Teoria grup I

Notatki z ćwiczeń

Wykładowcy:
dr Szymon Charzyński, prof. Piotr Sołtan

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Ćwiczenia 1

Zadanie 1 Dla dwóch liczb $x, y \in \mathbb{Z}$ definiujemy $x \circ y = x + (-1)^x y$. Sprawdzić, że $(\mathbb{Z}, \circ)$ jest grupą nieprzemienną. Znaleźć element neutralny i wzór na odwrotność. 11 paź 2021

Działanie musi być łączne, musi istnieć jedynka i każdy element musi mieć odwrotność.

$$\begin{aligned}
(x \circ y) \circ z &= x \circ (y \circ z) \\
(x \circ y) \circ z &= \left[x + (-1)^x y\right] \circ z = x + (-1)^x y + (-1)^{x+(-1)^x y} z \\
x \circ (y \circ z) &= x \circ \left[y + (-1)^y z\right] = x + (-1)^x \left[y + (-1)^y z\right] \\
&= x + (-1)^x y + (-1)^{x+y} z
\end{aligned}$$

Jeśli x jest parzysty to mamy. Jeśli x jest nieparzysty, to

$$(-1)^{x-y} z = (-1)^{x+y} z$$

zatem mamy łączność. Sprawdźmy przemienność.

$$\begin{aligned}
1 \circ 2 &= 1 - 2 = -1 \\
2 \circ 1 &= 2 + 1 = 3
\end{aligned}$$

zatem nie ma przemienności. Jeśli $y = 0$, to $x \circ 0 = x$ oraz jeśli $x = 0$ to $0 \circ y = y$, zatem 0 jest elementem neutralnym. Ściślej, znaleźliśmy pewien element neutralny, ale nie wykazaliśmy jeszcze, że to jest grupa. Jeśli wykażemy ostatni punkt definicji, to wiemy, że jest to też jedyny element neutralny. Patrzymy na odwrotność. Są dwa przypadki, gdy x jest parzyste lub nieparzyste. Gdy x jest nieparzyste, to $x^{-1} = x$, bo

$$\begin{aligned}
x \circ x^{-1} &= x - x^{-1} = x - x = 0 = e \\
x \circ x &= 0
\end{aligned}$$

Jeśli x jest parzysty, to $x^{-1} = -x$, bo

$$\begin{aligned}
x \circ x^{-1} &= x + x^{-1} = x - x = 0 = e \\
x \circ (-x) &= 0 = (-x) \circ x
\end{aligned}$$

Teraz widzimy, że $e = 0$ jest jedynym elementem neutralnym.

Zauważmy ciekawostkę:

$$(2\mathbb{Z}, +) \overset{\text{grp}}{\subset} (\mathbb{Z}, \circ)$$

Zadanie 2 Rozważmy zbiór macierzy $L = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} : |\beta| < 1 \right\}$. Przekonajmy się, że ten zbiór (z działaniem mnożenia macierzy) jest grupą.

Jak pomnożymy dwie macierze, to ma wyjść macierz takiej samej postaci i mamy się też przekonać, że odwrotność takiej macierzy jest takiej samej postaci.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}}\begin{bmatrix}1 & -\beta_1\\ -\beta_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\beta_2\\ -\beta_2 & 1\end{bmatrix} &= a\begin{bmatrix}1+\beta_1\beta_2 & -\beta_1-\beta_2\\ -\beta_1-\beta_2 & 1+\beta_1\beta_2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\\ -\dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\right)^2}}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}\\ -\dfrac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mnożenie macierzy nie wychodzi poza L. Stąd można odzyskać relatywistyczny wzór na składanie prędkości pamiętając, że $\beta = v/c$.

$$
v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}
$$

Zbiór jest też zamknięty na branie macierzy odwrotnej. Mamy więc grupę.

Zadanie 3 $\mathbb{Q}_8 = \{\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2, I, -I, J, -J, K, -K\}$ gdzie

$$
I = \begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix} = i\sigma_3, \quad J = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = i\sigma_2, \quad K = \begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix} = i\sigma_1
$$

Pokazać, że $\mathbb{Q}_8$ jest grupą, zrobić tabelkę mnożenia i znaleźć wszystkie podgrupy.

Zauważmy, że $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}_2$, $IJ = K$ plus reszta tożsamości cyklicznie. Jeśli cykl zaburzymy to wyskakuje minus, $JI = -K$. Stąd, $\mathbb{Q}_8$ jest zamknięty ze względu na mnożenie. Każdy element ma też element odwrotny (to z pierwszego faktu). Mnożenie macierzy jest łączne, zatem mamy grupę nieprzemienną.

Tablica 1: Tabela Cayleya

	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$
$-\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$-I$	I	$-J$	J	$-K$	K
I	I	$-I$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	K	$-K$	$-J$	J
$-I$	$-I$	I	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$-K$	K	J	$-J$
J	J	$-J$	$-K$	K	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	I	$-I$
$-J$	$-J$	J	K	$-K$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$-I$	I
K	K	$-K$	J	$-J$	$-I$	I	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$-K$	$-K$	K	$-J$	J	I	$-I$	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$

Tabelka mnożenia jest na Tab. 1. W każdym wierszu i w każdej kolumnie pojawiają się wszystkie elementy grupy. Mnożenie z jednej strony przez ustalony element grupy jest różnowartościowe, ale jest też surjekcją, zatem jest bijekcją całej grupy na siebie.

Teraz zajmijmy się podgrupami $H \subset \mathbb{Q}_8$. Wiemy, że rząd podgrupy dzieli rząd grupy (twierdzenie Lagrange'a). Dzielniki 8 to $\{1, 2, 4, 8\}$. $|H| = 1$ jest trywialne, $|H| = 8$ również. Są więc dwie nietrywialne możliwości. Mamy 3 podgrupy typu

$$H_{1,2,3} = \{\mathbf{1}, I, -I, -\mathbf{1}\}$$

gdzie indeksy $2, 3$ oznaczają to samo z J i K. Są to podgrupy cykliczne.

$$H_4 = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$$

To jest takie $\mathbb{Z}_2$. W grupie rzędu 2 nie może być żadnej z literek bo musiałby w niej być element odwrotny. Do tego trzeba co najmniej 4 elementów w przypadku użycia I, J, K. Nie ma też innych grup 4-elementowych, bo jeśli są 2 literki różne to już musi być rząd 8, bo złożenie dwóch literek daje trzecią. Mamy więc 4 nietrywialne (właściwe) podgrupy, a wszystkich jest 6.

Zadanie 4 Zbadać lewe i prawe warstwy podgrupy $H = \big\{\mathrm{id}, (12)\big\} \subset S_3$ (w grupie permutacji trójelementowych).

Przypomnijmy sobie czym jest warstwa. Dla $\tau \in S_3$, lewe warstwy to τH, a prawe warstwy to $H\tau$. Trzeba pomnożyć trochę permutacji. Uwaga! Nie warto brać τ z podgrupy, bo znów wyjdzie cała podgrupa!

Niech $\tau = (23)$. Wówczas, $(23)(12) = (321)$, czyli $\tau H = \big\{(23), (321)\big\}$. Podobnie, $(12)(23) = (123)$, czyli $H\tau = \big\{(23), (123)\big\}$. Zauważmy, że $\tau H \neq H\tau$. Ponadto, $H\tau$ nie jest żadną lewą warstwą.

Rozważmy jeszcze inną podgrupę $H' = \big\{\mathrm{id}, (123), (321)\big\}$ (podgrupa obrotów trójkąta równobocznego). Ta podgrupa ma tylko jedną warstwę, która nie jest nią samą. Klasy abstrakcji są rozłączne. Podgrupa ponadto wypełnia akurat pół całej grupy, zatem obie warstwy są takie same.

Zadanie 5 Niech G ma n elementów, $m \in \mathbb{N}$ oraz $\mathrm{NWD}(n, m) = 1$. Wówczas, dla każdego $a \in G$ istnieje dokładnie jeden element $b \in G$ taki, że $b^m = a$ (a la pierwiastek stopnia m).

Przypomnijmy sobie, że NWD można zapisać w postaci

$$\mathrm{NWD}(n, m) = km + ln, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Dla dowolnego $g \in G$ możemy z niego zrobić podgrupę biorąc jego potęgi. W końcu otrzymamy podgrupę cykliczną. Rząd podgrupy dzieli rząd grupy. Stąd, $g^n = e$.
Weźmy jakieś $a \in G$. Wówczas $a^{n-1} = a^{-1}$. Wiemy, że $kn + lm = 1$.

$$\begin{aligned} a^{km+ln} &= a \\ a^{km}a^{ln} &= a \\ a^{km}e &= a \end{aligned}$$

Finalnie,

$$(a^k)^m = a$$

Stąd, $b = a^k$. Jest to dowód istnienia.

Ćwiczenia 2

18 paź 2021

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\gamma} \\ \gamma & \overline{\alpha} \end{bmatrix} : |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \right\}$$
$$\overset{\text{lub}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -\overline{\gamma} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} : |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \right\}$$

Zadanie 1 Rozważmy zbiór macierzy:

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix} : \phi \in [0, 2\pi) \right\}$$

który jest podgrupą w SU(2). Zbadać lewe i prawe warstwy D.

Dla $u \in \mathrm{SU}(2)$, lewe warstwy są postaci $uD = \{ud\colon d \in D\}$, a prawe $Du = \{du\colon d \in U\}$.

$$ud = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\gamma} \\ \gamma & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha e^{i\phi} & -\overline{\gamma} e^{-i\phi} \\ \gamma e^{i\phi} & \overline{\alpha} e^{-i\phi} \end{bmatrix}$$
$$uD = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha e^{i\phi} & -\overline{\gamma} e^{-i\phi} \\ \gamma e^{i\phi} & \overline{\alpha} e^{-i\phi} \end{bmatrix} : \phi \in [0, 2\pi) \right\}$$

Podobnie prawe warstwy,

$$du = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\gamma} \\ \gamma & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha e^{i\phi} & -\overline{\gamma} e^{i\phi} \\ \gamma e^{-i\phi} & \overline{\alpha} e^{-i\phi} \end{bmatrix}$$
$$Du = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha e^{i\phi} & -\overline{\gamma} e^{i\phi} \\ \gamma e^{-i\phi} & \overline{\alpha} e^{-i\phi} \end{bmatrix} : \phi \in [0, 2\pi) \right\}$$

Jakie musi być u, żeby $uD = Du$? Wtedy, $\forall\, \phi \in [0, 2\pi)\colon\ \exists\, \psi \in [0, 2\pi)$ takie, że

$$\alpha e^{i\phi} = \alpha e^{i\psi}$$
$$\gamma e^{i\phi} = \gamma e^{-i\psi}$$

Z pierwszego równania wynika, że albo $\alpha = 0$, albo $e^{i\phi} = e^{i\psi}$, ale jesteśmy na dziedzinie gdzie exp jest injekcją, zatem $\phi = \psi$. W drugim równaniu, $\gamma = 0$ lub $\phi = 2\pi - \psi$.

Jeśli $\alpha = 0$, wtedy $\gamma \neq 0$, zatem dla każdego ϕ mamy takie ψ, że $\psi = 2\pi - \phi$.
Gdy $\alpha \neq 0$, to $\psi = \phi$, to dla przypadku z $\gamma = 0$, nie mamy spełnionego warunku $\forall\, \phi$, gdy

$\gamma \neq 0$ wszystko jest okej.

Stąd,

$$uD = Du \implies u \in D \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\overline{\gamma} \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} : |\gamma| = 1 \right\}$$

Zadanie 2 Niech

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Przekonać się, że to jest grupa oraz znaleźć jej centrum. Ta grupa nazywa się grupą Heisenberga.

Definicja 1. Centrum grupy G to zbiór $\mathcal{Z}(H) = \{z \in G\colon\ \forall\, g \in G\colon gz = zg\}$. Jeśli grupa jest przemienna, to centrum jest całą grupą.

Jak pomnożymy dwie macierze z H, to przekonamy się, że nie wychodzimy z H.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a + a' & b + ac' + b' \\ 0 & 1 & c + c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementy odwrotne też są w H, zatem to grupa. Teraz szukamy centrum. Do tego nie trzeba nowych macierzy. Jeśli $z \in G$ to macierz primowana, to żądamy by

$$\begin{bmatrix} 1 & a + a' & b + ac' + b' \\ 0 & 1 & c + c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 & a + a' & b + a'c + b' \\ 0 & 1 & c + c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd warunek na primy jest następujący: $\forall\, a, b, c \in R\colon ac' = a'c$. Wobec obecności kwantyfikatora, $a' = c' = 0$. Stąd centrum H to

$$\mathcal{Z}(H) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & b' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : b' \in \mathbb{R} \right\}$$

Komentarz

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{1}_3 + \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & x & x+y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Widzimy więc, że odtwarzamy macierze z grupy Heisenberga. Ponadto,

$$H = \left\{ \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

exp jest bijekcją takich dwóch typów macierzy. Zbiór tych argumentów expa jest natomiast przestrzenią wektorową (de facto reprezentacją algebry Liego grupy H). Rozważmy jej bazę:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \{X, Y, Z\}$$

Te macierze w $\mathcal{B}$ spełniają własności komutacyjne:

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0 = [Y, Z]$$

Jest więc analogia między operatorami pędu, położenia i „jedynki”. Stąd nazwa grupy.

Definicja 2. Niech G będzie grupą. Mówimy, że $a, b \in G$ są sprzężone jeśli:

$$\exists\, c \in G \colon b = cac^{-1}$$

Czyli są sprzężone jeśli jakiś automorfizm wewnętrzny przenosi jeden element na drugi. Sprzężoność jest relacją równoważności.

Zadanie 3 Znaleźć klasy sprzężoności w grupie S_4.

Jeżeli $a = \mathrm{id}$ (jedynka grupy), to widać, że a jest sprzężone tylko ze sobą. Jest to jedna z klas. Ogólnie, w grupie przemiennej wszystkie elementy są rozłącznymi klasami sprzężoności.

Uwaga 1. $\pi, \sigma \in S_n$ są sprzężone $\iff$ π i σ mają ten sam typ rozkładu na cykle rozłączne.

Na przykład $\pi = (123)(467)(58)$ (złożenie permutacji operujących na innych liczbach – cykle rozłączne). Typ rozkładu oznacza pytanie, ile jest cykli (rozłącznych) danej długości. Przykładem permutacji sprzężonej do π byłaby $\sigma = (382)(456)(17)$.

Szukamy klas w S_4. Prócz [id] na pewno mamy [(12)]. Kolejna klasa będzie cyklem długości 3, ignorującym ostatni element [(123)], potem może być klasa dwóch cykli rozłącznych długości 2 – [(12)(34)], może też być cykl długości 4 [(1234)]. To są wszystkie klasy. Chcielibyśmy się dowiedzieć ile jest elementów w każdej z klas.

$$\begin{aligned}
\big|[\mathrm{id}]\big| &= 1\\
\big|[(12)]\big| &= \binom{4}{2} = 6 \quad \text{(podzbiory 2-elementowe zbioru 4-elementowego)}\\
\big|[(123)]\big| &= 2\binom{4}{3} = 8 \quad \text{(każdy 3-elementowy zbiór daje 2 permutacje)}\\
\big|[(12)(34)]\big| &= \frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3 \quad \text{(każdy el pochodzi z dwóch wyborów pierwszej pary)}\\
\big|[(1234)]\big| &= 24 - 6 - 8 - 3 - 1 = 6 = \frac{4!}{4}
\end{aligned}$$

Podgrupa jest normalna jeśli automorfizmy wewnętrzne ją zachowują, zatem jest to de facto zbiór wypełniony klasami sprzężoności. Znajomość klas może powiedzieć jakie są wszystkie podgrupy normalne.

