Analiza funkcjonalna

Notatki z ćwiczeń

Wykładowcy:
dr hab. Marcin Bobieński

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Ćwiczenia 1

Norma ma symulować odległość między dowolnymi punktami przestrzeni. Odległość ta ma być zgodna ze strukturą przestrzeni liniowej. Ta struktura to dodawanie wektorów i mnożenie przez element ciała. Stąd podobne wymagania na normę. Wystarczy nam jeden argument bo norma ma być niezmiennicza na przesunięcia, więc i tak wystarczy mierzyć odległość od zera. Skalowanie to niezmienniczość ze względu na strukturę mnożenia. 08 paź 2021

Przykład 1 $B = C\big([0,1]\big)$, $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x)\big|$. Pokazać, że B jest przestrzenią Banacha.

$C\big([0,1]\big)$ jest oczywiście przestrzenią liniową zarówno nad $\mathbb{R}$ jak i nad $\mathbb{C}$. Wypada sprawdzić, że $\|f\|$ jest normą oraz, że B jest zupełna. Zerowanie normy i wyciąganie stałej są oczywiste, natomiast trzeba coś napisać o nierówności trójkąta. Wystarczy wziąć zwykłą nierówność trójkąta i zaaplikować supremum. Nieostre nierówności przechodzą.

$$\big|f(x) + g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|$$
$$\sup\big|f(x) + g(x)\big| \leq \sup\Big(\big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|\Big) \leq \sup\big|f(x)\big| + \sup\big|g(x)\big|$$

Badamy zupełność. Weźmy ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy'ego w B. Wówczas $\forall_{x\in[0,1]}$ będziemy mieć $\big(f(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ oraz $\lim f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)$ (punktowo). W ten sposób wytypowaliśmy kandydata na granicę ciągu funkcji, punkt po punkcie. Gdyby się udało pokazać, że $f_n \to f$ jednostajnie, to sprawa zakończona (bo zbieżność jednostajna to zbieżność w normie supremum). Mamy ciąg Cauchy'ego, czyli $\big|f_n(x) - f_m(x)\big| \leq \varepsilon$ modulo kwantyfikatory. W tym zapisie można przejść z $m \to \infty$, n zostawiamy w spokoju, nierówności nieostre przechodzą do granicy. Zatem,

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon$$

dla każdego x. Stąd,

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leq \varepsilon$$

Oznacza to, że $f_n \to f$ jednostajnie, co kończy dowód.

Przykład 2 ℓ_1, ℓ_∞ gdzie $\ell_1 = \big\{(a_n)\colon \sum |a_n| < \infty\big\}$ oraz $\ell_\infty = \big\{(a_n)\colon \exists_M \ |a_n| \leq M\big\}$ z normami $\big\|(a_n)\big\|_1 = \sum |a_n|$ oraz $\big\|(a_n)\big\|_\infty = \sup_n |a_n|$.

Dla $\|\cdot\|_\infty$ argument na normę jest powtórzeniem poprzedniego. Dla $\|\cdot\|_1$ też wychodzi ze zwykłej nierówności trójkąta. Zajmijmy się zupełnością. Najpierw w ℓ_∞.

Bierzemy ciąg Cauchy'ego ciągów o wyrazach $(a_n)^k \in \ell_\infty$. Z definicji, $\forall_{n_0}$ ciąg $a^k_{n_0}$ jest Cauchy'ego. Z założenia,

$$\exists_N \forall_{K',K''>N} \quad \Big\|(a_n)^{K'} - (a_n)^{K''}\Big\|_\infty \leq \varepsilon$$

zatem

$$\sup_n \Big|a_n^{K'} - a_n^{K''}\Big| \leq \varepsilon$$

Definiujemy $a_n = \lim_{k\to\infty} a_n^k$, z zupełności $\mathbb{R}$ granica ta istnieje. Teraz z K'' przechodzimy do nieskończoności, jak poprzednio (bo jest kwantyfikator $\forall$) zatem dostajemy

$$\sup_n \left|a_n^{K'} - a_n\right| \leq \varepsilon$$

a to daje zupełność ℓ_∞, bo oznacza to, że $(a_n)^k \to (a_n)$, gdzie (a_n) jest ciągiem granicznym w ℓ_∞. Jakby co, (a_n) jest w przestrzeni, bo jest generowany z granic ciągów ograniczonych w $\mathbb{R}$, a takie są zbieżne. (a_n) jest więc również ograniczony. Teraz zajmijmy się zupełnością w ℓ_1.

Zaczynamy podobnie. Mamy ciąg punktów w przestrzeni ℓ_1 (czyli ciąg zwykłych ciągów). Niech $p^k = (a_n)^k \in \ell_1$. Zakładamy, że jest to ciąg Cauchy'ego w ramach danej normy, tj. $\left\|p^k - p^l\right\|_1 \leq \varepsilon$. Generujemy kandydata na granicę po k.

$$\left\|p^k - p^l\right\|_1 = \sum_n \left|a_n^k - a_n^l\right| \leq \varepsilon$$

Stąd wynika, że $\forall_{n_0}\ a_{n_0}^k$ jest C.C (skoro suma modułów jest „mała”, to każdy element sumy z osobna też taki musi być, spełnia więc definicję C.C). Z zupełności $\mathbb{R}$ możemy przejść granicznie po k definiując $a_{n_0} = \lim_{k\to\infty} a_{n_0}^k$. To nam generuje ciąg graniczny (a_{n_0}). Trzeba pokazać, że jego szereg jest zbieżny bezwzględnie, czyli że ciąg graniczny wciąż leży w ℓ_1.

Znowu nieostre nierówności przenoszą się do granicy, po jednym z górnych indeksów można przejść, zatem $\exists_K\, \forall_{l>K}$

$$\sum_n \left|a_n^l - a_n\right| \leq \varepsilon$$

Zatem granicznie zbiega do a_{n_0} i ta granica jest w ℓ_1.

Równoważność norm

Definicja 1 (Równoważność norm)**.** Równoważność norm $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ na V oznacza, że $\exists_{c_1,c_2>0}$ takie, że

$$c_1\|v\| \leq \|v\|' \leq c_2\|v\|$$

Jest to relacja równoważności. Równoważność norm implikuje równoważność zbieżności ciągów.

Uwaga 1. Wszystkie $\|\cdot\|_p$ są równoważne na $\mathbb{R}^n$.

Dowód.

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{1/p}\|v\|_\infty$$

Natomiast rozpisując, niech $|v_k| = \max_l(v_l)$.

$$|v_k| \leq \|v\|_p = \left(|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p\right)^{1/p}$$

Prawą nierówność szacujemy przez wzięcie sumy n tych największych v_k.

$$\|v\|_p \leq \left(n|v_k|^p\right)^{1/p} = n^{1/p}|v_k|$$

■

> **Twierdzenie 1.** Na przestrzeni skończonego wymiaru, czyli (z dokładnością do wyboru bazy i izomorfizmu) $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$, wszystkie normy są równoważne.

Dowód. Później. ■

> **Uwaga 2.** Co się stanie jeśli byśmy zmienili ciało na niezupełne. Czy wówczas też normy na np. $\mathbb{Q}^2$ są równoważne? NIE!

Skonstruujmy kontrprzykład na $\mathbb{Q}^2$. Niech $\left\|(q_1, q_2)\right\|_1 = |q_1| + |q_2|$ oraz $\left\|(q_1, q_2)\right\| = \left|q_1 + \sqrt{2}q_2\right|$. Niech $\mathbb{Q} \ni q_n \to \sqrt{2}$. Wówczas,

$$\begin{aligned}\left\|(q_n, -1)\right\| &\to 0 \\ \left\|(q_n, -1)\right\|_1 &\geq 1\end{aligned}$$

a równoważność zbieżności wynika z równoważności norm. Skoro ten sam ciąg nie jest zbieżny w dwóch różnych normach na $\mathbb{Q}^2$ to znaczy, że normy te nie mogły być równoważne.

Ćwiczenia 2

15 paź 2021

> **Twierdzenie 2.** Na przestrzeni liniowej skończonego wymiaru nad ciałem zupełnym ($\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) wszystkie normy są równoważne.

Dowód. Jeśli $\dim V < \infty$, dysponujemy rozważanymi wcześniej normami. Nad V ustalamy bazę $\{e_i\}$ i ustalamy normę $\|v\|_1 = \sum \left|v_j\right|$. Weźmiemy teraz dowolną normę i pokażemy, że jest ona równoważna z normą pierwszą. Przez przechodniość relacji równoważności wiemy wtedy, że każde dwie są równoważne. Niech $\|\cdot\|$ będzie tą normą.

$$\begin{aligned}\|v\| = \left\|\sum v_j e_j\right\| &\overset{\triangle}{\leq} \sum |v_j|\left\|e_j\right\| \\ &\leq \max_j \left\|e_j\right\| \|v\|_1\end{aligned}$$

Niech $c_2 = \max_j \left\|e_j\right\|$. To wyszło nam za darmo, nie korzystaliśmy z zupełności ciała. Wykazaliśmy, że $\|v\| \leq c_2\|v\|_1$. Teraz należy znaleźć stałą c_1. Zdefiniujmy sferę w sensie normy pierwszej. $S \stackrel{\text{def}}{=} \{v \colon \|v\|_1 \leq 1\}$. Na S mamy funkcję, która jest tą normą bezindeksową $\|\cdot\| \colon S \to \mathbb{R}^+$.

Pokażemy, że S jest zwarte, $\|\cdot\|$ jest ciągła oraz wykorzystamy fakt, że funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga kresy, co znaczy, że $\exists_{p \in S} \colon f(p) = \inf_{x \in S} f(x)$.

Zauważmy, że S jest ograniczony w $\mathbb{R}^n$, bo moduł każdej ze współrzędnej jest mniejszy do jedynki (jasne). S jest również domknięty, co wynika z definicji. Bierzemy bowiem pewien ciąg punktów na sferze, dla którego suma modułów współrzędnych każdego elementu jest mniejsza równa 1, nierówności nieostre przenoszą się do granicy. S zawiera więc swoje punkty skupienia. Domkniętość i ograniczoność w $\mathbb{R}^n$ daje zwartość. Teraz badamy ciągłość normy. Traktujemy normę jako funkcję na $\|\cdot\| \colon (V, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$. Chcemy pokazać, że $v_n \to v_0 \implies \|v_n\| \to \|v_0\|$.

$$\|v_n\| = \big\|v_0 + (v_n - v_0)\big\| \leq \|v_0\| + \|v_n - v_0\|$$

Stąd,

$$\|v_n\| - \|v_0\| \leq \|v_n - v_0\|$$

W drugą stronę,

$$\begin{aligned} \|v_0\| &= \big\|v_n + (v_0 - v_n)\big\| \leq \|v_n\| + \|v_n - v_0\| \\ \|v_0\| - \|v_n\| &\leq \|v_n - v_0\| \end{aligned}$$

Z obu nierówności wynika, że $\big|\|v_n\| - \|v_0\|\big| \leq \|v_n - v_0\|$. Zbieżność $v_n \to v_0$ oznacza, że $\|v_n - v_0\| < \varepsilon$ dla $n > N$. W takim razie $\big|\|v_n\| - \|v_0\|\big| < \varepsilon$, co dowodzi ciągłości normy.

