# Mechanika klasyczna R

*Notatki z ćwiczeń*

Wykładowcy:
mgr Bartłomiej Zglinicki

Skryba:
Szymon Cedrowski

# Spis treści

# Ćwiczenia 1: Oscylator tłumiony z wymuszeniem

**Zadanie 1** Znaleźć rozwiązania równań ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem liniowym o współczynniku $b > 0$ i siłą wymuszającą $F = F(t)$. 07 paź 2021

Zapiszmy równanie znane każdemu przedszkolakowi:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

gdzie zakładamy, że $m, k > 0$.

**Przypadek 1** $b = 0$, $F = 0$

Zapisujemy równanie,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $\omega^2 = k/m$. Jest to równanie liniowe jednorodne. Równanie charakterystyczne:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \omega^2 &= 0 \\ \alpha &= \pm i\omega \end{aligned}$$

Stąd,

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

gdzie $A, B \in \mathbb{C}$. Użyjmy wzoru Eulera, z którego otrzymamy

$$= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

gdzie

$$C_1 = A + B, \quad C_2 = -i(A - B)$$

są stałymi rzeczywistymi, jako że $x(t) \in \mathbb{R}$. Odwracając te warunki,

$$A = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2), \quad B = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2)$$

Stąd, $A = \overline{B}$. Można więc to pierwsze rozwiązanie zapisać w postaci

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + \overline{Ae^{i\omega t}}$$

Rozwiązanie oscylatora można jeszcze zapisać w innej postaci,

$$x(t) = C \cos(\omega t - \phi)$$

gdzie $C^2 = C_1^2 + C_2^2$, natomiast $\tan \phi = C_2/C_1$. Jest jeszcze jedna możliwość jak napisać to rozwiązanie:

$$x(t) = \mathrm{Re}\Big[Ce^{i(\omega t - \phi)}\Big]$$

**Przypadek 2** $F(t) = 0$, $b > 0$ Równanie ma postać

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

gdzie $\omega^2 = k/m$ oraz $\beta = b/(2m) > 0$. Równanie jest znowu jednorodne i liniowe, zatem jedziemy.

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega^2 = 0$$

Dostaniemy 3 przypadki w zależności od relacji między dodatnimi $\omega, \beta$.

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega^2$$

Dla $\beta > \omega$ będzie $\Delta > 0$ zatem

$$\alpha_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \stackrel{\text{def}}{=} -\beta \pm \kappa$$

Nie ma drgań, bo wykładnik eksponensa nie jest zespolony.

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[Ae^{\kappa t} + Be^{-\kappa t}\right]$$

$\kappa < \beta$, zatem pierwszy człon będzie wolniej się zerował niż ten drugi, dla dużych czasów to on będzie istotny. To sugeruje więc, żeby jako parametr zaniku, wprowadzić $t_0 = \kappa - \beta$.

Dla $\beta < \omega$ będzie

$$\alpha_{\pm} = -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \stackrel{\text{def}}{=} -\beta \pm i\tilde{\omega}$$
$$x(t) = e^{-\beta t}\left[Ae^{i\tilde{\omega}t} + \overline{Ae^{i\tilde{\omega}t}}\right]$$

Co można zapisać jako

$$= Ce^{-\beta t}\cos(\tilde{\omega}t + \phi)$$

Widać jasno, że są to zanikające oscylacje.
W ostatnim przypadku mamy tłumienie krytyczne z $\beta = \omega$. Wówczas

$$x(t) = e^{-\beta t}[A + Bt]$$

W takim przypadku tłumienie jest najszybsze.

**Przypadek 3** $F(t) \neq 0$ jest harmoniczna.

Niech $f(t) = F(t)/m$. Wówczas mamy

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne. Jego rozwiązaniem jest rozwiązanie ogólne równania jednorodnego plus dowolne rozwiązanie szczególnie niejednorodnego $x(t) =$

$x_{\mathrm{o}}(t) + x_{\mathrm{s}}(t)$.

Najpierw możemy sobie ćwiczebnie rozwiązać przypadek szczególny z $f(t) = f_0 \cos \Omega t$. Użyjemy tricku z uzespoleniem równania.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x &= f_0 \cos \Omega t \\ \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega^2 y &= f_0 \sin \Omega t\end{aligned}$$

Stąd, $z(t) = x(t) + iy(t)$.

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega^2 z = f_0 e^{i\Omega t}$$

Szukamy rozwiązania szczególnego, dla powyższego równania. Użyjemy metody kontrolowanego zgadywania. Poszukajmy rozwiązania postaci $z_{\mathrm{s}}(t) = \xi e^{i\Omega t}$.

$$\begin{aligned}f_0 &= -\xi\Omega^2 + 2i\xi\beta\Omega + \omega^2\xi \\ \xi &= \frac{f_0}{2i\beta\Omega + \omega^2 - \Omega^2}\end{aligned}$$

Udało się. Stała $\xi$ jest zespolona, ale musimy z niej wydobyć część rzeczywistą i urojoną, bo chcemy mieć część rzeczywistą z $z_{\mathrm{s}}(t)$. Najfajniej będzie zapisać $\xi$ w postaci biegunowej.

$$\begin{aligned}\xi &= \eta e^{i\phi} = \sqrt{\xi\bar{\xi}} e^{i\phi} \\ \eta^2 &= \frac{f_0^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} \\ f_0 e^{-i\phi} &= \eta(\omega^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega)\end{aligned}$$

Stąd,

$$\tan\phi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Finalnie,

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{s}}(t) &= \operatorname{Re} z_{\mathrm{s}}(t) = \eta\cos(\Omega t + \phi) \\ x(t) &= e^{-\beta t}\left[C_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega^2}t}\right] + \eta\cos(\Omega t + \phi)\end{aligned}$$

Po upływie pewnego czasu, pierwszy człon będzie zaniedbywalny (niezależnie od rodzaju tłumienia), istotny stanie się tylko człon ostatni. Taki człon nazywa się atraktorem – niezależnie od warunków początkowych rozwiązanie będzie asymptotycznie atraktorem. W ogólności, czasem w układach chaotycznych takich atraktorów może być więcej niż jeden, a to do którego rozwiązania układ będzie zmierzał zależy od konfiguracji początkowej.

**Przypadek 4** $F \neq 0$ dowolne.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego to

$$x_{\mathrm{o}}(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Rozwiązanie szczególne poszukujemy przez uzmiennianie stałych postulując rozwiązanie postaci

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

Uzyskamy Wrońskan, z którego dostajemy układ równań na $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Metodą wyznaczników,

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{\det W} \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ f(t) & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \frac{-x_2 f(t)}{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}$$

$$\dot{C}_2 = \frac{1}{\det W} \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ \dot{x}_2 & f(t) \end{vmatrix} = \frac{x_1 f(t)}{x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2}$$

Tutaj można sobie zawsze wstawić dowolne $f$ i odcałkować $C_1, C_2$.

Nie jest to najlepsza metoda, dlatego można użyć rozkładu funkcji w szereg Fouriera.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\big)$$

Policzyliśmy rozwiązania ogólne dla $f(t) \sim e^{i\Omega t}$, co powoduje, że w ogólności rozwiązanie będzie superpozycją (równanie jest liniowe) takich rozwiązań dla kolejnych członów w szeregu.

**Errata** Gęstości tensorowe $\delta$ i $\varepsilon$ każdy zna. Mniej powszechne fakty:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i{}_{mn}\varepsilon_j{}^{mn} &= 2\delta^i{}_j \\ \varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6 \\ (a \times b)^i &= \varepsilon^i{}_{jk} a^j b^k \end{aligned}$$

gdzie iloczyn wektorowy jest taki ładny tylko w ortonormalnej bazie przestrzeni liniowej, co na szczęście można jeszcze rozszerzyć do pól w przestrzeni afinicznej. Na ogólnych rozmaitościach nie dość, że lepiej używać obrazu dualnego, to uciąglenie na pola w $(\mathrm{T}M)^*$ sprowadza się do algebry zewnętrznej kowektorów.

**Zadanie 2** Znaleźć ogólne rozwiązanie $r^i(t)$ równania ruchu cząstki o masie $m$ i ładunku $q$ w stałym polu magnetycznym $B^i$ z liniową siłą tłumienia o współczynniku $b > 0$.

Piszemy równanko:

$$m\ddot{r}^i = q(\dot{r} \times B)^i - b\dot{r}^i$$

Bez straty ogólności $B^i\,\partial_i = B\,\partial_3$. Podstawmy jawnie $v^i = \dot{r}^i$.

$$m\dot{v}^i = q(v \times B)^i - bv^i$$

Rozwiązujemy. Najpierw trzeba rozwikłać iloczyn wektorowy. Wprowadzamy bazę kartezjańską (ortogonalną) i w niej równania mają postać:

$$\begin{aligned} m\dot{v}^i &= q\varepsilon^i{}_{jk} v^j B^k - bv^i \\ m\dot{v}^i\,\partial_i &= q\big(v^2 B\,\partial_1 - v^1 B\,\partial_2\big) - bv^i\,\partial_i \end{aligned}$$

Stąd,

$$m\begin{bmatrix}\dot{v}^1\\ \dot{v}^2\\ \dot{v}^3\end{bmatrix} = q\begin{bmatrix}v^2B\\ -v^1B\\ 0\end{bmatrix} - b\begin{bmatrix}v^1\\ v^2\\ v^3\end{bmatrix}$$

Trzeba rozwiązać taki układzik. Najprostsza jest oczywiście składowa 3.

$$\begin{aligned} m\dot{v}^3 &= -bv^3 \\ v^3(t) &= \tilde{A}_3 e^{-bt/m} \\ r^3(t) &= A_3 e^{-bt/m} + B_3 \end{aligned}$$

Teraz wprowadźmy nową zmienną $\xi = r^1 + ir^2$ oraz $\eta = \dot{\xi} = v^1 + iv^2$. Wprowadźmy jeszcze częstość cyklotronową $\omega = qB/m$ oraz $k = b/m$. Pozostałość układu równań możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -i\omega\eta - k\eta = -(i\omega + k)\eta \\ \eta(t) &= A_\eta e^{-(i\omega+k)t} \\ \xi(t) &= A_\xi e^{-(i\omega+k)t} + B_\xi = A_\xi e^{-i\omega t} e^{-kt} + B_\xi \end{aligned}$$

Mamy człon kołowy, w 3D dostaniemy coś na kształt rozciągniętej spirali logarytmicznej.

