

Mechanika klasyczna R

Notatki z ćwiczeń

Wykładowcy:
mgr Bartłomiej Zglinicki

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Ćwiczenia 1: Oscylator tłumiony z wymuszeniem	4
Ćwiczenia 2	8
1 Mechanika Lagrange’owska	13
Ćwiczenia 3	13
Ćwiczenia 4	19
Ćwiczenia 5	24
Ćwiczenia 6	29
Ćwiczenia 7: Siły centralne	32
2 Bryła sztywna	38
Ćwiczenia 8	38
Ćwiczenia 9	42

Ćwiczenia 1: Oscylator tłumiony z wymuszeniem

Zadanie 1 Znaleźć rozwiązania równań ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem 07 paź 2021 liniowym o współczynniku $b > 0$ i siłą wymuszającą $F = F(t)$.

Zapiszmy równanie znane każdemu przedszkolakowi:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

gdzie zakładamy, że $m, k > 0$.

Przypadek 1 $b = 0, F = 0$

Zapisujemy równanie,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $\omega^2 = k/m$. Jest to równanie liniowe jednorodne. Równanie charakterystyczne:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \omega^2 &= 0 \\ \alpha &= \pm i\omega \end{aligned}$$

Stąd,

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

gdzie $A, B \in \mathbb{C}$. Użyjmy wzoru Eulera, z którego otrzymamy

$$= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

gdzie

$$C_1 = A + B, \quad C_2 = -i(A - B)$$

są stałymi rzeczywistymi, jako że $x(t) \in \mathbb{R}$. Odwracając te warunki,

$$A = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2), \quad B = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2)$$

Stąd, $A = \overline{B}$. Można więc to pierwsze rozwiązanie zapisać w postaci

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + \overline{Ae^{i\omega t}}$$

Rozwiązanie oscylatora można jeszcze zapisać w innej postaci,

$$x(t) = C \cos(\omega t - \phi)$$

gdzie $C^2 = C_1^2 + C_2^2$, natomiast $\tan \phi = C_2/C_1$. Jest jeszcze jedna możliwość jak napisać to rozwiązanie:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[C e^{i(\omega t - \phi)} \right]$$

Przypadek 2 $F(t) = 0$, $b > 0$ Równanie ma postać

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = 0$$

gdzie $\omega^2 = k/m$ oraz $\beta = b/(2m) > 0$. Równanie jest znowu jednorodne i liniowe, zatem jedziemy.

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega^2 = 0$$

Dostaniemy 3 przypadki w zależności od relacji między dodatnimi ω, β .

$$\Delta = 4\beta^2 - 4\omega^2$$

Dla $\beta > \omega$ będzie $\Delta > 0$ zatem

$$\alpha_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \stackrel{\text{def}}{=} -\beta \pm \kappa$$

Nie ma drgań, bo wykładnik eksponensa nie jest zespolony.

$$x(t) = e^{-\beta t} [Ae^{\kappa t} + Be^{-\kappa t}]$$

$\kappa < \beta$, zatem pierwszy człon będzie wolniej się zerował niż ten drugi, dla dużych czasów to on będzie istotny. To sugeruje więc, żeby jako parametr zaniku, wprowadzić $t_0 = \kappa - \beta$.

Dla $\beta < \omega$ będzie

$$\alpha_{\pm} = -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \stackrel{\text{def}}{=} -\beta \pm i\tilde{\omega}$$

$$x(t) = e^{-\beta t} [Ae^{i\tilde{\omega}t} + \overline{Ae^{i\tilde{\omega}t}}]$$

Co można zapisać jako

$$= Ce^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}t + \phi)$$

Widać jasno, że są to zanikające oscylacje.

W ostatnim przypadku mamy tłumienie krytyczne z $\beta = \omega$. Wówczas

$$x(t) = e^{-\beta t} [A + Bt]$$

W takim przypadku tłumienie jest najszybsze.

Przypadek 3 $F(t) \neq 0$ jest harmoniczna.

Niech $f(t) = F(t)/m$. Wówczas mamy

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = f(t)$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne. Jego rozwiązaniem jest rozwiązanie ogólne równania jednorodnego plus dowolne rozwiązanie szczególnie niejednorodnego $x(t) =$

$$x_o(t) + x_s(t).$$

Najpierw możemy sobie ćwiczebnie rozwiązać przypadek szczególny z $f(t) = f_0 \cos \Omega t$. Użyjemy tricku z uzespoleniem równania.

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x &= f_0 \cos \Omega t \\ \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega^2 y &= f_0 \sin \Omega t\end{aligned}$$

Stąd, $z(t) = x(t) + iy(t)$.

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega^2 z = f_0 e^{i\Omega t}$$

Szukamy rozwiązania szczególnego, dla powyższego równania. Użyjemy metody kontrolowanego zgadywania. Poszukajmy rozwiązania postaci $z_s(t) = \xi e^{i\Omega t}$.

$$\begin{aligned}f_0 &= -\xi\Omega^2 + 2i\xi\beta\Omega + \omega^2\xi \\ \xi &= \frac{f_0}{2i\beta\Omega + \omega^2 - \Omega^2}\end{aligned}$$

Udało się. Stała ξ jest zespolona, ale musimy z niej wydobyć część rzeczywistą i urojoną, bo chcemy mieć część rzeczywistą z $z_s(t)$. Najfajniej będzie zapisać ξ w postaci biegunowej.

$$\begin{aligned}\xi &= \eta e^{i\phi} = \sqrt{\xi\bar{\xi}} e^{i\phi} \\ \eta^2 &= \frac{f_0^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} \\ f_0 e^{-i\phi} &= \eta(\omega^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega)\end{aligned}$$

Stąd,

$$\tan \phi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Finalnie,

$$\begin{aligned}x_s(t) &= \operatorname{Re} z_s(t) = \eta \cos(\Omega t + \phi) \\ x(t) &= e^{-\beta t} \left[C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} t} \right] + \eta \cos(\Omega t + \phi)\end{aligned}$$

Po upływie pewnego czasu, pierwszy człon będzie zaniedbywalny (niezależnie od rodzaju tłumienia), istotny stanie się tylko człon ostatni. Taki człon nazywa się atraktorem – niezależnie od warunków początkowych rozwiązanie będzie asymptotycznie atraktorem. W ogólności, czasem w układach chaotycznych takich atraktorów może być więcej niż jeden, a to do którego rozwiązania układ będzie zmierzał zależy od konfiguracji początkowej.

Przypadek 4 $F \neq 0$ dowolne.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego to

$$x_o(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

Rozwiązanie szczególne poszukujemy przez uzmiennianie stałych postulując rozwiązanie postaci

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)$$

Uzyskamy Wronskan, z którego dostajemy układ równań na $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Metodą wyznaczników,

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= \frac{1}{\det W} \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ f(t) & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \frac{-x_2 f(t)}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} \\ \dot{C}_2 &= \frac{1}{\det W} \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ \dot{x}_2 & f(t) \end{vmatrix} = \frac{x_1 f(t)}{x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2} \end{aligned}$$

Tutaj można sobie zawsze wstawić dowolne f i odcałkować C_1, C_2 .

Nie jest to najlepsza metoda, dlatego można użyć rozkładu funkcji w szereg Fouriera.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Policzyliśmy rozwiązania ogólne dla $f(t) \sim e^{i\Omega t}$, co powoduje, że w ogólności rozwiązanie będzie superpozycją (równanie jest liniowe) takich rozwiązań dla kolejnych członów w szeregu.

Errata Gęstości tensorowe δ i ε każdy zna. Mniej powszechne fakty:

$$\begin{aligned} \varepsilon^i_{mn} \varepsilon_j^{mn} &= 2\delta^i_j \\ \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{ijk} &= 6 \\ (a \times b)^i &= \varepsilon^i_{jk} a^j b^k \end{aligned}$$

gdzie iloczyn wektorowy jest taki ładny tylko w ortonormalnej bazie przestrzeni liniowej, co na szczęście można jeszcze rozszerzyć do pól w przestrzeni afinicznej. Na ogólnych rozmaitościach nie dość, że lepiej używać obrazu dualnego, to uciąglenie na pola w $(TM)^*$ sprowadza się do algebry zewnętrznej kowektorów.

Zadanie 2 Znaleźć ogólne rozwiązanie $r^i(t)$ równania ruchu cząstki o masie m i ładunku q w stałym polu magnetycznym B^i z liniową siłą tłumienia o współczynniku $b > 0$.

Piszemy równanko:

$$m\ddot{r}^i = q(\dot{r} \times B)^i - b\dot{r}^i$$

Bez straty ogólności $B^i \partial_i = B \partial_3$. Podstawmy jawnie $v^i = \dot{r}^i$.

$$m\dot{v}^i = q(v \times B)^i - bv^i$$

Rozwiązujemy. Najpierw trzeba rozwikłać iloczyn wektorowy. Wprowadzamy bazę kartezjańską (ortogonalną) i w niej równania mają postać:

$$\begin{aligned} m\dot{v}^i &= q\varepsilon^i_{jk}v^jB^k - bv^i \\ m\dot{v}^i\partial_i &= q(v^2B\partial_1 - v^1B\partial_2) - bv^i\partial_i \end{aligned}$$

Stąd,

$$m\begin{bmatrix} \dot{v}^1 \\ \dot{v}^2 \\ \dot{v}^3 \end{bmatrix} = q\begin{bmatrix} v^2B \\ -v^1B \\ 0 \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Trzeba rozwiązać taki układzik. Najprostsza jest oczywiście składowa 3.

$$\begin{aligned} m\dot{v}^3 &= -bv^3 \\ v^3(t) &= \tilde{A}_3e^{-bt/m} \\ r^3(t) &= A_3e^{-bt/m} + B_3 \end{aligned}$$

Teraz wprowadźmy nową zmienną $\xi = r^1 + ir^2$ oraz $\eta = \dot{\xi} = v^1 + iv^2$. Wprowadźmy jeszcze częstość cyklotronową $\omega = qB/m$ oraz $k = b/m$. Pozostałość układu równań możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -i\omega\eta - k\eta = -(i\omega + k)\eta \\ \eta(t) &= A_\eta e^{-(i\omega+k)t} \\ \xi(t) &= A_\xi e^{-(i\omega+k)t} + B_\xi = A_\xi e^{-i\omega t} e^{-kt} + B_\xi \end{aligned}$$

Mamy człon kołowy, w 3D dostaniemy coś na kształt rozciągniętej spirali logarytmicznej.

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{-kt}(A + iB)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C + iD \\ &= e^{-kt}(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + C + ie^{-kt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + iD \end{aligned}$$

Stąd finalnie,

$$\begin{bmatrix} r^1(t) \\ r^2(t) \\ r^3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-kt}(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + C \\ e^{-kt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + D \\ Ee^{-kt} + F \end{bmatrix}$$

Mamy sześć stałych, tak jak być powinno.

Ćwiczenia 2

Zadanie 1 Wyrazić prędkość v , przyspieszenie a i element długości ds^2 we współrzędnych sferycznych. 14 paź 2021

Współrzędne sferyczne $(r, \theta, \phi) \xrightarrow{\Phi} (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \in \mathbb{R}^3$. Musimy znaleźć bazę ortonormalną w tym układzie. Zaczynamy od bazy holonomicznej.

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial x^i}{\partial r} \partial_i = \sin\theta\cos\phi\partial_x + \sin\theta\sin\phi\partial_y + \cos\theta\partial_z \\ |\partial_r| &= 1 \end{aligned}$$

Podobnie liczymy pozostałe części bazy holonomicznej, następnie je normujemy używając kanonicznego iloczynu skalarnego na \mathbb{R}^3 . Dostajemy:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \partial_x + \sin \theta \sin \phi \partial_y + \cos \theta \partial_z \\ \hat{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \partial_x + \cos \theta \sin \phi \partial_y - \sin \theta \partial_z \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \partial_x + \cos \phi \partial_y\end{aligned}$$

Teraz zajmujemy się prędkością.

$$v = (\dot{r}\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$$

Po banalnej kalkulacji dostajemy

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

Wówczas,

$$v = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi$$

Chcieliśmy policzyć przyspieszenie, zatem trzeba jeszcze policzyć pochodne pozostałych wersorów.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi \\ \dot{\hat{e}}_\phi &= -\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\theta\end{aligned}$$

Po czym należy wstawić i uprościć wszystko w formule na $a = \dot{v}$.

$$\begin{aligned}a &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta) \hat{e}_\phi\end{aligned}$$

Policzymy jeszcze ten osławiony „element długości”, który jest niczym innym jak tensorem metrycznym na \mathbb{R}^3 , czyli formą dwuliniową symetryczną. Żeby przejść do innych współrzędnych wystarczy wziąć pullback $\Phi^*g_{\mathbb{R}^3}$, można też użyć metody czysto algebraicznej, czyli reguły transformacyjnej dla form dwuliniowych. Anyway,

$$ds^2 = \Phi^*g_{\mathbb{R}^3} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Przy okazji, $dq^i dq^j$ to symetryzacja $dq^i \otimes dq^j$.