Jakie są podgrupy normalne S_4? Na pewno całe S_4 oraz $\{\mathrm{id}\}$. Dalsze podgrupy trzeba budować poprzez zlepianie klas. Liczność podgrupy musi być też dzielnikiem 24. Mamy więc podgrupę (Kleina) $V_4 = \{\mathrm{id}\} \cup [(12)(34)]$. Ten zbiór jest zamknięty na branie odwrotności i na branie iloczynu, zatem jest podgrupą. Weźmy jeszcze $A_4 = \{\mathrm{id}\} \cup [(12)(34)] \cup [(123)]$ (czyli zbiór wszystkich permutacji parzystych) – grupa alternująca.

$$A_4 = \ker \operatorname{sgn}$$

Jądro jest zawsze podgrupą normalną. Nie będzie już więcej podgrup normalnych. Gdybyśmy mieli podgrupę normalną, w której siedzi [(1234)] to musiałaby mieć przynajmniej 7 elementów, ale z twierdzenia Lagrange'a, co najmniej 8. Ale do $\{\mathrm{id}\} \cup [(1234)]$ nie da się dokleić jednoelementowej klasy $\{x\}$. Następny dzielnik to 12, wtedy brakuje zbioru 5-elementowego, będącego sumą pozostałych klas. Tego się uzyskać nie da. W takim razie nie może być podrupy normalnej zawierającej tą klasę. Do ostatniej klasy 6-elementowej stosują się te same argumenty.

Uwaga 2. Niech $A_n = \ker \operatorname{sgn}$. Niech C będzie klasą sprzężoności w S_n taką, że $C \subset A_n$. Wówczas albo C jest klasą sprzężoności w A_n albo $C = C_1 \sqcup C_2$ gdzie C_1, C_2 są klasami sprzężoności w A_n i $|C_1| = |C_2|$.

Uwaga 3. Niech $|G| < \infty$, $H \subset G$ (jako podzbiór) oraz $\forall\, a, b \in H \colon ab \in H$. Wówczas H jest podgrupą.

Zadanie 4 Wyobraźmy sobie, że na danym zbiorze z łącznym mnożeniem zachodzą prawa skracania $ab = ac \implies b = c$ oraz $ab = cb \implies a = c$. Czy stąd wynika, że to jest grupa?

W $(\mathbb{N}, +)$ prawa skracania zachodzą, jest to podzbiór $(\mathbb{Z}, +)$, ale nie podgrupa. Natomiast można pokazać, że na skończonym zbiorze te prawa skracania implikują już, że to grupa. Albo nawet przestrzeń zwarta z łącznym, ciągłym mnożeniem wystarczy by to już była grupa (to już bardziej w stronę analizy czy geo). Na przykład grupy obrotów są zwarte.

Ćwiczenia 3

25 paź 2021

Definicja 3. Niech G będzie grupą. Symbolem $[G, G]$ określamy podgrupę G generowaną przez wszystkie $aba^{-1}b^{-1}$. Taki element nazywamy komutatorem (a, b).

Zadanie 1 Sprawdzić, że $[G, G]$ jest grupą normalną, $\mathcal{Z}(G)$ jest grupą normalną oraz że dla każdego automorfizmu $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ zachodzi $\phi\big([G, G]\big) = [G, G]$ oraz $\phi\big(\mathcal{Z}(G)\big) = \mathcal{Z}(G)$.

Grupa jest normalna jeśli zachowują ją automorfizmy wewnętrzne. Weźmy jakiś automorfizm wewnętrzny działający na komutator

$$\begin{aligned} s(aba^{-1}b^{-1})s^{-1} &= sas^{-1}sbs^{-1}sa^{-1}s^{-1}sb^{-1}s^{-1} \\ &= (sas^{-1})(sbs^{-1})(sas^{-1})^{-1}(sbs^{-1})^{-1} \in [G, G] \end{aligned}$$

Generatory są przeprowadzane na siebie przez każdy automorfizm wewnętrzny, zatem grupa $[G, G]$ jest normalna.

Teraz weźmy $z \in \mathcal{Z}(G)$ i sprawdźmy, że $szs^{-1} \in \mathcal{Z}(G)$. Niech $x \in G$ oraz $y = s^{-1}xs$,

$$\begin{aligned} x(szs^{-1}) &= (sys^{-1})(szs^{-1}) \\ &= syzs^{-1} = szys^{-1} = szs^{-1}sys^{-1} \\ &= (szs^{-1})x \end{aligned}$$

Jest to przemienne z dowolnym $x \in G$, zatem $szs^{-1} \in \mathcal{Z}(G)$, tj. automorfizm wewnętrzny zachowuje centrum.

Tak w ogóle wiemy, że dla każdego $\psi \in \mathrm{Inn}(G)$ i dla każdego $z \in \mathcal{Z}(G)$, $\psi(z) = z$ (automorfizmy wewnętrzne są identycznościowe na centrum). Zatem powyższy rachunek jest lekkim przerostem formy nad treścią, ale przydaje się dalej.

Niech $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ oraz $z \in \mathcal{Z}(G)$ Chcemy pokazać, że $\phi(z) \in \mathcal{Z}(G)$.

$$\begin{aligned} x\phi(z) &= \phi\big(\phi^{-1}(x)\big)\phi(z) = \phi\big(\phi^{-1}(x)z\big) \\ &= \phi\big(z\phi^{-1}(x)\big) = \phi(z)x \end{aligned}$$

Natomiast w przypadku komutatorów,

$$\phi(aba^{-1}b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1}\phi(b)^{-1} \in [G, G]$$

Zadanie 2 Centrum grupy SU(2). To zadanie odpuszczamy bo zbyt nudne i proste (trzeba mnożyć macierze).

W wyniku tych działań otrzymalibyśmy

$$\mathcal{Z}\big(\mathrm{SU}(2)\big) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

To ciekawe, bo centrum jest dyskretne, a całe SU(2) jest rozmaitością, ma continuum elementów. To jest ważne. Moglibyśmy jeszcze rozważyć grupę ilorazową (centrum jest zawsze grupą normalną). Okaże się wówczas, że

$$\mathrm{SU}(2)/\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} \cong \mathrm{SO}(3)$$

Wydaje się to być płaszczyzną rzutową reprezentowaną przez sferę Riemanna. Wrócimy później do tego izomorfizmu.

Zadanie 3 Zdefiniujmy $\phi\colon \mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_{16}$ wzorem

$$\phi(k) = 4k \bmod 16$$

Naturalnie to mod 16 to już trochę przerost formy nad treścią, wiadomo, że dodawanie w tej grupie jest modulo 16. Sprawdzić, że jest to homomorfizm (de facto endomorfizm bo ϕ idzie do tej samej przestrzeni).

Nasze rozwiązanie jest prawdopodobnie strzałem z armaty do muchy, ale jest fajne. Można patrzeć na to ϕ jako odwzorowanie składające się z kilku etapów:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, mapsto] & 4a & \\
\mathbb{Z}_{16} \arrow[r, hook, "\imath", "\text{nie hom}"'] \arrow[rrr, bend right, "\phi"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\theta", "\text{hom}"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi", "\text{hom}"'] & \mathbb{Z}_{16}
\end{tikzcd}$$

Ten diagramik pokazuje, że tu jest co sprawdzać, bo włożenie $\imath$ nie jest homomorfizmem, czyli całość nie jest złożeniem homomorfizmów.

Pierwszy fakt: $\forall\, k, l \in \mathbb{Z}_{16}$ zachodzi $\imath(k) + \imath(l) - \imath(k + l) \in \ker\pi$. To mówi o ile $\imath$ nie jest homomorfizmem. Przykładowo, $k = 10$, $l = 6$, $k+l = 0$ natomiast $\imath(k)+\imath(l) = 16 \in \ker\pi$.

Drugi fakt: $\theta(\ker\pi) \subset \ker\pi$

To pozwala udowodnić, że ϕ jest homomorfizmem.

$$\begin{aligned}
\phi(k + l) &= \pi\Big(\theta\big(\imath(k + l)\big)\Big) = \pi\Big(\theta\big(\imath(k) + \imath(l) + \underbrace{\big(\imath(k + l) - \imath(k) - \imath(l)\big)}_{c \in \ker\pi}\big)\Big) \\
&= \pi\Big(\theta\big(\imath(k) + \imath(l) + c\big)\Big)
\end{aligned}$$

θ, π są homomorfizmami więc można rozbić na sumy,

$$\begin{aligned}
&= \pi\big(\theta(\imath(k))\big) + \pi\big(\theta(\imath(l))\big) + \pi\big(\underbrace{\theta(c)}_{\in\ker\pi}\big) \\
&= \phi(k) + \phi(l)
\end{aligned}$$

Zadanie 4 Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_6)$.

Szukamy odwzorowań, które zachowują sumy. Jeśli będziemy wiedzieli co się stało z jedynką, wiemy co się stało z innymi elementami. Innymi słowy, trzeba znaleźć/zbadać możliwe obrazy generatora grupy.

Jeśli $\phi(1) = 0$, to $\phi(2) = \phi(1) + \phi(1) = 0$ i analogicznie $\phi(k) = 0$.
Jeśli $\phi(1) = 1$, to $\phi(k) = k$.
Jeśli $\phi(1) = 2$, to $\phi(2) = 4$, $\phi(3) = 0$, $\phi(4) = 2$, $\phi(5) = 4$.
Jeśli $\phi(1) = 3$, to $\phi(2) = 0$, $\phi(3) = 3$, $\phi(4) = 0$, $\phi(5) = 3$.
Jeśli $\phi(1) = 4$, to $\phi(2) = 2$, $\phi(3) = 0$, $\phi(4) = 4$, $\phi(5) = 2$.
Jeśli $\phi(1) = 5$, to $\phi(2) = 4$, $\phi(3) = 3$, $\phi(4) = 2$, $\phi(5) = 1$.

Wobec tego, wszystkie obrazy jedynki są możliwe i mamy 6 homomorfizmów. Zauważmy, że jest tutaj jeden automorfizm (bo jest jeden odwracalny homomorfizm).

Przy okazji, dlaczego nie sprawdzaliśmy nawet $\phi(0)$? Wiadomo, że $\phi(e) = \phi(e \circ e) = \phi(e) \circ \phi(e)$ zatem zawsze $\phi(e) = e$.

Zadanie 5 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{18})$.

Znów, bierzemy generator $\mathbb{Z}_6$ i pytamy czy dany homomorfizm istnieje. Jeśli $\phi(1) = x$, to pytamy jakie może być to x, aby w grupie $\mathbb{Z}_{18}$

$$x + x + x + x + x + x = 0$$

czyli kiedy $\phi(0) = 0$. Innymi słowy, $\phi(1)$ musi być rzędu (rząd to najmniejsze $n \colon g^n = e$) $6, 3, 2$ (albo $\phi(1) = 0$). W grupie $\mathbb{Z}_{18}$ elementy rzędu 2 to 9, elementy rzędu 3 to $6, 12$, natomiast elementy rzędu 6 to $3, 15$. Mamy więc takie możliwości dla wartości odwzorowania na generatorze.

Jak grupa ma 1 generator to zawsze jest cykliczna. Co jednak, jeśli grupa ma więcej niż 1 generator?

Zadanie 6 Wyznaczyć $\mathrm{Hom}(S_3, S_4)$.

Bardzo użytecznym narzędziem w szukaniu homomorfizmów jest twierdzenie o izomorfizmie.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o izomorfizmie)**.** Niech G, H będą grupami oraz $\phi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Wówczas:

1. $\ker \phi$ jest podgrupą normalną G,
2. $\mathrm{im}\, \phi = \phi(G)$ jest podgrupą H,
3. $G/\ker \phi \cong \mathrm{im}\, \phi$

Zostało to wyrażone w formie diagramu na Rys. 1.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"] & \phi(G) \overset{\text{grp}}{\subset} H \\
G/\ker\phi \arrow[ur, dashed, "\imath", "\exists!"']
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 1: Twierdzenie o izomorfizmie w formie diagramu.

W naszym przypadku $G = S_3$ i $H = S_4$. Z twierdzenia Lagrange'a obraz dowolnego $\phi \in \mathrm{Hom}(S_3, S_4)$ jest podgrupą rzędu 6, 2 lub jest trywialny, tj. $\phi(S_3) = \{\mathrm{id}\}$.

Pierwszy przypadek jest gdy $\operatorname{im}\phi$ jest trywialny. Wówczas $\ker\phi = S_3$ (trywialna podgrupa normalna). Łącznie daje to jeden trywialny homomorfizm $\phi(\sigma) = \mathrm{id}$.

Następny przypadek jest gdy $\operatorname{im}\phi$ jest rzędu 2. Podgrupy rzędu 2 w S_4 to identyczność plus jeden z poniższych elementów:
(12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23).
Jest tak, gdyż dla każdej z tych permutacji σ, $\sigma^2 = \mathrm{id}$, czyli nie generujemy nowych elementów. Jest więc 9 takich podgrup. Jak wówczas dostajemy homomorfizm? Wiemy, że w S_3 są łącznie 3 podgrupy normalne, w tym jedna nietrywialna $A_3 = \{\mathrm{id}, (123), (321)\}$, dla której akurat $\left|S_3/A_4\right| = 2$. Wiemy też, że $\ker\phi$ jest podgrupą normalną. W związku z tym,

$$
\begin{tikzcd}
S_3 \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] & S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2 \arrow[r, hook, "\imath"] & \mathcal{O}_2 \overset{\text{grp}}{\subset} S_4
\end{tikzcd}
$$

gdzie $\mathcal{O}_2$ to podgrupy rzędu 2. Istnieje więc 9 takich homomorfizmów. Są one postaci $\phi(A_3) = \mathrm{id}$ i $\phi(S_3 \setminus A_3) = \sigma \in \mathcal{O}_2 \setminus \{\mathrm{id}\}$.

Ostatni przypadek jest gdy $\operatorname{im}\phi$ ma 6 elementów. Oznacza to, że wówczas $\ker\phi = \{\mathrm{id}\}$, bo $\left|S_3/\ker\phi\right| = 6$. Jedyna 6-elementowa podgrupa S_4 to grupa S_3 generowana (przykładowo) przez (123) i (12). Jednakże, w S_4 są 4 podgrupy izomorficzne do S_3 (po jednej, nie ruszającej danego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$). Łącznie będzie więc $4 \cdot 3! = 24$ homomorfizmów, bo bijektywne homomorfizmy (automorfizmy) z S_3 do S_3 można wybrać na 3! sposobów. Dlaczego tyle? Otóż te automorifzmy są całkowicie określone poprzez podanie wartości na generatorach (123), (12). Automorfizm musi zachowywać rząd elementów, zatem $\phi\big((123)\big)$ można wybrać co najwyżej na 2 sposoby, a $\phi\big((12)\big)$ co najwyżej na 3 sposoby (bo tyle jest elementów o rzędach 3 i 2). Zauważmy jednak, że $\left|\mathrm{Inn}(S_3)\right| = 6$, jako że $\mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3/\mathcal{Z}(S_3) \cong S_3$, zatem $\left|\mathrm{Aut}(S_3)\right| = 6$.

