# Elektrodynamika i podstawy optyki

*Notatki z ćwiczeń*

Wykładowcy:
prof. Krzysztof Turzyński

Skryba:
Szymon Cedrowski

# Spis treści

**1 Elektrostatyka** **4**
Ćwiczenia 1: Laplace w kartezjańskich . . . . . 4
Ćwiczenia 2: Laplace w cylindrycznych, Green . . . . . 6
Ćwiczenia 3: Green dla sfery, Laplace w sferycznych dla symetrii osiowej . . . 12
Ćwiczenia 4: Sfery dielektryczne, pole zewnętrzne . . . . . 14

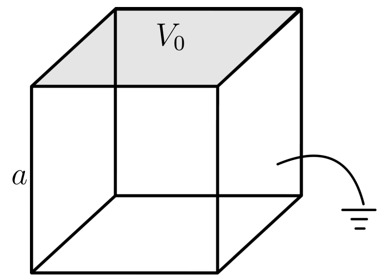
**2 Magnetostatyka** **20**
Ćwiczenia 5: Dipol magnetyczny, warunki sklejania . . . . . 20
Ćwiczenia 6: Indukcja wzajemna, tensor napięć . . . . . 23
Ćwiczenia 7: Przepływ prądu, prądy wirowe . . . . . 29

# Rozdział 1

# Elektrostatyka

## Ćwiczenia 1: Laplace w kartezjańskich

**Zadanie 1** Mamy sześcian o długości boku $a$, którego górna ścianka ma potencjał $V_0$, pozostałe są uziemione. Szukamy rozkładu potencjału w środku sześcianu. 06 paź 2021




Rysunek 1.1: Sześcian

Równaniem Laplaca można szukać rozkładu pola w pustej przestrzeni (przy zerowej gęstości ładunku). Tutaj przestrzeń jest pusta. Rozwiązujemy $\Delta V = 0$ we współrzędnych kartezjańskich.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V(x, y, z) = 0$$

To można rozwiązać metodą separacji zmiennych przez postulat $V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Po podstawieniu do równania i podzieleniu przez $V$ (można bo zero na podrozmaitości wymiaru 2 w $\mathbb{R}^3$ nas nie martwi (zbiór miary zero), natomiast jeśli zero byłoby w obszarze wymiaru 3, rozwiązanie rozszerza się do zera) i będziemy mieć

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Każdy z 3 składników musi być równy pewnej stałej, które w każdym punkcie $\mathbb{R}^3$ dodają się do zera.

$$\frac{X''}{X} = \begin{cases} \alpha^2 \\ -\alpha^2 \\ 0 \end{cases}$$

Jeśli po prawej stronie jest 0 to wówczas $X(x) = A + Bx$. Nie da się dla funkcji liniowej wyzerować tej funkcji dla dwóch różnych argumentów. Z uwagi na warunki brzegowe, to rozwiązanie jest nieakceptowalne. Poza tym, z symetrii wiadomo, że $Y''/Y = 0$, zatem $Z''/Z = 0$. To równouprawnienie wszystkich kierunków powoduje zgrzyt z warunkami brzegowymi.

Jeśli po prawej stronie jest stała dodatnia, to $X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$, na płaszczyźnie $x = 0$ ma być zerowe, zatem $A = -B$ i stąd $X(x) = C \sinh(\alpha x)$. Podstawiając $x = a$ widzimy, że $\sinh(\alpha a) = 0$ czyli $\alpha = 0$. Rozwiązanie jest więc niedobre.

Jeśli po prawej stronie jest stała ujemna, to $X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$. Da się wyzerować to w wielu miejscach. Z warunków na zerowych ściankach, $A = 0$, $B \sin \alpha a = 0$ zatem $\alpha a = n\pi$ dla $n \in \mathbb{N}$. Koniec końców,

$$\begin{aligned}
\frac{X''}{X} &= -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\
\frac{Y''}{Y} &= -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \\
\frac{Z''}{Z} &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + m^2)
\end{aligned}$$

Stąd,

$$V(x, y, z) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}_+} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh\left(\frac{\pi z\sqrt{n^2 + m^2}}{a}\right)$$

Sumujemy tylko po dodatnich naturalnych, gdyż sin i sinh są symetryczne, a dla $n, m = 0$ człon się i tak zeruje. Zostaje warunek brzegowy.

$$V(x, y, a) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}_+} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 + m^2}\right) = V_0$$

Funkcje w tym szeregu tworzą ortogonalny układ liniowy, zatem $A_{nm} \sim \langle V_{nm}|V\rangle$.

$$\begin{aligned}
\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y\, V(x, y, a) \sin\frac{n'\pi}{a}x \sin\frac{m'\pi}{a}y = \sum_{n,m}^{\infty} &\int_0^a \mathrm{d}x \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{n'\pi}{a}x \cdot \\
&\cdot \int_0^a \mathrm{d}y \sin\frac{m\pi}{a}y \sin\frac{m'\pi}{a}y \cdot A_{nm} \sinh \pi\sqrt{n^2 + m^2} \\
&\overset{!}{=} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y\, V_0 \sin\frac{n'\pi}{a}x \sin\frac{m'\pi}{a}y
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\frac{a^2}{4} A_{n'm'} \sinh \pi\sqrt{n'^2 + m'^2} = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y\, V_0 \sin\frac{n'\pi}{a}x \sin\frac{m'\pi}{a}y$$

Naturalnie,

$$\int_0^a \mathrm{d}x \sin\frac{n\pi}{a}x = \begin{cases} \dfrac{2a}{n\pi} & n \mod 2 = 1 \\ 0 & n \mod 2 = 0 \end{cases}$$

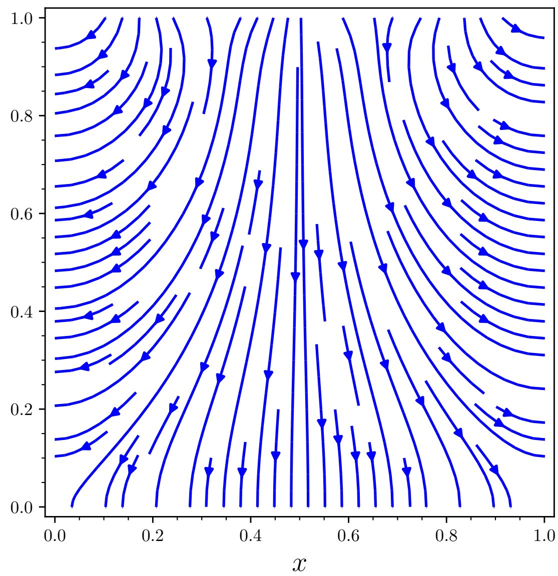
Zatem,

$$A_{nm} = \begin{cases} \dfrac{V_0}{\sinh \pi\sqrt{n^2+m^2}} \dfrac{16}{nm\pi^2} & n, m \mod 2 = 1 \\ 0 & \text{w innym razie} \end{cases}$$

Finalnie, po podstawieniu jawnej nieparzystości parametrów,

$$V(x,y,z) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{16V_0}{(2n+1)(2m+1)\pi^2} \frac{\sinh \frac{\pi}{a} z\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}}{\sinh \pi\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}} \cdot \\ \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi x}{a} \sin\frac{(2m+1)\pi y}{a}$$

Rogi sześcianu w tym problemie i tak odznaczały się nieciągłością potencjału, zatem nieskończonościami w polu. Nie przeszkadza nam więc, że podchodząc różnymi drogami do rogu dostajemy różne przejścia graniczne potencjału. Po prostu i tak szukaliśmy rozwiązania wewnątrz sześcianu.



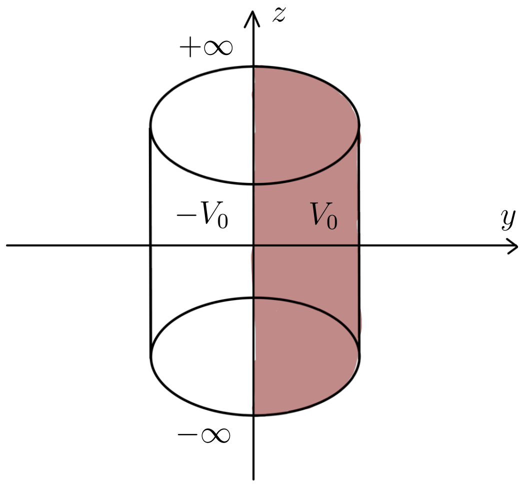

Rysunek 1.2: Wykres linii pola w płaszczyźnie $y = a/2$ dla $a = 1$, obliczony z pierwszych 9 wyrazów szeregu zadającego $V$.

**Zadanie 2** Mamy nieskończoną tubę o przekroju będącym kwadratem o boku $a$. Podobnie jak poprzednio, górne denko ma potencjał $V_0$, pozostałe uziemione. Omówmy to jakościowo.

Nie ma warunku brzegowego $V(z=0)=0$. Wiadomo było, że $Z = Ae^{\beta z} + Be^{-\beta z}$. Tym razem zagadnienie trzeba potraktować idąc z $z$ do $-\infty$. Życzylibyśmy sobie, żeby $V(z) \xrightarrow{z\to-\infty} 0$. Ponieważ ładunek efektywnie obejmuje skończony obszar przestrzeni, właściwa asymptotyka jest właśnie taka. Stąd, $Z = Ae^{\beta z}$.

# Ćwiczenia 2: Laplace w cylindrycznych, Green

13 paź 2021 **Zadanie 1** Mamy walec nieskończony o promieniu $R_0$, którego oś pokrywa się osią $z$. Potencjał na walcu na $y > 0$ wynosi $V_0$, a po stronie $y < 0$ wynosi $-V_0$.




Rysunek 1.3: Nieskończony walec w przekroju poprzecznym.

Mamy spełnione równanie Laplaca dla potencjału:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Potencjał nie zależy od $z$ z symetrii. Zostaje funkcja zależąca od dwóch zmiennych. Szukamy rozwiązań postaci $V(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$.