Wiemy więc, że norma na S osiąga kresy, czyli $\inf_{v \in S}\|v\| = \|v_0\| > 0$, gdzie $v_0 \in S$. Niech $\|v_0\| = c_1$. Weźmy wektor $v \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left\| \|v\|_1 \frac{v}{\|v\|_1} \right\| = \|v\|_1 \left\| \frac{v}{\|v\|_1} \right\| \\ &\geq c_1 \|v\|_1 \end{aligned}$$

Korzystaliśmy wprost z zupełności ciała, jako że użyliśmy argumentu, że zwartość to domkniętość + ograniczoność.
Trzeba by jeszcze tylko naprawić małe oszustwo, mianowicie trzeba by pokazać, że $S \subset (V, \|\cdot\|)$ jest zwarty (w tej topologii). Weźmy odwzorowanie identycznościowe $\mathrm{id} \colon (V, \|\cdot\|_1) \to (V, \|\cdot\|)$. Obraz przy odwzorowaniu ciągłym zbioru zwartego jest zwarty, co załatwia sprawę. ■

Zadanie domowe 1 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ dla $p \geq 1$ gdzie $\big\|(x_1, \ldots, x_n)\big\|_p = \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p}$. Wykazać, z nierówności Holdera, że $\|\cdot\|_p$ jest normą na $\mathbb{R}^n$, wykazać, że ℓ_p jest przestrzenią Banacha oraz, że $\forall_v \|v\|_p \to \|v\|_\infty$.

Pokażmy, że $\|\cdot\|$ jest normą. Zastosujemy nierówność Holdera. W tym wypadku,

$$\sum |x_j y_j| \leq \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_j|^q\right)^{1/q}$$

dla $1/p+1/q=1$. Szkic dowodu byłby nastepujący. BSO, można założyć, że $\sum \left|x_j\right|^p = 1$ i druga też. W przeciwnym razie mogę przez to podzielić. Niech $\left|x_j\right| = e^{\alpha_j}$ oraz $\left|y_j\right| = e^{\beta_j}$, zatem

$$\sum |x_j||y_j| = \sum \exp\left(\frac{1}{p}p\alpha_j + \frac{1}{q}q\beta_j\right)$$

Z wypukłości exp, można oszacować przez każdy składnik.

$$\leq \sum \left(\frac{1}{p}e^{p\alpha_j} + \frac{1}{q}e^{q\beta_j}\right) = 1$$

Teraz wykażmy, że $\|\cdot\|_p$ jest normą na $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\|v+w\|_p^p &= \sum |v_n + w_n|^p = \sum |v_n+w_n||v_n+w_n|^{p-1} \\ &\leq \sum |v_n||v_n+w_n|^{p-1} + \sum |w_n||v_n+w_n|^{p-1}\end{aligned}$$

Teraz używamy nierówności Holdera dla wag p i $p/(p-1)$,

$$\begin{aligned}&\leq \left(\sum |v_n+w_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\|v\|_p + \|w\|_p\right) \\ &= \|v+w\|_p^{p-1}\left(\|v\|_p + \|w\|_p\right)\end{aligned}$$

To dowodzi nierówność trójkąta dla naszej normy.

Dowodzimy tej granicy. Bierzemy ciąg ustalony i zbiegamy z $p \to \infty$.

$$(a_j^p)^{1/p} \leq \left|a_1^p + a_2^p + \cdots\right|^{1/p} \leq (na_j^p)^{1/p}$$

Z trzech ciągów mamy zbieżność po p. Tak byłoby dla ciągów skończonych w $\mathbb{R}^n$. Teraz chcielibyśmy to powtórzyć w ℓ_p. ??????

Zadanie domowe 2 Weźmy $C\big([0,1]\big)$ z normą $\|f\|_\infty = \sup|f|$ oraz $\|f\|_1 = \int_{[0,1]}|f|$. Pokazać, że $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_1$ nie są równoważne.

Ograniczenie w jedną stronę jest proste.

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x \leq \sup_{s\in[0,1]} \left|f(s)\right| \int_{[0,1]} \mathrm{d}x = \|f\|_\infty$$

To nam mówi, że norma $\|\cdot\|_\infty$ jest mocniejsza od $\|\cdot\|_1$ (jeśli nie są równoważne). Teraz należałoby spytać czy istnieje taka stała $c>0$, że $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_1$. Jeśli normy nie są równoważne to istnieć nie może. Równoważność norm implikuje równoważność zbieżności, zatem wystarczy wskazać ciąg funkcyjny, który ma róże granice w obu normach. Weźmy następujący ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C\big([0,1]\big)$:

$$f_n = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2 - 1/n] \\ nx + 1 - n/2 & x \in [1/2 - 1/n, 1/2] \\ -nx + 1 + n/2 & x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 & x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

Wizualnie, chodzi o taki zwężający się szpikulec o piku w $x = 1/2$. Są to naturalnie funkcje ciągłe. Przyjrzymy się normom. $\|f_n\|_\infty = 1$, natomiast $\|f_n\|_1 = 1/n$. Jeśli $f_n \to f$, to $\|f\|_\infty = 1$, ale $\|f\|_1 = 0$. W takim razie, obie normy nie mogą być równoważne.

Zadanie domowe 3 Niech $V = \left\{(a_n)\colon \exists_{N\left((a_n)\right)} \forall_{n\geq N}\ a_n = 0\right\}$. Odnotujmy, że N jest funkcją danego ciągu, nie musi być uniwersalne. Pokazać, że normy $\|\cdot\|_1$ oraz $\|\cdot\|_\infty$ nie są równoważne. Pokazać (!), że nie istnieje taka norma, żeby V była zupełna.

Rozważmy ciągi $(a_n)^k$ gdzie

$$a_n = \begin{cases} 1/k & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\left\|(a_n)^k\right\|_1 = 1$$
$$\left\|(a_n)^k\right\|_\infty = \frac{1}{k}$$

W takim razie nie istnieje $c > 0$, takie że dla każdego k,

$$\left\|(a_n)^k\right\|_1 \leq c\left\|(a_n)^k\right\|_\infty$$

Argument jest więc taki sam jak w poprzednim zadaniu. Dlaczego nie da się tej przestrzeni uzupełnić?

Niech U_n oznacza ciągi, które od n-tego miejsca mają same zera. Naturalnie,

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

Jeśli U_n są nigdzie gęste, to można użyć twierdzenia Baire'a, z którego wynika, że V nie jest zupełna (bo przestrzeń zupełna nie da się przedstawić w postaci takiej sumy, o tym mówi twierdzenie). Nigdzie gęstość oznacza, że $\mathrm{int}\overline{U}_n = \varnothing$.

Udowodnijmy domkniętość U_n: Rozważmy ciąg elementów $U_n \supset (a_n)^k \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|} (b_n) \subset U_{n+i}$ (względem jakiejś dowolnej normy). Zauważmy, że $U_{n+i} \equiv \mathbb{R}^{n+i}$. W $\mathbb{R}^{n+i}$ zbieżność jest po współrzędnych, a tam normy są równoważne. Stąd wynika, że $i = 0$, bo każdy ciąg o indeksie k ma tam zera, zatem granice z tych miejsc też są zerami, więc i się obcina. Stąd U_n jest domknięty bo zawiera swoje punkty skupienia.

Nigdzie gęstość U_n: Wiemy, że U_n jest domknięty, chcemy więc pokazać, że jego wnętrze w przestrzeni V jest puste. Niech $a = (a_n) \in U_n$ oraz $b = (a_1, \ldots, a_n, \varepsilon, 0, \ldots) \in U_{n+1}$. Odległość b od ciągu (a_n) jest dowolnie mała, bowiem

$$\|a - b\| \leq \left\|(0, \ldots, 0, \varepsilon, 0, \ldots)\right\|$$

Co to oznacza? Otóż punkt $a \in U_n$ należy do wnętrza U_n jeśli istnieje otwarte otoczenie tego punktu zawarte wciąż w U_n. Pokazaliśmy, że dla każdego elementu $a \in U_n$ można wybrać dowolnie bliski element z większej przestrzeni U_{n+1}, tj. taki, który będzie znajdował się w dowolnie małym otwartym otoczeniu. Oznacza to, że żaden z elementów $a \in U_n$ nie należy do $\mathrm{int}U_n$, zatem $\mathrm{int}U_n = \varnothing$, co dowodzi nigdzie gęstości.

Zauważmy przy okazji, że taki argument stosuje się do dowolnej przestrzeni liniowo-topologicznej skończonego wymiaru. Otóż podprzestrzeń liniowa jest nigdzie gęsta w większej przestrzeni.

Zadanie 1 W ℓ_1 znaleźć zbiór domknięty, ograniczony, ale nie zwarty.

$$D = \{v \in \ell_1 \colon \|v\| \leq 1\}$$

jest domknięty i ograniczony. Weźmy ciąg $(a_n)^k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$. Zwartość (ciągwo) ocznacza, że każdy ciąg ma podciąg zbieżny. Weźmy podciąg $(a_n)^{k_l}$ zbieżny, skąd wynika, że jest ciągiem Cauchy'ego.

$$\left\|(a_n)^k - (a_n)^m\right\|_1 \overset{k \neq m}{=} 2$$

Oznacza to jawnie, że ten ciąg nie może być ciągiem Cauchy'ego. Sprzeczność. Oznacza to, że w tej podprzestrzeni D nie każdy ciąg ma podciąg zbieżny, a zatem D nie jest zwarty. Jest natomiast domknięty, bo zawiera wszystkie punkty skupienia (a właściwie to ich nie ma).

Ćwiczenia 3

Zadanie domowe 1 Wykazać ośrodkowość: a) $C\big([0, 1]\big)$, $\|\cdot\|_\infty = \sup |f|$; b) ℓ_p, $\|\cdot\|_p$, dla $1 \leq p < \infty$. 22 paź 2021

Po prostu wskazujemy przeliczalne podzbiory gęste.

a) Z twierdzenia Weierstrassa można przybliżać (jednostajnie) każdą funkcję ciągłą na zwartym odcinku wielomianami, w szczególności o współczynnikach wymiernych. $\mathbb{Q}$ jest oczywiście gęste. Oznacza to, że zbiór takich wielomianów jest gęsty w $C\big([0, 1]\big)$.

b) Niech $(a_n) \in \ell_p$. Ustalamy $\varepsilon > 0$ i wybieramy takie N, że

$$\left(\sum_{N+1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$

Definiujemy ciąg

$$b_n = \begin{cases} a_n & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

Wówczas,

$$\big\|(a_n) - (b_n)\big\|_p = \left(\sum_{N+1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$

Potrafimy przybliżać dowolnie dokładnie dowolny punkt w ℓ_p. Każdy tak skonstruowany (b_n) przedstawia się jako skończona kombinacja liniowa „bazy" (e_n to jedynka na n-tym miejscu). Na mocy poniższej uwagi to jest dość, by V była ośrodkowa.