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{-kt}(A + iB)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C + iD \\ &= e^{-kt}(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + C + ie^{-kt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + iD \end{aligned}$$

Stąd finalnie,

$$\begin{bmatrix}r^1(t)\\ r^2(t)\\ r^3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-kt}(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + C\\ e^{-kt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + D\\ Ee^{-kt} + F\end{bmatrix}$$

Mamy sześć stałych, tak jak być powinno.

## Ćwiczenia 2

**Zadanie 1** Wyrazić prędkość $v$, przyspieszenie $a$ i element długości $\mathrm{d}s^2$ we współrzędnych sferycznych. 14 paź 2021

Współrzędne sferyczne $(r, \theta, \phi) \overset{\Phi}{\mapsto} (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \in \mathbb{R}^3$. Musimy znaleźć bazę ortonormalną w tym układzie. Zaczynamy od bazy holonomicznej.

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial x^i}{\partial r}\,\partial_i = \sin\theta\cos\phi\,\partial_x + \sin\theta\sin\phi\,\partial_y + \cos\theta\,\partial_z \\ \left|\partial_r\right| &= 1 \end{aligned}$$

Podobnie liczymy pozostałe części bazy holonomicznej, następnie je normujemy używając kanonicznego iloczynu skalarnego na $\mathbb{R}^3$. Dostajemy:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\partial_x + \sin\theta\sin\phi\,\partial_y + \cos\theta\,\partial_z \\
\hat{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\partial_x + \cos\theta\sin\phi\,\partial_y - \sin\theta\,\partial_z \\
\hat{e}_\phi &= -\sin\phi\,\partial_x + \cos\phi\,\partial_y
\end{aligned}$$

Teraz zajmujemy się prędkością.

$$v = (\dot{r\hat{e}_r}) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$$

Po banalnej kalkulacji dostajemy

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

Wówczas,

$$v = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

Chcieliśmy policzyć przyspieszenie, zatem trzeba jeszcze policzyć pochodne pozostałych wersorów.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\phi \\
\dot{\hat{e}}_\phi &= -\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta
\end{aligned}$$

Po czym należy wstawić i uprosić wszystko w formule na $a = \dot{v}$.

$$\begin{aligned}
a = {}&(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\,\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\hat{e}_\theta \\
&+ (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\,\hat{e}_\phi
\end{aligned}$$

Policzymy jeszcze ten osławiony „element długości”, który jest niczym innym jak tensorem metrycznym na $\mathbb{R}^3$, czyli formą dwuliniową symetryczną. Żeby przejść do innych współrzędnych wystarczy wziąć pullback $\Phi^* g_{\mathbb{R}^3}$, można też użyć metody czysto algebraicznej, czyli reguły transformacyjnej dla form dwuliniowych. Anyway,

$$\mathrm{d}s^2 = \Phi^* g_{\mathbb{R}^3} = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$$

Przy okazji, $\mathrm{d}q^i\,\mathrm{d}q^j$ to symetryzacja $\mathrm{d}q^i \otimes \mathrm{d}q^j$.

**Wstęp** Macierze obrotu wokół osi $x^i$ o kąt $\alpha^i$ to

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Składanie tych poszczególnych obrotów daje ogólny obrót w $\mathbb{R}^3$, wyrażony przez

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

**Zadanie 2** Znaleźć macierz obrotu infinitezymalnego ($\alpha, \beta, \gamma$ małe), przedstawić ją w postaci $R_\omega = \mathbf{1} + \tilde{\omega}$, gdzie $\tilde{\omega}$ jest pewną macierzą oraz wykazać, że $R_\omega v = v + \omega \times v$ dla pewnego wektora $\omega$.

Dla małych kątów można uprościć $\sin\alpha = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$ oraz $\cos\alpha = 1 + \mathcal{O}(\alpha^2)$. Wówczas,

$$R_x(\alpha) = \mathbf{1} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$R_y(\beta) = \mathbf{1} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\beta^2)$$

$$R_z(\gamma) = \mathbf{1} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma^2)$$

Teraz składając,

$$\begin{aligned} R_\omega(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{1} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) \\ &= \mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\alpha^2) = \overset{\text{def}}{=} \mathbf{1} + \tilde{\omega} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Dla wektora $\omega = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^\top$, zawsze zachodzi $\omega_\times v = \omega \times v$, jeśli $\omega_\times$ zdefiniujemy przez:

$$\begin{aligned} \omega \times v &= \varepsilon^i{}_{jk} \omega^j v^k \hat{e}_i \\ [\omega_\times]^i{}_k &= \varepsilon^i{}_{jk} \omega^j \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} [\omega_\times]^1{}_2 &= \varepsilon^1{}_{j2} \omega^j = \varepsilon^1{}_{32} \omega^3 = -\omega^3 = -\gamma \\ [\omega_\times]^1{}_3 &= \varepsilon^1{}_{23} \omega^2 = \omega^2 = \beta \\ [\omega_\times]^2{}_3 &= -\omega^1 = -\alpha \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że działanie takiej macierzy na wektor jest równoważne iloczynowi wektorowemu a ponadto $\omega_\times = \tilde{\omega}$. Stąd,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} v &= \omega \times v \\ R_\omega v &= v + \tilde{\omega} v = v + \omega \times v \end{aligned}$$

co kończy dowód.

**Grupa ortogonalna**

$$\mathrm{O}(n) \overset{\text{def}}{=} \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\, AA^\top = A^\top A = \mathbf{1}\}$$

Grupa ta nie zmienia długości wektorów. Jest to jedna z grup izometrii $\mathbb{R}^n$ euklidesowej.

$$|Av|^2 = [Av]^\top [Av] = [v]^\top A^\top A [v] = [v]^\top [v] = |v|^2$$

Oczywiste jest również, że $\det A = \pm 1$. Grupa SO(3) składa się z takich $A$, że $\det A = 1$, są to czyste obroty. Część z $\det A = -1$ to złożenie odbić z obrotami. Co ciekawe, macierze w SO(3) mają zawsze wartość własną 1 i wektor odpowiadający tej wartości własnej jest osią obrotu.

Ponadto, jeśli weźmiemy infinitezymalną postać przekształcenia, $\mathbf{1} + B$, dla danej grupy Liego, to dowolne przekształcenie odzyskamy przez $e^{tB}$. Na przykładzie grupy obrotów,

$$\begin{aligned}
\omega_\times &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \alpha i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}}_{T_1} + \beta i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_2} + \gamma i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_3}
\end{aligned}$$

Macierze $T_i$ generują algebrę Liego $\mathfrak{so}(3)$ grupy SO(3). Wówczas,

$$R(\omega) = e^{i\omega^k T_k}$$

**Zadanie 3** Wykazać, że obrót o kąt $\alpha$ wokół unormowanego wektora $\hat{n}$ wyraża się wzorem $R_{\hat{n}}(\alpha) = \mathbf{1} + \tilde{n}\sin\alpha + \tilde{n}^2(1 - \cos\alpha)$ gdzie macierz $\tilde{n}$ jest skonstruowana tak, jak poprzednio $\tilde{\omega}$, czyli $\tilde{n}^i{}_k = \varepsilon^i{}_{jk}\hat{n}^j$.

Skorzystamy z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, bo upieramy się aby skorzystać z tych własności relacji między algebrami a grupami Liego, związanych z mapą exp. Wiemy, że

$$R_{\hat{n}}(\alpha) = e^{\alpha\tilde{n}}$$

Wiemy jak wygląda macierz infinitezymalnego obrotu $\tilde{n}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{n} &= \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \\
\det(\tilde{n} - \lambda) &= -\lambda^3 - \lambda(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = -\lambda^3 - \lambda \\
&= -\lambda(\lambda^2 + 1) \\
\mathrm{sp}(\tilde{n}) &= \{0, i, -i\}
\end{aligned}$$

Teraz liczymy eksponens, przez podzielenie eksponensa przez wielomian charakterystyczny. Po zastosowaniu twierdzenia Cayleya-Hamiltona,

$$R(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Dostajemy układ na współczynniki,

$$\begin{cases} c = 1 \\ -a + ib + 1 = e^{i\alpha} \\ -a - ib + 1 = e^{-i\alpha} \end{cases}$$

Stąd, $b = \sin\alpha$ oraz $a = 1 - \cos\alpha$. Finalnie,

$$e^{\alpha\tilde{n}} = \mathbf{1} + \tilde{n}\sin\alpha + \tilde{n}^2(1 - \cos\alpha)$$

Pobrnijmy jeszcze troszkę. Świetnie pamiętamy wzór Meissnera BAC-CAB,

$$\begin{aligned} \tilde{n}^2 v &= \hat{n} \times (\hat{n} \times v) = \hat{n}\langle\hat{n}|v\rangle - v\langle\hat{n}|\hat{n}\rangle \\ &= \hat{n}\langle\hat{n}|v\rangle - v \end{aligned}$$

Równie dobrze możemy na to patrzeć jak na operator rzutowy działający na wektor $v$,

$$= |\hat{n}\rangle\langle\hat{n}|v - v = [\hat{n}][\hat{n}]^\top v - v$$

Stąd wynika, że

$$\tilde{n}^2 = |\hat{n}\rangle\langle\hat{n}| - \mathbf{1}$$

gdzie pierwszy człon to operator rzutowy na podprzestrzeń rozpinaną przez $\hat{n}$.