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R}(\rho) + \frac{\Phi''}{\Phi}(\phi) = 0$$

Teraz zaczyna się zabawa.

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \begin{cases} n^2 \\ -n^2 \\ 0 \end{cases}$$

W przypadku $-n^2$ dostajemy $\Phi(\phi) = A\sin n\phi + B\cos n\phi$. Chcemy oczekiwać ciągłości i różniczkowalności (bo nie chcemy ładunku powierzchniowego co oznaczałby skok pola). To nam da $n \in \mathbb{N}$. Przypadek $n^2$ jest nieakceptowalny ze względu na nieokresowość funkcji hiperbolicznych. Przypadek z $n = 0$ daje $\Phi = A + B\phi$, z okresowości $B = 0$. Tutaj zastosowania ten przypadek mieć nie będzie, bo u nas jawnie potencjał jest zależny od kąta. W ogólności natomiast byłby to dopuszczalny przypadek, w tych współrzędnych nie prowadzi on do zerowego potencjału jak poprzednio. Zostajemy więc z równaniem radialnym:

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} = n^2$$

Postulujmy rozwiązanie postaci $R(\rho) \sim \rho^\alpha$, stąd

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)+\alpha &= n^2 \\ \alpha^2 &= n^2 \end{aligned}$$

Stąd $\alpha = n$ lub $\alpha = -n$.

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$$

Trzeba jeszcze rozważyć $n = 0$. Wówczas, $\Phi(\phi) = B$ oraz $R(\rho) = C + D\log\rho$.

$$V(\rho,\phi) = C + D\log\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n + D_n\rho^n)(A_n\sin n\phi + B_n\cos n\phi)$$

Interesuje nas potencjał wewnątrz walca. W środku rury nie ma ładunków, nie powinniśmy oczekiwać żadnych osobliwości. $\log\rho$ ma osobliwość w zerze, sygnalizowałoby to obecność potencjału od linii naładowanej w środku walca. Żegnamy się również z wkładem $D_n\rho^{-n}$. Ponadto, szukamy tylko rozwiązań antysymetrycznych ze względu na odbicie o $\pi$, bo mamy skok potencjału na brzegu z $V_0$ do $-V_0$.

$$V(\rho,\phi) = -V(\rho, 2\pi-\phi)$$

To pozwala na usunięcie kawałka $A_n\cos n\phi$. Akurat w tym przypadku możemy też wywalić tę stałą, bo ona jest nieczuła na tę wspomnianą antysymetrię. I tak musi wyjść zerowa. W ogólności nie można jej usunąć, bo jest potrzebna do uzgodnienia warunków brzegowych zadanych przez wartość potencjału.

$$V(\rho,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\rho^n\sin n\phi$$

Mamy ogólne rozwiązanie zgodne z generalnymi symetriami narzucanymi w oczywisty sposób przez warunki brzegowe. Teraz chcemy nałożyć te warunki i wyznaczyć pozostałe stałe $a_n$. Zakładamy, że walec ma promień $R_0$. Warunek brzegowy to:

$$V(R_0,\phi) = \begin{cases} V_0 & \phi\in(0,\pi) \\ -V_0 & \phi\in(\pi,2\pi) \end{cases}$$

$\sin n\phi$ tworzą układ ortogonalny, więc używamy tego faktu.

$$\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_nR_0^n\sin n\phi\sin n'\phi\,\mathrm{d}\phi = \pi a_{n'}R_0^{n'}$$

Z drugiej strony, jest to równe wyrażeniu

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} V_0\sin n'\phi\,\mathrm{d}\phi - \int_\pi^{2\pi} V_0\sin n'\phi\,\mathrm{d}\phi &= \frac{V_0}{n'}\left(-\cos n'\phi\Big|_\pi^0 + \cos n'\phi\Big|_{2\pi}^0\right) \\ &= \frac{2V_0}{n'}(1-\cos n'\pi) = \frac{2V_0}{n'}\left[1-(-1)^{n'}\right] \\ &= \begin{cases} \dfrac{4V_0}{n'} & n' \mod 2 = 1 \\ 0 & n' \mod 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Stąd,

$$a_{2m+1} = \frac{4V_0}{\pi(2m+1)R_0^{2m+1}}$$

A reszta współczynników się zeruje. Finalnie,

$$V(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4V_0}{\pi(2n+1)} \frac{\rho^{2n+1}}{R_0^{2n+1}} \sin(2n+1)\phi$$

Ten szereg jest nawet sumowalny. Zauważmy, że $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Współczynniki szeregu są rzeczywiste, więc

$$V(\rho,\phi) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{\rho e^{i\phi}}{R_0}\right)^{2n+1}$$

Przypomnijmy sobie rozwinięcia logarytmów,

$$\begin{aligned} \log(1+\varepsilon) &= \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \cdots \\ \log(1-\varepsilon) &= -\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \cdots \end{aligned}$$

Po odjęciu stornami dostaniemy

$$\log(1+\varepsilon) - \log(1-\varepsilon) = 2\varepsilon + \frac{2}{3}\varepsilon^3 + \frac{2}{5}\varepsilon^5 + \cdots$$

Stąd,

$$V(\rho,\phi) = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{1 + \frac{\rho e^{i\phi}}{R_0}}{1 - \frac{\rho e^{i\phi}}{R_0}}$$

Zauważmy, że $\log\big(Re^{i\phi}\big) = \log R + i\phi$. Mnożymy licznik i mianownik przez sprzężenie zespolone mianownika,

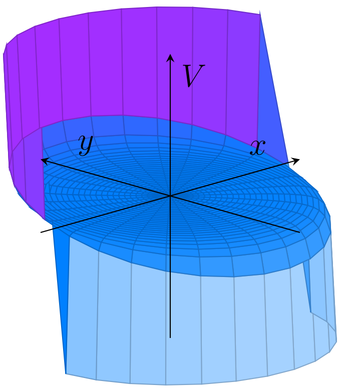
$$= \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{1 - \frac{\rho^2}{R_0^2} + \frac{\rho}{R_0}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})}{\left|1 - \frac{\rho e^{i\phi}}{R_0}\right|^2} =$$

Teraz widać jasno część rzeczywistą i urojoną pod logarytmem. Trzeba to zapisać w postaci $Re^{i\Phi}$.

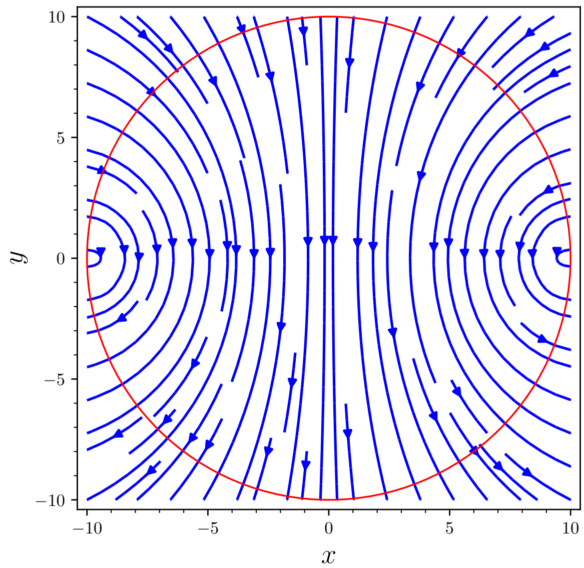
$$\tan\Phi = \frac{2\frac{\rho}{R_0}\sin\phi}{1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}}$$

Stąd,

$$V(\rho,\phi) = \frac{2V_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{2\frac{\rho}{R_0}\sin\phi}{1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}}$$




Rysunek 1.4: $V(x, y)$ wewnątrz cylindra. Wyraźnie widać, że największe pole (największy skok potencjału) jest przy ściankach, wewnątrz cylindra szybko zanika.




Rysunek 1.5: Wykres linii pola w płaszczyznach poziomych dla $R_0 = 10$.

**Zadanie 2** Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że potencjał elektrostatyczny dany wzorem Coulomba

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

spełnia równanie Poissona

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

By brute force,

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

Dowód, że $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(0)$ w sensie dystrybucyjnym znajduje się w notatkach z Analizy 3R.

Można jeszcze zrobić inaczej,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \operatorname{div}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \left(\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\right)\mathrm{d}^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{grad}'\rho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'
\end{aligned}
$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości $\operatorname{div}(\phi\mathbf{A}) = \phi\operatorname{div}\mathbf{A} + (\operatorname{grad}\phi)\cdot\mathbf{A}$. Całkujemy teraz po małej (epsilonowej) kólce, korzystamy z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego,

$$
= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{grad}'\rho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'
$$

Druga całka da zero w granicy kulki dążącej do zera (bo to całka z rzutu pola wektorowego na stały kierunek + wyższe pochodne). Pierwsza całka jest trywialna.

$$
= -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}
$$

**Zadanie 3** Mamy uziemioną kulę. Wewnątrz kuli, w odległości $d$ od środka umieszczamy ładunek $q$. Jakie będzie pole wewnątrz kuli?

Można to rozwiązywać metodą obrazów z ładunkiem inwersyjnym. Ale możemy się tym zająć ogólnie metodą funkcji Greena.

> Jeśli mamy typowego ziemniaka $V$ z zadanym potencjałem $V(\mathbf{r}')$ na $\partial V$, to zachodzi
>
> $$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\rho(\mathbf{r}')G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}V(\mathbf{r}')\frac{\partial G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{n}'}\,\mathrm{d}\sigma'$$
>
> Gdy patrzymy na wnętrze $V$, wektor $\mathbf{n}$ wskazuje na zewnątrz i $\mathcal{V} = V$, natomiast gdy patrzymy na zewnętrze $V$, wektor normalny wskazuje do środka $V$ i $\mathcal{V} = V'$. $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0$ dla $\mathbf{r}' \in \partial V$.
>
> $$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$
>
> gdzie $F_D$ spełnia równanie Laplaca $\nabla^2 F_D = 0$.

