

Elektrodynamika i podstawy optyki

Notatki z ćwiczeń

Wykładowcy:
prof. Krzysztof Turzyński

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

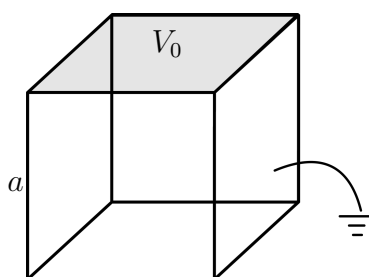
1 Elektrostatyka	4
Ćwiczenia 1	4
Ćwiczenia 2	6
Ćwiczenia 3	12
Ćwiczenia 4	14
2 Magnetostatyka	20
Ćwiczenia 5	20
Ćwiczenia 6: Uzupełnienie teorii	23
Ćwiczenia 7	29

Rozdział 1

Elektrostatyka

Ćwiczenia 1

Zadanie 1 Mamy sześcian o długości boku a , którego górna ścianka ma potencjał V_0 , 06 paź 2021 pozostałe są uziemione. Szukamy rozkładu potencjału w środku sześcianu.



Rysunek 1.1: Sześcian

Równaniem Laplace'a można szukać rozkładu pola w pustej przestrzeni (przy zerowej gęstości ładunku). Tutaj przestrzeń jest pusta. Rozwiązujemy $\Delta V = 0$ we współrzędnych kartezjańskich.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V(x, y, z) = 0$$

To można rozwiązać metodą separacji zmiennych przez postulat $V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Po podstawieniu do równania i podzieleniu przez V (można bo zero na podrozmaitości wymiaru 2 w \mathbb{R}^3 nas nie martwi (zbiór miary zero), natomiast jeśli zero byłoby w obszarze wymiaru 3, rozwiązanie rozszerza się do zera) i będziemy mieć

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Każdy z 3 składników musi być równy pewnej stałej, które w każdym punkcie \mathbb{R}^3 dodają się do zera.

$$\frac{X''}{X} = \begin{cases} \alpha^2 \\ -\alpha^2 \\ 0 \end{cases}$$

Jeśli po prawej stronie jest 0 to wówczas $X(x) = A + Bx$. Nie da się dla funkcji liniowej wyzerować tej funkcji dla dwóch różnych argumentów. Z uwagi na warunki brzegowe, to rozwiązanie jest nieakceptowalne. Poza tym, z symetrii wiadomo, że $Y''/Y = 0$, zatem $Z''/Z = 0$. To równouprawnienie wszystkich kierunków powoduje zgrzyt z warunkami brzegowymi.

Jeśli po prawej stronie jest stała dodatnia, to $X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$, na płaszczyźnie $x = 0$ ma być zerowe, zatem $A = -B$ i stąd $X(x) = C \sinh(\alpha x)$. Podstawiając $x = a$ widzimy, że $\sinh(\alpha a) = 0$ czyli $\alpha = 0$. Rozwiązanie jest więc niedobre.

Jeśli po prawej stronie jest stała ujemna, to $X(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$. Da się wyzerować to w wielu miejscach. Z warunków na zerowych ściankach, $A = 0$, $B \sin \alpha a = 0$ zatem $\alpha a = n\pi$ dla $n \in \mathbb{N}$. Koniec końców,

$$\begin{aligned}\frac{X''}{X} &= -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ \frac{Y''}{Y} &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \\ \frac{Z''}{Z} &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + m^2)\end{aligned}$$

Stąd,

$$V(x, y, z) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}_+} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi z \sqrt{n^2 + m^2}}{a}\right)$$

Sumujemy tylko po dodatnich naturalnych, gdyż \sin i \sinh są symetryczne, a dla $n, m = 0$ człon się i tak zeruje. Zostaje warunek brzegowy.

$$V(x, y, a) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}_+} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh\left(\pi \sqrt{n^2 + m^2}\right) = V_0$$

Funkcje w tym szeregu tworzą ortogonalny układ liniowy, zatem $A_{nm} \sim \langle V_{nm} | V \rangle$.

$$\begin{aligned}\int_0^a dx \int_0^a dy V(x, y, a) \sin \frac{n'\pi}{a} x \sin \frac{m'\pi}{a} y &= \sum_{n, m} \int_0^a dx \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n'\pi}{a} x \cdot \\ &\cdot \int_0^a dy \sin \frac{m\pi}{a} y \sin \frac{m'\pi}{a} y \cdot A_{nm} \sinh \pi \sqrt{n^2 + m^2} \\ &\stackrel{!}{=} \int_0^a dx \int_0^a dy V_0 \sin \frac{n'\pi}{a} x \sin \frac{m'\pi}{a} y\end{aligned}$$

Stąd,

$$\frac{a^2}{4} A_{n'm'} \sinh \pi \sqrt{n'^2 + m'^2} = \int_0^a dx \int_0^a dy V_0 \sin \frac{n'\pi}{a} x \sin \frac{m'\pi}{a} y$$

Naturalnie,

$$\int_0^a dx \sin \frac{n\pi}{a} x = \begin{cases} \frac{2a}{n\pi} & n \bmod 2 = 1 \\ 0 & n \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

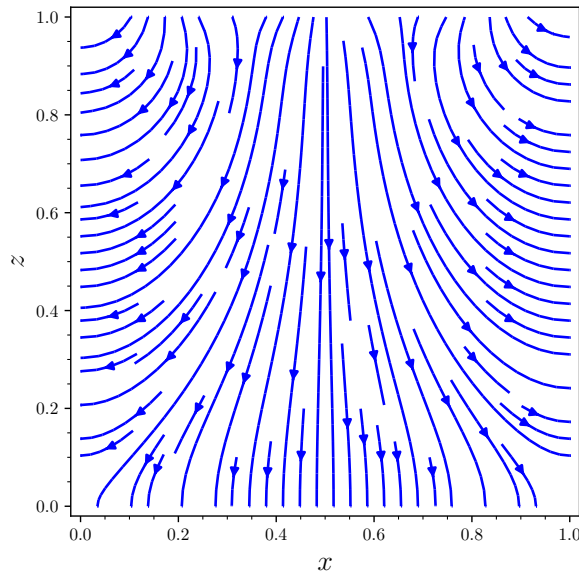
Zatem,

$$A_{nm} = \begin{cases} \frac{V_0}{\sinh \pi \sqrt{n^2 + m^2}} \frac{16}{nm\pi^2} & n, m \mod 2 = 1 \\ 0 & \text{w innym razie} \end{cases}$$

Finalnie, po podstawieniu jawnej nieparzystości parametrów,

$$V(x, y, z) = \sum_{n, m \in \mathbb{N}} \frac{16V_0}{(2n+1)(2m+1)\pi^2} \frac{\sinh \frac{\pi}{a} z \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2}}{\sinh \pi \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2}} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \sin \frac{(2m+1)\pi y}{a}$$

Rogi sześcianu w tym problemie i tak odznaczały się nieciągłością potencjału, zatem nieskończonościami w polu. Nie przeszkadza nam więc, że podchodząc różnymi drogami do rogu dostajemy różne przejścia graniczne potencjału. Po prostu i tak szukaliśmy rozwiązania wewnątrz sześcianu.



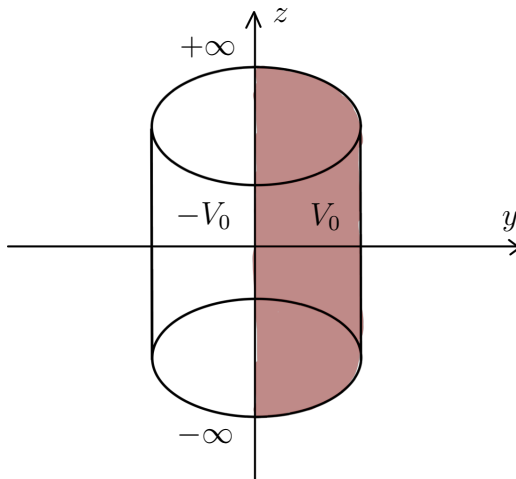
Rysunek 1.2: Wykres linii pola w płaszczyźnie $y = a/2$ dla $a = 1$, obliczony z pierwszych 9 wyrazów szeregu zadającego V .

Zadanie 2 Mamy nieskończoną tubę o przekroju będącym kwadratem o boku a . Podobnie jak poprzednio, górne denko ma potencjał V_0 , pozostałe uziemione. Omówmy to jakościowo.

Nie ma warunku brzegowego $V(z = 0) = 0$. Wiadomo było, że $Z = Ae^{\beta z} + Be^{-\beta z}$. Tym razem zagadnienie trzeba potraktować idąc z z do $-\infty$. Życzylibyśmy sobie, żeby $V(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 0$. Ponieważ ładunek efektywnie obejmuje skończony obszar przestrzeni, właściwa asymptotyka jest właśnie taka. Stąd, $Z = Ae^{\beta z}$.

Ćwiczenia 2

13 paź 2021 **Zadanie 1** Mamy walec nieskończony o promieniu R_0 , którego oś pokrywa się osią z . Potencjał na walcu na $y > 0$ wynosi V_0 , a po stronie $y < 0$ wynosi $-V_0$.



Rysunek 1.3: Nieskończony walec w przekroju poprzecznym.