# Rozdział 1

# Mechanika Lagrange'owska

## Ćwiczenia 3

21 paź 2021 **Krok 1** Ile jest stopni swobody $f$ układu?

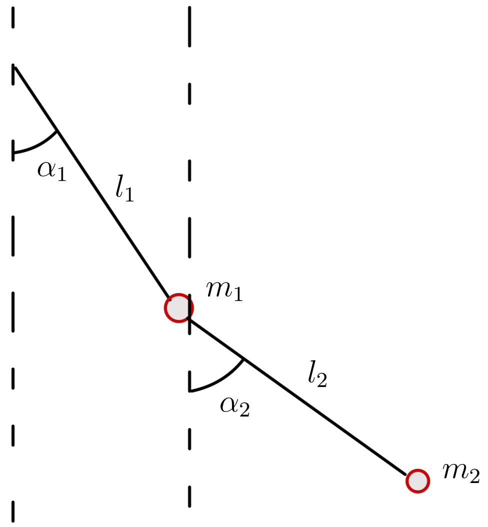
**Krok 2** Wprowadzamy współrzędne $(q_1, q_2, \ldots, q_f)$, które naturalnie rozwiązują więzy. Akurat to nie zawsze da się zrobić, czasem więzy nadają nierówności zamiast równości. Do tego trzeba użyć innej metody.

**Krok 3** Zapisujemy Lagrangian $\mathcal{L} = T - V$ we współrzędnych kartezjańskich i dokonujemy zamiany współrzędnych.

**Krok 4** Zapisujemy równania Eulera-Lagrange'a.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

**Zadanie 1** Wahadło podwójne o masach $m_1$, $m_2$ oraz nieważkich nierozciągliwych prętach o długościach $l_1$, $l_2$.




Rysunek 1.1: Wahadło podwójne

A priori ten układ ma 6 ($3 \cdot 2$) stopni swobody, jednak są również więzy. Ruch odbywa się tylko w dwóch wymiarach (zatem dwa więzy) oraz zachowane odległości między punktami:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ d(0, m_1) = l_1 \\ d(m_1, m_2) = l_2 \end{cases}$$

Mamy zatem 4 więzy. Potrzebujemy więc $f = 6 - 4 = 2 = \dim \mathcal{K}$ współrzędne. Będą to w sposób naturalny dwa kąty ($\alpha_1$, $\alpha_2$). Zapisujemy Lagrangian we współrzędnych kartezjańskich.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 g y_1 + m_2 g y_2) \\ v_i^2 &= \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \end{aligned}$$

Musimy wyrazić współrzędne kartezjańskie przez nasze dwa kąty.

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \alpha_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \alpha_1 \\ x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 \\ y_2 = -l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2 \end{cases}$$

Tutaj kończymy myślenie, do myślenia wrócimy gdy trzeba będzie rozwiązać równania różniczkowe.

$$\begin{aligned} v_1^2 &= l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 \\ v_2^2 &= l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

Stąd Lagrangian to:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right] \\ &+ m_1 g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_2 \cos \alpha_2 \end{aligned}$$

Rozwiązłość tego wzoru jest zaledwie jedną z zalet używania Lagrangianów!

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_1 g l_1 \sin \alpha_1 - m_2 g l_1 \sin \alpha_1 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_2 g l_2 \sin \alpha_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_1^2 + l_1 l_2 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2 + l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{aligned}$$

Oto druga niewątpliwa zaleta tego formalizmu! A to nie koniec przyjemności, bowiem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_1} &= m_1 l_1^2 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_1 \ddot{\alpha}_2 + l_1 l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + l_1 l_2 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_2} &= m l_2^2 \ddot{\alpha}_2 + l_1 l_2 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - l_1 l_2 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) \end{aligned}$$

Teraz już tylko z górki, bo trzeba zapisać równania ruchu.

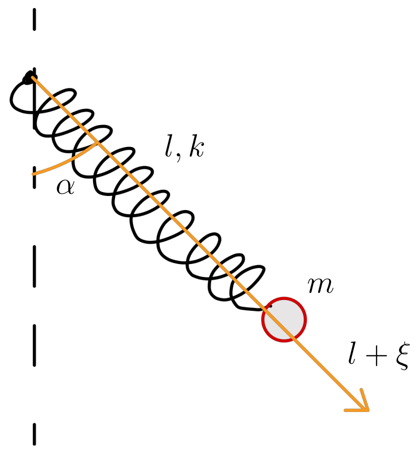
$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\alpha}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1-\alpha_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + (m_1+m_2) g l_1 \sin\alpha_1 = 0$$
$$m_2 l_2^2 \ddot{\alpha}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1-\alpha_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1-\alpha_2) + m g l_2 \sin\alpha_2 = 0$$

Jest to nierozwiązywalne analityczne, możemy jednak rozważać małe drgania używając inżynierskiego przybliżenia: $\sin\alpha_i = \alpha_i$, $\cos(\alpha_1-\alpha_2) = 1$, $\sin(\alpha_1-\alpha_2) = 0$,

$$(m_1+m_2) l_1 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 + (m_1+m_2) g \alpha_1 = 0$$
$$m_2 l_2 \ddot{\alpha}_2 + m_2 l_1 \ddot{\alpha}_1 + m g \alpha_2 = 0$$

Jest prawie normalnie, poza liniowymi członami sprzężenia z drugim wahadłem.

**Zadanie 2** Wahadło sprężynowe, czyli masa zawieszona na sprężynie o długości swobodnej $l$ i współczynniku sprężystości $k$. Zakładamy, że sprężyna się nie zgina, ruch jest tylko w jednej płaszczyźnie (pionowej). Mamy pole grawitacyjne.




Rysunek 1.2: Wahadło sprężynowe

Mamy wyjściowo 3 stopnie swobody, ruch w płaszczyźnie to jedne więzy, sama sprężyna nie jest natomiast więzami, pozostaje więc $f = 2$, tyle też trzeba użyć współrzędnych. Weźmiemy sobie kąt wychylenia od pionu $\alpha$ i wychylenie z długości swobodnej $\xi$ (zatem sprężyna ma długość $l+\xi$).

$$\begin{cases} x = (l+\xi)\sin\alpha \\ y = -(l+\xi)\cos\alpha \end{cases}$$

Układ jest potencjalny, stosujemy więc standardowy Lagrangian,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy - \frac{k\xi^2}{2} \\ &= \frac{m}{2}\left[\dot{\xi}^2 + (l+\xi)^2\dot{\alpha}^2\right] + mg(l+\xi)\cos\alpha - \frac{k\xi^2}{2} \end{aligned}$$

Równanie ruchu dla zmiennej $\xi$ to:

$$m\ddot{\xi} - m(l+\xi)\dot{\alpha}^2 - mg\cos\alpha + k\xi = 0$$

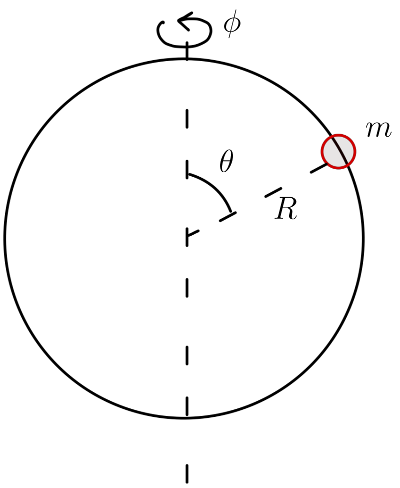
Równanie na $\alpha$ to

$$m(l+\xi)^2\ddot{\alpha} + 2m(l+\xi)\dot{\alpha}\dot{\xi} + mg(l+\xi)\sin\alpha = 0$$

Można skrócić,

$$(l+\xi)\ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha}\dot{\xi} + g\sin\alpha = 0$$

**Zadanie 3** Mamy obręcz w polu grawitacyjnym, która może się obracać względem pionowej osi będącej jej średnicą. Na obręczy jest koralik o masie $m$.




Rysunek 1.3: Obręcz z koralikiem

Zauważmy, że to jest to samo zadanie co rozważanie punktu na sferze. Kąt obrotu jest bowiem niezależnym stopniem swobody. Koralik jest związany z obręczą (więzy obrazujące stałą odległość od środka), zatem mamy $f = 2$. Użyjemy więc dwóch współrzędnych: $\theta$ opisuje położenie koralika na obręczy, a $\phi$ to kąt obrotu obręczy.

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

Widać teraz nawet bardziej, że wszystkie możliwe położenia koralika to po prostu sfera.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{mv^2}{2} - mgz \\ &= \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta \end{aligned}$$

Stąd, równanie dla $\theta$ to

$$mR^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta - mR^2\ddot{\theta} = 0$$

oraz równanie na $\phi$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0$$

$\phi$ jest zmienną cykliczną, bo nie pojawia się w Lagrangianie. Zawsze gdy mamy zmienną cykliczną $q$, wówczas $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ jest stałą ruchu, którą nazywa się pędem uogólnionym $p_q$ (i jest on zachowany). Stąd $mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta$ jest taką stałą.

$$mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta = R\sin\theta \cdot mR\dot{\phi}\sin\theta = L$$

zatem widzimy, że jest to moment pędu.