Wstęp Macierze obrotu wokół osi x^i o kąt α^i to

$$\begin{aligned}R_x(\alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ R_y(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \\ R_z(\gamma) &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Składanie tych poszczególnych obrotów daje ogólny obrót w \mathbb{R}^3 , wyrażony przez

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

Zadanie 2 Znaleźć macierz obrotu infinitezimalnego (α, β, γ małe), przedstawić ją w postaci $R_\omega = \mathbf{1} + \tilde{\omega}$, gdzie $\tilde{\omega}$ jest pewną macierzą oraz wykazać, że $R_\omega v = v + \omega \times v$ dla pewnego wektora ω .

Dla małych kątów można uprościć $\sin \alpha = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$ oraz $\cos \alpha = 1 + \mathcal{O}(\alpha^2)$. Wówczas,

$$\begin{aligned} R_x(\alpha) &= \mathbf{1} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ R_y(\beta) &= \mathbf{1} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\beta^2) \\ R_z(\gamma) &= \mathbf{1} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\gamma^2) \end{aligned}$$

Teraz składając,

$$\begin{aligned} R_\omega(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{1} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) \\ &= \mathbf{1} + \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\alpha^2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1} + \tilde{\omega} + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Dla wektora $\omega = [\alpha \ \beta \ \gamma]^\top$, zawsze zachodzi $\omega_\times v = \omega \times v$, jeśli ω_\times zdefiniujemy przez:

$$\begin{aligned} \omega \times v &= \varepsilon^i_{jk} \omega^j v^k \hat{e}_i \\ [\omega_\times]^i_k &= \varepsilon^i_{jk} \omega^j \end{aligned}$$

Sprawdzamy, że

$$\begin{aligned} [\omega_\times]^1_2 &= \varepsilon^1_{j2} \omega^j = \varepsilon^1_{32} \omega^3 = -\omega^3 = -\gamma \\ [\omega_\times]^1_3 &= \varepsilon^1_{23} \omega^2 = \omega^2 = \beta \\ [\omega_\times]^2_3 &= -\omega^1 = -\alpha \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że działanie takiej macierzy na wektor jest równoważne iloczynowi wektorowemu a ponadto $\omega_\times = \tilde{\omega}$. Stąd,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} v &= \omega \times v \\ R_\omega v &= v + \tilde{\omega} v = v + \omega \times v \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Grupa ortogonalna

$$O(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : AA^\top = A^\top A = \mathbf{1}\}$$

Grupa ta nie zmienia długości wektorów. Jest to jedna z grup izometrii \mathbb{R}^n euklidesowej.

$$|Av|^2 = [Av]^\top [Av] = [v]^\top A^\top A [v] = [v]^\top [v] = |v|^2$$

Oczywiste jest również, że $\det A = \pm 1$. Grupa $SO(3)$ składa się z takich A , że $\det A = 1$, są to czyste obroty. Część z $\det A = -1$ to złożenie odbić z obrotami. Co ciekawe, macierze w $SO(3)$ mają zawsze wartość własną 1 i wektor odpowiadający tej wartości własnej jest osią obrotu.

Ponadto, jeśli weźmiemy infinitezymalną postać przekształcenia, $\mathbf{1} + B$, dla danej grupy Liego, to dowolne przekształcenie odzyskamy przez e^{tB} . Na przykładzie grupy obrotów,

$$\begin{aligned} \omega_\times &= \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \alpha i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}}_{T_1} + \beta i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_2} + \gamma i \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_3} \end{aligned}$$

Macierze T_i generują algebrę Liego $\mathfrak{so}(3)$ grupy $SO(3)$. Wówczas,

$$R(\omega) = e^{i\omega^k T_k}$$

Zadanie 3 Wykazać, że obrót o kąt α wokół unormowanego wektora \hat{n} wyraża się wzorem $R_{\hat{n}}(\alpha) = \mathbf{1} + \tilde{n} \sin \alpha + \tilde{n}^2(1 - \cos \alpha)$ gdzie macierz \tilde{n} jest skonstruowana tak, jak poprzednio $\tilde{\omega}$, czyli $\tilde{n}^i_k = \varepsilon^i_{jk} \hat{n}^j$.

Skorzystamy z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, bo upieramy się aby skorzystać z tych własności relacji między algebrami a grupami Liego, związanych z mapą \exp . Wiemy, że

$$R_{\hat{n}}(\alpha) = e^{\alpha \tilde{n}}$$

Wiemy jak wygląda macierz infinitezymalnego obrotu \tilde{n} :

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \\ \det(\tilde{n} - \lambda) &= -\lambda^3 - \lambda(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = -\lambda^3 - \lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 + 1) \\ \text{sp}(\tilde{n}) &= \{0, i, -i\} \end{aligned}$$

Teraz liczymy eksponens, przez podzielenie eksponensa przez wielomian charakterystyczny. Po zastosowaniu twierdzenia Cayleya-Hamiltona,

$$R(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Dostajemy układ na współczynniki,

$$\begin{cases} c = 1 \\ -a + ib + 1 = e^{i\alpha} \\ -a - ib + 1 = e^{-i\alpha} \end{cases}$$

Stąd, $b = \sin \alpha$ oraz $a = 1 - \cos \alpha$. Finalnie,

$$e^{\alpha \tilde{n}} = \mathbf{1} + \tilde{n} \sin \alpha + \tilde{n}^2 (1 - \cos \alpha)$$

Pobrnijmy jeszcze troszkę. Świetnie pamiętamy wzór Meissnera BAC-CAB,

$$\begin{aligned} \tilde{n}^2 v &= \hat{n} \times (\hat{n} \times v) = \hat{n} \langle \hat{n} | v \rangle - v \langle \hat{n} | \hat{n} \rangle \\ &= \hat{n} \langle \hat{n} | v \rangle - v \end{aligned}$$

Równie dobrze możemy na to patrzeć jak na operator rzutowy działający na wektor v ,

$$= |\hat{n}\rangle \langle \hat{n} | v - v = [\hat{n}][\hat{n}]^\top v - v$$

Stąd wynika, że

$$\tilde{n}^2 = |\hat{n}\rangle \langle \hat{n} | - \mathbf{1}$$

gdzie pierwszy człon to operator rzutowy na podprzestrzeń rozpinaną przez \hat{n} .

Rozdział 1

Mechanika Lagrange'owska

Ćwiczenia 3

21 paź 2021 **Krok 1** Ile jest stopni swobody f układu?

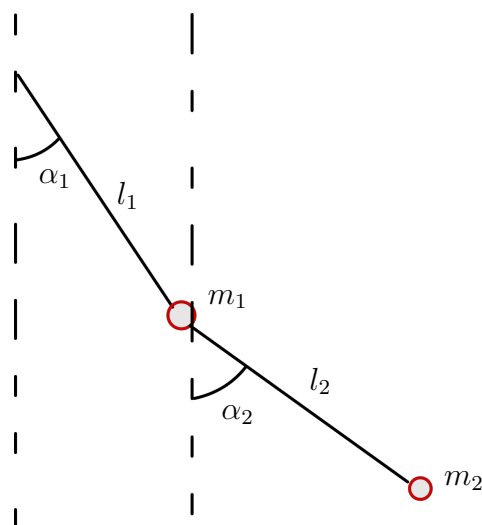
Krok 2 Wprowadzamy współrzędne (q_1, q_2, \dots, q_f) , które naturalnie rozwiązują więzy. Akurat to nie zawsze da się zrobić, czasem więzy nadają nierówności zamiast równości. Do tego trzeba użyć innej metody.

Krok 3 Zapisujemy Lagrangian $\mathcal{L} = T - V$ we współrzędnych kartezjańskich i dokonujemy zamiany współrzędnych.

Krok 4 Zapisujemy równania Eulera-Lagrange'a.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$$

Zadanie 1 Wahadło podwójne o masach m_1, m_2 oraz nieważkich nierozciągliwych prętach o długościach l_1, l_2 .



Rysunek 1.1: Wahadło podwójne

A priori ten układ ma 6 ($3 \cdot 2$) stopni swobody, jednak są również więzy. Ruch odbywa się tylko w dwóch wymiarach (zatem dwa więzy) oraz zachowane odległości między punktami:

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ d(0, m_1) = l_1 \\ d(m_1, m_2) = l_2 \end{cases}$$

Mamy zatem 4 więzy. Potrzebujemy więc $f = 6 - 4 = 2 = \dim \mathcal{K}$ współrzędne. Będą to w sposób naturalny dwa kąty (α_1, α_2). Zapisujemy Lagrangian we współrzędnych kartezjańskich.

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 g y_1 + m_2 g y_2)$$

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2$$

Musimy wyrazić współrzędne kartezjańskie przez nasze dwa kąty.

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \alpha_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \alpha_1 \\ x_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 \\ y_2 = -l_1 \cos \alpha_1 - l_2 \cos \alpha_2 \end{cases}$$

Tutaj kończymy myślenie, do myślenia wrócimy gdy trzeba będzie rozwiązać równania różniczkowe.

$$v_1^2 = l_1^2 \dot{\alpha}_1^2$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Stąd Lagrangian to:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

$$+ m_1 g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_2 \cos \alpha_2$$

Rozwiążność tego wzoru jest zaledwie jedną z zalet używania Lagrangianów!

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_1 g l_1 \sin \alpha_1 - m_2 g l_1 \sin \alpha_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - m_2 g l_2 \sin \alpha_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_1 + l_1 l_2 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2 + l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Oto druga niewątpliwa zaleta tego formalizmu! A to nie koniec przyjemności, bowiem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_1} = m_1 l_1^2 \ddot{\alpha}_1 + m_2 l_1 \ddot{\alpha}_2 + l_1 l_2 \ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + l_1 l_2 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\alpha}_2 + l_1 l_2 \ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - l_1 l_2 \ddot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)$$

Teraz już tylko z górki, bo trzeba zapisać równania ruchu.

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\alpha}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \alpha_1 = 0$$

$$m_2l_2^2\ddot{\alpha}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - m_2l_1l_2\dot{\alpha}_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + mgl_2 \sin \alpha_2 = 0$$

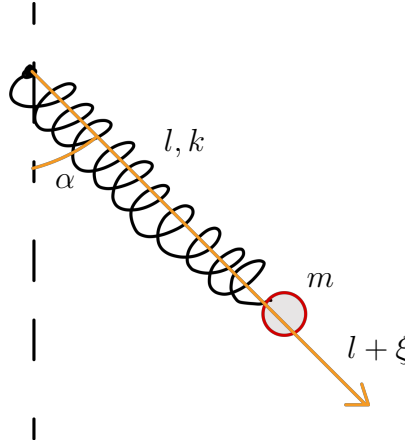
Jest to nierozwiązywalne analitycznie, możemy jednak rozważać małe drgania używając inżynierskiego przybliżenia: $\sin \alpha_i = \alpha_i$, $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$,

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\alpha}_1 + m_2l_2\ddot{\alpha}_2 + (m_1 + m_2)g\alpha_1 = 0$$

$$m_2l_2\ddot{\alpha}_2 + m_2l_1\ddot{\alpha}_1 + mg\alpha_2 = 0$$

Jest prawie normalnie, poza liniowymi członami sprzężenia z drugim wahadłem.

Zadanie 2 Wahadło sprężynowe, czyli masa zawieszona na sprężynie o długości swobodnej l i współczynniku sprężystości k . Zakładamy, że sprężyna się nie zgina, ruch jest tylko w jednej płaszczyźnie (pionowej). Mamy pole grawitacyjne.