Mamy spełnione równanie Laplace'a dla potencjału:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Potencjał nie zależy od z z symetrii. Zostaje funkcja zależąca od dwóch zmiennych. Szukamy rozwiązań postaci $V(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$.

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R}(\rho) + \frac{\Phi''}{\Phi}(\phi) = 0$$

Teraz zaczyna się zabawa.

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \begin{cases} n^2 \\ -n^2 \\ 0 \end{cases}$$

W przypadku $-n^2$ dostajemy $\Phi(\phi) = A \sin n\phi + B \cos n\phi$. Chcemy oczekiwać ciągłości i różniczkowalności (bo nie chcemy ładunku powierzchniowego co oznaczałby skok pola). To nam da $n \in \mathbb{N}$. Przypadek n^2 jest nieakceptowalny ze względu na nieokresowość funkcji hiperbolicznych. Przypadek z $n = 0$ daje $\Phi = A + B\phi$, z okresowością $B = 0$. Tutaj zastosowania ten przypadek mieć nie będzie, bo u nas jawnie potencjał jest zależny od kąta. W ogólności natomiast byłby to dopuszczalny przypadek, w tych współrzędnych nie prowadzi on do zerowego potencjału jak poprzednio. Zostajemy więc z równaniem radialnym:

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho \frac{R'}{R} = n^2$$

Postulujemy rozwiązanie postaci $R(\rho) \sim \rho^\alpha$, stąd

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha - 1) + \alpha &= n^2 \\ \alpha^2 &= n^2\end{aligned}$$

Stąd $\alpha = n$ lub $\alpha = -n$.

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$$

Trzeba jeszcze rozważyć $n = 0$. Wówczas, $\Phi(\phi) = B$ oraz $R(\rho) = C + D \log \rho$.

$$V(\rho, \phi) = C + D \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi)$$

Interesuje nas potencjał wewnątrz walca. W środku rury nie ma ładunków, nie powinniśmy oczekiwać żadnych osobliwości. $\log \rho$ ma osobliwość w zerze, sygnalizowałoby to obecność potencjału od linii naładowanej w środku walca. Żegnamy się również z wkładem $D_n \rho^{-n}$. Ponadto, szukamy tylko rozwiązań antysymetrycznych ze względu na odbicie o π , bo mamy skok potencjału na brzegu z V_0 do $-V_0$.

$$V(\rho, \phi) = -V(\rho, 2\pi - \phi)$$

To pozwala na usunięcie kawałka $A_n \cos n\phi$. Akurat w tym przypadku możemy też wywalić tę stałą, bo ona jest nieczuła na tę wspomnianą antysymetrię. I tak musi wyjść zerowa. W ogólności nie można jej usunąć, bo jest potrzebna do uzgodnienia warunków brzegowych zadanych przez wartość potencjału.

$$V(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin n\phi$$

Mamy ogólne rozwiązanie zgodne z generalnymi symetriami narzucanymi w oczywisty sposób przez warunki brzegowe. Teraz chcemy nałożyć te warunki i wyznaczyć pozostałe stałe a_n . Zakładamy, że walec ma promień R_0 . Warunek brzegowy to:

$$V(R_0, \phi) = \begin{cases} V_0 & \phi \in (0, \pi) \\ -V_0 & \phi \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$\sin n\phi$ tworzą układ ortogonalny, więc używamy tego faktu.

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n R_0^n \sin n\phi \sin n'\phi d\phi = \pi a_{n'} R_0^{n'}$$

Z drugiej strony, jest to równe wyrażeniu

$$\begin{aligned} \int_0^\pi V_0 \sin n'\phi d\phi - \int_\pi^{2\pi} V_0 \sin n'\phi d\phi &= \frac{V_0}{n'} \left(-\cos n'\phi \Big|_\pi^0 + \cos n'\phi \Big|_{2\pi}^0 \right) \\ &= \frac{2V_0}{n'} (1 - \cos n'\pi) = \frac{2V_0}{n'} [1 - (-1)^{n'}] \\ &= \begin{cases} \frac{4V_0}{n'} & n' \bmod 2 = 1 \\ 0 & n' \bmod 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Stąd,

$$a_{2m+1} = \frac{4V_0}{\pi(2m+1)R_0^{2m+1}}$$

A reszta współczynników się zeruje. Finalnie,

$$V(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi(2n+1)} \frac{\rho^{2n+1}}{R_0^{2n+1}} \sin(2n+1)\phi$$

Ten szereg jest nawet sumowalny. Zauważmy, że $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Współczynniki szeregu są rzeczywiste, więc

$$V(\rho, \phi) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{\rho e^{i\phi}}{R_0} \right)^{2n+1}$$

Przypomnijmy sobie rozwinięcia logarytmów,

$$\begin{aligned} \log(1 + \varepsilon) &= \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \dots \\ \log(1 - \varepsilon) &= -\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

Po odjęciu stornami dostaniemy

$$\log(1 + \varepsilon) - \log(1 - \varepsilon) = 2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^3 + \frac{2}{5}\varepsilon^5 + \dots$$

Stąd,

$$V(\rho, \phi) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{1 + \frac{\rho e^{i\phi}}{R_0}}{1 - \frac{\rho e^{i\phi}}{R_0}}$$

Zauważmy, że $\log(Re^{i\phi}) = \log R + i\phi$. Mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie zespolone mianownika,

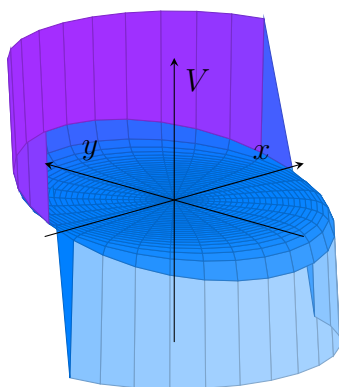
$$= \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{1 - \frac{\rho^2}{R_0^2} + \frac{\rho}{R_0}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})}{\left| 1 - \frac{\rho e^{i\phi}}{R_0} \right|^2} =$$

Teraz widać jasno część rzeczywistą i urojoną pod logarytmem. Trzeba to zapisać w postaci $Re^{i\Phi}$.

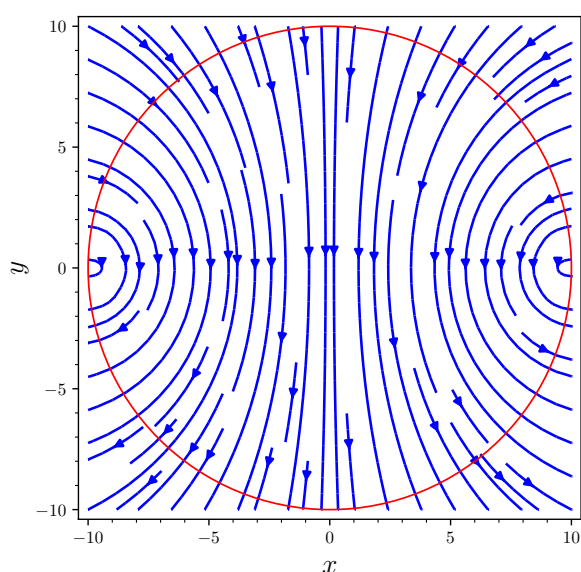
$$\tan \Phi = \frac{2 \frac{\rho}{R_0} \sin \phi}{1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}}$$

Stąd,

$$V(\rho, \phi) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2 \frac{\rho}{R_0} \sin \phi}{1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}}$$



Rysunek 1.4: $V(x, y)$ wewnątrz cylindra. Wyraźnie widać, że największe pole (największy skok potencjału) jest przy ściankach, wewnątrz cylindra szybko zanika.



Rysunek 1.5: Wykres linii pola w płaszczyznach poziomych dla $R_0 = 10$.

Zadanie 2 Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że potencjał elektrostatyczny dany wzorem Coulomba

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

spełnia równanie Poissona

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

By brute force,

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Dowód, że $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(0)$ w sensie dystrybucyjnym znajduje się w notatkach z Analizy 3R.

Można jeszcze zrobić inaczej,

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \right) d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{grad}' \rho d^3\mathbf{r}'
 \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości $\operatorname{div}(\phi \mathbf{A}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{A} + (\operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{A}$. Całkujemy teraz po małej (epsilonowej) kółce, korzystamy z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego,

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\sigma + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \operatorname{grad}' \rho d^3\mathbf{r}'$$

Druga całka da zero w granicy kulki dążącej do zera (bo to całka z rzutu pola wektorowego na stały kierunek + wyższe pochodne). Pierwsza całka jest trywialna.

$$= -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Zadanie 3 Mamy uziemioną kulę. Wewnątrz kuli, w odległości d od środka umieszczamy ładunek q . Jakie będzie pole wewnątrz kuli?

Można to rozwiązywać metodą obrazów z ładunkiem inwersyjnym. Ale możemy się tym zająć ogólnie metodą funkcji Greena.

Jeśli mamy typowego ziemniaka S z zadaniem potencjałem $V(\mathbf{r}')$ na S , to zachodzi

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi} \int_S V(\mathbf{r}') \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} d\sigma'$$

Gdy patrzymy na wnętrze S , wektor \mathbf{n} wskazuje na zewnątrz, gdy patrzymy na zewnątrz S , odwrotnie. $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ dla $\mathbf{r}' \in S$.

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

gdzie F_D spełnia równanie Laplace'a $\nabla^2 F_D = 0$.