Teraz założymy, że obręcz ma ruch wymuszony, nie ma pełnej swobody. Niech będzie to ruch wokół osi ze stałą prędkością kątową, $\phi(t) = \omega t$, $\omega = \dot{\phi}$. Są to dodatkowe więzy, mamy już do opisu tylko jedną zmienną. Wówczas,

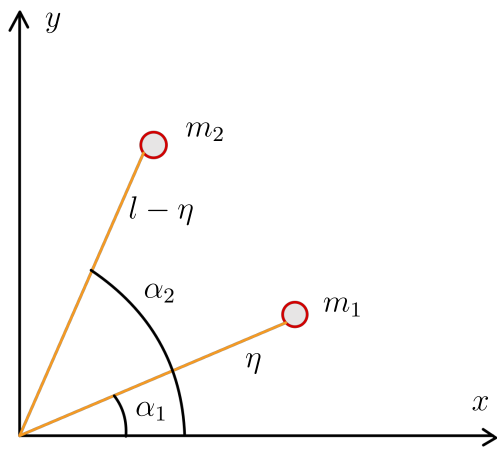
$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta$$

oraz równania ruchu,

$$R\ddot{\theta} = \underbrace{R\omega^2\cos\theta}_{\text{p. dośrodkowe}}\sin\theta - g\sin\theta$$
$$L = mR^2\omega\sin^2\theta$$

Widzimy oczywiście człony, których się spodziewaliśmy.

**Zadanie 4** Mamy 2 punkty zaczepione na dwóch końcach idealnej nici, sama nić jest zaczepiona w punkcie (nić się może ruszać wzdłuż swojej długości, w punkcie się tylko zgina) na jakiejś płaszczyźnie (jesteśmy na płaszczyźnie poziomej).




Rysunek 1.4: 2 punkty na nici

A priori byłoby 6 stopni swobody, ruch jest płaski więc zostają 4, suma odległości między punktami (mierzona po nici) jest stała: $d(m_1, 0) + d(0, m_2) = l$. Zostaje więc $f = 3$. Wyznaczamy więc dwie współrzędne kątowe $\alpha$, $\alpha_2$ oraz jedną $\eta$ mierzącą długość do masy $m_1$. Więzy są naturalnie spełnione przez fakt, że $\eta + (l - \eta) = l$.

$$\begin{cases} x_1 = \eta\cos\alpha_1 \\ y_1 = \eta\sin\alpha_1 \\ x_2 = (l-\eta)\cos\alpha_2 \\ y_2 = (l-\eta)\sin\alpha_2 \end{cases}$$

Natomiast Lagrangian to

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

Liczymy,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{\eta}\cos\alpha_1 + \eta\dot{\alpha}_1\sin\alpha_1 \\
\dot{y}_1 &= \dot{\eta}\sin\alpha_1 + \eta\dot{\alpha}_1\cos\alpha_1 \\
\dot{x}_2 &= -\dot{\eta}\cos\alpha_1 - (l-\eta)\dot{\alpha}_1\sin\alpha_1 \\
\dot{y}_2 &= -\dot{\eta}\sin\alpha_1 + (l-\eta)\dot{\alpha}_2\cos\alpha_2
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\eta}^2 + \eta^2\dot{\alpha}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\eta}^2 + (l-\eta)^2\dot{\alpha}_2^2\right)$$

Równanie na $\eta$ jakieś oczywiście wychodzi.

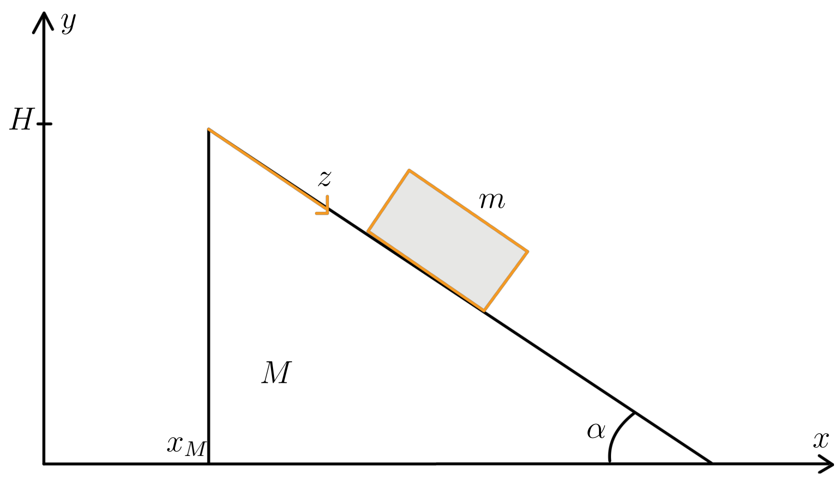
$$\ddot{\eta}(m_1+m_2) - m_1\eta\dot{\alpha}_1^2 + m_2(l-\eta)\dot{\alpha}_2^2 = 0$$

Mamy dwie współrzędne cykliczne, będą więc dwie wartości zachowane,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\dot{\alpha}_1\eta) &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_2\dot{\alpha}_2(l-\eta)\right) &= 0
\end{aligned}$$

Obrazuje to zachowanie momentu pędu dla obu cząstek.

**Zadanie 5** Niech równia pochyła o wysokości $H$ i kącie $\alpha$ ma masę $M$, na niej umieszczamy klocek $m$. Zbadać dynamikę układu.




Rysunek 1.5: Równia pochyła z klockiem.

Równia się porusza tylko w jednej osi, natomiast klocek jest cały czas na równi (choć teoretycznie mógłby się oderwać), stąd klocek ma 2 stopnie swobody, ale jeden z nich to po prostu położenie równi. Potrzebujemy więc 2 współrzędnych $(x_M, z)$ gdzie $x_M$ to położenie ściany równi, natomiast $z$ mierzy położenie klocka na równi.

$$\begin{cases} x_M = x_M \\ y_M = 0 \\ x_m = x_M + z\cos\alpha \\ y_m = H - z\sin\alpha \end{cases}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= \dot{x}_M + \dot{z}\cos\alpha \\ \dot{y}_m &= -\dot{z}\sin\alpha \end{aligned}$$

Teraz Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{M\dot{x}_M^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_M^2 + 2\dot{x}_M\dot{z}\cos\alpha + \dot{z}^2\right) - mg(H - z\sin\alpha)$$

Stałą z Lagrangianu wyrzucamy, bo nie ma wpływu na dynamikę,

$$\equiv \frac{M\dot{x}_M^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_M^2 + 2\dot{x}_M\dot{z}\cos\alpha + \dot{z}^2\right) + mgz\sin\alpha$$

Równania Eulera-Lagrange'a to

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + m\dot{x}_M^2 + m\ddot{z}\cos\alpha &= 0 \\ m\ddot{z} + m\ddot{x}_M\cos\alpha - mg\sin\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Co ciekawe, to że $x_M$ jest zmienną cykliczną, czyli

$$p_{x_M} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_M} = (M+m)\dot{x}_M + m\dot{z}\cos\alpha$$

Stąd widzimy, że pęd układu jest zachowany.

## Ćwiczenia 4

28 paź 2021 **Zadanie 1** Punkty materialne o masach $m_1$, $m_2$ oddziałują ze sobą siłą centralną. Zapisać funkcję Lagrange'a i równania ruchu we współrzędnych środka masy.

Siła centralna to taka, której potencjał zależy tylko od odległości między ciałami, tj. $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Wektor wodzący układu środka masy to

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

Mamy wyjściowo 6 stopni swobody, w tych współrzędnych jest również 6 stopni swobody, po 3 w $\mathbf{R}$ i $\mathbf{r}$. Chcielibyśmy zapisać Lagrangian w tych nowych współrzędnych.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2\right) - V(|\mathbf{r}|)$$

Zauważmy, że $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + m_2\mathbf{r}/(m_1+m_2)$,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \\
&= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)
\end{aligned}
$$

W tym Lagrangianie $\mathbf{R}$ jest zmienną cykliczną, co wyraża zachowanie pędu.

$$
p_R = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = M\dot{\mathbf{R}} = \text{const.}
$$

Ponadto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \mu\dot{\mathbf{r}} \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} &= -\operatorname{grad} V(r)
\end{aligned}
$$

Stąd równanie ruchu, modulo zasada zachowania pędu to

$$
\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\operatorname{grad} V(r)
$$

Dodajmy więzy. Przyjmijmy, że cząstki są połączone nieważkim prętem o długości $l$, tj. $r = l$. $\mathbf{R}$ nie ruszamy, jednak $\mathbf{r}$ możemy przedstawić we współrzędnych sferycznych, gdzie więzy będą naturalnie spełnione.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= l\sin\theta\cos\phi\,\partial_x + l\sin\theta\sin\phi\,\partial_y + l\cos\theta\,\partial_z \\
\dot{\mathbf{r}} &= r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi + l\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta
\end{aligned}
$$

Wówczas,

$$
\mathcal{L} = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mu l^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - V(l)
$$

ale $V(l) = \text{const.}$ więc możemy wyrzucić tę stałą.

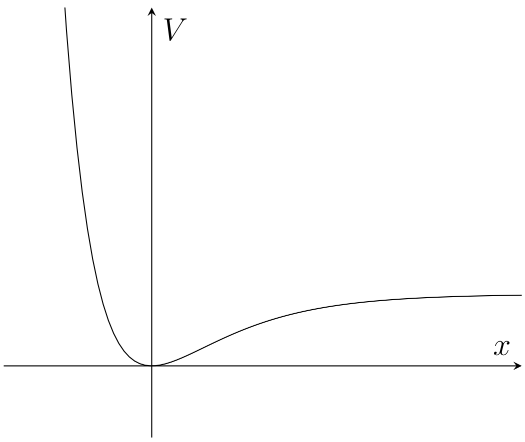
$$
\equiv \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mu l^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)
$$

**Zadanie 2** Znaleźć ruch cząstki $m$ w jednowymiarowym potencjale Morse'a $V(x) = A(1-e^{-ax})^2$ gdzie $A, a > 0$.

$$
\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)
$$

Użyjemy całki energii,

$$
E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)
$$




Rysunek 1.6: Potencjał Morse'a.

Załóżmy, że szukamy rozwiązań związanych, tj. $E > V$. Stąd dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}$$
$$t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}}$$

To jest całka oznaczona, ale ale zasadniczo nie do końca wiadomo po jakim obszarze, pewnie od $x(0) = 0$ do $x$.

