Analiza II R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Wykład 1: Ćwiczenia 1

Zadanie 1 Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranych całek wykazać, że 01 mar 2021

1. $\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}=\frac{\pi}{4}$

   Niech $f(x)$ będzie ciągła.

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi k)\frac{1}{n}$$

   W naszym wyrażeniu dostajemy:

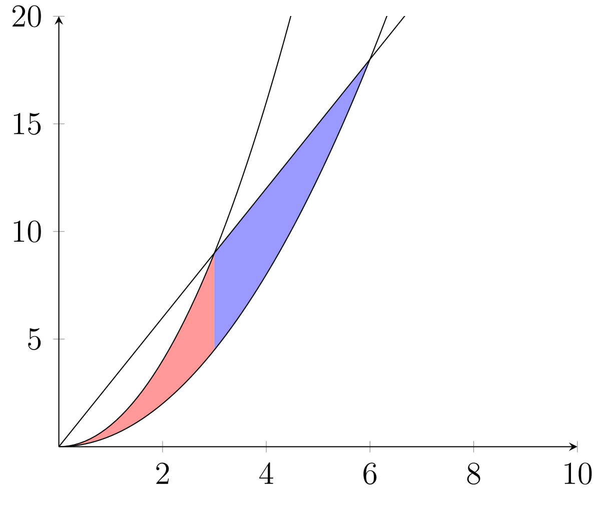
$$n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\tan^{-1}(x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(k-1)n}\right)=\log k$, $\mathbb{N}\ni k\geq 2$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+k-1}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^{k-1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\log(1+x)\Big|_0^{k-1}$$
$$=\log k$$

Zadanie 2 Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi.

1. $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=3x$



Rysunek 1

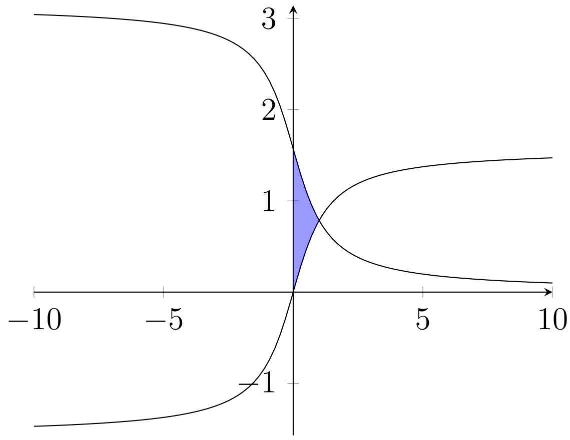
Zauważmy, że $\cot^{-1}(x) = \pi/2 - \tan^{-1}(x)$.

$$S = \int_0^{x_1} \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x$$

x_1 spełnia równanie $x_1^2 = 3x_1$, a x_2 spełnia równanie $1/2x_2^2 = 3x_2$. Stąd,

$$S = \int_0^3 \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x + \int_3^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x = \frac{15}{4}$$

2. $y = \tan^{-1} x$, $y = \cot^{-1} x$, $x = 0$



Rysunek 2

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \tan^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 2x\tan^{-1}(x)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \right) = \log 2 \end{aligned}$$

Zadanie 3 Obliczamy różne całki oznaczone.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^p(x)}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x\cos^p(x)}{\cos^p(x)+\sin^p(x)} \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^p(x)\,\mathrm{d}x}{\cos^p(x)+\sin^p(x)} = \left| \begin{matrix} x = \pi/2 - t \\ t \in [0, \pi/2] \end{matrix} \right| \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^p(t)} \end{aligned}$$

Stąd,

$$= \frac{\pi}{4}$$

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 1}$

$$= 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 1} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 1}$$

Dopiero teraz robimy podstawienie trygonometryczne, bo inaczej byśmy trafili na osobliwości i podstawienie byłoby złe. Niech $\tan(x) = t \in [0, \infty)$

$$= 4\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = 4\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}t}{1+(\sqrt{2}t)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}t)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^n}{2^{n+1}}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi} e^{inx}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^n \mathrm{d}x + \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{n} e^{-inx}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^n \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\pi} \left(1+e^{2ix}\right)^n + \left(1+e^{-2ix}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^n}$$

Ostatnie przejście mamy stąd, że

$$\int_0^{\pi} e^{2ikx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

4. $\displaystyle I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 1\cdot\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x &= x\left(1-x^2\right)^n\Big|_0^1 + n\int_0^1 2x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= 2n\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= 2n\int_0^1 \left(-1+x^2\right)\left(1-x^2\right)^{n-1} + 2n\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= -2nI_n + 2nI_{n-1} \end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2(n-1)}{2n-1}I_{n-2} = \cdots = \frac{2n\cdots 2}{(2n+1)\cdots 3}I_0 \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= \int_0^\pi \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi e^{(n-1)ix}+e^{(n-3)ix}+\cdots+e^{-(n-3)ix}+e^{-(n-1)ix}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^\pi \cos(n-1)x+\cos(n-3)x+\cdots\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0 & n\equiv 0 \mod 2\\ \pi & n\equiv 1 \mod 2\end{cases}\end{aligned}$$

Wykład 2: Ćwiczenia 2

05 mar 2021 **Zadanie 1** Obliczyć $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$.

$$\big|\sin(2x)-\cos(2x)\big| = \Big|(1,1)\cdot\big(\sin(2x),-\cos(2x)\big)\Big| \le \sqrt{2} < 2$$

Rozbijamy mianownik,

$$\begin{aligned}M(x) &= 1+2\sin^2 x+2\sin x\cos x = 1+\sin(2x)+1-\cos(2x)\\ &= 2+\sin(2x)-\cos(2x) > 2-\sqrt{2}\\ M(x) &> 0\end{aligned}$$

zatem całka nie jest osobliwa. Korzystamy z symetrii funkcji podcałkowej. Robimy podstawienie trygonometryczne $t=\tan x$ dla $x\in(-\pi/2,\pi/2)$, $t\in(-\infty,\infty)$. Uwaga! Nie podstawiamy trygo na pałę, tj. $t=\tan x/2$, bo byśmy skończyli w bagnie.

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{M(x)} = \left|\begin{matrix} x=\tan^{-1}t & \mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+t^2} & \\ t^2=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} & \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} & 2\sin x\cos x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right|$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\Big(1+\frac{2t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\Big)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+3t^2+2t} = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+\frac{2}{9}}\\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+\Big[\frac{3}{\sqrt{2}}\big(t+\frac{1}{3}\big)\Big]^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Całki niewłaściwe f nie jest osobliwa na $[a,\infty)$.

$$\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

Rozważa się też całki na (a,b), gdzie f ma osobliwści w punkcie brzegowym.
Będzie nas często (przed analizą 3) interesowało tylko czy całka jest zbieżna.

Zadanie 2 Obliczyć $I = \int_0^\infty \frac{\log(x)}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zakładamy, że $a > 0$.

Czy całka jest zbieżna?

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{\log(x)}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\log(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

Zauważmy, że $\frac{\left|\log(x)\right|}{a^2+x^2} < \frac{\left|\log(x)\right|}{a^2}$ na $x < 1$. To będzie nasze kryterium porównawcze. Czy log jest całkowalny na $[0,1]$?

$$\left[x(\log x - 1)\right]' = \log(x) - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \log(x)$$

$$x(\log x - 1)\Big|_\varepsilon^1 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -1$$

Stąd funkcja z kryterium porównawczego jest całkowalna. Teraz badamy całkowalność granicy w nieskończoności. Istnieje c: $\log(x) \leq cx^{1/2}$ dla każdego $x \geq 1$. Nasze nowe kryterium porównawcze to:

$$\frac{\log(x)}{x^2+a^2} \leq \frac{x^{1/2}}{x^2} = x^{3/2}$$

Wówczas,

$$\int_1^\infty x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = -2x^{-1/2}\Big|_1^\infty = 2 < \infty$$

W takim razie prawa granica w I jest skończona. W związku z tym, pokazaliśmy, że całe I jest zbieżne. Policzmy ją.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{a\frac{\log x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\log\frac{x}{a} + \log a}{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\log s + \log a}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{a}\log a \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} + \underbrace{\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\log s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s}_{=0?}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\log s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \left|\begin{matrix} s = 1/t & t \in [1,\infty) \\ \mathrm{d}s = \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t & \end{matrix}\right| = \int_1^\infty \frac{-\log t}{1+\frac{1}{t^2}}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_1^\infty \frac{\log t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Stąd,

$$0 = \int_0^1 \frac{\log s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s + \int_1^\infty \frac{\log s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \frac{\log s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s$$

Finalnie,

$$I = \frac{\pi}{2a}\log a$$

Zadanie 3 Obliczyć wartość $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Zauważmy, że $f(x)$ nie jest osobliwa w $x=0$.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\xrightarrow{x\to 0}\frac{1}{2}$$

co widzimy z szeregu Taylora wokół $x=0$. W takim razie,

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{g(x)}{1+x^2}$$

gdzie $g(x)$ jest ciągła zanikająca w ∞. $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$. Stąd, $g(x)$ jest ograniczona na $\mathbb{R}$ oraz mianownik jest całkowalny, zatem $\big|f(x)\big|$ też jest całkowalna.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x<\infty\implies\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\quad\text{jest zbieżna}$$

Zatem policzmy.

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\left|\begin{matrix}x=-y\\ y\in(-\infty,\infty)\end{matrix}\right|\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{1}{y}-\frac{1}{e^{-y}-1}\right)\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\\
I&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{-x}-1}\right)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^x(e^{-x}-1)}-\frac{1}{e^{-x}-1}\right)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}-1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Zadanie 4 Bez korzystania z ogólnych twierdzeń wykazać, że $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna oraz $\displaystyle\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x=+\infty.$

Podzielmy całkę na szereg, jako że funkcja podcałkowa jest dodatnia.

$$\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x\geq\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{k\pi}=\frac{1}{k\pi}\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{k\pi}$$

$$\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}I_k\geq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}=\infty$$

Stąd, ta całka jest rozbieżna. Niech:

$$J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Pokażemy, że $\sum_{k=1}^{\infty} J_k$ jest zbieżny oraz, że $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} J_k$. Oczywiście nie musiałoby tak być w ogólności, bo całka Riemanna jest skończenie addytywna. Obserwacje: $J_{2n+1} \geq 0$ oraz $J_{2n} \leq 0$. Ponadto, $I_n = |J_n| = (-1)^{n+1} J_n$. Jeśli I_n maleje, to z kryterium Leibniza szereg $\sum J_k$ jest zbieżny.

Twierdzenie 1 (Kryterium Leibniza)**.** Jeśli $a_n \to 0$ (monotoniczny), to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ jest zbieżny.

$$
\begin{aligned}
I_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} &\geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = I_{k+1}
\end{aligned}
$$

Stąd,

$$I_k \geq I_{k+1}$$

oraz

$$\frac{2}{k\pi} \geq I_{k+1} \geq 0$$

zatem z twierdzenia o trzech ciągach $I_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Z kryterium Leibniza $\sum J_k$ jest zbieżny. Teraz pozostaje pokazać, że ta całka jest zbieżna do tego szeregu.

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^y \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$$

ta granica istnieje.

$$\int_0^y \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} J_i + \int_{k\pi}^{y} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Zauważmy, że ten całkowy naddatek co do modułu jest „mały”:

$$\left|\int_{k\pi}^{y} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{2}{k\pi} \xrightarrow{y\to\infty} 0$$

Ludzie ogarnęli, że takie zabawy można powtarzać i wprowadzili kryteria zbieżności całek.

Twierdzenie 2 (Kryterium zbieżności Dirichleta-Abela)**.** Niech:
$\int_c^{\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ gdzie $f, g\colon [c,\infty) \to \mathbb{R}$ ciągłe oraz

1. $f \geq 0$ i monotoniczna, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
2. $\exists M\colon \left|\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M$

Wówczas $\int_c^{\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna.

Do naszego przypadku to stosuje się następująco:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{całka z funkcji ciągłej}\\ \text{po zbiorze zwartym}}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}}_{\text{całka niewłaściwa}}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{x}}_{f}\underbrace{\sin x}_{g}\,\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_a^b \sin x\,\mathrm{d}x\right| = |-\cos b + \cos a| \le 2 = M$$

Ponadto $1/x$ monotonicznie dąży do zera. Stąd wniosek, że ta całka jest zbieżna.

Zadanie 5 Czy całki $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ są zbieżne?

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{matrix} x^2 = t \in [1,\infty) \\ x = \sqrt{t},\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| \\ &= \int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Z kryterium Abela to jest zbieżne.

Zadanie 6 Zbadać zbieżność $\int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x} \in [1,\infty) \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| &= 2\int_1^\infty te^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\lim_{M\to\infty}\int_1^M te^{-t}\,\mathrm{d}t = -2(1+t)e^{-t}\Big|_1^M \xrightarrow{M\to\infty} 4 \end{aligned}$$

Wykład 3: Ćwiczenia 3

08 mar 2021 **Zadanie 1** Zbadać zbieżność całek niewłaściwych.

1. $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

   Funkcja podcałkowa ma osobliwość w zerze.

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = 1/x \\ \mathrm{d}x = 1/t^2\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int_1^\infty \frac{1}{t}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

Uwaga: $\int_1^\infty \frac{\cos(2t)}{t}$ jest zbieżna z kryterium A–D. $1/t$ monotonicznie dąży do zera w ∞ oraz $g(t) = \cos(2t)$ jest taka, że

$$\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{1}{2}\sin(2t)\right|\Big|_a^b \leq 1$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix}\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t \\ \sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}\end{matrix}\right| = \int_1^\infty \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t - \int_1^\infty \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Pierwsza całka jest logarytmicznie rozbieżna, a druga zbieżna, zatem I jest rozbieżna.

2. $\int_0^\infty e^{-x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

$\sin^2 x$ jest okresowa z okresem π. Podzielmy ją na wkłady.

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,, \quad I = \sum_{n=0}^\infty I_n$$

Okaże się, że ten szereg jest rozbieżny.

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &\geq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-n\pi\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi e^{-n\pi\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\pi/2} e^{-n\pi\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \geq 2\int_0^{\pi/4} e^{-n\pi\sin^2 x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Dla $x \in \big[0, \pi/4\big]$ łatwo się sprawdza, że $\sin^2 x \leq 2x/\pi$.

$$\begin{aligned}
&\geq 2\int_0^{\pi/4} e^{-n\pi\cdot\frac{2}{\pi}x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/4} e^{-2nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-n\pi/2}}{n}\right)
\end{aligned}$$

Szereg $\sum 1/n$ jest rozbieżny, natomiast ten drugi jest zbieżny. Stąd, z kryterium porównawczego dla szeregów, cały szereg definiujący całkę $I = \sum I_{n-1}$ jest rozbieżny i dodatni.

3. $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

$$I = \left|\begin{matrix}\sqrt{x} = t \in [0,\infty) \\ x = t^2,\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t\end{matrix}\right| = 2\int_0^\infty e^{-t}t\,\mathrm{d}t = -2(t+1)e^{-t}\Big|_0^\infty = 2$$

4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{1/\log x}}{x^2+e^{2/\log x}}\,\mathrm{d}x$

$$I=\int_1^\infty \frac{e^{1/\log x}}{x^2\left[1+\left(\frac{e^{1/\log x}}{x}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}x=\int_1^\infty \frac{e^{1/\log x}}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{e^{1/\log x}}{x}\right)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\left|\begin{array}{c}\dfrac{e^{1/\log x}}{x}=e^{\frac{1}{\log x}-\log x}\\ s=\log x-\dfrac{1}{\log x},\ \log x\geq 0\\ s\in(-\infty,+\infty)\end{array}\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-s}}{1+e^{-2s}}\frac{1}{2}\left(1+\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\right)\mathrm{d}s$$

Zauważmy, że pierwszy czynnik jest symetryczny ze względu na symetrię $s\sim -s$, a drugi czynnik antysymetryczny, zatem drugi nie daje wkładu!

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-s}}{1+2e^{-2s}}\,\mathrm{d}s=\int_0^\infty\frac{e^{-s}}{1+e^{-2s}}\,\mathrm{d}s=\left|\begin{array}{c}w=e^{-s}\\ \mathrm{d}w=e^{-s}\,\mathrm{d}s\\ w\in[0,1]\end{array}\right|$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}w}{1+w^2}=\tan^{-1}w\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$

$$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$$

Uwaga:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Jeśli $\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}$ jest ograniczone to całka I jest zbieżna.

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x\leq\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\right)\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Funkcja

$$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} & x\in(0,1]\\ 1 & x=0\end{cases}$$

jest ciągła bo $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}=1$ oraz $[0,1]$ jest zwarty, czyli

$$\sup_{x\in[0,1]}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}<\infty$$

a zatem I jest zbieżna.

Zadanie 2 Dla jakich $p, q \in \mathbb{R}$ całka $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p |\log x|^q \,\mathrm{d}x$ jest zbieżna/rozbieżna.

$x^p |\log x|^q$ może być osobliwa w $x = 0$ lub w $x = 1$, więc ogarniajmy po jednej osobliwości na raz – rozcinamy całkę.

$$I_{p,q} = \int_0^{1/2} x^p |\log x|^q \,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 x^p |\log x|^q \,\mathrm{d}x$$

Jeśli $p < -1$ to $\forall q \geq 0$ mamy $\displaystyle\int_0^{1/2} x^p |\log x|^q \,\mathrm{d}x = +\infty$, bo w zerze $\log x$ rozbieżny do $+\infty$ oraz $\displaystyle\int_0^{1/2} x^p \,\mathrm{d}x = +\infty$. Dla $q < 0$ dostajemy również całkę rozbieżną (dlaczego?). Natomiast dla $p > -1$ całka będzie zbieżna dla wszystkich $q \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^{1/2} x^{p-\varepsilon} x^{\varepsilon} |\log x|^q \,\mathrm{d}x \qquad \varepsilon \colon p - \varepsilon > -1$$
$$\int_0^{1/2} x^{p-\varepsilon} \,\mathrm{d}x < \infty \quad \text{oraz} \quad x^{\varepsilon} |\log x|^q \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Teraz oceniamy zbieżność $\displaystyle\int_{1/2}^1 x^p |\log x|^q \,\mathrm{d}x$. Zauważmy, że

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x} |\log x|^q \,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 -\frac{1}{x} \log(x)^q = \frac{1}{q+1} \log(x)^{q+1} \Bigg|_{1/2}^1 \qquad \text{dla } q \neq -1$$

Natomiast dla $q = -1$ dostajemy

$$= \log|\log x| \Bigg|_{1/2}^1 < \infty \quad \text{dla } q = 1$$

Konkluzja jest taka, że $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{x} (-\log x)^q \,\mathrm{d}x$ jest zbieżna dla $q + 1 \geq 0$. A zatem całka $\displaystyle\int_{1/2}^1 x^p (-\log x)^q \,\mathrm{d}x$ jest zbieżna $\iff$ $q + 1 \geq 0$ oraz $p > -1$, bo:

$$\int_{1/2}^1 x^p (-\log x)^q \,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 x^{p+1} \frac{1}{x} (-\log x)^q \,\mathrm{d}x$$

Szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

jest zbieżny dla $p > 1$ oraz rozbieżny dla $p \leq 1$ (z kryterium zagęszczeniowego).

