset O$.

W szczególności $\delta_0 = 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definicja 53 (Nośnik dystrybucji). Nośnik dystrybucji T to najmniejszy domknięty w Ω zbiór D taki, że $T = 0$ na $\Omega \setminus D$. Będziemy pisać $\text{supp } T = D$. Wyróżniamy dystrybucje o zwartym nośniku w $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$, to nośnik zwarty oznacza nośnik ograniczony.

Pomyślmy o $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ ze strukturą zbieżności niemal jednostajnej ze wszystkimi pochodnymi. Możemy zdefiniować przestrzeń $\mathcal{E}'(\Omega)$ funkcjonałów liniowych i ciągłych na przestrzeni $\mathcal{E}(\Omega)$. \mathcal{D} jest mniejszą przestrzenią włożoną w \mathcal{E} . Jeśli coś jest zbieżne w \mathcal{D} to w \mathcal{E} też, w drugą stronę nie.

Można obciąć przestrzeń dualną funkcji gładkich do takich o zwartym nośniku: $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, ale to nie jest surjekcją tak jak by było w przestrzeniach liniowych wymiaru skończonego. U nas to odwzorowanie jest injekcją. Jeśli jakiś element z \mathcal{D}' jest obcięciem elementu z \mathcal{E}' jest jednoznaczny w \mathcal{E}' ale nie każdy element z \mathcal{D}' możemy dostać przez obcięcie \mathcal{E}' .

Twierdzenie 33. Dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ma zwarty nośnik \iff gdy jest postaci $\nu(L)$ dla pewnego, jednoznacznie wyznaczonego $L \subset \mathcal{E}'(\Omega)$ (gdy $\nu(L)$ jest obcięciem funkcji L).

Dowód. Dowód w prawo: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\text{supp } T$ zwarty. ψ to funkcja gładka o zwartym nośniku, $\psi = 1$ w otoczeniu $\text{supp } T$. Jeśli $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, to $T(\phi) = T(\psi\phi)$. Niech $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Wówczas $L(f) = T(\psi f)$, ψf jest o zwartym nośniku, bo ψ ma zwarty nośnik. Na razie nie wypowiadamy się na temat jednoznaczności.

Dowód w lewo: weźmy $L \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Mamy pokazać, że $\text{supp } \nu(L)$ jest zwarty. Dowodzimy ad absurdum. Załóżmy, że $\text{supp } \nu(L)$ nie jest zwarty. Z definicji zawsze jest to jednak zbiór domknięty. Skoro nie jest zwarty, to możemy znaleźć ciąg (x_n) : $\forall n \ x_n \in \text{supp } T$ ale x_n nie ma punktów skupienia w Ω . Gdyby miał punkt skupienia, to ze względu na domkniętość nośnika, ten punkt musiałby należeć do nośnika i nie byłby to ten kontrprzykład. W takim razie, każdy zwarty podzbiór Ω zawiera co najwyżej skończoną liczbę elementów ciągu. Teraz konstruujemy przykład ciągu funkcji. Dla każdego takiego punktu z elementów ciągu istnieje pewna kula $K(x_n, r_n)$ taka, że $K(x_n, r_n) \cap K(x_m, r_m) = \emptyset$. r_n dobieramy tak, żeby było coraz mniejsze, $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Do każdej z kul dobieramy gładką funkcję o nośniku w tej kuli. Niech $T = \nu(L)$ (obcięcie L do zbioru funkcji próbnych). Czyli dobieramy ciąg ϕ_n takich, że $T(\phi_n) = 1$. Otrzymaliśmy (ϕ_n) zbieżny do 0 w przestrzeni $\mathcal{E}(\Omega)$. Natomiast (ϕ_n) nie dąży do 0 w \mathcal{D} , gdyż nośniki tych funkcji nie są zawarte w spólnym zbiorze zwartym. Skoro $\phi_n \in \mathcal{E}(\Omega)$ i $\phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ to $L(\phi_n) \rightarrow 0$ natomiast $T(\phi_n) = 1 \not\rightarrow 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Póki co udowodniliśmy, że obraz dystrybucji ciągłych na zbiorze Ω to funkcje o zwartym nośniku. Trzeba jeszcze wykazać jednoznaczność. Weźmy ciąg wstępujący zbiorów zwartych $K_n \subset \Omega$, gdzie $K_n \subset K_{n+1}$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$. Do zbioru K_n dobieramy funkcję ϕ_n gładką o zwartym nośniku taką, że $\phi_n|_{K_n} = 1$. Wtedy mamy odwzorowanie $\psi \in \mathcal{E}(\Omega) \mapsto \phi_n \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ i $L(\phi_n \psi) = \nu(L)(\phi_n \psi) = T(\phi_n \psi)$. Gdyby $L \in \ker \nu$ to by oznaczało, że $T(\phi_n \psi) = 0$. To oznacza, że $\lim T(\phi_n \psi) = 0$ co by oznaczało, że $\lim L(\phi_n \psi) = 0$ czyli $L(\psi) = 0$ zatem $L = 0$. Stąd oczekiwana jednoznaczność. ■

Uwaga 30. Mamy niemożliwą z punktu widzenia skończonego wymiaru sytuację, w której odwzorowanie dualne do iniekcji liniowej jest iniekcją liniową.