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - A(1 - e^{-ax})^2}} = \left| \begin{matrix} y = e^{ax} \\ \mathrm{d}y = ae^{ax}\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| \\
&= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\mathrm{d}y}{ay\sqrt{E - A\left(1 - \frac{1}{y}\right)^2}} = \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Ey^2 - A(y - 1)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(E - A)y^2 + 2Ay + A}} = (*)
\end{aligned}$$

Dla $E = 0$ nie ma ruchu. Dla $E \in (0, A)$ spodziewamy się oscylacji,

$$(*) = \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{AE}{A-E} - (A - E)\left(y - \frac{A}{A-E}\right)^2}} = \left| \begin{matrix} y = \dfrac{A}{A - E} + \dfrac{\sqrt{AE}}{A - E}\sin u \\ \mathrm{d}y = \dfrac{\sqrt{AE}}{A - E}\cos u\,\mathrm{d}u \end{matrix} \right|$$

Modulo nietrywialne rozważania o modułach (zakładamy, że wszystko jest tak, żeby było dobrze), po przywołaniu rodziny funkcji kuluralnych,

$$= \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \frac{1}{\sqrt{A - E}} \int \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{m}u}{a\sqrt{2(A - E)}}$$

Stąd,

$$
\begin{aligned}
u(t) &= at\sqrt{\frac{2(A-E)}{m}} \\
x(t) &= \frac{1}{a}\log\left(\frac{A}{A-E} + \frac{\sqrt{AE}}{A-E}\sin\frac{at\sqrt{2(A-E)}}{\sqrt{m}}\right)
\end{aligned}
$$

To jest ruch quasi periodyczny, więc pasuje. Nic się o dziwo nie wykrzacza, bo mieliśmy farta nie myśląc zanadto nad użytymi podstawieniami i przekształceniami.

Dla przypadku granicznego $E = A$ dostaniemy

$$
t = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{A(2y-1)}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2A}}\sqrt{2y-1}
$$

Oczywiście olewamy granice całkowań, po co to komu.

$$
x(t) = \frac{1}{a}\log\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2At^2}{m}\right)
$$

To jest układ asymptotyczny, czego się należało spodziewać. I nawet nie zapłaczemy, że $x(0) \neq 0$, co wyjściowo przyjęliśmy! xD

Ostatnim przypadkiem jest $E > A$. Przekształcając tak, żeby było dobrze,

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(E-A)\left(y+\frac{A}{E-A}\right)^2 - \frac{AE}{E-A}}} = \left|\begin{array}{c} y = \frac{\sqrt{AE}}{E-A}\cosh u - \frac{A}{A-E} \\ \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{AE}}{E-A}\sinh u \end{array}\right| \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2(E-A)}}\int\mathrm{d}u = \frac{u}{a}\sqrt{\frac{m}{2(E-A)}}
\end{aligned}
$$

Stąd,

$$
x(t) = \frac{1}{a}\log\left(\frac{-A}{E-A} + \frac{\sqrt{AE}}{E-A}\cosh\frac{2at\sqrt{E-A}}{\sqrt{m}}\right)
$$

cosh i log osiągają nieograniczone wartości, zatem tutaj odlatujemy dowolnie daleko.

**Zadanie 3** Rozważmy szczególny przypadek wahadła matematycznego $(l, m)$, w którym energia jest akurat taka, że zatrzymuje się pionowo „na górze" (robi obrót o $\pi$). Przyjmujemy, że ta energia to $E = mgl$ (bo tak jest przy dobrym przyjęciu poziomu zero).

Jako parametr bierzemy kąt $\alpha$ od bieguna (jak $\theta$ w układzie sferycznym).

$$
\begin{aligned}
V(\alpha) &= mgl\cos\alpha \\
\mathrm{T} &= \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2}
\end{aligned}
$$

Użyjemy tej samej metody co poprzednio, czyli całki energii.

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} + V \\
\dot{\alpha}^2 &= \frac{2}{ml^2}(E - V) \\
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} &= l\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-V}}
\end{aligned}
$$

Znów rozwiązujemy to równanie przez rozdzielenie zmiennych,

$$
t = l\sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{E - mgl\cos\alpha}}
$$

UZUPEŁNIĆ OD MATEUSZA

$$
\alpha(t) = 4\tan^{-1} e^{\sqrt{g/l}t}
$$

modulo stałe do warunków początkowych.

**Zadanie 4** Wahadło matematyczne przybliżone lepiej niż zwykle (w przybliżeniu anharmonicznym), z rozwiązaniem przez rachunek zaburzeń. Za warunki początkowe przyjmujemy $\alpha(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

Tutaj używamy standardowego kąta $\alpha$ dla wahadła. Równanie ruchu to

$$
\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0
$$

gdzie wprowadzamy stałe oznaczenie na $\omega = \sqrt{g/l}$. Tym razem,

$$
\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \mathcal{O}(\alpha^5)
$$

Stąd,

$$
\ddot{\alpha} + \omega^2\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right) = 0
$$

Przyjmijmy sobie postać rozwiązania $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ gdzie $\alpha_0$ jest małe i $\alpha_1 \ll \alpha_0$. Krok pierwszy to ścisłe znalezienie $\alpha_0$, które odpowiada:

$$
\begin{aligned}
0 &= \ddot{\alpha}_0 + \omega^2\alpha_0 \\
\alpha_0(t) &= \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t
\end{aligned}
$$

W drugim kroku włączamy zaburzenie, ale zachowując tylko człony liniowe w $\alpha_1$, pamiętając, że również $\alpha_0\alpha_1 = \mathcal{O}(\alpha_1^2)$, zatem $(\alpha_0 + \alpha_1)^3 = \alpha_0^3 + \mathcal{O}(\alpha_1^2)$.

$$
\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_1 + \omega^2\alpha_1 &= \frac{\omega^2\alpha_0^3}{6} \\
\ddot{\alpha}_1 + \omega^2\alpha_1 &= \frac{\omega^2}{6}\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^3\sin^3\omega t
\end{aligned}
$$

Po znalezieniu odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej,

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_1 = \frac{\omega^2}{24}\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^3 (3\sin\omega t - \sin 2\omega t)$$

Mamy równanie liniowe niejednorodne. Zgadnięte rozwiązanie szczególne to

$$\alpha_{\mathrm{sz}}(t) = \frac{1}{24}\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^3 \left(\frac{\sin 3\omega t}{8} - \frac{3\omega t \cos\omega t}{2}\right)$$

Stąd,

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{24}\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^3 \left(\frac{\sin 3\omega t}{8} - \frac{3\omega t \cos\omega t}{2} + A\sin\omega t\right)$$

Trzeba by jeszcze dodać $\alpha_0$, ale jak widać to zmienia tylko stałą $A$. Powyższe rozwiązania jest więc takie samo jak $\alpha_0 + \alpha_1$.

## Ćwiczenia 5

**Zadanie 1** Rozważmy wahadło zawieszone na ruchomym klocku (który może się ruszać tylko poziomo). 04 lis 2021

Klocek ma 1 stopień swobody, wahadło tradycyjnie 1. Stąd mamy 2 stopnie swobody. Współrzędna $x$ opisuje położenie poziome klocka, $\alpha$ tradycyjny kąt wychylenia wahadła. Niech klocek ma masę $M$, a wahadło $m$.

$$\begin{cases} x_m = x + l\sin\alpha \\ y_m = -l\cos\alpha \end{cases}$$

Wstawiamy to do Lagrangianu,

$$\mathcal{L} = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + l^2\dot{\alpha}^2\right) + mgl\cos\alpha$$

Jak wyglądają równania ogólne? Zmienną cykliczną jest $x$. Dostaniemy równania:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\alpha}\cos\alpha - ml\dot{\alpha}^2\sin\alpha &= 0 \\ l\ddot{\alpha} + \ddot{x}\cos\alpha + g\sin\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Chcemy przybliżać rozwiązanie, bo nie da się jawnie tego rozwiązać. Najpierw trzeba znaleźć położenia równowagi. Będzie to $\alpha = 0$, $x$ natomiast nie wpływa na położenie równowagi, bo nie wpływa na energię a położenie równowagi odpowiada minimum potencjału (efektywnego). Czasami człon kinetyczny daje wkład efektywny do tego potencjału. Położenie równowagi spełnia równania $\partial\mathcal{L}/\partial q^i = 0$.

Chcemy więc rozwinąć równania ruchu wokół położenia równowagi. Można też od razu przybliżyć Lagrangian. W przybliżeniu małych drgań (rozwinięcie wokół położenia równowagi $\alpha = 0$), Lagrangian przybliżamy do członów kwadratowych, czyli używamy rozwinięć $\sin\alpha = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^3)$ oraz $\cos\alpha = 1 - \alpha/2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + ml\dot{x}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}mgl\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

gdzie jeden wyraz z $\cos\alpha$ przybliżyliśmy tylko do 1 (i tak mały człon bo $\dot\alpha = \mathcal{O}(\alpha)$), a stałe elementy w Lagrangianie ominęliśmy. Równania E-L wyglądają następująco:

$$g\alpha + l\ddot\alpha + \ddot x = 0$$
$$(M+m)\ddot x + ml\ddot\alpha = 0$$

Przybliżając pełne równania ruchu szukamy natomiast pierwszego rzędu przybliżenia, nie drugiego (zawsze celem jest odtworzenie równania oscylatora).

$$\ddot x = -\frac{ml\ddot\alpha}{M+m}$$

Stąd, po dwukrotnym odcałkowaniu,

$$x = -\frac{ml}{M+m}\alpha + At + B$$

Wstawiając pierwsze równanie do wyżej wyprowadzonego równania ruchu,

$$\begin{aligned} 0 &= g\alpha + l\ddot\alpha - \frac{ml\ddot\alpha}{M+m} \\ 0 &= \ddot\alpha + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\alpha \end{aligned}$$

Mamy więc drganie harmoniczne z częstością

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}} \\ \alpha(t) &= C\cos(\omega t + \phi_0) \\ x(t) &= -\frac{mlC}{M+m}\cos(\omega t + \phi_0) + At + B \end{aligned}$$

Rozwiązanie ma 4 stałe $(A, B, C, \phi_0)$. $B$ jest oczywiście położeniem początkowym $x_0$. Ruch powinien mieć 2 mody normalne. Pierwszy jest wtedy gdy $A = 0$ (punkt zaczepienia (tylko) drga przeciwnie do wahadła), drugi mod jest gdy $C = 0$, czyli kiedy wahadło nie drga, a punkt zaczepienia się porusza liniowo. Dowolny ruch układu można przedstawić jako złożenie tych dwóch modów. Co ciekawe, gdy $M \gg m$, odtwarzamy ruch wahadła matematycznego.