Zadanie 3 Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{1}{n\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$.

Jest to szereg o wyrazach dodatnich i można stosować kryterium porównawcze.

$$\sqrt{n} \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor \geq \sqrt{n}-1$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \leq \frac{1}{\sqrt{n}-1} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

gdzie ostatnia nierówność zajdzie dla dostatecznie dużych $n \geq 4$

$$\frac{1}{n\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \leq \frac{1}{n\left(\sqrt{n}-1\right)}$$

Twierdzenie 3 (Kryterium zagęszczeniowe)**.** Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \colon a_n \geq 0$ oraz $a_{n+1} \leq a_n$ jest zbieżny $\iff \sum_{n=0}^{\infty} p^n a_{p^n}$, $p \in \mathbb{N}$ jest zbieżny.

Dowód.

$$a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}} \leq 2^n a_{2^n}$$
$$2^n a_{2^n} = 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} \leq 2(a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots + a_{2^n})$$

Teraz sumujemy pierwszą nierówność po n,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Teraz sumujemy drugą nierówność,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

To pokazuje równoważność zbieżności obu szeregów z kryterium porównawczego. ∎

Przykład $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ z kryterium zagęszczeniowego.

$$2^k \frac{1}{2^k \log 2^k} = \frac{1}{k\log 2}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{\log 2} = +\infty$$

zatem wyjściowy szereg jest rozbieżny. Podobnie możemy pokazać zbieżność $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)^2}$.

$$2^k \frac{1}{2^k \log(2^k)^2} = \frac{1}{(k\log 2)^2} = \frac{1}{k^2\log(2)^2}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\frac{1}{\log(2)^2} < \infty$$

Zbieżność ratuje potęga logarytmu $1+\varepsilon$ dla $\varepsilon > 0$.

Wykład 4: Ćwiczenia 4

12 mar 2021

Twierdzenie 4 (Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich)**.** Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$.

1. Kryterium d'Alemberta:

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{szereg zbieżny}$$
$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{szereg rozbieżny}$$

2. Kryterium Cauchy'ego:

$$\limsup a_n^{1/n} < 1 \implies \text{szereg zbieżny}$$
$$\limsup a_n^{1/n} > 1 \implies \text{szereg rozbieżny}$$

3. Zbieżność szeregów $\sum a_n$ oraz $\sum b_n$ jest równoważna jeśli $\lim \frac{a_n}{b_n} = c < \infty$ i $c \neq 0$.

Dla szeregów o wyrazach dowolnych mamy:

Twierdzenie 5 (Kryterium Dirichleta)**.** Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, gdzie $b_n \geq 0$ jest monotoniczny, $\lim b_n = 0$ oraz ciąg sum częściowych $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ jest ograniczony. Wówczas, $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Uwaga 1. Warunek konieczny zbieżności szeregu $\sum a_n$: $\lim a_n = 0$.

Twierdzenie 6 (Kryterium Abela)**.** Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny oraz ciąg b_n jest monotoniczny i ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Przykład 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 0$.

Ty wynika z kryterium Leibniza. Dla $p > 0$ bierzemy $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{1}{n^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ monotonicznie oraz $\sum_{k=1}^{i} (-1)^k \leq 1$, natomiast dla $p \leq 0$ ciąg nie spełnia warunku koniecznego.

Przykład 2 Zbadać zbieżność bezwzględną $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^{n+1}\big(n+(-1)^{n+1}\big)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}}$$

Zauważmy, że to bardzo bardzo podobny szereg do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{\text{zbieżny warunkowo}}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+(-1)^{n+1}} - \frac{1}{n}\right) &= (-1)^{n+1}\frac{n-\big(n+(-1)^{n+1}\big)}{n\big(n+(-1)^{n+1}\big)} \\
&= \frac{-(-1)^{n+1}}{n\big(n+(-1)^{n+1}\big)} \quad \text{dla } n>2
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{-(-1)^{n+1}}{n\big(n+(-1)^{n+1}\big)}\right| = \frac{1}{n\big(n+(-1)^{n+1}\big)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} < \infty$$

Zatem pierwsze dwa składowe szeregi są zbieżne bezwzględnie, ostatni zbieżny warunkowo, zatem cały szereg zbieżny warunkowo.

Przykład 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right)$

To jest oczywiście szereg o wyrazach dodatnich. Wydaje się wizualnie, że to się zachowuje jak $1/n^2$. Trzeba by to jeszcze pokazać. Żeby się przekonać, to trzeba sprawdzić jak zachowuje się taka granica:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} -n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -n\left(-\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 < \infty
\end{aligned}$$

Zatem na mocy trzeciego kryterium mamy zbieżność.

Przykład 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$

Rozważymy to z kryterium d'Alemberta.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{3(n+1)}{n+1}7^{-n-1}}{\binom{3n}{n}7^{-n}} = \frac{3(n+1)!}{(n+1)!\big(2(n+1)\big)!}\frac{1}{7}\frac{n!(2n)!}{(3n)!}$$
$$= \frac{1}{7}\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+4)}{(n+1)(2n+1)(2n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{7}\frac{27}{4} = \frac{27}{28} < 1$$

Stąd, szereg jest zbieżny.

Przykład 5 Zbadać zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1}\right)^p$ w zależności od parametru p.

Zauważmy, że

$$\sqrt{n+1} > \sqrt[4]{n^2+n+1}$$
$$(n+1)^2 > n^2+n+1$$

Pozbywamy się niewymierności, jak nakazują pradawni bogowie algebry.

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}} = \frac{n+1-\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}}$$
$$= \frac{\left[n+1-\sqrt{n^2+n+1}\right]\left[n+1+\sqrt{n^2+n+1}\right]}{\left[n+1+\sqrt{n^2+n+1}\right]\left[\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}\right]} \sim \frac{C}{n^{1/2}}$$

Teraz, dzielmy cały ciąg z szeregu przez ten wyznaczony asymptotyczny.

$$\frac{a_n}{n^{p/2}} \xrightarrow{n\to\infty} C^p = \left(\frac{1}{4}\right)^p$$

Stąd wynika, że jeśli $p > 2$ to szereg jest zbieżny, natomiast dla $p < 2$ rozbieżny.

Przykład 6 Zbieżność w zależności od p dla $\sum_{n=1}^{\infty}\left(10-p\sqrt[n]{5}\right)^n$.

W zależności od p mamy wyrazy dodatnie, ujemne lub mieszane. Przyjrzyjmy się bezwzględnej zbieżności. Użyjmy kryterium Cauchy'ego.

$$\left(\left|10-p\sqrt[n]{5}\right|^n\right)^{1/n} \xrightarrow{n\to\infty} |10-p|$$

Jeśli $|10-p| < 1$, czyli $p \in (9,11)$ to szereg zbieżny bezwzględnie. Jeśli $|10-p| > 1$ to warunek konieczny zbieżności nie jest spełniony, bo to wybucha. Gdy $p = 9$ lub $p = 11$ to musimy zbadać manualnie co się dzieje.

Dla $p = 9$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(10-9\sqrt[n]{5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+9\left(1-\sqrt[n]{5}\right)\right)^n = \exp\lim_{n\to\infty} 9n\left(1-\sqrt[n]{5}\right)$$
$$= \exp(-9\log 5) = \frac{1}{5^9} \neq 0$$

Warunek konieczny zbieżności nie jest spełniony. Dla $p = 11$,

$$\left(10 - 11\sqrt[n]{5}\right)^n = (-1)^n\left(1 + 11\sqrt[n]{5}\right)^n$$

Badamy moduł wyrażenia,

$$\left(1 + 11\sqrt[n]{5}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 5^{11} \neq 0$$

zatem znów nie jest spełniony warunek konieczny.

Przykład 7 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

Mamy szereg o wyrazach dodatnich.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$$

dla dostatecznie dużych n. Czy $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ jest zbieżny? Otóż jest, co pokażemy z kryterium całkowego.

$$q \in (0,1), \quad f(x) = q^{\sqrt{x}} > 0, \quad q = \frac{1}{n}$$

Wówczas,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} q^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int e^{\sqrt{x}\log q}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| \\
&= \int e^{t\log q}2t\,\mathrm{d}t = \Big|\log q = c < 0\Big| = 2\int e^{ct}t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{c}e^{ct}t - \frac{2}{c}\int e^{ct}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{c}e^{ct}t - \frac{2}{c^2}e^{ct}\Big|_1^{\infty} \\
&= \frac{2}{c}\left(\frac{1}{c} - 1\right) > 0
\end{aligned}$$

zatem całka jest zbieżna i szereg jest zbieżny.

Twierdzenie 7 (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)**.** Niech $f(x) > 0$ będzie malejąca. $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna $\iff \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$.

Przykład 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}}$

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)^n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^n}} = \frac{1}{n+1}$$

Z kryterium porównawczego ten szereg jest rozbieżny.

Wykład 5: Ćwiczenia 5

Przykład 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}$ 15 mar 2021

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Spełnia warunek konieczny zbieżności $a_n \to 0$. Z intuicji rozwinięcia Taylora, ten szereg zachowuje się asymptotycznie jak c/n, zatem wydaje się, że powinien być rozbieżny. Powinniśmy więc obliczyć:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = 2 > 1$$

Stąd, nasz szereg jest rozbieżny.

Przykład 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3} - 2\right)^n$

Okazuje się, że warunek konieczny już nie jest spełniony.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2 - \sqrt[n]{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + 1 - \sqrt[n]{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 - \sqrt[n]{3}\right)^n = e^{\lim\left(1-\sqrt[n]{3}\right)n} = e^{-\log 3} = \frac{1}{3}$$

Przykład 3 $\sum_{n=3}^{\infty} \big(\log(\log n)\big)^{-\log n}, \sum_{n=3}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$

Przy takich logarytmach często pomoże kryterium zagęszczeniowe. Byle wyrazy szeregów były monotonicznie malejące i dodatnie. Tutaj są.

$$\begin{aligned} a_n &= \log(\log n)^{-\log n}, \quad b_n = 2^n a_{2^n} \\ b_n &= 2^n \big(\log(\log 2^n)\big)^{-\log 2^n} = 2^n (\log n \log 2)^{-n \log 2} \\ &= \left(\frac{2}{(\log n \log 2)^{\log 2}}\right)^n \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\log n \log 2)^{\log 2}} = 0$$

Dla dostatecznie dużych n, $b_n \le \left(1/2\right)^n$, zatem $\sum b_n$ jest szeregiem zbieżnym. Stąd, $\sum a_n$ jest zbieżny. Teraz zajmijmy się drugim szregiem.

$$a'_n = (\log n)^{-\log(\log n)}, \quad b'_n = 2^n a'_{2^n}$$
$$b'_n = 2^n(\log 2^n)^{-\log(\log 2^n)} = 2^n(n\log 2)^{-\log n \log 2}$$

Teraz dobrze jest skorzystać z kryterium Cauchy'ego.

$$\sqrt[n]{b'_n} = 2(n\log 2)^{-\frac{\log n \log 2}{n}} = 2\exp\left(-\frac{\log n \log 2}{n}\log(n\log 2)\right)$$
$$= 2\exp\left(-\frac{(\log n \log 2)^2}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

ze znajomości asymptotyki logarytmu. To jest większe od 1, zatem $\sum b'_n = \infty$ i na mocy kryterium zagęszczeniowego, $\sum a'_n = \infty$.

Przykład 4 Zależność od parametrów p, q. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$.

Gdy $q = 0$ i $p < -1$, to szereg zbieżny. Gdy $q = 0$ i $p > -1$ to rozbieżny. Jak $q \ne 0$, to p przestaje mieć w sumie znaczenie. Gdy $q < 0$ to dla dostatecznie dużych n, $p + q\log n < -2$ i wówczas $n^{p+q\log n} \le 1/n^2$ i z kryterium porównawczego, szereg jest zbieżny.
Dla $q > 0$, dla dostatecznie dużych n, $p + q\log n > 1$. Wówczas $n^{p+q\log n} > n$ a zatem szereg jest rozbieżny.

Przykład 5 Teraz rozważamy szeregi o wyrazach mieszanych. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

Zauważmy, że $\sin(\pi n) = (-1)^n$.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - n + n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$$

(????) Kryterium Leibniza mówi, że jeśli $\sin\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ monotonicznie to szereg jest zbieżny.
Czynnik pod sinusem jest zbieżny do zera i jest dodatni, zatem sin jest też coraz mniejszy i dąży do zera monotonicznie.

Przykład 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n - \cos n}$

$$a_n = \sin n, \quad b_n = (2n - \cos n)^{-1}$$

Użyjemy kryterium Abela.

$$\sum_{n=k}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} \sin n = \operatorname{Im} \sum_{n=k}^{l} e^{in} = \operatorname{Im} e^{ik}\frac{1 - e^{i(l-k+1)}}{1 - e^i}$$
$$\left|\sum_{n=k}^{l} a_n\right| \le \left|\frac{1 - e^{i(l-k+1)}}{1 - e^i}\right| \le \frac{2}{|1 - e^i|}$$

co nie zależy od k i l. Trzeba jeszcze sprawdzić, czy b_n dąży monotonicznie do zera.

$$\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = (2n+1) - \cos(n+1) - 2n + \cos(n) = 2 + \cos(n) - \cos(n+1) \geq 0$$

$1/b_n$ rośnie, zatem b_n maleje do zera. Na mocy kryterium Abela, wyjściowy szereg jest warunkowo zbieżny. Co ze zbieżnością bezwzględną?

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin n}{2n - \cos n}\right| \geq \frac{\sin^2 n}{2n-1} &= \frac{1-\cos(2n)}{2(2n-1)} \\ &= \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{\cos(2n)}{2(2n-1)}\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{2n-1}$ jest zbieżny, natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n+1)}$ rozbieżny, zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{2n - \cos n}$ jest rozbieżny.

Przykład 7 (brak dobrego kryterium) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

Jest to szereg o wyrazach dodatnich. Bezwzględna zbieżność oznacza możliwość sumowania według największych fantazji. Chcielibyśmy jakoś kontrolować podłogi.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} - \frac{1}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ b_n &= \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} a_n\end{aligned}$$

Sprawdźmy, że $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$. Skoro $a_n \geq 0$ to wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

$$\begin{aligned}b_k &= \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2k+1}{k} - \sum_{n=k^2}^{k^2+2k} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{2k+1}{k} - \left(\underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k^2+k}}}_{k+1 \text{ wyrazów}} + \underbrace{\cdots + \frac{1}{\sqrt{k^2+2k}}}_{k \text{ wyrazów}} \right) \\ &\geq \frac{2k+1}{k} - \frac{k+1}{k} - \frac{k}{\sqrt{k^2+k}} = 1 - \frac{k}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{\sqrt{k^2+k} - k}{\sqrt{k^2+k}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{k^2+k}\left(\sqrt{k^2+k}+k\right)} = \frac{k}{\sqrt{k^2+k}} \frac{1}{k + \sqrt{k^2+k}} \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{1}{2k+1}\end{aligned}$$

Natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2k+1)} = \infty$ czyli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, a zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Przykład 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt[n]{n^3+n}$

Zauważmy, że $\sqrt[n]{n^3+n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, zatem dobrze dodać coś i odjąć.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \Big(\sqrt[n]{n^3+n} - 1 + 1 \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \underbrace{\sin \pi \Big(\sqrt[n]{n^3+n} - 1 \Big)}_{\geq 0}$$

$$\frac{\sin \pi \Big(\sqrt[n]{n^3+n} - 1 \Big)}{\pi \Big(\sqrt[n]{n^3+n} - 1 \Big)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Zatem dla dostatecznie dużych n, $\geq 1/2$.

$$x^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log x} \geq 1 + \frac{1}{n}\log x$$

$$\sqrt[n]{n^3+n} \geq 1 + \frac{1}{n}\log(n^3+n)$$

$$\sqrt[n]{n^3+n} - 1 \geq \frac{1}{n}\log(n^3+n) \geq \frac{1}{n}$$

Zatem,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sqrt[n]{n^3+n} - 1 \Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Zamiast badać sin, zabadaliśmy to co jest pod sin. Skoro wartość argumentów jest rozbieżna to ten sinus też. W sposób zręczniejszy to jest 3 kryterium porównawcze dla równoważności zbieżności szeregów, których iloraz $\xrightarrow{n\to\infty} c \neq 0$.

Przykład 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n+1}$

Dla $\alpha = k\pi$ wszystko jest piękne i nie ma sprawy. Dla $\alpha \neq k\pi$, zbadamy zbieżność warunkową z kryterium Abela. Piszemy tak samo jak kilka przykładów wyżej. Nie ma jednak zbieżności bezwzględnej z podobnego powodu co wcześniej liczyliśmy:

$$\left| \frac{\sin(n\alpha)}{n+1} \right| \geq \frac{\sin^2(n\alpha)}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{1-\cos(2n\alpha)}{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}}_{\text{rozbieżny}} - \frac{1}{2}\frac{\cos(2n\alpha)}{n+1}$$

Przykład 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+5)\sin n} \right) \sin(n\alpha)$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5\sin n} = \frac{5\sin n}{n^2+5\sin n} < \frac{5}{n(n-5)}$$

dla dostatecznie dużych n.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n-5)} \quad \text{jest zbieżny}$$

zatem wyjściowy szereg jest bezwzględnie zbieżny, bo ten domnażany czynnik $\sin(n\alpha)$ de facto nic nie zmienia.

Przykład 11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n + 5\sin n}$

Dla $\alpha = k\pi$ to jest szereg zerowy. Gdy $\alpha \neq k\pi$, na mocy kryterium Abela ten szereg jest na pewno zbieżny warunkowo. Podobnie jak wcześniej, możemy pokazać, że nie jest to szereg zbieżny bezwzględnie. Wynika to również z dwóch poprzednich przykładów.