Rysunek 1.2: Wahadło sprężynowe

Mamy wyjściowo 3 stopnie swobody, ruch w płaszczyźnie to jedno więzy, sama sprężyna nie jest natomiast więzami, pozostaje więc $f = 2$, tyle też trzeba użyć współrzędnych. Weźmiemy sobie kąt wychylenia od pionu α i wychylenie z długości swobodnej ξ (zatem sprężyna ma długość $l + \xi$).

$$\begin{cases} x = (l + \xi) \sin \alpha \\ y = -(l + \xi) \cos \alpha \end{cases}$$

Układ jest potencjalny, stosujemy więc standardowy Lagrangian,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \frac{k\xi^2}{2} \\ &= \frac{m}{2}[\dot{\xi}^2 + (l + \xi)^2\dot{\alpha}^2] + mg(l + \xi) \cos \alpha - \frac{k\xi^2}{2} \end{aligned}$$

Równanie ruchu dla zmiennej ξ to:

$$m\ddot{\xi} - m(l + \xi)\dot{\alpha}^2 - mg \cos \alpha + k\xi = 0$$

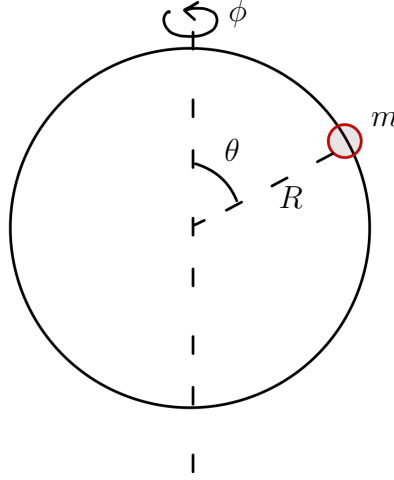
Równanie na α to

$$m(l + \xi)^2 \ddot{\alpha} + 2m(l + \xi) \dot{\alpha} \dot{\xi} + mg(l + \xi) \sin \alpha = 0$$

Można skrócić,

$$(l + \xi) \ddot{\alpha} + 2\dot{\alpha} \dot{\xi} + g \sin \alpha = 0$$

Zadanie 3 Mamy obręcz w polu grawitacyjnym, która może się obracać względem pionowej osi będącej jej średnicą. Na obręczy jest koralik o masie m .



Rysunek 1.3: Obręcz z koralikiem

Zauważmy, że to jest to samo zadanie co rozważanie punktu na sferze. Kąt obrotu jest bowiem niezależnym stopniem swobody. Koralik jest związany z obręczą (więzy obrazujące stałą odległość od środka), zatem mamy $f = 2$. Użyjemy więc dwóch współrzędnych: θ opisuje położenie koralika na obręczy, a ϕ to kąt obrotu obręczy.

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

Widać teraz nawet bardziej, że wszystkie możliwe położenia koralika to po prostu sfera.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{mv^2}{2} - mgz \\ &= \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgR \cos \theta \end{aligned}$$

Stąd, równanie dla θ to

$$mR^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgR \sin \theta - mR^2 \ddot{\theta} = 0$$

oraz równanie na ϕ ,

$$\frac{d}{dt} (mR^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0$$

ϕ jest zmienną cykliczną, bo nie pojawia się w Lagrangianie. Zawsze gdy mamy zmienną cykliczną q , wówczas $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ jest stałą ruchu, którą nazywa się pędem uogólnionym p_q (i jest on zachowany). Stąd $mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta$ jest taką stałą.

$$mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta = R\sin\theta \cdot mR\dot{\phi}\sin\theta = L$$

zatem widzimy, że jest to moment pędu.

Teraz założymy, że obręcz ma ruch wymuszony, nie ma pełnej swobody. Niech będzie to ruch wokół osi ze stałą prędkością kątową, $\phi(t) = \omega t$, $\omega = \dot{\phi}$. Są to dodatkowe więzy, mamy już do opisu tylko jedną zmienną. Wówczas,

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) - mgR \cos\theta$$

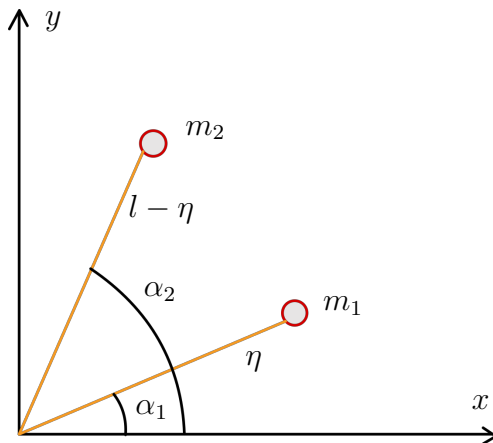
oraz równania ruchu,

$$R\ddot{\theta} = \underbrace{R\omega^2 \cos\theta}_{\text{p. dośrodkowe}} \sin\theta - g \sin\theta$$

$$L = mR^2\omega \sin^2\theta$$

Widzimy oczywiście człony, których się spodziewaliśmy.

Zadanie 4 Mamy 2 punkty zaczepione na dwóch końcach idealnej nici, sama nić jest zaczepiona w punkcie (nić się może ruszać wzdłuż swojej długości, w punkcie się tylko zgina) na jakiejś płaszczyźnie (jesteśmy na płaszczyźnie poziomej).



Rysunek 1.4: 2 punkty na nici

A priori byłyby 6 stopni swobody, ruch jest płaski więc zostają 4, suma odległości między punktami (mierzona po nici) jest stała: $d(m_1, 0) + d(0, m_2) = l$. Zostaje więc $f = 3$. Wyznaczamy więc dwie współrzędne katowe α , α_2 oraz jedną η mierzącą długość do masy m_1 . Więzy są naturalnie spełnione przez fakt, że $\eta + (l - \eta) = l$.

$$\begin{cases} x_1 = \eta \cos \alpha_1 \\ y_1 = \eta \sin \alpha_1 \\ x_2 = (l - \eta) \cos \alpha_2 \\ y_2 = (l - \eta) \sin \alpha_2 \end{cases}$$

Natomiast Lagrangian to

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Liczymy,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{\eta} \cos \alpha_1 + \eta \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \\ \dot{y}_1 &= \dot{\eta} \sin \alpha_1 + \eta \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \\ \dot{x}_2 &= -\dot{\eta} \cos \alpha_1 - (l - \eta) \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \\ \dot{y}_2 &= -\dot{\eta} \sin \alpha_1 + (l - \eta) \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2\end{aligned}$$

Stąd,

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}(\dot{\eta}^2 + \eta^2 \dot{\alpha}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{\eta}^2 + (l - \eta)^2 \dot{\alpha}_2^2)$$

Równanie na η jakieś oczywiście wychodzi.

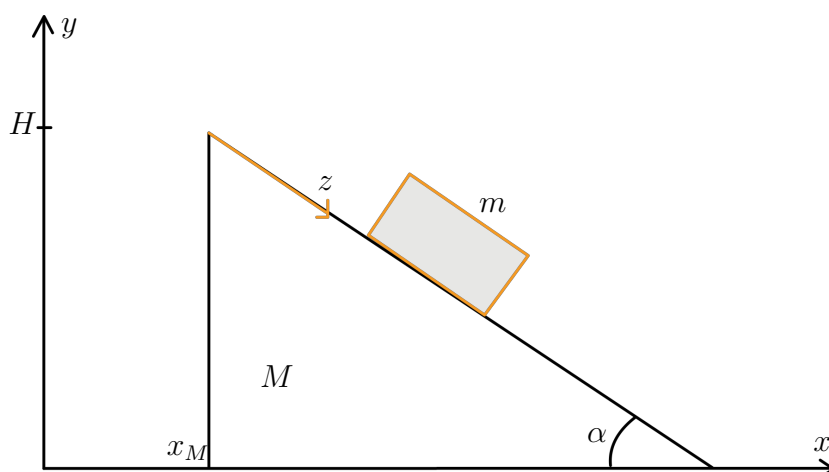
$$\ddot{\eta}(m_1 + m_2) - m_1 \eta \dot{\alpha}_1^2 + m_2 (l - \eta) \dot{\alpha}_2^2 = 0$$

Mamy dwie współrzędne cykliczne, będą więc dwie wartości zachowane,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_1 \dot{\alpha}_1 \eta) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m_2 \dot{\alpha}_2 (l - \eta)) &= 0\end{aligned}$$

Obrazuje to zachowanie momentu pędu dla obu cząstek.

Zadanie 5 Niech równia pochyła o wysokości H i kącie α ma masę M , na niej umieszczamy klocek m . Zbadać dynamikę układu.



Rysunek 1.5: Równia pochyła z klockiem.

Równia się porusza tylko w jednej osi, natomiast klocek jest cały czas na równi (choć teoretycznie mógłby się oderwać), stąd klocek ma 2 stopnie swobody, ale jeden z nich

to po prostu położenie równi. Potrzebujemy więc 2 współrzędnych (x_M, z) gdzie x_M to położenie ściany równi, natomiast z mierzy położenie klocka na równi.

$$\begin{cases} x_M = x_M \\ y_M = 0 \\ x_m = x_M + z \cos \alpha \\ y_m = H - z \sin \alpha \end{cases}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= \dot{x}_M + \dot{z} \cos \alpha \\ \dot{y}_m &= -\dot{z} \sin \alpha \end{aligned}$$

Teraz Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{M\dot{x}_M^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}_M^2 + 2\dot{x}_M\dot{z}\cos\alpha + \dot{z}^2) - mg(H - z\sin\alpha)$$

Stałą z Lagrangianu wyrzucamy, bo nie ma wpływu na dynamikę,

$$\equiv \frac{M\dot{x}_M^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}_M^2 + 2\dot{x}_M\dot{z}\cos\alpha + \dot{z}^2) + mgz\sin\alpha$$

Równania Eulera-Lagrange'a to

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_M + m\dot{x}_M^2 + m\ddot{z}\cos\alpha &= 0 \\ m\ddot{z} + m\ddot{x}_M\cos\alpha - mg\sin\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Co ciekawe, to że x_M jest zmienną cykliczną, czyli

$$p_{x_M} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_M} = (M + m)\dot{x}_M + m\dot{z}\cos\alpha$$

Stąd widzimy, że pęd układu jest zachowany.

Ćwiczenia 4

28 paź 2021 **Zadanie 1** Punkty materialne o masach m_1, m_2 oddziałują ze sobą siłą centralną. Zapisz funkcję Lagrange'a i równania ruchu we współrzędnych środka masy.

Siła centralna to taka, której potencjał zależy tylko od odległości między ciałami, tj. $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Wektor wodzący układu środka masy to

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

Mamy wyjściowo 6 stopni swobody, w tych współrzędnych jest również 6 stopni swobody, po 3 w \mathbf{R} i \mathbf{r} . Chcielibyśmy zapisać Lagrangian w tych nowych współrzędnych.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2) - V(|\mathbf{r}|)$$

Zauważmy, że $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + m_2 \mathbf{r} / (m_1 + m_2)$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \end{aligned}$$

W tym Lagrangianie \mathbf{R} jest zmienną cykliczną, co wyraża zachowanie pędu.

$$p_R = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = M \dot{\mathbf{R}} = \text{const.}$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \mu \dot{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} &= -\text{grad } V(r) \end{aligned}$$

Stąd równanie ruchu, modulo zasada zachowania pędu to

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V(r)$$

Dodajmy więzy. Przyjmijmy, że cząstki są połączone nieważkim prętem o długości l , tj. $r = l$. \mathbf{R} nie ruszamy, jednak \mathbf{r} możemy przedstawić we współrzędnych sferycznych, gdzie więzy będą naturalnie spełnione.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= l \sin \theta \cos \phi \partial_x + l \sin \theta \sin \phi \partial_y + l \cos \theta \partial_z \\ \dot{\mathbf{r}} &= r \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + l \dot{\theta} \hat{e}_\theta \end{aligned}$$

Wówczas,

$$\mathcal{L} = \frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mu l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - V(l)$$

ale $V(l) = \text{const.}$ więc możemy wyrzucić tę stałą.

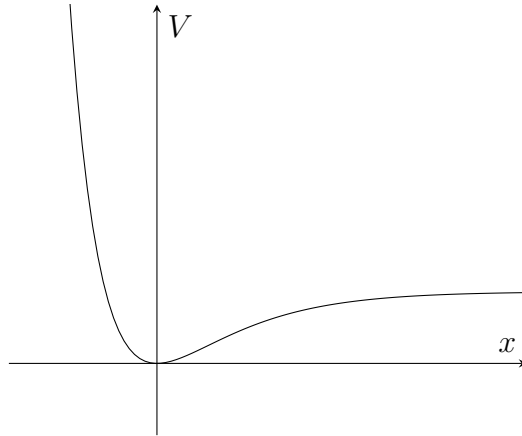
$$\equiv \frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mu l^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

Zadanie 2 Znaleźć ruch cząstki m w jednowymiarowym potencjale Morse'a $V(x) = A(1 - e^{-ax})^2$ gdzie $A, a > 0$.

$$\mathcal{L} = \frac{m \dot{x}^2}{2} - V(x)$$

Użyjemy całki energii,

$$E = \frac{m \dot{x}^2}{2} + V(x)$$



Rysunek 1.6: Potencjał Morse'a.

Założmy, że szukamy rozwiązań związanych, tj. $E > V$. Stąd dostajemy

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}}$$

To jest całka oznaczona, ale zasadniczo nie do końca wiadomo po jakim obszarze, pewnie od $x(0) = 0$ do x .