Z metody obrazów,

$$
V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|}\underbrace{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{R}{d}q}{\left|\mathbf{r}-\frac{R^2}{d^2}\mathbf{d}\right|}}_{\substack{\text{spełnia równanie Laplaca}\\ \text{wewnątrz sfery}}}
$$

Jeśli pod $q/(4\pi\varepsilon_0)$ podstawimy 1, dostaniemy funkcję Greena zerującą się na sferze. Stąd, natychmiast można ją włożyć do wyrażenia na potencjał i zastosować do dowolnego problemu, gdzie dane są warunki brzegowe na sferze. Zatem ogólnie, dla sfery

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{\frac{R}{|\mathbf{r}'|}}{\left|\mathbf{r} - \frac{R^2}{|\mathbf{r}'|^2}\mathbf{r}'\right|}$$

## Ćwiczenia 3: Green dla sfery, Laplace w sferycznych dla symetrii osiowej

**Zadanie 1** Sfera o promieniu $R$ jest naładowana potencjałem $+V_0$ dla $z > 0$ i $-V_0$ dla $z < 0$. Zapisać wzór na $V(\mathbf{r})$ wewnątrz sfery przy użyciu funkcji Greena, wyznaczyć potencjał w punktach $(0,0,z)$ dla $z \in (-R, R)$. 20 paź 2021

Musimy policzyć $\partial G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')/\partial\mathbf{n}'$, gdzie $\mathbf{n} = \hat{e}_r$. Użyjemy też twierdzenia cosinusów do zapisania tych modułów,

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} - \frac{\frac{R}{r'}}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - \frac{2rR^2}{r'}\cos\theta}}$$

W takim razie,

$$\frac{\partial G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{n}'} = \frac{\partial G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial r'} = \frac{r\cos\theta - r'}{\left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta\right)^{3/2}} + R\frac{r^2 - \frac{rR^2}{r'}\cos\theta}{r'^2\left(r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - \frac{2rR^2}{r'}\cos\theta\right)^{3/2}}$$

Całkujemy to po powierzchni sfery $r' = R$, zatem po obcięciu

$$\left.\frac{\partial G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial\mathbf{n}}\right|_S = \frac{\frac{r^2}{R} - R}{\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta\right)^{3/2}}$$

Uwaga! $\theta = \theta(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, jest to kąt między wektorami $\mathbf{r},\mathbf{r}'$ a nie kąt biegunowy. Tak więc musimy podjąć się karkołomnego zadania wyrażenia tego kąta $\theta$ w układzie sferycznym $(r,\vartheta,\varphi)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \\
\mathbf{r}' &= \left(r'\cos\varphi'\sin\vartheta', r'\sin\varphi'\sin\vartheta', r'\cos\vartheta'\right) \\
\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{rR} &= \frac{rR\cos\varphi\sin\vartheta\cos\varphi'\sin\vartheta' + rR\sin\varphi\sin\vartheta'\sin\varphi'\sin\vartheta'}{rR} + \frac{rR\cos\vartheta\cos\vartheta'}{rR}
\end{aligned}$$

Używając tożsamości $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$,

$$= \cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')$$

Finalnie, jesteśmy gotowi by zapisać potencjał. Pierwsza całka zanika, gdyż $\rho(\mathbf{r}) = 0$.

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) = \frac{V_0}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\, &\frac{R^2\sin\vartheta'\left(R - \frac{r^2}{R}\right)}{\left[r^2 + R^2 - 2rR\left(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')\right)\right]^{3/2}} \\
- \frac{V_0}{4\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\vartheta'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\, &\frac{R^2\sin\vartheta'\left(R - \frac{r^2}{R}\right)}{\left[r^2 + R^2 - 2rR\left(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')\right)\right]^{3/2}}
\end{aligned}$$

Wow! Jaka niesamowita formuła! Po zamianie zmiennych $\vartheta' \mapsto \pi - \vartheta'$ w drugiej całce, otrzymujemy

$$V(\mathbf{r}) = \frac{V_0 R^3}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi' \sin\vartheta' \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{\Big[r^2 + R^2 - 2rR\big(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')\big)\Big]^{3/2}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Big[r^2 + R^2 + 2rR\big(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')\big)\Big]^{3/2}} \right\}$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć pole na osi $z$: $\mathbf{r} = (0, 0, z)$. Tłumaczy się to na warunek $\vartheta = 0$ lub $\vartheta = \pi$. Wówczas w całce wyrażenie podcałkowe zawierające $\varphi'$ znika i zostajemy z

$$V(z) = \frac{V_0 R^3}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\vartheta'\, 2\pi \sin\vartheta' \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) \left[ \frac{1}{(z^2 + R^2 - 2zR\cos\vartheta')^{3/2}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(z^2 + R^2 + 2zR\cos\vartheta')^{3/2}} \right]$$

Dla $\vartheta = \pi$ będzie przeciwny znak.

**Zadanie 2** Rozważmy kulę z przewodnika z wnęką w środku i ładunkiem (dodatnim) w tej wnęce. Jaki jest potencjał na zewnątrz?

Pole w przewodniku musi być zerowe (zatem potencjał co najwyżej stały). Przy wnęce wyindukuje się więc ładunek ujemny, a na powierzchni kuli ładunek dodatni (równomiernie). Rozkład ładunku będzie równomierny, gdyż pole przy powierzchni musi być prostopadłe do kuli (styczne pole oznacza prąd w przewodniku), a stąd prawo Gaussa dyktuje jednorodność. Zatem na zewnątrz kuli

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Co jeśli byłaby kula z wnęką umieszczona w zewnętrznym polu? Czy na brzegu wnęki coś się wyindukuje? Otóż nie, w naszym przypadku ładunki się indukują, żeby pole w przewodniku było zerowe. Z twierdzenia o jednoznaczności, wnęka nic nie zmieni jeśli na zewnątrz będzie pole elektryczne, nie wyindukują się więc ładunki.

Jeśli problem nie zależy od współrzędnej radialnej $\rho$, to możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania Laplace'a (w obszarze bez ładunku):

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(1-x^2\right)^l$$

Przy okazji pamiętamy również, że dla $|\mathbf{r}| < |\mathbf{r}'|$ mamy

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{r'^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

**Zadanie 3** Rozważmy uziemioną kulę z przewodnika o promieniu $R$ (umieszczoną w środku układu współrzędnych). Nad kulą w odległości $z$ umieszczono ładunek $q$. Podać potencjał na zewnątrz kuli.

Mamy tylko jeden ładunek punktowy, więc obszar na zewnątrz da się podzielić na dwa tak, żeby ładunek był na ich wspólnym brzegu. Niech $\mathcal{O}_1 = \{\mathbf{r}\colon R < |\mathbf{r}| < z\}$, a $\mathcal{O}_2 = \{\mathbf{r}\colon |\mathbf{r}| > z\}$. Wówczas mamy dwie części rozwiązania, które sklejamy warunkiem brzegowym w $q$.

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) & \mathbf{r}\in\mathcal{O}_1 \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) & \mathbf{r}\in\mathcal{O}_2 \end{cases}$$

Stałe $A, B$ wyznaczają warunki brzegowe na kuli i w $q$, natomiast znikanie potencjału w nieskończoności indukuje znikanie pierwszego członu w drugim rozwiązaniu a stałą $C$ wyznaczamy z warunku brzegowego w $q$ i ciągłości na brzegu obszarów.

## Ćwiczenia 4: Sfery dielektryczne, pole zewnętrzne

27 paź 2021

Prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

Po zamianie zmiennych,

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

co oznacza, że wielomiany Legendre'a tworzą ortogonalny, zupełny układ liniowy.

**Zadanie 1** Rozważmy uziemioną kulę z przewodnika o promieniu $R$ (umieszczoną w środku układu współrzędnych). Nad kulą w odległości $z$ umieszczono ładunek $q$. Podać potencjał na zewnątrz kuli.

Mamy tylko jeden ładunek punktowy, więc obszar na zewnątrz da się podzielić na dwa tak, żeby ładunek był na ich wspólnym brzegu. Niech $\mathcal{O}_1 = \{\mathbf{r}\colon R < |\mathbf{r}| < z\}$, a $\mathcal{O}_2 = \{\mathbf{r}\colon |\mathbf{r}| >$

$z\}$. Wówczas mamy dwie części rozwiązania, które sklejamy warunkiem brzegowym w $q$.

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) & \mathbf{r} \in \mathcal{O}_1 \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) & \mathbf{r} \in \mathcal{O}_2 \end{cases}$$

gdzie $V_0$ jest zwykłym potencjałem od ładunku:

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - z\hat{e}_z|}$$

Stałe $A, B$ wyznaczają warunki brzegowe na kuli i w $q$, natomiast znikanie potencjału w nieskończoności indukuje znikanie pierwszego członu w drugim rozwiązaniu a stałą $C$ wyznaczamy z warunku brzegowego w $q$ i ciągłości na brzegu obszarów.

DO UZUPEŁNIENIA DRUGIE PODEJŚCIE UŻYWANE PONIŻEJ (wyodrębnienie potencjału od ładunku + Laplace na zewnątrz sfery)

Warunek brzegowy na sferze to $V(R, \theta) = 0$. Przy założeniu, że $r < z$ możemy napisać, że

$$V(r,\theta) \overset{r\leq z}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{z^{l+1}} P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Akurat się miło składa, że $\theta$ jest tym samym kątem co z układu współrzędnych. Teraz podstawiamy warunek brzegowy,

$$0 = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Teraz chcemy zastosować ortogonalność $P_l(\cos\theta)$. Mamy szereg bezwzględnie zbieżny (jest w zasadzie jak geometryczny), więc możemy z całką wejść pod szereg.
Zasadniczo na tej linijce można już poprzestać, bo wielomiany $P_l$ tworzą układ zupełny, zatem każda funkcja ma w nich jednoznaczną reprezentację. Po lewej stronie jest zero, więc wszystkie współczynniki przy $P_l$ muszą być zerowe. Jednakże, można na około,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} \\ 0 &= \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^{l'}}{z^{l'+1}} + \frac{B_{l'}}{R^{l'+1}} \right) \frac{2}{2l'+1} \end{aligned}$$

Stąd wyznaczmy stałe,

$$B_l = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}}$$

Finalnie, dla $r < z$,

$$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r^l}{z^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

natomiast dla $r > z$,

$$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z^l}{r^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

Stąd można odczytać ładunek inwersyjny w metodzie obrazów. Drugi człon potencjału $V_1(\mathbf{r})$ musiałby być postaci:

$$V_1(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z'^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

Tak też jest!

$$\begin{aligned} &= -\frac{q\frac{R}{z}}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{R^2}{z}\right)^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \\ &= -\frac{q\frac{R}{z}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\mathbf{r} - \frac{R^2}{z}\hat{e}_z\right|} \end{aligned}$$

Stąd ładunek inwersyjny wynosi $q' = -qR/z$ a odległość inwersyjna to $z' = R^2/z$.