Wykład 6: Ćwiczenia 6

Zadanie 1 Zbadać zbieżność punktową, jednostajną podanych ciągów funkcyjnych. 19 mar 2021

1. $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$

   Granicę punktową liczymy tak, jakby x było parametrem. Traktujemy go jako jakąś stałą i liczymy granicę względem n.

   $$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n} = 0 \quad \text{dla } x = 0$$

   Dla $x \neq 0$,

   $$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = x$$

   Stąd w sensie punktowym, $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n} = 0$. Jest to funkcja ciągła. Badamy zbieżność jednostajną, czyli zbieżność w metryce supremum.

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| n \sin \frac{x}{n} x \right| \geq \sup_{x=2k\pi n} \left| n \sin\left(\frac{2k\pi n}{n}\right) - 2k\pi n \right| = +\infty$$

   Stąd, f_n nie zbiega jednostajnie do x. Zbadajmy niemal jednostajną zbieżność.

   $$\begin{aligned} \sup_{x\in[-M,M]} \left| n \sin \frac{x}{n} - x \right| &= \sup_{x\in[-M,M]} \left| n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} - x \right| \\ &= \sup_{x\in[-M,M]} \left| n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} \right| \\ &\leq \sup_{x\in[-M,M]} \frac{1}{n^2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \end{aligned}$$

   Widzimy, że w szeregu są nieparzyste wyrazy rozwinięcia e^x.

   $$\leq \frac{e^M}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   Stąd, $n \sin \frac{x}{n} \to x$ niemal jednostajnie.

2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x^2}$

   Granica punktowa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x^2} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & x \neq 0 \end{cases}$$

   Jest to funkcja ciągła. Teraz zbadajmy zbieżność jednostajną. Trzeba sprawdzić czy:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f_n(x) - x \right| = 0$$

   Stąd,

$$\left| \frac{nx}{n+x^2} - x \right| = \left| \frac{x^3}{n+x^2} \right|$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^3}{n+x^2} \right| = +\infty$$

   Jednostajna zbieżność nie wyszła, ale może uda się zrobić niemal jednostajną zbieżność, czyli na każdym zwartym podzbiorze $\mathbb{R}$. Niech $M > 0$.

$$\sup_{x\in[-M,M]} \left| f_n(x) - x \right| = \sup_{x\in[-M,M]} \left| \frac{x^3}{n+x^2} \right| \leq \frac{M^3}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   W tym wypadku, zbieżność jest niemal jednostajna.

3. $f_n(x) = x\dfrac{(n+1)x+n}{nx+1}, \quad x \in [0,\infty)$

   Granica punktowa:

$$\lim_{n\to\infty} x\frac{(n+1)x+n}{nx+1} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x+1 & x \neq 0 \end{cases}$$

   Uwaga! Jest to funkcja nieciągła, więc można wykluczyć zbieżność silniejszą niż punktowa. Zbieżność nie jest (niemal) jednostajna.

Zadanie 2 Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i dodatnia. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) = \log f(x)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^n = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)\,\mathrm{d}x\right)$, przy czym pierwsza zbieżność jest jednostajna.

To zadanie jest po to, żeby pokazać, że całka dobrze zachowuje się ze względu na zbieżność jednostajną. Można przykładowo wtedy wchodzić z granicą pod całkę. Użyjemy pierwszej granicy do policzenia drugiej.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} - 1\,\mathrm{d}x\right)^n$$

Pamiętajmy, że $(1+a_n)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{\lim na_n}$ jeśli $a_n \to 0$. Czy $a_n = \int_0^1 \left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right) \mathrm{d}x \to 0$? Wystarczy pokazać, że $\sqrt[n]{f(x)} - 1 \to 0$ jednostajnie na $[0,1]$ (bo wówczas z granicą można wejść pod całkę).

$$\left|\sqrt[n]{f(x)}-1\right| = \left|e^{\frac{1}{n}\log f(x)}-1\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}\big(\log f(x)\big)^k$$

Niech $L = \sup \log f(x)$,

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k}{k!} \leq \frac{1}{n}e^L \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Mamy zbieżność jednostajną $\sqrt[n]{f(x)} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Stąd a_n dąży do 0 jednostajnie. Stąd,

$$\left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)\mathrm{d}x\right]$$

Teraz już tylko trzeba pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right) \xrightarrow{n\to\infty} \log f(x)$ jednostajnie na $[0,1]$, bo to pozwoli wejść pod całkę z granicą. Jeśli tak, to:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \log f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sprawdźmy zbieżność jednostajną.

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,1]}\left|n\left(\sqrt[n]{f(x)}-1\right)-\log x\right| &= \sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\frac{1}{k!}(\log x)^k - \log x\right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{n^k}|\log f|^k \\
&\leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}L^k \leq \frac{1}{n^2}e^L \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Uwaga 2. Jeśli mamy szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \to f(x)$ zbieżny niemal jednostajnie i $x_k \to x$, to $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$. Innymi słowy,

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

Zadanie 3 Czy poprawne są wyliczenia:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

   Dla $|1-x|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n = x(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)^{n-1} = \frac{x(1-x)}{1-(1-x)} = 1-x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n = \lim_{x\to 0^+} 1-x = 1 \neq 0$$

   A więc tutaj nie można wejść z granicą, wyszliśmy poza obszar zbieżności szeregu geometrycznego. Zauważmy, że szereg jest niemal jednostajnie zbieżny dla $\{x\colon |1-x|<1\} = (0,2)$. Przechodząc z $x\to 0^+$ jest problem.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx^2}{1+nx^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 0^2}{1+n\cdot 0^2} = 0$

   Załużmy, że $x\neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2}{1+nx^2} = 1$$

   Zatem,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2}{1+nx^2} \neq 0$$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 2$

   Interesuje nas $x\to 1$: $x\in(1/2,3/2)$.

$$\left|\frac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n}\right| \leq \frac{\frac{9}{4}+1}{(n-1)^2+n} \leq \frac{13}{4(n-1)^2}, \quad n\geq 2$$

   Naturalnie, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{13}{4}\dfrac{1}{(n-1)^2} < \infty$. Z kryterium Weierstrassa szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2+1}{(x+n-1)^2+n}$ jest zbieżny jednostajnie na $(1/2,3/2)$ a zatem wyliczenia z polecenia są poprawne, bo można wejść z granicą pod taki szereg.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^x}{(2+x)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n} = 1$

   Tutaj również z kryterium Weierstrassa rachunek będzie poprawny.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2} = 0$

Rozważmy całkę $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Skoro $\frac{1}{1+t^2}$ maleje do 0 dla $t \to \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2}$$

Stąd wiadomo, że szereg jest zbieżny. Podobnie,

$$x + \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2} \geq \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Stąd wniosek, że

$$\forall x \in (0,1) \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2} \geq 0.5$$

zatem na pewno w granicy $x \to 0$ nie jest to zero. Można nawet udowodnić, że $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 4 Wykazać, że f jest klasy C^1 na $\mathbb{R}$ jeśli $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(nx)}{n^3}$ oraz $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{nx^2+3}}{n^2}$.

Twierdzenie 8. Jeśli $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\colon f_n \in C^1(\mathbb{R})$ oraz $\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ zbiega niemal jednostajnie oraz istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że wyjściowy szereg jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) \in C^1(\mathbb{R})$ oraz $\left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$.

Rozważmy pierwszą funkcję. Zauważmy, że $\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n^3}$ oraz $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} < \infty$. Z kryterium Weierstrassa $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ zbiega jednostajnie, $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$ oraz $\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{1}{n^2}$, więc analogicznie $\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ jest zbieżny jednostajnie oraz $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$. W szczególności f jest klasy C^1.

Zadanie 5 Znaleźć sumę szeregu $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+2}{n(n+1)}\frac{1}{2^n}$.

Rozważmy szereg potęgowy:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n+2}{n(n+1)}x^n = \sum_{n=1}^\infty a_n x^n$$

Promień zbieżności to

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+2}{n(n+1)}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Korzystając z twierdzenia $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to g \implies \sqrt[n]{a_n} = g$ dostajemy $R = 1$. W szczególności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2^n} < \infty$. Z szeregami potęgowymi można robić praktycznie wszystko. Szukamy funkcji $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} x^n$, $f(0) = 2$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}}_{g(x)} \end{aligned}$$

gdzie $g(0) = 0$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \\ g'(x) &= \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x} \\ g(x) &= -x + \log(1-x) + C, \quad C = 0 \end{aligned}$$

Wracając do związku z f' dostajemy:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{-x + \log(1-x)}{x^2}$$

To trzeba odcałkować. Dostaniemy w ten sposób funkcję $f(x)$, do której trzeba wstawić $x = 1/2$.

Wykład 7: Ćwiczenia 7

22 mar 2021 **Ciekawe różności** Szereg odwrotności liczb pierwszych.
Niech $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych. Wykazać, że szereg odwrotności tych liczb $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ jest rozbieżny.

Rozważmy $\mathcal{P}_N = \{p_i \colon p_i \leq N\}$.

$$\sum_{p_n \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p_n} \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$$

Rozważmy exp od tego szeregu.

$$\exp\left(\sum_{p_n \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{p_n}\right) = \prod_{p_n \in \mathcal{P}_N} \exp\left(\frac{1}{p_n}\right) \geq \prod_{p_n \in \mathcal{P}_N} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$$
$$\geq \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n}$$

gdzie n to liczba naturalna, bezkwadratowa (nie nawiera w rozkładzie potęg tych samych liczb pierwszych). Pytanie czy ta prawa suma jest rozbieżna do nieskończoności przy $N \to \infty$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2$$

W takim razie,

$$2 \exp \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{p_n} \geq 2 \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \text{bezkw.}}} \frac{1}{n} \geq \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \text{bezkw.}}} \frac{1}{n}$$
$$\geq \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} \xrightarrow{N \to \infty} \infty$$

Stąd, szereg odwrotności liczb pierwszych jest rozbieżny.

Zadanie 2 Wykazać, że f jest klasy C^1 na $(0, \infty)$, ma asymptotę $y = x$ w ∞ oraz $f(0) = 0 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Wykazać, także, że $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$. Dana jest $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)^2}$.

Rozważmy ciąg funkcyjny:

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2}$$
$$f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} - \frac{2nx}{(1+nx)^3} = \frac{1-nx}{(1+nx)^3}$$
$$f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Stąd,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4n} = \sup_{x>0} f_n(x)$$

Kryterium Weierstrassa nie jest tu stosowalne. Natomiast, dla $x \in [\varepsilon, R]$ mamy szacowanie

$$f_n(x) \leq \frac{R}{(1+\varepsilon n)^2} \leq \frac{R}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{R}{\varepsilon^2} < \infty$$

Z kryterium Weierstrassa, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednosotajnie na $[\varepsilon, R]$, zatem jest zbieżny niemal jednostajnie na dziedzinie. Stąd, funkcja $f(x)$ zdefioniowana przez ten szereg jest ciągła na $(0, \infty)$ (wycięliśmy 0, które jest w dziedzinie). Czy f jest klasy C^1?

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx}{(1 + nx)^3}$$

Dla $x \in [\varepsilon, R]$,

$$\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{1 + nR}{(1 + \varepsilon n)^3} \leq \frac{nR}{\varepsilon^3 n^3} + \frac{1}{\varepsilon^3 n^3}$$

To już daje szereg zbieżny. Z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych, $f \in C^1\big((0, \infty)\big)$ oraz $f'(x) = \sum f_n'(x) = \sum \frac{1 - nx}{(1 + nx)^3}$.

Teraz badamy asymptotę $f(x)$.

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} 0$$

Tak będzie, jeśli

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to \infty} f_n(x)$$

bo $f_n(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$. Można wejść z granicą pod sumę, jeśli zbieżność jest jednostajna na otoczeniu nieskończoności. Zauważmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[1, \infty)$ (co jest otoczeniem nieskończoności). Rzeczywiście,

$$\left|f_n(x)\right| \leq f_n(1)$$

dla $x \geq 1$, $n \in \mathbb{N}_+$.

$$f_n(1) = \frac{1}{(1 + n^2)}$$

A szereg generowany przez ten ciąg jest zbieżny. Z kryterium Weierstrassa mamy jednostajną zbieżność. Stąd, z granicą można wejść pod szereg i to daje żądaną asymptotę.

Teraz następny podpunkt. $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(0)$ ale $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Zauważmy, że

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1 + nx)^2} \stackrel{?}{=} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1 + y)^2} - \frac{1}{1 + y}\bigg|_0^{\infty} = 1$$

Dlaczego ta granica jest całką niewłaściwą? Trzeba być ostrożnym bo te szeregi Riemanna dobrze działają na zbiorach zwartych a tutaj mamy całkę niewłaściwą.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} \le \sum_{n=0}^\infty \frac{x}{(1+nx)^2} = x + \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{(1+nx)^2}$$
$$\le x + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}$$

Z trzech ciągów dostajemy, że

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=0}^\infty \frac{x}{(1+nx)^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}$$

Widać, że ten trick by przeszedł generalnie z funkcjami monotonicznymi.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} f'(x) \overset{?}{=} \frac{1}{2}$$

Zadanie 3 Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu $\sum_{n=0}^\infty \frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!}$.

Dla funkcji e^x danej szeregiem,

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

czyli jest zbieżny na całym $\mathbb{R}$. W przypadku szeregu $f(x)$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n+1}\frac{1}{n!}\frac{(n+1)!(n+2)}{n-1} = \infty$$

Rozważamy różnicę:

$$f(x) - e^x = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{n-2}{n+2} - 1\right)\frac{1}{n!}x^n = -4\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+2}\frac{1}{n!}x^n$$

Dla $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
&= -4\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^\infty \frac{n+1}{(n+2)!}x^{n+2} \\
f_{aux}(x) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{n+1}{(n+2)!}x^{n+2} \\
f'_{aux}(x) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)!}x^{n+1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{n+1}}{n} = xe^x \\
f_{aux}(0) &= 0 \\
f_{aux}(x) &= (x-1)e^x + C \\
f'_{aux}(x) &= (x-1)e^x + e^x = xe^x
\end{aligned}$$

Z wartości w $x = 0$ mamy $C = 1$.

$$f_{aux}(x) = (x-1)e^x + 1$$

Wniosek jest taki, że

$$f(x) - e^x = -\frac{4}{x^2} f_{aux}(x) = -\frac{4}{x}\left[(x-1)e^x + 1\right]$$

Czy f jest osobliwa w $x = 0$? No nie powinna.

$$f(0) = -1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2}{n+2}\frac{0^n}{n!} = \frac{-2}{2} = -1$$

Podobny wynik dostajemy licząc granicę z wyznaczonego wzoru.

$$f(x) = e^x - \frac{4}{x^2}\left[(x-1)e^x + 1\right] \xrightarrow{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0}\frac{4}{x^2}\left((x-1)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + 1\right)$$
$$= 1 - \frac{4}{2} = -1$$

Więc się wszystko zgadza.

Zadanie 4 Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n^2-1} x^{3n-5}$. Wskazówka: $f(x) = \frac{1}{x^5}\phi(x^3)$.

$$\phi(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}(2y)^n$$
$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = 1$$

Stąd, dla $|2y| < 1$ $\phi(y)$ jest dobrze określona. Stąd, $\left|x^3\right| < 1/2$, czyli $|x| < \sqrt[3]{1/2}$. Pozostaje do obliczenia jawna postać funkcji f, tudzież ϕ.

$$\phi(y) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-1}(2y)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-1}z^n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+1-1}{n^2-1}z^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)z^n$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} z^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)z^n$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} - 1 - z$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^n = -1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1} = -1 - \frac{z}{2} + \frac{1}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}}_{\text{różniczkujemy}}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1} = -\log(1-z)$$

Stąd,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n+1} = -1 - \frac{z}{2} - \frac{1}{z}\log(1-z)$$

Trzeba jeszcze obliczyć trzecią sumę.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n-1} = z\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{z-1}}{n-1} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1} = -z\log(1-z)$$

Finalnie,

$$\phi(z) = \frac{1}{1-z} - 1 - z + \frac{1}{2}\left(-z\log(1-z) - \frac{1}{z}\log(1-z) - 1 - \frac{z}{2}\right)$$
$$f(x) = \frac{1}{x^5}\phi(x^3) = \frac{1}{x^5}\left[\frac{1}{1-2x} - 1 - 2x + \frac{1}{2}\left(-2x\log(1-2x) - \frac{1}{2x}\log(1-2x) - 1 - x\right)\right]$$

Wykład 8: Ćwiczenia 8

26 mar 2021

Twierdzenie 9 (Któreś Abela)**.** Załóżmy, że mamy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności R. Jeśli $g(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ (na jednym z brzegów obszaru zbieżności) jest zbieżny to funkcja

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest ciągła na $(-R, R]$.

Przykład 1 Obliczyć wartość $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)} = S$.

$$\frac{1}{n}\frac{1}{2n+1} = \frac{A_n}{n} + \frac{B_n}{2n+1} = \frac{A_n(2n+1) + B_n n}{n(2n+1)}$$

Stąd $A_n = 1$ oraz $2A_n + B_n = 0$.

$$= \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$$

Rozważamy szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right)$$

Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$$

Z twierdzenia Abela,

$$S = f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$$

Dla $|x| < 1$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\log(1-x^2)$$

Teraz chcielibyśmy to scałkować.

$$\int \log x \, \mathrm{d}x = x(\log x - 1) + C$$

$$\begin{aligned} \int -\log(1-x^2) \, \mathrm{d}x &= -\int \log(1+x) \, \mathrm{d}x - \int \log(1-x) \, \mathrm{d}x \\ &= -(1+x)\big(\log(1+x) - 1\big) + (1-x)\big(\log(1-x) + 1\big) + C \\ f(0) &= 1 \implies C = 0 \\ f(1) &= -2(\log 2 - 1) = 2 - 2\log 2 \end{aligned}$$

Przykład 2 Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$

Rozpiszmy wyraz pod sumą co do modułu.