Z metody obrazów,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{R}{d}q}{\left|\mathbf{r} - \frac{R^2}{d^2}\mathbf{d}\right|}}_{\text{spełnia równanie Laplace'a wewnątrz sfery}}$$

Jeśli pod $q/(4\pi\epsilon_0)$ podstawimy 1, dostaniemy funkcję Greena zerującą się na sferze. Stąd, natychmiast można ją włożyć do wyrażenia na potencjał i zastosować do dowolnego problemu, gdzie dane są warunki brzegowe na sferze. Zatem ogólnie, dla sfery

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\frac{R}{|\mathbf{r}'|}}{\left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{|\mathbf{r}'|^2} \mathbf{r}' \right|}$$

Ćwiczenia 3

Zadanie 1 Sfera o promieniu R jest naładowana potencjałem $+V_0$ dla $z > 0$ i $-V_0$ dla $z < 0$. Zapisać wzór na $V(\mathbf{r})$ wewnątrz sfery przy użyciu funkcji Greena, wyznaczyć potencjał w punktach $(0, 0, z)$ dla $z \in (-R, R)$. 20 paź 2021

Musimy policzyć $\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/\partial \mathbf{n}'$, gdzie $\mathbf{n} = \hat{e}_r$. Użyjemy też twierdzenia cosinusów do zapisania tych modułów,

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} - \frac{\frac{R}{r'}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - \frac{2rR^2}{r'} \cos \theta}}$$

W takim razie,

$$\frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} = \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r'} = \frac{r \cos \theta - r'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{3/2}} + R \frac{r^2 - \frac{rR^2}{r'} \cos \theta}{r'^2 \left(r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - \frac{2rR^2}{r'} \cos \theta \right)^{3/2}}$$

Całkujemy to po powierzchni sfery $r' = R$, zatem po obcięciu

$$\left. \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = \frac{\frac{r^2}{R} - R}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}}$$

Uwaga! $\theta = \theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, jest to kąt między wektorami \mathbf{r}, \mathbf{r}' a nie kąt biegunowy. Tak więc musimy podjąć się karkołomnego zadania wyrażenia tego kąta θ w układzie sferycznym (r, ϑ, φ) .

$$\mathbf{r} = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$$

$$\mathbf{r}' = (r' \cos \varphi' \sin \vartheta', r' \sin \varphi' \sin \vartheta', r' \cos \vartheta')$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rR} = \frac{rR \cos \varphi \sin \vartheta \cos \varphi' \sin \vartheta' + rR \sin \varphi \sin \vartheta \sin \varphi' \sin \vartheta'}{rR} + \frac{rR \cos \vartheta \cos \vartheta'}{rR}$$

Używając tożsamości $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,

$$= \cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$$

Finalnie, jesteśmy gotowi by zapisać potencjał. Pierwsza całka zanika, gdyż $\rho(\mathbf{r}) = 0$.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{R^2 \sin \vartheta' \left(R - \frac{r^2}{R} \right)}{\left[r^2 + R^2 - 2rR (\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')) \right]^{3/2}} - \frac{V_0}{4\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{R^2 \sin \vartheta' \left(R - \frac{r^2}{R} \right)}{\left[r^2 + R^2 - 2rR (\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')) \right]^{3/2}}$$

Wow! Jaka niesamowita formuła! Po zamianie zmiennych $\vartheta' \mapsto \pi - \vartheta'$ w drugiej całce, otrzymujemy

$$V(\mathbf{r}) = \frac{V_0 R^3}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin \vartheta' \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \left\{ \frac{1}{\left[r^2 + R^2 - 2rR(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'))\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[r^2 + R^2 + 2rR(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'))\right]^{3/2}} \right\}$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć pole na osi z : $\mathbf{r} = (0, 0, z)$. Tłumaczy się to na warunek $\vartheta = 0$ lub $\vartheta = \pi$. Wówczas w całce wyrażenie podcałkowe zawierające φ' znika i zostajemy z

$$V(z) = \frac{V_0 R^3}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\vartheta' 2\pi \sin \vartheta' \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \left[\frac{1}{(z^2 + R^2 - 2zR \cos \vartheta')^{3/2}} - \frac{1}{(z^2 + R^2 + 2zR \cos \vartheta')^{3/2}} \right]$$

Dla $\vartheta = \pi$ będzie przeciwny znak.

Zadanie 2 Rozważmy kulę z przewodnika z wnęką w środku i ładunkiem (dodatnim) w tej wnęce. Jaki jest potencjał na zewnątrz?

Pole w przewodniku musi być zerowe (zatem potencjał co najwyżej stały). Przy wnęce wyindukuje się więc ładunek ujemny, a na powierzchni kuli ładunek dodatni (równomiernie). Rozkład ładunku będzie równomierny, gdyż pole przy powierzchni musi być prostopadłe do kuli (styczne pole oznacza prąd w przewodniku), a stąd prawo Gaussa dyktuje jednorodność. Zatem na zewnątrz kuli

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Co jeśli byłaby kula z wnęką umieszczona w zewnętrznym polu? Czy na brzegu wnęki coś się wyindukuje? Otóż nie, w naszym przypadku ładunki się indukują, żeby pole w przewodniku było zerowe. Z twierdzenia o jednoznaczności, wnęka nic nie zmienia jeśli na zewnątrz będzie pole elektryczne, nie wyindukują się więc ładunki.

Jeśli problem nie zależy od współrzędnej radialnej ρ , to możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania Laplace'a (w obszarze bez ładunku):

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l$$

Przy okazji pamiętamy również, że dla $|\mathbf{r}| < |\mathbf{r}'|$ mamy

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Zadanie 3 Rozważmy uziemioną kulę z przewodnika o promieniu R (umieszczoną w środku układu współrzędnych). Nad kulą w odległości z umieszczono ładunek q . Podać potencjał na zewnątrz kuli.

Mamy tylko jeden ładunek punktowy, więc obszar na zewnątrz da się podzielić na dwa tak, żeby ładunek był na ich wspólnym brzegu. Niech $\mathcal{O}_1 = \{\mathbf{r}: R < |\mathbf{r}| < z\}$, a $\mathcal{O}_2 = \{\mathbf{r}: |\mathbf{r}| > z\}$. Wówczas mamy dwie części rozwiązania, które sklejamy warunkiem brzegowym w q .

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) & \mathbf{r} \in \mathcal{O}_1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & \mathbf{r} \in \mathcal{O}_2 \end{cases}$$

Stałe A, B wyznaczają warunki brzegowe na kuli i w q , natomiast znikanie potencjału w nieskończoności indukuje znikanie pierwszego członu w drugim rozwiązaniu a stałą C wyznaczamy z warunku brzegowego w q i ciągłości na brzegu obszarów.

Ćwiczenia 4

Prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Po zamianie zmiennych,

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

co oznacza, że wielomiany Legendre'a tworzą ortogonalny, zupełny układ liniowy.

27 paź 2021

Zadanie 1 Rozważmy uziemioną kulę z przewodnika o promieniu R (umieszczoną w środku układu współrzędnych). Nad kulą w odległości z umieszczono ładunek q . Podać potencjał na zewnątrz kuli.

Mamy tylko jeden ładunek punktowy, więc obszar na zewnątrz da się podzielić na dwa tak, żeby ładunek był na ich wspólnym brzegu. Niech $\mathcal{O}_1 = \{\mathbf{r}: R < |\mathbf{r}| < z\}$, a $\mathcal{O}_2 = \{\mathbf{r}: |\mathbf{r}| > z\}$.

$z\}$. Wówczas mamy dwie części rozwiązania, które sklejamy warunkiem brzegowym w q .

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) & \mathbf{r} \in \mathcal{O}_1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) & \mathbf{r} \in \mathcal{O}_2 \end{cases}$$

gdzie V_0 jest zwykłym potencjałem od ładunku:

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - z\hat{e}_z|}$$

Stałe A, B wyznaczają warunki brzegowe na kuli i w q , natomiast znikanie potencjału w nieskończoności indukuje znikanie pierwszego członu w drugim rozwiązaniu a stałą C wyznaczamy z warunku brzegowego w q i ciągłości na brzegu obszarów.

DO UZUPEŁNIENIA DRUGIE PODEJŚCIE UŻYWANE PONIŻEJ (wyodrębnienie potencjału od ładunku + Laplace na zewnątrz sfery)

Warunek brzegowy na sferze to $V(R, \theta) = 0$. Przy założeniu, że $r < z$ możemy napisać, że

$$V(r, \theta) \stackrel{r < z}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{z^{l+1}} P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Akurat się miło składa, że θ jest tym samym kątem co z układu współrzędnych. Teraz podstawiamy warunek brzegowy,

$$0 = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Teraz chcemy zastosować ortogonalność $P_l(\cos \theta)$. Mamy szereg bezwzględnie zbieżny (jest w zasadzie jak geometryczny), więc możemy z całką wejść pod szereg.