Lemat 1. Jeżeli mamy przestrzeń $(V, \|\cdot\|)$ i przeliczalny zbiór punktów $e_1, e_2, \ldots \in V$ oraz dla każdego $v \in V$ istnieje skończona kombinacja liniowa tego zbioru, przybliżająca v :

$$\left\| v - \sum_{j=1}^{k} a_j e_j \right\| < \varepsilon$$

Wówczas V jest ośrodkowa.

Dowód. W $\mathbb{R}^k$ istnieją wymierne współczynniki $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{Q}$ o tej własności, że

$$\sum_{j=1}^{k} \left| a_j - q_j \right| < \varepsilon$$

W takim razie,

$$\left\| v - \sum_{j=1}^{k} q_j e_j \right\| \overset{\triangle}{\leq} \left\| v - \sum a_j e_j \right\| + \left\| \sum (a_j - q_j) e_j \right\|$$
$$\leq \varepsilon + \max_{j \leq k} \left\| e_j \right\| \varepsilon = \varepsilon'$$

W takim razie dowolny wektor $v \in V$ potrafię dowolnie przybliżać przez wymierne skończone kombinacje. Stąd V jest ośrodkowa. ■

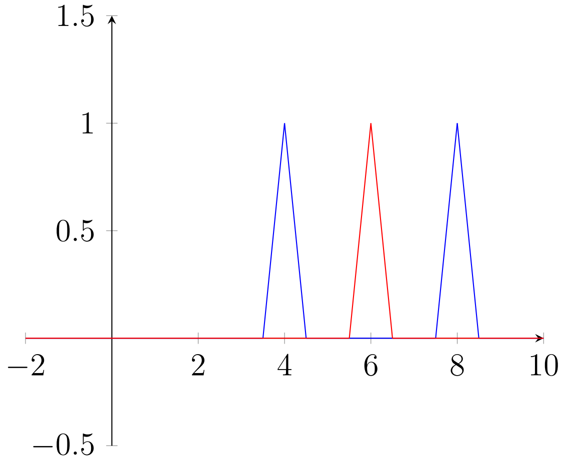
Zadanie domowe 2 Wykazać, że nie są ośrodkowe: a) $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_\infty = \sup |f|$; b) ℓ_∞, $\|\cdot\| = \sup_n |a_n|$.

Lemat 2. Załóżmy, że mamy przestrzeń metryczną (X, d) a w niej rodzinę zbiorów $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ gdzie $|\Lambda| > \aleph_0$ oraz wiemy, że dla każdego $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zachodzi $d(C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}) \geq r > 0$. Wówczas, (X, d) nie jest ośrodkowa.

Dowód. Niech Q będzie ośrodkiem w (X, d). Wówczas $\forall_{p \in C_\lambda} \exists_{q \in Q} \colon d(p, q) < r/3$. Ta nierówność wynika z własności, że zawsze znajdziemy coś dowolnie blisko z ośrodka. W każdej kuli musi być coś z ośrodka, a te kule są rozłączne gdyż $d(C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}) \geq r$, zatem ten ośrodek musiałby liczyć przynajmniej tyle co Λ. Czyli nie byłby przeliczalny. ■

a) Weźmy rodzinę podzbiorów liczb naturalnych $\Lambda = 2^{\mathbb{N}}$ (zbiór nieprzeliczalny), które posłużą jednocześnie za zbiór „specjalnych" argumentów funkcji jak i numerację powstającej rodziny nieprzeliczalnie wielu funkcji. Rodzinę $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$ konstruujemy następująco:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & x \in \lambda \\ \substack{\text{spadek liniowy do 0} \\ \text{w przedziale } (x-0.5,\, x+0.5)} & x \in \lambda \\ 0 & \substack{\text{w innym} \\ \text{przypadku}} \end{cases}$$



Rysunek 1: Przykładowo: niebieski szpikulec to f_{λ_1} a czerwony to f_{λ_2}, gdzie $\lambda_1 = \{4, 8\}$ i $\lambda_2 = \{6\}$.

Obrazkowo, chodzi naturalnie o takie rozłączne szpikulce, jak na Rys. 1. Metryka indukowana przez normę supremum to metryka supremum $d_\infty(f, g) = \sup|f - g|$. W naszym przypadku $d_\infty(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{=} 1$. W związku z tym $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$ nie jest ośrodkowa.

b) W przypadku przestrzeni ciągowej ℓ_∞ ciągów ograniczonych, możemy znów rozważyć rodzinę $\Lambda = 2^{\mathbb{N}}$ gdzie $\lambda \in \Lambda$ jest pewnym podzbiorem liczb naturalnych. Skonstruujmy rodzinę nieprzeliczalnie wielu ciągów $(a_n)_{\lambda \in \Lambda} \subset \ell_\infty$ takich, że

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \in \lambda \\ 0 & n \notin \lambda \end{cases}$$

Wówczas, dla wszystkich $\lambda_1 \neq \lambda_2$ mamy $\left\|(a_n)_{\lambda_1} - (a_n)_{\lambda_2}\right\| = 1$. To daje brak ośrodkowości.

Zadanie domowe 3 Rozważmy przestrzeń ciągową ℓ_p, dla $1 < p < \infty$. Niech $L\colon \ell_p \to \mathbb{K}$ będzie liniowe, ciągłe (!). Wykazać, że istnieje taki ciąg (b_n), że $L(a_n) = \sum b_n a_n$ oraz $\sum |b_n|^q < \infty$, gdzie $1/p + 1/q = 1$.

Zaczynamy od konstrukcji kandydata na (b_i). Chcemy de facto, żeby ten ciąg był określony przez działanie operatora na „bazie" znanej ze skończonego wymiaru, tj. $b_i = L(e_i)$ gdzie (e_i) to taki ciąg, który na i-tym miejscu ma 1 a wszędzie indziej 0. Niech $a^{(n)} = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$. Wprowadzimy też szybkie oznaczenie $a = (a_n)$.

$$\left\|a - a^{(n)}\right\|_p = \left(\substack{\text{ogon zbieżnego} \\ \text{szeregu}}\right) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Bierzemy teraz następującą sumę:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i L(e_i) = L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)$$
$$= La^{(n)} \xrightarrow[\text{ciągłość } L]{n\to\infty} La$$

Czyli,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = La$$

Teraz czy to (b_n) jest w ogóle z ℓ_q, tak jak miało być. Równoważnie musimy pokazać, że $\left\|(b_n)\right\|_q < \infty$ (pokażemy nawet coś silniejszego). Weźmy analogicznie jak poprzednio, ciąg $b^{(n)}$ będący obcięciem ciągu b do pierwszych n wyrazów. Naturalnie $b^{(n)} \in \ell_p$ jako ciąg skończony. Zdefiniujmy ciąg $c^{(n)}$ jako potęgę obcięcia ciągu b z pewnym twistem (zachowaniem znaku):

$$c_j^{(n)} = \begin{cases} \left|b_j\right|^{q-1} \operatorname{sgn} b_j & j \le n \\ 0 & j > n \end{cases}$$

Z liniowości wynika, że

$$Lc^{(n)} = \sum^{n} \left|b_j\right|^{q-1} b_j \operatorname{sgn} b_j = \sum^{n} \left|b_j\right|^{q-1} \left|b_j\right| = \left\|b^{(n)}\right\|_q^q$$

Na boku policzmy natomiast p-tą normę z $c^{(n)}$.

$$\left\|c^{(n)}\right\|_p = \left(\sum^{n} \left|b_j\right|^{p(q-1)}\right)^{1/p} \overset{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{=} \left(\sum^{n} \left|b_j\right|^{q}\right)^{1/p} = \left\|b^{(n)}\right\|_q^{q/p}$$

Jednym z równoważnych warunków ciągłości operatora liniowego jest $\|Lv\| \le \|L\|\|v\|$. Możemy napisać, że

$$\left|Lc^{(n)}\right| \le \|L\|\left\|c^{(n)}\right\|_p$$

zatem,

$$\left\|b^{(n)}\right\|_q^q \le \|L\|\left\|b^{(n)}\right\|_q^{q/p} = \|L\|\left\|b^{(n)}\right\|_q^{q-1}$$

Stąd,

$$\|L\| \ge \left\|b^{(n)}\right\|_q$$

Zauważmy jednak, że $\|L\|$ nie zależy od n, zatem przechodząc granicznie dostajemy $b \in \ell_q$ oraz $\|b\|_q \le \|L\| < \infty$.

Pokażemy jeszcze jednak, że w rzeczywistości zachodzi równość $\|L\| = \|b\|_q$. Pokazując to wykażemy, że $\ell_p^* \cong \ell_q$. Sprawa jest zasadniczo prosta. Chcemy dostać oszacowanie z drugiej strony. Z nierówności Holdera (tutaj trywialnej, bo p, q są od razu sprzężone),

$$|La| \overset{H}{\leq} \|a\|_p \|b\|_q$$

dzieląc przez normę a otrzymujemy de facto ograniczenie górne na normę operatorową,

$$\|L\| \leq \|b\|_q$$

Dostaliśmy więc oszacowania z obu stron i wnioskujemy, że $\|L\| = \|b\|_q$. Aby podsumować, ℓ_p^* jest izometryczna do ℓ_q dla sprzężonych (p, q) – dla dowolnego funkcjonału liniowego ciągłego $L\colon \ell_p \to \mathbb{K}$, tj. $L \in \ell_p^*$ znaleźliśmy odpowiadający mu $b \in \ell_q$.

Ćwiczenia 4

Zadanie domowe 5 Niech zbiór A będzie mierzalny, ograniczony. Wykazać, że 29 paź 2021

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos nx \, \mathrm{d}l_1 = \lim_{n\to\infty} \int_A \sin nx \, \mathrm{d}l_1 = 0$$

Krok pierwszy to zrobić to na przedziale $[a, b]$. Możemy wziąć taką część przedziału (wnętrza). Na przedziałach, jeśli istnieje całka Riemanna, to Lebesgue'a też i są sobie równe, więc można liczyć całkowicie normalnie.

$$\left| \int_{[a,b]} \sin nx \, \mathrm{d}x \right| = \left| -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_a^b \right| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Analogicznie dla całki z $\cos nx$. Dla odcinków teza się zgadza. Teraz trzeba przejść do zbioru mierzalnego ograniczonego. Jedna z opcji polega na użyciu znanego lematu, który sobie szybko udowodnimy.

Lemat 3. Niech A będzie zbiorem mierzalnym, $\mu(A) < \infty$. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina rozłącznych otwartych odcinków $(I_n)_{n=1}^{k_\varepsilon}$ taka, że

$$\mu\left(A \triangle \bigcup_{n=1}^{k_\varepsilon} I_n \right) < \varepsilon$$

gdzie $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów. Oznaczymy jeszcze $O = \bigcup I_n$.