**Zadanie 2** Małe drgania w wahadle podwójnym. Znaleźć częstości tych drgań.

Wracamy do zadania z jednych z pierwszych ćwiczeń.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &\frac{1}{2}\left[m_1 l_1^2\dot\alpha_1^2 + m_2 l_1^2\dot\alpha_1^2 + m_2 l_2^2\dot\alpha_2^2 + 2m_2 l_1 l_2\dot\alpha_1\dot\alpha_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\right] \\ &+ m_1 g l_1\cos\alpha_1 + m_2 g l_1\cos\alpha_1 + m_2 g l_2\cos\alpha_2 \end{aligned}$$

Znowu chcemy Lagrangian 2 rzędu w $(\alpha_1, \alpha_2)$, omijając stałe wyrazy i pamiętając, że również $\mathcal{O}(\dot\alpha_i) = \mathcal{O}(\alpha_i)$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot\alpha_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot\alpha_2 + m_2 l_1 l_2\dot\alpha_1\dot\alpha_2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\alpha_1^2 - \frac{1}{2}m_2 g l_2\alpha_2^2$$

Stąd,

$$\begin{aligned} m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha}_2 + (m_1+m_2) g l_1 \alpha_1 + (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\alpha}_1 &= 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha}_1 + m_2 g l_2 \alpha_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\alpha}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sprawdzimy sobie czy oscylacyjne rozwiązanie działa. Podstawimy $\alpha_1(t) = Ae^{i\omega t}$, $\alpha_2(t) = Be^{i\omega t}$.

$$\begin{aligned} -m_2 l_1 l_2 B\omega^2 \alpha_1 + (m_1+m_2) g l_1 A_1 - (m_1+m_2) l_1^2 \omega^2 A &= 0 \\ -m_2 l_1 l_2 A\omega^2 + m_2 g l_2 B - m_2 l_2^2 B\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

Teraz trzeba uporządkować algebraiczny śmietnik w celu wyznaczenia $\omega$.

$$\begin{aligned} A(m_1+m_2)(g - l_1\omega^2) &= \omega^2 m_2 l_2 B \\ B(g - l_2\omega^2) &= \omega^2 l_1 A \end{aligned}$$

Pomnóżmy równania stronami, bo wtedy skasują się $A$ i $B$,

$$(m_1+m_2)(g - l_1\omega^2)(g - l_2\omega^2) = \omega^4 m_2 l_1 l_2$$

W rezultacie dostajemy równanie kwadratowe na $\xi = \omega^2$.

$$m_1 l_1 l_2 \xi^2 - g(l_1+l_2)(m_1+m_2)\xi + g^2(m_1+m_2) = 0$$

Finalnie,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g(l_1+l_2)(m_1+m_2) \pm g\sqrt{(m_1+m_2)\left[(l_1+l_2)^2(m_1+m_2) - 4m_1 l_1 l_2\right]}}{2m_1 l_1 l_2}$$

Gdy podstawimy $m_1 = m_2$, to znacznie się uprości. Gdy jeszcze dorzucimy $l_1 = l_2$ to w ogóle!

$$\omega = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

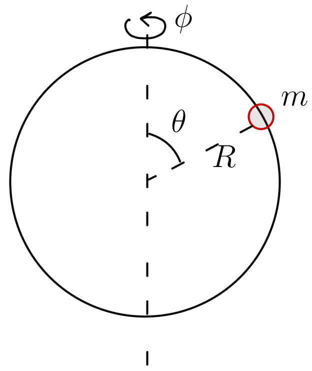
Tak czy inaczej, mamy 4 możliwe częstości (w uproszczonym przypadku efektywnie chyba dwie, bo ujemna częstość nic nie powinna fizycznie zmienić).

**Zadanie 3** Powrót do zadania z obręczą obracającą się wokół swojej osi, a na niej koralik o masie $m$.

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) + mgR\cos\theta$$

Stąd równanie ruchu to

$$0 = \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta$$




Rysunek 1.7: Obręcz z koralikiem, tyle że tym razem $\theta$ ma być od dołu.

Tutaj sprawa jest mniej oczywista, bo położenie równowagi raczej nie musi być w $\theta = 0$ (na samym dole obręczy). Tutaj akurat człon kinetyczny daje efektywny wkład do potencjału, dlatego położenie równowagi nie jest rozwiązaniem $\partial V \big/ \partial q^i = 0$. Dobrą definicją położenia równowagi jest natomiast $\partial \mathcal{L} \big/ \partial q^i = 0$.

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = 0$$

$$\sin\theta_0 = 0 \quad \text{lub} \quad \cos\theta_0 = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Stąd wynika, że $\theta_0 = 0$ (na dole), $\theta_0 = \pi$ (na górze) lub $\cos\theta_0 = g/(\omega^2 R)$ (położenie równowagi „dynamiczne”). Kiedy ma to sens?

**Przypadek 1** Przyjmujemy ruch $g > \omega^2 R$ (to znaczy, że $\omega$ jest odpowiednio mała). W tej sytuacji trzecie położenie równowagi odpada bo $\cos\theta_0 > 1$. Zostają dwa położenia równowagi, z których $\theta_0 = 0$ jest stabilne, $\theta_0 = \pi$ jest chwiejne. Ale załóżmy, że tego nie wiemy. Sprawdźmy! Wyjdźmy najpierw z położenia równowagi $\theta_0 = \pi$. Rozwijamy funkcję $\theta$ wokół tego punktu, otrzymując $\theta = \pi + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon$ jest mały. Wówczas $\sin\theta = -\sin\varepsilon$ (z tożsamości na sinus sumy). Analogicznie $\cos(\pi + \varepsilon) = -\cos\varepsilon$. Wówczas po wstawieniu do głównego równania,

$$\ddot{\varepsilon} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2 \cos\varepsilon\right) \sin\varepsilon = 0$$

Teraz przybliżamy, jako że $\varepsilon$ jest małe.

$$\ddot{\varepsilon} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right)\varepsilon = 0$$

Jest to prawie równanie oscylatora, ale nie do końca (stała ma zły znak). Nie ma drgań, jest wahnięcie oddalające coraz dalej od położenia równowagi. Widać więc, że $\theta = \pi$ jest położeniem równowagi chwiejnej (można oczywiście to wszystko badać licząc drugie pochodne). W takim razie zostaje $\theta = 0$. Rozwijamy wokół tego punktu.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = 0$$

To już jest równanie oscylatora z częstością $\Omega = \sqrt{g/R - \omega^2}$.

**Przypadek 2** Przyjmujemy ruch $g < \omega^2 R$. Wówczas mamy 3 możliwe położenia równowagi. Trzeba znaleźć te stabilne i zlinearyzować wokół nich. Dla $\theta_0 = \pi$ historia się powtarza. Dla $\theta_0 = 0$ dostaniemy to samo, ale będzie zły znak przy współczynniku w równaniu oscylatora, zatem dostaniemy równowagę chwiejną. Zostaje więc tylko trzecie położenie równowagi $\cos\theta_0 = g/(\omega^2 R)$. Przyjmujemy, że $\theta = \theta_0 + \varepsilon$. Wstawmy to do wyjściowego równania.

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta_0 + \varepsilon) &\overset{\varepsilon \lll 1}{=} \sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
\cos(\theta_0 + \varepsilon) &\overset{\varepsilon \lll 1}{=} \cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

Jest to de facto tożsame rozwinięciu Taylora wokół $\varepsilon = 0$.

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2(\cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0)\right)(\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{R}(\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0) - \omega^2\Big(\sin\theta_0\cos\theta_0 + \varepsilon\big(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\big)\Big) &= 0 \\
\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{R}\left(\sin\theta_0 + \frac{\varepsilon g}{\omega^2 R}\right) - \omega^2\left(\frac{g}{\omega^2 R}\sin\theta_0 + \varepsilon\left(\frac{2g^2}{\omega^4 R^2} - 1\right)\right) &= 0 \\
\ddot{\varepsilon} + \left(\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2}\right)\varepsilon &= 0
\end{aligned}
$$

Stała w równaniu jest dodatnia, wyszły więc drgania.

**Przypadek 3** Ostatni przypadek $g = \omega^2 R$ jest patologiczny, bo w naszym przybliżeniu nie będzie drgań małych. Będą dopiero drgania anharmoniczne w wyższym rzędzie przybliżeń, nie będziemy tego jednak robić.

Oddziaływanie elektromagnetyczne nie jest zachowawcze, nie można więc dla niego napisać Lagrangianu jako $\mathcal{L} = T - V$. Można natomiast tworzyć coś, co po prostu działa i odtwarza tę siłę.

Zaproponujmy Lagrangian dla jednej cząstki o ładunku $q$, masie $m$ w polu $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

$$
\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \underbrace{q\big(\phi - (\dot{\mathbf{r}} \mid \mathbf{A})\big)}_{U}
$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest dowolną funkcją spełniającą $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ (potencjał wektorowy), natomiast $\phi$ jest potencjałem skalarnym. Wówczas pola są zdefiniowane jako

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\
\mathbf{B} &= \operatorname{rot}\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

Takich funkcji $(\phi, \mathbf{A})$ jest nieskończenie wiele, mamy zbędą swobodę, w ogólności potrzebne jest pewne cechowanie (gauge fixing). $U$ jest potencjałem uogólnionym, zauważmy że w ogóle zależy od prędkości. Można sprawdzić, że $\mathcal{L}$ odtwarza siłę Lorentza.