Finalnie, $\left|\mathrm{Hom}(S_3, S_4)\right| = 1 + 9 + 24 = 34$.

Ćwiczenia 4

Zadanie 1 Wyznaczyć grupę $\mathrm{Aut}(S_3)$ (bijektywne homomorfizmy w S_3). 08 lis 2021

Tak w zasadzie to zrobiłem to wyżej w swoim dowodzie ostatniego zadania. Ale teraz inaczej.

$$S_3 = \{\mathrm{id}, (12), (23), (13), (123), (321)\}$$

Można znaleźć układ generujący S_3 (tu byłoby łatwo bo grupa jest mała), byłby to cykl długości 3 i jedna transpozycja (generalnie w dowolnej grupie S_n byłoby tak samo). Można prościej. Dla $\phi \in \mathrm{Aut}(S_3)$, $\sigma \in S_3$, gdzie $\sigma^2 = \mathrm{id}$ mamy $\phi(\sigma)^2 = \mathrm{id}$ (automorfizm zachowuje rząd elementu). Zatem dowolny automorfizm ϕ wyznacza permutację zbioru $\{(12), (23), (13)\}$. Otrzymujemy homomorfizm $\Phi\colon \mathrm{Aut}(S_3) \to S_{\{(12),(23),(13)\}}$ (to też jest de facto S_3). Składanie automorfizmu to wykonywanie permutacji jedna po drugiej, czyli działanie w tej docelowej grupie. Co więcej, ten homomorfizm jest injektywny. Pokażemy jeszcze, że obrazem jest wszystko, zatem pokażemy że te grupy są izomorficzne.

Wybierzmy automorfizm wewnętrzny zadany przez transpozycję (12). Widzimy, że $(12)^{-1} = (12)$, więc

$$\mathrm{Ad}_{(12)}\colon S_3 \ni \sigma \mapsto (12)\sigma(12) \in S_3$$

Widać, że $\mathrm{Ad}_{(12)}\big((12)\big) = (12)$, $\mathrm{Ad}_{(12)}\big((23)\big) = (12)(23)(12) = (13)$ oraz $\mathrm{Ad}_{(12)}\big((13)\big) = (23)$. To oznacza, że $\mathrm{Ad}_{(12)}$ zadaje transpozycję w $S_{\{(12),(23),(13)\}}$. Jeśli natomiast weźmiemy inny automorfizm zadany przez cykl (123),

$$\mathrm{Ad}_{(123)}\colon S_3 \ni \sigma \mapsto (123)\sigma(123)^{-1} \in S_3$$

wówczas $\mathrm{Ad}_{(123)}\big((12)\big) = (23)$, $\mathrm{Ad}_{(123)}\big((23)\big) = (13)$ oraz $\mathrm{Ad}_{(123)}\big((13)\big) = (12)$. Wyszło więc, że to jest w obrazie cykl.

Skrótowo, wybraliśmy sobie takie Φ, które na automorfizmie $\mathrm{Ad}_{(12)}$ zwraca transpozycję w $S_{\{(12),(23),(13)\}}$ i które na $\mathrm{Ad}_{(123)}$ zwraca cykl w tej grupie. Pokazaliśmy, że $\mathrm{im}\,\Phi$ zawiera $\big((23)(13)\big)$ i $\big((12)(23)(13)\big)$, elementy te generują całą grupę, zatem $\mathrm{im}\,\Phi = S_{\{(12),(23),(13)\}} \cong S_3$. Stąd $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

Zadanie 2 Pokazać, że $G/\mathcal{Z}(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

Z pewnością centrum $\mathcal{Z}(G)$ jest podgrupą normalną, więc można podzielić. Najłatwiej skonstruować epimorfizm (surjektywny homomorifzm) $G \to \mathrm{Inn}(G)$, którego jądrem byłoby $\mathcal{Z}(G)$. Wówczas na mocy twierdzenia o izomorfizmie $G/\mathcal{Z}(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$. Dobrym epimorfizmem jest

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\colon G &\to \mathrm{Inn}(G) \\ x &\mapsto \mathrm{Ad}_x \end{aligned}$$

tj. $\mathrm{Ad}(x) = \mathrm{Ad}_x$. Oczywiście Ad jest homomorfizmem, bo

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_y \circ \mathrm{Ad}_x(g) &= \mathrm{Ad}_y(xgx^{-1}) = yxgx^{-1}y^{-1} \\ &= (yx)g(yx)^{-1} = \mathrm{Ad}_{yx}(g) \end{aligned}$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} \ker \mathrm{Ad} &= \{x \in G\colon \mathrm{Ad}_x = \mathrm{id}_{\mathrm{Inn}(G)}\} \\ &= \{x \in G\colon \forall\, g \in G\colon xgx^{-1} = g\} \\ &= \{x \in G\colon \forall\, g \in G\colon xg = gx\} = \mathcal{Z}(G) \end{aligned}$$

Więc świetnie, na podstawie twierdzenia o izomorfizmie, jest to izomorfizm z grupy ilorazowej do grupy automorfizmów wewnętrznych.

Uwaga 4. Grupa A_n (permutacje parzyste) jest prosta dla $n \geq 5$ (nie posiada nietrywialnych podgrup normalnych).

Jak szukać podgrup normalnych? Dobrze szukać klas sprzężoności. Pytanie więc jak wyglądają te klasy w grupie $A_n \subset S_n$. Klasy w S_n znamy (są numerowane możliwymi rozkładami na cykle rozłączne). W A_n jest trochę gorzej, są dwa przypadki.

Uwaga 5. Niech C będzie klasą sprzężoności w S_n, zawartą w A_n. Wtedy

a) C jest klasą sprzężoności w A_n lub

b) C jest sumą dwóch równolicznych klas sprzężoności w A_n

Dowód. C jest klasą sprzężoności, więc jest klasą czegoś, np. $C = [\sigma] = \{\gamma\sigma\gamma^{-1} \colon \gamma \in S_n\}$, ale γ mogę brać oddzielnie z A_n i spoza A_n,

$$C = \underbrace{\{\alpha\sigma\alpha^{-1} \colon \alpha \in A_n\}}_{X} \cup \underbrace{\{\beta\sigma\beta^{-1} \colon \beta \in S_n \setminus A_n\}}_{Y}$$

Teraz badamy przypadki.

1. Przypuśćmy, że $X \cap Y \neq \varnothing$. Wówczas istnieje $\alpha \in A_n$ oraz $\beta \in S_n \setminus A_n \colon \alpha\sigma\alpha^{-1} = \beta\sigma\beta^{-1}$. Stąd, $\sigma(\alpha^{-1}\beta) = (\alpha^{-1}\beta)\sigma$. Ponadto, $\alpha^{-1}\beta$ jest nieparzysta (zatem na pewno nietrywialna), bo α jest parzysta, ale β nieparzysta. Niech $\tau = \alpha^{-1}\beta \in S_n \setminus A_n$. Dla dowolnego $\beta' \in S_n \setminus A_n$, $\beta'\sigma\beta'^{-1} = \beta'\tau\sigma\tau^{-1}\beta'^{-1} = (\beta'\tau)\sigma(\beta'\tau)^{-1}$. Natomiast $\beta'\tau$ jest teraz parzysta (bo to złożenie dwóch nieparzystych)! Dowolny element Y okazał się więc być elementem z X, czyli $Y \subset X$ jeśli mają niepustą część wspólną.

   Całkowicie analogicznie pokażemy, że $X \subset Y$. Stąd, $X = Y = C$. X jest natomiast explicite klasą sprzężoności w A_n, C była klasą sprzężoności w S_n. Stąd, C jest klasą sprzężoności w A_n.

2. Przypuśćmy, że $X \cap Y = \varnothing$. Ustalmy dowolną permutację $\pi \in S_n \setminus A_n$ i rozważmy $\mathrm{Ad}_\pi|_X$.

   $$\mathrm{Ad}_\pi(\alpha\sigma\alpha^{-1}) = \pi\alpha\sigma\alpha^{-1}\pi^{-1} = \underbrace{(\pi\alpha)}_{\in S_n \setminus A_n} \sigma(\pi\alpha)^{-1} \in Y$$

   To odwzorowanie na X jest różnowartościowe (bo przecież Ad to automorfizm). $\mathrm{Ad}_\pi|_X$ jest również surjektywne bo: $\beta\sigma\beta^{-1} = \mathrm{Ad}_\pi\big((\pi^{-1}\beta)\sigma(\pi^{-1}\beta)^{-1}\big)$, ale $\pi^{-1}\beta \in A_n$ więc $\beta\sigma\beta^{-1} \in \mathrm{Ad}_\pi(X)$.

   Mamy więc bijekcję między X a Y, więc są równoliczne. X jest od początku klasą sprzężoności w A_n. $C = X \sqcup Y$,

   $$Y = \{\beta\sigma\beta^{-1} \colon \beta \in S_n \setminus A_n\}$$

jednak $S_n \setminus A_n = A_n\pi$ (prawa warstwa?), zatem

$$\begin{aligned} &= \{(\alpha\pi)\sigma(\alpha\pi)^{-1} \colon \alpha \in A_n\} \\ &= \{\alpha(\pi\sigma\pi^{-1})\sigma^{-1} \colon \alpha \in A_n\} = [\pi\sigma\pi^{-1}] \end{aligned}$$

A element w nawiasie jest parzysty. Zatem jest to klasa sprzężoności Y. Stąd, C jest sumą dwóch klas sprzężoności w A_n.

■

Rozważmy $n = 5$.

$$\begin{aligned} S_5 &= \underbrace{\{\mathrm{id}\}}_{1} \cup \underbrace{[(12)]}_{5} \cup \underbrace{[(12)(34)]}_{15} \cup \underbrace{[(123)]}_{20} \cup \underbrace{[(123)(45)]}_{30} \cup \underbrace{[(1234)]}_{30} \cup \underbrace{[(12345)]}_{24} \\ A_5 &= \{\mathrm{id}\} \cup [(12)(34)] \cup [(123)] \cup [(12345)] \end{aligned}$$

Pierwsza, trzecia i czwarta klasa są klasami sprzężoności w A_5, a ostatni element sumy jest sumą dwóch klas sprzężoności 12-elementowych w A_5. Dlaczego? Każda klasa jest orbitą, a moc orbity musi być dzielnikiem rzędu grupy, czyli dzielnikiem 60 w tym wypadku. Wychodzi więc, że grupa A_5 jest prosta, bo nie złożymy w niej żadnych innych podgrup normalnych niż $\{\mathrm{id}\}$ i A_5, dysponując takimi klockami będącymi klasami sprzężoności (a z nich buduje się podgrupy normalne). Jest tak dlatego, że żadna z liczb $1 + \{12, 15, 20, + \text{ sumy tych liczb}\}$ nie jest dzielnikiem 60, tj. rzędu grupy.

Ćwiczenia 5

15 lis 2021 **Zadanie 1** $\mathrm{SU}(2)/\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\} \cong \mathrm{SO}(3)$.

Niech

$$\begin{aligned} E &= \{m \in M_2(\mathbb{C}) \colon m = m^* \wedge \operatorname{Tr} m = 0\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} \colon x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

gdzie m^* oznacza sprzężenie hermitowskie. Jest to trójwymiarowa przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$. Niech $u \in \mathrm{SU}(2)$. Definiujemy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \Phi_u \colon E &\to E \\ m &\mapsto umu^* \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\operatorname{Tr}(umu^*) = \operatorname{Tr}(m)$ oraz $\Phi_u(m)^* = um^*u^* = \Phi_u(m^*)$. Zatem Φ_u jest automorfizmem przestrzeni wektorowej E. Niech

$$\begin{aligned} \delta \colon E &\to \mathbb{R} \\ m &\mapsto -\det(m) \end{aligned}$$

Wówczas,

$$\delta\big(\Phi_u(m)\big) = \delta(umu^*) = -\det(umu^*) = -\det(m) = \delta(m)$$

Niech τ_i będzie pewną bazą E. Zauważmy, że $\delta(x^i\tau_i) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Przypomnijmy sobie, że grupa ortogonalna to grupa $\mathrm{O}(p,q) = \{f\colon V \to V\colon \forall\, v,w \in V\colon \big(f(v), f(w)\big) = (v,w)\}$ gdzie $(\cdot,\cdot)$ oznacza niezdegenerowaną symetryczną formę dwuliniową o sygnaturze (p,q). Wiemy natomiast, że takim formom jednoznacznie odpowiadają formy kwadratowe. Powyższy rachunek pokazał więc, że Φ_u zachowuje formę kwadratową o sygnaturze 3, stąd $\Phi_u \in \mathrm{O}(3)$. Możemy więc zapisać następujące odwzorowanie,

$$\Phi\colon \mathrm{SU}(2) \ni u \mapsto \Phi_u \in \mathrm{O}(3)$$

które jest homomorfizmem grup. Dlaczego?

$$\begin{aligned}\Phi_{uv}(m) &= (uv)m(uv)^* = u(vmv^*)u^* \\ &= u\Phi_v(m)u^* = \Phi_u \circ \Phi_v(m)\end{aligned}$$

Zastanówmy się nad jądrem tego homomorfizmu.

$$\begin{aligned}\ker\Phi &= \{u \in \mathrm{SU}(2)\colon \Phi_u = \mathrm{id}_E\} \\ &= \{u \in \mathrm{SU}(2)\colon \forall\, m \in E\colon umu^* = m\} \\ &= \{u \in \mathrm{SU}(2)\colon \forall\, m \in E\colon um = mu\}\end{aligned}$$

Jeśli u komutuje z dowolną kombinacją liniową macierzy σ_i, to kombinuje również z dowolną kombinacją $(\mathbf{1}, \sigma_i)$. Natomiast dowolną macierz samosprzężoną wyraża się jako $x^0\mathbf{1} + x^i\sigma_i$. Stąd,

$$= \{u \in \mathrm{SU}(2)\colon \forall\, m = m^*\colon um = mu\}$$

Skoro u komutuje z dowolnymi macierzami samosprzężonymi, to komutuje również z ich kombinacjami liniowymi, czyli ze wszystkimi macierzami kwadratowymi $M_2(\mathbb{C}) \ni A = (A+A^*)/2 + i(A-A^*)/2$, bo można je zawsze rozłożyć na właśnie taką kombinację macierzy samosprzężonych.

$$= \{u \in \mathrm{SU}(2)\colon \forall\, A \in M_2(\mathbb{C})\colon uA = Au\}$$

Jedynymi macierzami komutującymi z każdą inną są $\mathbb{C}\mathbf{1}_2$, zatem

$$= \mathrm{SU}(2) \cap \mathbb{C}\mathbf{1}_2 = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} = \mathscr{Z}\big(\mathrm{SU}(2)\big)$$

Teraz napiszmy sobie jak dokładnie takie Φ_u wygląda. Dowolny element grupy $\mathrm{SU}(2)$ można zapisać jako

$$\mathrm{SU}(2) \ni u = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -\overline{\gamma} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}$$

gdzie $|\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Napiszmy $[\Phi_u]_{\mathcal{B}}$ w bazie $\mathcal{B} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (baza Pauliego jest wygodną bazą przestrzeni E).