**Zadanie 2** Mamy zwykły układ współrzędnych kartezjańskich z kulą o promieniu $R$, zrobioną z dielektryka o przenikalności względnej $\varepsilon$. Na osi w odległości $z$ jest umieszczony ładunek $q$. Znaleźć potencjał i pole w środku kuli, na zewnątrz oraz ładunek powierzchniowy wyindukowany na kuli.

W środku gęstość objętościowa ładunku jest zerowa, jedynie mamy wytworzone powierzchniowe ładunki związane, zatem zarówno w środku jak i na zewnątrz można rozwiązać równanie Laplace'a.

$$V_{\text{zew}}(r,\theta) \stackrel{R<r<z}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

W środku bierzemy natomiast te wyrazy rozwiązania ogólnego, które nie są osobliwe w centrum.

$$V_{\text{wew}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

Możemy zapisać pierwszy warunek sklejenia: $\mathbf{E}^{\|}_{\text{wew}}(r \to R) = \mathbf{E}^{\|}_{\text{zew}}(r \to R)$, natomiast ten warunek oznacza po prostu ciągłość potencjału $V_{\text{wew}}(R,\theta) = V_{\text{zew}}(R,\theta)$. Potrzebny jest drugi warunek. W przypadku dielektryków z liniową odpowiedzią, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$. Warunek na indukcję wyraża się wówczas przez $\mathbf{D}^{\perp}_{\mathrm{zew}} - \mathbf{D}^{\perp}_{\mathrm{wew}} = \sigma_{\mathrm{sw}}$. W naszym przypadku ładunków swobodnych nie ma, jedynie te wyindukowane, zatem $\mathbf{D}^{\perp}_{\mathrm{wew}}(r \to R) = \mathbf{D}^{\perp}_{\mathrm{zew}}(r \to R)$. Oznacza to dokładnie, że

$$\varepsilon \frac{\partial V_{\mathrm{wew}}}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\partial V_{\mathrm{zew}}}{\partial r}\bigg|_{r=R}$$

Pierwszy warunek w tym zadaniu tłumaczy się na zapis:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^l}{z^{l+1}} + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta)$$

Drugi warunek, po różniczkowaniu

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} l \frac{R^{l-1}}{z^{l+1}} - (l+1) \frac{B_l}{R^{l+2}} \right) P_l(\cos\theta) = \varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} A_l l R^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

Możemy (z zupełności) przyrównać współczynniki przy tych kombinacjach liniowych.

$$\begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{R^l}{z^{l+1}} + \dfrac{B_l}{R^{l+1}} = A_l R^l \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{R^l}{z^{l+1}} - \dfrac{l+1}{l} \dfrac{B_l}{R^{l+1}} = \varepsilon A_l R^l \end{cases}$$

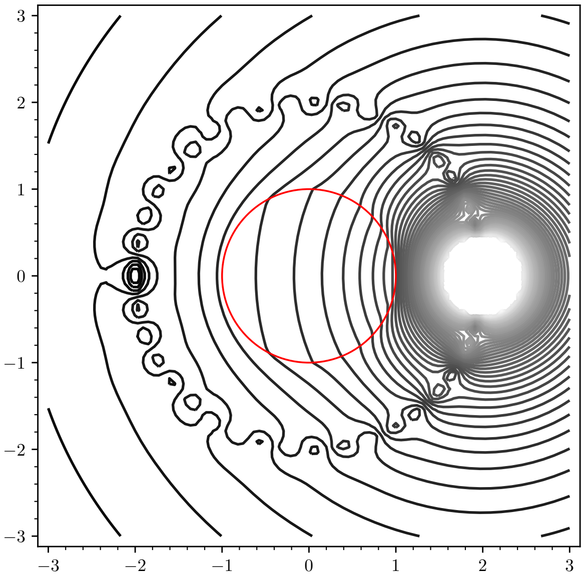
Otrzymaliśmy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Stąd,

$$\begin{aligned} B_l &= -\frac{q(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}} \frac{l}{l(\varepsilon+1)+1} \\ A_l &= -\frac{2l+1}{l(\varepsilon-1)} \frac{B_l}{R^{2l+1}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{z^{l+1}} \frac{2l+1}{l(\varepsilon+1)+1} \end{aligned}$$

To już można podstawić do końcowego wzoru otrzymując ostateczny wynik.

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{zew}}(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{r^l}{z^{l+1}} - \frac{(\varepsilon-1)R^{2l+1}}{z^{l+1} r^{l+1}} \frac{l}{l(\varepsilon+1)+1} \right] P_l(\cos\theta) \\ V_{\mathrm{wew}}(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l(\varepsilon+1)+1} \frac{r^l}{z^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

Jak się dowiedzieć czy to ma sens? (Czy się nie pomyliliśmy?) Weźmy przypadek graniczny $\varepsilon = 1$. Wówczas rozwiązanie wewnętrzne staje się takie samo jak rozwiązanie zewnętrzne, będące rozwiązaniem od ładunku punktowego, tak jakby zamieniono dielektryk na próżnię. Zgadza się.
Jeśli $\varepsilon \to \infty$, to wewnątrz mamy stały zerowy potencjał (nieudany przewodnik stał się przewodnikiem, który już pola nie wpuszcza). Pole zewnętrzne redukuje się do poprzedniego zadania.




Rysunek 1.6: Wykres linii ekwipotencjalnych, wykonany z pierwszych 10 wyrazów rozwinięcia. Wyraźnie widać pole wchodzące do dielektryka.

**Zadanie 3** Rozważmy kulę z materiału dielektrycznego z wydrążoną współśrodkową dziurą. Promień wewnętrzny ma promień $R_1$, zewnętrzny $R_2$. Materiał ma stałą dielektryczną $\varepsilon$. Wsadziliśmy ten obiekt w jednorodne pole elektryczne $\mathbf{E}_0$ (zostało więc jakoś zaburzone). Ile wynosi pole wewnątrz tej powłoki?

Jest to problem osiowosymetryczny, z osią symetrii $z$. Problem się skomplikował, gdyż mamy 3 obszary zainteresowania, na zewnątrz kuli (I), w powłoce (II) i w wydrążonej dziurze (III). W (I) rozwiązanie pochodzące od kuli znika asymptotycznie w nieskończoności, trzeba dodać potencjał od $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{e}_z$, wynoszący $V_0 = -E_0 z$.

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{I}}(r,\theta) &= -E_0 r\cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \\ &= -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

W obszarze (II) będzie pełne rozwiązanie ogólne,

$$V_{\mathrm{II}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

W obszarze (III) nie może być osobliwości w zerze, więc

$$V_{\mathrm{III}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

Wyraz z $V_0$ już się nie pojawia bo w wyrażeniach na (II), (III) są wyrazy z $P_1(\cos\theta)$, które zmieszczą ten element w stałych.

Prostackie oświecone zgadnięcie stałych byłoby dostateczne z twierdzenia od jednoznaczności. Z intuicji, w dziurze (III) pole będzie de facto stałe więc moglibyśmy odgadnąć $V_{\mathrm{III}} = A_1 r \cos\theta$. Można pójść dalej za ciosem i odważnie odgadnąć, że we wszystkich obszarach odpowiedź układu na pobudzenie liniowym potencjałem jest wciąż tylko w $l = 1$ (wielomiany Legendre'a występują tylko w kombinacjach liniowych). Wówczas,

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{I}} &= \left(\frac{B_1}{r^2} - E_0 r\right)\cos\theta \\ V_{\mathrm{II}} &= \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2}\right)\cos\theta \\ V_{\mathrm{III}} &= A_1 r \cos\theta \end{aligned}$$

Stąd dostalibyśmy warunki ciągłości w $R_1$ i $R_2$,

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{R_2^2} - E_0 R_2 &= C_1 R_2 + \frac{D_1}{R_2^2} \\ A_1 R_1 &= C_1 R_1 + \frac{D_1}{R_1^2} \end{aligned}$$

Oraz warunki na ciągłość indukcji,

$$\begin{aligned} -\frac{2B_1}{R_2^3} - E_0 &= \varepsilon\left(C_1 - \frac{2D_1}{R_2^3}\right) \\ A_1 &= \varepsilon\left(C_1 - \frac{2D_1}{R_1^3}\right) \end{aligned}$$

Jeśli ten układ uda się rozwiązać to znaczy, że nasze dzikie zgadniecie miało sens. Dla innych $l$ mielibyśmy jednorodny układ liniowy z 4 niewiadomymi. Jeśli tylko taki układ nie jest osobliwy to istnieje tylko jedno, zerowe rozwiązanie. Stąd podparcie intuicji zerowania się stałych dla $l > 0$. Tylko dla $l = 0$ pojawia się niejednorodność związana z $E_0$.

Rozwiązaniem układu jest:

$$A_1 = -\frac{9\varepsilon E_0}{(2+\varepsilon)(1+2\varepsilon) - 2(\varepsilon-1)^2 \frac{R_1^3}{R_2^3}}$$

Jakie jest to pole?
W środku jest to pole jednorodne.

Jakie są interesujące granice parametrów?
Gdy $\varepsilon = 1$, to pole w środku jest takie samo jak na zewnątrz.