## Ćwiczenia 6

10 lis 2021 **Zadanie 1** Weźmy kulę o promieniu $R$, na niej cząstkę o masie $m$ i ładunku $q$. Dodajemy pole magnetyczne $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ gdzie $B > 0$ i grawitację $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.

Jaki będzie Lagrangian?

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q(\dot{\mathbf{r}} \mid \mathbf{A}) - mgR\cos\theta$$

gdzie $\theta$ jest kątem od góry jak dla tradycyjnego układu sferycznego. Musimy jeszcze znaleźć potencjał wektorowy odtwarzający stałe $\mathbf{B}$. Łatwo odgadnąć i się przekonać, że pasuje

$$\mathbf{A} = -\frac{By}{2}\mathbf{e}_x + \frac{Bx}{2}\mathbf{e}_y$$

Musimy wstawić do Lagrangianu współrzędne sferyczne, wszystko policzyć i coś wyjdzie.

$$\dot{\mathbf{r}} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$$

Podobnie, po zabawie w wyrażanie wersorów kartezjańskich przez sferyczne,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}BR\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi$$
$$(\dot{\mathbf{r}} \mid \mathbf{A}) = \frac{1}{2}BR^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

Stąd,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{q}{2}BR^2\dot{\phi}\sin^2\theta - mgR\cos\theta$$

Równania E-L,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mR^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + qBR^2\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mR^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$$

$\phi$ jest oczywiście współrzędną cykliczną,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta + \frac{q}{2}BR^2\sin^2\theta\right)$$

Wszystko fajnie, ale podobno łatwiej się to rozwiązuje jednak we współrzędnych kartezjańskich. Powtórzymy więc zabawę. Mamy więzy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i te współrzędne ich jawnie nie rozwiązują. Wyznaczymy więc jedną ze współrzędnych przez dwie pozostałe.

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Ponieważ rozważamy ruch tylko w dolnej części kuli, przyjmiemy znak minus,

$$
\begin{aligned}
z &= -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\
\dot{z} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}
\end{aligned}
$$

Teraz można zapisać prędkość.

$$
v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R^2 - x^2 - y^2}
$$

W tym momencie już można narzucić przybliżenie małych drgań. Nie zakładają one oczywiście, że $z$ jest małe, natomiast $x, y$ już są bliskie zeru – położenie równowagi to $(0, 0, -R)$.

$$
= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \mathcal{O}(x^3)
$$

Co z magnetycznym potencjałem uogólnionym?

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{m}} &= -q(\mathbf{v} \mid \mathbf{A}) = \frac{qB}{2}(\dot{x}y - x\dot{y}) \\
U_{\mathrm{g}} &= -mg\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = -mgR\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \\
&= -mgR\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2}\right) + \mathcal{O}(x^3) \\
&\cong \frac{mg}{2R}(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(x^3)
\end{aligned}
$$

gdzie wyrzuciliśmy stały człon. Zapisujemy Lagrangian,

$$
\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\big) - \frac{mg}{2R}(x^2 + y^2) - \frac{qB}{2}(\dot{x}y - x\dot{y}) + \mathcal{O}(x^3)
$$

Wynikające stąd równania ruchu to:

$$
\begin{cases}
m\ddot{x} = -\dfrac{mg}{R}x + qB\dot{y} \\
m\ddot{y} = -\dfrac{mg}{R}y - qB\dot{x}
\end{cases}
$$

Są to równania sprzężone, które rozwiązujemy wprowadzając zmienną $\mathbb{C} \ni \eta = x + iy$. Wówczas,

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\eta} &= -\frac{mg}{R}\eta - iqB\dot{\eta} \\
0 &= \ddot{\eta} + i\frac{qB}{m}\dot{\eta} + \frac{g}{R}\eta
\end{aligned}
$$

Jest to piękne równanie liniowe o ogólnym rozwiązaniu $\eta \sim e^{i\omega t}$.

$$
\begin{aligned}
0 &= -\omega^2 - \frac{qB}{m}\omega + \frac{g}{R} \\
\omega &= \frac{-qB \pm \sqrt{q^2B^2 + \frac{4m^2g}{R}}}{2m}
\end{aligned}
$$

Śliczny wynik.

**Zadanie 2** Wahadło Foucault. Zakładamy kulistą Ziemię (to nie jest oczywiste, model płaskiej Ziemi jest matematycznie spójny) o promieniu $R$ z osią obrotu i prędkością kątową $\omega$. Na pewnej wysokości nad ziemią znajduje się wahadło matematyczne $(m, l)$, na szerokości geograficznej $\theta$.

Wprowadzimy układ współrzędnych, w którym oś $z$ wahadła pokrywa się promieniem Ziemi (parametryzowanym przez szerokość geograficzną $\theta$), $x$ idzie w kierunku bieguna północnego, a $y$ jest skierowane przed rysunek. Wahadło jest oczywiście w układzie nieinercjalnym, występuje więc pozorna siła odśrodkowa $\mathbf{F}_\text{o} = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}$ i Coriolisa $\mathbf{F}_\text{c} = 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$. Na szczęście jest to naturalnie całkowicie niepotrzebne. Musimy tylko znać relację między prędkościami (czyli tym, co definiuje kinematykę w tym formalizmie). Jeśli $\mathbf{r}$ łączy środek Ziemi z masą, $\mathbf{v}$ oznacza prędkość w lokalnym układzie nieinercjalnym, to prędkość masy w układzie inercjalnym wyniesie $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

$$
\begin{aligned}
T = \frac{mV^2}{2} &= \frac{m}{2}\big[v^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2\big] \\
&= \frac{m}{2}\big[v^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{r})^2\big]
\end{aligned}
$$

gdzie $r \approx R$ ponieważ $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| = l \ll R$. Pole efektywne (omijając wkład od siły odśrodkowej) to $\mathbf{g}_\text{eff} = -g\mathbf{e}_z - \omega^2 \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \approx -g\mathbf{e}_z$. Podobnie jak poprzednio, mamy więzy $z^2 = l^2 - x^2 - y^2$.

$$
\begin{aligned}
V \approx mgr &= \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) \\
\mathbf{v} &\approx \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y
\end{aligned}
$$

Dalej,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &\approx \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \omega\cos\theta & 0 & \omega\sin\theta \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \\
&= (x\dot{y} - \dot{x}y)\omega\sin\theta
\end{aligned}
$$

Stąd,

$$
\mathcal{L} = \frac{m}{2}\big(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(x\dot{y} - \dot{x}y)\omega\sin\theta\big) - \frac{mg}{2R}(x^2 + y^2)
$$

Jest to postać analogiczna do Lagrangianu z poprzedniego zadania. Trzeba jedynie zastąpić $qB \rightsquigarrow 2m\omega\sin\theta$. Dostaniemy te same wyniki. Wniosek jest taki, że płaszczyzna drgań się obraca, i wynika to z faktu, że Ziemia się obraca tj. $\omega \neq 0$.

**Zadanie 3** Znaleźć ruch cząstki w polu fali biegnącej $V(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{m\dot{x}^2}{2} - A\cos(\omega t - kx) \\
m\ddot{x} &= -kA\sin(\omega t - kx)
\end{aligned}
$$

Jeśli wprowadzimy zmienną $\xi = x - \omega t/k$, to

$$
m\ddot{\xi} = -kA\sin k\xi
$$

Występują dwa położenia równowagi, $k\xi = 0$ (stabilne) lub $\pi$ (chwiejne), można więc rozważyć małe drgania wokół stabilnego położenia równowagi. Wówczas,

$$m\ddot{\xi} = -kA\xi + \mathcal{O}(\xi^2)$$

To jest już równanie oscylatora.

**Zadanie 4** Rozważmy wahadło, w którym punkt zaczepienia oscyluje z ustaloną częstością $\Omega$.

Ruch punktu zaczepienia można opisać jako

$$x(t) = A\cos(\Omega t)$$

Wówczas położenie masy na wahadle opiszemy przez

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{m}} &= x + l\sin\alpha \\ y_{\mathrm{m}} &= -l\cos\alpha \end{aligned}$$

Potencjał to oczywiście $V = -mgl\cos\alpha$. Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha\right) + mgl\cos\alpha$$

Oczywiście $x$ jest zmienną cykliczną, mamy więc jedno równanie ruchu

$$\begin{aligned} l\ddot{\alpha} + \ddot{x}\cos\alpha + g\sin\alpha &= 0 \\ l\ddot{\alpha} - A\Omega^2\cos(\Omega t)\cos\alpha + g\sin\alpha &= 0 \end{aligned}$$

W przybliżeniu liniowych drgań,

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = aR^2\cos(\Omega t)$$

jest to oczywiście równanie oscylatora (niejednorodne), ale rozwiązanie znamy.