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2}$$

zauważmy, że szeregi $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$ oraz $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{3n+2}$ są zbieżne. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \frac{x^{3n+2}}{3n+2} \right)$$

Jest to pewien szereg potęgowy o promieniu:

$$R = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)} = 1$$

$$\begin{aligned} h(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1} + \frac{(-1)^{3n+2}}{3n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{3n+1} + \frac{(-1)^n}{3n+2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} \right) \end{aligned}$$

Obliczymy $-h(-1)$, które z twierdzenia Abela jest równe $\lim\limits_{x\to -1} -h(x)$. Przed nami więc zadanie policzenia $h(x)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} + x^{3n+1} = \frac{1}{1+x^3} + \frac{x}{1+x^3} \\ &= \frac{1+x}{1-x^3} \end{aligned}$$

Całkujemy,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{3}\big[\log(x^2+x+1) - 2\log(1-x)\big] + C \\ h(0) &= 0 \implies C = 0 \\ h(-1) &= \frac{1}{3}(\log 1 - 2\log 2) \end{aligned}$$

Finalnie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{2}{3}\log 2$$

Przestrzenie Banacha

Definicja 1 (Przestrzeń Banacha)**.** Przestrzenią Banacha jest przestrzeń wektorowa, unormowana i zupełna.

Przykłady: X – skończenie wymiarowa z dowolną normą (wszystkie normy są równoważne w przestrzeniach skończonego wymiaru). Również $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ z normą supremum $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} \big|f(t)\big|$.

Zadanie 1 Niech $X = \big\{(x_n)_{n\geq 0} \colon a_n \in \mathbb{R} \text{ oraz } \sum |a_n| < \infty\big\}$. Mamy zadaną normę $\big\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big\|_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Pokazać, że $\|\cdot\|_1$ jest normą na X oraz, że $\big(X, \|\cdot\|_1\big)$ jest przestrzenią Banacha.

Pokazujemy, że to jest norma. $\big\|(a_n)\big\|_1 = 0$ daje $(a_n) = 0$. ITD uzupełnić poozostałe DWA WARUNKI.

Zupełność: niech $(a^k)_{k=0}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów przestrzeni X (przestrzeni ciągów sumowanych ℓ^1) spełniającym warunek Cauchy'ego w normie $\|\cdot\|_1$, tzn. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon)(\forall k, k' > N_\varepsilon)\ \Big\|a^k - a$ ε. Ustalamy $n \in \mathbb{N}$. I jazda!

$$\left|a_n^k - a_n^{k'}\right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \left|a_m^k - a_m^{k'}\right| = \left\|a^k - a^{k'}\right\|_1 < \varepsilon$$

Widać, że $\forall n \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n^k)_{n-1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego liczb rzeczywistych.

$$a_n = \lim_{k\to\infty} a_n^k$$

Czy $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^1$? Czy $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \lim_{k\to\infty}(a_n^k)$?

Zauważmy, że ciągi Cauchy'ego w dowolnej przestrzeni metrycznej są ograniczone. Istnieje więc M takie, że $\left\|a^k\right\|_1 < M$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Zatem, dla każdego N,

$$\sum_{l=1}^{N} |a_l| = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{N} \left|a_l^k\right| \leq M$$

Jest to niezależne od N. W takim razie,

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| \leq M$$

To pokazuje, że $(a_l) \in \ell^1$.

$$\sum_{l=1}^{N} \left|a_l - a_l^k\right| = \lim_{k'\to\infty} \sum_{l=1}^{N} \left|a_l^{k'} - a_l^k\right|$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \colon k', k > N_\varepsilon$

$$\sum_{l=1}^{N} \left|a_l^{k'} - a_l^k\right| \leq \left\|a^k - a^{k'}\right\|_1 < \varepsilon$$

dla wszystkich N. Istnieje takie N_ε, że dla $k > N_\varepsilon$

$$\sum_{l=1}^{N} \left|a_l - a_l^k\right| \leq \varepsilon$$

N_ε nie zależy od N więc mogę przejść do nieskończoności. To oznacza, że

$$\left\|a - a^k\right\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

czyli $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = a$ w przestrzeni ℓ^1.

Zadanie 2 Niech K – zwarty, X – Banacha. Wówczas $Y = C(K, X) \ni f$. Takie funkcje f tworzą przestrzeń wektorową. Wykazać, że $\left(Y, \|\cdot\|_\infty\right)$ jest przestrzenią Banacha.

Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ to ciąg Cauchy'ego elementów Y. Czy istnieje $f \colon k \to X$ ciągła i taka, że $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$? f można zdefiniować w tylko jeden sposób.

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) \quad \text{dla } t \in K$$

Czy ta granica istnieje? Zauważmy, że

$$\left\|f_n(t) - f_{n'}(t)\right\|_X \leq \sup_{t\in K}\left\|f_n(t) - f_{n'}(t)\right\| = \|f_n - f_{n'}\|_\infty < \varepsilon$$

$\big(f_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest Cauchyego w X, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ istneieje i definiuje f.

Czy $f \in C(K, X)$? Czyli czy $\|\phi_n - \phi\|_\infty \to 0$? Ciągłość $t_k \to t \in K$:

$$\begin{aligned}\big\|f(t_k) - f(t)\big\|_X &\le \big\|f(t_k) - f_n(t_k)\big\| + \big\|f_n(t_k) - f(t)\big\| \\ &\le \big\|f(t_k) - f_n(t_k)\big\| + \big\|f_n(t_k) - f_n(t)\big\| + \big\|f_n(t) - f(t)\big\|\end{aligned}$$

Funkcje f_n są ciągłe.

$$\big\|f_n(t_k) - f_n(t)\big\| < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych k. Jeśli udowodnimy, że $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ to zarówno pierwszy jak i trzeci wyraz będą $< \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n.

$$\big\|f_n(s) - f_{n'}(s)\big\| \le s$$

dla każdego $n, n' > N_\varepsilon$ oraz $s \in K$. W gracy przy $n \to \infty$

Wykład 9: Ćwiczenia 9

Zadanie 3 Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C^1[0,1]$ normy $\|x\|_1 = \sup\limits_{t\in[0,1]} \big|x(t)\big| + \sup\limits_{t\in[0,1]} \big|\dot{x}(t)\big|$, 29 mar 2021 $\|x\|_2 = \big|x(0)\big| + \sup\limits_{t\in[0,1]} \big|\dot{x}(t)\big|$ oraz $\|x\|_3 = \displaystyle\int_0^1 \big|x(t)\big|\,\mathrm{d}t + \sup\limits_{t\in[0,1]} \big|\dot{x}(t)\big|$ są równoważne. Dowieść, że przestrzeń X jest zupełna względem tych norm.

Aby dowieść równoważności norm, możemy przykładowo jedną ograniczyć przez drugą z pewną stałą dodatnią.

$$\|x\|_2 = \big|x(0)\big| + \sup_{t\in[0,1]} \big|\dot{x}(t)\big| \le \sup_{t\in[0,1]} \big|x(t)\big| + \sup_{t\in[0,1]} \big|\dot{x}(t)\big| = \|x\|_1$$

Stąd $c_{21} = 1$. Teraz szukamy c_{12}. Szacoowanie $\big|x(t)\big|$ dla $t \in [0,1]$ przez $\|x\|_2$,

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\,\mathrm{d}s \\ \big|x(t)\big| &\le \big|x(0)\big| + \left|\int_0^t \dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \big|x(0)\big| + \int_0^t \sup_{s\in[0,1]} \big|\dot{x}(s)\big|\,\mathrm{d}s \\ &\le \big|x(0)\big| + t \sup_{s\in[0,1]} \big|\dot{x}(s)\big| \le \big|x(0)\big| + \sup_{s\in[0,1]} \big|\dot{x}(s)\big| = \|x\|_2 \\ \sup_{t\in[0,1]} \big|x(t)\big| &\le \|x\|_2\end{aligned}$$

Stąd,

$$\|x\|_1 = \sup\big|x(t)\big| + \sup\big|\dot{x}(t)\big| \le c_{12}\|x\|_2 = 2\|x\|_2$$

Teraz zajmijmy się trzecią normą.

$$\|x\|_3 = \int_0^1 \big|x(s)\big|\,\mathrm{d}s + \sup\big|\dot{x}(t)\big| \le \sup\big|x(t)\big| + \sup\big|\dot{x}(t)\big| = \|x\|_1$$

Stąd $c_{31} = 1$. W drugą stronę jest ciężej.

$$\|x\|_1 \leq c_{13}\|x\|_3$$

Z twierdzenia o własności średniej,

$$x(t) = x(s) + \dot{x}(\xi)(t-s), \quad \sigma \in (s,t)$$

Skoro, $|t-s| < 1$ to używamy nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned}
\left|x(t)\right| &\leq \left|x(s)\right| + \left|\dot{x}(\xi)\right| \leq \left|x(s)\right| + \sup_{\xi \in [0,1]} \left|\dot{x}(\xi)\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|x(s)\right| \mathrm{d}s + \sup \dot{x}(s) = \|x\|_3 \\
\sup \left|x(t)\right| &\leq \|x\|_3 \\
\|x\|_1 &= \sup \left|x(t)\right| + \sup \left|\dot{x}(t)\right| \leq 2\|x\|_3 = c_{13}\|x\|_3
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, ze $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$ gdzie $c_{12} = 2$, $c_{21} = 1$ oraz $\|x\|_1 \sim \|x\|_3$ gdzie $c_{13} = 2$, $c_{31} = 1$. Relacja równoważności norm jest przechodnia, zatem $\|x\|_2 \sim \|x\|_3$.

Czy przestrzeń $\left(C^1[0,1], \|\cdot\|_1\right)$ jest zupełna? Ustalmy $(x_n)_n \subset C^1[0,1]$ Cauchy'ego względem $\|\cdot\|_1$. Czy istnieje $x \in C^1[0,1]$ takie, że $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_1 = 0$?

Twierdzenie 10. Jeśli x_n jest ciągiem funkcji klasy $C^1[0,1]$ takim, że $x_n \to x$ punktowo oraz $\dot{x}_n \to y$ jednotajnie, to $x_n \to x$ jednostajnie oraz $\dot{x} = y$.

Z powyższego twierdzenia wynika zupełność. W jaki sposób? x_n jest Cauchy'ego względem tej normy, zatem używając twierdzenia

$$\|x_n - x\|_1 = \sup \left|(x_n - x)(t)\right| + \sup \left|(\dot{x_n} - \dot{x})(t)\right| \to 0$$

Zadanie 4 Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C[a,b]$ norma $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \left|x(t)\right|$ jest mocniejsza od normy $\|x\|_1 = \int_a^b \left|x(t)\right| \mathrm{d}t$, tzn. że istnieje stała $C_0 > 0$ taka, że $\|x\|_1 \leq C_0\|x\|_\infty$ dla każdego $x \in X$, natomiast nie istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|x\|_\infty \leq C\|x\|_1$ dla każdego $x \in X$.

Bez straty ogólności rozważamy $a = 0$ i $b = 1$ (homeomorficzność odcinka).

$$\|x\|_1 = \int_0^1 \left|x(t)\right| \mathrm{d}t \leq \sup_{s\in[0,1]} \left|x(s)\right| \cdot \int_0^1 \mathrm{d}t = \|x\|_\infty \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$$

Trzeba wykombinować, że $C > 0$ takie że $\|x\|_\infty < c\|x\|_1$ nie istnieje. Nie istnieje, gdyż istnieje ciąg funkcyjny $(x_n)_n \subset X$ taki, że $\|x_n\|_\infty = 1$, $\|x_n\|_1 = 1/n$.

Uzupełnić rysunek.

Uzupełnić resztę

Wykład 10: Ćwiczenia 10

Zadanie 1 Laplasjan we współrzędnych sferycznych. 31 mar 2021

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \cos^{-1}(z/r) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$

Laplasjan wygląda następująco:

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

Zasadniczo wystarczy pozamieniać współrzędne regułami łańcuchowymi.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\phi \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi \qquad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Wyniki tej porywającej zabawy przepiszemy do macierzy – Jakobianu.

$$\frac{\partial(r,\theta,\phi)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta} & \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Przed nami więcej atrakcji.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Prosto się przekonać, że

$$\frac{\partial(r,\theta,\phi)}{\partial(x,y,z)} \cdot \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = I_3$$

Teraz operatory różniczkowe we współrzędnych sferycznych,

$$\partial_x = \sin\theta\cos\phi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\,\partial_\theta - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\partial_\phi$$

$$\begin{aligned}
\big(\partial_x\circ\partial_x\big)(f) &= \sin\theta\cos\phi\,\partial_r\big(\partial_x f\big) + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\,\partial_\theta\big(\partial_x f\big) - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\cos\theta}\,\partial_\phi\big(\partial_x f\big) \\
&= \sin\theta\cos\phi\,\partial_r\left(\sin\theta\cos\phi\,\partial_r f + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\,\partial_\theta f - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\partial_\phi f\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\,\partial_\theta\left(\sin\theta\cos\phi\,\partial_r f + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\,\partial_\theta f - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\partial_\phi f\right) \\
&\quad - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\partial_\phi\left(\sin\theta\cos\phi\,\partial_r f + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\,\partial_\theta f - \frac{1}{r}\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\,\partial_\phi f\right) \\
&= \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\,\partial_r\,\partial_\theta f - \sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\frac{1}{r^2}\,\partial_\theta f + \cdots
\end{aligned}$$

W podobny sposób, korzystając z reguły Leibniza i reguły łańcuchowej dostajemy pozostałe operatory.

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r^2}\,\partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial_\phi^2 + \frac{2}{r}\,\partial_r + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\partial_\theta$$

Pochodna, pochodna kierunkowa, pochodna cząstkowa

$F\colon O_1 \to O_2$, $O_1 \subset \mathbb{R}^n$, $O_2 \subset \mathbb{R}^m$.

$$\frac{\big\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\big\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Wówczas $F'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pochodną kierunkową nazywamy:

$$\nabla_h F(x) = \lim_{t\to 0}\frac{F(x+th) - F(x)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x+th)\bigg|_{t=0}$$

Jeśli F jest różniczkowalna, to $F'(x)h = \nabla_h F(x)$. Ponadto,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}F(x) = \nabla_{e_i}F(x)$$

Jeśli natomiast F ma ciągłe pochodne cząstkowe to również istnieje silna pochodna F'.

Zadanie 1 Dana jest funkcja $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$. W kierunku jakich wektorów jednostkowych $\vec{a}$ pochodna kierunkowa $\nabla_{\vec{a}}f(1,-2)$ osiąga największą i najmniejszą wartość?

$$\begin{aligned}\partial_x f &= 4x^3 + 4xy - y + 1\\ \partial_y f &= 2x^2 - x\end{aligned}$$

Są to funkcje wielomianowe a zatem ciągłe. Stąd pochodna mocna istnieje oraz

$$\begin{aligned}
f'(x,y) &= \begin{bmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}4x^3 + 4xy - y + 1 & 2x^2 - x\end{bmatrix}\\
f'(1,-2) &= \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\\
\nabla_a f(1,-2) &= \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}\\
\big|f'(1,-2)a\big| &\le \big\|f'(1,-2)\big\|\|a\| = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Stąd, pochodna kierunkowa jest maksymalna i minimalna dla

$$\begin{aligned}
a_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\\
a_{\min} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Zadanie 2 Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana będzie przez

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Udowodnić, że f jest ciągła i ma pochodne cząstkowe w dowolnym punkcie $\mathbb{R}^2$, ale nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$. Pokazać, że f ma pochodne kierunkowe $(0,0)$ we wszystkich kierunkach.

Ciągłość i różniczkowalność poza zerem jest oczywista. Ciągłość w $(x,y) = (0,0)$:

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$\left|\frac{x^3 y}{x^4 + y^2}\right| \leq |x| \left|\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right| \leq |x| \frac{\frac{1}{2}(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Czyli f jest ciągła w $(x,y) = (0,0)$. Policzmy pochodne kierunkowe w $(0,0)$.

$$\nabla_{(\xi,\eta)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\xi, t\eta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(t\xi + t\eta + \frac{t^4 \xi^3 \eta}{t^4 \xi^4 + t^2 \eta}\right)$$

$$= \xi + \eta + \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \frac{t^4 \xi^3 \eta}{t^2(\eta + t^2 \xi^4)} = \xi + \eta$$

Czyli istnieje i jest liniowa w (ξ, η). Jedynym możliwym kandydatem na pochodną jest to, co właśnie powstało.

$$\frac{f(\xi,\eta) - f(0,0) - \nabla_{(\xi,\eta)} f(0,0)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{\xi + \eta + \frac{\xi^3 \eta}{\xi^4 + \eta^2} - (\xi + \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$= \frac{\xi^3 \eta}{(\xi^4 + \eta^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \underset{?}{\xrightarrow{(\xi,\eta)\to 0}} 0$$

Połóżmy $\eta = \xi^2$ i zobaczmy, że się popsuje.

$$\frac{\xi^3 \xi^2}{\xi^4 + \xi^4} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \xi^4}} = \frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2 + \xi^4}} = \frac{\xi}{|\xi|} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \to \frac{1}{2}$$

W związku z tym, pochodna silna nie istnieje.

Wykład 11: Ćwiczenia 11

Zadanie rozgrzewkowe Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest 3-krotnie różniczkowalna, a $\mu(x,y,z) = xyz$, to istnieje $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $F \circ \mu = \dfrac{\partial^3 (f \circ \mu)}{\partial\, \partial x\, \partial y\, \partial z^3}$. 09 kwi 2021

Bierzemy $G = f \circ \mu = f(xyz)$. Różniczkujemy trzy razy. f' to zwykła pochodna funkcji jednej zmiennej.

$$\partial_z f(xyz) = f'(xyz) \cdot xy$$

$$\partial_y \big(f'(xyz)xy\big) = f''(xyz)xzxy + f'(xyz)x$$

$$\partial_x \big(f''(xyz)x^2yz + f'(xyz)x\big) = f'''(xyz)x^2y^2z^2 + 2f''(xyz)xyz + f''(xyz)xyz + f'(xyz)$$

Stąd,

$$F(t) = f'''(t)t^2 + 3f''(t)t + f'(t)$$

Zadania z puszczeniem oka Zadania na różniczkowie w przestrzeniach Banacha.
Na $X = C[0,1]$ z normą supremum określmy funkcję $f\colon X \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^2 x(t) x(1-t)\,\mathrm{d}t$.
Dla $x, h \in X$ znaleźc pochodną kierunkową $\nabla_h f(x)$.