Gdy $R_1 \to R_2$, wówczas $A_1 = -E_0$, zatem taka cienka skorupka dielektryczna nie ma wpływu na pole w całej przestrzeni. Przewodnik ekranował pole. Dielektryk może wytwarzać ograniczoną gęstość związanego ładunku powierzchniowego, jeśli jest cienki to ta gęstość będzie $\to 0$. Przewodnik może wytworzyć z definicji nieskończony ładunek sprzeciwiający się polu, dlatego ekranuje.

# Rozdział 2

# Magnetostatyka

## Ćwiczenia 5: Dipol magnetyczny, warunki sklejania

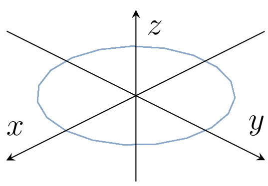
03 lis 2021

**Definicja 1** (Prawo Biote'a-Savarta).

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

gdzie wprowadzimy oznaczenie $\mathcal{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Źródłem pola jest tutaj płynący prąd $\mathbf{I}$, czyli ruch ładunku. Primami zawsze oznaczamy źródła, nieprimami punkt obserwacji.

**Zadanie 1** Rozważmy pętlę o promieniu $a$, w której płynie prąd antyzegarowo (Rys. 2.1). Znaleźć indukcję magnetyczną $\mathbf{B}$ we współrzędnych kartezjańskich, sferycznych oraz w granicy $a \to 0$, $I \to \infty$, $Ia^2\pi = m$ (model dipola magnetycznego).




Rysunek 2.1: Pętla z prądem.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{I} &= Ia\,\mathrm{d}\phi'\,\mathbf{e}_\phi = Ia\,\mathrm{d}\phi'\,(-\sin\phi'\,\mathbf{e}_x + \cos\phi'\,\mathbf{e}_y) \\
\mathbf{r} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \\
\mathbf{r}' &= a\cos\phi'\,\mathbf{e}_x + a\sin\phi'\,\mathbf{e}_y \\
\mathcal{R} &= (x - a\cos\phi')\mathbf{e}_x + (y - a\sin\phi')\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Teraz liczymy iloczyn wektorowy,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{I} \times \mathcal{R} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -Ia\sin\phi' & Ia\cos\phi' & 0 \\ x - a\cos\phi' & y - a\sin\phi' & z \end{vmatrix} \\
&= Iaz\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi'\,\mathbf{e}_x + Iaz\sin\phi'\,\mathrm{d}\phi'\,\mathbf{e}_y + Ia(a - y\sin\phi' - x\cos\phi')\,\mathrm{d}\phi'\,\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Podstawiamy do prawa Biote'a-Savarta,

$$d\mathbf{B} = \frac{Ia\mu_0 \, d\phi'}{4\pi} \frac{z\cos\phi' \, \mathbf{e}_x + z\sin\phi' \, \mathbf{e}_y + (a - y\sin\phi' - x\cos\phi')\mathbf{e}_z}{\left[(x - a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2\right]^{3/2}}$$

Całka po pętli to

$$\mathbf{B} = \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 Ia}{4\pi} \frac{z\cos\phi' \, \mathbf{e}_x + z\sin\phi' \, \mathbf{e}_y + (a - y\sin\phi' - x\cos\phi')\mathbf{e}_z}{\left[(x - a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2\right]^{3/2}} \, d\phi'$$

Interesuje nas granica dipola, więc chcielibyśmy przejść z granicą $a \to 0$, jednak posługując się heurystycznymi argumentami, całka się wtedy wyzeruje, więc szacowaliśmy za grubo. Ale jeśli rozwiniemy to w szereg, widzimy że licznik jest rozwinięty do pierwszego rzędu w $a$, trzeba to samo zrobić z mianownikiem. Wyrazy kwadratowe wyprodukują w połączeniu z $Ia$ wyrazy sześcienne, co ostro ginie w granicy dipola ($Ia^2$ jest jeszcze skończone w granicy dipola, proporcjonalne do $m$). Dlatego rozwinięcie mianownika do wyrazu liniowego jest wystarczające.

$$\frac{1}{\left[(x - a\cos\phi')^2 + (y - a\sin\phi')^2 + z^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\left(1 - \frac{2ax\cos\phi' + 2ay\sin\phi'}{x^2+y^2+z^2} + \mathcal{O}(a^2)\right)^{3/2}}$$

Zauważmy, że $(1-\varepsilon)^{3/2} = 1 + 3\varepsilon/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$,

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(1 + 3\frac{ax\cos\phi' + ay\sin\phi'}{x^2+y^2+z^2} + \mathcal{O}(a^2)\right)$$

Wówczas,

$$\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\mu_0 Ia}{4\pi} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \left[(x^2+y^2+z^2) + 3(ax\cos\phi' + ay\sin\phi')\right] \cdot$$
$$\cdot \left[z\cos\phi' \, \mathbf{e}_x + z\sin\phi' \, \mathbf{e}_y + (a - y\sin\phi' - x\cos\phi')\mathbf{e}_z\right]$$

Zbieramy wyrazy proporcjonalne do $a^2$, cała reszta w granicy się scałkuje do zera.

$$\begin{aligned}
B^x &= \int_0^{2\pi} d\phi' \, \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \cdot \frac{3(x\cos\phi' + y\sin\phi')z\cos\phi'}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \pi \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \xrightarrow[I\to\infty]{a\to 0} \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
B^y &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
B^z &= \int_0^{2\pi} d\phi' \, \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \frac{(x^2+y^2+z^2) - 3(x\cos\phi' + y\sin\phi')^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} Ia^2 \frac{2\pi(x^2+y^2+z^2) - 3\pi(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&\xrightarrow[I\to\infty]{a\to 0} \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Chcielibyśmy jeszcze to samo napisać we współrzędnych sferycznych.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3\cos\phi\sin\theta\cos\theta \, \mathbf{e}_x + 3\sin\phi\sin\theta\cos\theta \, \mathbf{e}_y + (2\cos^2\theta - \sin^2\theta)\mathbf{e}_z\right] \\
&= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \frac{1}{r^3} [2\cos\theta \, \mathbf{e}_r + \sin\theta \, \mathbf{e}_\theta]
\end{aligned}$$

Formalnie, zrobiliśmy rozwinięcie multipolowe prawa Biote'a-Savarta do członu dipolowego.

W sytuacjach statycznych (a w zasadzie stacjonarnych),

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

Czasami są efekty materiałowe. W liniowych dielektrykach, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ z warunkami zszycia $(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- \mid \mathbf{t}) = 0$ i $(\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_- \mid \mathbf{n}) = 0$.
Natężenie pola magnetycznego można zapisać jako $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}$ wraz z warunkami zszycia $(\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_- \mid \mathbf{t}) = 0$ i $(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_- \mid \mathbf{n}) = 0$.

**Zadanie 2** (Specjalna metoda magnetostatyki) Weźmy wydrążoną kulę jak z poprzednich ćwiczeń, o promieniach $R_1$, $R_2$. Powłoka ma podatność (?) $\mu > 1$. Na zewnątrz kuli jest jednorodne pole magnetyczne $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Znaleźć indukcję magnetyczną w wydrążeniu.

W przypadku $\mathbf{j} = 0$ (będą tylko prądy związane, nie swobodne), pole magnetyczne jest bezrotacyjne, zatem istnieje potencjał skalarny i spełnione jest równanie Laplace'a dla tego potencjału – identyczne jak w przypadku z poprzednich ćwiczeń. Tym razem są pewnie jednak trochę inne warunki zszycia na brzegach. Reasumując, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \implies \mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi$ i $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0$. Stąd, biorąc poprzednie rozwiązanie równania Laplace'a,

$$\mathbf{B}_{\text{wew}} = \mathbf{B}_0 \frac{9\mu}{(1+2\mu)(2+\mu) - 2(\mu-1)^2 \frac{R_1^3}{R_2^3}}$$

Zauważmy, że tym razem w powłoce ograniczonej promieniami $R_1$, $R_2$, dla $\mu > 1$ pole zostaje wzmocnione, bo $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$. Materiał magnetyczny będzie wciągał linie pola.

**Uwaga** Rozważmy funkcję holomorficzną $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Jak wiadomo z analizy zespolonej, $0 = \partial_z \partial_{\bar{z}} f = (\partial^2{}_x + \partial^2{}_y) f = \Delta f$. $f$ można przedstawić jako $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Widać więc, że jednocześnie część rzeczywista i urojona funkcji holomorficznej spełniają równanie Laplace'a.

Przykład: $f(z) = -E_0 z$, $\operatorname{Re} f(z) = -E_0 x$. W takim razie powierzchnie ekwipotencjalne będą odpowiadały liniom wzdłuż osi $y$, bo $\operatorname{Im} f(z) = -E_0 y$. Mamy tutaj dualność między polem a potencjałem.

Przykład 2: $f(z) = A \log \dfrac{z-a}{z+a}$. Jaki to problem elektrostatyczny na $\mathbb{R}^2$?

Rozważmy $z = x \in \mathbb{R}$. Pamiętamy, że $\log Re^{i\Phi} = \log R + i\Phi$.

$$\begin{aligned}\log \frac{z-a}{z+a} &= \log\left|\frac{z-a}{z+a}\right| + i \arg \frac{z-a}{z+a} \\ &\stackrel{z=x}{=} \begin{cases} \log \dfrac{x-a}{x+a} & z > a \vee z < -a \\ \log \dfrac{a-x}{a+x} + i\pi & -a < z < a \end{cases}\end{aligned}$$

Weźmy potencjał stanowiący część urojoną, zobaczmy jaki spełnia warunek brzegowy na osi rzeczywistej,

$$V = \operatorname{Im} \frac{V_0}{\pi} \log \frac{z-a}{z+a} \stackrel{z=x}{=} \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Zatem jest to takie zagadnienie brzegowe, gdzie mamy pasek $x \in [-a, a]$ pod stałym napięciem, dookoła jest uziemienie. Cała funkcja $V(x, y)$ na $\mathbb{R}^2$ będzie potencjałem w całej przestrzeni. Linie pola natomiast są izoliniami $\operatorname{Re} f(z)$.