Zasadniczo na tej liniiżce można już poprzestać, bo wielomiany P_l tworzą układ zupełny, zatem każda funkcja ma w nich jednoznaczną reprezentację. Po lewej stronie jest zero, więc wszystkie współczynniki przy P_l muszą być zerowe. Jednakże, można na około,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} \\ 0 &= \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{l'}}{z^{l'+1}} + \frac{B_{l'}}{R^{l'+1}} \right) \frac{2}{2l'+1} \end{aligned}$$

Stąd wyznaczmy stałe,

$$B_l = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}}$$

Finalnie, dla $r < z$,

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r^l}{z^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

natomiast dla $r > z$,

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{z^l}{r^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Stąd można odczytać ładunek inwersyjny w metodzie obrazów. Drugi człon potencjału $V_1(\mathbf{r})$ musiałby być postaci:

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Tak też jest!

$$\begin{aligned} &= -\frac{q \frac{R}{z}}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{R^2}{z}\right)^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= -\frac{q \frac{R}{z}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\mathbf{r} - \frac{R^2}{z} \hat{e}_z\right|} \end{aligned}$$

Stąd ładunek inwersyjny wynosi $q' = -qR/z$ a odległość inwersyjna to $z' = R^2/z$.

Zadanie 2 Mamy zwykły układ współrzędnych kartezjańskich z kulą o promieniu R , zrobioną z dielektryka o przenikalności względnej ϵ . Na osi w odległości z jest umieszczony ładunek q . Znaleźć potencjał i pole w środku kuli, na zewnątrz oraz ładunek powierzchniowy wyindukowany na kuli.

W środku gęstość objętościowa ładunku jest zerowa, jedynie mamy wytworzone powierzchniowe ładunki związane, zatem zarówno w środku jak i na zewnątrz można rozwiązać równanie Laplace'a.

$$V_{\text{zew}}(r, \theta) \stackrel{R < r < z}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

W środku bierzemy natomiast te wyrazy rozwiązania ogólnego, które nie są osobliwe w centrum.

$$V_{\text{wew}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

Możemy zapisać pierwszy warunek sklejenia: $\mathbf{E}_{\text{wew}}^{\parallel}(r \rightarrow R) = \mathbf{E}_{\text{zew}}^{\parallel}(r \rightarrow R)$, natomiast ten warunek oznacza po prostu ciągłość potencjału $V_{\text{wew}}(R, \theta) = V_{\text{zew}}(R, \theta)$. Potrzebny

jest drugi warunek. W przypadku dielektryków z liniową odpowiedzią, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$. Warunek na indukcję wyraża się wówczas przez $\mathbf{D}_{zew}^\perp - \mathbf{D}_{wew}^\perp = \sigma_{sw}$. W naszym przypadku ładunków swobodnych nie ma, jedynie te wyindukowane, zatem $\mathbf{D}_{zew}^\perp(r \rightarrow R) = \mathbf{D}_{zew}^\perp(r \rightarrow R)$. Oznacza to dokładnie, że

$$\varepsilon \frac{\partial V_{zew}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial V_{zew}}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

Pierwszy warunek w tym zadaniu tłumaczy się na zapis:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta)$$

Drugi warunek, po różniczkowaniu

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} l \frac{R^{l-1}}{z^{l+1}} - (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} \right) P_l(\cos \theta) = \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} A_l l R^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

Możemy (z zupełności) przyrównać współczynniki przy tych kombinacjach liniowych.

$$\begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} = A_l R^l \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} - \frac{l+1}{l} \frac{B_l}{R^{l+1}} = \varepsilon A_l R^l \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Stąd,

$$B_l = -\frac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}} \frac{l}{l(\varepsilon+1)+1}$$

$$A_l = -\frac{2l+1}{l(\varepsilon-1)} \frac{B_l}{R^{2l+1}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{z^{l+1}} \frac{2l+1}{l(\varepsilon+1)+1}$$

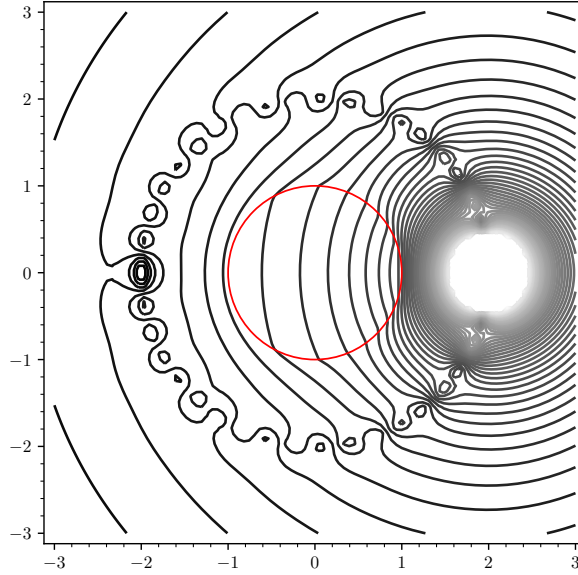
To już można podstawić do końcowego wzoru otrzymując ostateczny wynik.

$$V_{zew}(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{r^l}{z^{l+1}} - \frac{(\varepsilon-1)R^{2l+1}}{z^{l+1}r^{l+1}} \frac{l}{l(\varepsilon+1)+1} \right] P_l(\cos \theta)$$

$$V_{wew}(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l(\varepsilon+1)+1} \frac{r^l}{z^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

Jak się dowiedzieć czy to ma sens? (Czy się nie pomyliliśmy?) Weźmy przypadek graniczny $\varepsilon = 1$. Wówczas rozwiązanie wewnętrzne staje się takie samo jak rozwiązanie zewnętrzne, będące rozwiązaniem od ładunku punktowego, tak jakby zamieniono dielektryk na próżnię. Zgadza się.

Jeśli $\varepsilon \rightarrow \infty$, to wewnątrz mamy stały zerowy potencjał (nieudany przewodnik stał się przewodnikiem, który już pola nie wpuszcza). Pole zewnętrzne redukuje się do poprzedniego zadania.



Rysunek 1.6: Wykres linii ekwipotencjalnych, wykonany z pierwszych 10 wyrazów rozwinięcia. Wyraźnie widać pole wchodzące do dielektryka.

Zadanie 3 Rozważmy kulę z materiału dielektrycznego z wydrążoną współśrodkową dziurą. Promień wewnętrzny ma promień R_1 , zewnętrzny R_2 . Materiał ma stałą dielektryczną ε . Wsadziliśmy ten obiekt w jednorodne pole elektryczne \mathbf{E}_0 (zostało więc jakoś zaburzone). Ile wynosi pole wewnątrz tej powłoki?

Jest to problem osiowosymetryczny, z osią symetrii z . Problem się skomplikował, gdyż mamy 3 obszary zainteresowania, na zewnątrz kuli (I), w powłoce (II) i w wydrążonej dziurze (III). W (I) rozwiązanie pochodzące od kuli znika asymptotycznie w nieskończoności, trzeba dodać potencjał od $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{e}_z$, wynoszący $V_0 = -E_0 z$.

$$\begin{aligned} V_{\text{I}}(r, \theta) &= -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

W obszarze (II) będzie pełne rozwiązanie ogólne,

$$V_{\text{II}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

W obszarze (III) nie może być osobliwości w zerze, więc

$$V_{\text{III}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

Wyraz z V_0 już się nie pojawia bo w wyrażeniach na (II), (III) są wyrazy z $P_1(\cos \theta)$, które zmieszczą ten element w stałych.

Prostackie oświecone zgadnięcie stałych byłoby dostateczne z twierdzenia od jednoznaczności. Z intuicji, w dziurze (III) pole będzie de facto stałe więc moglibyśmy odgadnąć $V_{\text{III}} = A_1 r \cos \theta$. Można pójść dalej za ciosem i odważnie odgadnąć, że we wszystkich obszarach odpowiedź układu na pobudzenie liniowym potencjałem jest wciąż tylko w $l = 1$ (wielomiany Legendre'a występują tylko w kombinacjach liniowych). Wówczas,

$$\begin{aligned} V_{\text{I}} &= \left(\frac{B_1}{r^2} - E_0 r \right) \cos \theta \\ V_{\text{II}} &= \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2} \right) \cos \theta \\ V_{\text{III}} &= A_1 r \cos \theta \end{aligned}$$

Stąd dostalibyśmy warunki ciągłości w R_1 i R_2 ,

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{R_2^2} - E_0 R_2 &= C_1 R_2 + \frac{D_1}{R_2^2} \\ A_1 R_1 &= C_1 R_1 + \frac{D_1}{R_1^2} \end{aligned}$$

Oraz warunki na ciągłość indukcji,

$$\begin{aligned} -\frac{2B_1}{R_2^3} - E_0 &= \varepsilon \left(C_1 - \frac{2D_1}{R_2^3} \right) \\ A_1 &= \varepsilon \left(C_1 - \frac{2D_1}{R_1^3} \right) \end{aligned}$$

Jeśli ten układ uda się rozwiązać to znaczy, że nasze dzikie zgadnięcie miało sens. Dla innych l mielibyśmy jednorodny układ liniowy z 4 niewiadomymi. Jeśli tylko taki układ nie jest osobliwy to istnieje tylko jedno, zerowe rozwiązanie. Stąd podparcie intuicji zerowania się stałych dla $l > 0$. Tylko dla $l = 0$ pojawia się niejednorodność związana z E_0 .

Rozwiązaniem układu jest:

$$A_1 = -\frac{9\varepsilon E_0}{(2 + \varepsilon)(1 + 2\varepsilon) - 2(\varepsilon - 1)^2 \frac{R_1^3}{R_2^3}}$$

Jakie jest to pole?

W środku jest to pole jednorodne.

Jakie są interesujące granice parametrów?