> **Definicja 2.** A jest pochodną f w punkcie $x \in C[0,1]$ jeśli $A\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ liniowe ograniczone odwzorowanie takie, że
>
> $$\frac{\bigl|f(x+h) - f(x) - Ah\bigr|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Krok 1: Obliczamy pochodną kierunkową.

$$\begin{aligned}
\nabla_h f(x) &\overset{?}{=} \lim_{s\to 0} \frac{f(x+sh) - f(x)}{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(x+sh)\Bigg|_{s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_0^1 t^2 (x+sh)(t)(x+sh)(1-t)\,\mathrm{d}t \Bigg|_{s=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \Biggl(\int_0^1 t^2 x(t) x(1-t)\,\mathrm{d}t + s\biggl(\int_0^1 t^2 x(t) h(1-t) + \int_0^1 t^2 x(1-t) h(t)\,\mathrm{d}t \biggr) + s^2 \int_0^1 t^2 h(t) h(1 - \\
&= \int_0^1 t^2 x(t) h(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 x(1-t) h(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Zauważmy, że jest to liniowe odwzorowanie $C[0,1] \ni h \mapsto \dots \in \mathbb{R}$. Pochodna kierunkowa $Ah = \nabla_h f(x)$ jest liniowa w h.

Krok 2: badamy czy zależność jest ograniczona (czyli ciągła, co jest jednoznaczne na poziomie odwzorowań liniowych) w h.

$$\begin{aligned}
|Ah| &= \left| \int_0^1 t^2 x(t) h(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2 x(1-t) h(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 t^2 x(t) h(1-t)\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_0^1 t^2 x(1-t) h(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 t^2 \bigl|x(t)\bigr|\,\mathrm{d}t \cdot \sup_{t\in[0,1]} \bigl|h(t)\bigr| + \int_0^1 t^2 \bigl|x(1-t)\bigr|\,\mathrm{d}t \cdot \sup_{t\in[0,1]} \bigl|h(t)\bigr|
\end{aligned}$$

Niech C to będzie suma tych dwóch całek.

$$= C \sup_{t\in[0,1]} \bigl|h(t)\bigr| = C\|h\|$$

Czyli napisaliśmy, że

$$|Ah| \leq C\|h\|$$

A jest więc ograniczonym odwzorowaniem. Następnym pytaniem jest, czy $f(x+h) - f(x) - Ah$ ma taką asymptotykę jak ma mieć. Odpowiedź będzie pozytywna.

$$\frac{1}{\|h\|}\left[\int_0^1 t^2(x+h)(t)(x+h)(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^2x(t)x(1-t)\,\mathrm{d}t - Ah\right]$$

Pozostaną z tego tylko wyrazy kwadratowe w h!

$$= \frac{1}{\|h\|}\int_0^1 t^2h(t)h(1-t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{\|h\|\to 0} 0$$

Pokażmy tę zbieżność. Skoro:

$$\left|\int_0^1 t^2h(t)h(1-t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \cdot \left(\sup_{t\in[0,1]}|h|\right)^2 = \frac{1}{3}\|h\|^2$$
$$\frac{\big|f(x+h) - f(x) - Ah\big|}{\|h\|} \leq \frac{1}{3}\frac{\|h\|^2}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\|\to 0} 0$$

Wiwat i famfary.

Następne zadanie Na $X = C[0,1]$ z normą supremum określamy funkcję $f\colon X \to X$ wzorem $f(x) = |x|$. Sprawdzić, że jeśli zbiór $Z_x = \big\{t \in [0,1]\colon x(t) = 0\big\}$ jest niepusty, to nie dla wszystkich $h \in X$ pochodna kierunkowa $\nabla_h f(x)$ istnieje. Pokazać, że dla każdego $x \in X$ takiego, że $Z_x = \varnothing$ funkcja f ma mocną pochodną w x.

Bierzemy $x \in C[0,1]$ i zakładamy, że $Z_x \neq \varnothing$ oraz $t- \in Z_x$. Weźmy $h \in C[0,1]$ takie, że $h(t_0) \neq 0$. Zobaczymy gdzie są przeszkody do istnienia pochodnej kierunkowej. Musimy myśleć o różniczkowaniu modułu. Ono jest naturalnie kłopotliwe w zerze. Czy istnieje:

$$\nabla_h f(x) = \lim_{s\to 0}\frac{|x+sh| - |x|}{s}$$

napisaliśmy granicę w sensie noormy supremum. Lewa strona to jest wektor, będący granicą ciągów wektorów po prawej stronie. Jeśli granica jest zadana przez normę sup to również punktowo jest zbieżność. Jeśli istnieje pochodna kierunkowa, to istnieje granica w każdym punkcie (zbieżność jednostajna implikuje zbieżność punktową), czyli istnieje:

$$\lim_{s\to 0}\frac{\big|(x+sh)\big|(t_0) - |x|(t_0)}{s}$$

W punkcie t_0 x się zeruje.

$$= \lim_{s\to 0}\frac{\big|sh(t_0)\big|}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{|s|}{s}h(t_0) = h(t_0)\begin{cases}1 & s>0\\ -1 & s<0\end{cases}$$

Jeśli pochodna kierunkowa miałaby istnieć to dostalibyśmy jednoznaczną granicę punktową. Stąd wniosek, że pochodna kierunkowa nie istnieje.

Sprawdźmy, że jeśli zachodzi implikacja $x(t) = 0 \implies h(t) = 0$ to pochodna kierunkowa $\nabla_h f(x)$ istnieje i jest równa $\operatorname{sgn} x \cdot h$. Widać, że na pewno jest to funkcja ciągła.

$$\lim_{s\to 0} \frac{|x+sh|(t) - |x|(t)}{s} = \begin{cases} 0 & x(t) = 0 \\ h(t) & x(t) > 0 \\ -h(t) & x(t) < 0 \end{cases}$$

Można sprawdzić, że ta zbieżność jest jednostajna. W związku z tym $\nabla_h f(x) = \operatorname{sgn}(x)h \in C[0,1]$. Jeśli h zeruje się co najmniej tam gdzie x się zeruje to pochodna kierunkowa, jak widać, istnieje.

Teraz rozważmy inny przypadek. $Z_x = \varnothing$ to f jest różniczkowalne w punkcie x. Założyliśmy, że funkcja $x(t)$ się nie zeruje, jest na odcinku spójnym, zatem dla każdego t, $x(t) > 0$ lub $x(t) < 0$. Bez straty ogólności, $x(t) > 0$.

$$\nabla_h f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot h = h$$

$C[0,1] \ni h \mapsto h \in C[0,1]$ – odwzorowanie identycznościowe, zatem ciągłe (mamy ograniczoność). Badamy iloraz różnicowy.

$$\frac{\big\| |x+h| - |x| - \nabla_h f(x) \big\|}{\|h\|}$$

$x > 0$, zatem $\inf x = m$ jest osiągane jakoś. Jeśli $\|h\| < m/2$, to $x + h > 0$. Zatem dla dostatecznie małych h,

$$\frac{\big\| |x+h| - |x| - \nabla_h f(x) \big\|}{\|h\|} = \frac{\|x+h-x-h\|}{\|h\|} = 0$$

Granica przy $\|h\| \to 0$ jest zerowa, bo dla dostatecznie małych h to po prostu jest dokładnie zero! To kończy wywód.

Zadanie Zbadać różniczkowalność odwzorowań.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Poza zerem to jest funkcja wymierna zatem ma ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe, zatem poza zerem ma ciągłą pochodną mocną.

   $$f' = \begin{bmatrix} \partial_x f & \partial_y f \end{bmatrix}$$

   Problem pozostaje dla $(x,y) = (0,0)$. Warto jest obliczyć pochodne kierunkowe $\nabla_h f(0,0)$. Niech

   $$h = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \neq 0 \in \mathbb{R}^2$$

   $$\begin{aligned} \nabla_h f(0,0) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(0+sh) - f(0)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} f(s\xi, s\eta) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \frac{s^2\xi\eta \cdot s(\xi+\eta)}{s^2(\xi^2+\eta^2)} = \frac{\xi\eta(\xi+\eta)}{\xi^2+\eta^2} \end{aligned}$$

Gdyby istniała pochodna mocna, to by istniała pochodna kierunkowa. Pochodna jest liniowa w przyroście h, ale to co dostaliśmy jest nieliniowe w h. Istnienie pochodnej mocnej jest wykluczone. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Znów jedyny problem mamy w zerze. Znowóż sprawdzimy pochodną kierunkową.

$$\nabla_h f(0,0) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \frac{s^4(\xi^4+\eta^4)}{s^2(\xi^2+\eta^2)} = \lim_{s\to 0} s \frac{\xi^4+\eta^4}{\xi^2+\eta^2} = 0$$

Odwzorowanie zerujące jest w szczególności liniowe i ciągłe. Pochodna kierunkowa istnieje. Zostaje więc pytanie czy pochodna mocna $f'(0,0) = 0$? Nie wiadomo. Idziemy z definicji w kłopotliwych sytuacjach. Pamiętamy, że wszystkie normy na przestrzeni skończenie wymiarowej są równoważne! Wyniki nie zależą od wyboru normy.

$$\frac{f(0+h) - f(0) - 0 \cdot h}{\|h\|} = \frac{f(h)}{\|h\|} = \frac{\xi^4+\eta^4}{\xi^2+\eta^2} \frac{1}{\|h\|}$$

Wobec swobody wyboru normy, wybierzemy sobie zwykłą normę pitagorejską.

$$\leq \frac{(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \xrightarrow{\|h\|\to 0} 0$$

Konkluzja jest taka, że f jest różniczkowalna w zerze oraz $f'(0) = 0$.

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Nie jest to różniczkowalne, bo nie istnieje $\nabla_h f(0,0)$.

$$\nabla_h f(0,0) = \lim_{s\to 0} \frac{\sqrt{s^2\xi^2 + \xi^2\eta^2}}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{|s|}{s} \sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

To pokazuje, że nie istnieje.

3. $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$

Obieramy sobie jakąś normę (pitagorejską na przykład) i sprawdzamy z definicji:

$$\begin{aligned} \frac{\left|f(h) - f(0) - 0 \cdot h\right|}{\|h\|} &= \frac{\sqrt{\xi^4+\eta^4}}{\|h\|} \leq \frac{\sqrt{(\xi^2+\eta^2)^2}}{\|h\|} \\ &= \sqrt{\xi^2+\eta^2} \xrightarrow{\|h\|\to 0} 0 \end{aligned}$$

Czyli istnieje pochodna silna w zerze i jest odwzorowaniem zerowym.

Jeszcze raz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right)$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

Szereg zbieżny potęgowy f przedłuża się w sposób ciągły do $x = 1$. $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{n-1} - 2x^{2n} \right) = \frac{1}{1-x} - \frac{2x^2}{1-x^2} \\
&= \frac{1}{1-x} + 2\frac{1-x^2-1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + 2\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{1}{1-x} + 2 - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \\
&= 2 - \frac{1}{1+x} \\
f(x) &= 2x - \log(1+x) + C \\
f(0) &= 0 = C \\
f(1) &= 2 - \log 2
\end{aligned}$$

Wykład 12

12 kwi 2021 **Zadanie 1** Niech $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, $c > 0$. Wykazać, że $\psi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ spełnia równanie falowe $\partial_t^2 \psi - c^2\, \partial_x^2 \psi = 0$. Na odwrót, jest funkcja $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ spełnia równanie falowe, to istnieje $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ takie, że $\psi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$.

$$\partial_t^2 f(x+ct) = c\,\partial_t f'(x+ct) = c^2 f''(x+ct)$$

Uzupełnić sobie

Zadanie 2 Na zbiorze $\Omega = \big\{(x,y) \colon x > 0,\ y > 0\big\}$ rozważmy współrzędne $u = \sqrt{xy}$, $v = y/x$. Wyrazić operator różniczkowy $x^2\,\partial_x^2 - y^2\,\partial_y^2$ we współrzędnych (u,v) i rozwiązać równanie różniczkowe $(x^2\,\partial_x^2 - y^2\,\partial_y^2)\phi(x,y) = 0$.

Przyjdźmy od razu do sposobu niebrutalnego.

$$\begin{aligned}
x^2\,\partial_x^2 - y^2\,\partial_y^2 &= \big(x\,\partial_x - y\,\partial_y\big)\big(x\,\partial_x + y\,\partial_y\big) + \text{COŚ} \\
&= x\,\partial_x x\,\partial_x - y\,\partial_y y\,\partial_y - y\,\partial_y x\,\partial_x + x\,\partial_x y\,\partial_y + \text{COŚ} \\
&= x\,\partial_x x\,\partial_x - y\,\partial_y y\,\partial_y + \text{COŚ}
\end{aligned}$$

Dzięki regule Leibniza,

$$= x^2\,\partial_x^2 + x\,\partial_x - y^2\,\partial_y^2 - y\,\partial_y + \text{COŚ}$$

W takim razie,

$$\begin{aligned}\text{COŚ} &= y\,\partial_y - x\,\partial_x \\ x^2\,\partial_x^2 - y^2\,\partial_y^2 &= (x\,\partial_x - y\,\partial_y)(x\,\partial_x + y\,\partial_y - 1)\end{aligned}$$

I zabawa dalej.

$$\begin{aligned}(x\,\partial_x - y\,\partial_y)u &= \frac{1}{2}\sqrt{xy} - \frac{1}{2}\sqrt{xy} = 0 \\ (x\,\partial_y - y\,\partial_y)v &= -2v \\ (x\,\partial_x + y\,\partial_y)u &= \frac{1}{2}\sqrt{xy} + \frac{1}{2}\sqrt{xy} = \sqrt{xy} = u \\ (x\,\partial_x + y\,\partial_y)v &= 0\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}(x\,\partial_x + y\,\partial_y) &= u\,\partial_u \\ (x\,\partial_x - y\,\partial_y) &= -2v\,\partial_v\end{aligned}$$

Finalnie,

$$\begin{aligned}x^2\,\partial_x^2 - y^2\,\partial_y^2 &= -2v\,\partial_v\big(u\,\partial_u - 1\big) \\ &= -2vu\,\partial_v\left(\partial_u - \frac{1}{u}\right)\end{aligned}$$

Interesuje nas równanie:

$$-2vu\,\partial_v\left(\partial_u - \frac{1}{u}\right)F(u,v) = 0$$

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}u\,\partial_u\left(\frac{1}{u}F\right) &= u\frac{1}{u}\,\partial_u F + u\,\partial_u\left(\frac{1}{u}\right)F \\ &= \partial_u F - \frac{1}{u}F\end{aligned}$$

Zatem,

$$\begin{aligned}-2vu\,\partial_v u\,\partial_u\frac{1}{u}F &= 0 \\ -2vu^2\,\partial_v\,\partial_u\frac{1}{u}F &= 0 \\ \partial_v\,\partial_u\left(\frac{1}{u}F\right) &= 0 \\ \frac{1}{u}F &= f(u) + g(v) \\ F(u,v) &= uf(u) + ug(v) \\ F(x,y) &= \sqrt{xy}\,f\big(\sqrt{xy}\big) + \sqrt{xy}\,g\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

To jest rozwiązanie ogólne naszego równania. Wszystkie rozwiązania są tej postaci.

Trzeci stopień wtajemniczenia Rozwiązać równanie: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}z - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}z + \frac{\partial^2}{\partial y^2}z = 0.$

$$\begin{aligned} &\partial_x^2 - 2\,\partial_x\,\partial_y + \partial_y^2 = \big(\partial_x - \partial_y\big) \circ \big(\partial_x - \partial_y\big) \\ &\big(\partial_x - \partial_y\big)^2 z(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Niech $\xi = x + y$ oraz $\eta = x - y$.

$$\begin{aligned} \partial_x - \partial_y &= \partial_\xi + \partial_\eta - \partial_\xi + \partial_\eta = -2\,\partial_\eta \\ z(x,y) &= \tilde{x}(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Równoważnie więc

$$4\,\partial_\eta^2 \tilde{z}(\xi,\eta) = 0$$

Stąd widać rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \partial_\eta \tilde{z} &= C(\xi) \\ \tilde{z}(\xi,\eta) &= \eta C(\xi) + D(\xi) \\ z(x,y) &= \tilde{z}\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big) \\ &= (x-y)C(x+y) + D(x+y) \end{aligned}$$

Czwarta gęstość Rozwiązać równanie: $y\,\partial_x z - x\,\partial_y z = (y-x)z$ gdzie $z = z(x,y)$ wprowadzając nowe współrzędne $u = x^2 + y^2$, $v = \log(y/x)$ i $w = x + y - \log z$ i traktując $w = w(u,v)$. Załóżmy przy tym dla spokoju, że $x, y, z > 0$.

$$\begin{aligned} w = w(u,v) = w\left(x^2 + y^2, \log\frac{y}{x}\right) &= x + y - \log z(x,y) \\ \partial_x w = 2x\,\partial_u w - \frac{1}{x}\,\partial_v w &= 1 - \frac{1}{x}\,\partial_x z \\ \partial_y w = 2y\,\partial_u w + \frac{1}{y}\,\partial_v w &= 1 - \frac{1}{z}\,\partial_y z \\ \partial_x z &= z\left(1 - 2x\,\partial_u w + \frac{1}{x}\,\partial_v w\right) \\ \partial_y z &= z\left(1 - 2y\,\partial_u w - \frac{1}{y}\,\partial_v w\right) \end{aligned}$$

Wstawiamy to wszystko do równania różniczkowego.

$$\begin{aligned} y\,\partial_x z - x\,\partial_y z &= yz\left(1 - 2x\,\partial_u w + \frac{1}{x}\,\partial_v w\right) - xz\left(1 - 2y\,\partial_u w - \frac{1}{y}\,\partial_v w\right) \\ &= (y-x)z \end{aligned}$$

To jest równoważne warunkowi

$$\begin{aligned} (y-x)z &= (y-x)z + \left(\frac{y}{x} + z\,\partial_v w\right) \\ \partial_v w &= 0 \\ w &= f(u) = f\big(x^2 + y^2\big) \end{aligned}$$

Kończąc,

$$\begin{aligned} x + y + \log z &= f\left(x^2 + y^2\right) \\ \log z &= -x - y + f\left(x^2 + y^2\right) \\ z &= e^{-x-y} e^{f\left(x^2+y^2\right)} \end{aligned}$$

Wykład 13

Wykład 14

23 kwi 2021

Wykład 15: Ćwiczenia 15

23 kwi 2021

Zadanie 8 Wśród trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć taki, dla którego bryła obrotowa powstała przez obrót dookoła jednego z boków ma największą objętość. 23 kwi 2021

Niech trójkąt ma boki a, b, c. Obracamy wokół c.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2p \\ c &= c_1 + c_2, \quad h^2 = c_1 c_2 \\ V &= \frac{1}{3}\pi h^2 c \end{aligned}$$