Wykład 25: Transformata Fouriera funkcji

25 sty 2021

Definicja 54. Niech $f: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ będzie całkowana w sensie Lebesgue'a.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-2\pi i x \cdot \xi) d^n x$$

gdzie $x \cdot \xi$ rozumiemy jako iloczyn skalarny. W mechanice kwantowej ξ koresponduje z pędem: $\xi \rightsquigarrow p$, $p \in (\mathbb{R}^n)^*$.

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej ta całka istnieje, bo moduł \exp to po prostu 1.

Przykłady

1. $f(x) = e^{-ax^2}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} \exp(-2\pi i x \xi) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2 + \frac{2\pi i}{a} x \xi)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left([x + \frac{\pi i}{a} \xi]^2 + \frac{\pi^2}{a^2} \xi^2\right)} dx = e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x + \frac{\pi i}{a} \xi)^2} dx = (*) \end{aligned}$$

Teraz wkracza analiza zespolona. Całkujemy po prostokącie z kanoniczną orientacją o boku $b = \pi \xi / a$. Okaże się, że w granicy całki po pionowych bokach znikną.

$$0 = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{a}\xi} e^{-a(R+it)^2} i dt + \int_R^{-R} e^{-a(x + \frac{\pi i}{a} \xi)^2} dx + \int_{\frac{\pi}{a}\xi}^0 e^{-a(-R+it)^2} i dt$$

Teraz chcemy poszacować pionowe całki.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{a}\xi} e^{-a(R+it)^2} i dt \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{a}\xi} \left| e^{-a(R^2 - t^2 + i2Rt)} \right| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{a}\xi} e^{-a(R^2 - t^2)} dt \\ &= e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\pi}{a}\xi} e^{at^2} dt \xrightarrow[a>0]{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Podobnie szacuje się drugi pionowy kawałek konturu. Zatem, w granicy mamy:

$$(*) = e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} \xi^2} = \hat{f}(\xi)$$

Widzimy, że funkcja typu Gaussa przechodzi na funkcję typu Gaussa. Mamy także punkt stały transformaty Fouriera dla $a = \pi$.

$$2. f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{1+x^2} dx = \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}_i g(z) & \xi < 0 \\ -2\pi i \operatorname{Res}_{-i} g(z) & \xi > 0 \end{cases}$$

co wiemy na mocy lematu Jordana. Liczymy residua,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i g(z) &= \frac{1}{2i} e^{2\pi \xi} \\ \operatorname{Res}_{-i} g(z) &= -\frac{1}{2i} e^{-2\pi \xi} \end{aligned}$$

Stąd,

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \pi e^{2\pi \xi} & \xi < 0 \\ \pi e^{-2\pi \xi} & \xi > 0 \end{cases} = \pi e^{-2\pi |\xi|}$$

Widzimy na tym przypadku, że transformata nie musi być różniczkowalna wszędzie. Oczywiście ciągła będzie.

Chcemy zbadać jaka musi być przestrzeń, aby działała w niej transformata Fouriera. Najpierw wykonajmy warunki przy założeniach trochę zbyt silnych. Otóż niech $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (gładkie o zwartym nośniku). Są one całkowne w sensie Lebesgue'a. Transformatę Fouriera stosujemy do pochodnej tej funkcji.

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi i x \xi) f'(x) dx \\ &= \exp(-2\pi i x \xi) f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} 2\pi i \xi \exp(-2\pi i x \xi) f(x) dx \end{aligned}$$

f ma zwarty nośnik, więc pierwsze granice zanikają,

$$= 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

Stąd ważny wniosek,

Uwaga 31.

$$\hat{f}'(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

Teraz wyprowadźmy drugi pomocniczy warunek.

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-2\pi i \xi x) dx \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x \exp(-2\pi i \xi x) f(x) dx$$

$xf(x)$ jest dalej gładka o zwartym nośniku, więc można zastosować twierdzenie o zbieżności majoryzowanej. Znak zapytania znika przy ostatniej równości.

$$= -2\pi i (x\hat{f})$$

W takim razie.

Uwaga 32.

$$(\hat{x}f)(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$$

Takie dwie powyższe własności spełniają funkcje Schwartza.