$$\begin{aligned}\Phi_u\sigma_1 = u\sigma_1u^* &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -\overline{\gamma} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\alpha} & -\gamma \\ \overline{\gamma} & \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -\overline{\gamma} & \overline{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\gamma} & \alpha \\ \overline{\alpha} & -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\gamma & \alpha^2 - \gamma^2 \\ \overline{\alpha}^2 - \overline{\gamma}^2 & -(\alpha\overline{\gamma} + \overline{\alpha}\gamma) \end{bmatrix} \\ &= 2\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\gamma})\sigma_3 + \mathrm{Re}(\overline{\alpha}^2 - \overline{\gamma}^2)\sigma_1 + \mathrm{Im}(\overline{\alpha}^2 - \overline{\gamma}^2)\sigma_2\end{aligned}$$

Podobnie pozostałe ewaluacje na bazie. Stąd,

$$[\Phi_u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\alpha^2-\gamma^2) & \operatorname{Im}(\alpha^2+\gamma^2) & -2\operatorname{Re}(\alpha\gamma) \\ -\operatorname{Im}(\alpha^2-\gamma^2) & \operatorname{Re}(\alpha^2+\gamma^2) & 2\operatorname{Im}(\alpha\gamma) \\ 2\operatorname{Re}(\alpha\overline{\gamma}) & 2\operatorname{Im}(\alpha\overline{\gamma}) & |\alpha|^2-|\gamma|^2 \end{bmatrix}$$

Widać więc, że Φ jest ciągłym odwzorowaniem w u. Wiadomo, że $\mathrm{SU}(2)$ jako grupa topologiczna jest spójna, zatem obrazem $\Phi\colon \mathrm{SU}(2)\to \mathrm{O}(3)$ musi być spójna część grupy $\mathrm{O}(3)$ o wyznaczniku 1 (bo identyczność idzie w tę część). Z tej ciągłości (zachowującej spójne składowe) wynika więc, że $\Phi\colon \mathrm{SU}(2)\to\mathrm{SO}(3)$. Wiemy już, że $\ker\Phi = \{\mathbf{1},-\mathbf{1}\}$. Pytanie jeszcze, czy to odwzorowanie jest sujektywne. Można to pokazać ogólnym argumentem uciekającym się do geometrii różniczkowej, ale zrobimy to sprytnie. Rozważmy element $u\in\mathrm{SU}(2)$ postaci

$$u = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}$$
$$\Phi_u = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykombinowaliśmy takie u, że wyszedł obrót wokół jednej z osi. Teraz trzeba wykombinować pozostałe dwa obroty wokół innych osi.

$$u = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Phi_u = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Jest to obrót wokół osi y (tyle, że chyba z niekanoniczną orientacją, ale trudno).

$$u = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Phi_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Wyszło nam, że w $\operatorname{im}\Phi$ są wszystkie obroty wokół 3 osi (wystarczyłyby nawet obroty wokół dwóch osi, wtedy trzeba by trochę sprytniej je poskładać by dostać zupełnie wszystkie). Zatem Φ jest epimorfizmem, dzięki czemu z twierdzenia o izomorfizmie wiemy, że

$$\mathrm{SU}(2)/\{\mathbf{1},-\mathbf{1}\} \cong \mathrm{SU}(2)/\ker\Phi \cong \operatorname{im}\Phi \cong \mathrm{SO}(3)$$

Widzimy, że $\mathrm{SU}(2)$ jest podwójnym nakryciem grupy obrotów, zatem $\mathrm{SU}(2)\cong\mathrm{Spin}(3)$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\Phi_u"] \arrow[d, "\exp"] & & E \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{R} \\
\mathrm{SU}(2) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{O}(3) & & \\
\mathrm{SU}(2)/\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} \arrow[ur, dashed, "\cong"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Zadanie 2 Niech $G = \left\{ \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. G działa więc naturalnie (z lewej strony) na $\mathbb{R}^2$. Znaleźć orbity tego działania.

Przypomnijmy sobie definicję orbity działania.

Definicja 4 (Orbita)**.** Niech G będzie grupą a X zbiorem. Ustalamy lewe działanie grupy $\triangleright\colon G \times X \to X$. Wówczas orbitą punktu $m \in X$ tego działania nazwiemy zbiór

$$\begin{aligned} X \supset \mathcal{O}_m &= \{x \in X\colon \exists\, g \in G\colon g \triangleright m = x\} \\ &= \{g \triangleright m\colon g \in G\} \end{aligned}$$

Jeśli grupa działa przez operatory liniowe (jak w tym przypadku), wektor zerowy jest trywialną orbitą. Najlepiej praktycznie jest znaleźć fajną funkcję, która się nie zmienia przy działaniu grupy. Dlaczego? Jeśli $f(g \triangleright m) = g(m)$ to z pewnością $f(\mathcal{O}_m) = f(m)$. W naszym wypadku jest to forma kwadratowa $I(x, y) = x^2 - y^2$ (G to przecież grupa Lorentza w dwóch wymiarach). Widzimy wówczas, że $\forall\, g \in G$ dostajemy

$$I\left(g\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = I\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Aby to sprawdzić, weźmy

$$G \ni g = \begin{bmatrix} \sqrt{1+s^2} & s \\ s & \sqrt{1+s^2} \end{bmatrix}$$

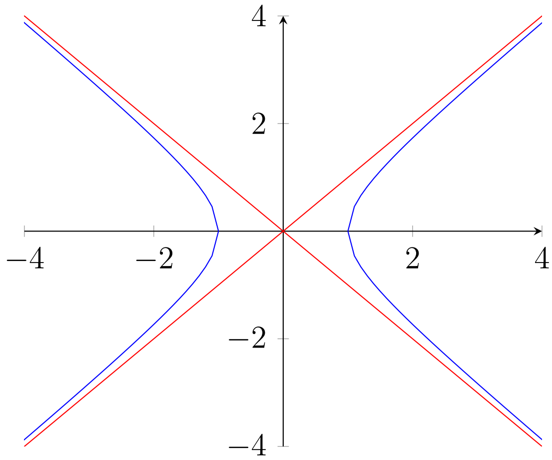
Jest to równoważna, a czasem nawet bardziej optymalna parametryzacja grupy $G = \mathrm{SO}(1, 1)$.

$$\begin{aligned} I\left(g\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= (1+s^2)x^2 + 2s\sqrt{1+s^2}xy + s^2y \\ &\quad - \left[(1+s^2)y^2 + 2s\sqrt{1+s^2}xy + s^2x^2\right] \\ &= x^2 - y^2 = I\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

To znaczy, że orbity muszą leżeć w poziomicach tej funkcji. Poziomice dużo łatwiej zrozumieć. Niech $c \in \mathbb{R}$.

$$X_c = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : I \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x^2 - y^2 = c \right\}$$

Są to oczywiście hiperbole.



Rysunek 2: X_0 (czerwone), X_1 (niebieskie)

Zauważmy jednak, że $f(\mathcal{O}_m) = c$ nie gwarantuje że nie może istnieć orbita innego punktu, znajdująca się w tej samej poziomicy: $f(\mathcal{O}_n) = f(\mathcal{O}_m)$.
W naszym przypadku, jeśli jakiś punkt leży w którejś gałęzi hiperboli, to już w niej na pewno zostanie.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+s^2} & s \\ s & \sqrt{1+s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+s^2} + s \\ \sqrt{1+s^2} + s \end{bmatrix}$$

Obie te liczby są zawsze dodatnie, zatem

$$\mathcal{O}_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} : t > 0 \right\}$$

$$\mathcal{O}_{\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} : t > 0 \right\}$$

$$\mathcal{O}_{\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]} = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \end{bmatrix} : t > 0 \right\}$$

$$\mathcal{O}_{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} : t > 0 \right\}$$

Te 4 orbity tworzą razem $X_0 \setminus \mathbf{0}$. Teraz zajmijmy się tymi hiperbolami.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+s^2} & s \\ s & \sqrt{1+s^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+s^2}x + sy \\ \sqrt{1+s^2}y + sx \end{bmatrix}$$

Jeśli $|x| > |y|$, to $sx + \sqrt{1+s^2}y$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste dla $s \in \mathbb{R}$. Czyli wypełnimy całą gałąź hiperboli. Jeśli natomiast $|y| > |x|$ to $\sqrt{1+s^2}x + sy$ wypełnia całe $\mathbb{R}$.

Konkluzja: orbitami są pełne gałęzie hiperbol X_c dla $c \neq 0$ (ale nie cała hiperbola). Mamy continuum różnych orbit. Mamy de facto foliację $\mathbb{R}^2$.
W nawiasie, wydaje się więc, że włóknami wiązki głównej z tą grupą strukturalną są właśnie takie ładne podrozmaitości będące hiperbolami.

Zadanie 3 Na ile różnych kolorów można pomalować sześcian? Rozumiemy to tak, że sześcian po obrocie można uznać za ten sam sześcian (utożsamiamy te pokrycia, które można uzyskać wzajemnym działaniem grupy obrotów).

Co to jest grupa obrotów zachowująca sześcian? Niech

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x, y, z \in [-1, 1] \right\}$$

Przede wszystkim chcemy pokazać, że grupa obrotów zachowująca V, tj. $O\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taka, że $O(V) = V$, jest izomorficzna z S_4. Należy rozważyć zbiór przekątnych sześcianu (ich jest właśnie 4). Trzeba się przekonać, że działając O dostajemy wszystkie możliwe permutacje przekątnych oraz, że nie permutując przekątnych nie robię obrotu.

Rysunek na kartce.

Tablica 2: Relacje między permutacjami a obrotami.

OBRÓT	PERMUTACJA	ILE
a) id	id	1
b) obroty o $90°$ wokół osi x, y, z	cykle długości 4	6
c) obroty o $180°$ wokół osi x, y, z	(12)(34), (13)(24), (14)(23)	3
d) obroty o $120°$ wokół przekątnych	cykle długości 3	8
e) obroty o $180°$ wokół osi przechodzących przez środki przeciwległych krawędzi	transpozycje	6

Jeśli jest obrót, który nie rusza przekątnych to niczego nie rusza. Trzeba by to pokazać tak, żeby z wierzchołkami utożsamić jakieś wektory. Jak coś nie rusza żadnej przekątnej, to jest trywialnym obrotem. Pozostaje pytanie czy to, co wypisaliśmy to wszystkie obroty. Zostańmy przy tym, że są to wszystkie bo nie jesteśmy w stanie innych wymyślić. Jakiś inny argument – jeśli jest obrót to musi permutować przekątne. Grupa tych permutacji liczy 24. Tyle właśnie elementów ma nasza wypisana grupa.

Zatem na ile sposobów można pokolorować ściany V, n kolorami (modulo obroty)? Interesuje nas liczba orbit, na zbiorze na który działa ta grupa. Niech X to będzie zbiór wszystkich funkcji $\{\text{ściany } V\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Niech G to będzie grupa obrotów V. Pytamy o liczebność zbioru orbit $\left|X/G\right|$. Na to istnieje wzór Burnside'a!

$$\left|X/G\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$
$$X^g = \{x \in X \colon gx = x\}$$

Tę sumę można policzyć, bo dokładnie wiemy co się w naszym sześcianiku dzieje.

Tablica 3: Liczebności kolejnych X^g

PODZBIÓR G	$\|X^g\|$
a) $g = \mathrm{id}$	$\left\|X^{\mathrm{id}}\right\| = \|X\| = n^6$
b)	n^3
c)	n^4
d)	n^2
e)	n^3

Wszystko już wiemy, wystarczy podstawić do wzoru.

$$\left|X/G\right| = \frac{1}{24}\left(n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 8n^2 + 6n^3\right)$$

Na tyle sposobów da się pokolorować sześcian n kolorami. Jak wstawi się $n = 2$, wychodzi 10.

Ćwiczenia 6

22 lis 2021

Uwaga 6. Grupa G działa lewostronnie na zbiorze X, $|G| < \infty$, $|X| < \infty$. Wówczas zbiór orbit X/G ma moc

$$\left|X/G\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$
$$X^g = \{x \in X \colon g \triangleright x = x\}$$

Dowód. Rozważmy zbiór par $P = \{(g, x) \colon g \triangleright x = x\} \subset G \times X$. Można różnie ustawić parametr względem którego coś będziemy sumować. Cały trick polega na sprytnym sumowaniu.

$$|P| = \sum_{x \in X} |G_x| \overset{\text{lub}}{=} \sum_{g \in G} |X^g|$$

gdzie G_x to są te $g \in G$, które nie ruszają x (grupy izotropii). Możemy rozłożyć sumę po x na sumę po każdej orbicie oddzielnie.

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{\mathcal{O} \in X/G} \sum_{x \in \mathcal{O}} |G_x|$$

Zauważmy, że oczywiście $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$. Jeśli grupa H działa na Y tranzytywnie (czyli jeśli $\forall\, y, z \in Y \colon \exists\, g \in G \colon g \triangleright y = z$), to wtedy Y jest w bijekcji ze zbiorem H/H_y dla dowolnego $y \in Y$. Naturalnie działanie grupy na orbicie jest tranzytywne. W takim razie, $|\mathcal{O}_x| = \big|G/G_x\big| = |G|/|G_x|$. To oznacza, że możemy inaczej wyrazić rząd grupy izotropii,

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\mathcal{O}\in X/G} \sum_{x\in\mathcal{O}} \frac{|G|}{|\mathcal{O}_x|} = |G| \sum_{\mathcal{O}\in X/G} \underbrace{\sum_{x\in\mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|}}_{1} \\
&= |G| \sum_{\mathcal{O}\in X/G} 1 = |G|\big|X/G\big|
\end{aligned}
$$

Tutaj dostajemy nasz wzór. ■

Zadanie 1 (Małe twierdzenie Fermata) Niech $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $n^p \equiv n \bmod p$.

Niech X będzie zbiorem wszystkich funkcji ze zbioru p-elementowego (nadajmy mu od razu strukturę grupy) $\mathbb{Z}_p \to \{1, \dots, n\}$. Oczywiście $|X| = n^p$. Niech $\mathbb{Z}_p$ działa na X. Definiujemy to działanie przez

$$
\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{Z}_p \times X &\to X \\
\big(k, f(l)\big) &\mapsto f(l \cdot k)
\end{aligned}
$$

tj. $(k \cdot f)(l) = f(l \cdot k)$. Niech $Y \subset X$ będą funkcjami stałymi. Wiemy, że $|Y| = n$ i są tożsame z elementami niezmienniczymi na działanie $\mathbb{Z}_p$. Czyli każda funkcja stała jest sama sobie orbitą tego działania. Wszystkie pozostałe orbity nie są jednoelementowe. Zatem $X = Y \sqcup \{\text{nietrywialne orbity}\}$. Ale grupa $\mathbb{Z}_p$ nie ma żadnych nietrywialnych podgrup ($p \in \mathbb{P}$), zatem wszystkie nietrywialne orbity mają moc p. Wyszło nam, że $\big|X \setminus Y\big| \equiv 0 \bmod p$. Natomiast

$$
\begin{aligned}
\big|X \setminus Y\big| &= n^p - n \\
n^p - n &\equiv 0 \bmod p \\
n^p &\equiv n \bmod p
\end{aligned}
$$

Zadanie 2 Działanie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ na czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Niech

$$
M^4 = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})
$$

czyli są to po prostu macierze samosprzężone (hermitowskie). Nazwa jest taka a nie inna, gdyż dla $m \in M^4$, $\det m = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Tak się tę przestrzeń Minkowskiego wygodnie bada, bo można łatwiej badać działanie grup mając macierze. Zdefiniujmy działanie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ na M^4 w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
\cdot : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times M^4 &\to M^4 \\
(g, m) &\mapsto gmg^*
\end{aligned}
$$

Od razu widać, że spełnia to założenia działania. Działanie to zachowuje wyznacznik, bo $\det g = 1$; tylko ten warunek w sumie definiuje nam grupę $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Punkt 1 Znaleźć jądro tego działania.
Szukamy $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\colon gmg^* = m$ dla wszystkich $m \in M^4$. Skoro ma działać dla wszystkich, to w szczególności dla jednego. Dla $m = 1$ dostajemy warunek $gg^* = \mathbf{1}_2$. To oznacza, że na pewno g musi być macierzą unitarną, czyli $g \in \mathrm{SU}(2)$; już z niezwartej grupy przeszliśmy do grupy zwartej. W SU(2) gwiazdka jest tym samym co odwrotność, więc $gmg^{-1} = m$, czyli $gm = mg$. Szukamy więc g unitarnych komutujących z M_4, czyli z macierzami hermitowskimi.