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{E - A(1 - e^{-ax})^2}} = \left| \begin{array}{l} y = e^{ax} \\ dy = ae^{ax} dx \end{array} \right| \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dy}{ay \sqrt{E - A\left(1 - \frac{1}{y}\right)^2}} = \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{Ey^2 - A(y-1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{(E-A)y^2 + 2Ay + A}} = (*) \end{aligned}$$

Dla $E = 0$ nie ma ruchu. Dla $E \in (0, A)$ spodziewamy się oscylacji,

$$(*) = \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{AE}{A-E} - (A-E)\left(y - \frac{A}{A-E}\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} y = \frac{A}{A-E} + \frac{\sqrt{AE}}{A-E} \sin u \\ dy = \frac{\sqrt{AE}}{A-E} \cos u du \end{array} \right|$$

Modulo nietrywialne rozważania o modułach (zakładamy, że wszystko jest tak, żeby było dobrze), po przywołaniu rodziny funkcji kuluralnych,

$$= \sqrt{\frac{m}{2a^2}} \frac{1}{\sqrt{A-E}} \int du = \frac{\sqrt{m}u}{a\sqrt{2(A-E)}}$$

Stąd,

$$u(t) = at\sqrt{\frac{2(A-E)}{m}}$$

$$x(t) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{A}{A-E} + \frac{\sqrt{AE}}{A-E} \sin \frac{at\sqrt{2(A-E)}}{\sqrt{m}} \right)$$

To jest ruch quasi periodyczny, więc pasuje. Nic się o dziwo nie wykrzacza, bo mieliśmy farta nie myśląc zanadto nad użytymi podstawieniami i przekształceniami.

Dla przypadku granicznego $E = A$ dostaniemy

$$t = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{A(2y-1)}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2A}} \sqrt{2y-1}$$

Oczywiście olewamy granice całkowań, po co to komu.

$$x(t) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{1}{2} + \frac{a^2 A t^2}{m} \right)$$

To jest układ asymptotyczny, czego się należało spodziewać. I nawet nie zapłaczymy, że $x(0) \neq 0$, co wyjściowo przyjęliśmy! xD

Ostatnim przypadkiem jest $E > A$. Przekształcając tak, żeby było dobrze,

$$t = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{(E-A)\left(y + \frac{A}{E-A}\right)^2 - \frac{AE}{E-A}}} = \left| \begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{AE}}{E-A} \cosh u - \frac{A}{A-E} \\ dy = \frac{\sqrt{AE}}{E-A} \sinh u \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{m}{2(E-A)}} \int du = \frac{u}{a} \sqrt{\frac{m}{2(E-A)}}$$

Stąd,

$$x(t) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{-A}{E-A} + \frac{\sqrt{AE}}{E-A} \cosh \frac{2at\sqrt{E-A}}{\sqrt{m}} \right)$$

\cosh i \log osiągają nieograniczone wartości, zatem tutaj odlatujemy dowolnie daleko.

Zadanie 3 Rozważmy szczególny przypadek wahadła matematycznego (l, m) , w którym energia jest akurat taka, że zatrzymuje się pionowo „na górze” (robi obrót o π). Przyjmujemy, że ta energia to $E = mgl$ (bo tak jest przy dobrym przyjęciu poziomu zero).

Jako parametr bierzemy kąt α od bieguna (jak θ w układzie sferycznym).

$$V(\alpha) = mgl \cos \alpha$$

$$T = \frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2}$$

Użyjemy tej samej metody co poprzednio, czyli całki energii.

$$\begin{aligned} E &= \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} + V \\ \dot{\alpha}^2 &= \frac{2}{ml^2}(E - V) \\ \frac{dt}{d\alpha} &= l\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - V}} \end{aligned}$$

Znów rozwiązujemy to równanie przez rozdzielenie zmiennych,

$$t = l\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{E - mgl \cos \alpha}}$$

UZUPEŁNIĆ OD MATEUSZA

$$\alpha(t) = 4 \tan^{-1} e^{\sqrt{g/l}t}$$

modulo stałe do warunków początkowych.

Zadanie 4 Wahadło matematyczne przybliżone lepiej niż zwykle (w przybliżeniu anharmonicznym), z rozwiązaniem przez rachunek zaburzeń. Za warunki początkowe przyjmujemy $\alpha(0) = 0$, $v(0) = v_0$.

Tutaj używamy standardowego kąta α dla wahadła. Równanie ruchu to

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0$$

gdzie wprowadzamy stałe oznaczenie na $\omega = \sqrt{g/l}$. Tym razem,

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \mathcal{O}(\alpha^5)$$

Stąd,

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) = 0$$

Przyjmijmy sobie postać rozwiązania $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ gdzie α_0 jest małe i $\alpha_1 \ll \alpha_0$. Krok pierwszy to ściśle znalezienie α_0 , które odpowiada:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\alpha}_0 + \omega^2 \alpha_0 \\ \alpha_0(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{aligned}$$

W drugim kroku włączamy zaburzenie, ale zachowując tylko człony liniowe w α_1 , pamiętając, że również $\alpha_0 \alpha_1 = \mathcal{O}(\alpha_1^2)$, zatem $(\alpha_0 + \alpha_1)^3 = \alpha_0^3 + \mathcal{O}(\alpha_1^2)$.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_1 &= \frac{\omega^2 \alpha_0^3}{6} \\ \ddot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_1 &= \frac{\omega^2}{6} \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^3 \sin^3 \omega t \end{aligned}$$

Po znalezieniu odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej,

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega^2 \alpha_1 = \frac{\omega^2}{24} \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^3 (3 \sin \omega t - \sin 2\omega t)$$

Mamy równanie liniowe niejednorodne. Zgadnięte rozwiązanie szczególne to

$$\alpha_{sz}(t) = \frac{1}{24} \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^3 \left(\frac{\sin 3\omega t}{8} - \frac{3\omega t \cos \omega t}{2} \right)$$

Stąd,

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{24} \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^3 \left(\frac{\sin 3\omega t}{8} - \frac{3\omega t \cos \omega t}{2} + A \sin \omega t \right)$$

Trzeba by jeszcze dodać α_0 , ale jak widać to zmienia tylko stałą A . Powyższe rozwiązania jest więc takie samo jak $\alpha_0 + \alpha_1$.

Ćwiczenia 5

Zadanie 1 Rozważmy wahadło zawieszone na ruchomym kloku (który może się ruszać tylko poziomo). 04 lis 2021

Klocek ma 1 stopień swobody, wahadło tradycyjnie 1. Stąd mamy 2 stopnie swobody. Współrzędna x opisuje położenie poziome klocka, α tradycyjny kąt wychylenia wahadła. Niech klocek ma masę M , a wahadło m .

$$\begin{cases} x_m = x + l \sin \alpha \\ y_m = -l \cos \alpha \end{cases}$$

Wstawiamy to do Lagrangianu,

$$\mathcal{L} = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha + l^2\dot{\alpha}^2) + mgl \cos \alpha$$

Jak wyglądają równania ogólne? Zmienną cykliczną jest x . Dostaniemy równania:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\alpha} \cos \alpha - ml\dot{\alpha}^2 \sin \alpha &= 0 \\ l\ddot{\alpha} + \ddot{x} \cos \alpha + g \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Chcemy przybliżyć rozwiązanie, bo nie da się jawnie tego rozwiązać. Najpierw trzeba znaleźć położenia równowagi. Będzie to $\alpha = 0$, x natomiast nie wpływa na położenie równowagi, bo nie wpływa na energię a położenie równowagi odpowiada minimum potencjału (efektywnego). Czasami człon kinetyczny daje wkład efektywny do tego potencjału. Położenie równowagi spełnia równania $\partial \mathcal{L} / \partial q^i = 0$.

Chcemy więc rozwinąć równania ruchu wokół położenia równowagi. Można też od razu przybliżyć Lagrangian. W przybliżeniu małych drgań (rozwiniecie wokół położenia równowagi $\alpha = 0$), Lagrangian przybliżamy do członów kwadratowych, czyli używamy rozwinięć $\sin \alpha = \alpha + \mathcal{O}(\alpha^3)$ oraz $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + ml\dot{x}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}mgl\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

gdzie jeden wyraz z $\cos \alpha$ przybliżyliśmy tylko do 1 (i tak mały człon bo $\dot{\alpha} = \mathcal{O}(\alpha)$), a stałe elementy w Lagrangianie ominęliśmy. Równania E-L wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} g\alpha + l\ddot{\alpha} + \ddot{x} &= 0 \\ (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

Przybliżając pełne równania ruchu szukamy natomiast pierwszego rzędu przybliżenia, nie drugiego (zawsze celem jest odtworzenie równania oscylatora).

$$\ddot{x} = -\frac{ml\ddot{\alpha}}{M + m}$$

Stąd, po dwukrotnym odcałkowaniu,

$$x = -\frac{ml}{M + m}\alpha + At + B$$

Wstawiając pierwsze równanie do wyżej wyprowadzonego równania ruchu,

$$\begin{aligned} 0 &= g\alpha + l\ddot{\alpha} - \frac{ml\ddot{\alpha}}{M + m} \\ 0 &= \ddot{\alpha} + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}\alpha \end{aligned}$$

Mamy więc drganie harmoniczne z częstością

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{g}{l}} \\ \alpha(t) &= C \cos(\omega t + \phi_0) \\ x(t) &= -\frac{mlC}{M + m} \cos(\omega t + \phi_0) + At + B \end{aligned}$$

Rozwiązanie ma 4 stałe (A, B, C, ϕ_0). B jest oczywiście położeniem początkowym x_0 . Ruch powinien mieć 2 mody normalne. Pierwszy jest wtedy gdy $A = 0$ (punkt zaczepienia (tylko) drga przeciwie do wahadła), drugi mod jest gdy $C = 0$, czyli kiedy wahadło nie drga, a punkt zaczepienia się porusza liniowo. Dowolny ruch układu można przedstawić jako złożenie tych dwóch modów. Co ciekawe, gdy $M \gg m$, odtwarzamy ruch wahadła matematycznego.

Zadanie 2 Małe drgania w wahadle podwójnym. Znaleźć częstości tych drgań.

Wracamy do zadania z jednych z pierwszych ćwiczeń.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[m_1 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \\ &\quad + m_1 g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_1 \cos \alpha_1 + m_2 g l_2 \cos \alpha_2 \end{aligned}$$

Znowu chcemy Lagrangian 2 rzędu w (α_1, α_2) , omijając stałe wyrazy i pamiętając, że również $\mathcal{O}(\dot{\alpha}_i) = \mathcal{O}(\alpha_i)$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)g l_1 \alpha_1^2 - \frac{1}{2}m_2 g l_2 \alpha_2^2$$

Stąd,

$$\begin{aligned} m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \alpha_1 + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\alpha}_1 &= 0 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\alpha}_1 + m_2 g l_2 \alpha_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\alpha}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sprawdźmy sobie czy oscylacyjne rozwiązanie działa. Podstawimy $\alpha_1(t) = Ae^{i\omega t}$, $\alpha_2(t) = Be^{i\omega t}$.

$$\begin{aligned} -m_2 l_1 l_2 B \omega^2 \alpha_1 + (m_1 + m_2) g l_1 A_1 - (m_1 + m_2) l_1^2 \omega^2 A &= 0 \\ -m_2 l_1 l_2 A \omega^2 + m_2 g l_2 B - m_2 l_2^2 B \omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

Teraz trzeba uporządkować algebraiczny śmietnik w celu wyznaczenia ω .

$$\begin{aligned} A(m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) &= \omega^2 m_2 l_2 B \\ B(g - l_2 \omega^2) &= \omega^2 l_1 A \end{aligned}$$

Pomnóżmy równania stronami, bo wtedy skasują się A i B ,

$$(m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2)(g - l_2 \omega^2) = \omega^4 m_2 l_1 l_2$$

W rezultacie dostajemy równanie kwadratowe na $\xi = \omega^2$.

$$m_1 l_1 l_2 \xi^2 - g(l_1 + l_2)(m_1 + m_2)\xi + g^2(m_1 + m_2) = 0$$

Finalnie,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g(l_1 + l_2)(m_1 + m_2) \pm g \sqrt{(m_1 + m_2)[(l_1 + l_2)^2(m_1 + m_2) - 4m_1 l_1 l_2]}}{2m_1 l_1 l_2}$$

Gdy podstawimy $m_1 = m_2$, to znacznie się uprości. Gdy jeszcze dorzucimy $l_1 = l_2$ to w ogóle!

$$\omega = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

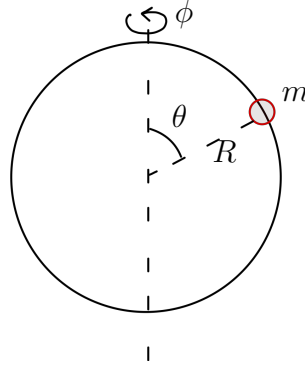
Tak czy inaczej, mamy 4 możliwe częstości (w uproszczonym przypadku efektywnie chyba dwie, bo ujemna częstość nic nie powinna fizycznie zmieniać).