Dowód. Wiadomo, że dla każdego zbioru mierzalnego A istnieje takie otwarte pokrycie $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, w którym się zawiera A, że $\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\big) \leq \mu(A) + \varepsilon$. W takim razie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(I_n) < \infty$, czyli możemy wybrać takie k, że $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon$. Naszą kolekcją będzie więc $(I_n)_{n=1}^{k}$. Teraz,

$$\mu(A \triangle O) = \mu\big((A \setminus O) \cup (O \setminus A)\big)$$

Te zbiory składające się na sumę symetryczną są rozłączne.

$$= \mu(A \setminus O) + \mu(O \setminus A)$$

Teraz będziemy używać subaddytywności miary.

$$\begin{aligned}
&\leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \setminus O\right) + \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \setminus A\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) - \mu(A) \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

■

Wówczas,

$$\left|\int_A \sin nx \,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_O \sin nx \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A\setminus O} \sin nx \,\mathrm{d}x\right|$$

W drugiej całce szacujemy jednostajnie moduł sinusa przez jedynkę. Wówczas $\mu(A \setminus O) < \varepsilon$, jako że $\mu(A \setminus O) + \mu(O \setminus A) < \varepsilon$. Pierwsza całka to suma po odcinkach, pokazaliśmy że zanika.

$$\leq \left|\int_O \sin nx \,\mathrm{d}x\right| + \varepsilon \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Jest jeszcze inna linia argumentu, korzystająca bardziej wprost z definicji całki po zbiorze mierzalnym. Może być ona przydatna w innych sytuacjach. Weźmy $A \subset [0, 2\pi]$. Wówczas możemy zapisać:

$$\int_A \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_{[0,2\pi]} \chi_A \sin nx \,\mathrm{d}x$$

Przypomnijmy sobie lemat Urysohna mówiący, że dla każdej pary niepustych, domkniętych i rozłącznych zbiorów D_1, D_2 w przestrzeni metrycznej X, istnieje funkcja ciągła $f\colon X \to [0, 1]$ przyjmująca wartości na tych zbiorach zbiorach: $f(D_1) = 0$ i $f(D_2) = 1$. Zasadniczo nawet łatwo napisać wzór tej funkcji,

$$f(x) = \frac{d(x, D_1)}{d(x, D_1) + d(x, D_2)}$$

W naszym przypadku A nie spełnia koniecznie założeń lematu jednak wiemy, że zbiór mierzalny zawsze możemy przybliżyć domkniętym zbiorem $D \subset A$ o mierze różniącej się epsilonowo od miary A, tj. $\mu(A \setminus D) < \varepsilon$. Wówczas na bazie lematu Urysohna możemy skonstruować funkcję ciągłą f, która spełnia $f(D) = 1$. Wtedy miara zbioru na którym f różni się od χ_A jest epsilonowo mała, tj. $\int |f - \chi_A| < \varepsilon$. W takim razie,

$$\left|\int_{[0,2\pi]} \chi_A \sin nx \,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{[0,2\pi]} f \sin nx \,\mathrm{d}x\right| + \int_{[0,2\pi]} |f - \chi_A||\sin nx| \,\mathrm{d}x$$

$\sin nx$ można jednostajnie przeszacować przez 1, zostając z epsilonem z drugiej całki.

$$\leq \left| \int_{[0,2\pi]} f \sin nx \right| + \varepsilon$$

W ten sposób zostajemy z taką przyjemną całką, która podpada pod lemat Riemanna-Lebesgue'a o transformacie Fouriera, który mówi, że transformata Fouriera funkcji $f \in L^1$ całkowalnej w sensie Lebesgue'a zanika w nieskończoności, tj.

$$\int f(x) e^{-izx} \, \mathrm{d}x \xrightarrow{z \to \infty} 0$$

W szczególności oznacza to, że

$$\int f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

To załatwia sprawę.

Definicja 2 (Iloczyn skalarny)**.** Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Iloczyn skalarny na V to odwzorowanie

$$(\cdot, \cdot) \colon V \times V \to \mathbb{K}$$

takie, że dla dowolnych $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (v, w) &= \overline{(w, v)} \\ (v, \lambda w) &= \lambda (v, w) \\ (v_1 + v_2, w) &= (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, v) = 0 &\iff v = 0 \end{aligned}$$

Zatem jest to odwzorowanie liniowe w drugim argumencie i antyliniowe w pierwszym. Nad ciałem $\mathbb{R}$ redukuje się do odwzorowania dwuliniowego symetrycznego.

Zadanie domowe 7 Iloczyn skalarny implikuje normę $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.
a) Pokazać, że jest to norma
b) Weźmy przestrzeń unormowaną nad ciałem $\mathbb{R}$. Definiujemy odwzorowanie $(v, w) = \frac{1}{4}\Big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \Big)$. Wykazać równoważność: $(\cdot, \cdot)$ jest iloczynem skalarnym $\iff$ $2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$ (tożsamość równoległoboku).

a) Trzeba sprawdzić 3 warunki.

$$\|v\| = 0 \iff (v, v) = 0 \overset{\text{def.}}{\iff} v = 0$$

Drugi warunek to wyciąganie stałej,

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|^2 &= (\lambda v, \lambda v) = \lambda \overline{\lambda} (v, v) = |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

Jak zawsze, najciekawsza jest nierówność trójkąta. Tutaj potrzebujemy nierówność Schwarza. Najprościej ją udowodnić w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\| v - \frac{\|v\|^2}{(v,w)} w \right\|^2 \\
&= \|v\|^2 + \frac{\|v\|^4 \|w\|^2}{\big|(v,w)\big|^2} - \frac{\|v\|^2}{(v,w)}(v,w) - \frac{\|v\|^2}{(v,w)}(w,v) \\
&= \frac{\|v\|^2}{\big|(v,w)\big|^2}\Big(\|v\|^2\|w\|^2 - (v,w)(w,v)\Big)
\end{aligned}
$$

Po skróceniu dodatniego wyrazu,

$$
0 \leq \|v\|^2\|w\|^2 - \big|(v,w)\big|^2
$$

Finalnie otrzymujemy nierówność Schwarza:

$$
\big|(v,w)\big| \leq \|v\|\|w\|
$$

Teraz dowodzimy nierówność trójkąta tej normy,

$$
\begin{aligned}
\|v+w\|^2 = (v+w, v+w) &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\operatorname{Re}(v,w) \\
&\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\big|(v,w)\big| \\
&\overset{S}{\leq} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| \\
&= \big(\|v\| + \|w\|\big)^2
\end{aligned}
$$

Zatem,

$$
\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|
$$

Stąd $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$ jest normą.

b) Dowód w prawą stronę jest prosty. Wiemy, że $(\cdot,\cdot)$ jest iloczynem skalarnym, widzimy również, że zgodnie z podanym wzorem, $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$. Nad $\mathbb{R}$ iloczyn skalarny jest symetryczny, zatem

$$
\begin{aligned}
&\|v+w\|^2 = (v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v,w) \\
&\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(v,w)
\end{aligned}
$$

Stąd,

$$
2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2
$$

czyli tożsamość równoległoboku jest spełniona.

Dowód w drugą stronę wymaga kilku kroków. Musimy wykazać po kolei własności odwzorowania $(\cdot,\cdot)$, które ma być iloczynem skalarnym. Ma to być odwzorowanie symetryczne i dwuliniowe (z symetrii liniowość w jednym argumencie wystarczy). Symetria $(v, w) = (w, v)$ jest oczywista z formuły definiującej $(\cdot, \cdot)$. Oczywiste jest również $(v, v) = 0 \iff v = 0$. Dalej wykazujemy addytywność $(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$. Zauważmy, że po prawej stornie będą się pojawiać wyrażenia typu $\|v_i \pm w\|^2$. Rozważmy więc tożsamość równoległoboku dla $x = v_1 + w$ i $y = v_2$.

$$2\|v_1 + w\|^2 + 2\|v_2\|^2 = \|v_1 + v_2 + w\|^2 + \|v_1 - v_2 + w\|^2$$

Stąd wyłapujemy wyraz pojawiający się po lewej stronie dowodzonej własności.

$$\|v_1 + v_2 + w\|^2 = 2\|v_1 + w\|^2 + 2\|v_2\|^2 - \|v_1 - v_2 + w\|^2$$

Zamieniając miejscami v_1 z v_2 nic się nie zmienia bo po lewej stronie istotna jest tylko ich suma. Stąd,

$$= 2\|v_2 + w\|^2 + 2\|v_1\|^2 - \|v_2 - v_1 + w\|^2$$

Po lewej stronie dowodzonej własności pojawia się również analogiczny człon z $-w$. Stąd,

$$\begin{aligned}\|v_1 + v_2 - w\|^2 &= 2\|v_1 - w\|^2 + 2\|v_2\|^2 - \|v_2 - v_1 + w\|^2 \\ &= 2\|v_2 - w\|^2 + 2\|v_1\|^2 - \|v_1 - v_2 + w\|^2\end{aligned}$$

Dodajemy stronami pary obu otrzymanych tożsamości,

$$\begin{aligned}2\|v_1 + v_2 + w\|^2 &= 2\Big(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\Big) + 2\|v_1 + w\|^2 + 2\|v_2 + w\|^2 - (*) \\ 2\|v_1 + v_2 - w\|^2 &= 2\Big(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\Big) + 2\|v_1 - w\|^2 + 2\|v_2 - w\|^2 - (*)\end{aligned}$$

Po podstawieniu do definicji $(\cdot, \cdot)$ otrzymamy

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$$

Mamy więc addytywność. Do pełnej liniowości brakuje własności $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$. Z addytywności jest to oczywiste (zasadniczo czysto indukcyjnie) dla $\lambda \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że własność ta dla $\lambda = -1$ jest również spełniona w trywialny sposób:

$$\begin{aligned}4(v, -w) &= \|v - w\|^2 - \|v + w\|^2 = \\ &= -\Big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\Big) = -4(v, w)\end{aligned}$$

Stąd, tożsamość jest spełniona dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{Z}$. Następnym krokiem jest przedłużyć to na $\mathbb{Q}$. Niech $\lambda = a/b$ gdzie $a, b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ oraz $w' = w/b \in V$. Wówczas,

$$\begin{aligned}b(v, \lambda w) &= b(v, aw') = a(v, bw') = a(v, w) \\ (v, \lambda w) &= \frac{a}{b}(v, w) = \lambda(v, w)\end{aligned}$$

Mamy już więc tę własność dla $\lambda \in \mathbb{Q}$. Zauważmy, że $\mathbb{R}_{\neq 0} \ni \lambda \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{\lambda}(v, \lambda w)$ jest ciągła dla danych $v, w \in V$. Pokazaliśmy, że $f(\lambda) = (v, w)$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$. Ale $\mathbb{Q}$ jest gęste $\mathbb{R}$, więc z ciągłości rozciąga się na $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

Tak przy okazji zauważmy, że zdefiniowanie tego iloczynu skalarnego przez sumę-/różnicę (itp) norm powoduje automatycznie, że iloczyn skalarny jest ciągły na V. Na drugich ćwiczeniach pokazywaliśmy bowiem, że norma $\|\cdot\|$ traktowana jako odwzorowanie $(V, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ jest ciągła (proste nierówności trójkąta).