Weźmy dowolną $A \in M_2(\mathbb{C})$. Zawsze mogę ją napisać jako

$$A = \underbrace{\frac{A + A^*}{2}}_{\in M^4} + i\underbrace{\frac{A - A^*}{2}}_{\in M^4}$$

Czyli jeśli g komutuje ze wszystkimi macierzami hermitowskimi, to komutuje już na pewno ze wszystkimi macierzami w ogóle. Tylko macierze typu $\lambda\mathbf{1}_2$ są przemienne ze wszystkimi innymi. W SU(2) są tylko dwie takie macierze $\{\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\}$. Jest to nasze jądro działania. Pokazaliśmy przy okazji, że $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ jest podwójnym nakryciem pełnej grupy Lorentza (nie tych ograniczonych spójnych składowych).

Punkt 2 Wyznaczyć podgrupy izotropii:

$$\begin{aligned}
G_0 &= \{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\colon g \cdot \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_2\} \\
G_1 &= \{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\colon g \cdot \sigma_1 = \sigma_1\} = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \\
G_2 &= \{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\colon g \cdot \sigma_2 = \sigma_2\} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \\
G_3 &= \{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\colon g \cdot \sigma_3 = \sigma_3\} = \mathrm{SU}(1,1) \\
G_L &= \left\{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\colon g \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

W poprzednim punkcie już de facto ustaliliśmy, że $G_0 = \mathrm{SU}(2)$. Co z G_1? Zapiszmy g jako macierz z $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i zobaczmy jakie to daje warunki na te liczby.

$$\begin{aligned}
g &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \\
g \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} & \alpha\overline{\delta} + \beta\overline{\gamma} \\ \gamma\overline{\beta} + \delta\overline{\alpha} & \gamma\overline{\delta} + \delta\overline{\gamma} \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mamy de facto 3 równania na te literki.

$$g \in G_1 \iff \begin{cases} 2\,\mathrm{Re}\,\alpha\overline{\beta} = 0 \\ 2\,\mathrm{Re}\,\gamma\overline{\delta} = 0 \\ \alpha\overline{\delta} + \beta\overline{\gamma} = 1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{cases}$$

gdzie ostatnie równanie dorzuciliśmy, bo wiemy, że jest i tak spełnione z definicji grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ a nigdzie go nie używaliśmy. 3 i 4 równania mnożymy przez $\overline{\beta}$ skąd,

$$\begin{aligned}(\alpha\overline{\beta})\overline{\delta} + |\beta|^2\overline{\gamma} &= \overline{\beta}\\ (\alpha\overline{\beta})\delta - |\beta|^2\gamma &= \overline{\beta}\end{aligned}$$

Przekształcamy drugie równanie. Zauważmy, że $\alpha\overline{\beta} \in i\mathbb{R}$, zatem minus ta liczba jest sprzężona.

$$-\Big(-(\alpha\overline{\beta})\delta + |\beta|^2\gamma\Big) = -\overline{\Big((\alpha\overline{\beta})\overline{\delta} + |\beta|^2\overline{\gamma}\Big)}$$

Ale to jest to samo wyrażenie co pierwsze, zatem

$$= -\beta$$

Stąd $\overline{\beta} = -\beta$, zatem $\alpha \in \mathbb{R}$ lub $\beta = 0$. W tym drugim wypadku wszystko tak się upraszcza, że otrzymujemy i tak $\alpha = \overline{\alpha}$. Czyli zawsze $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in i\mathbb{R}$. Analogicznie wyjdzie nam, że $\delta \in \mathbb{R}$ i $\gamma \in i\mathbb{R}$. W związku z tym,

$$G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & ib \\ ic & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge ad + bc = 1 \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$$

Teraz musimy się zająć G_2. Prowadząc analogiczne rachunki i sztuczki,

$$\begin{aligned} g \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{bmatrix} \\ &= i \begin{bmatrix} -\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} & -\alpha\overline{\delta} + \beta\overline{\gamma} \\ -\gamma\overline{\beta} + \delta\overline{\alpha} & -\gamma\overline{\delta} + \delta\overline{\gamma} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i można skrócić i dostajemy bardzo podobne równania do tych, które były poprzednio.

$$g \in G_2 \iff \begin{cases} \overline{\alpha}\beta \in \mathbb{R} \\ \overline{\gamma}\delta \in \mathbb{R} \\ \delta\overline{\alpha} - \gamma\overline{\beta} = 1 \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{cases}$$

Wynik jest taki, że $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ i wyznacznik jest nadal jedynką. Stąd $G_2 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Teraz pora na grupę G_3.

$$\begin{aligned} g \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & \alpha\overline{\gamma} - \beta\overline{\delta} \\ \overline{\alpha}\gamma - \overline{\beta}\delta & |\gamma|^2 - |\delta|^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$g \in G_3 \iff \begin{cases} |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \\ |\delta|^2 - |\gamma|^2 = 1 \\ \alpha\overline{\gamma} = \beta\overline{\delta} \end{cases}$$

Widać od razu, że $\alpha \neq 0$ i $\delta \neq 0$, co oznacza, że możemy sobie przez to dzielić przy rozwiązywaniu. Stąd,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\overline{\beta}\delta}{\overline{\alpha}} \\ 1 &= \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha\delta - \frac{|\beta|^2\delta}{\overline{\alpha}} \\ &= \frac{\delta}{\overline{\alpha}}\Big(|\alpha|^2 - |\beta|^2\Big) = \frac{\delta}{\overline{\alpha}}\end{aligned}$$

W takim razie $\delta = \overline{\alpha}$. Następnie można podstawić ten wynik do wyjściowych równań otrzymując $\beta = \overline{\gamma}$. Stąd wychodzi

$$G_3 = \left\{\begin{bmatrix}\alpha & \overline{\gamma} \\ \gamma & \overline{\alpha}\end{bmatrix} : |\alpha|^2 - |\gamma|^2 = 1\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{SU}(1,1)$$

To nazewnictwo na tę grupę bierze się stąd, że $(1,1)$ to sygnatura tej formy kwadratowej, której macierzą jest σ_3. S, bo wyznacznik 1, a U bo unitarne. Gdyby było ortogonalne to mielibyśmy literkę O.

Na końcu mamy zbadać podgrupę izotropii G_L. Wychodzą wówczas macierze

$$G_L = \left\{\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & \overline{\alpha}\end{bmatrix} : |\alpha|^2 = 1\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{E}(2)$$

Jako zbiór, kartezjańsko to jest okrąg razy płaszczyzna. Jest to podwójne nakrycie grupy, która działa na płaszczyźnie, są w niej przesunięcia i obroty, tzw. ruchy euklidesowe (zachowują odległość i nie zmieniają orientacji).

Ćwiczenia 7

29 lis 2021 Kontynuujemy badanie działania grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na M^4.

Punkt 2.5 Sprawdzić, że $G_1 \cong G_2 \cong G_3$.

Jeśli mamy dwa punkty $x, y \in X$ w pewnej, tej samej orbicie, to jak mają się do siebie grupy izotropii tych dwóch punktów? Są w tej samej orbicie, zatem jest takie $g \in G$, że $y = g \cdot x$. Niech $h \in G_x$. Wówczas $ghg^{-1} \in G_y$. To znaczy, że mamy przekształcenie

$$G_x \ni h \stackrel{\Phi}{\mapsto} ghg^{-1} \in G_y$$

Jest to oczywiście automorfizm wewnętrzny, jest więc różnowartościowe. Dlaczego jest surjekcją? Bo jeśli $k \in G_y$ to $g^{-1}kg \in G_x$, ale jeśli wezmę za $h = g^{-1}kg$, to wrócę potem znów do k, tj. $\Phi(h) = k$. Stąd Φ jest izomorfizmem $G_x \to G_y$.

Jeśli się nam uda pokazać, że elementy, których grupami izotropii są G_i są w tej samej orbicie, to mamy ten izomorfizm. Ale uwaga, gdyby nie były w tej samej orbicie to wciąż mogą być izomorficzne, to niczego nie wyklucza. Akurat tutaj mamy szczęście.

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \subset G$$

$$V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd, $G_1 \cong G_3$. Analogiczna sprawa z G_2. To jest takie zadanie w stylu zgadnąć, lub przypomnieć sobie jakąś metodę z algebry liniowej.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \subset G$$

$$U \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Stąd, $G_2 \cong G_3$, zatem $G_1 \cong G_2 \cong G_3$. Te grupy izotropii są izomorficzne z użyciem pewnego automorfizmu wewnętrznego, zatem nawet sprzężone.

Punkt 3 Wyznaczyć orbity tego działania.

Wiadomo, że będzie orbita trywialna $\{0\}$, bo grupa działa przez odwzorowania liniowe. Przekonaliśmy się na początku, że działanie nie zmienia wyznacznika. To oznacza, że jeśli dwie macierze są w tej samej orbicie, to muszą mieć ten sam wyznacznik (orbity muszą być zawarte w poziomicach wyznacznika). Wyznacznik może być $<, >$, bądź $= 0$. Zauważmy, że w każdej orbicie jest macierz diagonalna. Każda macierz hermitowska daje się bowiem zdiagonalizować, tj. znajdziemy taką macierz unitarną U, że UmU^* będzie diagonalna. Wyznacznik macierzy unitarnej ma zawsze moduł równy 1, tj. $|\det U| = 1$, bo $\exists\, \delta\colon |\delta| = 1 \wedge \delta^2 = \det U$. Stąd, $V = U/\delta \in \mathrm{SU}(2)$. Stąd,

$$VmV^* = \frac{1}{\delta}Um\left(\frac{1}{\delta}U\right)^* = \frac{1}{|\delta|^2}UmU^* = UmU^*$$

$\mathrm{SU}(2)$ to macierze z naszej grupy. To znaczy, że każda orbita ma macierz diagonalną. Wyznacznik to iloczyn tych dwóch rzeczy na diagonali, co upraszcza. Będziemy używać notacji

$$n \sim m \iff m, n \text{ są w tej samej orbicie}$$

Wiemy, że $m \sim n \implies \det m = \det n$. Weźmy dwie macierze o danym wyznaczniku i spytajmy czy one muszą być w tej relacji, czy nie?

1. $\det m = \det n = 0$

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in G, \quad m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g \cdot m = \begin{bmatrix} |\alpha|^2\lambda_1 & \alpha\overline{\gamma}\lambda_1 \\ \overline{\alpha}\gamma\lambda_1 & |\gamma|^2\lambda_1 \end{bmatrix}$$

Jeśli byśmy wzięli taką samą macierz m z wartością własną μ_1, to

$$g \cdot n = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \mu_1 & \alpha\overline{\gamma}\mu_1 \\ \overline{\alpha}\gamma\mu_1 & |\gamma|^2\mu_1 \end{bmatrix}$$

Lewy górny róg $g \cdot m$ zawsze zachowuje znak niezerowej wartości własnej. Jeśli $m \sim n$, to wtedy $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \mu_1$. Można by jeszcze pytać czy wartość własna nie mogłaby być na dole, i czy robiłoby to różnicę. Otóż każdą macierz hermitowską można sprowadzić do takiej postaci jak rozważyliśmy. Teraz, jeśli weźmiemy wielomian charakterystyczny macierzy $g \cdot m$, to dostajemy.

$$w_{g \cdot m} = \lambda\Big(\lambda - \big(|\alpha|^2 + |\gamma|^2\big)\Big)$$

Zatem mamy dwie orbity

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_\sim, \quad \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_\sim$$

Graficznie, jest to powierzchnia stożka w 4D, bez punktu 0 (future light cone i past light cone).

2. $\det m = \det n > 0$.

$$m \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
$$n \sim \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

Wówczas,

$$g \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2\lambda_1 + |\beta|^2\lambda_2 & \alpha\overline{\gamma}\lambda_1 + \beta\overline{\delta}\lambda_2 \\ \text{c.c} & |\gamma|^2\lambda_1 + |\delta|^2\lambda_2 \end{bmatrix}$$

Widać, że znak śladu się nie zmieni, tj. $\operatorname{sgn} \operatorname{Tr}(g \cdot m) = \operatorname{sgn} \operatorname{Tr}(m)$. Jeśli ten znak śladu jest taki sam, to można wprost wypisać jak takie dwie macierze połączyć elementem grupy (znów GAL). Jeśli $\operatorname{Tr}(m), \operatorname{Tr}(n) > 0$, to

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\mu_2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

gdzie macierze, przez które działamy są w naszej grupie, bo mają wyznacznik równy 1. Zatem pokazaliśmy, że jeśli wyznaczniki są takie same i znaki śladów są takie same, to są w tej samej orbicie. Mamy zatem (z każdym wyznacznikiem) dwie orbity:

$$\left[\begin{bmatrix} |\det m| & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]_{\sim}, \quad \left[\begin{bmatrix} -|\det m| & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right]_{\sim}$$

czyli hiperboloida na górze i hiperboloida na dole.

3. $\det m = \det n < 0$, to wiadomo, że się diagonalizują z wartości własnej ujemnej i dodatniej, ale można sprytnie zawsze ustalić miejsca wartości własnej, bo zamiana tego miejsca może być dokonana działaniem grupy. Zatem zawsze da się zapisać (po podobnych rozważaniach jak w poprzednim punkcie), że

$$m \sim \begin{bmatrix} \det m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim n$$

Przypomnijmy sobie jeszcze

$$G_L = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \overline{\alpha} \end{bmatrix} : |\alpha| = 1 \right\}$$

Rozważmy odwzorowanie

$$\Psi \colon G \to \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : |a| = 1, b \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo można się przekonać, że macierze w obrazie Ψ tworzą grupę. Odwzorowanie Ψ staje się natomiast homomorfizmem. Czy to odwzorowanie jest surjektywne? Tak, łatwo zapisać dowolne β. Czy znamy jądro? Tak, $\ker \Phi = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Jest to zatem podwójne nakrycie (modulo definicyjna ciągłość podwójnego nakrycia itd.). Dlaczego $\operatorname{im} \Psi = H$ traktujemy jako grupę ruchów na płaszczyźnie? Otóż $H \curvearrowright \mathbb{C}^2$. Niech

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$$

Działając $H \curvearrowright P$ przekonamy się, że zachowuje się 1 na drugim miejscu.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + b \\ 1 \end{bmatrix}$$

Widać więc, że są to izometrie na płaszczyźnie zachowujące orientację (złożenie obrotu i translacji). Finalnie, G_L podwójnie nakrywa grupę ruchów euklidesowych H.