Z Pitagorasów albo czegokolwiek innego,

$$\begin{aligned} 4(b^2 - h^2)(a^2 - h^2) &= (a^2 - b^2 - a^2)^2 + 4h^2(c^2 - b^2 - a^2) + 4h^4 \\ 4h^2c^2 &= 4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2 \\ &= (2ab - c^2 + a^2 + b^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2) \\ &= \left((a+b)^2 - c^2\right)\left(c^2 - (a-b)^2\right) \\ &= (a + b - c)(a + b + c)(c + a - b)(c - a + b) \\ &= 2p(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a) \end{aligned}$$

Można było użyć wzoru Herona i nie odkrywać koła.

$$\begin{aligned} h^2c^2 &= 4p(p-a)(p-b)(p-c) \\ V(a, b, c) &= \frac{4}{3}\frac{\pi}{c}p(p-a)(p-b)(p-c) \end{aligned}$$

Teraz trzeba zoptymalizować używając wiązu.

$$= \frac{4}{3}\pi p(p-a)(p-b)\left(\frac{p}{2p - a - b} - 1\right)$$

Mamy zmaksymalizować funkcję na zbiorze zwartym, gdyż $2p - a - b \geq 0$ oraz $a, b \geq 0$ przy dookreśleniu w sposób ciągły $V(a, b, 0) = 0$ i podobnie dla innych zerowych boków. Funkcja ciągła na zbiorze zwartym przyjmuje kresy.

$$\begin{aligned} f(a, b) &= V(a, b, 2p - a - b) \\ \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{4}{3}\pi p(p-b)\frac{\partial}{\partial a}\left[(p-a)\left(\frac{p}{2p - a - b} - 1\right)\right] \\ &= \frac{4}{3}\pi p(p-b)\left[1 - \frac{p}{2p - a - b} + \frac{p(p-a)}{(2p - a - b)^2}\right] \end{aligned}$$

Równanie punktu krytycznego:

$$p(p-a) = \left(\frac{p}{2p-a-b} - 1\right)(2p-a-b)^2$$

Podobnie dla pochodnej po b,

$$p(p-b) = \left(\frac{p}{2p-a-b} - 1\right)(2p-a-b)^2$$

Lewe strony są identyczne, stąd $a = b$. Wstawmy $a = b$ do pierwszego równania.

$$\begin{aligned}
p(p-a) &= \left(\frac{p}{2p-2a} - 1\right)(2p-2a)^2 \\
&= 4(p-a)^2\left(\frac{p}{2p-2a} - 1\right) \\
p &= 4(p-a)\frac{p-2p+2a}{2p-2a} \\
p &= 2(2a-p) \\
4a &= 3p \\
a &= \frac{3}{4}p = b \\
2p &= c + \frac{3}{4}p + \frac{3}{4}p \\
c &= \frac{1}{2}p
\end{aligned}$$

Wyszło, że c jest różne od a, b.

Zadanie 15 Funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \big(1 + |x|\big)^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ gdzie $0 \neq a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ jest ustalony, a $|x| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$ = norma x. Zbadać istnienie pochodnej $f'(0)$ i wyznaczyć zbiór wartości f.

Badamy istnienie pochodnej.

$$\begin{aligned}
f(h) - f(0) &= \frac{\langle a|h\rangle}{1 + \|h\|} - 0 = \langle a|h\rangle\Big(1 - \|h\| + \|h\|^2 + \cdots\Big) \\
&= \langle a|h\rangle + \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

Iloczyn skalarny jest liniowy w h więc jest kandydatem na pochodną.

$$\begin{aligned}
\frac{\big|f(h) - f(0) - \langle a|h\rangle\big|}{\|h\|} &= \frac{1}{\|h\|}\left|\frac{\langle a|h\rangle}{1 + \|h\|} - \langle a|h\rangle\right| \\
&= \big|\langle a|h\rangle\big| \xrightarrow{h \to 0} 0
\end{aligned}$$

czyli mamy pochodną. Teraz chcemy wyznaczyć wartości f. Użyjemy nierówności Cauchy'ego-Schwarza.

$$\langle a|x\rangle = \|a\|\|x\|\cos(\angle a, x)$$
$$\big|\langle a|x\rangle\big| \geq \|a\|\|x\|$$

Stąd,

$$\big|f(x)\big| \leq \frac{\|a\|\|x\|}{1+\|x\|} \leq \|a\|$$
$$f(\mathbb{R}^n) \subset \big(-\|a\|, +\|a\|\big)$$

Czy wszystkie te punkty są osiągnięte?

$$f(ta) = \frac{t\|a\|^2}{1+|t|\|a\|} \xrightarrow{t\to\pm\infty} \pm\|a\|$$

Stąd,

$$f(\mathbb{R}^n) = \big(-\|a\|, +\|a\|\big)$$

Twierdzenie 11 (Twierdzenie o funkcji odwrotnej)**.** $F\colon O \to \mathbb{R}^n$ gdzie $O \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty, $F \in C^1$. Jeśli $p \in O$ oraz $\det F'(p) \neq 0$ to F jest lokalnie odwracalna. Tzn. istnieje otoczenie punktu $p \in O$ takie, że $F(O') \subset \mathbb{R}^n$ oraz $F\big|_{O'} : O' \to F(O')$ jest odwracalna, odwrotność jest klasy C^1.
(Można ogólniej w kontekście przestrzeni Banacha)

Dobrze sobie interpretować to zadanie w kontekście tego, że takie odwzorowania zadają lokalnie współrzędne. Przykład poniżej.

Przykład Niech $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+xyz \\ y+xy \\ z+2x+3z^2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Czy te trzy „równania” pozwalają wyznaczyć (x,y,z) jako funkcje (u,v,w) w pewnym otoczeniu punktu $(0,0,0)$?

Innymi słowy do poprzedniego twierdzenia wstawiamy $p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, policzyć pochodną, wyznacznik.

$$F'\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+yz & xz & xy \\ y & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1+6z \end{bmatrix} \overset{p}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\det F'(p) = 1 \neq 0$$

Istnieje więc otoczenie $\vec{0}$ na którym F jest odwracalna.

$$\big(F^{-1}\big)'\big(F(p)\big) = \big(F'(p)\big)^{-1} = (F^{-1})\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykładowo,

$$\frac{\partial x}{\partial w} = 0$$

Wykład 16

30 kwi 2021

Wykład 17: Ćwiczenia 17

30 kwi 2021 **Zadanie 1** Rozważmy funkcję $H\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ daną wzorem $H(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} x + y + z + t - 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 100 \end{bmatrix}$. Sprawdzić dla jakich (x, y, z, t) warunek $H = 0$ określa y, z, t jako funkcję x. Znaleźć $y'(x)$. Wstawić $(x, y, z, t) = (1, 2, 3, 4)$.

Tematem przewodnim jest twierdzenie o funkcji uwikłanej. Wybór zmiennej niezależnej to w naszym przypadku x. Musimy zbudować macierz pochodnych i sprawdzić czy jest odwracalna.

$$\frac{\partial H(z, y, z, t)}{\partial(y, z, t)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & 2z & 2t \\ 3y^2 & 3z^2 & 3t^2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, 2, 3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{bmatrix}$$

I mamy transpozycję bardzo znanej macierzy Vandermonda.

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & t & t^2 \end{bmatrix}$$

$$\det V_3 = (t - z)(t - y)(z - y)$$

$$\det \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial(y, z, t)} = 6(t - z)(t - y)(z - y)$$

Dla $t \neq 0$, $t \neq y$ oraz $z \neq y$ spełnione są założenia o funkcji uwikłanej. Jeśli $H(x, y, z, t) = 0$ oraz $t \neq 0$, $t \neq y$ i $z \neq y$, to istnieje otoczenie O punktu (x_0, y_0, z_0, t_0) oraz funkcje $y(x), z(x), t(x)$ określone na otoczeniu x_0, takie że $H(x, y, z, t) = 0$ oraz $x, y, z, t \in O \iff y = y(x), z = z(x), t = t(x)$. Ponadto, funkcje $y(x), z(x), t(x)$ są różniczkowalne oraz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} = -\left[\frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial(y, z, t)}\right]^{-1} \cdot \partial_x H(x, y, z, t)$$

$$\partial_x H(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, 2, 3) \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Macierze diagonalne się skracają,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix}(x) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y(x) & z(x) & t(x) \\ y(x)^2 & z(x)^2 & t(x)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Odwrotność macierzy Vandermonda to ciekawy problem. Dlaczego? Rozważmy $w(\lambda) = a\lambda^2 + bx + c$ oraz znamy wartości wielomianu w trzech punktach x, y, z. To jest problem liniowy. Stąd widać, że macierze Vandermonda pojawią się w interpolacji wielomianowej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det V_3(y,z,t)} A^D$$

$$\begin{aligned} A^D &= \begin{bmatrix} zt^2 - z^2t & z^2 - t^2 & t - z \\ ty^2 - y^2t & t^2 - y^2 & y - t \\ yz^2 - z^2y & y^2 - z^2 & z - y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t - z & & \\ & t - y & \\ & & z - y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -zt & -z - t & 1 \\ -yt & t + y & -1 \\ yz & -y - z & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Stąd, otrzymujemy równanie różniczkowe na x, y, z.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{bmatrix} y \\ z \\ t \end{bmatrix} (x) = \frac{-1}{(z-y)(t-z)(t-y)} \begin{bmatrix} t - z & & \\ & t - y & \\ & & z - y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -zt & -z - t & 1 \\ -yt & t + y & -1 \\ yz & -y - z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Obliczmy to w punkcie $H(p) = 0$ gdzie $p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^\top$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y'(1) \\ z'(1) \\ t'(1) \end{bmatrix} &= \frac{-1}{1 \cdot 1 \cdot 2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -7 & 1 \\ -8 & 6 & -1 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadanie 2 Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $z(x, y)$ zadanej w sposób uwikłany wzorem $3z^3 - 7z\cos(x + y) + \dfrac{20x}{x^2 + 1} = 0$.

W tym zadanku jest pewien niewidoczny niuans. Twierdzenie o funkcji uwikłanej ma charakter lokalny, jak dostaniemy punkty krytyczne to tam można je rozwikłać, ale dla różnych punktów krytycznych te funkcje mogą być różne i niekoniecznie dobrze się sklejać.

$$3z^3 - 7z\cos(x + y) + \frac{20x}{x^2 + 1} = F(x, y, z) = 0$$

Warunek konieczny na punkty krytyczne:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \partial_x F(x, y, z) = 0 \\ \partial_y F(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

I liczymy.

$$\begin{aligned}0 = \partial_x F(x,y,z) &= 7z\sin(x+y) + \frac{20}{x^2+1} - \frac{40x^2}{(x^2+1)^2}\\ &= 7z\sin(x+y) + \frac{20(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\\ 0 = \partial_y F(x,y,z) &= 7z\sin(x+y) = 0\end{aligned}$$

Po wstawieniu drugiego do pierwszego, $x = \pm 1$, $\sin(y\pm 1) = 0$, $y \pm 1 = 2k\pi$. W pierwszym przypadku,

$$\begin{aligned}3z^3 - 7z + 10 &= 0\\ (z+2)(3z^2 - 6z + 5) &= 0\end{aligned}$$

Delta już tutaj jest ujemna, czyli

$$z = -2,\ x = 1,\ y = 2k\pi - 1$$

Sprawdzamy założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, dla tego punktu. Dla każdego punktu mamy inną funkcję, może się sklejają, może nie. Twierdzenie ma charakter lokalny.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} &= 9z^2 - 7\cos(x+y) = 9z^2 - 7\\ &= 9\cdot 4 - 7 = 29 \neq 0\end{aligned}$$

Druga pochodna,

$$z''(1, 2k\pi - 1) = -\frac{1}{29}\begin{bmatrix}\partial_x^2 F(1, 2k\pi-1) & \partial_{xy}F(1,2k\pi-1)\\ \partial_{xy}F(1,2k\pi-1) & \partial_y^2 F(1,2k\pi-1)\end{bmatrix}$$

Możemy wyznaczyć sygnaturę tej formy kwadratowej.

$$\begin{aligned}\partial_x^2 F(1,2k\pi-1) &= 7\cdot(-2)\cdot 1 + \frac{20\cdot(-2)}{4} = -24\\ \partial_{xy}F(1,2k\pi-1) &= -14\\ \partial_y^2 F(1,2k\pi-1) &= -14\end{aligned}$$

Stąd,

$$z''(1,2k\pi-1) = -\frac{1}{29}\begin{bmatrix}-24 & -14\\ -14 & -14\end{bmatrix} = \frac{2}{29}\begin{bmatrix}12 & 7\\ 7 & 7\end{bmatrix}$$

$$D_1 = \det\begin{bmatrix}12\end{bmatrix} = 12, \quad D_2 = \det\begin{bmatrix}12 & 7\\ 7 & 7\end{bmatrix} = 35$$

$$\operatorname{sgn} z''(1,2k\pi-1) = \left(\operatorname{sgn} D_1, \operatorname{sgn}\frac{D_2}{D_1}\right) = (+,+)$$

Stąd, punkt $(1, 2k\pi - 1)$ jest minimum funkcji $z(x,y)$ określonej na pewnym otoczeniu punktu $(1, 2k\pi-1)$.

Rozdział 1

Równania różniczkowe

Wykład 18: Ćwiczenia 18

10 maj 2021

Definicja 3. Równanie o rozdzielonych zmiennych ma ogólną postać:

$$y'(x) = a(x)b(y)$$

gdzie a, b są funkcjami ciągłymi.

Będziemy się zawsze skupiali nad adepktem lokalnym rozwiązywalności równań, aspekty globalne będą umykać.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{b(y)} = \int a(x)\,\mathrm{d}x$$

Rozwiązanie równania o rozdzielonych zmiennych sprowadza się do dwóch całkowań.

Przykład

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3\sin(2y)}{2(1-2e^{-x})}$$

$$F(y) = \int \frac{2\,\mathrm{d}y}{\sin(2y)} = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2e^{-x}} = G(x)$$

Jeśli jest spełniona tożsamość:

$$F\big(y(x)\big) = G(x)$$

to

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(y(x)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x) \\
\frac{2}{\sin\big(2y(x)\big)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{3}{1-2e^{-x}} \\
\int \frac{2\,\mathrm{d}y}{\sin(2y)} &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\sin(y)\cos(y)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\tan(y)\cos^2 y} \\
&= \log|\tan y| + \log C_1 \\
3\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2e^{-x}} &= 3\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^x-2} \\
&= 3\log|e^x-2| + \log C_2
\end{aligned}$$

To równanie sprowadza się do:

$$\begin{aligned}\log\bigl(|\tan y|C_1\bigr) &= \log\bigl(C_2|e^x-2|\bigr)\\ \Bigl|\tan\bigl(y(x)\bigr)\Bigr| &= |e^x-2|\frac{C_2}{C_1} = |e^x-2|C\end{aligned}$$

Oczywiście $C>0$, ale jeśli moduły mają być równe to możemy je opuścić i dopuścić stałą $D\neq 0$ taką, że

$$\tan y(x) = D(e^x-2)$$

D jest parametrem ciągłym ale tan nie jest różnowartościowy, więc mamy jeszcze parametr dyskretny $k\in\mathbb{Z}$,

$$y(x) = \tan^{-1}\bigl[D(e^x-2)\bigr] + k\pi$$

Definicja 4. Równanie różniczkowe liniowe rzędu 1 to w ogólności:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

gdzie rozwiązaniem jest

$$\text{RORNJ}(b\neq 0) = \text{RORJ}(b=0) + \text{RSRNJ}(b\neq 0)$$

Metoda uzmienniania stałych pokazuje jak z rozwiązania jednorodnego równania przejść do rozwiązania niejednorodnego.

Przykład Dowieść, że równanie $y'(x)\sin 2x = 2\bigl(y(x)+\cos x\bigr)$ ma na odcinku $(0,\pi/2)$ dokładnie jedno rozwiązanie ograniczone.

Równanie jednorodne ma postać:

$$\begin{aligned}y'(x)\sin(2x) &= 2y(x)\\ \int\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \log\bigl|y(x)\bigr| = \int\frac{2\,\mathrm{d}x}{2\sin x\cos x}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x\cos^2 x} = \log|\tan x|C\end{aligned}$$

gdzie $C>0$. Po zdjęciu modułów,

$$y(x) = D\tan x$$

gdzie $D\in\mathbb{R}$ jest dowolne. RORJ jest jednowymiarową przestrzenią liniową. RORNJ szukamy w postaci $y(x) = D(x)\tan x$ (uzmiennienie stałej).

$$\begin{aligned}y'(x) = D'(x)\tan x + \frac{D(x)}{\cos^2 x} &= \frac{2D(x)\tan x + 2\cos x}{\sin 2x}\\ &= \frac{D}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin x}\end{aligned}$$

Dostajemy równanie różniczkowe na $D(x)$.

$$\begin{aligned} D'(x) &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ D(x) &= -\frac{1}{\sin x} + E \end{aligned}$$

Teraz, RORNJ jest postaci

$$\begin{aligned} y(x) = D(x)\tan x &= \underbrace{E\tan x}_{\text{RORJ}} - \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\cos x}(E\sin x - 1) \end{aligned}$$

Interesuje nas rozwiązanie ograniczone. Jest osobliwość w $\pi/2$, stąd $E = 1$. Rozwiązaniem zadania jest

$$y(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x}$$

Definicja 5. Równanie Bernoulliego jest postaci

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Jeśli $\lambda \notin \mathbb{Z} \cup \Big(\big\{1/(2n+1) \colon n \in \mathbb{Z}\big\} + \mathbb{Z}\Big)$ to $y(x) \geq 0$. Uważamy na znak lambdy.

$$\frac{y'(x)}{y^\lambda(x)} = a(x)y^{1-\lambda}(x) + b(x)$$

Niech $z = y^{1-\lambda}$.

$$\begin{aligned} z'(x) &= (1-\lambda)y^{-\lambda}y'(x) \\ \frac{1}{1-\lambda}z'(x) &= a(x)z(x) + b(x) \end{aligned}$$

Takie równanie potrafimy już rozwiązywać.

Przykład

$$\begin{aligned} 3xy^2y' &= 2y^3 + x^3, \quad \lambda = -2 \\ z(x) &= y(x)^{1-\lambda} = t(x)^3 \\ z'(x) &= 3y^2(x)y'(x) \\ xz'(x) &= 2z + x^3 \end{aligned}$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne.