Gdy $\varepsilon = 1$, to pole w środku jest takie samo jak na zewnątrz.

Gdy $R_1 \rightarrow R_2$, wówczas $A_1 = -E_0$, zatem taka cienka skorupka dielektryczna nie ma wpływu na pole w całej przestrzeni. Przewodnik ekranował pole. Dielektryk może wytwarzać ograniczoną gęstość związanego ładunku powierzchniowego, jeśli jest cienki to ta gęstość będzie $\rightarrow 0$. Przewodnik może wytworzyć z definicji nieskończony ładunek sprzeciwiający się polu, dlatego ekranuje.

Rozdział 2

Magnetostatyka

Ćwiczenia 5

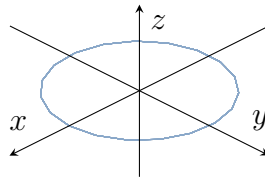
03 lis 2021

Definicja 1 (Prawo Biote'a-Savarta).

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

gdzie wprowadzimy oznaczenie $\mathcal{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Źródłem pola jest tutaj płynący prąd \mathbf{I} , czyli ruch ładunku. Primami zawsze oznaczamy źródła, nieprimami punkt obserwacji.

Zadanie 1 Rozważmy pętlę o promieniu a , w której płynie prąd antyzegarowo (Rys. 2.1). Znaleźć indukcję magnetyczną \mathbf{B} we współrzędnych kartezjańskich, sferycznych oraz w granicy $a \rightarrow 0$, $I \rightarrow \infty$, $Ia^2\pi = m$ (model dipola magnetycznego).



Rysunek 2.1: Pętla z prądem.

$$d\mathbf{I} = Ia d\phi' \mathbf{e}_\phi = Ia d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{r}' = a \cos \phi' \mathbf{e}_x + a \sin \phi' \mathbf{e}_y$$

$$\mathcal{R} = (x - a \cos \phi')\mathbf{e}_x + (y - a \sin \phi')\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

Teraz liczymy iloczyn wektorowy,

$$\begin{aligned} d\mathbf{I} \times \mathcal{R} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -Ia \sin \phi' & Ia \cos \phi' & 0 \\ x - a \cos \phi' & y - a \sin \phi' & z \end{vmatrix} \\ &= Iaz \cos \phi' d\phi' \mathbf{e}_x + Iaz \sin \phi' d\phi' \mathbf{e}_y + Ia(a - y \sin \phi' - x \cos \phi') d\phi' \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Podstawiamy do prawa Biote'a-Savarta,

$$d\mathbf{B} = \frac{Ia\mu_0 d\phi'}{4\pi} \frac{z \cos \phi' \mathbf{e}_x + z \sin \phi' \mathbf{e}_y + (a - y \sin \phi' - x \cos \phi') \mathbf{e}_z}{[(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2]^{3/2}}$$

Całka po pętli to

$$\mathbf{B} = \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 Ia}{4\pi} \frac{z \cos \phi' \mathbf{e}_x + z \sin \phi' \mathbf{e}_y + (a - y \sin \phi' - x \cos \phi') \mathbf{e}_z}{[(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2]^{3/2}} d\phi'$$

Interesuje nas granica dipola, więc chcielibyśmy przejść z granicą $a \rightarrow 0$, jednak posługując się heurystycznymi argumentami, całka się wtedy wyzeruje, więc szacowaliśmy za grubo. Ale jeśli rozwinieśmy to w szereg, widzimy że licznik jest rozwinięty do pierwszego rzędu w a , trzeba to samo zrobić z mianownikiem. Wyrazy kwadratowe wyprodukują w połączeniu z Ia wyrazy sześciennne, co ostro ginie w granicy dipola (Ia^2 jest jeszcze skończone w granicy dipola, proporcjonalne do m). Dlatego rozwinięcie mianownika do wyrazu liniowego jest wystarczające.

$$\frac{1}{[(x - a \cos \phi')^2 + (y - a \sin \phi')^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \left(1 - \frac{2ax \cos \phi' + 2ay \sin \phi'}{x^2 + y^2 + z^2} + \mathcal{O}(a^2)\right)^{3/2}}$$

Zauważmy, że $(1 - \varepsilon)^{3/2} = 1 + 3\varepsilon/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$,

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(1 + 3 \frac{ax \cos \phi' + ay \sin \phi'}{x^2 + y^2 + z^2} + \mathcal{O}(a^2)\right)$$

Wówczas,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\mu_0 Ia}{4\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} & [(x^2 + y^2 + z^2) + 3(ax \cos \phi' + ay \sin \phi')] \cdot \\ & \cdot [z \cos \phi' \mathbf{e}_x + z \sin \phi' \mathbf{e}_y + (a - y \sin \phi' - x \cos \phi') \mathbf{e}_z] \end{aligned}$$

Zbieramy wyrazy proporcjonalne do a^2 , cała reszta w granicy się scałkuje do zera.

$$\begin{aligned} B^x &= \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \cdot \frac{3(x \cos \phi' + y \sin \phi')z \cos \phi'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \pi \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \xrightarrow[a \rightarrow 0]{I \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ B^y &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ B^z &= \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x \cos \phi' + y \sin \phi')^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \frac{2\pi(x^2 + y^2 + z^2) - 3\pi(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &\xrightarrow[a \rightarrow 0]{I \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Chcielibyśmy jeszcze to samo napisać we współrzędnych sferycznych.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3 \cos \phi \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_x + 3 \sin \phi \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_y + (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \mathbf{e}_z] \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{1}{r^3} [2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta] \end{aligned}$$

Formalnie, zrobiliśmy rozwinięcie multipolowe prawa Biote'a-Savarta do członu dipolowego.

W sytuacjach statycznych (a w zasadzie stacjonarnych),

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}\end{aligned}$$

Czasami są efekty materiałowe. W liniowych dielektrykach, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ z warunkami zszycia $(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- \mid \mathbf{t}) = 0$ i $(\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_- \mid \mathbf{n}) = 0$.

Natężenie pola magnetycznego można zapisać jako $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}$ wraz z warunkami zszycia $(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_- \mid \mathbf{t}) = 0$ i $(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_- \mid \mathbf{n}) = 0$.

Zadanie 2 (Specjalna metoda magnetostatyki) Weźmy wydrążoną kulę jak z poprzednich ćwiczeń, o promieniach R_1, R_2 . Powłoka ma podatność (?) $\mu > 1$. Na zewnątrz kuli jest jednorodne pole magnetyczne $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Znaleźć indukcję magnetyczną w wydrążeniu.

W przypadku $\mathbf{j} = 0$ (będą tylko prądy związane, nie swobodne), pole magnetyczne jest bezrotacyjne, zatem istnieje potencjał skalarny i spełnione jest równanie Laplace'a dla tego potencjału – identyczne jak w przypadku z poprzednich ćwiczeń. Tym razem są pewnie jednak trochę inne warunki zszycia na brzegach. Reasumując, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \implies \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi$ i $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0$. Stąd, biorąc poprzednie rozwiązanie równania Laplace'a,

$$\mathbf{B}_{\text{wew}} = \mathbf{B}_0 \frac{9\mu}{(1+2\mu)(2+\mu) - 2(\mu-1)^2 \frac{R_1^3}{R_2^3}}$$

Zauważmy, że tym razem w powłoce ograniczonej promieniami R_1, R_2 , dla $\mu > 1$ pole zostaje wzmocnione, bo $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$. Materiał magnetyczny będzie wciągał linie pola.

Uwaga Rozważmy funkcję holomorficzną $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Jak wiadomo z analizy zespolonej, $0 = \partial_z \partial_{\bar{z}} f = (\partial_x^2 + \partial_y^2) f = \Delta f$. f można przedstawić jako $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Widać więc, że jednocześnie część rzeczywista i urojona funkcji holomorficznej spełniają równanie Laplace'a.

Przykład: $f(z) = -E_0 z$, $\operatorname{Re} f(z) = -E_0 x$. W takim razie powierzchnie ekwipotencjalne będą odpowiadały liniom wzdłuż osi y , bo $\operatorname{Im} f(z) = -E_0 y$. Mamy tutaj dualność między polem a potencjałem.

Przykład 2: $f(z) = A \log \frac{z-a}{z+a}$. Jaki to problem elektrostatyczny na \mathbb{R}^2 ?

Rozważmy $z = x \in \mathbb{R}$. Pamiętamy, że $\log Re^{i\Phi} = \log R + i\Phi$.

$$\log \frac{z-a}{z+a} = \log \left| \frac{z-a}{z+a} \right| + i \arg \frac{z-a}{z+a}$$

$$\stackrel{z=x}{=} \begin{cases} \log \frac{x-a}{x+a} & z > a \vee z < -a \\ \log \frac{a-x}{a+x} + i\pi & -a < z < a \end{cases}$$

Weźmy potencjał stanowiący część urojoną, zobaczymy jaki spełnia warunek brzegowy na osi rzeczywistej,

$$V = \operatorname{Im} \frac{V_0}{\pi} \log \frac{z-a}{z+a} \stackrel{z=x}{=} \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Zatem jest to takie zagadnienie brzegowe, gdzie mamy pasek $x \in [-a, a]$ pod stałym napięciem, dookoła jest uziemienie. Cała funkcja $V(x, y)$ na \mathbb{R}^2 będzie potencjałem w całej przestrzeni. Linie pola natomiast są izoliniami $\operatorname{Re} f(z)$.