Niech V będzie przestrzenią nad $\mathbb{R}$ (nad $\mathbb{C}$ pewnie też) gdzie $\dim V < \infty$. Weźmy podprzestrzeń $W \subset V$. Istnieje U domknięta (bo każda podprzestrzeń jest domknięta) taka, że $V = W \oplus U$. Niech na V będzie iloczyn skalarny, gdzie V jest Banacha w normie od iloczynu (takie coś nazywa się przestrzenią Hilberta). Niech $U = W^\perp = \bigcap_{w \in W} \{(\cdot, w) = 0\}$.

Przykład patologii w nieskończonym wymiarze Istnieje $W \subset V$ domknięta, gdzie $(V, \|\cdot\|)$ jest Bancha, taka, że nie istnieje domknięta $U \subset V$ dopełniająca V, czyli taka, że $V = W \oplus U$.

Czyli nie działa coś, co w przestrzeni skończonego wymiaru jest oczywiste. Dlatego przestrzenie Hilberta są jakby bliższe temu przypadkowi skończenie wymiarowemu, niż przestrzenie Banacha których normy nie pochodzą od iloczynu.

$$V = \ell_\infty, \ \big\|(a_n)\big\| = \sup |a_n|$$
$$V \supset W = C_0 = \{(a_n)\colon \lim a_n = 0\}$$

Sprawdźmy, że $C_0 \subset \ell_\infty$ jest domknięta. Muszę wiedzieć, że jeśli wezmę ciąg punktów w C_0, jego granica też musi leżeć w C_0. W normie supremum ta zbieżność jest jasna. Rysujemy dwa pasy o szerokości ε. Podobny argument dlaczego jednostajna granica funkcji ciągłej jest ciągła.

Załóżmy, że $\ell_\infty = C_0 \oplus U$ gdzie U jest domknięta. Przestrzenie są domknięte, więc istnieje ciągły rzut z ℓ_∞ na U. Pomysł. Wyrżnimy nieprzeliczalnie dużą rodzine podzbirów ℓ_∞ : $\chi_\lambda \in \ell_\infty$ gdzie $\lambda \in \Lambda$. χ_λ jest funkcją charakterystyczną podzbioru $\mathbb{N}$. Żadna z tych funkcji charakterystycznych nie należy do C_0 dla żadnego λ.

Ponadto, jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to $\left|\chi_{\lambda_1}^{-1}(1) \cap \chi_{\lambda_2}^{-1}(1)\right| < \infty$. Ponadto (zakładamy) $|\Lambda| > \aleph_0$. Konstrukcja tej rodziny jest taka:

$$\chi_\lambda \colon \mathbb{N} \to (0,1) \cap \mathbb{Q}$$

identyfikujemy jednoznacznie. Natomiast $\Lambda = (0,1) \setminus \mathbb{Q}$. Wówczas $\chi_\lambda^{-1}(1)$ to ciąg wymierny zbiegający do λ. Więc przecięcie takich dwóch zbiorów może być tylko skończone.

Wiemy już więc, że istnieje więc taki ciąg dużej mocy. Weźmy odwzorowanie L liniowe ciągłe na hipotetycznej przestrzeni dopełniającej U, tj. $L \in B(U, \mathbb{R})$. Ustalmy $\varepsilon_0 > 0$. Przyjrzyjmy się zbiorowi $D_{\varepsilon_0} = \{\lambda \in \Lambda\colon \big|L(\chi_\lambda)\big| \geq \varepsilon_0\}$. Twierdzimy, że moc takiego zbioru jest skończona. Dlaczego?

Wybierzmy skończoną rodzinę z Λ: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in D_{\varepsilon_0}$ (parami różne). Obserwacja: sumujemy następujące wielkości:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\big(L(\chi_{\lambda_j})\big) \cdot \chi_{\lambda_j}$$

Poza skończonym zbiorem, wszystkie nośniki są rozłączne (!). W takim razie taki zbiór skończony (ciąg) nalezy na pewno do C_0, bo potem jest tożsamościowo zerowy.

Od pewnego miejsca będą znaki i jedynki, zatem nie będzie dużych liczb. W ℓ_∞/C_0 (modulo C_0) napiszemy ten wektor v o normie 1.
Z drugiej strony te znaki są tak dobrane, że

$$L(v) \geq n\varepsilon_0$$

ale to wektor o normie 1, zatem $n \leq \|L\|/\varepsilon_0$ (ciągłość). Zatem

$$\Big|\lambda\colon \big|L(\chi_\lambda)\big| > 0\Big| \leq \aleph_0$$

dla każdego odwzorowania liniowego ciągłego.
jeszcze do tego wrócimy.

Zadanie domowe 4 Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach nieujemnych $a_n \geq 0$. Pokaż, że jeśli dla każdego ciągu $(b_n) \in \ell_2$ o wyrazach nieujemnych zachodzi $\sum a_n b_n < \infty$, to $\sum (a_n)^2 < \infty$ (tj. $(a_n) \in \ell_2$). Ponadto, uogólnij na przypadek $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Zadanie domowe 6 Niech (n_k) to ściśle rosnący ciąg gdzie $n_k \in \mathbb{N}$. Definiujemy zbiór $A = \{x\colon \sin(n_k x) \text{ jest zbieżny}\}$. Pokazać, że $l_1(A) = 0$. Warto skorzystać z zadania 5.

Ćwiczenia 5

Zadanie 1 Mając rozkład przestrzeni $V = V_1 \oplus V_2$ zupełnej, z normą $\|\cdot\|$ na podprzestrzenie V_1, V_2 domknięte, wykazać że rzut $\mathrm{pr}\colon V \to V_1$ dany wzorem $(v_1, v_2) \mapsto v_1$ jest ciągły. 05 lis 2021

V_1, V_2 oczywiście dziedziczą normę z V (norma obcięta do podprzestrzeni liniowej jest normą). Ciągłość odwzorowania liniowego jest równoważna ciągłości w zerze. Weźmy ciąg punktów $v_n \in V$. Ciąg rozkłada się na składowe (v_{n1}, v_{n2}). Zakładając $v_n \to 0$, chcemy pokazać, że implikuje to $v_{n1} \to 0$.

Na $V_1 \oplus V_2$ ustalmy nową normę $\|\cdot\|^\sim$ taką, że

$$\big\|(v_1, v_2)\big\|^\sim = \|v_1\| + \|v_2\|$$

Wówczas można określić operator

$$\begin{aligned} T:\ \big(V_1 \oplus V_2, \|\cdot\|^\sim\big) &\to \big(V, \|\cdot\|\big) \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Wówczas,

$$\big\|T(v_1, v_2)\big\| = \|v_1 + v_2\| \overset{\triangle}{\leq} \|v_1\| + \|v_2\| \overset{\text{def}}{=} \big\|(v_1, v_2)\big\|^\sim$$

Stąd wnioskujemy, że odwzorowanie T jest ciągłe. Ponadto, jest również różnowartościowe, gdyż z definicji sumy prostej, $\forall\, v \in V\ \exists!\,(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2\colon v = v_1 + v_2$ (T jest de facto mądrze wyrażoną identycznością między tymi przestrzeniami). W takim razie, korzystając z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym (które wymaga zupełności), T^{-1} jest ciągłe.

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 \\ T^{-1}v &= (v_1, v_2) \end{aligned}$$

Ciągłość oznacza, że istnieje taka stała $c > 0$, dla której $\big\|(v_1, v_2)\big\|^{\sim} \leq c\|v\|$. Weźmy ciąg $V \ni v_n = v_{n1} + v_{n2}$.

$$\|v_{n1}\| \overset{\triangle}{\leq} \|v_{n1}\| + \|v_{n2}\| \overset{\text{def}}{=} \big\|(v_{n1}, v_{n2})\big\|^{\sim} \overset{\text{ciągłość}}{\leq} c\|v_n\|$$

Oznacza to, że jeśli $v_n \to 0$, to $v_{n_1} \to 0$. Pokazaliśmy więc, że rzut jest ciągły, niezbędna była jednak zupełność przestrzeni.

Ćwiczenia 6

19 lis 2021 **Zadanie domowe 1** Niech $D = \{a_n \colon \sum |a_n| \leq 1\} \subset \ell_2$. Teza: D jest domknięty i ma puste wnętrze.

Zadanie domowe 2 Niech $1 < p < q < \infty$. Mamy oczywiste liniowe odwzorowanie włożenia $\mathrm{Id}_{p,q} \colon \ell_p \to \ell_q$. Pokazać, że to włożenie jest ciągłe i obliczyć jego normę.

Niech $(a_n) \in \ell_p$. Rozważmy unormowany ciąg $(b_n) = (a_n)/\big\|(a_n)\big\|_p$. Wynika stąd, że $\forall\, n \in \mathbb{N}\, |b_n| \leq 1$. W takim razie,

$$\begin{aligned} &|b_n|^q \leq |b_n|^p \\ &|a_n|^q \leq |a_n|^p \big\|(a_n)\big\|_p^{q-p} < \infty \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $(a_n) \in \ell_p \implies (a_n) \in \ell_q$, tj. $\ell_p \subset \ell_q$ jeśli $p < q$ (i to włożenie w ogóle ma sens). W takim razie, po zsumowaniu

$$\begin{aligned} &\big\|(a_n)\big\|_q^q \leq \big\|(a_n)\big\|_p^p \big\|(a_n)\big\|_p^{q-p} = \big\|(a_n)\big\|_p^q \\ &\big\|(a_n)\big\|_q \leq \big\|(a_n)\big\|_p \end{aligned}$$

Teraz pokażemy ciągłość, konstruując jednocześnie domysł na normę operatora.

$$\big\|\mathrm{Id}_{p,q}\big\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{(a_n) \in \ell_p} \frac{\big\|\mathrm{Id}_{p,q}(a_n)\big\|_q}{\big\|(a_n)\big\|_p} = \sup_{(a_n) \in \ell_p} \frac{\big\|(a_n)\big\|_q}{\big\|(a_n)\big\|_p} \leq 1$$

To zapewnia już ciągłość (w zasadzie nawet poprzednia nierówność ją już zapewniała). Aby pokazać, że $\big\|\mathrm{Id}_{p,q}\big\| = 1$, wystarczy wskazać ciąg (c_n) wysycający tę nierówność. Zauważmy, że w naturalny sposób działa $(c_n) = (1, 0, 0, \ldots)$.

Uwaga 3. Pokazaliśmy, że $\ell_p \subset \ell_q$ dla $p < q$. Jak to wygląda w przestrzeniach $L_p\big([0,1]\big)$? Czy włożenie $\mathrm{Id}_{p,1} \colon L_p\big([0,1]\big) \to L_1\big([0,1]\big)$ ma sens? $[0,1]$ ma skończoną miarę, czyli jeśli $f \in L_1$, to oznacza, że osobliwości nie są szczególnie patologiczne. Intuicyjnie, warunek na bycie w L_p jest silniejszy, bo jeśli $f \in L_p$ ma osobliwości, to f^p wybucha nawet szybciej. Spodziewamy się więc sytuacji odwrotnej niż w przestrzeniach ciągowych, mianowicie $L_p \subset L_1$.