Zadanie 3 Powrót do zadania z obręczą obracającą się wokół swojej osi, a na niej koralik o masie m .

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta$$

Stąd równanie ruchu to

$$0 = \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta$$



Rysunek 1.7: Obręcz z koralikiem, tyle że tym razem θ ma być od dołu.

Tutaj sprawa jest mniej oczywista, bo położenie równowagi raczej nie musi być w $\theta = 0$ (na samym dole obręczy). Tutaj akurat człon kinetyczny daje efektywny wkład do potencjału, dlatego położenie równowagi nie jest rozwiązaniem $\partial V / \partial q^i = 0$. Dobłą definicją położenia równowagi jest natomiast $\partial \mathcal{L} / \partial q^i = 0$.

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0$$

$$\sin \theta_0 = 0 \quad \text{lub} \quad \cos \theta_0 = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Stąd wynika, że $\theta_0 = 0$ (na dole), $\theta_0 = \pi$ (na górze) lub $\cos \theta_0 = g/(\omega^2 R)$ (położenie równowagi „dynamiczne”). Kiedy ma to sens?

Przypadek 1 Przyjmujemy ruch $g > \omega^2 R$ (to znaczy, że ω jest odpowiednio mała). W tej sytuacji trzecie położenie równowagi odpada bo $\cos \theta_0 > 1$. Zostają dwa położenia równowagi, z których $\theta_0 = 0$ jest stabilne, $\theta_0 = \pi$ jest chwiejne. Ale załóżmy, że tego nie wiemy. Sprawdźmy! Wyjdźmy najpierw z położenia równowagi $\theta_0 = \pi$. Rozwijamy funkcję θ wokół tego punktu, otrzymując $\theta = \pi + \varepsilon$, gdzie ε jest mały. Wówczas $\sin \theta = -\sin \varepsilon$ (z tożsamości na sinus sumy). Analogicznie $\cos(\pi + \varepsilon) = -\cos \varepsilon$. Wówczas po wstawieniu do głównego równania,

$$\ddot{\varepsilon} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2 \cos \varepsilon \right) \sin \varepsilon = 0$$

Teraz przybliżamy, jako że ε jest małe.

$$\ddot{\varepsilon} - \left(\frac{g}{R} + \omega^2 \right) \varepsilon = 0$$

Jest to prawie równanie oscylatora, ale nie do końca (stała ma zły znak). Nie ma drgań, jest wahnięcie oddalające coraz dalej od położenia równowagi. Widać więc, że $\theta = \pi$ jest położeniem równowagi chwiejnej (można oczywiście to wszystko badać licząc drugie pochodne). W takim razie zostaje $\theta = 0$. Rozwijamy wokół tego punktu.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) \theta = 0$$

To już jest równanie oscylatora z częstością $\Omega = \sqrt{g/R - \omega^2}$.

Przypadek 2 Przyjmujemy ruch $g < \omega^2 R$. Wówczas mamy 3 możliwe położenia równowagi. Trzeba znaleźć te stabilne i zlinearyzować wokół nich. Dla $\theta_0 = \pi$ historia się powtarza. Dla $\theta_0 = 0$ dostaniemy to samo, ale będzie zły znak przy współczynniku w równaniu oscylatora, zatem dostaniemy równowagę chwiejną. Zostaje więc tylko trzecie położenie równowagi $\cos \theta_0 = g/(\omega^2 R)$. Przyjmujemy, że $\theta = \theta_0 + \varepsilon$. Wstawmy to do wyjściowego równania.

$$\begin{aligned}\sin(\theta_0 + \varepsilon) &\stackrel{\varepsilon \ll 1}{\approx} \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \cos(\theta_0 + \varepsilon) &\stackrel{\varepsilon \ll 1}{\approx} \cos \theta_0 - \varepsilon \sin \theta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

Jest to de facto tożsame rozwinięciu Taylora wokół $\varepsilon = 0$.

$$\begin{aligned}\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 (\cos \theta_0 - \varepsilon \sin \theta_0) \right) (\sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{R} (\sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0) - \omega^2 (\sin \theta_0 \cos \theta_0 + \varepsilon (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)) &= 0 \\ \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{R} \left(\sin \theta_0 + \frac{\varepsilon g}{\omega^2 R} \right) - \omega^2 \left(\frac{g}{\omega^2 R} \sin \theta_0 + \varepsilon \left(\frac{2g^2}{\omega^4 R^2} - 1 \right) \right) &= 0 \\ \ddot{\varepsilon} + \left(\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 R^2} \right) \varepsilon &= 0\end{aligned}$$

Stała w równaniu jest dodatnia, wyszły więc drgania.

Przypadek 3 Ostatni przypadek $g = \omega^2 R$ jest patologiczny, bo w naszym przybliżeniu nie będzie drgań małych. Będą dopiero drgania anharmoniczne w wyższym rzędzie przybliżeń, nie będziemy tego jednak robić.

Oddziaływanie elektromagnetyczne nie jest zachowawcze, nie można więc dla niego napisać Lagrangianu jako $\mathcal{L} = T - V$. Można natomiast tworzyć coś, co po prostu działa i odtwarza tę siłę.

Zaproponujmy Lagrangian dla jednej cząstki o ładunku q , masie m w polu (\mathbf{E}, \mathbf{B}) .

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \underbrace{q(\phi - (\dot{\mathbf{r}} | \mathbf{A}))}_U$$

gdzie \mathbf{A} jest dowolną funkcją spełniającą $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ (potencjał wektorowy), natomiast ϕ jest potencjałem skalarnym. Wówczas pola są zdefiniowane jako

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}\end{aligned}$$

Takich funkcji (ϕ, \mathbf{A}) jest nieskończenie wiele, mamy zbędą swobodę, w ogólności potrzebne jest pewne cechowanie (gauge fixing). U jest potencjałem uogólnionym,

zauważmy że w ogóle zależy od prędkości. Można sprawdzić, że \mathcal{L} odtwarza siłę Lorentza.

Ćwiczenia 6

10 lis 2021 **Zadanie 1** Weźmy kulę o promieniu R , na niej cząstkę o masie m i ładunku q . Dodajemy pole magnetyczne $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ gdzie $B > 0$ i grawitację $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$.

Jaki będzie Lagrangian?

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q(\dot{\mathbf{r}} | \mathbf{A}) - mgR \cos \theta$$

gdzie θ jest kątem od góry jak dla tradycyjnego układu sferycznego. Musimy jeszcze znaleźć potencjał wektorowy odtwarzający stałe \mathbf{B} . Łatwo odgadnąć i się przekonać, że pasuje

$$\mathbf{A} = -\frac{By}{2}\mathbf{e}_x + \frac{Bx}{2}\mathbf{e}_y$$

Musimy wstawić do Lagrangianu współrzędne sferyczne, wszystko policzyć i coś wyjdzie.

$$\dot{\mathbf{r}} = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + R\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi$$

Podobnie, po zabawie w wyrażanie wersorów kartezjańskich przez sferyczne,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{1}{2}BR\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ (\dot{\mathbf{r}} | \mathbf{A}) &= \frac{1}{2}BR^2\dot{\phi}\sin^2\theta\end{aligned}$$

Stąd,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{q}{2}BR^2\dot{\phi}\sin^2\theta - mgR\cos\theta$$

Równania E-L,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= mR^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + qBR^2\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0\end{aligned}$$

ϕ jest oczywiście współrzędną cykliczną,

$$0 = \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta + \frac{q}{2}BR^2\sin^2\theta\right)$$

Wszystko fajnie, ale podobno łatwiej się to rozwiązuje jednak we współrzędnych kartezjańskich. Powtórzmy więc zabawę. Mamy więzy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i te współrzędne ich jawnie nie rozwiązują. Wyznamy więc jedną ze współrzędnych przez dwie pozostałe.

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Ponieważ rozważamy ruch tylko w dolnej części kuli, przyjmijmy znak minus,

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\dot{z} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Teraz można zapisać prędkość.

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

W tym momencie już można narzucić przybliżenie małych drgań. Nie zakładają one oczywiście, że z jest małe, natomiast x, y już są bliskie zeru – położenie równowagi to $(0, 0, -R)$.

$$= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Co z magnetycznym potencjałem uogólnionym?

$$U_m = -q(\mathbf{v} \mid \mathbf{A}) = \frac{qB}{2}(\dot{x}y - x\dot{y})$$

$$U_g = -mg\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = -mgR\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}}$$

$$= -mgR\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2}\right) + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\cong \frac{mg}{2R}(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(x^3)$$

gdzie wyrzuciliśmy stały człon. Zapisujemy Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{mg}{2R}(x^2 + y^2) - \frac{qB}{2}(\dot{x}y - x\dot{y}) + \mathcal{O}(x^3)$$

Wynikające stąd równania ruchu to:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{mg}{R}x + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{mg}{R}y - qB\dot{x} \end{cases}$$

Są to równania sprzężone, które rozwiązujemy wprowadzając zmienną $\mathbb{C} \ni \eta = x + iy$. Wówczas,

$$m\ddot{\eta} = -\frac{mg}{R}\eta - iqB\dot{\eta}$$

$$0 = \ddot{\eta} + i\frac{qB}{m}\dot{\eta} + \frac{g}{R}\eta$$

Jest to piękne równanie liniowe o ogólnym rozwiązaniu $\eta \sim e^{i\omega t}$.

$$0 = -\omega^2 - \frac{qB}{m}\omega + \frac{g}{R}$$

$$\omega = \frac{-qB \pm \sqrt{q^2 B^2 + \frac{4m^2 g}{R}}}{2m}$$

Śliczny wynik.

Zadanie 2 Wahadło Foucault. Zakładamy kulistą Ziemię (to nie jest oczywiste, model płaskiej Ziemi jest matematycznie spójny) o promieniu R z osią obrotu i prędkością kątową ω . Na pewnej wysokości nad ziemią znajduje się wahadło matematyczne (m, l) , na szerokości geograficznej θ .

Wprowadzimy układ współrzędnych, w którym oś z wahadła pokrywa się promieniem Ziemi (parametryzowanym przez szerokość geograficzną θ), x idzie w kierunku bieguna północnego, a y jest skierowane przed rysunek. Wahadło jest oczywiście w układzie nieinercyjnym, występuje więc pozorna siła odśrodkowa $\mathbf{F}_o = m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}$ i Coriolisa $\mathbf{F}_c = 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$. Na szczęście jest to naturalnie całkowicie niepotrzebne. Musimy tylko znać relację między prędkościami (czyli tym, co definiuje kinematykę w tym formalizmie). Jeśli \mathbf{r} łączy środek Ziemi z masą, \mathbf{v} oznacza prędkość w lokalnym układzie nieinercyjnym, to prędkość masy w układzie inercyjnym wyniesie $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2} [v^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2] \\ &= \frac{m}{2} [v^2 + 2\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2] \end{aligned}$$

gdzie $r \approx R$ ponieważ $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| = l \ll R$. Pole efektywne (omijając wkład od siły odśrodkowej) to $\mathbf{g}_{\text{eff}} = -g\mathbf{e}_z - \omega^2 \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \approx -g\mathbf{e}_z$. Podobnie jak poprzednio, mamy więzy $z^2 = l^2 - x^2 - y^2$.

$$\begin{aligned} V &\approx mgr = \frac{mg}{2l}(x^2 + y^2) \\ \mathbf{v} &\approx \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Dalej,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &\approx \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \omega \cos \theta & 0 & \omega \sin \theta \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \\ &= (xy - \dot{x}y)\omega \sin \theta \end{aligned}$$

Stąd,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(xy - \dot{x}y)\omega \sin \theta) - \frac{mg}{2R}(x^2 + y^2)$$

Jest to postać analogiczna do Lagrangianu z poprzedniego zadania. Trzeba jedynie zastąpić $qB \rightsquigarrow 2m\omega \sin \theta$. Dostaniemy te same wyniki. Wniosek jest taki, że płaszczyzna drgań się obraca, i wynika to z faktu, że Ziemia się obraca tj. $\omega \neq 0$.

Zadanie 3 Znaleźć ruch cząstki w polu fali biegnącej $V(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m\dot{x}^2}{2} - A \cos(\omega t - kx) \\ m\ddot{x} &= -kA \sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Jeśli wprowadzimy zmienną $\xi = x - \omega t/k$, to

$$m\ddot{\xi} = -kA \sin k\xi$$

Występują dwa położenia równowagi, $k\xi = 0$ (stabilne) lub π (chwiejne), można więc rozważyć małe drgania wokół stabilnego położenia równowagi. Wówczas,

$$m\ddot{\xi} = -kA\xi + \mathcal{O}(\xi^2)$$

To jest już równanie oscylatora.

Zadanie 4 Rozważmy wahadło, w którym punkt zaczepienia oscyluje z ustaloną częstotliwością Ω .