DOKOŃCZYC

Definicja 6. Równanie Ricattiego ma postać:

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)$$

Tutaj może być ciężko, nie ma jakiejś dobrej metody (jak na nasz poziom). Równanie jest nieliniowe.

Przypuśćmy, że znamy jedno rozwiązanie. Niech $y_1'(x) = a(x)y_1^2(x) + b(x)y_1(x) + c(x)$. Można zawsze zgadnąć takie rozwiązanie. Szukamy rozwiązań postaci $y(x) = y_1(x)+z(x)$. To pozwala sprowadzić równanie do równania Bernoulliego ze współczynnikiem 2.

$$\begin{aligned} L &= z'(x) + y_1'(x) = z'(x) + a(x)y_1^2(x) + b(x)y_1(x) + c(x) \\ R &= a(x)\big(y_1^2 + 2y_1 z + z^2\big) + b(x)\big(y_1(x) + z(x)\big) + c(x) \end{aligned}$$

Dzięki temu $c(x)$ się skraca i mamy

$$z'(x) = z(x)\big(b(x) + 2y_1(x) + a(x)z(x)^2\big)$$

To jest równanie Bernoulliego z $\lambda = 2$. Mimo, że równanie Ricattiego nie jest liniowe, jeśli ktoś nam poda dwa rozwiązania tego równania, które są w jakimś sensie niezależne, to wszystkie pozostałe równania da się wypisać jawną formułą.

Robimy podstawienie $u(x) = z^{1-\lambda} = 1/z(x)$.

Wykład 19: Ćwiczenia 19

14 maj 2021 **Zadanie 1** Rozwiązać zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x - 2y + z \\ \dot{y}(t) = x + z \\ \dot{z}(t) = z - y + z \end{cases}$$

gdzie $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

Można to przepisać jako:

$$\dot{v}(t) = Av(t), \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Z teorii wiadomo, że rozwiązanie jest globalne i rezolwenta jest dana funkcją wykładniczą: $v(t) = e^{tA}v(0)$. Przećwiczymy dwa podejścia, gdzie jedno olewa strukturę warunków początkowych, a drugie używa jej do obliczenia tego produktu macierzy.

Sposób I Obliczamy $\exp(tA)$. Znajdujemy wielomian charakterystyczny macierzy A i korzystamy z twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

$$\begin{aligned} w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) + 2 - 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Stąd,

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$$

Używamy wielomianu będącego resztą z dzielenia funkcji wykładniczej przez w_A (e^x jest funkcją analityczną). Ten wielomian zawsze można rozwinąć wokół pierwiastka wielokrotnego. U nas jest to $\lambda = 1$.

$$e^{t\lambda} = a_0 + (\lambda - 1)a_1 + (\lambda-1)^2 a_2 + w_A(\lambda)g(\lambda)$$

Stąd,

$$\begin{cases} e^t = a_0 \\ te^t = a_1 \\ e^{2t} = a_0 + a_1 + a_2 \end{cases}$$

A to daje nam,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^t + (A-1)te^t + (A-1)^2(e^{2t} - e^t - te^t) \\ A - 1 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A-1)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ e^{tA} &= e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left(e^{2t} - (1+t)e^t\right) \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ v(t) = e^{tA}v(0) &= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(e^{2t} - (1+t)e^t\right) \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4e^t(1+t) - 3e^{2t} \\ 4e^t(1+t) - 2e^{2t} \\ 4e^t - e^{2t} \end{bmatrix} = 4e^t \begin{bmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 1 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Wektor $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^\top$ jest wektorem własnym macierzy A o wartości własnej 2. Struktura tego wyniku jest jakoś związana z tym jak się rozkłada warunek początkowy na składowych w przestrzeniach pierwiastkowych!

Sposób II $V(1) = \ker(A - \mathbf{1})^2$ to przestrzeń pierwiastkowa. $\ker(A - \mathbf{1})$ to przestrzeń własna, zawarta w pierwiastkowej. $V(2) = \ker(A - \mathbf{1})^1$.

$$\dim V(1) = 2$$
$$\dim V(2) = 1$$

Jakie są te przestrzenie?

$$V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V(1) = \ker \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Wektor warunków początkowych rozkładamy na składowe w przestrzeniach pierwiastkowych (ich suma prosta daje w końcu $\mathbb{R}^3$).

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 3c \\ a + 2c \\ b + c \end{bmatrix}$$

Stąd, $c = -1$, $b = 4$, $a = 4$.

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zatem,

$$\begin{aligned}
e^{tA}v(0) = e^{tA} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - e^{tA} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= e^{t(A-1)} e^t \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= e^t \big[1 + t(A - \mathbf{1}) + \cdots \big] \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= e^t \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \right) - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= e^t \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 4e^t \begin{bmatrix} 1 + t \\ 1 + t \\ 1 \end{bmatrix} - e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Korzystaliśmy tutaj z tego, że wiele rzeczy zeruje się na tych wektorach rozpinających przestrzenie pierwiastkowe.

Zadanie 2 Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Zbadać, dla jakich wektorów $x \in \mathbb{R}^3$ (a) istnieje granica $\lim_{t\to\infty} e^{tA}x$, (b) $\lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = 0$, (c) istnieje granica $\lim_{t\to-\infty} e^{tA}x$.

Krok 1 to znaleźć spektrum i przestrzenie pierwiastkowe.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} &= (1-\lambda)^3 + 2 - (1-\lambda) - 2(1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3) \\ \mathrm{Sp}(A) &= \left\{0^{(2)}, 3^{(1)}\right\} \end{aligned}$$

gdzie w wykładnikach oznaczyłem krotność. Teraz, $V(0) = \ker A^2$ oraz $V(3) = \ker(A-3)$. Ponadto, $\mathbb{R}^3 = V(0) \oplus V(3)$, $\mathbb{R}^3 \ni x = x_0 + x_3$.

$$e^{tA}x = e^{tA}x_0 + e^{tA}x_3 = (1 + tA)x_0 + e^{3t}x_3$$

W przypadku punktu (a),

$$\lim_{t\to\infty}(1 + tA)x_0 + e^{3t}x_3 \quad \text{istnieje} \iff x_3 = 0,\ Ax_0 = 0 \iff x \in \ker A$$

ponieważ $\ker A \subset \ker A^2 = V(0)$ oraz $V(0) \cap V(3) = \{0\}$. W związku z tym, dla $x \in \ker A$,

$$e^{tA}x = x$$

W przypadku (b),

$$\lim_{t\to-\infty} e^{tA}x = (1 + tA)x_0 + e^{3t}x_3 = 0$$

wymaga, żeby $x_0 = 0$, bo drugi człon już dąży do zera przy dowolnym x_3. W punkcie (c), x_3 może być dowolne, natomiast $Ax_0 = 0$. Wówczas ta granica jest równa x_0.

Zadanie 3 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \cos^{-1} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. A jest stacjonarna, niejednorodność zależy od czasu i osobliwa w $\pm\pi/2$. Mamy znaleźć rozwiązanie ogólne.

RORNJ = RORJ + RSRNJ. RSRNJ szukamy uzmiennianiem stałych. RORJ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x \\ w_A(\lambda) = \det(A - \lambda) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 \\ \mathrm{Sp}(A) &= \{i, -i\} \end{aligned}$$

W związku z tym,

$$\begin{aligned} e^{t\lambda} &= a + b\lambda + (\lambda^2+1)g(\lambda) \\ e^{it} &= a + ib \\ e^{-it} &= a - ib \\ a &= \cos t \\ b &= \sin t \end{aligned}$$

Zatem,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \cos t + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sin t \\ &= \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Co dalej? RORNJ szukamy postaci $e^{tA}x(t)$. Wstawiamy taką postać do równania niejednorodnego.

$$\begin{aligned} Ae^{tA}x(t) + e^{tA}\dot{x}(t) &= Ae^{tA}x(t) + \begin{bmatrix} \cos^{-1} t \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dot{x}(t) &= e^{-tA}\begin{bmatrix} \cos^{-1} t \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos^{-1} t \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \tan t \\ -2\tan t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teraz całkujemy. Nie musimy brać modułów przy cos bo na tym przedziale jest dodatni.

$$x(t) = \int \begin{bmatrix} 1 - \tan t \\ -2\tan t \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t + \log(\cos t) + C_1 \\ 2\log(\cos t) + C_2 \end{bmatrix}$$

Teraz RORNJ,

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t + \log(\cos t) \\ 2\log(\cos t) \end{bmatrix}\right)$$

Efektywnie dostaliśmy postać RORJ + RSRNJ.

Wykład 20

28 maj 2021

Wykład 21

28 maj 2021

Wykład 22

Wykład 23

28 maj 2021

Zadanie 2 Przykład, że nie zawsze są spełnione założenia Tw. Fubiniego. Niech $D = [0,2] \times [0,1]$ oraz $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$. Rozważmy całkę iterowaną $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \, \frac{x-y}{(x+y)^3}$.

28 maj 2021

Rozpisujemy:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}y \, \frac{x-y}{(x+y)^3} &= \int_0^1 \frac{2x-(y+x)}{(x+y)^3} \mathrm{d}y = 2x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^3} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^2} \\
&= 2x \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{(x+y)^2} \Bigg|_{y=0}^{y=1} \right) + \frac{1}{x+y} \Bigg|_{y=0}^{y=1} \\
&= -\frac{x}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} \\
\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} &= -\frac{1}{1+x} \Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Teraz policzmy całkę iterowaną w odwrotnej kolejności.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \mathrm{d}x \, \frac{x-y}{(x+y)^3} &= \int_0^2 \mathrm{d}x \, \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^2} - 2y \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^3} \\
&= -\frac{1}{x+y} \Bigg|_{x=0}^{x=2} + \frac{y}{(x+y)^2} \Bigg|_{x=0}^{x=2} \\
&= -\frac{1}{2+y} + \frac{1}{y} + \frac{2}{(2+y)^2} - \frac{1}{y} = \frac{-2}{(2+y)^2} \\
\int_0^1 \mathrm{d}y \, \frac{-2}{(2+y)^2} &< 0
\end{aligned}$$

zatem wynik jest inny niż przy odwrotnej kolejności liczenia całek! Za ten efekt odpowiada fakt, że funkcja $f(x,y)$ ma osobliwość (silną!) w $(0,0)$. Gdyby osobliwość była taka zwyczajna to w ogóle by wybuchło, ale tutaj przy osobliwościach $f(x,y)$ w ogóle zmienia znaki, jakieś wkłady się znoszą, dostajemy wyniki skończone ale jak widać niezbyt sensowne. Żeby mówić o całce podwójnej to funkcja powinna być w ogóle ograniczona. W dwóch wymiarach sytuacja jest dużo bardziej kłopotliwa niż przy jednym wymiarze. Z pomocą przychodzi całka Lebesgue'a na analizie 3.

Zadanie 3 Obliczyć pole ograniczone krzywą $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

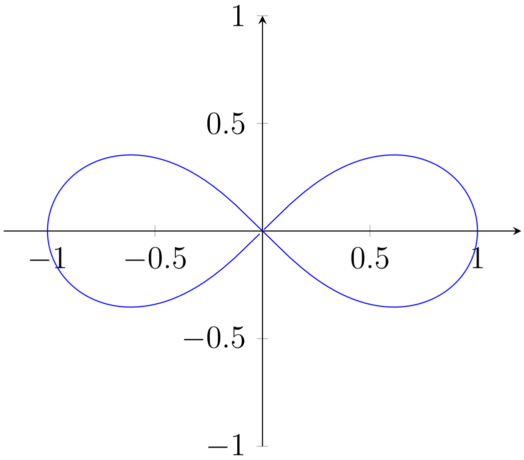
Przechodzimy do współrzędnych biegunowych.

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 2a^2r^2\cos 2\phi$$

Przy założeniu $r \neq 0$,

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$$

Nieujemność oznacza, że $\phi \in \left[-\pi/4, \pi/4\right] \cup \left[3/4\pi, 5/4\pi\right]$. Widać, że ma to symetrię odbiciową.



Rysunek 1.1

$$P = \iint_{D\subset\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{\substack{r\in\left[0,\sqrt{2a^2\cos 2\phi}\right]\\ \phi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]}} J(r,\phi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$
$$= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}\phi \int_0^{\sqrt{2a^2\cos 2\phi}} r\,\mathrm{d}r = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2a^2\cos 2\phi\,\mathrm{d}\phi = 2a^2$$

UZUPEŁNIĆ

Wykład 24

31 maj 2021 **Zadanie 1** Obliczyć objętość zbioru $T = \left\{(x,y,z)\colon \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 \le r^2\right\}$.

Równanie definiujące T opisuje obiekt o symetrii osiowej względem osi z. Jest to torus, bo we współrzędnych (ρ, z) to byłoby równanie koła. Torus dobrze jest parametryzować współrzędnymi opisującymi dwa kąty i parametr związany z wnętrzem torusa (ϕ, ψ, t). ϕ to kąt parametryzujący płaszczyznę xy. Kąt ψ parametryzuje przecięcie torusa (okrąg), a t parametryzuje promień tego przekroju.

$$\Theta\colon (\phi,\psi,t) \mapsto \Big((R + t\cos\psi)\cos\phi \quad (R + t\sin\psi)\sin\phi \quad t\cos\psi\Big)$$

Obliczamy Jakobian,

$$J = \left|\det\begin{bmatrix}\partial_\phi x & \partial_\psi x & \partial_t x\\ \partial_\phi y & \partial_\psi y & \partial_t y\\ \partial_\phi z & \partial_\psi z & \partial_t z\end{bmatrix}\right|$$
$$= \left|\det\begin{bmatrix}-(R+t\cos\psi)\sin\phi & -t\sin\psi\cos\phi & \cos\psi\cos\psi\\ (R+t\cos\psi)\cos\phi & -t\sin\psi\sin\phi & \sin\phi\cos\psi\\ 0 & t\cos\psi & \sin\psi\end{bmatrix}\right|$$

Przez rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza,

$$= \big|t\cos^2\psi(R+t\cos\psi)\sin^2\phi + t\cos^2\psi(R+t\cos\psi)\sin^2\psi$$
$$+\sin^2\psi t(R+t\cos\phi)(\sin^2\phi+\cos^2\phi)\big|$$
$$= t(R+t\cos\psi)$$

Teraz całkujemy,

$$V(T) = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\substack{t\in[0,r]\\ \phi\in[0,2\pi]\\ \psi\in[0,2\pi]}} t(R+t\cos\psi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi$$
$$= 2\pi\int_0^r \mathrm{d}t\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\,(tR+t^2\cos\psi)$$
$$= 2\pi\int_0^r \mathrm{d}t\,2\pi t R = 4\pi^2 R\int_0^r t\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\pi R\cdot\pi r^2$$

czyli „wysokość” razy „pole podstawy”.

Zadanie 2 Znaleźć wzór na objętość kuli n–wymiarowej o promieniu R.

Bardzo eleganckie rozwiązanie jest w moich notatkach z wykładu Analiza III R. Wychodzi wynik:

$$\mathrm{Vol}_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}R^{2k}$$
$$\mathrm{Vol}_{2k+1} = \frac{\pi^k 2^{k+1}}{(2k+1)!!}R^{2k+1}$$

Zadanie 3 Obliczyć objętość figury Vivianiego $\left\{x^2+y^2+z^2\le R^2 \wedge x^2+y^2\le Rx\right\}$. Pierwsze to kula, a drugie to walec z osią symetrii z i środkiem w $(R/2,0)$ i patrzymy na ich przecięcie.

Obliczenia prowadzimy we współrzędnych walcowych:

$$\psi\colon(\rho,\phi,z)\mapsto\begin{pmatrix}\rho\cos\phi & \rho\sin\phi & z\end{pmatrix}$$
$$J=\rho$$

Analiza nierówności w tych współrzędnych,

$$\begin{cases} \rho^2 + z^2 \le R^2 \\ \rho^2 \le R\rho\cos\phi \end{cases}$$

Korzystając z symetrii odbiciowej względem płaszczyzny $z = 0$ przyjmiemy, że $z \ge 0$ oraz $\phi \in [0, \pi/2]$ i mnożąc końcowy wynik przez 4.

$$\rho \le R\cos\phi$$
$$\rho^2 \le R^2\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)$$

W pewnym obszarze jedna nierówność jest przeważająca, w innym druga. Mamy przypadki. Z nierówności wynika, że $z \in [0, R]$. W przypadku pierwszym, gdy $\sqrt{1 - z^2/R^2} \le \cos\phi$ ważniejsza jest ta druga nierówność. To oznacza, że $1 - \cos^2\phi = \sin^2\phi \le z^2/R^2$. Skoto $\psi \in [0, \pi/2]$, $z \in [R\sin\phi, R]$. Mamy wkład do całki:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_{R\sin\phi}^{R} \mathrm{d}z \int_0^{R\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}} \rho\,\mathrm{d}\rho$$

W przypadku drugim, przeważa pierwsza nierówność, czyli $z \in [0, R\sin\phi]$,

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{R\sin\phi} \mathrm{d}z \int_0^{R\cos\phi} \rho\,\mathrm{d}\rho$$

Teraz wystarczy obliczyć całki.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \int_{R\sin\phi}^{R} \mathrm{d}z\, \frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\, \frac{R^2}{2}\left(z - \frac{z^3}{3R^2}\right)\Bigg|_{R\sin\phi}^{R} \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\, \frac{R^2}{2}\left[\frac{2}{3}R - R\left(\sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{R^3}{2}\left[\frac{2}{3}\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi\right] \\
&= \frac{R^3}{2}\left[\frac{\pi}{3} + \cos\phi\Big|_{\pi/2}^{0} + \frac{1}{3}\left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\right] \\
&= \frac{R^3}{2}\left[\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{9}\cos^3\phi\Big|_0^{\pi/2}\right)\right] \\
&= \frac{R^3}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{19}{27}\right)
\end{aligned}$$

Istnieje podejrzenie, że wynik jest zły. Jeszcze I_2,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int_0^{R\sin\phi} \mathrm{d}z\, \frac{R^2\cos^2\phi}{2} = \int_0^{\pi/2} R^3\frac{\cos^2\phi\sin\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{R^3}{2} - \frac{1}{6}\cos^3\phi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{12}
\end{aligned}$$

Ostatecznie objętość to:

$$V = 4R^3\left(\frac{1}{12} - \frac{19}{27} + \frac{\pi}{3}\right)$$

Zadanie 4 Znaleźć współrzędne środka ciężkości jednorodnej półkuli $\Omega = \left\{x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1,\ z \le 1\right\}$.