Użyjmy nierówności Holdera,

$$\int 1 \cdot |f| \overset{H}{\leq} \|1\|_q \|f\|_p = \|f\|_p$$
$$\left\|\mathrm{Id}_{p,1} f\right\|_1 \leq \|f\|_p$$

Pokazuje to, że $L_p \subset L_1$. Ponadto $\left\|\mathrm{Id}_{p,1}\right\| = 1$, gdyż nierówność jest wysycona dla $f = 1$.

Podobnie, używając nierówności Holdera można pokazać, że dla skończonej przestrzeni mierzalnej (X, μ) (przykładem jest oczywiście $\big([0,1], \mathrm{d}l_1\big)$), zachodzi $L_q(X) \subset L_p(X)$ dla $1 \leq p < q \leq \infty$.

Zadanie domowe 3 $T \colon \ell_1 \to C_0 \subset \ell_\infty$ (czyli topologia zadawana przez obcięcie $\|\cdot\|_\infty$), gdzie $C_0 = \{(a_n) \colon \lim a_n = 0\}$. Niech $(Ta)_n = \sum_{k=n}^\infty a_k$ (bierzemy ogon szeregu). Zapis $(Ta)_n$ oznacza n-ty wyraz ciągu otrzymanego z $Ta \in C_0$. Pokazać, że T ciągłe i policzyć $\|T\|$.

Zapiszmy normę występującą w definicji normy operatora. Dla dowolnego $a \in \ell_1$,

$$\begin{aligned} \|Ta\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^\infty a_k \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=n}^\infty |a_k| \\ &= \sum_{k=1}^\infty |a_k| = \|a\|_1 \end{aligned}$$

Stąd,

$$\|T\| = \sup_{a \in \ell_1} \frac{\|Ta\|_\infty}{\|a\|_1} \leq 1$$

Operator T jest więc ciągły. Po wstawieniu ciągu $c = (1, 0, 0, \ldots)$ przekonujemy się, że $\|c\|_1 = 1$ oraz $\|Tc\|_\infty = 1$, zatem $\|T\| = 1$.

Zadanie 4$-\varepsilon$ $T \colon L_p\big([0,1]\big) \to L_p\big([0,1]\big)$ zdefiniowane przez $(Tf)(x) = (x^2 + x)f(x)$. Pokazać ciągłość i policzyć normę.

Postępujemy standardowo, z zamysłem podobnym do zadania 6.

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= \int_0^1 (x^2 + x)^p |f|^p \leq 2^p \int_0^1 |f|^p = 2^p \|f\|_p^p \\ \|T\| &= \sup_{f \in L_p\left([0,1]\right)} \frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} \leq 2 \end{aligned}$$

Naturalnie domyślamy się, że $\|T\| = 2$. Trzeba wymyślić taki ciąg $f_n \subset L_p\big([0,1]\big)$, który wysyci tę nierówność. Posługujemy się tym samym trickiem co w zadaniu 6, tj. zauważamy, że $(x^2 + x)$ jest funkcją ściśle rosnącą na $[0, 1]$, najbardziej więc f jest skalowana na otoczeniu jedynki. Spróbujmy więc wziąć ciąg

$$\begin{aligned} f_n &= \chi_{\left[1-\frac{1}{n},1\right]} \\ \|f_n\|_p^p &= \frac{1}{n} \\ \|Tf_n\|_p^p &= \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} (x^2+x)^p \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Szacujemy biorąc minimum na przedziale,

$$\geq \frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \frac{\|Tf_n\|_p^p}{\|f_n\|_p^p} &\geq \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^p \\ \|T\| &\geq \sup_{f_n \subset L_p\left([0,1]\right)} \frac{\|Tf_n\|_p}{\|f_n\|_p} \\ &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = 2 \end{aligned}$$

Wobec tego, $\|T\| = 2$.

Zadanie domowe 4 $T\colon L_p\big([0,1]\big) \to L_1\big([0,1]\big)$ zdefiniowane przez $(Tf)(x) = (x^2 + x)f(x)$. Pokazać ciągłość i policzyć normę.

Standardowo,

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 \left|x^2+x\right||f| \leq \int_0^1 \leq 2\int_0^1 |f| \overset{H}{\leq} 2\|f\|_p$$

To już daje ciągłość T. Spodziewamy się również, że $\|T\| = 2$, jednak nie jest to aż tak proste jak poprzednio, bo tym razem nie jesteśmy na tych samych przestrzeniach. Gdybyśmy spróbowali powtórzyć to samo z ciągiem $f_n = \chi_{\left[1-\frac{1}{n},1\right]}$, otrzymalibyśmy

$$\begin{aligned} \|Tf_n\|_1 &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \|f_n\|_p &= \frac{1}{n^{1/p}} \\ \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_p} &= \frac{\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p}} \to 0 \end{aligned}$$

Z resztą supremum tego ciągu też jest mniejsze niż 2. Możemy jednak użyć nierówności Holdera w celu jak najlepszego oszacowania normy,

$$\|Tf\|_1 \overset{H}{\leq} \left\|x^2+x\right\|_q \|f\|_p$$

dla (p,q) sprzężonych. Znamy warunek na to, kiedy nierówność Holdera przechodzi w równość. Otóż $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q \iff |f|^p = \alpha |g|^q$. W naszym przypadku są to funkcje postaci

$$f_\alpha(x) = \alpha\big(x^2+x\big)^{\frac{q}{p}} = \alpha \sqrt[p-1]{x^2+x} \in L_p\big([0,1]\big)$$

Weźmy $f = \left|x^2+x\right|^{q-1}$. Jest to funkcja z naszej przestrzeni, wysycająca nierówność Holdera. Wobec tego,

$$\|T\| = \left\|x^2+x\right\|_q$$

Zadanie domowe 5 $L_a\colon C\big([0,1]\big) \to \mathbb{R}$ gdzie

$$L_a f = +\int_0^a f - \int_a^1 f$$

Pokazać, że L_a jest ciągłe i policzyć normę.

Przyjmujemy oczywiście $\mathbb{R}$ z normą $|\cdot|$. Wówczas,

$$|L_a f| = \left|\int_0^a f - \int_a^1 f\right| \le \int_0^1 |f| + \int_a^1 |f|$$
$$\le \int_0^1 |f| \le \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x)\big| = \|f\|_\infty$$

Stąd,

$$\|L_a\| = \sup_{f\in C\left([0,1]\right)} \frac{|L_a f|}{\|f\|_\infty} \le 1$$

Widać więc, że L_a jest ciągły, chcielibyśmy natomiast przekonać się, że $\|L_a\| = 1$. Nie trudno się domyślić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,a) \\ -1 & x\in [a,1] \end{cases}$$

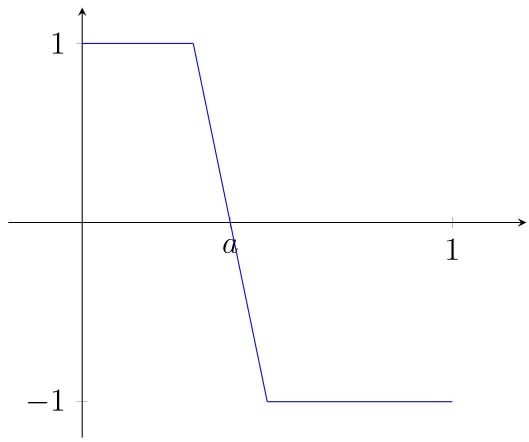
wysyciłaby nierówność, jednak ma ona taką wadę, że nie jest w $C\big([0,1]\big)$. Rozważmy więc ciąg funkcji ciągłych (Rys. 2)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x\in [0, a-1/n) \\ \text{liniowy spadek} & x \in [a-1/n, a+1/n) \\ -1 & x\in [a+1/n, 1] \end{cases}$$

Naturalnie, położenie $a\in(0,1)$ może być tak niefortunne, że przedziały użyte w definicji f_n nie będą miały sensu, natomiast zawsze będzie istnieć $N\in\mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n > N$, f_n będzie dobrze określona. f_n są tak skonstruowane, aby $\|f_n\|_\infty = 1$. Wówczas,

$$\|T\| = \sup_{f\in C\left([0,1]\right)} \frac{|L_a f|}{\|f\|_\infty} \ge \sup_{(f_n)\subset C\left([0,1]\right)} \frac{|L_a f_n|}{\|f_n\|_\infty}$$
$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

Otrzymaliśmy więc zestaw nierówności $\|T\| \le 1$ oraz $\|T\| \ge 1$, z których wynika, że $\|T\| = 1$.



Rysunek 2: $f_n(x)$

Zadanie domowe 6 Niech $T\colon L_p\big([0,1]\big) \to L_p\big([0,1]\big)$ gdzie $p \geq 1$, zadane przez $(Tf)(x) = f\big(\sqrt{x}\big)$. Pokazać ciągłość i policzyć normę.

Zaczynamy klasycznie,

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 \Big|f\big(\sqrt{x}\big)\Big|^p \,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}u = \big(2\sqrt{x}\big)^{-1}\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right| = \int_0^1 2\big|f(u)\big|^p u\,\mathrm{d}u$$

Szacujemy u przez jedynkę,

$$\leq 2\int_0^1 \big|f(u)\big|^p \,\mathrm{d}u = 2\|f\|_p^p$$

W takim razie,

$$\|T\| = \sup_{f\in L_p\left([0,1]\right)} \frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} \leq 2^{1/p}$$

To gwarantuje ciągłość T i daje podejrzenie, że jego normą jest $2^{1/p}$. Zauważmy, że u $(\sqrt{x})$ jest funkcją rosnącą, maksymalny wkład daje więc w otoczeniu jedynki, gdzie jest równa 1. Chcielibyśmy więc wprowadzić ciąg funkcji wysycających tę nierówność, będących indykatorami otoczenia jedynki, tj.

$$\begin{aligned} f_n &= \chi_{\left[1-\frac{1}{n},1\right]} \\ \|f_n\|_p &= \frac{1}{n} \\ \|Tf_n\|_p^p &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \\ \frac{\|Tf_n\|_p^p}{\|f_n\|_p} &= 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Stąd,

$$\|T\| \geq \sup_{(f_n)\subset L_p\left([0,1]\right)} \frac{\|Tf_n\|_p}{\|f_n\|_p} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{1/p} = 2^{1/p}$$

Skoro $\|T\| \geq 2^{1/p}$ i $\|T\| \leq 2^{1/p}$, to $\|T\| = 2^{1/p}$.

Ćwiczenia 7

Zadanie 1 Niech $1 < p < q < \infty$. Podać przykład przestrzeni z miarą $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, dla której: 26 lis 2021

(a) $L^p \subset L^q$

Pokazywaliśmy już wcześniej, że dla przestrzeni $\ell_p = \{(a_n)\colon \sum |a_n|^p < \infty\}$ zachodzi taka inkluzja. ℓ_p jest po prostu przestrzenią $L^p(\mathbb{N}, \mu_L)$ gdzie $\mu_L(A) = \#A$ jest miarą liczącą. Weźmy ciąg $(a_n) \in \ell_p$ taki, że $a_n \to 0$. Wówczas, dla dostatecznie dużych n,

$$|a_n|^q \overset{p<q}{\leq} |a_n|^p \quad \text{dla } |a_n| < 1$$
$$\sum |a_n|^q < +\infty$$

co oznacza, że $(a_n) \in \ell_q$, tj. $\ell_p \subset \ell_q$.