Ruch punktu zaczepienia można opisać jako

$$x(t) = A \cos(\Omega t)$$

Wówczas położenie masy na wahadle opiszemy przez

$$\begin{aligned} x_m &= x + l \sin \alpha \\ y_m &= -l \cos \alpha \end{aligned}$$

Potencjał to oczywiście $V = -mgl \cos \alpha$. Lagrangian,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2 + 2l\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha) + mgl \cos \alpha$$

Oczywiście x jest zmienną cykliczną, mamy więc jedno równanie ruchu

$$\begin{aligned} l\ddot{\alpha} + \ddot{x} \cos \alpha + g \sin \alpha &= 0 \\ l\ddot{\alpha} - A\Omega^2 \cos(\Omega t) \cos \alpha + g \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

W przybliżeniu liniowych drgań,

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = aR^2 \cos(\Omega t)$$

jest to oczywiście równanie oscylatora (niejednorodne), ale rozwiązanie znamy.

Ćwiczenia 7: Siły centralne

Zadanie 1 Pokazać, że układ 3 ciał o masach m_i znajduje się w równowadze jeżeli masy leżą w wierzchołkach pewnego trójkąta równobocznego i wszystkie obracają się z tą samą prędkością kątową ω prostopadłą do trójkąta. 18 lis 2021

Arbitralnie, mamy wyróżniony układ środka masy. W tym układzie wprowadzamy wektory wodzące \mathbf{r}_i . Dla każdego $i \in \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_i$. Układ środka masy ma własność $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$. Chcemy pokazać, że $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = a$. Zapiszmy Lagrangian układu,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_i \frac{m_i}{2} [v_i^2 + 2\mathbf{v}_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{r}_i)^2] \\ &\quad + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{Gm_1m_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \end{aligned}$$

Zauważmy, że warunek prostopadłości kasuje człony $(\boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{r}_i)$. Ponadto kasują się v_i^2 i $2\mathbf{v}_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_1} &= \nabla_{\mathbf{r}_1} \mathcal{L} \\ &= m_1 \omega^2 \mathbf{r}_1 - \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{Gm_1 m_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\end{aligned}$$

Równowaga zachodzi, gdy $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{r}_1 = 0$. Wstawmy $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i| = a$ (w najgorszym przypadku okaże się, że nie dało się nałożyć takiego warunku).

$$\nabla_{\mathbf{r}_1} \mathcal{L} \sim \omega^2 \mathbf{r}_1 - \frac{G}{a^3} [m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + m_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)]$$

Korzystając z definicji układu środka masy,

$$\begin{aligned}&= \omega^2 \mathbf{r}_1 - \frac{G}{a^3} (m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{r}_1 = 0 \\ \omega^2 &= \frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}\end{aligned}$$

Zatem dostaliśmy coś, dla takiego warunku układ jest stabilny. Gdybyśmy policzyli to samo dla $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, dostalibyśmy to samo.

Siły centralne Dla siły centralnej (która oczywiście jest potencjalna) $V = V(r) \iff \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r$. W ogólności, wówczas moment pędu $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ jest zachowany, zatem ruch odbywa się w płaszczyźnie. W takim razie Lagrangian ma postać

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

Dostaniemy równanie E-L dla zmiennej r :

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - V'(r)$$

Równanie dla zmiennej cyklicznej ϕ daje zachowanie momentu pędu

$$0 = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi})$$

Widać więc, że $J = mr^2 \dot{\phi} = \text{const}(t)$. Dzięki temu można jeszcze uprościć równania, podstawiając $\dot{\phi}$. Okaże się więc, że zagadnienie jest efektywnie jednowymiarowe.

$$m\ddot{r} = \frac{J^2}{mr^3} - V'(r)$$

Stąd, po odcałkowaniu

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

To równanie na energię, wraz z zachowaniem momentu pędu dają nam wszystko, co potrzeba do rozwiązywania takich zagadnień.

Używając tych równań można spróbować wyznaczyć $r(t), \phi(t)$, widząc że

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}$$

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{J^2}{2mr^2} \right)}}$$

To nam da zależność $t(r)$, którą można chcieć odwrócić. Wówczas,

$$\phi(t) = \int \frac{J^2}{2mr^2(t)} dt$$

Jest to ogólne rozwiązanie, wydaje się proste, natomiast oczywiście niemal nigdy nie jest to obliczalne.

Można też poszukiwać innego rozwiązania, mianowicie trajektorię $r(\phi)$. Odpowiedzią na to pytanie jest wzór Bineta.

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(r^{-1}) + r^{-1} = -\frac{mr^2}{J^2} F(r)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2}(r^{-1}) + r^{-1} = \frac{mr^2}{J^2} V'(r)$$

Po podstawieniu $w(\phi) = r(\phi)^{-1}$,

$$w'' + w = -\frac{m}{J^2 w^2} F\left(\frac{1}{w}\right)$$

Jednak po obliczeniu $F(r)$ z potencjału i zamieniając zmienną na w ,

$$w'' + w = \frac{m}{J^2} V'(w)$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne 2 rzędu.

Przykład Niech $V(w) = -\alpha w$ (tak wygląda np. potencjał grawitacyjny). Wzór Bineta daje:

$$w'' + w = \frac{m\alpha}{J^2} \stackrel{\text{def}}{=} \eta$$

Wprowadźmy nową zmienną $s = w - \eta$.

$$s'' + s = 0$$

$$s(\phi) = A \cos(\phi - \phi_0)$$

$$w(\phi) = \eta + A \cos(\phi - \phi_0)$$

Stąd,

$$r(\phi) = \frac{1}{\eta + A \cos(\phi - \phi_0)}$$

Teraz przydałaby się jakaś lepsza interpretacja stałych. Niech $p = \eta^{-1}$ oraz $\varepsilon = A/\eta$.

$$= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

ε można na przykład wyznaczyć z całki energii. Wychodzi wówczas

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2J^2 E}{m\alpha^2}}$$

$$p = \frac{J^2}{m\alpha}$$

Zauważmy, że daje to nam pełną klasyfikację trajektorii.

$$\varepsilon \in \begin{cases} \{0\} & E = -\frac{m\alpha^2}{2J^2} \quad (\text{okrąg}) \\ (0, 1) & -\frac{m\alpha^2}{2J^2} < E < 0 \quad (\text{elipsa}) \\ \{1\} & E = 0 \quad (\text{parabola}) \\ (1, \infty) & E > 0 \quad (\text{hiperbola}) \end{cases} \begin{cases} r_{\min} = \frac{J^2}{m\alpha(1 + \varepsilon)} \\ r_{\max} = \frac{J^2}{m\alpha(1 - \varepsilon)} \end{cases}$$

Zadanie 2 $V(w) = -\alpha w - \beta w^2$, $\beta \ll \alpha$

Tutaj mamy poprzedni przykład z zaburzeniem kwadratowym. Ze wzoru Bineta,

$$w'' + w = \frac{m}{J^2}(\alpha w + \beta)$$

$$w'' + \left(1 - \frac{2\beta m}{J^2}\right)w = \frac{\alpha m}{J^2} \stackrel{\text{def}}{=} \eta$$

Chcemy wprowadzić nową zmienną, by dostać oscylator harmoniczny. Niech $s = Aw - B$.

$$\eta = \frac{s''}{A} + \left(1 - \frac{2\beta\eta}{\alpha}\right)\frac{s + B}{A}$$

Stąd $A = 1$ oraz

$$B = \frac{\eta}{1 - \frac{2\beta\eta}{\alpha}}$$

W takim razie,

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{2\beta m}{J^2}}$$

Dalej jest oscylator, ale z inną częstotliwością.

Zadanie 3 $V(w) = -\alpha w - \delta V$ gdzie $\delta V \ll \alpha w$

Użyjemy rozwiązania dla przypadku niezaburzonego i zrobimy rachunek zaburzeń.

$$\begin{aligned} V_0(w) &= -\alpha w \\ w_0(\phi) &= A \cos(\phi - \phi_0) \cong A \sin(\phi - \phi_0) \\ w(\phi) &= w_0(\phi) + \delta w(\phi) \end{aligned}$$

Równanie Bineta jest liniowe, więc możemy to wstawić i część z w_0 zaniknie.

$$\delta w'' + \delta w = \frac{m\delta V'}{J^2}$$

Teraz wchodzi rachunek zaburzeń. Wstawiamy $\delta V'(w) = \delta V(w_0) + \mathcal{O}(w_0^2)$. Teraz jeden prosty trick, zróżniczkujemy po ϕ ,

$$\delta w''' + \delta w' = \frac{m}{J^2} \delta V''(w_0) A \cos(\phi - \phi_0)$$

Założmy $\phi_0 = 0$, bo czemu nie. Teraz pomnożmy przez $\cos \phi$ i scałkujemy.

$$\begin{aligned} \delta w''' \cos \phi + \delta w' \cos \phi &= \frac{mA}{J^2} \delta V''(w_0) \cos^2 \phi \quad \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w''' \cos \phi d\phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w' \cos \phi d\phi &= \frac{mA}{J^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta V''(w_0) \cos^2 \phi d\phi \end{aligned}$$

Pierwszą całkę liczymy przez części.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w''' \cos \phi d\phi &= \delta w'' \cos \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w'' \sin \phi d\phi \\ &= \delta w' \sin \phi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta w' \cos \phi d\phi \end{aligned}$$

Stąd,

$$\delta w' \left(\frac{\pi}{2} \right) + \delta w' \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{mA}{J^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta V''(w_0) \cos^2 \phi d\phi$$

Spodziewamy się dostać precesję orbit, wprowadźmy więc parametr (a w zasadzie 3 nowe wielkości), który miałby ją opisywać:

$$\delta \phi = 2\delta \phi_+ - 2\delta \phi_-$$

Sens tych wielkości zaraz się wyjaśni. Dla w_0 ekstrema są w $\pm \pi/2$, przez precesję będą właśnie pewne odchylenia położenia ekstremum. Znajdziemy te położenia ekstremalne rozwiązując warunek $w'(\phi) = 0$.

$$0 = w' = w'_0 + \delta w' = A \underbrace{\cos \left(\pm \frac{\pi}{2} + \delta \phi_{\pm} \right)}_{\phi} + \delta w' \left(\pm \frac{\pi}{2} \right)$$

gdzie w ostatnim wyrazie pominęliśmy już te zaburzenia kąta $\delta\phi_{\pm}$. Wiemy, że $\delta\phi$ jest małe, więc możemy przybliżyć \cos , używając tożsamości trygonometrycznych

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2} + x\right) = \mp \sin x$$

Stąd,

$$\begin{aligned} 0 &= \mp A\delta\phi_{\pm} + \delta w'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + \mathcal{O}(\delta\phi^2) \\ \pm\delta\phi_{\pm} &\approx \frac{1}{A}\delta w'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

I uwaga punkt kulminacyjny,

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{2}{A}\left[\delta w'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \delta w'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2m}{J^2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\delta V''(w_0)\cos^2\phi\,d\phi \end{aligned}$$

Dostaliśmy więc poprawkę położenia ekstremalnych punktów orbity wynikającą z precesji.

Rozdział 2

Bryła sztywna

Ćwiczenia 8

25 lis 2021

Definicja 1 (Wzory bryły sztywnej). Środek masy:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_B \mathbf{r} \, dm$$

Moment bezwładności:

$$I = \int_B \rho^2 \, dm$$

gdzie ρ to współrzędna walcowa. Tensor bezwładności:

$$I_{ij} = \int_B \left(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j \right) dm$$

gdzie świadomie kaleczę notację symbolem δ_{ij} .

Zadanie 1 Znaleźć tensor bezwładności 1/8 kuli o promieniu R i masie M , względem początku układu współrzędnych środka masy.

Tę bryłę B opisuje układ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Z symetrii widać, że wszystkie składowe \mathbf{R} są równe, policzmy więc jedną z nich.

$$\begin{aligned} R_z &= \frac{\rho}{m} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\rho}{M} \frac{\pi R^4}{16} \\ M &= \rho V = \frac{\rho}{8} \frac{4}{3} \pi R^3 \\ R_z &= \frac{3}{8} R \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = \frac{3}{8}R\mathbf{e}_x + \frac{3}{8}R\mathbf{e}_y + \frac{3}{8}R\mathbf{e}_z$$

Teraz liczymy komponenty tensora bezwładności.