Ćwiczenia 8

06 gru 2021 Pokazaliśmy, że jeśli $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \curvearrowright M^4$ to mamy homomorfizm $\pi\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L$ (gdzie L jest grupą Lorentza). Wiemy, że $\ker\pi = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Pytanie czy ten homomorfizm jest surjektywny? Na pewno nie, bo co np z przekształceniem zamieniającym kierunkami czas. Pełna grupa L ma jednak 4 spójne składowe. Natomiast (jak się zaraz przekonamy) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ jest spójna, a homomorfizm π jest ciągły. Na pewno więc nie mógł być surjektywny. Dlaczego $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ jest spójna?

Niech $m \in M_k(\mathbb{C})$ odwracalna. Wówczas da się tę macierz zapisać jako $m = uq$ (rozkład biegunowy macierzy), gdzie u jest unitarna a q samosprzężona ze wszystkimi wartościami ściśle dodatnimi (nie ściśle dodatnia jako macierz, ale jako ściśle dodatnia forma kwadratowa). Ten zapis jest w dodatku jednoznaczny. Niech $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Wówczas $g = u|g|$. Wiemy, że $|g|$ jest samosprzężona więc diagonalizuje się. Da się ją zapisać jako

$$|g| = v\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}v^*, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

Niech

$$|g|_t = v\begin{bmatrix}t\lambda_1 + (1-t) & 0\\ 0 & t\lambda_2 + (1-t)\end{bmatrix}v^*$$

Macierz $|g|_t$ w sposób ciągły przeprowadza $|g|$ na $\mathbf{1}$. To g można w sposób ciągły połączyć z u. Jeśli u uda się w sposób ciągły połączyć z $\mathbf{1}$, to każde g da się w sposób ciągły połączyć z $\mathbf{1}$. Ale u jest unitarna, więc też się diagonalizuje (w ogóle każda macierz normalna). Unitarna i diagonalna musi mieć na diagonali liczby o module 1. Ten kąt trzeba odpowiednio zmniejszyć/ściągnąć z tym t, żeby dotrzeć do $\mathbf{1}$. Pokazuje to więc, że ta grupa jest łukowo-spójna.

Cofnijmy się jeszcze do grupy ruchów Euklidesowych. Zrealizowaliśmy tę grupę jako

$$E(2) = \left\{\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \wedge |a| = 1\right\}$$

Do iloczynu półprostego potrzebujemy dwie podgrupy gdzie jedna jest normalna, itd. (zgodnie z definicją).
Same translacje są z pewnością podgrupą normalną. Interpretujemy to tak, że bierzemy tylko $a = 1$.

$$H = \left\{\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix} : b \in \mathbb{C}\right\} \cong (\mathbb{C}, +)$$

Druga podgrupa to obroty

$$K = \left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} : |a| = 1\right\} \cong \mathbb{T} \cong \mathrm{SO}(2)$$

Sprawdźmy, że H jest normalna. Bierzemy dowolną macierz z $E(2)$ i sprzęgamy odpowiednio,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{bmatrix} &= \frac{1}{a}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & ac-b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a}\begin{bmatrix} a & -ab+a^2c+ab \\ 0 & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & ac \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H
\end{aligned}$$

Jaka jest część wspólna obu podgrup? Widać, że $N \cap K = \{\mathbf{1}\}$ (z definicji obu grup). Chcemy jeszcze pokazać, że iloczyny wypełniają całą grupę.

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oznacza to, że $E(2)$ jest iloczynem półprostym tych grup.

Grupa dihedralna Jest to grupa symetrii n-kąta foremnego, oznacza przez D_n lub D_{2n}. Drugie oznaczenie nie jest głupie bo grupa ma akurat $2n$ elementów. Wymieńmy te rzeczy, które uważamy za symetrie n-kąta foremnego: obroty o kąt $2\pi k/n$, gdzie $k = 0, \dots, n-1$. Oznaczamy te obroty przez $\mathrm{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}$. Grupę to oznaczmy przez R. Drugą symetrią są odbicia (symetria osiowa) w n osiach. Gdy n jest nieparzyste, to osie przechodzą przez wierzchołek i środek przeciwległego boku. Gdy n jest parzyste to są osie przechodzące przez dwa wierzchołki i osie przechodzące przez środki przeciwległych boków. Niech s to będzie którekolwiek z tych odbić. Wówczas sr jest na pewno jakimś odbiciem (można to zrealizować na $\mathbb{R}^2$, popatrzeć na wyznaczniki przekształceń liniowych, $1\cdot(-1) = -1$. Łatwo zobaczyć, że $\{sr, sr^2, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} = sR\backslash\{s\}$ tworzą odbicia. R jest oczywiście normalna, zajmuje połowę całej grupy (nie może być więc tak, że któraś jej lewa warstwa nie byłaby prawą). Widać, że druga podgrupa którą potrzebujemy musi mieć 2 elementy, $S = \{\mathrm{id}, s\}$. Zbiór wszystkich iloczynów jest całością, zatem D_n jest iloczynem półprostym podgrup R i S,

$$D_n \cong R \rtimes_\alpha S \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$$

Jakie ma być to działanie α? Działanie grupy $\mathbb{Z}_2$ to oczywiście jest inwolucja. Jaki automorfizm będzie zawsze istniał bez względu na n. W grupie abelowej branie elementu odwrotnego jest automorfizmem, tzn $srs^{-1} = r^{-1}$. Ta α to jest działanie elementami $\mathbb{Z}^2$ przez automorfizmy wewnętrzne, na grupie normalnej $\mathbb{Z}_n$.

Ciekawa rzecz, że $D_3 = S_3$.

Zadanie 1 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8) \cong V_4 \rtimes S_3$

Użyjemy nowej techniki szukania automorfizmów. Pamiętamy, że
$\mathbb{Q}_8 = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, I, -I, -J, J, K, -K\}$. Przypomnijmy sobie jakie były podgrupy $\mathbb{Q}_8$.
Były to $\{\mathbf{1}\}, \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}, H_1 = \{\mathbf{1}, I, -\mathbf{1}, -I\}, H_2 = \{\mathbf{1}, J, -\mathbf{1}, -J\}, H_3 = \{\mathbf{1}, K, -\mathbf{1}, -K\}, \mathbb{Q}_8$.

Automorfizm zastosowany do podgrupy przenosi ją na podgrupę. 4-elementowe podgrupy muszą więc być mieszane między sobą. Każdy automorfizm zadaje więc jakąś permutację 3 elementów. Jeśli $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8)$, to $\phi(H_i) = H_{\mu(i)}$ gdzie $\mu \in S_3$. Otrzymujemy w ten sposób homomorfizm $\pi\colon \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8) \to S_3$. Chcemy spytać czy jest to surjekcja i poznać jego jądro. To nam da infromacje o $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8)$.

π jest epimorfizmem, bo mogę znaleźć takie dwa automorfizmy $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8)$, które nam wygenerują całe S_3. Jak to zrobić? Zgadnąć! Rozważmy $\sigma, \tau\colon \mathbb{Q}_8 \to \mathbb{Q}_8$. Można sprawdzić

Tablica 4: Zgadnięte automorfizmy.

	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	I	$-I$	J	$-J$	K	$-K$
σ	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	J	$-J$	I	$-I$	$-K$	K
τ	$\mathbf{1}$	$-\mathbf{1}$	$-I$	I	K	$-K$	J	$-J$

wszystkie relacje w stylu $\sigma(I)\sigma(J) = \sigma(IJ)$. Są to automorfizmy. Nasz homomorfizm π, σ przeprowadza w transpozycję H_1, H_2. Natomiast τ jest przestawiane na transpozycję H_2, H_3 (w S_3 po prostu transpozycja (23)).

Widać, że $\pi(\sigma) = (12)$, $\pi(\tau) = (23)$. Te dwie permutacje generują wszystkie możliwe permutacje, zatem całą grupę S_3. Oznacza to, że π jest surjektywne. Teraz interesuje nas $\ker \pi$. To są takie homomorfizmy co nie mieszają H_1, H_2, H_3 między sobą. Oznacza to, że każdy taki homomorfizm zadaje automorfizm wewnątrz H_i.
Jeśli $\psi \in \ker \pi$, to $\psi|_{H_i} = \mathrm{Aut}(H_i)$. Automorfizmów w $\mathbb{Z}_4$ są tylko 2. Jedynka musi przejśc na coś co jest rzędu 4 czyli na siebie lub na 3. Stąd dwa automorfizmy. W $\mathrm{Aut}(H_i)$ są co najwyżej dwa elementy. Ale gdy wiemy co ψ robi z I i co robi z J to wiemy już co robi z K. Są więc co najwyżej 4 możliwości na ψ. Czy wszystkie 4 możliwości są realizowane? Po prostu je trzeba wypisać! (xD) Czy one się realizują, tj.

Tablica 5: Sprawdzane automorfizmy zachowujące H_i.

	I	J	
id	I	J	(K)
ψ_1	$-I$	J	$(-K)$
ψ_2	I	$-J$	
ψ_3	$-I$	$-J$	

czy się rozszerzają?

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad \psi_i(-\mathbf{1}) = -\mathbf{1} \\ \psi_i(-I) = -\psi_i(I) \\ \psi_i(-J) = -\psi_i(J) \\ \psi_i(-K) = -\psi_i(K) \end{aligned}$$

Teraz można sprawdzić że to są po rozszerzeniu automorfizmy. Tak się właśnie dzieje, tj. $\psi_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8)$. Stąd, $|\ker \pi| = 4$.

Niech $K = \langle \sigma, \tau \rangle$ (podgrupa generowana). Fakt: $\tau^2 = \mathrm{id} = \sigma^2$. Ponadto, $\sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau$. To jest relacja warkoczowa, odgadnięcie tego jest łatwe. Warkoczowa bo jak się narysuje te transpozycje rysując te kreski jak zawsze to tożsamość wygląda jak warkocz. Jak się wie te 2 rzeczy to widać, że

$$K = \{\mathrm{id}, \sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma, \tau\sigma\tau\}$$

Bo dzięki tej relacji przykładowo $\tau\sigma\tau\sigma = \tau\tau\sigma\tau = \mathrm{id}\sigma\tau$ itd. Możemy zauważyć, że $K \cap \ker\pi = \{\mathrm{id}\}$. A więc $\pi|_K$ jest monomorfizmem. Ale $\mathrm{im}\,\pi|_K = S_3$, czyli $\pi|_K : K \xrightarrow{\cong} S_3$.

Ponadto $H = \ker\pi$ (jako jądro) jest normalną podgrupą $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8)$. Mamy w tej grupie automorfizmów dwie podgrupy, H (normalną) oraz K, takie że $H \cap K = \{\mathrm{id}\}$. Ponadto zbiór iloczynów $|HK| = |H||K|$, bo część wspólna jest trywialna (wówczas zawsze tak jest). Stąd $|HK| = |\ker\pi||\mathrm{im}\,\pi| = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8)$. Zatem $HK = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_8)$. Oznacza to, że $\mathbb{Q}_8$ jest iloczynem półprostym.

Zamiast K można napisać S_3 a zamiast H można napisać $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong V_4$. (bo nie ma elementu rzędu 4 a są tylko dwie możliwości co do grup 4-elementowych: $\mathbb{Z}_4$ lub V_4.)

Ćwiczenia 9

Zadanie 1 Niech $P = \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : \forall\, x \in \mathbb{K}^n : f(x) = Ax + b : A \in L \wedge b \in \mathbb{K}^n\}$ gdzie $L \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Wykazać strukturę iloczynu półprostego na P. 13 gru 2021

Łatwo sprawdzić, że P jest grupą. Wśród elementów tego zbioru jest identyczność. Jeśli złożymy $f, g \in P$,

$$\begin{aligned} f(x) &= Ax + b \\ g(x) &= A'x + b' \\ (g \circ f)(x) &= A'f(x) + b' = A'Ax + (A'b + b') \end{aligned}$$

ale $A'A \in L$ oraz $A\beta + b' \in \mathbb{K}^n$, zatem złożenie jest znów w grupie. Co z elementem odwrotnym?

$$f^{-1}(y) = A^{-1}(y - b) = A^{-1}y + (-A^{-1}b)$$

ale $A^{-1} \in L$ oraz $-A^{-1}b \in \mathbb{K}^n$. Wszystko gra.

Narzucają się podgrupy składające się na strukturę iloczynu półprostego:

$$T = \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : \exists\, b : \forall\, x : f(x) = x + b\}$$

Jest to podgrupa składająca się z translacji. Druga grupa będzie dla $b = 0$ i A dowolnego, tj.

$$K = \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : \exists\, A \in L : \forall\, x : f(x) = Ax\}$$

jest to de facto ta grupa L ale rozumiana jako przekształcenia a nie macierze. Z tych dwóch podgrup, T jest normalna, co trzeba sprawdzić rachunkiem. Trzeba wziąć dowolne przekształcenie $g \in T$ i $f \in P$. Niech $f(x) = Ax + b$ oraz $g(x) = x + c$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_f(g)(x) &= (f \circ g \circ f^{-1})(x) = f\big(g(A^{-1}x - A^{-1}b)\big) \\ &= f(A^{-1}x - A^{-1}b + c) = x - b + Ac + b = x + Ac \end{aligned}$$

W związku z tym, $\mathrm{Ad}_f(g) \in T$, więc jest to podgrupa normalna. Jaka jest część wspólna tych podgrup?

$$T \cap K = \{\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}\}$$

Ostatnia część do sprawdzenia? Czym jest $T \cdot K$ tj. iloczyny tego typu przekształceń? Niech $k \in K$ dane przez $k(x) = Ax$ oraz $t \in T \colon t(x) = x + b$. Złóżmy te elementy,

$$(t \circ k)(x) = t(Ax) = Ax + b$$

zatem $t \circ k \in P$ czyli $T \cdot K = P$. Oznacza to, że $P \cong T \rtimes_\alpha K$. Działanie tworzące ten iloczyn półprosty zostało już w sumie obliczone. Translacja o c zmieniła się na translację o Ac. Jest to wewnętrzne działanie podgrupy.

Można jeszcze zobaczyć, że P jest izomorficzna z grupą macierzy $(n + 1) \times (n + 1)$ postaci (ZDJĘCIE W TELEFONIE). Te grupę można zrealizować jako grupę odwzorowań liniowych mimo że nie była tak od początku zdefiniowana.