Ćwiczenia 6: Uzupełnienie teorii

17 lis 2021

Definicja 2. Rozważmy dwie pętle (Rys. 2.2) (S_1, S_2) liniowe obok siebie. W jednej płynie prąd I_1 . Strumień pola magnetycznego przepływającego przez S_2 wynosi

$$\Phi_2 = \int_{S_2} (\mathbf{B} \mid \mathbf{n}) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} M_{21} I_1$$

gdzie M_{21} to współczynnik indukcji wzajemnej. Bierzemy zawsze taką orientację pętli \mathbf{n} , żeby $M_{21} > 0$. Przypomnijmy sobie, że

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} (\operatorname{rot} \mathbf{A}_1 \mid \mathbf{n}) d\sigma = \oint_{\partial S_2} (\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{t}) dl_2$$

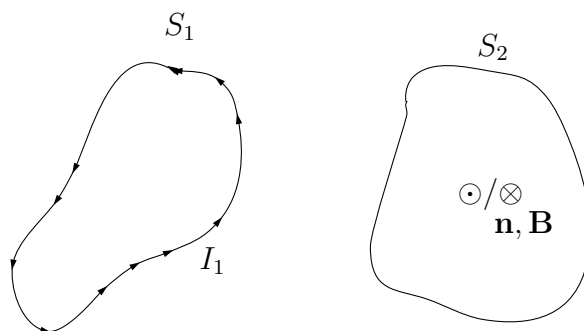
Wprowadźmy sobie oznaczenie $d\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t} dl$,

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\partial S_2} \left(\oint_{\partial S_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

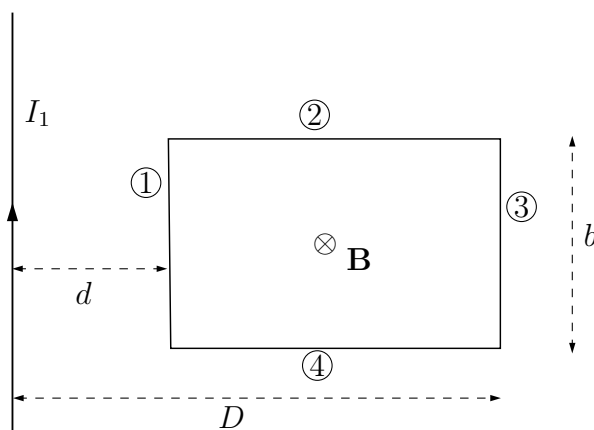
$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{(d\mathbf{l}_1 \mid d\mathbf{l}_2)}{\mathcal{R}}$$

To wyrażenie nazywamy wzorem Neumanna.

Zadanie 1 Rozważamy prosty przewód z prądem I_1 , obok niego stawiamy prostokątną ramkę (Rys. 2.3). Wyznaczyć współczynnik indukcji wzajemnej M_{21} z definicji



Rysunek 2.2: Definicja indukcyjności wzajemnej.



Rysunek 2.3: Ramka prostokątna przy nieskończonym prostym przewodzie.

i ze wzoru Neumanna.

Nadajmy ramce orientację zgodną z kierunkiem pola wyindukowanego przez przewód z prądem I_1 . Z prawa Ampera szybko wyliczamy, że pole magnetyczne od nieskończonego druta wynosi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \mathbf{e}_\phi$$

W naszym przypadku ograniczamy się do płaszczyzny xz , więc z definicji,

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int_{S_2} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{x} (\mathbf{e}_y \mid \mathbf{e}_y) d\sigma \\ &= \int_{[d,D] \times [0,b]} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{dx}{x} dz \\ &= \frac{\mu_0 b I_1}{2\pi} \int_d^D \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 b I_1}{2\pi} \log \frac{D}{d} \end{aligned}$$

Stąd,

$$M_{21} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \log \frac{D}{d}$$

Policzmy to samo w inny sposób. Ze wzoru Neumanna,

$$\begin{aligned} d\mathbf{l}_1 &= dy_1 \mathbf{e}_y \\ d\mathbf{l}_2 &= \begin{cases} dy_2 \mathbf{e}_y & \textcircled{1} \\ dx_2 \mathbf{e}_x & \textcircled{2} \\ -dy_2 \mathbf{e}_y & \textcircled{3} \\ -dx_2 \mathbf{e}_x & \textcircled{4} \end{cases} \end{aligned}$$

W takim razie,

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \left(\int_{\textcircled{1}} dy_2 - \int_{\textcircled{3}} dy_2 \right) \frac{1}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \left(\int_0^b \frac{dy_2}{\sqrt{d^2 + (y_2 - y_1)^2}} - \int_0^b \frac{dy_2}{\sqrt{D^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right) \end{aligned}$$

Jest tutaj bardzo ciekawa rzecz, bowiem jeśli traktowalibyśmy tę całkę jako różnicę dwóch całek podwójnych, jest to wyrażenie typu różnica nieskończoności. W tego typu problemach elektro/magneto-statycznych bardzo trzeba uważać na zamianę kolejności całkowania! Najpierw zmienimy zmienną całkowania w całce zewnętrznej:

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{matrix} Y(y_1) = y_1 - y_2 \\ dY = dy_1 \end{matrix} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dY \int_0^b dy_2 \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + Y^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + Y^2}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 b}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dY \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + Y^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + Y^2}} \right) \end{aligned}$$

Pamiętajmy, że musimy być ostrożni z traktowaniem tego wyrażenia jako różnicę całek! Można sobie z tym poradzić robiąc przejście graniczne (de facto definiujące tę całkę niewłaściwą),

$$= \frac{\mu_0 b}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dY \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + Y^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + Y^2}} \right) = (*)$$

Teraz można już policzyć całki osobno, odjąć je i wziąć granicę.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dY}{\sqrt{d^2 + Y^2}} = \left| \begin{matrix} Y = d \sinh \xi \\ dY = d \cosh \xi d\xi \\ d^2 + Y^2 = d^2 \cosh^2 \xi \end{matrix} \right| = \int d\xi \\ &= \xi + C = \sinh^{-1} \frac{Y}{d} + C \end{aligned}$$

Zauważmy, że $Y/d = 1/2(e^\xi - e^{-\xi})$, zatem

$$\begin{aligned} 0 &= e^{2\xi} - \frac{2Y}{d}e^\xi - 1 \\ e^\xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{2Y}{d} \pm 2\sqrt{\frac{Y^2}{d^2} + 1} \right) \\ &\stackrel{\exp>0}{=} \frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2} + 1} \end{aligned}$$

Stąd,

$$I = \log \left(\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2} + 1} \right) + C$$

W takim razie,

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{\mu_0 b}{4\pi} \log \frac{\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2} + 1}}{\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2} + 1}} \bigg|_{Y \rightarrow -\infty}^{Y \rightarrow +\infty} \\ \lim_{Y \rightarrow +\infty} \log \frac{\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2} + 1}}{\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2} + 1}} &= \lim_{Y \rightarrow +\infty} \log \frac{\frac{1}{d} + \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{Y^2}}}{\frac{1}{D} + \sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{1}{Y^2}}} = \log \frac{D}{d} \end{aligned}$$

Podobnie,

$$\lim_{Y \rightarrow -\infty} \log \frac{\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2} + 1}}{\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2} + 1}} = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2} + 1}}{-\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2} + 1}} = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \log \frac{-\frac{1}{d} + \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{Y^2}}}{-\frac{1}{D} + \sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{1}{Y^2}}}$$

Domnożmy to przez dogodną jedynkę, żeby pozbyć się wyrażenia 0/0,

$$= \lim_{Y \rightarrow +\infty} \log \frac{\frac{1}{Y} \frac{1}{d} + \sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{1}{Y^2}}}{\frac{1}{Y} \frac{1}{d} + \sqrt{\frac{1}{d^2} + \frac{1}{Y^2}}} = \log \frac{d}{D}$$

Stąd,

$$(*) = \frac{\mu_0 b}{4\pi} \left(\log \frac{D}{d} - \log \frac{d}{D} \right) = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \log \frac{D}{d}$$

Otrzymaliśmy więc ten sam wynik, wielokrotnie wyższym nakładem pracy. Tak na ogół właśnie bywa z używaniem wzoru Neumanna, zamiast prostszej definicji.

Definicja 3. Tensor napięć Maxwella definiujemy (przynajmniej w poprawnej indeksologii) następująco:

$$T^i_j = \varepsilon_0 \left(E^i E_j - \frac{1}{2} \delta^i_j \mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B^i B_j - \frac{1}{2} \delta^i_j \mathbf{B}^2 \right)$$

gdzie $E_i dx^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}^\flat$, jednak my oczywiście rozważamy tradycyjnie teorię na \mathbb{R}^3 , więc po prostu $E^i = E_i$. Podobnie, równie dobrze możemy sobie pisać T_{ij} czy T^{ij} olewając pozycje indeksów; czego nie popieram ale nie mam siły za każdym razem tego poprawiać pisząc wzory z tablicy, więc pewnie będę tak dalej kaleczył notację...