(b) $L^p \supset L^q$

Tutaj również przykład, który zdarzyło się nam analizować. Pokażemy, że $L^p\big([0,1]\big) \supset L^q\big([0,1]\big)$. Niech $f \in L^q$. Wobec tego,

$$\int_0^1 |f|^p = \int_0^1 1 \cdot |f|^p \overset{H}{\leq} \left(\int_0^1 |f|^q\right)^{1/r} \left(\int_0^1 1^s\right)^{1/s}$$

gdzie $r = q/p > 1$ oraz r jest sprzężone z s.

$$= \|f\|_q^{q/r} < \infty$$

Pokazaliśmy tym samym, że $f \in L^p$, co dowodzi zawierania $L^q \subset L^p$. Zauważmy, że ten rezultat otrzymaliśmy dzięki temu, że $[0,1]$ jest skończenie mierzalna, więc druga całka nie wybucha.

(c) Nie zachodzi żadna z powyższych relacji.

Postulujemy, że żadna z relacji zawierania nie zachodzi dla przestrzeni $L^p\big([0,\infty)\big)$ i $L^q\big([0,\infty)\big)$. Musimy podać przykłady dwóch funkcji, gdzie jedna należy do L^p, nie należy do L^q, oraz drugiej dla której zachodzi odwrotna własność. Pamiętamy, że funkcje typu $x^{-\alpha}$ miewają kłopoty z całkowaniem w zależności od wykładnika. Rozważmy więc parę funkcji:

$$f_{p,\infty} = x^{-1/p}\chi_{[1,\infty)}, \quad f_{p,0} = x^{-1/p}\chi_{[0,1]}$$

Wówczas,

$$\int_0^\infty \left|f_{p,\infty}\right|^p = \int_1^\infty x^{-1} = +\infty$$
$$\int_0^\infty \left|f_{p,\infty}\right|^q = \int_1^\infty x^{-q/p} < +\infty$$

gdyż $q/p > 1$. Wnioskujemy stąd, że $f_{p,\infty} \in L^q \setminus L^p$. Podobnie dla drugiej funkcji,

$$\int_0^\infty \left|f_{q,0}\right|^p = \int_0^1 x^{-p/q} < +\infty$$

gdyż $p/q < 1$.

$$\int_0^\infty \left|f_{q,0}\right|^q = \int_0^1 x^{-1} = +\infty$$

Stąd płynie wniosek, że $f_{q,0} \in L^p \setminus L^q$. To dowodzi, że między tymi przestrzeniami nie ma zawierania, bo $L^p \setminus L^q \neq \varnothing$ oraz $L^q \setminus L^p \neq \varnothing$.

Zadanie 2

(a) Niech $f \in L^1\big([0,\infty)\big)$ i $f \in L^p\big([0,\infty)\big)$. Czy $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Nie! Wyobraźmy sobie następującą funkcję:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\left[n, n+\frac{1}{n^2}\right]}(x)$$

Nie zanika ona w nieskończoności oraz

$$\int_0^\infty \big|f(x)\big| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\left[n,n+\frac{1}{n^2}\right]} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$
$$\int_0^\infty \big|f(x)\big|^p \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \big|f(x)\big| \,\mathrm{d}x < +\infty$$

Zatem $f \in L^p\big([0,\infty)\big)$ dla dowolnego $p \geq 1$.

(b) Niech $f \in L^1\big([0,\infty)\big)$ i $f \in C\big([0,\infty)\big)$. Czy implikuje to, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

Znów nie! Możemy uciąglić poprzednią konstrukcję poprzez zbiór trojkątnych wypustek o szerokości $1/n^2$ (Rys. 3). Niech

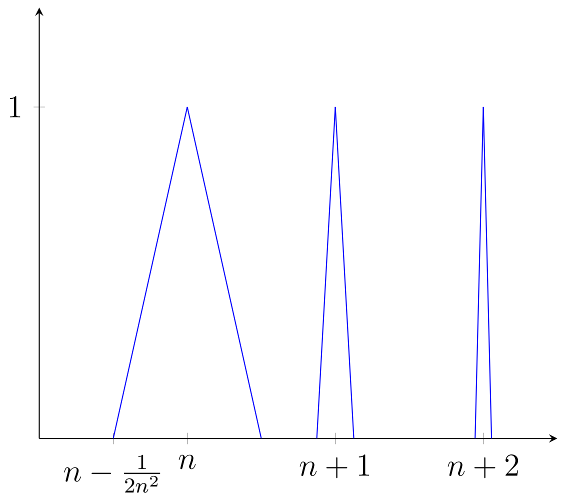
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(2n^2x + 1 - 2n^3\big)\chi_{\left[n-\frac{1}{2n^2},n\right]} + \big(-2n^2x + 1 + 2n^3\big)\chi_{\left[n,n+\frac{1}{2n^2}\right]}$$

Widać wówczas, że $f(x) \in C\big([0,\infty)\big)$ oraz

$$\int |f| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} < \infty$$

zatem $f \in L^1$. Jednocześnie f nie zanika w nieskończoności.

(c) Niech $f \in L^1\big([0,\infty)\big)$ i $f \in C\big([0,\infty)\big)$. Czy f musi być ograniczona w nieskończoności? Tj. czy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{[n,+\infty)} |f|\right) < +\infty$?



Rysunek 3: $f(x)$

Już poprzedni kontrprzykład pokazuje pośrednio, że nie musi tak być. Możemy bowiem rozważyć funkcję

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2n^4 x + n - 2n^5\right)\chi_{\left[n-\frac{1}{2n^3},n\right]} + \left(-2n^4 x + n + 2n^5\right)\chi_{\left[n,n+\frac{1}{2n^3}\right]}$$

różniącą się od poprzedniej tym, że tym razem podstawy trójkątów mają długości $1/n^3$, a wysokości trójkątów wynoszą n (zatem ciąg rozbieżny). Granicznie, supremum staje się nieograniczone i funkcja wybucha.

Do przemyślenia Wykazać, że $f \in C^1\big([0,\infty)\big)$ oraz $|f'|$ ograniczona implikuje, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Zadanie 3 Rozważmy przestrzeń z miarą $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ mierzalną oraz $f \neq 0$ p.w. na X. Definiujemy

$$\phi_f(p) = \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\,, \qquad A = \{p\colon \phi_f(p) < \infty\}$$

Dla uproszczenia pominiemy indeks f.

(a) Wykazać, że jeśli $p < r < q$ oraz $p, q \in A$, to $r \in A$ (z czego wyniknie, że A jest zbiorem spójnym).

(b) Wykazać, że $\log\phi$ jest funkcją wypukłą na A.

(c) Czy A może być zbiorem otwartym? Czy A może być zbiorem domkniętym?

(d) Jeżeli $p < r < q$ oraz $p, q \in A$ to $\|f\|_r \leq \max\Big(\|f\|_p, \|f\|_q\Big)$ (z czego wynika, że $L^p \cap L^q \subset L^r$).

(e) Niech $\mu(X) = 1$ oraz $\|f\|_p < \infty$ dla pewnego $p > 0$. Wykazać, że

$$\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p = \exp\left(\int_X \log|f| \,\mathrm{d}\mu\right)$$

(a) Zgodnie z definicją zbioru A, chcemy pokazać, że całka z $|f|^r$ po przestrzeni jest skończona. Rozbijmy X na dwa podzbiory $X = \{x\colon |f| \le 1\} \sqcup \{x\colon |f| > 1\} \stackrel{\text{def}}{=} X_0 \sqcup X_\infty$. Wówczas,

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^r &= \int_{X_0} |f|^r + \int_{X_\infty} |f|^r \\
\int_X |f|^r &\le \int_{X_0} |f|^p + \int_{X_\infty} |f|^q \\
&\le \int_X |f|^p + \int_X |f|^q \\
&= \phi_f(p) + \phi_f(q) < +\infty
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że $r \in A$. A jest więc spójnym podzbiorem $\mathbb{R}$ (bo wykładniki pochodzą z $\mathbb{R}$).

(b) Definiujemy $\log \phi\colon A \to \mathbb{R}$. Przypomnijmy sobie co oznaczała wypukłość funkcji g.

$$g\big(tp + (1-t)q\big) \le tg(p) + (1-t)g(q)$$

W naszym przypadku chcemy pokazać, że

$$\log \phi(r) = \log \phi\big(tp + (1-t)q\big) \le t \log \phi(p) + (1-t) \log \phi(q)$$

Zauważmy, że jest to równoważne nierówności

$$\phi(r) \le \phi(p)^t \phi(q)^{1-t}$$

Do udowodnienia tej nierówności użyjemy oczywiście nierówności Holdera.

$$\begin{aligned}
\phi\big(tp + (1-t)q\big) &= \int_X |f|^{tp+(1-t)q} = \int_X |f|^{tp} |f|^{(1-t)q} \\
&\stackrel{H}{\le} \left(\int_X |f|^p\right)^t \left(\int_X |f|^q\right)^{1-t}
\end{aligned}$$

Gdzie wykładnikami sprzężonymi były $1/t$ i $1/(1-t)$. Tak przy okazji, ich sprzężoność jest oczywista, gdyż jeśli $a + b = 1$, to $1/a + 1/b = 1$.

$$= \phi(p)^t \phi(q)^{1-t}$$

Wobec tego, $\log \phi$ jest funkcją wypukłą na A.

(c) Jeśli rozważymy przestrzeń z miarą Lebesgue'a $\big([1, +\infty), l_1\big)$ a w niej funkcję mierzalną $f = x^{-1}$, to dla niej $A = (1, +\infty)$ – pamiętamy z analizy dla jakich wykładników taka funkcja była całkowalna na $[1, \infty)$. A może być więc zbiorem otwartym. Korzystając z wybranej przestrzeni, chcielibyśmy jeszcze poprawić f tak, żeby dodać punkt $\{1\}$ do A (wówczas będzie domknięty bo $\mathbb{R} \setminus [1, \infty)$ jest otwarty). Rozważmy więc funkcję

$$f = \frac{1}{1+x} \frac{1}{\log^2(1+x)}$$

$$\int_1^\infty \big|f(x)\big|^1 \, \mathrm{d}x < +\infty \implies 1 \in A$$

Logarytm nie psuje również zbieżności dla $p > 1$. Natomiast dla $\varepsilon > 0$,

$$|f|^{1-\varepsilon} = \underbrace{\frac{\log^{\varepsilon}(1+x)}{1+x}}_{\text{niecałkowalne}} \underbrace{\frac{(1+x)^{\varepsilon}}{\log^2(1+x)}}_{\substack{\text{rozbieżne do} \\ +\infty}}$$

jako, że dowolna dodatnia potęga x rośnie szybciej niż log. To pokazuje, że $p < 1$ nie mogą należeć do A.

Do przemyślenia Czy istnieje $f\colon A = \{a_0\}$ jest zbiorem jednopunktowym?