Środek ciężkości obliczamy całkując wektor (x, y, z) po takiej objętości. W ogólności trzeba by całkować $\vec{r}\rho\,\mathrm{d}V$ i podzielić przez masę, ale ρ jest stałe więc trzeba tylko obliczyć całkę z $\vec{r}\,\mathrm{d}V$ i podzielić przez objętość.

$$\vec{r}_S = \frac{\int_\Omega \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int_\Omega \mathrm{d}V}$$

We współrzędnych sferycznych nierówność wygląda:

$$r^2 \le 2r\cos\theta$$

A warunek $z \le 1$ to

$$r\cos\theta \le 1$$

Widać, że $\theta \in p_0, \pi/2]$ ale również $z \le 1$, czyli $r\cos\theta \le 1$. Dodatkowo $\phi \in [0, 2\pi]$ oraz symetria obrotowa względem osi z. Stąd wycałkowanie po ϕ daje tylko współczynnik 2π.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{d}V &= \left|\begin{matrix} r \le 2\cos\theta \\ r \le 1/\cos\theta \\ 0 \le r \le \min\left\{2\cos\theta, 1/\cos\theta\right\} \\ \cos^2\theta \le 1/2 \\ \theta \in [\pi/2, \pi/2] \end{matrix}\right| \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{1/\cos\theta} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \sin\theta \frac{1}{3\cos^3\theta} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin\theta \frac{8}{3}\cos^3\theta\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}\bigg|_0^{\pi/4} + (-2)\cos^4\theta\bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

czyli jest to intuicyjnie poprawna objętość półsfery.

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \vec{r}\,\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\cos\theta}\begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\end{bmatrix} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r + (*) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi\displaystyle\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\cos\theta} r^3\sin\theta\cos\theta + 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\end{bmatrix} \\
&= \frac{2\pi}{4}\hat{e}_z\left\{\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\cos^5\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right\} \\
&= \frac{2\pi}{4}\hat{e}_z\left(\frac{1}{2} - 16\frac{\cos^6\theta}{6}\bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}\right) = \frac{5\pi}{12}\hat{e}_z
\end{aligned}
$$

Stąd,

$$
\vec{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/8 \end{bmatrix}
$$

Wykład 25

07 cze 2021 Teraz zajmiemy się całkami z parametrem, czyli generalnie całkami postaci

$$
F(a) = \int_I f(x,a)\,\mathrm{d}x
$$

Całka z parametrem Riemanna jest trochę inna niż Lebesgue'a. Zbieżność jednostajna całki $\displaystyle\int_0^\infty f(x,a)\,\mathrm{d}x$ jest pożądana, bo gwarantuje ciągłość, różniczkowalność tej całki. Można wtedy różniczkować po parametrach i rozwiązywać równanie różniczkowe.

Definicja 7 (Zbieżność jednostajna)**.**

$$
\forall_{\varepsilon>0}\,\exists M\colon M_2 > M_1 > M \implies \left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,a)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon
$$

Całki zbieżne jednostajnie są ciągłe ze względu na parametr a.

Przykład

$$
\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x
$$

Dla $x = 0$ powinniśmy położyć $f(x, a) = 0$. Wówczas f jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Czy $F(a)$ jest ciągła w a? Tak! Bo całka jest zbieżna jednostajnie (ze względu na teorię Riemanna). Dlaczego?

Możemy użyć kryterium Weierstrassa (porównawcze, majoranta).

$$e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} \leq e^{-x^2} \quad \wedge \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$$

$$\big|f(x,a)\big| \leq g(x) \quad \wedge \quad \int_I g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

Zbieżność całki jest jednostajna w parametrze i $F(a)$ jest ciągła. Czy $F(a)$ jest funkcją różniczkowalną?

$$\partial_a f(x,a) = e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\frac{2a}{x^2}$$

Czy $\displaystyle\int_0^\infty \partial_a f(x,a)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna niemal jednostajnie? Zauważmy, że $F(a) = F(-a)$. Zatem zbadamy zbieżność dla $a > 0$. Niech $\varepsilon > 0$ i $\varepsilon < A < \infty$. Dla $\varepsilon < a < A$ mamy

$$\big|\partial_a f(x,a)\big| \leq e^{-x^2-\frac{\varepsilon^2}{x^2}}\frac{2A}{x^2}$$

Ta funkcja majoryzująca jest całkowalna i nie zależy od a. To jest tak zwana majoranta. Konkluzja jest następująca. Dla $\varepsilon < a < A$ funkcja $F(a)$ jest różniczkowalna oraz

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\frac{-2a}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

jest to równość prawdziwa dla $0 < a < \infty$ (bo $\varepsilon > 0$ i $A < \infty$).

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\frac{-2a}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{matrix} x = a/u \\ \big|\mathrm{d}x/\mathrm{d}u\big| = a/u^2 \\ u \in [0,\infty)\end{matrix}\right| \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{u^2}-u^2}(-2)\,\mathrm{d}u \\ &= -2F(a)\end{aligned}$$

Stąd mamy równanie różniczkowe!

$$\begin{aligned} F'(a) &= -2F(a) \\ F(a) &= Ce^{-2a} \quad a > 0 \\ F(0) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

Korzystając z ciągłości ze względu na a,

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a} \\ F(a) &= F(-a) = F\big(|a|\big)\end{aligned}$$

Stąd,

$$F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|a|}$$

Musieliśmy kombinować, bo nie byliśmy na zbiorze zwartym. Dla odcinków to się trochę upraszcza, o czym będzie następne zadanie.

Zadanie 1 Znaleźć jawną postać całki z parametrami: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log\big(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\big)\,\mathrm{d}x$ gdzie $a, b \neq 0$.

W sytuacji kiedy funkcja podcałkowa nie jest osobliwa nie musimy się odnosić do jednostajnych zbieżności.

$$\begin{aligned}
J(a,b) &= \int_0^{\pi/2} \log\big(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\log a^2 + \log\left(\sin^2 x + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 x\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\log a^2 + F\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

gdzie

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \log\big(\sin^2 x + k^2 \cos^2 x\big)\,\mathrm{d}x$$

jest całką z jednym parametrem. Zauważmy, że dla $x \in [0, \pi/2]$,

$$\sin^2 x + k^2 \cos^2 x > 0$$

a więc $f(x,k) = \log\big(\sin^2 x + k^2 \cos^2 x\big)$ jest dobrze zdefiniowana i ciągła na obszarze całkowania i w parametrze $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Czyli $F(k)$ jest ciągła na $k > 0$. Czy $F(k)$ jest różniczkowalna dla $k > 0$? Chodzi o to, czy pochodna f po k jest funkcją całkowalną ze względu na x.

$$\int_0^{\pi/2} \partial_k \log\big(\sin^2 x + k^2 \cos^2 x\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2k\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x + k^2\cos^2 x}$$

$\partial_k f(x,k)$ jest ciągła na $[0,\pi/2] \times \mathbb{R}_{>0}$, zatem $F'(k)$ jest równe tej całce.

$$\begin{aligned}
F'(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2k\cos^2 x}{\sin^2 x + k^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2k\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{k^2 + \tan^2 x} \\
&= \left|\begin{matrix} t = \tan x \\ \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ t \in [0,\infty) \end{matrix}\right| = 2k\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(k^2+t^2)}
\end{aligned}$$

Załóżmy, że $t \neq 1$,

$$\begin{aligned}
&= 2k\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{k^2+t^2}\right)\frac{1}{k^2-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2k}{k^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2}\right) = \frac{2k}{k^2-1}\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{\pi}{k+1}
\end{aligned}$$

Z ciągłości ze względu na k jest to też wynik dobry w $k = 1$. W takim razie,

$$F(k) = \pi \log(k+1) + C \quad k > 0$$
$$F(k) = F(-k)$$

Dla $k \neq 0$,

$$F(k) = \pi \log\bigl(|k| + 1\bigr) + C$$

Trzeba jeszcze wyznaczyć stałą C.

$$F(1) = \int_0^{\pi/2} \log(1)\,\mathrm{d}x = 0$$
$$C = -\pi \log 2$$
$$F(k) = \pi \log\bigl(|k|+1\bigr) - \pi \log 2 = \pi \log \frac{|k|+1}{2}$$

Co się dzieje w zerze?

$$F(0) = \int_0^{\pi/2} \log\bigl(\sin^2 x\bigr)\,\mathrm{d}x$$

Jest to całka niewłaściwa. Czy F jest ciągła w zerze? Jeśli tak, to

$$F(0) = \lim_{k\to 0} \pi \log \frac{|k|+1}{2} = -\pi \log 2$$

Sposób 1. Rozważmy całkę

$$\int_0^{\pi/2} \log\bigl(\sin^2 x + k^2 \cos^2 x\bigr)\,\mathrm{d}x \qquad k \in [-1, 1]$$

dla $k = 0$ jest to całka niewłaściwa, ale zbieżna. Jeśli całka jest zbieżna jednostajnie w k, to $F(k)$ jest ciągła w zerze. Zauważmy, że dla $|k| < 1$,

$$\sin^2 x \leq \sin^2 x + k^2 \cos^2 x \leq 1$$

Natomiast logarytm jest monotoniczny, więc

$$\Bigl|\log\bigl(\sin^2 x + k^2 \cos^2 x\bigr)\Bigr| \leq \Bigl|\log\bigl(\sin^2 x\bigr)\Bigr|$$
$$\int_0^{\pi/2} \Bigl|\log\bigl(\sin^2 x\bigr)\Bigr| < \infty$$

Z kryterium Weierstrassa całka ta jest więc zbieżna jednostajnie i F jest funkcją ciągłą.

Sposób 2. Policzmy to jawnie.

$$\begin{aligned}
F(0) &= \int_0^{\pi/2} \log \sin^2 x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \log \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \log \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \log 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = \pi \log 2 + \int_0^{\pi} \log \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \log\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \log 2 + 2\int_0^{\pi/2} \log \sin t\,\mathrm{d}t + 2\int_0^{\pi/2} \log\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \pi \log 2 + F(0) + F(0) \\
F(0) &= -\pi \log 2
\end{aligned}$$

Wykład 26

11 cze 2021 **Zadanie 1** Niech $a \geq 0$. Rozważamy całkę z parametrem $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$, gdzie $F\colon [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $F(\infty) = 0$. Czy F jest ciągła?

Ciągłość poza zerem jest prostym wnioskiem twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej (lub kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej całki z parametrem). Ciągłość w zerze jest bardziej wymagająca.

Na $[\varepsilon, \infty]$ przyjmujemy majorantę

$$\left| e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-\varepsilon x} \left| \frac{\sin x}{x} \right|$$

i ta majoranta jest całkowalna i nie zależy od a.

Całka jest zbieżna jednostajnie gdy $F_M(a) \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^M f(x,a) \, \mathrm{d}x \xrightarrow[\text{jedn.}]{M \to \infty} F(a)$. F_M są ciągłe a przez zbieżność jednostajną F też jest ciągła. Chcemy więc mieć tę zbieżność jednostajną.

Twierdzenie 12 (Kryterium Abela zbieżności jednostajnej)**.** Jeśli $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,a) \, \mathrm{d}x$ jest zbieżna jednostajnie, $g(x,a)$ jest ograniczona i monotoniczna w x, to $\displaystyle\int_0^\infty f(x,a) g(x,a) \, \mathrm{d}x$ jest zbieżna jednostajnie.

Dowód tego faktu jest podobny do dowodu kryterium Abela, bądź Dirichleta zbieżności całek (wykorzystuje twierdzenie o wartości średniej).

Niech $g(x,a) = e^{-ax}$ oraz $f(x,a) = \sin x / x$, która nawet nie zależy od a. Jak coś nie zależy od a, to jest jednostajne w a. W szczególności, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ jest jednostajnie zbieżna ze względu na a. Ponadto, e^{-ax} jest ograniczona na $a \in [0, \infty]$ i $x \in [0, \infty)$ oraz $g(a,x)$ jest monotoniczna w x. Z kryterium Abela

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

jest ciągła dla $a \in [0, \infty]$. W szczególności,

$$\lim_{a \to \infty} F(a) = 0$$
$$\lim_{a \to 0} F(a) = F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

Tę granicę można obliczyć różniczkując całkę z parametrem.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \partial_a f(x,a) \, \mathrm{d}x &= - \int_0^\infty x e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= - \int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ta całka dla $a \geq \varepsilon$ jest zbieżna jednostajnie (bo można wskazać majorantę).

$$\left|e^{-ax}\sin x\right| \leq e^{-\varepsilon x}$$

Zatem, z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej wiemy, ze $F(a)$ jest różniczkowalna dla $a > 0$ oraz

$$\begin{aligned}
F'(a) &= -\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x = -\underbrace{\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin x\right)\Big|_0^\infty}_{=0} - \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos x\right)\Big|_0^\infty - \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Stąd wychodzi równanie różniczkowe na $F(a)$.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{a^2} &= -\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,\mathrm{d}x \\
F'(a) &= -\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)^{-1} = -\frac{1}{1+a^2} \\
F(a) &= -\tan^{-1}(a) + C, \quad a > 0
\end{aligned}$$

Wyznaczamy stałą C,

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} F(a) = 0 &= \lim_{a\to\infty}\left(-\tan^{-1}a + C\right) = -\frac{\pi}{2} + C \\
F(a) &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}a, \quad a \geq 0
\end{aligned}$$

Gdzie dodatkowy punkt $a = 0$ dodaliśmy z ciągłości. Stąd,

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Zadanie 2 Obliczyć $U(a) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\frac{a^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $V(a) = \int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Funkcje podcałkowe są osobliwe w zerze, ale są zbieżne w sensie Lebesgue'a. Łatwo też wskazać majoranty, tj. funkcję e^{-x^2}. Stąd, $U(a)$ i $V(a)$ są ciągłe (tw. Lebesgue'a lub Weierstrassa). Co z różniczkowalnością? Well, po zróżniczkowaniu $f(x,a)$ ta funkcja przestaje być całkowalna bezwzględnie i trzeba patrzeć na to jak na Riemanna.

$$\int_0^\infty \partial_a f(x,a)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{a^2}{x^2}\frac{2a}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Pojawiła się silna osobliwość w zerze, nie widać od tak czy jest w ogóle zbieżna. Ale przez zamianę zmiennych $y = a/x$,

$$= -2\int_0^\infty e^{-a^2/y^2}\sin y^2\,\mathrm{d}y$$

a ta całka jest już zbieżna, gdyż $\int_0^\infty \sin y^2 \, \mathrm{d}y < \infty$ oraz e^{-a^2/y^2} jest ograniczona i monotoniczna w y. Z kryterium Abela nasza nowa całka jest więc jednostajnie zbieżna.

$$\begin{aligned}
U'(a) &= -2\int_0^\infty e^{-a^2/y^2} \sin y^2 \, \mathrm{d}y \\
U''(a) &\stackrel{?}{=} -2\int_0^\infty \partial_a \left[e^{-a^2/y^2} \sin y^2\right] \\
&= 4\int_0^\infty e^{-a^2/y^2} \sin y^2 \frac{a}{y^2} \, \mathrm{d}y = \left| x = \frac{a}{y} \right| \\
&= 4\int_0^\infty e^{-x^2} \sin \frac{a^2}{x^2} \, \mathrm{d}x = 4V(a)
\end{aligned}$$

Taki sam rachunek daje $V''(a) = -4U(a)$. Wprowadźmy zespoloną wielkość $W = U + iV$. Wówczas,

$$\begin{aligned}
W''(a) &= U''(a) + iV''(a) \\
&= 4V(a) - i4U(a) \\
&= -4i\big(U(a) + iV(a)\big) \\
&= -4iW(a)
\end{aligned}$$

To równanie prosto rozwiązujemy jako $W(a) = e^{\lambda a}$,

$$\begin{aligned}
\lambda^2 = -4i &\implies \lambda = \pm 2ie^{i\pi/4} \\
\lambda &\in \left\{\sqrt{2}(i-1), \sqrt{2}(1-i\right\} \\
W(a) &= C_1 e^{\sqrt{2}(i-1)a} + C_2 e^{\sqrt{2}(1-i)a}
\end{aligned}$$

Drugi człon nie jest ograniczony, jeśli $C_2 \neq 0$, stąd $C_2 = 0$. Dalej,

$$\begin{aligned}
W(0) &= \int_0^\infty e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C_1 \\
W(a) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sqrt{2}a} e^{i\sqrt{2}a}
\end{aligned}$$

Patrząc na $a < 0$,

$$W(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sqrt{2}|a|} \left[\cos(\sqrt{2}|a|) + i\sin(\sqrt{2}|a|)\right]$$

Zadanie 3 $F(a) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(ax)}{x} e^{-x} \, \mathrm{d}x$

Czy F jest ciągła? Istnieje takie $\theta(x)$, że

$$\begin{aligned}
\cos(ax) &= 1 - \cos(0)ax - \frac{\cos(ax\theta)}{2!}(ax)^2 \\
\left| \frac{1-\cos(ax)}{x} \right| &= \left| \frac{\cos(ax\theta)}{2!} \frac{(ax)^2}{x} \right| \leq \frac{1}{2}a^2 x
\end{aligned}$$

Zatem majoranta na $0 \le a \le A$,

$$\left|\frac{1-\cos(ax)}{x}e^{-x}\right| \le \frac{1}{2}A^2 x e^{-x}$$

Stąd, funkcja $F(a)$ jest ciągła dla $a \in [0, A]$ dla każdego $A > 0$, czyli ciągła na $[a, \infty)$. Ale F jest parzysta, więc również ciągła na całym $\mathbb{R}$. Co z różniczkowalnością?

$$\begin{aligned} F'(a) &\overset{?}{=} \int_0^\infty \partial_a \frac{1-\cos ax}{x} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \sin(ax) e^{-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

a ta całka jest zbieżna jednostajnie (bo majoranta e^{-x}), czyli znak zapytania jest zbędny. Psikus tkwi w tym, że tę całkę daje się już wykonać przez części.

$$\begin{aligned} F'(a) &= a\big(-e^{-x}\cos ax\big)\Big|_0^\infty - a\int_0^\infty e^{-x}\sin ax\,\mathrm{d}x \\ (1+a^2)F'(a) &= a \\ F(a) &= \frac{1}{2}\log(1+a^2) + C \\ F(0) &= 0 = C \end{aligned}$$

Finalnie,

$$F(a) = \frac{1}{2}\log(1+a^2)$$

THE END