Zadanie 2 Klasy sprzężoności w grupie dihedralnej D_n.

$$D_n = \{\mathrm{id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

Musimy zacząć sprzęgać elementy. Od razu widać, że kawałek z r^p to jest grupa przemienna więc $(r^q)r^p(r^q)^{-1} = r^p$. Trzeba popatrzeć na części sr^p. Korzystając z tożsamości $srs^{-1} = r^{-1}$

$$\begin{aligned}(sr^q)r^p(sr^q)^{-1} &= sr^q r^p r^{-q} s^{-1} = sr^p s^{-1} = (r^{-1})^p \\ &= r^{-p}\end{aligned}$$

Wyszło nam więc, że dokonując sprzężenia jakimkolwiek elementem grupy, r^p się albo nie zmieni, albo się zmieni na element przeciwny. W zależności od parzystości n jest dostępna różna ilość r-ów. Jeśli $n = 2k$, to ostatnia potęga jest nieparzysta i $r^1 \sim r^{2k-1}$. Potem, $r^2 \sim r^{2k-2}$, i tak dalej, po czym $r^{k-1} \sim r^{k+1}$ oraz r^k będzie już tylko sam sobie sprzężony. Mamy więc dwuelementowe klasy sprzężoności numerowane od 1 do $k-1$ oraz jedną jednoelementową klasę.
Natomiast gdy $n = 2k + 1$, to $r \sim r^{2k}$, a na końcu $r^k \sim r^{k+1}$ więc wszystkie klasy sprzężoności są dwuelementowe.

To nie koniec walki. Sprawdziliśmy z czym mogą być sprzężone elementy do pierwszej połówki grupy. Teraz trzeba wziąć dowolny element sr^p i go sprzęgnąć dowolnym elementem.

$$\begin{aligned}(r^q)sr^p(r^q)^{-1} &= s(sr^q s^{-1})r^p r^{-q} = sr^{-q} r^p r^{-q} \\ &= sr^{p-2q}\end{aligned}$$

Wyszło nam więc coś nietrywialnego. Za q mogę wziąć de facto dowolną liczbę. A co by było gdybyśmy sprzęgli z sr^q?

$$\begin{aligned}(sr^q)sr^p(sr^q)^{-1} &= sr^q(sr^p r^{-q} s^{-1}) = sr^q r^{q-p} \\ &= sr^{2q-p}\end{aligned}$$

Wyszedł przeciwny wykładnik (czyli odwrotny element). Zatem $sr^p \sim sr^{p-2q} \sim sr^{-p+2q}$. Znów trzeba rozważyć parzystość n.
Gdy $n = 2k+1$, to jedną klasą jest $\{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ czyli wszystkie elementy z drugiej połówki grupy.
Dla $n = 2k$ będą dwie klasy, $\{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ oraz $\{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

Zadanie 3 Niech $G = (\mathbb{Z}, \circ)$ gdzie $\circ\colon (x, y) \mapsto x+(-1)^x y$ (to było wszystko sprawdzane na pierwszych ćwiczeniach). Elementem neutralnym było 0.
Co jeśli by brać tylko liczby parzyste? Wówczas, to działanie jest zwykłym dodawaniem, ponadto wynikiem będzie liczba parzysta. Zatem $H = (2\mathbb{Z}, +)$ jest podgrupą izomorficzną z $\mathbb{Z}$. Jest to podgrupa normalna bo zajmuje połowę całej grupy (oczywiście obie są nieskończone więc to trochę nieprecyzyjne). Jednak można się przekonać, że H i warstwa jedynki $1 \circ H$ wypełniają już całą grupę G, więc H rzeczywiście wypełni połowę. Zmierzamy do tego, że to jest iloczyn półprosty. Druga podgrupa to będzie $K = \{0, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ (cykliczna rzędu 2, czyli $\mathbb{Z}_2$). Część wspólna jest ewidentnie zerem, czyli elementem neutralnym. Widać więc, że

$$G \cong \mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$$

1 w automorfizmie musi na coś przejść. Musi przejść na 1 lub -1. 1 generuje $\mathbb{Z}$, co oznacza, że automorfizmy są albo identycznością albo odwrotnością. Zatem α będzie albo automorfizmem trywialnym lub nie. Gdyby było trywialne to G byłaby przemienna, zatem α musi być jedynym nietrywialnym automorfizmem w Z.

Zadanie 4 Weźmy dwie litery a, b spełniające $a^2 = e = b^2$. Będę tworzył wyrazy używając dwóch liter. Warunek sprawia, że nie da się stworzyć zbyt skomplikowanych wyrazów. Będą to ciągi typu $\dots abababab \dots$.

$$(ababa)^{-1} = ababa$$

Efekt jest taki, że dostanę grupę. Ma ona oznaczenie i nazwę: $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (iloczyn wolny grup). Okazuje się, że $G \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, gdzie G jest z poprzedniego zadania. Iloczyny wolne są bardzo ciekawe. Co jeśli byśmy wzięli $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$? Teraz mamy 4 litery, a, b, a^{-1}, b^{-1}. To jest bardzo dziwna grupa, można pokazać, że nie istnieje na tym zbiorze skończenie addytywna miara, niezmiennicza na przesuwanie. Bo mały kawałek grupy musiałby mieć miarę taką samą jak „dużo większa” część grupy.

Definicja 5 (Reprezentacja grupy)**.** Niech G będzie grupą, a V przestrzenią liniową (nad $\mathbb{C}$). Interesuje nas homomorfizm w odwracalne operatory liniowe.

$$\pi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

Przykład Niech $B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\colon \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\colon |i-j| \geq 2 \wedge \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \right\rangle$, czyli taka śmieszna grupa generowana. Można ją widzieć znów jako generowanie i zestawianie słów zgodnie z zadanymi regułami utożsamiającymi niektóre słowa. Oficjalna nazwa tej grupy to grupa warkoczy (TELEFON RYSUNEK).

Chcielibyśmy zdefiniować reprezentację tej grupy. Plusem tego, że jest to grupa z generatorami jest to, że musimy patrzeć na obrazy generatorów przy homomorfizmie, które to obrazy spełniają te same relacje co generatory. Trzeba znaleźć więc $n-1$ macierzy spełniających takie pokręcone relacje. Jak się popatrzy na diagram σ_i to można by powiedzieć, że to miejscami wygląda jak wielopoziomowe skrzyżowania. Wyobraźmy sobie że puszczamy samochodzik po tych nitkach. Ten na górze ma jakieś prawdopodobieństwo że spadnie i będzie się poruszał niżej. Jak to zapiszemy macierzą to okaże się że dostajemy te relacje (a la łańcuchy Markova).

$$\sigma_i \mapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{i-1} & & & \\ & 0 & 1-p & \\ & 1 & p & \\ & & & \mathbf{1}_{n-(i+1)} \end{bmatrix}$$

i-ty wektor bazy przechodzi na $i+1$ wektor bazy. Dla $i+1$ wektora bazy mamy prawdopodobieństwo $1-p$, że spadniemy, tj. pozosrtaniemy na wektorze $i+1$ i prawdopodobieństwo p, że przejedziemy. To oznacza ta macierz. Żeby macierz ta była odwracalna, to $p \neq 1$. Do sprawdzenia realcji trzeba sprawdzić tylko macierze w których zazębia się środkowa część.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1-p & 0 \\ 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p \\ 0 & 1 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1-p & 0 \\ 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \substack{\text{tak, żeby właśnie} \\ \text{wyszła dobra relacja}}$$

Powiedzmy, że widać już że jest ta reprezentacja $\pi\colon B_n \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Dowolny element grupy jest zapisany jako iloczyn tych macierzy odpowiadających sigmom. Ważnym pojęciem dla reprezentacji jest pojęcie podprzestrzeni niezmieinniczej (będącej podprzestrzenią V). Tj. przestrzeni odwzorowywanej w siebie.

Tutaj można zastosować taki trick. Niech $\phi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ będzie funkcjonałem liniowym dodającym po prostu wszystkie współrzędne. Można go zapisać jako iloczyn skalarny z jedynką, ale po coo wprowadzać iloczyn skalarny bez potrzeby... Fakt: $\phi \circ \pi(\sigma_i) = \phi$ (dla każdego i). W jakimś tam sensie ten funkcjonał jest więc niezmienniczy. Dlaczego tak jest? Bo suma w każdej kolumnie macierzy reprezentacji jest równa 1. Oznacza to, że $\ker \phi$ jest niezmiennicza.

Ćwiczenia 10

1 sty 2022

Ćwiczenia 11

10 sty 2022 **Zadanie 1** Niech $\pi \in \mathrm{Rep}(S_3, \mathbb{C}^2)$ taką, że

$$\pi\big((12)\big) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi\big((123)\big) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Rozłożyć reprezentację $\pi \otimes \pi$ na reprezentacje nieprzywiedlne.

Tak w ogóle S_3 ma tylko jedną reprezentację 2-wymiarową nieprzywiedlną (właśnie tą, którą wypisaliśmy). Taka ciekawostka. Ma jeszcze 2 różne jednowymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne.

Rozłożenie na reprezentacje nieprzywiedlne sprowadza się albo do znalezienia wszystkich podprzestrzeni niezmienniczych $\pi \otimes \pi$ przy czym „rozłożyć" nie jest precyzyjnym słowem w poleceniu. Nas będzie interesowało jakie są reprezentacje powstające z obcinania tej reprezentacji do podprzestrzeni niezmienniczych. Co to iloczyn tensorowy reprezentacji?

$$(\pi \otimes \pi)(g) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(g) \otimes \pi(g) \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$$

Szybkie przypomnienie co to iloczyn tensorowy operatorów liniowych $T \in \operatorname{End}(V)$, $S \in \operatorname{End}(W)$? Istnieje twierdzenie, że istnieje wtedy dokładnie jeden taki operator $T \otimes S \in \operatorname{End}(V \otimes W)$, że

$$(T \otimes S)(v \otimes w) = Tv \otimes Sw$$

To nie jest jednak porządna definicja tak od razu, jedynie operatywna. Można też zadać to na bazie, jeśli ktoś się uprze. Wtedy jest okej. Ogólnie tensory proste są liniowo zależne więc jeśli definiujemy na dowolnych v, w to trzeba ostrożnie z tą „definicją". Teraz dla uproszczenia kurczymy V, W do $\mathbb{C}^2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$ (baza standardowa). Jeżeli w tej bazie

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

Wówczas w bazie $C^2 \otimes C^2 = \operatorname{span}\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$ (porządek leksykograficzny) mamy

$$T \otimes S = \begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} & b\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \\ \\ c\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} & d\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap & aq & bp & bq \\ ar & as & br & bs \\ cp & cq & dp & dq \\ cr & cs & dr & ds \end{bmatrix}$$

Teraz wróćmy do zadania. Patrzymy na reprezentację $\pi \otimes \pi$.

$$(\pi \otimes \pi)\big((12)\big) = \pi\big((12)\big) \otimes \pi\big((12)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

w bazie leksykograficznej. Podobnie,

$$(\pi \otimes \pi)\big((123)\big) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & 1 & \sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz trzeba znaleźć podprzestrzenie niezmiennicze. Nie zrobimy tego brutalnie algebrą liniową, tylko inteligentniej. Zauważmy, że $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2 \wedge \mathbb{C}^2) \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes_s \mathbb{C}^2)$ (rozkład na podprzestrzeń antysymetryczną i symetryczną). Akurat $\dim \mathbb{C}^2 \wedge \mathbb{C}^2 = 1$, bo widać, że

$$\mathbb{C}_2 \wedge \mathbb{C}_2 = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \right\} = \operatorname{span}\{h_1\}$$

gdzie współczynnik przy tej bazie wzięliśmy taki, żeby potem było nam wygodniej. Wygodna baza dla drugiej podprzestrzeni to

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \otimes_s \mathbb{C}^2 &= \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \right\} \\ &= \operatorname{span}\{f_1, f_2, f_3\} \end{aligned}$$

Ta baza jest świetna, bo zauważyliśmy od razu, że podprzestrzeń $V = \operatorname{span}\{f_1\}$ jest bardzo niezmienicza, bowiem nic nie zmienia i $\pi \otimes \pi\big|_V$ jest trywialną reprezentacją. Oczywiście podprzestrzenie $\mathbb{C}^2 \wedge \mathbb{C}^2$ i $\mathbb{C}^2 \otimes_s \mathbb{C}^2$ są na pewno niezmiennicze, bo zawsze zachodzi $\pi \otimes \pi = \pi \wedge \pi \oplus \pi \otimes_s \pi$.

Teraz są dwie możliwości, albo $\mathbb{C}^2 \otimes_s \mathbb{C}^2$ jest sumą 3 jednowymiarowych niezmienniczych przestrzeni (wspólny wektor własny to 1-wym podprzestrzeń niezmiennicza) albo jest sumą przestrzeni niezmienniczej V i przestrzeni 2-wymiarowej niezmienniczej. Pierwsza opcja by oznaczała, że mamy wspólną bazę diagonalizującą, czyli operatory byłyby przemienne (odwrotny fakt też jest prawdziwy). No ale widać, że nie są przemienne. Wiemy więc, że jest jeszcze dwuwymiarowa podprzestrzeń niezmiennicza. Chcemy zrozumieć te podprzestrzenie i podreprezentacje na nich.

Wiemy, że działając

$$\big(\pi(g) \otimes \pi(g)\big)(h_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_2 - \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_1\big]$$

Przypomnijmy z GALu, że jeśli na przestrzeni mamy dobry iloczyn skalarny to istnieje też dobry na iloczynie tensorowym, a skoro istnieje to ma postać $(\phi \otimes \psi \mid \xi \otimes \eta) = (\phi \mid \xi)(\psi \mid \eta)$. Liczymy iloczyn skalarny obrazu bazy z bazą. To nam wypluje współczynnik proporcjonalności.

$$\begin{aligned} &(h_1 \mid \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_2 - \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_1\big]) \\ &= \frac{1}{2}\big[(e_1 \otimes e_2 \mid \pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_2) - (e_2 \otimes e_1 \mid \pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_2) \\ &-(e_1 \otimes e_2 \mid \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_1) + (e_2 \otimes e_1 \mid \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_1)\big] \\ &= \frac{1}{2}\big[(e_2 \mid \pi(g)e_1)(e_2 \mid \pi(g)e_2) - (e_2 \mid \pi(g)e_1)(e_1 \mid \pi(g)e_2) \\ &-(e_1 \mid \pi(g)e_2)(e_2 \mid \pi(g)e_1) + (e_2 \mid \pi(g)e_2)(e_1 \mid \pi(g)e_1)\big] \\ &= \pi(g)_{11}\pi(g)_{22} - \pi(g)_{12}\pi(g)_{21} = \det \pi(g) = \operatorname{sgn}(g) \end{aligned}$$

Czyli $\pi \otimes \pi\big|_{\mathbb{C}^2 \wedge \mathbb{C}^2}$ jest reprezentacją znakową (mnożeniem reprezentacji przez znak).