Po co to nam potrzebne? Otóż rozważmy obiekt rozciągliwy V o brzegu $\partial V = S$, zawierający ładunki, umieszczony w polu (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Wówczas siłę na jednostkę objętości zapiszemy jako:

$$\frac{dF^i}{dV} = f^i = \partial_j T^{ji} = \operatorname{div} \mathbf{T}$$

Ta dywergencja jest zasadniczo przyzwoicie określona, jako że tensor napięć jest symetryczny. Całkowita siła działająca na V to z kolei

$$\mathbf{F}_V = \int_S (\mathbf{T} \mid \mathbf{n}) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_S T^i_j n^j d\sigma \right) \partial_i$$

Wprowadzając jeszcze jedną notacyjną konwencję $d\sigma^i \stackrel{\text{def}}{=} n^i d\sigma$,

$$F_V^i = \int_S T^i_j d\sigma^j$$

Uwaga 1. Niestety tensor napięć zdefiniowany w powyższy sposób, nieszczególnie dobrze przenosi się na język czystszej geometrii różniczkowej i języka form, w którym moglibyśmy modelować teorię na czymś innym niż \mathbb{R}^3 . Można natomiast użyć 1-formy 4-potencjału \mathbf{A} i tensora elektromagnetycznego (de facto 2-formy) $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$. Wówczas tensor energii-napięć zdefiniowany jest jako

$$T^{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{ik} F^j_k - \frac{1}{4} g^{ij} F_{ab} F^{ab} \right)$$

zatem

$$T^i_j = -\frac{1}{\mu_0} \left(F^{ik} F_{kj} + \frac{1}{4} \delta^i_j F_{ab} F^{ab} \right)$$

Tutaj już widać, że $F_{ab} F^{ab} \Omega = \mathbf{F} \wedge \star \mathbf{F}$, więc coś by można pewnie z tym dalej podzielać. Przy czym trzeba by pewnie zdefiniować $T^i = T^i_j dx^j$ jako 1-formę o wartościach w $\Gamma(TM)$ (czy coś w ten desień). Wówczas $DT^i \sim \nabla_j T^{ij} = f^i$.

Zadanie 2 Bierzemy kulę o ładunku Q , promieniu R , jednorodnie naładowaną. Bierzemy ostry nóż i przecinamy kulę w płaszczyźnie xy . Jaka siła działa na górną półkulę ($z > 0$)?

Zaatakujemy problem tensorem napięć Maxwella. Wskazówka: jaki jest kierunek tej siły? Wydaje się, że powinien iść w kierunku osi z .

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q\mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3} & r \leq R \\ \frac{1}{r^2} & r \geq R \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_r = \cos\phi \sin\theta \mathbf{e}_x + \sin\phi \sin\theta \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z$$

Wyrażamy tensor Maxwella we współrzędnych kartezjańskich.

$$\begin{aligned} T_{zx} &= \epsilon_0 E_z E_x \\ T_{zz} &= \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) \\ T_{zy} &= \epsilon_0 E_z E_y \end{aligned}$$

Na górnej półsfery,

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\phi \sin\theta \\ E_y &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin\phi \sin\theta \\ E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta \end{aligned}$$

Brzegiem górnej półkuli jest czasza C (górna półsfera) oraz denko D .

$$\begin{aligned} F_V^z &= \left(\int_C + \int_D \right) T_j^z d\sigma^j \\ &\stackrel{\text{def}}{=} F_C + F_D \end{aligned}$$

Najpierw liczymy całkę po półsfery.

$$\begin{aligned} F_C &= \int_C (T_{zx} d\sigma_x + T_{zy} d\sigma_y + T_{zz} d\sigma_z) = (*) \\ \mathbf{n} d\sigma &= R^2 r \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r = R^2 r \sin\theta d\theta d\phi (\cos\phi \sin\theta \mathbf{e}_x + \sin\phi \sin\theta \mathbf{e}_y + \cos\theta \mathbf{e}_z) \end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{[0,2\pi] \times [0,\pi/2]} (T_{zx} \cos\phi \sin\theta + T_{zy} \sin\phi \sin\theta + T_{zz} \cos\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{Q^2}{64\pi\epsilon_0 R^2} \end{aligned}$$

Zostaje koło równikowe (denko D), dla którego $\mathbf{n} d\sigma = -d\sigma \mathbf{e}_z$.

$$F_D = - \int_D T_{zz} d\sigma = (*)$$

Obcinając T_{zz} do denka,

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \frac{r^2}{R^6}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^6} r \, dr \, d\phi \\ &= \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 R^2} \end{aligned}$$

Finalnie,

$$\mathbf{F}_V = \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{e}_z$$

Gdybyśmy chcieli do tego podejść inaczej (w tym przypadku prościej), moglibyśmy liczyć całkę po płaszczyźnie xy minus denko D . Wówczas, tensor napięć obcięty do $xy \setminus D$,

$$T_{zz} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \frac{1}{r^4}$$

przy czym to ten tensor na obszarze $xy \setminus D$.

$$\begin{aligned} F_V^z &= \int_{[R,\infty] \times [0,2\pi]} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} r \, dr \, d\phi = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{2r^2} \right) \Big|_R^\infty \\ &= \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} \end{aligned}$$

Jakie jest wytłumaczenie wzięcia większego $V = \{(x, y, z) : z > 0\}$ ograniczającego półsfery? Otóż $E \sim r^{-2}$ zatem $T \sim r^{-4}$, zatem $T \cdot d\sigma \sim r^{-2}$, a w przejściu do nieskończoności, ten wkład dąży do zera.

Ćwiczenia 7

24 lis 2021 **Zadanie 1** Rozważmy dwie koncentryczne sfery, między którymi jest dielektryk o przenikalności ε i przewodnictwie σ . W czasie $t = 0$ zadano ładunek q_0 na okładce wewnętrznej. Policzyc ładunek na wewnętrznej okładce $q(t)$, całkowitą energię, jaka wydzieli się w wyniku przepływu prądu i całkowitą energię pola elektrycznego między okładkami w chwili początkowej.

Ponieważ ładunek na zewnętrznej okładce nie wpływa na pole między nimi (Gauss), więc warunek początkowy na zewnętrznej okładce jest nam zupełnie niepotrzebny. W chwili $t = 0$ pole między okładkami to

$$\mathbf{E}(0) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

Jeśli na zewnętrznej okładce ładunek wynosi $-q_0$, to pole jest wówczas jedynie między okładkami. W wariancie zerowego ładunku, pole będzie też poza.

Rozważmy chwilę $t > 0$. Wówczas pole między okładkami,

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

gdzie zaniedbujemy wpływ ładunków prądowych i zakładamy, że rozmiar układu jest mały (żeby nie było problemów z prędkością propagacji pola). Wówczas gęstość prądu jest zdefiniowana przez prąd przepływający przez pewną powierzchnię S z wektorem normalnym \mathbf{n} :

$$dI \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{j} \mid \mathbf{n}) d\sigma = \sigma \mathbf{E}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma q(t)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

Zatem natężenie prądu to

$$\begin{aligned} I &= \int_{S(r)} (\mathbf{j} \mid \mathbf{n}) d\sigma \\ &= \int_{[0,\pi] \times [0,2\pi]} d\theta d\phi r^2 \sin \theta \frac{\sigma q(t)}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{\sigma q(t)}{\epsilon_0\epsilon} \end{aligned}$$

Stąd dostajemy równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} -\frac{dq}{dt} &= \frac{\sigma q(t)}{\epsilon_0\epsilon} \\ q(t) &= q_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\epsilon_0\epsilon}\right) \end{aligned}$$

Teraz liczymy całkowitą energię, która się wydzieli przez przepływ prądu.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty UI dt \\ I &= -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0\sigma}{\epsilon_0\epsilon} \exp\left(-\frac{\sigma t}{\epsilon_0\epsilon}\right) \end{aligned}$$

Żeby wyznaczyć napięcie, nie musimy decydować jaki jest ładunek na zewnętrznej okładce. Musielibyśmy go ustalić gdybyśmy chcieli żądać, aby potencjał zanikał w nieskończoności. Natomiast napięcie to różnica potencjałów między okładkami, zatem ta subtelność się kasuje przy odejmowaniu obu potencjałów. A inaczej, bez zbędnego tłumaczenia, potencjał między punktem A, B to po prostu całka z pola między tymi punktami (oczywiście po dowolnej drodze).

$$U = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Stąd energia to

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} q_0 e^{-\frac{2\sigma t}{\epsilon_0\epsilon}} \frac{q_0\sigma}{\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{q_0^2\sigma}{4\pi\epsilon_0^2\epsilon^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) e^{-\frac{2\sigma t}{\epsilon_0\epsilon}} dt \\ &= \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Chcemy mieć również energię pola między okładkami. Dla ośrodka dielektrycznego, gęstość energii pola elektrycznego to

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} | \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \frac{q_0}{4\pi r^2} (\mathbf{e}_r | \mathbf{e}_r) \\ &= \frac{q_0^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon r^4} \\ E_{\text{pola}} &= \int_{\text{objętość między sferami}} \frac{q_0^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon r^4} r^2 dr d\Omega \\ &= \frac{q_0^2}{32\pi^2\epsilon_0\epsilon} 4\pi \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \end{aligned}$$

Cała energia początkowo zebrana w polu między okładkami wydzielila się przez prąd.

Zadanie 2 Rozważmy metalową rurkę (ale materiał nieidealnie przewodzący, w nadprzewodniku by nie działało) i wrzucony do niej magnes o masie M . Chcemy znaleźć prędkość spadania v .