## Ćwiczenia 6: Indukcja wzajemna, tensor napięć

17 lis 2021

**Definicja 2.** Rozważmy dwie pętle (Rys. 2.2) $(S_1, S_2)$ liniowe obok siebie. W jednej płynie prąd $I_1$. Strumień pola magnetycznego przepływającego przez $S_2$ wynosi

$$\Phi_2 = \int_{S_2} (\mathbf{B} \mid \mathbf{n})\, \mathrm{d}\sigma \stackrel{\text{def}}{=} M_{21} I_1$$

gdzie $M_{21}$ to współczynnik indukcji wzajemnej. Bierzemy zawsze taką orientację pętli $\mathbf{n}$, żeby $M_{21} > 0$. Przypomnijmy sobie, że

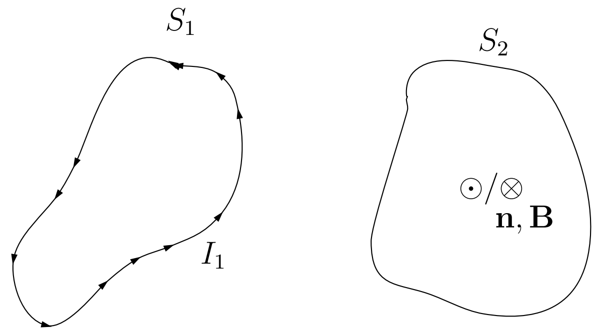
$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} \\ \Phi_2 &= \int_{S_2} (\operatorname{rot} \mathbf{A}_1 \mid \mathbf{n})\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial S_2} (\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{t})\, \mathrm{d}l_2\end{aligned}$$

Wprowadźmy sobie oznaczenie $\mathrm{d}\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{t}\, \mathrm{d}l$,

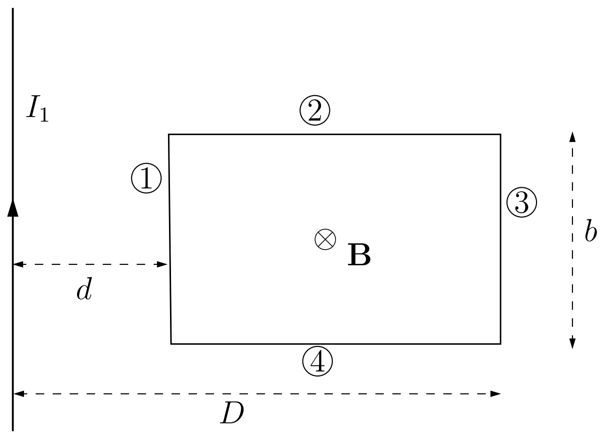
$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\partial S_2} \left( \oint_{\partial S_1} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}_1}{\mathcal{R}} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_2 \\ M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S_1} \oint_{\partial S_2} \frac{(\mathrm{d}\mathbf{l}_1 \mid \mathrm{d}\mathbf{l}_2)}{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

To wyrażenie nazywamy wzorem Neumanna.

**Zadanie 1** Rozważamy prosty przewód z prądem $I_1$, obok niego stawiamy prostokątną ramkę (Rys. 2.3). Wyznaczyć współczynnik indukcji wzajemnej $M_{21}$ z definicji




Rysunek 2.2: Definicja indukcyjności wzajemnej.




Rysunek 2.3: Ramka prostokątna przy nieskończonym prostym przewodzie.

i ze wzoru Neumanna.

Nadajmy ramce orientację zgodną z kierunkiem pola wyindukowanego przez przewód z prądem $I_1$. Z prawa Ampera szybko wyliczamy, że pole magnetyczne od nieskończonego druta wynosi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r}\mathbf{e}_\phi$$

W naszym przypadku ograniczamy się do płaszczyzny $xz$, więc z definicji,

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \int_{S_2} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{x}(\mathbf{e}_y \mid \mathbf{e}_y)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{[d,D]\times[0,b]} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0 b I_1}{2\pi}\int_d^D \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 b I_1}{2\pi}\log\frac{D}{d}
\end{aligned}$$

Stąd,

$$M_{21} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \log \frac{D}{d}$$

Policzmy to samo w inny sposób. Ze wzoru Neumanna,

$$\mathrm{d}\mathbf{l}_1 = \mathrm{d}y_1\,\mathbf{e}_y$$

$$\mathrm{d}\mathbf{l}_2 = \begin{cases} \mathrm{d}y_2\,\mathbf{e}_y & ① \\ \mathrm{d}x_2\,\mathbf{e}_x & ② \\ -\,\mathrm{d}y_2\,\mathbf{e}_y & ③ \\ -\,\mathrm{d}x_2\,\mathbf{e}_x & ④ \end{cases}$$

W takim razie,

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y_1 \left( \int_{①} \mathrm{d}y_2 - \int_{③} \mathrm{d}y_2 \right) \frac{1}{\mathcal{R}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}y_1 \left( \int_0^b \frac{\mathrm{d}y_2}{\sqrt{d^2 + (y_2 - y_1)^2}} - \int_0^b \frac{\mathrm{d}y_2}{\sqrt{D^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right) \end{aligned}$$

Jest tutaj bardzo ciekawa rzecz, bowiem jeśli traktowalibyśmy tę całkę jako różnicę dwóch całek podwójnych, jest to wyrażenie typu różnica nieskończoności. W tego typu problemach elektro/magneto-statycznych bardzo trzeba uważać na zamianę kolejności całkowania! Najpierw zmieńmy zmienną całkowania w całce zewnętrznej:

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{matrix} Y(y_1) = y_1 - y_2 \\ \mathrm{d}Y = \mathrm{d}y_1 \end{matrix} \right| = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Y \int_0^b \mathrm{d}y_2 \left( \frac{1}{\sqrt{d^2 + Y^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + Y^2}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 b}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}Y \left( \frac{1}{\sqrt{d^2 + Y^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + Y^2}} \right) \end{aligned}$$

Pamiętajmy, że musimy być ostrożni z traktowaniem tego wyrażenia jako różnicę całek! Można sobie z tym poradzić robiąc przejście graniczne (de facto definiujące tę całkę niewłaściwą),

$$= \frac{\mu_0 b}{4\pi} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}Y \left( \frac{1}{\sqrt{d^2 + Y^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2 + Y^2}} \right) = (*)$$

Teraz można już policzyć całki osobno, odjąć je i wziąć granicę.

$$\begin{aligned} I = \int \frac{\mathrm{d}Y}{\sqrt{d^2 + Y^2}} &= \left| \begin{matrix} Y = d \sinh \xi \\ \mathrm{d}Y = d \cosh \xi \, \mathrm{d}\xi \\ d^2 + Y^2 = d^2 \cosh^2 \xi \end{matrix} \right| = \int \mathrm{d}\xi \\ &= \xi + C = \sinh^{-1} \frac{Y}{d} + C \end{aligned}$$

Zauważmy, że $Y/d = 1/2\big(e^{\xi} - e^{-\xi}\big)$, zatem

$$
\begin{aligned}
0 &= e^{2\xi} - \frac{2Y}{d}e^{\xi} - 1 \\
e^{\xi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2Y}{d} \pm 2\sqrt{\frac{Y^2}{d^2}+1}\right) \\
&\overset{\exp>0}{=} \frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2}+1}
\end{aligned}
$$

Stąd,

$$
I = \log\left(\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2}+1}\right) + C
$$

W takim razie,

$$
(*) = \frac{\mu_0 b}{4\pi}\log\frac{\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2}+1}}{\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2}+1}}\Bigg|_{Y\to-\infty}^{Y\to+\infty}
$$

$$
\lim_{Y\to+\infty}\log\frac{\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2}+1}}{\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2}+1}} = \lim_{Y\to+\infty}\log\frac{\frac{1}{d} + \sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{Y^2}}}{\frac{1}{D} + \sqrt{\frac{1}{D^2}+\frac{1}{Y^2}}} = \log\frac{D}{d}
$$

Podobnie,

$$
\lim_{Y\to-\infty}\log\frac{\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2}+1}}{\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2}+1}} = \lim_{Y\to+\infty}\frac{-\frac{Y}{d} + \sqrt{\frac{Y^2}{d^2}+1}}{-\frac{Y}{D} + \sqrt{\frac{Y^2}{D^2}+1}} = \lim_{Y\to+\infty}\log\frac{-\frac{1}{d} + \sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{Y^2}}}{-\frac{1}{D} + \sqrt{\frac{1}{D^2}+\frac{1}{Y^2}}}
$$

Domnóżmy to przez dogodną jedynkę, żeby pozbyć się wyrażenia 0/0,

$$
= \lim_{Y\to+\infty}\log\frac{\frac{1}{Y}}{\frac{1}{Y}}\frac{\frac{1}{D} + \sqrt{\frac{1}{D^2}+\frac{1}{Y^2}}}{\frac{1}{d} + \sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{Y^2}}} = \log\frac{d}{D}
$$

Stąd,

$$
(*) = \frac{\mu_0 b}{4\pi}\left(\log\frac{D}{d} - \log\frac{d}{D}\right) = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\log\frac{D}{d}
$$

Otrzymaliśmy więc ten sam wynik, wielokrotnie wyższym nakładem pracy. Tak na ogół właśnie bywa z używaniem wzoru Neumanna, zamiast prostszej definicji.

**Definicja 3.** Tensor napięć Maxwella definiujemy (przynajmniej w poprawnej indeksologii) następująco:

$$T^i{}_j = \varepsilon_0 \left( E^i E_j - \frac{1}{2} \delta^i{}_j \mathbf{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B^i B_j - \frac{1}{2} \delta^i{}_j \mathbf{B}^2 \right)$$

gdzie $E_i \,\mathrm{d}x^i \overset{\text{def}}{=} \mathbf{E}^\flat$, jednak my oczywiście rozważamy tradycyjnie teorię na $\mathbb{R}^3$, więc po prostu $E^i = E_i$. Podobnie, równie dobrze możemy sobie pisać $T_{ij}$ czy $T^{ij}$ olewając pozycje indeksów; czego nie popieram ale nie mam siły za każdym razem tego poprawiać pisząc wzory z tablicy, więc pewnie będę tak dalej kaleczył notację...