Dla unitarnych reprezentacji (i skończonych przestrzeni), jeśli jest jakaś podprzestrzeń niezmiennicza V, to niezmiennicza jest też ortogonalna $V^{\perp}$. Nasza reprezentacja $\pi \otimes \pi$ jest unitarna. Zatem, niech $W = V^{\perp} \cap \mathbb{C}^2 \otimes_s \mathbb{C}^2$ (dopełnienie wewnątrz tensorów symetrycznych). To jest ta przestrzeń dwuwymiarowa, którą chcemy zrozumieć. Nasza baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ była wybrana od razu na ortonormalną, zatem $W = \mathrm{span}\{f_3, f_2\}$ (w tej kolejności jest lepiej). Czym jest $\pi \otimes \pi \big|_W$? Trzeba wypisać po prostu macierze w bazie. Macierz w bazie znajduje się przez użycie iloczynu skalarnego, podobnie jak poprzednio, tyle że teraz to samo trzeba policzyć 4 razy (dla każdego slotu macierzy).

$$(\pi \otimes \pi)(g) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (f_3 \mid \pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_2 + \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_1) & (f_2 \mid \pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_1 - \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_2) \\ (f_2 \mid \pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_2 + \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_1) & (f_2 \mid \pi(g)e_1 \otimes \pi(g)e_1 - \pi(g)e_2 \otimes \pi(g)e_2) \end{bmatrix}$$

Po takim samym upraszczaniu jak poprzednio, dostajemy

$$= \begin{bmatrix} \pi(g)_{11}\pi(g)_{22} + \pi(g)_{21}\pi(g)_{12} & \pi(g)_{11}\pi(g)_{21} - \pi(g)_{12}\pi(g)_{22} \\ \pi(g)_{11}\pi(g)_{12} - \pi(g)_{22}\pi(g)_{21} & \frac{1}{2}\left[\pi(g)_{11}^2 + \pi(g)_{22}^2 - \pi(g)_{12}^2 - \pi(g)_{21}^2\right] \end{bmatrix}$$

Wygląda to strasznie. Nic nie widać ale jest jedna ciekawostka. Można sprawdzić, że dla każdego g wychodzi dokładnie

$$= \pi(g)$$

Tak naprawdę tak musiało wyjść bo jest tylko jedna 2-wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja tej grupy. Kluczowe w tej zabawie było wybranie takiej świetnej bazy w rozkładzie, w innej bazie byłoby wszystko gorzej widać.

Zadanie 2 Niech A będzie grupą abelową, gdzie $|A| < \infty$. Wówczas każda reprezentacja nieprzywiedlna (irrep) A jest jednowymiarowa.

Weźmy $\sigma\colon A \to \mathrm{End}(V)$ będzie irrep. Ustalmy $b \in A$ i niech $T = \sigma(b)$. Zachodzi

$$\forall\, a \in A\colon T\sigma(a) = \sigma(b)\sigma(a) = \sigma(ba) = \sigma(ab) = \sigma(a)T$$

Wyszło nam, że T splata σ ze sobą. Ale reprezentacja jest nieprzywiedlna. A operatory splatające reprezentacje nieprzywiedlne ze sobą są proporcjonalne do jedynki, tj. $T = \lambda\mathbf{1}$. Ale wzięliśmy dowolne b. Czyli $\forall\, b \in A\colon \exists\, \lambda_b \in \mathbb{R}\colon \sigma(b) = \lambda_b\mathbf{1}$. Jeśli tylko $\dim V > 1$ to automatycznie byśmy rozłożyli ją na podprzestrzenie jednowymiarowe. Każda podprzestrzeń w V byłaby bowiem niezmiennicza. A reprezentacja miała być nieprzywiedlna więc niemożliwe jest, żeby $\dim V > 1$. Stąd $\dim V = 1$.

Zadanie 3 Wyznaczyć irrepy $\mathbb{Z}_n$.

$\mathbb{Z}_n$ jest abelowa, więc każdy irrep będzie 1-wymiarowy, czyli będą to po prostu homomorfizmy $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Każdy homomorfizm przeprowadza elementy z $\mathbb{Z}_n$ na liczby skończonego rzędu, wszystkie będą stopnia n. Czyli będzie przenosił na pierwiastki z jedynki (P)! $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest zdecydowanie nadmiarowe.

Na co może przejść 1? Na coś co jest rzędu n lub dzieli rząd n. Są to wszystkie pierwiastki z jedynki. Jak trafimy z jedynką na pierwtony pierwiastek to będzie bijekcja, a jak weźmiemy niepierwotny pierwiastek, to po prostu homomorfizm będzie mieć jakieś jądro. Ale tych homomorfizmów będzie tyle co pierwiastków. Finalnie,

$$\forall\, l \in \{0, \dots, n-1\} \colon\; \exists! \psi_i \colon \mathbb{Z}_n \to \sqrt[n]{1} \colon 1 \mapsto \exp \frac{2\pi i}{n}$$

Ćwiczenia 12

24 sty 2022 **Zadanie 1** Reprezentacje S_4.

Każda rozkłada się na sumę prostą nieprzywiedlnych, więc chcemy znaleźć wszystkie irrepy i ich charaktery. Twierdzenie z wykładu mówi ile jest irrepów – jest ich tyle, co klas sprzężoności. W przypadku S_4 klasy to możliwe rozkłady na cykle rozłączne. Są to:

$$[\mathrm{id}]_1,\ [(12)]_6,\ [(12)(34)]_3,\ [(123)]_8,\ [(1234)]_6$$

Istotne jest, żeby sprawdzić liczbę elementów w danej klasie. To właśnie oznaczają indeksy dolne przy klasach. Irrepy będą takie: ε (trywialna wymiaru 1, która jest zawsze), sgn (wymiaru 1; bo grupy permutacji zawsze mają tę reprezentację, jako że sgn jest zawsze homomorfizmem), oraz π_1, π_2, π_3 o wymiarach d_1, d_2, d_3. Suma kwadratów wymiarów spełnia

$$1 + 1 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 24 = |S_4|$$

czyli żeby się zgadzało, dwie muszą być trójwymiarowe, a jedna dwuwymiarowa. BSO, możemy przyjąć $d_1 = 2$ i $d_2 = d_3 = 3$. Jeśli byłby problem, jest jeszcze twierdzenie (Sylowa?), które mówi, że $d_i \mid |G|$. Trzeba teraz skonstruować te pozostałe reprezentacje.

Konstrukcja π_2. S_4 działa na $\mathbb{C}^4$ permutując wektory bazy (niech będzie standardowa). Nazwiemy ją $\rho \in \mathrm{Rep}(S_3, \mathbb{C}^4)$. To jest reprezentacja, która na pewno nie jest irrepem. Dlaczego? Wektor $(1,1,1,1)$ przy permutowaniu bazy się nie zmienia, zatem $\mathrm{span}\{(1,1,1,1)\}$ jest przestrzenią niezmienniczą. Przestrzeń prostopadła do tej podprzestrzeni też jest niezmiennicza, bo permutowanie bazy jest operacją unitarną w kanonicznym iloczynie skalarnym, i przestrzeń ta jest wymiaru 3. Jest to jakaś poszlaka. Teraz trzeba sprawdzić, że ta reprezentacja permutacyjna S_4 na $\mathrm{span}\{(1,1,1,1)\}^\perp$ jest nieprzywiedlna. To się często najłatwiej bada przez charaktery.

Mamy $\rho = \pi_2 \oplus \varepsilon$, gdzie ε jest podreprezentacją trywialna na $\mathrm{span}\{(1,1,1,1)\}$. Charakter ε to funkcja stała równa 1, bo to reprezentacja trywialna jednowymiarowa.

$$\rho\big((12)\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Widać więc, że

$$\chi_\rho(\sigma) = \text{liczba punktów stałych } \sigma$$

bo ślad to liczba wektorów które zostały na swoim miejscu, przesunięcie daje zero na przekątnej. Ponadto na klasach sprzężoności charaktery są stałe. Możemy zatem łatwo stworzyć następującą tabelkę:

Tablica 6: Tabelka charakteru

	[id]	[(12)]	[(12)(34)]	[(123)]	[(1234)]
χ_ρ	4	2	0	1	0
χ_{π_2}	3	1	-1	0	-1

gdyż $\chi_\rho = \chi_{\pi_2} + \chi_\varepsilon$. Teraz liczymy normę charakteru.

$$\begin{aligned}\|\chi_{\pi_2}\|_{\ell_2}^2 = (\chi_{\pi_2} \mid \chi_{\pi_2})_{\ell_2} &= \frac{1}{24}\sum_{\sigma\in S_4} \left|\chi_{\pi_2}(\sigma)^2\right| \\ &= \frac{1}{24}\big(1\cdot 3^2 + 6\cdot 1^2 + 3\cdot(-1)^2 + 8\cdot 0^2 + 6\cdot(-1)^2\big) \\ &= 1\end{aligned}$$

czyli wyszło, że zaproponowana reprezentacja trójwymiarowa π_2 jest nieprzywiedlna. Jaki jest pomysł na drugą reprezentację wymiaru 3?

Konstrukcja π_3. Weźmy iloczyn tensorowy reprezentacji znakowej i π_2. Co się stanie z charakterem? Charakter iloczynu tensorowego to iloczyn charakterów. Charakter jednowymiarowej reprezentacji znakowej to po prostu ta reprezentacja (ta liczba, która jest w tej jednowymiarowej macierzy). Nic prostszego. Obliczona wartość $\left\|\chi_{\mathrm{sgn}\otimes\pi_2}\right\|^2$ będzie taka sama, bo w sumie ważna była wartość bezwzględna. Zatem znów będzie to irrep. Zatem $\pi_3 = \mathrm{sgn}\otimes\pi_2$.

Konstrukcja π_1. Pamiętamy, że dwuwymiarową reprezentację nieprzywiedlną na grupa S_3. Robiliśmy zadanie, że jest epimorfizmm $S_4 \to S_3$. To był ten homomorfizm związany z podgrupą normalną Kleina $V_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

$$S_4 \to S_4/V_4 \cong S_3$$

Ten izomorfizm można zobaczyć dosyć łatwo. Dla elementu $\mu = (123)$ rzędu 3, przechodzi na coś rzędu 3 albo 1. Nie może przejść na 1, bo musi należeć do tego przez co dzielimy. Więc przechodzi na element $\overline{\mu}$ rzędu 3. Natomiast element $\tau = (12)$ przechodzi podobnie na element $\overline{\tau}$ rzędu 2. Ponadto, mamy relację $\tau\mu\tau^{-1} = \mu^{-1}$. Ta relacja musi się zachować przy homomorfizmie. Gdyby te dwa elementy $\overline{\mu}, \overline{\tau}$ były przemienne, to byłoby źle. Stąd, $\operatorname{im}\Phi \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 = \langle\overline{\mu}\rangle \rtimes \langle\overline{\tau}\rangle \cong S_3$.

Zatem wykonujemy złożenie,

$$\pi_1 = \pi\circ\Phi$$

gdzie π jest dwuwymiarowym irrepem S_3. Wobec tego π_1 jest również irrepem.

$$\begin{tikzcd} S_4 \arrow[r, two heads, "\Phi"] \arrow[rr, bend right, "\pi_1"'] & S_3 \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{End}(\mathbb{C}^2) \end{tikzcd}$$

Dlaczego? Otóż skoro π jest irrepem, to nie istnieje rzut, przemienny z $\operatorname{im}\pi$ (inaczej zachowywałby jakąś podprzestrzeń). Ale Φ jest surjektywna, więc π_1 też jest irrepem, bo jego obraz jest taki sam.

Tablica 7: Tabelka charakterów

	[id]	[(12)]	[(12)(34)]	[(123)]	[(1234)]
ε	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
χ_{π_1}	2	0	2	-1	0
χ_{π_2}	3	1	-1	0	-1
χ_{π_3}	3	-1	-1	0	1

Skąd ta tabelka? Charaktery są do siebie ortogonalne w ℓ_2, zatem χ_{π_1} jest wyznaczone niemal jednoznacznie z dokładnością do fazy. Tyle, że $\chi_{\pi_1}(\mathrm{id}) = \dim \pi_1 = 2$. Teraz już wszystko jest jednoznaczne. Można też to wyznaczyć wprost, pamiętając tę reprezentację S_3. Albo można trochę pomieszać wyznaczanie części charakteru przez postać π a część przez wymaganie ortogonalności.

Zadanie 2 Iloczyn tensorowy reprezentacji $\pi \in \operatorname{Rep}(G, V)$, $\rho \in \operatorname{Rep}(G, W)$:

$$\pi \otimes \rho \in \operatorname{Rep}(G, V \otimes W)$$
$$(\pi \otimes \rho)(g) = \pi(g) \otimes \rho(g)$$

Zmiana dekoracji. Teraz $\pi \in \operatorname{Rep}(G, V)$, $\rho \in \operatorname{Rep}(H, W)$.

$$\pi\sharp\rho\colon G \times H \to \operatorname{End}(V \otimes W)$$
$$(\pi\sharp\rho)(g, h) = \pi(g) \otimes \rho(h)$$

Takie coś jest reprezentacją $\pi\sharp\rho \in \operatorname{Rep}(G \times H, V \otimes W)$. Ta konstrukcja ma tylko sens w iloczynie prostym. Jest to użyteczne, ponieważ jeśli π, ρ byłyby nieprzywiedlne, to $\pi\sharp\rho$ również. Oraz każdy irrep iloczynu prostego jest równoważny tej postaci. O irrepach iloczynów prostych wiemy więc de facto wszystko. Sprawdźmy te fakty na charakterach.

$$\begin{aligned}\chi_{\pi\sharp\rho}(g, h) &= \operatorname{Tr}\big((\pi\sharp\rho)(g, h)\big) = \operatorname{Tr}\big(\pi(g) \otimes \rho(h)\big) \\ &= \operatorname{Tr}_V\big(\pi(g)\big)\operatorname{Tr}_W\big(\rho(h)\big) \\ &= \chi_\pi(g)\chi_\rho(h) = \big(\chi_\pi \otimes \chi_\rho\big)(g, h)\end{aligned}$$

więc możemy to zapisać jako iloczyn tensorowy funkcji. Teraz,

$$\big\|\chi_{\pi\sharp\rho}\big\|^2 = \|\chi_\pi\|^2\big\|\chi_\rho\big\|^2$$

Ten napis jest ciut sus, bo każda norma jest na innej przestrzeni, ale wychodzi tyle dokładnie.

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G \times H|}\sum_{(g,h)\in G\times H}\big|\chi_{\pi\sharp\rho}(g, h)\big|^2 &= \frac{1}{|G \times H|}\sum_{(g,h)\in G\times H}\big|\chi_\pi(g)\big|^2\big|\chi_\rho(h)\big|^2 \\ &= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\big|\chi_\pi(g)\big|^2\right)\left(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\big|\chi_\rho(h)\big|^2\right)\end{aligned}$$

Trochę cięższe jest pokazanie w drugą stronę, że każda reprezentacja $G \times H$ jest równoważna jednej z $\pi\sharp\rho$. Trzeba by pokazać, że charaktery takich rzeczy są bazą funkcji centralnych na $G \times H$. To by mówiło, że już nie ma miejsca na inne, bo musiałyby być ortogonalne.

$$\ell_2^{\mathrm{cent}}(G \times H) \cong \ell_2^{\mathrm{cent}}(G) \otimes \ell_2^{\mathrm{cent}}(H)$$

Zawieranie $\supset$ jest trywialne. Teraz wystarczyłoby się zorientować, że wymiary przestrzeni są takie same. Funkcja jest centralna jeśli jest stała na klasie sprzężoności. Ile jest klas w $G \times H$? Jeśli $G = \bigcup_{i=1}^{N} C_i$ oraz $H = \bigcup_{j=1}^{M} K_j$ to

$$G \times H = \bigcup_{i,j} C_i \times K_j$$

To już jest rachunek, który sobie każdy może elementarnie zrobić. Czyli tych klas jest NM. Zatem mamy równość wymiarów przestrzeni, zatem jest izomorfizm i za bazę przestrzeni $\ell_2^{\mathrm{cent}}(G \times H)$ można wziąć charaktery reprezentacji postaci $\pi\sharp\rho$.