## Ćwiczenia 7: Siły centralne

**Zadanie 1** Pokazać, że układ 3 ciał o masach $m_i$ znajduje się w równowadze jeżeli masy leżą w wierzchołkach pewnego trójkąta równobocznego i wszystkie obracają się z tą samą prędkością kątową $\omega$ prostopadłą do trójkąta. 18 lis 2021

Arbitralnie, mamy wyróżniony układ środka masy. W tym układzie wprowadzamy wektory wodzące $\mathbf{r}_i$. Dla każdego $i \in \{1,2,3\}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_i$. Układ środka masy ma własność $\sum m_i\mathbf{r}_i = 0$. Chcemy pokazać, że $\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right| = a$. Zapiszmy Lagrangian układu,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_i \frac{m_i}{2}&\left[v_i^2 + 2\mathbf{v}_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i) + \omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{r}_i)^2\right] \\ &+ \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \end{aligned}$$

Zauważmy, że warunek prostopadłości kasuje człony $(\boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{r}_i)$. Ponadto kasują się $v_i^2$ i $2\mathbf{v}_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_1} &= \nabla_{\mathbf{r}_1}\mathcal{L} \\ &= m_1\omega^2\mathbf{r}_1 - \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{Gm_1m_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\end{aligned}$$

Równowaga zachodzi, gdy $\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{r}_1 = 0$. Wstawmy $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i| = a$ (w najgorszym przypadku okaże się, że nie dało się nałożyć takiego warunku).

$$\nabla_{\mathbf{r}_1}\mathcal{L} \sim \omega^2\mathbf{r}_1 - \frac{G}{a^3}\left[m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + m_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\right]$$

Korzystając z definicji układu środka masy,

$$\begin{aligned} &= \omega^2\mathbf{r}_1 - \frac{G}{a^3}(m_1 + m_2 + m_3)\mathbf{r}_1 = 0 \\ \omega^2 &= \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}\end{aligned}$$

Zatem dostaliśmy coś, dla takiego warunku układ jest stabilny. Gdybyśmy policzyli to samo dla $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, dostalibyśmy to samo.

## Siły centralne

Dla siły centralnej (która oczywiście jest potencjalna) $V = V(r) \iff \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r$. W ogólności, wówczas moment pędu $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ jest zachowany, zatem ruch odbywa się w płaszczyźnie. W takim razie Lagrangian ma postać

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - V(r)$$

Dostaniemy równanie E-L dla zmiennej $r$:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 r - V'(r)$$

Równanie dla zmiennej cyklicznej $\phi$ daje zachowanie momentu pędu

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\phi}\right)$$

Widać więc, że $J = mr^2\dot{\phi} = \mathrm{const}(t)$. Dzięki temu można jeszcze uprościć równania, podstawiając $\dot{\phi}$. Okaże się więc, że zagadnienie jest efektywnie jednowymiarowe.

$$m\ddot{r} = \frac{J^2}{mr^3} - V'(r)$$

Stąd, po odcałkowaniu

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

To równanie na energię, wraz z zachowaniem momentu pędu dają nam wszystko, co potrzeba do rozwiązywania takich zagadnień.

Używając tych równań można spróbować wyznaczyć $r(t), \phi(t)$, widząc że

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{J^2}{2mr^2}\right)} \\ t - t_0 &= \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{J^2}{2mr^2}\right)}} \end{aligned}$$

To nam da zależność $t(r)$, którą można chcieć odwrócić. Wówczas,

$$\phi(t) = \int \frac{J^2}{2mr^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Jest to ogólne rozwiązanie, wydaje się proste, natomiast oczywiście niemal nigdy nie jest to obliczalne.

Można też poszukiwać innego rozwiązania, mianowicie trajektorię $r(\phi)$. Odpowiedzią na to pytanie jest wzór Bineta.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(r^{-1}\right) + r^{-1} &= -\frac{mr^2}{J^2}F(r) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(r^{-1}\right) + r^{-1} &= \frac{mr^2}{J^2}V'(r) \end{aligned}$$

Po podstawieniu $w(\phi) = r(\phi)^{-1}$,

$$w'' + w = -\frac{m}{J^2w^2}F\left(\frac{1}{w}\right)$$

Jednak po obliczeniu $F(r)$ z potencjału i zamieniając zmienną na $w$,

$$w'' + w = \frac{m}{J^2}V'(w)$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne 2 rzędu.

**Przykład** Niech $V(w) = -\alpha w$ (tak wygląda np. potencjał grawitacyjny). Wzór Bineta daje:

$$w'' + w = \frac{m\alpha}{J^2} \stackrel{\text{def}}{=} \eta$$

Wprowadźmy nową zmienną $s = w - \eta$.

$$\begin{aligned} s'' + s &= 0 \\ s(\phi) &= A\cos(\phi - \phi_0) \\ w(\phi) &= \eta + A\cos(\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

Stąd,

$$r(\phi) = \frac{1}{\eta + A\cos(\phi - \phi_0)}$$

Teraz przydałaby się jakaś lepsza interpretacja stałych. Niech $p = \eta^{-1}$ oraz $\varepsilon = A/\eta$.

$$= \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)}$$

$\varepsilon$ można na przykład wyznaczyć z całki energii. Wychodzi wówczas

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{1 + \frac{2J^2E}{m\alpha^2}} \\ p &= \frac{J^2}{m\alpha} \end{aligned}$$

Zauważmy, że daje to nam pełną klasyfikację trajektorii.

$$\varepsilon \in \begin{cases} \{0\} & E = -\dfrac{m\alpha^2}{2J^2} \quad \text{(okrąg)} \\ (0,1) & -\dfrac{m\alpha^2}{2J^2} < E < 0 \quad \text{(elipsa)} \begin{cases} r_{\min} = \dfrac{J^2}{m\alpha(1+\varepsilon)} \\ r_{\max} = \dfrac{J^2}{m\alpha(1-\varepsilon)} \end{cases} \\ \{1\} & E = 0 \quad \text{(parabola)} \\ (1,\infty) & E > 0 \quad \text{(hiperbola)} \end{cases}$$

**Zadanie 2** $V(w) = -\alpha w - \beta w^2$, $\beta \ll \alpha$

Tutaj mamy poprzedni przykład z zaburzeniem kwadratowym. Ze wzoru Bineta,

$$\begin{aligned} w'' + w &= \frac{m}{J^2}(\alpha w + \beta) \\ w'' + \left(1 - \frac{2\beta m}{J^2}\right)w &= \frac{\alpha m}{J^2} \stackrel{\text{def}}{=} \eta \end{aligned}$$

Chcemy wprowadzić nową zmienną, by dostać oscylator harmoniczny. Niech $s = Aw - B$.

$$\eta = \frac{s''}{A} + \left(1 - \frac{2\beta\eta}{\alpha}\right)\frac{s+B}{A}$$

Stąd $A = 1$ oraz

$$B = \frac{\eta}{1 - \frac{2\beta\eta}{\alpha}}$$

W takim razie,

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{2\beta m}{J^2}}$$

Dalej jest oscylator, ale z inną częstością.

**Zadanie 3** $V(w) = -\alpha w - \delta V$ gdzie $\delta V \ll \alpha w$

Użyjemy rozwiązania dla przypadku niezaburzonego i zrobimy rachunek zaburzeń.

$$\begin{aligned} V_0(w) &= -\alpha w \\ w_0(\phi) &= A\cos(\phi - \phi_0) \cong A\sin(\phi - \phi_0) \\ w(\phi) &= w_0(\phi) + \delta w(\phi) \end{aligned}$$

Równanie Bineta jest liniowe, więc możemy to wstawić i część z $w_0$ zaniknie.

$$\delta w'' + \delta w = \frac{m\delta V'}{J^2}$$

Teraz wchodzi rachunek zaburzeń. Wstawiamy $\delta V'(w) = \delta V(w_0) + \mathcal{O}(w_0^2)$. Teraz jeden prosty trick, zróżniczkujmy po $\phi$,

$$\delta w''' + \delta w' = \frac{m}{J^2}\delta V''(w_0) A\cos(\phi - \phi_0)$$

Załóżmy $\phi_0 = 0$, bo czemu nie. Teraz pomnóżmy przez $\cos\phi$ i scałkujmy.

$$\delta w''' \cos\phi + \delta w' \cos\phi = \frac{mA}{J^2}\delta V''(w_0)\cos^2\phi \qquad \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w''' \cos\phi \,\mathrm{d}\phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w' \cos\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{mA}{J^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta V''(w_0)\cos^2\phi \,\mathrm{d}\phi$$

Pierwszą całkę liczymy przez części.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w''' \cos\phi \,\mathrm{d}\phi &= \delta w'' \cos\phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w'' \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \\ &= \delta w' \sin\phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w' \cos\phi \,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Stąd,

$$\delta w'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \delta w'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{mA}{J^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta V''(w_0)\cos^2\phi \,\mathrm{d}\phi$$

Spodziewamy się dostać precesję orbit, wprowadźmy więc parametr (a w zasadzie 3 nowe wielkości), który miałby ją opisywać:

$$\delta\phi = 2\delta\phi_+ - 2\delta\phi_-$$

Sens tych wielkości zaraz się wyjaśni. Dla $w_0$ ekstrema są w $\pm\pi/2$, przez precesję będą właśnie pewne odchylenia położenia ekstremum. Znajdziemy te położenia ekstremalne rozwiązując warunek $w'(\phi) = 0$.

$$0 = w' = w_0' + \delta w' = A\cos\underbrace{\left(\pm\frac{\pi}{2} + \delta\phi_\pm\right)}_{\phi} + \delta w'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$$

gdzie w ostatnim wyrazie pominęliśmy już te zaburzenia kąta $\delta\phi_\pm$. Wiemy, że $\delta\phi$ jest małe, więc możemy przybliżyć cos, używając tożsamości trygonometrycznych

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}+x\right) = \mp\sin x$$

Stąd,

$$\begin{aligned}
0 &= \mp A\delta\phi_\pm + \delta w'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \\
\pm\delta\phi_\pm &\approx \frac{1}{A}\delta w'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

I uwaga punkt kulminacyjny,

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \frac{2}{A}\left[\delta w'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \delta w'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2m}{J^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta V''(w_0)\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

Dostaliśmy więc poprawkę położenia ekstremalnych punktów orbity wynikającą z precesji.

# Rozdział 2

# Bryła sztywna

## Ćwiczenia 8

25 lis 2021

**Definicja 1.**

$$\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \, \mathrm{d}m$$
$$\mathbf{x}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{x} \, \mathrm{d}m$$
$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m$$

gdzie $r$ to odległość od osi obrotu.