Robimy model, więc formułujemy listę życzeń i okaże się które jej elementy są niezbędne i występują w wyniku.

Założymy, walec spada nie obracając się, z czego wynika, że $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$. W tym układzie będą się indukowały prądy wirowe płynące w kierunku \mathbf{e}_ϕ . Pomijamy opory powietrza. Zakładamy, że ścianki rury są cienkie (wyjdzie nam, że to nie jest ważne założenie), mają grubość D . Nie chcemy efektów brzegowych, czyli zakładamy, że rura jest nieskończona. Przydałoby się znać promień rury a . Materiał, z którego jest wykonana rura ma przewodność σ i ma zaniedbywalne własności dielektryczne. Musimy też założyć, że efekt dipola magnetycznego jest odczuwalny natychmiastowo we wszystkich miejscach rury (oddziaływania rozchodzą się natychmiastowo).

Kilka ćwiczeń temu liczyliśmy pole dipola magnetycznego,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi\mathcal{R}^3} \left[\frac{3}{\mathcal{R}^2} (\mathbf{m} | \mathbf{R}) \mathbf{R} - \mathbf{m} \right] \\ \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi\mathcal{R}^3} \mathbf{m} \times \mathbf{R} \end{aligned}$$

Najpierw musimy się zastanowić jak inaczej, energetycznie opisać fakt ruchu jednostajnego dipola. Na dipolu pracuje siła grawitacji i siła oporu wytwarzana przez prądy wirowe w walcu. Zauważmy więc, że ruch jednostajny znaczy tyle, że moc siły oporu $\mathbf{F}_{\text{op}} = -M\mathbf{g}$ równa $P = Mgv$ musi być równa mocy wydzielanej wskutek obecności prądów wirowych. Musimy się dobrać do tych prądów i napięcia (moc prądu to $P = UI$ modulo całki). Możemy skorzystać z prawa Faradaya licząc siłę elektromotoryczną na kolejnych obrysach będących przekrojami walca. Dzielimy walec na takie obręcze, parametryzujemy je przez

$$O_z = \{\mathbf{r} = a\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z : \phi \in [0, 2\pi]\}$$

Położenie dipola można opisać przez wektor

$$\mathbf{r}' = -vt\mathbf{e}_z$$

Wówczas, strumień pola przez koło powierzchni przekroju walca to

$$\begin{aligned}\phi_B(z) &= \int_{\text{przekrój}} (\mathbf{B} \mid \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\text{przekrój}} (\text{rot } \mathbf{A} \mid \mathbf{n}) d\sigma \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{C(a)} (\mathbf{A} \mid \mathbf{t}) dl\end{aligned}$$

W naszym układzie,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= e_\phi, \quad dl = a d\phi \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{[a^2 + (z + vt)^2]^{3/2}} m\mathbf{e}_z \times [a\mathbf{e}_\rho + (z + vt)\mathbf{e}_z] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{[a^2 + (z + vt)^2]^{3/2}} ma\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

Stąd,

$$\Phi_B(z) = \frac{\mu_0 ma^2}{2} \frac{1}{[a^2 + (z + vt)^2]^{3/2}}$$

Teraz użyjmy prawa Faradaya aby dostać napięcie (SEM) w „pętli z prądem ograniczonej przez pole przekroju”, tj. de facto napięcie prądów wirowych:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{3\mu_0 ma^2 v(z + vt)}{2[a^2 + (z + vt)^2]^{5/2}}$$

Jak to przełożyć na prąd płynący w walcu? Powierzchnia $d\sigma$ oznacza powierzchnię $D dz$ małego elementu przekroju pionowego walca.

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= j\mathbf{e}_\phi \\ dI &= (\mathbf{j} \mid \mathbf{n}) d\sigma = jD dz \\ \varepsilon &= \oint_{C(a)} (\mathbf{E} \mid \mathbf{t}) dl = 2\pi a E\end{aligned}$$

Stąd, korzystając z prawa Ohma $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$,

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma\varepsilon}{2\pi a} \mathbf{e}_\phi$$

Zatem element prądu (wirowego) płynącego w małym pierścieniu to

$$\begin{aligned}dI &= \frac{\sigma\varepsilon}{2\pi a} D dz = \frac{3\mu_0 mav(z + vt)\sigma D}{4\pi[a^2 + (z + vt)^2]^{5/2}} dz \\ dP &= \varepsilon dI = \frac{9}{8\pi} \frac{\mu_0^2 m^2 a^3 (z + vt)^2 v^2 \sigma D}{[a^2 + (z + vt)^2]^5} dz\end{aligned}$$

Aby dostać całą moc, musimy wyciąkować to po wszystkich pierścieniach, zatem po $z \in (-\infty, \infty)$. W tym momencie w sumie moglibyśmy skrócić długość rury, nie wykorzystaliśmy jakoś mocno nigdzie tego założenia. Założenie o cienkości ścianek wykorzystaliśmy zakładając stałość pola na obszarze $r \in [a, a + D]$.

$$P = \frac{9}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\mu_0^2 m^2 a^3 (z + vt)^2 v^2 \sigma D}{[a^2 + (z + vt)^2]^5} = \left| \begin{array}{l} \tilde{z} = z + vt \\ d\tilde{z} = dz \\ \tilde{z} \stackrel{\text{def}}{=} z \end{array} \right|$$

$$= \frac{9}{8\pi} \mu_0^2 m^2 a^2 v^2 \sigma D \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{z^2}{(a^2 + z^2)^5}$$

Można to już przecałkować przez residua, ale teraz zrobimy to przez serię fortunnych podstawień zwieńczonych pewną torturą.

$$= \left| \begin{array}{l} z = a\xi \\ dz = a d\xi \end{array} \right| = \frac{9}{8\pi} \frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{(1 + \xi^2)^5}$$

Teraz podstawienie trygonometryczne,

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{1 + \xi^2} = \cos^2 \theta \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \frac{\xi^2}{1 + \xi^2} = \sin^2 \theta \quad \frac{\xi d\xi}{(1 + \xi^2)^2} = \sin \theta \cos \theta d\theta \end{array} \right|$$

$$= \frac{9}{8\pi} \frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^6 \theta d\theta$$

Teraz mamy nową całkę,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^6 \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^6 \theta - \cos^8 \theta) d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} \theta d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^{n-2} \theta d\theta$$

To się tradycyjnie atakowało teraz przez części gdzie $f = \sin \theta$. Stąd dostaje się wzór redukcyjny na te całki,

$$\frac{n}{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2} \theta d\theta$$

Wobec tego,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^6 \theta - \cos^8 \theta) d\theta = \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5\pi}{128}$$

W końcu możemy dokończyć liczenie mocy wydzielonej na całej rurze,

$$P = \frac{9}{8\pi} \frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4} \frac{5\pi}{128} = \frac{45}{1024} \frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4}$$

Jest to cała moc tracona na ciepło wskutek przepływu prądów wirowych. Z drugiej strony to moc siły oporu równoważącej siłę ciężkości spadającego dipola.

$$= Mgv$$

Zauważmy, że wydzielana moc jest kwadratowo proporcjonalna do siły dipola, proporcjonalna do grubości ścianek (w zakresie stosowalności przybliżenia chudych ścianek) i mocno rosnąca wraz z malejącym promieniem rurki. Finalnie,

$$v = \frac{1024}{45} \frac{Mga^4}{\mu_0^2 m^2 \sigma D}$$

Wniosek jest taki, że do ulubionego eksperymentu prof. Wysmołka najlepiej wziąć bardzo małą, ale możliwie (rozsądnie) grubą rurkę i silny magnes.

Zastanówmy się jeszcze nad faktem nieuwzględnienia samoindukcji. Ona daje wkłady proporcjonalne do $1/c$ (albo mniejsze?), ale w naszym modelu i tak przyjmowaliśmy de facto $c \rightarrow \infty$, więc nie musimy się tym szczególnie przejmować.

Dodatek do zadania 2 Policz jeszcze raz tę nieładną całkę przez residua.

$$F = \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^5} d\xi$$

Niech $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, gdzie $\Gamma_1 = [-R, R] \times \{0\}$ i $\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R \wedge y \geq 0\}$ (kontur półokrąg). Wówczas,

$$f(z) = \frac{z^2}{(1 + z^2)^5} = \frac{z^2}{(z + i)^5(z - i)^5}$$

$$F = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} \right) f(z) dz$$

ponieważ ze standardowych szacowań, całka po Γ_2 zanika przy $R \rightarrow \infty$. Żeby nie być gołosłownym, po szybkich przekształceniach,

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R^3}{(1 - R^2)^5} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Z drugiej strony,

$$F = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f(z)$$

$z = i$ jest biegunem rzędu 5, zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_i f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} [(z - i)^5 f(z)] = \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^4}{dz^4} \frac{z^2}{(z + i)^5} \\ &= \frac{1}{24} \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1680z^2}{(z + i)^9} - \frac{1680z}{(z + i)^8} + \frac{360}{(z + i)^7} \right] = -\frac{1}{24} \frac{15i}{32} \end{aligned}$$

Stąd,

$$F = -2\pi i \frac{5i}{256} = \frac{5\pi}{128}$$

Jedynym bolesnym momentem było różniczkowanie prostej funkcji wymiernej, które i tak każdy by robił w wolframie lub policzył to z 5 razy w czasie poświęconym na wymyślanie podstawień trygonometrycznych.