Ćwiczenia 8

Kontynuujemy ostatnie zadanie z poprzednich ćwiczeń. 03 gru 2021

(d) Naturalnie pamiętamy, że $\|f\|_p = \phi(p)^{1/p}$. Wiemy już, że logarytm jest wypukły na A. Warunek wypukłości oznacza, że dla

$$r = tp + (1-t)q, \quad t \in (0,1)$$
$$\log \phi(r) \le t \log \phi(p) + (1-t) \log \phi(q)$$

Logarytm z normą wiąże się następująco,

$$\log\|f\|_p = \frac{1}{p} \log \phi(p)$$
$$\log\|f\|_q = \frac{1}{q} \log \phi(q)$$

Teraz można podstawić do naszej formuły na wypukłość,

$$\log \phi(r) \le tp \log\|f\|_p + (1-t)q \log\|f\|_q$$

Szacujemy przez większy z czynników logarytmicznych,

$$\le \underbrace{\big(tp + (1-t)q\big)}_{r} \max\Big(\log\|f\|_p, \log\|f\|_q\Big)$$

Po podzieleniu przez r dostajemy niemal tezę.

$$\log\|f\|_r \le \max\Big(\log\|f\|_p, \log\|f\|_q\Big)$$

Logarytm jest ściśle rosnącą funkcją, więc bez logarytmów również zachodzi szacowanie

$$\|f\|_r \le \max\Big(\|f\|_p, \|f\|_q\Big)$$

Przy okazji dostaliśmy przyjemny fakt, że $L^p \cap L^q \subset L^r$.

(e) **Do zastanowienia**. Wskazówka: zobaczmy jak by to było w sytuacji gdyby f byłoby funkcją prostą. Bez straty ogólności można też założyć, że $f \geq 0$ (gdyż w argumencie jest i tak $\log|f|$). Zatem,

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{A_k}, \quad X = \bigsqcup_{k=1}^{N} A_k$$

Jeśli akurat by się nie sumowało do całej przestrzeni to zawsze gdzieś można dołożyć zero. Zapiszmy p-tą normę takiej funkcji prostej,

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \Big(\sum a_k^p \mu(A_k)\Big)^{1/p} \\ a_k^p &= e^{p \log a_k} = 1 + p \log a_k + o(p) \end{aligned}$$

Stąd,

$$\|f\|_p = \Big(\sum \mu(A_k) + p \sum \log a_k \cdot \mu(A_k) + o(p)\Big)^{1/p}$$

Korzystając z założenia $\mu(X) = 1$ widzimy, że

$$= \Big(1 + p \sum \log a_k \cdot \mu(A_k) + o(p)\Big)^{1/p}$$

Jesteśmy w sytuacji Analizy I, gdzie $(1 + a_n)^n \to e^g$ gdzie $g = \lim n a_n$ (podobny fakt był oczywiście prawdziwy dla funkcji).

$$\xrightarrow{p \to 0^+} \exp\Big(\sum \mu(A_k) \log a_k\Big)$$

Widać, że w wykładniku jest dokładnie całka z logarytmu tej funkcji prostej.

Mając tę wskazówkę, trzeba jeszcze wywnioskować fakt dla dowolnych f.
Przypomnijmy sobie, że dla każdej funkcji mierzalnej $f \geq 0$ istnieje ciąg funkcji prostych $f_n \geq 0$ takich, że ciąg $(f_n(t))$ jest niemalejący i $f_n(t) \to f(t)$ punktowo. Niech (f_n) będzie takim ciągiem przybliżającym naszą $f \geq 0$. Wykazaliśmy już, że $\forall\, n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\|f_n\|_p^p = 1 + p \int_X \log f_n \, \mathrm{d}\mu + o(p)$$

Korzystając z tego, że $\|\cdot\|_p$ i log są ciągłe oraz używając definicji całki funkcji f,

$$\|f\|_p^p = \lim_{n \to \infty} \|f_n\|_p^p = 1 + p \int_X \log f \, \mathrm{d}\mu + o(p)$$

Wobec tego,

$$\begin{aligned} \lim_{p \to 0^+} \|f\|_p &= \lim_{p \to 0^+} \left(1 + p \int_X \log f \, \mathrm{d}\mu + o(p)\right)^{1/p} \\ &= \exp\left(\int_X \log f \, \mathrm{d}\mu\right) \end{aligned}$$

Zadanie 3 Niech $f \in L^p\big((0,+\infty)\big)$ oraz

$$(Tf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in (0,+\infty)$$

(a) Niech $p > 1$. Wykazać, że T określa ciągłe odwzorowanie $L^p \to L^p$ oraz $\|T\| = p/(p-1)$.

Skorzystajmy ze wskazówki. Jeśli $f \in C(0,+\infty)$ jest o zwartym nośniku, to $f = 0$ na jakimś otoczeniu zera $[0,\varepsilon_0]$ i $f(x) = 0$ dostatecznie daleko na $x \geq R$. Dlaczego to dobrze? Wówczas,

$$\int_0^x f = F(x) \in C^1 \text{ oraz } F' = f$$

Zapiszmy coś podobnego do p-tej normy,

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}F(x)\right)^p = \int_0^\infty \frac{1}{x^p}F^p(x)$$

Wykonujemy całkowanie przez części,

$$= \frac{x^{1-p}}{1-p}F^p\Big|_0^\infty - \frac{1}{1-p}\int_0^\infty x^{1-p}pF^{p-1}F'$$

$F = 0$ na otoczeniu zera, natomiast f jest ciągłe o zwartym nośniku, zatem $F \xrightarrow{x\to\infty} c$ oraz $x^{1-p} \to 0$, zatem całość dąży do zera. Cały człon się więc wyzeruje.

$$= \frac{p}{p-1}\int_0^\infty x^{1-p}F^{p-1}f = \frac{p}{p-1}\int\left(\frac{1}{x}F\right)^{p-1} f$$

Teraz (w końcu) pora na nierówność Holdera,

$$\overset{H}{\leq} \frac{p}{p-1}\left(\int\left(\frac{1}{x}F\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\|f\|_p$$

Odszyfrowujemy wykładnik sprzężony, $(p-1)q = p$,

$$= \frac{p}{p-1}\|Tf\|_p^{p-1}\|f\|_p$$

Stąd,

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

Wykazaliśmy więc, że na takiej klasie funkcji operator szacuje się w taki sposób. Czy szacuje się tak samo na całym L^p? Wiemy, że w L^p funkcje ciągłe o zwartym nośniku tworzą podzbiór gęsty. Wykażmy teraz, że wystarczy wykazać to wszystko dla $f \in L^p$ nieujemnej. Dla dowolnej f,

$$\big|(Tf)(x)\big| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f| = T\big(|f|\big)(x)$$

Widać więc, że jeśli w tę stronę oszacujemy dla funkcji nieujemnej, to wszystkie inne będą załatwione.

Obserwacja (sprawdzić): Jeśli $f \in L^p$, to $Tf \in L^p$ (niezwykle istotne, że $p > 1$). Weźmy ciąg $f_n \in C_c(0, \infty)$ o zwartym nośniku, taki, że $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$, gdzie $f \in L^p$ jest dowolna (każdą da się przybliżyć takim ciągiem ze zbioru gęstego). Zatem f_n jest na pewno ciągiem Cauchy'ego w p-tej normie. W takim razie ciąg Tf_n jest ciągiem Cauchy'ego w L^p bo szacuje się (w normie) przez f_n z czynnikiem niezależnym od n (co właśnie pokazywaliśmy). Skoro jest ciągiem Cauchy'ego, to znaczy, że $Tf_n \to \hat{g} \in L^p$. Ale widać również, że $Tf_n \to Tf$ niemal jednostajnie na $(0, +\infty)$. Dlaczego? Ustalamy przedział zwarty $[\varepsilon, R] \ni x$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_0^x (f - f_n)\right| &\leq \frac{1}{x}\int_0^x 1 \cdot |f - f_n| \overset{H}{\leq} \frac{1}{x}\left(\int_0^x 1\right)^{1/q} \|f - f_n\|_p \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} R^{1/q} \underbrace{\|f - f_n\|_p}_{\to 0}\end{aligned}$$

Co daje zbieżność niemal jednostajną. Zatem prawie wszędzie $\hat{g} = Tf$, co z punktu widzenia L^p jest tym samym elementem przestrzeni.

Wiemy już więc w tej sytuacji, że $T \colon L^p \to L^p$ dla $p > 1$ jest liniowym operatorem ciągłym oraz zachodzi oszacowanie

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$$

Trzeba jeszcze pokazać, że tej stałej nie da się poprawić. Wskazówka: rozważyć $f_R = x^{-1/p}\chi_{[1,R]}$ gdzie potem $R \to \infty$.

(b) Jeżeli $p = 1$ oraz $f > 0$ to $Tf \notin L^1$.

Zadanie 4 Niech $V = C^1\big([0,1]\big)$, $\|f\| = \sup|f| + \sup|f'|$. Wykazać, że $(V, \|\cdot\|)$ jest zupełna.

Niech f_n będzie Cauchy'ego w V. Ciąg f_n jest c.c w sensie normy $\sup|\cdot|$ oraz f_n' jest c.c w sensie normy $\sup|\cdot|$. Można skorzystać z twierdzenia z Analizy I mówiącego, że jeśli $f_n' \to g$ jednostajnie i $f_n(x_0)$ zbieżny (dla dowolnego punktu x_0), to $f_n \to f$ jednostajnie i $f' = g$.

Można też próbować elementarnie (de facto odtwarzając dowód tego twierdzenia z analizy). Wiemy, że $\big(V, \sup|\cdot|\big)$ jest przestrzenią zupełną. Zatem dowolny ciąg Cauchy'ego $f_n' \xrightarrow{\sup} g$. Ponadto, $f_n(0)$ jest zbieżny (znów zupełność, tym razem w $\mathbb{R}$). Teraz wystarczy zapisać formułę

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'$$

$f_n \to f$ jednostajnie, zatem możemy przejść granicznie pod całką,

$$f(x) = \int_0^x g + \lim f_n(0)$$

Stąd wynika, że $f \in C^1$, oraz $f' = g$ co załatwia sprawę.

Dlaczego to właściwie załatwia sprawę? Otóż zbieżność w naszej normie $\|\cdot\|$ oznacza, że dla dowolnego ciągu Cauchy'ego $(f_n) \subset V$ będzie zachodzić (modulo kwantyfikatory)

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &\leq \varepsilon \\ \sup\left|f_n(x) - f(x)\right| + \sup\left|f_n'(x) - f'(x)\right| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

dla pewnej funkcji $f \in V$. Naturalnie kandydatem na tą granicę jest granica punktowa ciągu Cauchy'ego na $\mathbb{R}$: $f(x) = \lim f_n(x) \, \forall \, x \in [0,1]$. Mogłoby się zdarzyć (gdyby nie zaprezentowane twierdzenie), że $\lim f_n'(x) \neq \left(\lim f_n(x)\right)'$. To by oznaczało, że nie byliśmy w stanie wytypować spójnej granicy na taki ciąg Cauchy'ego.