Po co to nam potrzebne? Otóż rozważmy obiekt rozciągły $V$ o brzegu $\partial V = S$, zawierający ładunki, umieszczony w polu $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Wówczas siłę na jednostkę objętości zapiszemy jako:

$$\frac{\mathrm{d}F^i}{\mathrm{d}V} = f^i = \partial_j T^{ji} = \operatorname{div} \mathbf{T}$$

Ta dywergencja jest zasadniczo przyzwoicie określona, jako że tensor napięć jest symetryczny. Całkowita siła działająca na $V$ to z kolei

$$\mathbf{F}_V = \int_S (\mathbf{T} \mid \mathbf{n}) \,\mathrm{d}\sigma \overset{\text{def}}{=} \left( \int_S T^i{}_j n^j \,\mathrm{d}\sigma \right) \partial_i$$

Wprowadzając jeszcze jedną notacyjną konwencję $\mathrm{d}\sigma^i \overset{\text{def}}{=} n^i \,\mathrm{d}\sigma$,

$$F_V{}^i = \int_S T^i{}_j \,\mathrm{d}\sigma^j$$

**Uwaga 1.** Niestety tensor napięć zdefiniowany w powyższy sposób, nieszczególnie dobrze przenosi się na język czystszej geometrii różniczkowej i języka form, w którym moglibyśmy modelować teorię na czymś innym niż $\mathbb{R}^3$. Można natomiast użyć 1-formy 4-potencjału $\mathbf{A}$ i tensora elektromagnetycznego (de facto 2-formy) $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{A}$. Wówczas tensor energii-napięć zdefiniowany jest jako

$$T^{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left( F^{ik} F^j{}_k - \frac{1}{4} g^{ij} F_{ab} F^{ab} \right)$$

zatem

$$T^i{}_j = -\frac{1}{\mu_0} \left( F^{ik} F_{kj} + \frac{1}{4} \delta^i{}_j F_{ab} F^{ab} \right)$$

Tutaj już widać, że $F_{ab} F^{ab} \Omega = \mathbf{F} \wedge \star\mathbf{F}$, więc coś by można pewnie z tym dalej podziałać. Przy czym trzeba by pewnie zdefiniować $T^i = T^i_j \,\mathrm{d}x^j$ jako 1-formę o wartościach w $\Gamma(\mathrm{T}M)$ (czy coś w ten deseń). Wówczas $\mathrm{D}T^i \sim \nabla_j T^{ij} = f^i$.

**Zadanie 2** Bierzemy kulę o ładunku $Q$, promieniu $R$, jednorodnie naładowaną. Bierzemy ostry nóż i przecinamy kulę w płaszczyźnie $xy$. Jaka siła działa na górną półkulę $(z > 0)$?

Zaatakujemy problem tensorem napięć Maxwella. Wskazówka: jaki jest kierunek tej siły? Wydaje się, że powinien iść w kierunku osi $z$.

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q\mathbf{e}_r}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{r}{R^3} & r \le R\\ \dfrac{1}{r^2} & r \ge R\end{cases}$$
$$\mathbf{e}_r = \cos\phi\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z$$

Wyrażamy tensor Maxwella we współrzędnych kartezjańskich.

$$\begin{aligned}T_{zx} &= \varepsilon_0 E_z E_x\\ T_{zz} &= \frac{\varepsilon_0}{2}\Big(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\Big)\\ T_{zy} &= \varepsilon_0 E_z E_y\end{aligned}$$

Na górnej półsferze,

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\phi\sin\theta\\ E_y &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\phi\sin\theta\\ E_z &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\end{aligned}$$

Brzegiem górnej półkuli jest czasza $C$ (górna półsfera) oraz denko $D$.

$$\begin{aligned}{F_V}^z &= \left(\int_C + \int_D\right) {T^z}_j \,\mathrm{d}\sigma^j\\ &\stackrel{\text{def}}{=} F_C + F_D\end{aligned}$$

Najpierw liczymy całkę po półsferze.

$$\begin{aligned}F_C &= \int_C \Big(T_{zx}\,\mathrm{d}\sigma_x + T_{zy}\,\mathrm{d}\sigma_y + T_{zz}\,\mathrm{d}\sigma_z\Big) = (*)\\ \mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma &= R^2 r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{e}_r = R^2 r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\big(\cos\phi\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z\big)\end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \Big(T_{zx}\cos\phi\sin\theta + T_{zy}\sin\phi\sin\theta + T_{zz}\cos\theta\Big) R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &= \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 R^2}\end{aligned}$$

Zostaje koło równikowe (denko $D$), dla którego $\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\,\mathrm{d}\sigma\,\mathbf{e}_z$.

$$F_D = -\int_D T_{zz}\,\mathrm{d}\sigma = (*)$$

Obcinając $T_{zz}$ do denka,

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{r^2}{R^6}$$

Stąd,

$$\begin{aligned}(*) &= \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^6} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 R^2}\end{aligned}$$

Finalnie,

$$\mathbf{F}_V = \frac{Q^2}{64\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{e}_z$$

Gdybyśmy chcieli do tego podejść inaczej (w tym przypadku prościej), moglibyśmy liczyć całkę po płaszczyźnie $xy$ minus denko $D$. Wówczas, tensor napięć obcięty do $xy \setminus D$,

$$T_{zz} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{1}{r^4}$$

przy czym to ten tensor na obszarze $xy \setminus D$.

$$\begin{aligned}{F_V}^z &= \int_{[R,\infty]\times[0,2\pi]} \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2r^2}\right)\Bigg|_R^\infty \\ &= \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}\end{aligned}$$

Jakie jest wytłumaczenie wzięcia większego $V = \{(x, y, z) \colon z > 0\}$ ograniczającego półsferę? Otóż $E \sim r^{-2}$ zatem $T \sim r^{-4}$, zatem $\mathrm{T} \cdot \mathrm{d}\sigma \sim r^{-2}$, a w przejściu do nieskończoności, ten wkład dąży do zera.

## Ćwiczenia 7: Przepływ prądu, prądy wirowe

24 lis 2021 **Zadanie 1** Rozważmy dwie koncentryczne sfery, między którymi jest dielektryk o przenikalności $\varepsilon$ i przewodnictwie $\sigma$. W czasie $t = 0$ zadano ładunek $q_0$ na okładce wewnętrznej. Policzyć ładunek na wewnętrznej okładce $q(t)$, całkowitą energię, jaka wydzieli się w wyniku przepływu prądu i całkowitą energię pola elektrycznego między okładkami w chwili początkowej.

Ponieważ ładunek na zewnętrznej okładce nie wpływa na pole między nimi (Gauss), więc warunek początkowy na zewnętrznej okładce jest nam zupełnie niepotrzebny. W chwili $t = 0$ pole między okładkami to

$$\mathbf{E}(0) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\mathbf{e}_r$$

Jeśli na zewnętrznej okładce ładunek wynosi $-q_0$, to pole jest wówczas jedynie między okładkami. W wariancie zerowego ładunku, pole będzie też poza.

Rozważmy chwilę $t > 0$. Wówczas pole między okładkami,

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\mathbf{e}_r$$

gdzie zaniedbujemy wpływ ładunków prądowych i zakładamy, że rozmiar układu jest mały (żeby nie było problemów z prędkością propagacji pola). Wówczas gęstość prądu jest zdefiniowana przez prąd przepływający przez pewną powierzchnię $S$ z wektorem normalnym $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}I &\overset{\text{def}}{=} (\mathbf{j} \mid \mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma = \sigma\mathbf{E} \\ \mathbf{j} &= \frac{\sigma q(t)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Zatem natężenie prądu to

$$\begin{aligned} I &= \int_{S(r)} (\mathbf{j} \mid \mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{[0,\pi]\times[0,2\pi]} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\, r^2 \sin\theta \frac{\sigma q(t)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{\sigma q(t)}{\varepsilon_0\varepsilon} \end{aligned}$$

Stąd dostajemy równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sigma q(t)}{\varepsilon_0\varepsilon} \\ q(t) &= q_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Teraz liczymy całkowitą energię, która się wydzieli przez przepływ prądu.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty UI\,\mathrm{d}t \\ I &= -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{q_0\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\exp\left(-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Żeby wyznaczyć napięcie, nie musimy decydować jaki jest ładunek na zewnętrznej okładce. Musielibyśmy go ustalić gdybyśmy chcieli żądać, aby potencjał zanikał w nieskończoności. Natomiast napięcie to różnica potencjałów między okładkami, zatem ta subtelność się kasuje przy odejmowaniu obu potencjałowi. A inaczej, bez zbędnego tłumaczenia, potencjał między punktem $A, B$ to po prostu całka z pola między tymi punktami (oczywiście po dowolnej drodze).

$$U = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Stąd energia to

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} q_0 e^{-\frac{2\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon}} \frac{q_0\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{q_0^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0^2\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) e^{-\frac{2\sigma t}{\varepsilon_0\varepsilon}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Chcemy mieć również energię pola między okładkami. Dla ośrodka dielektrycznego, gęstość energii pola elektrycznego to

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2}(\mathbf{E} \mid \mathbf{D}) = \frac{1}{2}\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\frac{q_0}{4\pi r^2}(\mathbf{e}_r \mid \mathbf{e}_r) \\ &= \frac{q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4} \\ E_{\text{pola}} &= \int_{\substack{\text{objętość} \\ \text{między sferami}}} \frac{q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon r^4} r^2 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon} 4\pi \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_0^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Cała energia początkowo zebrana w polu między okładkami wydzieliła się przez prąd.