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \rho \int_B (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) dV \\ &= \rho \int_0^{\pi/2} \int_0^R \int_0^{\pi/2} [(r \sin \theta \cos \phi)^2 + (r \sin \theta \sin \phi)^2] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \rho \frac{\pi R^5}{2 \cdot 5} \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \left| \begin{array}{l} u = \cos \theta \\ du = -\sin \theta d\theta \end{array} \right| \\ &= \frac{\rho R^5 \pi}{10} \int_0^1 (1 - u^2) du = \frac{2MR^2}{5} = I_{xx} = I_{yy} \end{aligned}$$

Trzeba jeszcze policzyć wyrazy pozadiagonalne,

$$I_{xy} = -\rho \int_B xy dV = \rho \iiint r^4 \sin^3 \theta \sin \phi \cos \phi dr d\theta d\phi = -\frac{2MR^5}{5\pi}$$

W zapisie graficznym,

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ -\frac{1}{\pi} & 1 & -\frac{1}{\pi} \\ -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor nie jest diagonalny, więc układ który przyjęliśmy nie jest układem osi własnej. Chcemy więc zdiagnozować tę macierz. Tutaj wchodzi nawet bardziej zaburzenie notacji z delta! Bo widać, że jeśli chcemy diagonalizować, to powinniśmy ten tensor definiować jako endomorfizm przestrzeni liniowej V , których to przestrzeni jest izomorficzna z $V \otimes V^*$. Zatem powinniśmy definiować to z indeksami mieszanymi I^i_j (wtedy delta też ma sens). Wszystko można zrzucić na izomorfizm zadany przez metrykę kanoniczną, ale widać, że byłaby to lepsza definicja.

Wielomianem charakterystycznym tej macierzy jest

$$w_I(\lambda) = (\lambda - (1+n)^2)^2 (\lambda - (1-2n))$$

gdzie $n = -1/\pi$. Widać więc, że jedna podprzestrzeń własna jest zdegenerowana.

$$\ker \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} & -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ -\frac{1}{\pi} & \frac{2}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} & \frac{2}{\pi} \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Pozostałe dwa wektory rozpinające drugą podprzestrzeń zdegenerowaną są ortogonalne do tych ze znalezionej podprzestrzeni. Możemy tak powiedzieć dlatego, że wiemy iż

podprzestrzenie własne rozpinają całą przestrzeń (tensor jest diagonalizowalny, bo jest symetryczny). Weźmy więc sobie

$$\mathbb{R}^3 = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\} = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

W tej bazie ortogonalnej,

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{2}{\pi} \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1 (Steinera).

$$I = I_{\text{CM}} + M(\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}^\top)$$

gdzie \mathbf{R} jest wektorem wodzącym środka masy, wyrażonym w bazie, w której I jest diagonalne (zwykła zamiana bazy).

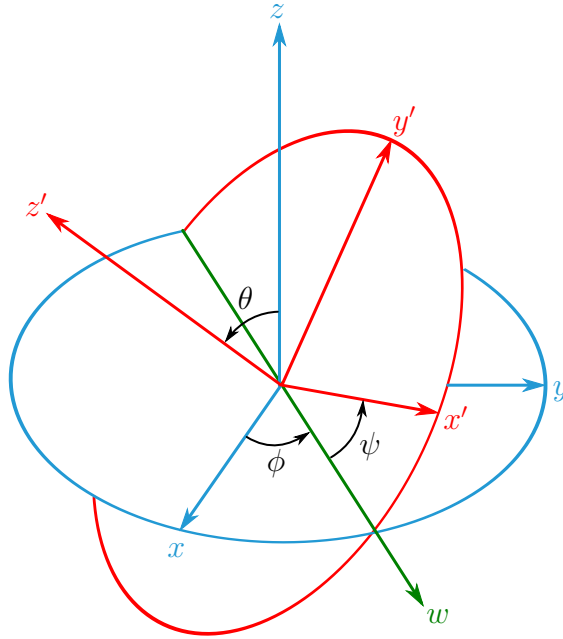
W naszym przypadku,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{3\sqrt{3}R}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ baza osi } \\ &\quad \text{głównych} \\ \mathbf{R}^2 &= \frac{3}{8}R\sqrt{3} \\ I_{\text{CM}} &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{2}{\pi} \end{bmatrix} - M \left(\frac{27}{64}R^2 \mathbf{1} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{27}{64}R^2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{2}{5}MR^2[I] - MR^2 \begin{bmatrix} \frac{27}{64} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{27}{64} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

I mamy tensor bezwładności względem środka masy, wyrażony w bazie osi głównych.

Obroty Przypomnijmy sobie kąty Eulera. Dowolny obrót można zapisać w postaci

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_z(\phi)\mathcal{O}_x(\theta)\mathcal{O}_{z'}(\psi)$$



Rysunek 2.1: Kąty Eulera

Chcemy wyrazić prędkość kątową w kątach Eulera. Na wykładzie było udowodnione, że

$$\omega_{\times} = \mathcal{O}^{\top} \dot{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_z^{\top}(\psi) \mathcal{O}_x^{\top}(\theta) \mathcal{O}_z^{\top}(\phi) \cdot \left[\dot{\mathcal{O}}_z(\phi) \mathcal{O}_x(\theta) \mathcal{O}_z(\psi) + \mathcal{O}_z(\phi) \dot{\mathcal{O}}_x(\theta) \mathcal{O}_z(\phi) + \mathcal{O}_z(\phi) \mathcal{O}_x(\theta) \dot{\mathcal{O}}_z(\psi) \right]$$

Korzystając z faktu, że $\mathcal{O}_i \in \text{SO}(3)$,

$$= \mathcal{O}_z^{\top}(\psi) \mathcal{O}_x^{\top}(\theta) \mathcal{O}_z^{\top}(\phi) \dot{\mathcal{O}}_z(\phi) \mathcal{O}_x(\theta) \mathcal{O}_z(\psi) + \mathcal{O}_z^{\top}(\psi) \mathcal{O}_x^{\top}(\theta) \dot{\mathcal{O}}_x(\theta) \mathcal{O}_z(\psi) + \mathcal{O}_z^{\top}(\psi) \dot{\mathcal{O}}_z(\psi)$$

Za chwilę będziemy mnożyć macierze obrotów wygrzebane z pierwszych ćwiczeń. Moje notatki nie powinny być skalane takimi czynnościami, podajmy więc sam wynik.

$$\omega_{\times} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & 0 \end{bmatrix}$$

Wiemy też, że jeśli $\omega = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^{\top}$, to

$$\omega_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{aligned}$$

Zadanie 2 Rozważmy czaszę kulistą o promieniu R , w której toczy się walec o masie m , promieniu r , bez poślizgu.

Układ ma jeden stopień swobody, bo walec toczy się bez poślizgu. Jedną współrzędną α , będącą kątem między pionem a walcem, o początku w środku czaszy, opisuje jednoznacznie przestrzeń konfiguracyjną.

$$\begin{aligned}v_{\text{CM}} &= (R - r)\dot{\alpha} \\v_{\text{obr}} &= \omega r = v_{\text{CM}} \\ \omega &= \frac{v_{\text{CM}}}{r} = \frac{R - r}{r}\dot{\alpha} \\ I &= \frac{mr^2}{2}\end{aligned}$$

Tu się kończy fizyka i zaczyna algorytmika.

$$\begin{aligned}T &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \\ V &= -mg(R - r)\cos\alpha\end{aligned}$$

Lagrangian,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mg(R - r)\cos\alpha \\ &= \frac{m}{2}(R - r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{mr^2}{4}\frac{(R - r)^2}{r^2}\dot{\alpha}^2 + mg(R - r)\cos\alpha \\ &= \frac{3m}{4}(R - r)^2\dot{\alpha}^2 + mg(R - r)\cos\alpha \\ &\cong \frac{3m}{4}(R - r)^2\dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2}mg(R - r)\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)\end{aligned}$$

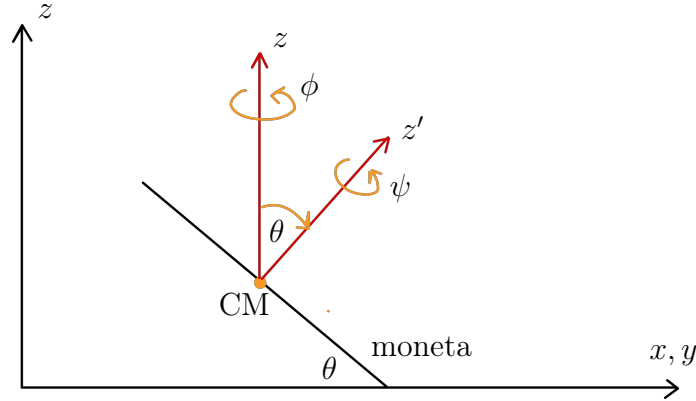
Równania E-L,

$$\begin{aligned}0 &= mg(R - r)\alpha + \frac{3m}{2}(R - r)^2\ddot{\alpha} \\ 0 &= \ddot{\alpha} + \frac{2}{3}\frac{g}{R - r}\alpha \\ \omega &= \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R - r}}\end{aligned}$$

Ćwiczenia 9

Zadanie 1 Moneta o masie m i promieniu R ślizga/toczy się pod kątem. Wykonuje takie ruchy, że się nie przewraca. Znaleźć Lagrangian i stałe ruchu. 02 gru 2021

Do opisu położenia monety można użyć kątów Eulera. Niech oś z będzie wertykalna, a oś z' jest prostopadła do monety. Między osiami jest kąt θ . Ten sam kąt jest kątem nachylenia monety do podłoża. Mamy początkowo 3 stopnie swobody: 3 położenia środka masy i 3 kąty Eulera. Odpada nam jednak jeden stopień swobody, bo bryła ma też punkt



Rysunek 2.2: Moneta tocząca się po płaskim podłożu.

przyczepu do podłoża (może się zmieniać, ale jest to punkt przyczepu), jest to więz odejmujący jeden stopień swobody. Położenie środka masy wyraża nam więc kąt θ . Mamy więc współrzędne $(x, y, \phi, \theta, \psi)$, gdzie x, y opisują środek masy. Współrzędna z środka masy jest wyrażona przez:

$$z_{\text{CM}} = R \sin \theta$$

Lagrangian:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T_{\text{CM}} + T_{\text{obr}} - V = \frac{mv^2}{2} + \frac{\omega^\top I \omega}{2} - V \\ V &= mgR \sin \theta \\ T_{\text{CM}} &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta)\end{aligned}$$

Jeśli I jest diagonalny, to

$$\frac{\omega^\top I \omega}{2} = \sum_i \frac{I_i \omega_i^2}{2}$$

wyraża się przez te momenty główne. Jakie są momenty główne krążka?

$$I_{z'} = \frac{1}{2} m R^2$$

względem osi z' (prostopadłej do monety). Z symetrii,

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4} m R^2$$

Liczmy więc energię obrotową.

$$\begin{aligned}T_{\text{obr}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{mR^2}{2} (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\psi}\dot{\phi}) + \frac{mR^2}{4} (\dot{\theta}^2 \cos^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \sin \psi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{mR^2}{4} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \psi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \psi \cos \psi \sin \theta) \right] \\ &= \frac{mR^2}{4} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{mR^2}{8} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)\end{aligned}$$

Ostatecznie Lagrangian ma postać

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + R^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) + \frac{mR^2}{8}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{mR^2}{4}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) - mgR \sin \theta$$

Chcemy wypisać stałe ruchu. Sprawdzamy od których zmiennych nie zależy Lagrangian. Nie zależy od x . Stąd $p_x = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{x} = m\dot{x}$ jest zachowana. Zatem pęd środka masy w kierunku x jest zachowany. Podobnie $p_y = m\dot{y}$ jest zachowany. \mathcal{L} nie zależy też od ψ , zatem

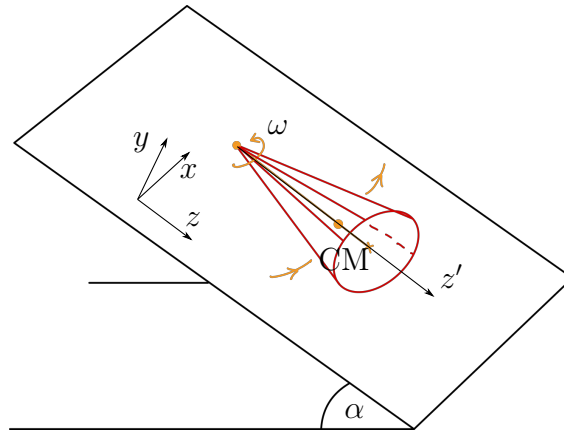
$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta$$

jest zachowana. Jest to składowa momentu pędu w obrocie wokół osi z . Również nie ma ψ ,

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$$

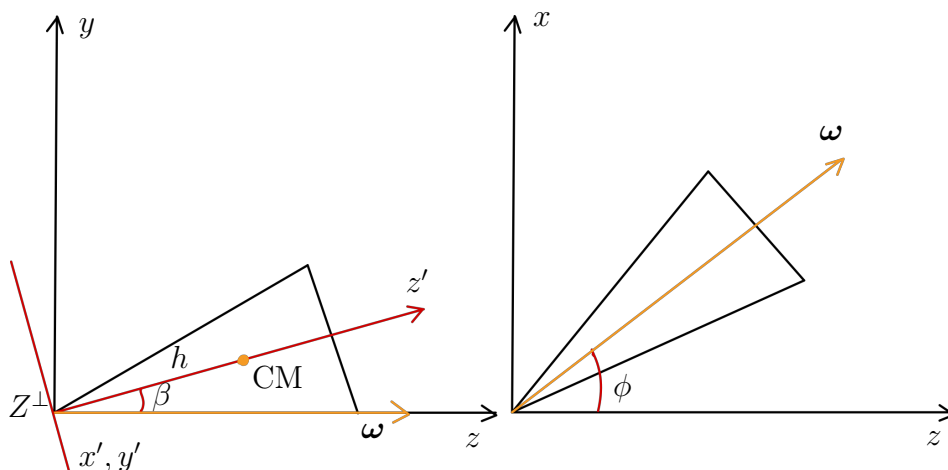
Czy to wszystko? Otóż nie! Jeśli Lagrangian nie zależy jawnie od czasu, to również energia jest zachowana, co daje piątą stałą ruchu.