Definicja 55. Przestrzenią Schwartza nazywamy przestrzeń funkcji gładkich na \mathbb{R}^n o wartościach zespolonych i takich, że:

$$\forall \alpha, \beta \quad \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f| < \infty$$

gdzie α, β są wielowskazynikami. Przestrzeń Schwartza oznaczamy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Wprowadzamy normę:

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \left| (x^1)^{\beta_1} \dots (x^n)^{\beta_n} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{\alpha, \beta}$$

Twierdzenie 34. Transformacja Fouriera odwzorowuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ w sposób ciągły.

Uwaga 33.

$$\begin{aligned} \widehat{(D^\alpha f)}(\xi) &= (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi) \\ (D^\beta \hat{f})(\xi) &= (-2\pi i)^{|\beta|} \widehat{(x^\beta f)} \end{aligned}$$

Co można streścić do wzoru:

$$(\xi^\alpha D^\beta \hat{f})(\xi) = (-1)^{|\beta|} (2\pi i)^{|\alpha| - |\beta|} \widehat{(D^\alpha x^\beta f)}(\xi)$$

Twierdzenie 35 (Własności transformaty Fouriera). Mamy poniższe własności.

1. $\widehat{(f\hat{g})} = \int \hat{f}(x+y)g(y) dy$
2. $\int g\hat{f} = \int \hat{g}f$
3. $\hat{\hat{f}} = \hat{f}(-\xi) = \check{f}$.
4. $f(x) = \int e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d^n \xi$
5. $\check{\check{f}} = \hat{\hat{f}}$

Dowód. 1.

$$\begin{aligned}\widehat{(f\hat{g})}(x) &= \int \exp(-2\pi i x \xi) f(\xi) \hat{g}(\xi) \, d^n \xi = \int \exp(-2\pi i x \xi) f(\xi) \int \exp(-2\pi i \xi y) g(y) \, d^n y \\ &= \int g(y) \left[\int \exp(-2\pi i \xi(x+y)) f(\xi) \, d^n \xi \right] d^n y \\ &= \int g(y) \hat{f}(x+y) \, d^n y\end{aligned}$$

2. Niech $\hat{h}(0) = \int \exp(-2\pi i x \cdot 0) h(x) \, dx = \int h(x) \, dx$ i weźmy $h(x) = g(x) \hat{f}(x)$.

$$\begin{aligned}\int f(x) \hat{g}(x) \, d^n x &= \widehat{(f\hat{g})}(0) = \int g(y) \hat{f}(0+y) \, d^n y \\ &= \int g(y) \hat{f}(y) \, d^n y\end{aligned}$$

3. Weźmy $g_\varepsilon(\xi) = \exp(-\pi \varepsilon^2 \|\xi\|^2)$ i zauważmy, że

$$\widehat{(g_\varepsilon f)} = \int g_\varepsilon(\xi) \hat{f}(\xi) \exp(-2\pi i x \xi) \, d^n \xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{f}(x)$$

Z granicą można było wejść pod całkę, bo $\hat{f}(\xi)$ jest całkowalną majorantą.

$$\begin{aligned}\int \exp(-\pi \varepsilon^2 \|\xi\|^2) \exp(-2\pi i x \xi) \, d^n \xi &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int \exp(-\pi \|\eta\|^2) \exp\left(-2\pi i x \frac{\eta}{\varepsilon}\right) \, d^n \eta \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \exp\left(-\pi \left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\|^2\right)\end{aligned}$$

Następnie,

$$\hat{f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{(g_\varepsilon f)}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \hat{g}_\varepsilon(x+y) f(y) \, d^n y$$

zmieniamy zmienne na $z = x+y$, $y = z-x$,

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \hat{g}_\varepsilon(z) f(z-x) \, d^n z = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^n} \int \exp\left(-\pi \left\|\frac{z}{\varepsilon}\right\|^2\right) f(z-x) \, d^n z$$

Teraz podstawiamy $y = z/\varepsilon$,

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \exp(-\pi \|y\|^2) f(\varepsilon y - x) \, d^n y = \int \exp(-\pi \|y\|^2) f(-x) \, d^n y = f(-x)$$

A z granicą można było wejść pod całkę, gdyż

$$\left| \exp(-\pi \|y\|^2) f(\varepsilon y - x) \right| \leq \exp(-\pi \|y\|^2) \sup_{\mathbb{R}} |f|$$

4.

$$f(-x) = \check{f}(x) = \hat{\hat{f}}(x) = \int \exp(-2\pi i x \xi) \hat{f}(\xi) \, d^n \xi$$

Przez podmiankę x na $-x$ otrzymamy

$$f(x) = \int \exp(2\pi i x \xi) \hat{f}(\xi) \, d^n \xi$$

5.

$$\check{\check{f}} = \hat{\hat{\hat{f}}} = \hat{f}$$

■