**Zadanie 2** Rozważmy metalową rurkę (ale materiał nieidealnie przewodzący, w nadprzewodniku by nie działało) i wrzucony do niej magnes o masie $M$. Chcemy znaleźć prędkość spadania $v$.

Robimy model, więc formułujemy listę życzeń i okaże się które jej elementy są niezbędne i występują w wyniku.
Założymy, walec spada nie obracając się, z czego wynika, że $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$. W tym układzie będą się indukowały prądy wirowe płynące w kierunku $\mathbf{e}_\phi$. Pomijamy opory powietrza. Zakładamy, że ścianki rury są cienkie (wyjdzie nam, że to nie jest ważne założenie), mają grubość $D$. Nie chcemy efektów brzegowych, czyli zakładamy, że rura jest nieskończona. Przydałoby się znać promień rury $a$. Materiał, z którego jest wykonana rura ma przewodność $\sigma$ i ma zaniedbywalne własności dielektryczne. Musimy też założyć, że efekt dipola magnetycznego jest odczuwalny natychmiastowo we wszystkich miejscach rury (oddziaływania rozchodzą się natychmiastowo).

Kilka ćwiczeń temu liczyliśmy pole dipola magnetycznego,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi\mathcal{R}^3}\left[\frac{3}{\mathcal{R}^2}(\mathbf{m} \mid \boldsymbol{\mathcal{R}})\boldsymbol{\mathcal{R}} - \mathbf{m}\right] \\ \boldsymbol{\mathcal{R}} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi\mathcal{R}^3}\mathbf{m} \times \boldsymbol{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

Najpierw musimy się zastanowić jak inaczej, energetycznie opisać fakt ruchu jednostajnego dipola. Na dipolu pracuje siła grawitacji i siła oporu wytwarzana przez prądy wirowe w walcu. Zauważmy więc, że ruch jednostajny znaczy tyle, że moc siły oporu $\mathbf{F}_{\text{op}} = -M\mathbf{g}$ równa $P = Mgv$ musi być równa mocy wydzielanej wskutek obecności prądów wirowych. Musimy się dobrać do tych prądów i napięcia (moc prądu to $P = UI$ modulo całki). Możemy skorzystać z prawa Faradaya licząc siłę elektromotoryczną na kolejnych obręczach będących przekrojami walca. Dzielimy walec na takie obręcze, parametryzujemy je przez

$$O_z = \{\mathbf{r} = a\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z \colon \phi \in [0, 2\pi]\}$$

Położenie dipola można opisać przez wektor

$$\mathbf{r}' = -vt\mathbf{e}_z$$

Wówczas, strumień pola przez koło powierzchnię przekroju walca to

$$\begin{aligned}\phi_B(z) &= \int_{\text{przekrój}} (\mathbf{B} \mid \mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\text{przekrój}} (\operatorname{rot}\mathbf{A} \mid \mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma \\ &\overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{C(a)} (\mathbf{A} \mid \mathbf{t})\,\mathrm{d}l\end{aligned}$$

W naszym układzie,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= e_\phi, \quad \mathrm{d}l = a\,\mathrm{d}\phi \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\left[a^2 + (z+vt)^2\right]^{3/2}} m\mathbf{e}_z \times \left[a\mathbf{e}_\rho + (z+vt)\mathbf{e}_z\right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{\left[a^2 + (z+vt)^2\right]^{3/2}} ma\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

Stąd,

$$\Phi_B(z) = \frac{\mu_0 m a^2}{2}\frac{1}{\left[a^2 + (z+vt)^2\right]^{3/2}}$$

Teraz użyjmy prawa Faradaya aby dostać napięcie (SEM) w „pętli z prądem ograniczonej przez pole przekroju”, tj. de facto napięcie prądów wirowych:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{3\mu_0 m a^2 v(z+vt)}{2\left[a^2 + (z+vt)^2\right]^{5/2}}$$

Jak to przełożyć na prąd płynący w walcu? Powierzchnia $\mathrm{d}\sigma$ oznacza powierzchnię $D\,\mathrm{d}z$ małego elementu przekroju pionowego walca.

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= j\mathbf{e}_\phi \\ \mathrm{d}I &= (\mathbf{j} \mid \mathbf{n})\,\mathrm{d}\sigma = jD\,\mathrm{d}z \\ \varepsilon &= \oint_{C(a)} (\mathbf{E} \mid \mathbf{t})\,\mathrm{d}l = 2\pi a E\end{aligned}$$

Stąd, korzystając z prawa Ohma $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$,

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma\varepsilon}{2\pi a}\mathbf{e}_\phi$$

Zatem element prądu (wirowego) płynącego w małym pierścieniu to

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I &= \frac{\sigma\varepsilon}{2\pi a} D\,\mathrm{d}z = \frac{3\mu_0 m a v(z+vt)\sigma D}{4\pi\left[a^2 + (z+vt)^2\right]^{5/2}}\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}P &= \varepsilon\,\mathrm{d}I = \frac{9}{8\pi}\frac{\mu_0^2 m^2 a^3 (z+vt)^2 v^2 \sigma D}{\left[a^2 + (z+vt)^2\right]^5}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Aby dostać całą moc, musimy wycałkować to po wszystkich pierścieniach, zatem po $z \in (-\infty, \infty)$. W tym momencie w sumie moglibyśmy skrócić długość rury, nie wykorzystaliśmy jakoś mocno nigdzie tego założenia. Założenie o cienkości ścianek wykorzystaliśmy zakładając stałość pola na obszarze $r \in [a, a+D]$.

$$P = \frac{9}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, \frac{\mu_0^2 m^2 a^3 (z+vt)^2 v^2 \sigma D}{\left[a^2 + (z+vt)^2\right]^5} = \left| \begin{array}{c} \tilde{z} = z + vt \\ \mathrm{d}\tilde{z} = \mathrm{d}z \\ \tilde{z} \stackrel{\text{def}}{=} z \end{array} \right|$$
$$= \frac{9}{8\pi}\mu_0 m^2 a^2 v^2 \sigma D \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\, \frac{z^2}{(a^2+z^2)^5}$$

Można to już przecałkować przez residua, ale teraz zrobimy to przez serię fortunnych podstawień zwieńczonych pewną torturą.

$$= \left| \begin{array}{c} z = a\xi \\ \mathrm{d}z = a\,\mathrm{d}\xi \end{array} \right| = \frac{9}{8\pi}\frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2\,\mathrm{d}\xi}{\left(1+\xi^2\right)^5}$$

Teraz podstawienie trygonometryczne,

$$= \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{1+\xi^2} = \cos^2\theta & \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \dfrac{\xi^2}{1+\xi^2} = \sin^2\theta & \dfrac{\xi\,\mathrm{d}\xi}{\left(1+\xi^2\right)^2} = \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{array} \right|$$
$$= \frac{9}{8\pi}\frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Teraz mamy nową całkę,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^6\theta - \cos^8\theta\right)\mathrm{d}\theta$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

To się tradycyjnie atakowało teraz przez części gdzie $f = \sin\theta$. Stąd dostaje się wzór redukcyjny na te całki,

$$\frac{n}{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Wobec tego,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos^6\theta - \cos^8\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{128}$$

W końcu możemy dokończyć liczenie mocy wydzielonej na całej rurze,

$$P = \frac{9}{8\pi}\frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4}\frac{5\pi}{128} = \frac{45}{1024}\frac{\mu_0^2 m^2 v^2 \sigma D}{a^4}$$

Jest to cała moc tracona na ciepło wskutek przepływu prądów wirowych. Z drugiej strony to moc siły oporu równoważącej siłę ciężkości spadającego dipola.

$$= Mgv$$

Zauważmy, że wydzielana moc jest kwadratowo proporcjonalna do siły dipola, proporcjonalna doo grubości ścianek (w zakresie stosowalności przybliżenia chudych ścianek) i mocno rosnąca wraz z malejącym promieniem rurki. Finalnie,

$$v = \frac{1024}{45}\frac{Mga^4}{\mu_0^2 m^2 \sigma D}$$

Wniosek jest taki, że do ulubionego eksperymentu prof. Wysmołka najlepiej wziąć bardzo małą, ale możliwie (rozsądnie) grubą rurkę i silny magnes.

Zastanówmy się jeszcze nad faktem nieuwzględnienia samoindukcji. Ona daje wkłady proporcjonalne do $1/c$ (albo mniejsze?), ale w naszym modelu i tak przyjmowaliśmy de facto $c \to \infty$, więc nie musimy się tym szczególnie przejmować.

**Dodatek do zadania 2** Policzę jeszcze raz tę niełądną całkę przez residua.

$$F = \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^5}\,\mathrm{d}\xi$$

Niech $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, gdzie $\Gamma_1 = [-R, R] \times \{0\}$ i $\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = R \wedge y \geq 0\}$ (kontur półokrąg). Wówczas,

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^5} = \frac{z^2}{(z+i)^5(z-i)^5}$$

$$F = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}\right) f(z)\,\mathrm{d}z$$

ponieważ ze standardowych szacowań, całka po $\Gamma_2$ zanika przy $R \to \infty$. Żeby nie być gołosłownym, po szybkich przekształceniach,

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi R^3}{(1-R^2)^5} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Z drugiej strony,

$$F = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_i f(z)$$

$z = i$ jest biegunem rzędu 5, zatem

$$\operatorname{Res}_i f(z) = \lim_{z\to i}\frac{1}{4!}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4}\left[(z-i)^5 f(z)\right] = \frac{1}{24}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4}\frac{z^2}{(z+i)^5}$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{z\to i}\left[\frac{1680z^2}{(z+i)^9} - \frac{1680z}{(z+i)^8} + \frac{360}{(z+i)^7}\right] = -\frac{1}{24}\frac{15i}{32}$$

Stąd,

$$F = -2\pi i\frac{5i}{256} = \frac{5\pi}{128}$$

Jedynym bolesnym momentem było różniczkowanie prostej funkcji wymiernej, które i tak każdy by robił w wolframie lub policzył to z 5 razy w czasie poświęconym na wymyślanie podstawień trygonometrycznych.