Zadanie 2 Na równi o kącie nachylenia α leży stożek (położony powierzchnią boczną) o wysokości H i promieniu podstawy R . Wierzchołek jest przymocowany do równi. Jak się wachnie stożek to będzie drgał (toczył bez poślizgu po tej równi w lewo i prawo). Jest grawitacja. Obliczyć częstość drgań.



Rysunek 2.3: Obrazkowe wyobrażenie sytuacji z zadania

Jest to najważniejsze zadanie z bryły sztywnej w naszej karierze, bo będzie na kolokwium. Aby to dobrze policzyć, trzeba dobrze wybrać współrzędne. Niech odległość od wierzchołka do środka masy stożka to h . Wprowadzamy układ współrzędnych. Oś z jest skierowana zgodnie ze spadkiem równi. Oś y będzie prostopadła do góry, zatem oś x idzie za rysunek. Układ (x, y, z) jest statycznym układem inercyjnym. Chcemy jeszcze zdefiniować układ związany ze stożkiem. Kąt ϕ opisuje wychylenie stożka (będąc dokładniejszym, wychylenie prostej styku stożka z równią) od osi z w rzucie układu na



Rysunek 2.4: Rzuty w dwóch głównych płaszczyznach: prostopadłej (w chwili $t = 0$) i równoległej do płaszczyzny równi.

płaszczyznę zx . Początkowo, $\phi(0) = 0$. Oś z' pokrywa się z osią symetrii stożka. Układ (x', y', z') jest tym układem nieinercyjnym, związanym ze stożkiem. Warto jeszcze na przyszłość zapisać, że jeśli $Z = \text{span}\{\mathbf{e}_{z'}\}$, to dopełnienie ortogonalne do \mathbb{R}^3 (płaszczyznę równoległą do podstawy stożka) będziemy oznaczać przez $Z^\perp = \text{span}\{\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}\}$. Jest to cenna uwaga, gdyż stożek z racji posiadania symetrii osiowej posiada tylko dwa momenty główne – jeden wzdłuż osi z' , drugi wzdłuż dowolnych dwóch osi rozpinających Z^\perp . Nie będzie nas więc pewnie nawet interesować uściślenie/dookreślenie dwóch osi $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}$, a jedynie zauważenie rozpinanej przez nie płaszczyzny.

Kąt rozwarcia stożka oznaczmy przez β . Jest to jednocześnie kąt między osiami z i z' . Z czystej starożytnej geometrii,

$$\sin \beta = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}$$

Teraz rozpoczynają się poszukiwania Lagrangianu. Bryła jest przymocowana, warto więc skorzystać z twierdzenia Chaslesa.

Twierdzenie 2. Rozważmy bryłę B . Dla dowolnego punktu $p \in B$, w dowolnej chwili, ruch ciała można rozłożyć na ruch translacyjny punktu p i ruch obrotowy wokół pewnej osi, przechodzącej przez p , niekoniecznie stałej w czasie.

Nasz stożek jest przymocowany, naturalnym kandydatem na punkt p jest więc jego wierzchołek (gdyż się nie rusza). Wówczas chwilową (!) osią obrotu będzie oś styku stożka z równią. Potrzebujemy więc wyrazić jedynie energię rotacyjną względem chwilowej osi obrotu. Musimy znaleźć też położenie środka masy.

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \underbrace{h \cos \beta}_{\text{rzutowanie na płaszczyznę } xy} \sin \phi \mathbf{e}_x + h \sin \beta \mathbf{e}_y + \underbrace{h \cos \beta}_{\text{rzutowanie na płaszczyznę } xy} \cos \phi \mathbf{e}_z$$

Wektor przyspieszenia grawitacyjnego w naszych współrzędnych,

$$\mathbf{g} = -g \cos \alpha \mathbf{e}_y + g \sin \alpha \mathbf{e}_z$$

gdzie dla przypomnienia, α jest kątem nachylenia równi. Dalej, musimy znaleźć wektor prędkości kątowej. Chwilowa oś obrotu stożka to oś punktów styku stożka z równią, zatem

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin \phi \mathbf{e}_x + \omega \cos \phi \mathbf{e}_z = \omega \sin \beta \mathbf{e}_{x'} + \omega \cos \beta \mathbf{e}_{z'}$$

Osie (x, y, z) się nie poruszają, układ primowany porusza się wraz ze stożkiem. Zauważmy, że w układzie primowanym rzeczywiście $\boldsymbol{\omega}$ jest wektorem stałym.

$$V = -m(\mathbf{g} | \mathbf{R}_{\text{CM}}) = ghm \sin \beta \cos \alpha - ghm \sin \alpha \cos \beta \cos \phi$$

Wyrzucamy człon stały,

$$\cong -mgh \sin \alpha \cos \beta \cos \phi$$

Teraz trzeba policzyć człon kinetyczny. Stożek ma symetrię, ustaliliśmy już że będą tylko dwa momenty główne,

$$T_{\text{obr}} = \frac{I_{\perp} \omega_{\perp}^2}{2} + \frac{I_{z'} \omega_{z'}^2}{2}$$

gdzie ω_{\perp} jest po prostu długością rzutu $\boldsymbol{\omega}$ na Z^{\perp} . Potrzebujemy skądś wyrazić ω przez znane parametry układu. Wiemy, że $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, gdzie \mathbf{r} jest położeniem środka podstawy (bo nie ma poślizgu).

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{r} = H \cos \beta \sin \phi \mathbf{e}_x + H \sin \beta \mathbf{e}_y + H \cos \beta \cos \phi \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = H \dot{\phi} \cos \beta \cos \phi \mathbf{e}_x - H \dot{\phi} \cos \beta \sin \phi \mathbf{e}_z$$

Teraz rozpisujemy ten iloczyn wektorowy i porównujemy składowe. Stąd,

$$v^x: H \dot{\phi} \cos \phi \cos \beta = -H \omega \cos \phi \sin \beta$$

$$\omega = -\frac{\dot{\phi} H \sqrt{H^2 + R^2}}{\sqrt{H^2 + R^2} R} = -\dot{\phi} \frac{H}{R}$$

Zatem, w układzie primowanym (który jest używany we wzorze na energię obrotową)

$$\omega_{z'} = \omega \cos \beta$$

$$\omega_{\perp} = \omega \sin \beta$$

Na płaszczyźnie Z^{\perp} prostopadłej do osi z' mieliśmy dowolność wyboru bazy. Wybraliśmy taką, żeby akurat $\omega_{\perp, y'}$ było takie jak napisaliśmy a rzut na drugą oś równy zero.

$$\mathcal{L} = \frac{I_{\perp}}{2} \frac{\dot{\phi}^2 H^2}{R^2} \frac{R^2}{H^2 + R^2} + \frac{I_{z'}}{2} \frac{\dot{\phi}^2 H^2}{R^2} \frac{H^2}{H^2 + R^2} + \frac{mghH}{\sqrt{H^2 + R^2}} \sin \alpha \cos \phi$$

Zdefiniujmy stałe A, B ,

$$A = \frac{H^2}{R^2} (I_{\perp} R^2 + I_{z'} H^2) \frac{1}{H^2 + R^2}$$

$$B = \frac{mghH}{\sqrt{H^2 + R^2}} \sin \alpha$$

$$\mathcal{L} = \frac{A}{2} \dot{\phi}^2 + B \cos \phi$$

Teraz wystarczy rozwinąć wokół położenia równowagi. Zapisujemy $\phi = \phi_0 + \delta\phi$, będziemy oznaczać $\delta\phi = \phi$. Alternatywnie, rozwijamy Lagrangian w Taylora wokół ϕ_0 ,

$$= \frac{A}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{B}{2} \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3)$$

Równania E-L dają

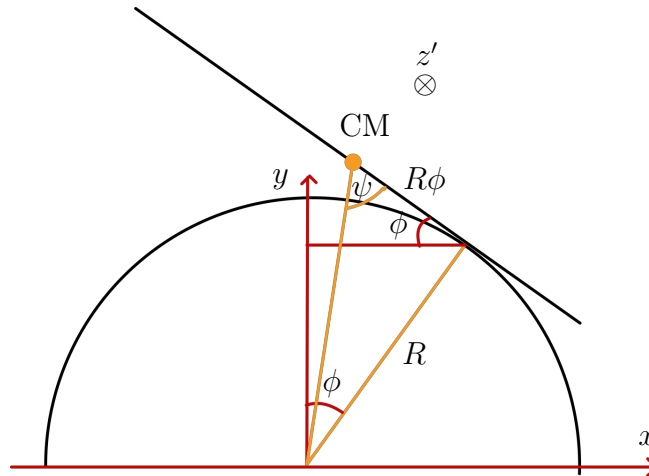
$$0 = A\ddot{\phi} + B\phi$$

$$0 = \ddot{\phi} + \frac{B}{A}\phi$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

Jest to szukana częstotliwość małych drgań wokół położenia równowagi.

Zadanie 3 Powierzchnia półsfery o promieniu R . Na szczycie leży jednorodny pręt o masie m , długości l . Pręt został lekko pchnięty i się majta. Znaleźć częstość małych drgań.



Rysunek 2.5: Pręt na czaszy. Zauważmy, że $\psi = \pi/2 - \phi$.

Jest to ruch jednowymiarowy, położenie pręta jednoznacznie opisuje kąt ϕ (gdyż $\psi = \pi/2 - \phi$). Trzeba wyznaczyć położenie środka masy w zależności od ϕ . Odległość od punktu zaczepu do środka masy to miara łukowa $R\phi$ (oczywiste, ten pręt się jakby musiał

nawinać, bo ruch nie był z poślizgiem). Z prostej geometrii,

$$\begin{aligned}x_{\text{CM}} &= R \sin \phi - R\phi \cos \phi \\y_{\text{CM}} &= R \cos \phi + R\phi \sin \phi \\ \mathcal{L} &= T_{\text{CM}} + T_{\text{obr}} - V \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}_{\text{CM}}^2 + \dot{y}_{\text{CM}}^2) + \frac{I_{z'}\omega^2}{2} - mgy_{\text{CM}}\end{aligned}$$

gdzie z' to oś obrotu prostopadła do pręta, przechodząca przez jego środek. Moment jest w układzie bryły, jak ma być. Ponadto z czystej geometrii układu, $\omega = \dot{\phi}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{mR^2}{2} \left[\left(\dot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi} \cos \phi + \phi \dot{\phi} \sin \phi \right)^2 + \phi^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi \right] \\ &\quad + \frac{I_{z'}}{2} \dot{\phi}^2 - mgR(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ &= \frac{mR^2}{2} \phi^2 \dot{\phi}^2 + \frac{I_z}{2} \dot{\phi}^2 - mgR(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= mR^2 \dot{\phi}^2 \phi + mgR \sin \phi - mgR \dot{\phi} - mgR \phi \cos \phi \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= mR^2 r \ddot{\phi} \phi^2 + 2\phi \dot{\phi}^2 mR^2 + I_{z'} \dot{\phi}\end{aligned}$$

To daje równanie ruchu. W przybliżeniu małych drgań, po przypomnieniu wzoru na moment bezwładności pręta, wychodzi częstość

$$\begin{aligned}I_{z'} &= \frac{1}{12}ml^2 \\ \omega &= \sqrt{\frac{12gR}{l^2}}\end{aligned}$$

W podejściu rozwijania Lagrangianu zamiast równań ruchu,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\cong \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\phi}^2 + mgR \left(\frac{\phi^2}{2} - \phi^2 \right) + \mathcal{O}(\phi^3) \\ &= \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\phi}^2 - \frac{mgR}{2} \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3)\end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned}-mgR\phi &= \frac{ml^2}{12} \ddot{\phi} \\ 0 &= \ddot{\phi} + \frac{12gR}{l^2} \phi\end{aligned}$$

co daje identyczną częstość drgań.