

# Analiza funkcjonalna

*Notatki z ćwiczeń*

Wykładowcy:  
dr hab. Marcin Bobieński

Skryba:  
Szymon Cedrowski

# Spis treści

Ćwiczenia 1 . . . . .	4
Ćwiczenia 2 . . . . .	6
Ćwiczenia 3 . . . . .	10
Ćwiczenia 4 . . . . .	14
Ćwiczenia 5 . . . . .	20
Ćwiczenia 6 . . . . .	21

## Ćwiczenia 1

Norma ma symulować odległość między dowolnymi punktami przestrzeni. Odległość ta ma być zgodna ze strukturą przestrzeni liniowej. Ta struktura to dodawanie wektorów i mnożenie przez element ciała. Stąd podobne wymagania na normę. Wystarczy nam jeden argument bo norma ma być niezmiennicza na przesunięcia, więc i tak wystarczy mierzyć odległość od zera. Skalowanie to niezmienniczość ze względu na strukturę mnożenia.

**Przykład 1**  $B = C([0, 1])$ ,  $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . Pokazać, że  $B$  jest przestrzenią Banacha.

$C([0, 1])$  jest oczywiście przestrzenią liniową zarówno nad  $\mathbb{R}$  jak i nad  $\mathbb{C}$ . Wypada sprawdzić, że  $\|f\|$  jest normą oraz, że  $B$  jest zupełna. Zerowanie normy i wyciąganie stałej są oczywiste, natomiast trzeba coś napisać o nierówności trójkąta. Wystarczy wziąć zwykłą nierówność trójkąta i zaaplikować supremum. Nieostre nierówności przechodzą.

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ \sup |f(x) + g(x)| &\leq \sup (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup |f(x)| + \sup |g(x)| \end{aligned}$$

Badamy zupełność. Weźmy ciąg  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy'ego w  $B$ . Wówczas  $\forall_{x \in [0, 1]}$  będziemy mieć  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$  (punktowo). W ten sposób wytypowaliśmy kandydata na granicę ciągu funkcji, punkt po punkcie. Gdyby się udało pokazać, że  $f_n \rightarrow f$  jednostajnie, to sprawa zakończona (bo zbieżność jednostajna to zbieżność w normie supremum). Mamy ciąg Cauchy'ego, czyli  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$  modulo kwantyfikator. W tym zapisie można przejść z  $m \rightarrow \infty$ ,  $n$  zostawiamy w spokoju, nierówności nieostre przechodzą do granicy. Zatem,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

dla każdego  $x$ . Stąd,

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Oznacza to, że  $f_n \rightarrow f$  jednostajnie, co kończy dowód.

**Przykład 2**  $\ell_1, \ell_\infty$  gdzie  $\ell_1 = \{(a_n) : \sum |a_n| < \infty\}$  oraz  $\ell_\infty = \{(a_n) : \exists M |a_n| \leq M\}$  z normami  $\|(a_n)\|_1 = \sum |a_n|$  oraz  $\|(a_n)\|_\infty = \sup_n |a_n|$ .

Dla  $\|\cdot\|_\infty$  argument na normę jest powtórzeniem poprzedniego. Dla  $\|\cdot\|_1$  też wychodzi ze zwykłej nierówności trójkąta. Zajmijmy się zupełnością. Najpierw w  $\ell_\infty$ .

Bierzemy ciąg Cauchy'ego ciągów o wyrazach  $(a_n)^k \in \ell_\infty$ . Z definicji,  $\forall_{n_0}$  ciąg  $a_{n_0}^k$  jest Cauchy'ego. Z założenia,

$$\exists_N \forall_{K', K'' > N} \left\| (a_n)^{K'} - (a_n)^{K''} \right\|_\infty \leq \varepsilon$$

zatem

$$\sup_n |a_n^{K'} - a_n^{K''}| \leq \varepsilon$$

Definiujemy  $a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k$ , z zupełności  $\mathbb{R}$  granica ta istnieje. Teraz z  $K''$  przechodzimy do nieskończoności, jak poprzednio (bo jest kwantyfikator  $\forall$ ) zatem dostajemy

$$\sup_n \left| a_n^{K'} - a_n \right| \leq \varepsilon$$

a to daje zupełność  $\ell_\infty$ , bo oznacza to, że  $(a_n)^k \rightarrow (a_n)$ , gdzie  $(a_n)$  jest ciągiem granicznym w  $\ell_\infty$ . Jakby co,  $(a_n)$  jest w przestrzeni, bo jest generowany z granic ciągów ograniczonych w  $\mathbb{R}$ , a takie są zbieżne.  $(a_n)$  jest więc również ograniczony. Teraz zajmijmy się zupełnością w  $\ell_1$ .

Zaczynamy podobnie. Mamy ciąg punktów w przestrzeni  $\ell_1$  (czyli ciąg zwykłych ciągów). Niech  $p^k = (a_n)^k \in \ell_1$ . Zakładamy, że jest to ciąg Cauchy'ego w ramach danej normy, tj.  $\|p^k - p^l\|_1 \leq \varepsilon$ . Generujemy kandydata na granicę po  $k$ .

$$\|p^k - p^l\|_1 = \sum_n \left| a_n^k - a_n^l \right| \leq \varepsilon$$

Stąd wynika, że  $\forall_{n_0} a_{n_0}^k$  jest C.C (skoro suma modułów jest „mała”, to każdy element sumy z osobna też taki musi być, spełnia więc definicję C.C). Z zupełności  $\mathbb{R}$  możemy przejść granicznie po  $k$  definiując  $a_{n_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_0}^k$ . To nam generuje ciąg graniczny  $(a_{n_0})$ . Trzeba pokazać, że jego szereg jest zbieżny bezwzględnie, czyli że ciąg graniczny wciąż leży w  $\ell_1$ .

Znowu nieostre nierówności przenoszą się do granicy, po jednym z górnych indeksów można przejść, zatem  $\exists_K \forall_{l > K}$

$$\sum_n \left| a_n^l - a_n \right| \leq \varepsilon$$

Zatem granicznie zbiega do  $a_{n_0}$  i ta granica jest w  $\ell_1$ .

## Równoważność norm

**Definicja 1** (Równoważność norm). Równoważność norm  $\|\cdot\|$  i  $\|\cdot\|'$  na  $V$  oznacza, że  $\exists_{c_1, c_2 > 0}$  takie, że

$$c_1 \|v\| \leq \|v\|' \leq c_2 \|v\|$$

Jest to relacja równoważności. Równoważność norm implikuje równoważność zbieżności ciągów.

**Uwaga 1.** Wszystkie  $\|\cdot\|_p$  są równoważne na  $\mathbb{R}^n$ .

*Dowód.*

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{1/p} \|v\|_\infty$$

Natomiast rozpisując, niech  $|v_k| = \max_l(v_l)$ .

$$|v_k| \leq \|v\|_p = (|v_1|^p + \dots + |v_n|^p)^{1/p}$$

Prawą nierówność szacujemy przez wzięcie sumy  $n$  tych największych  $v_k$ .

$$\|v\|_p \leq (n|v_k|^p)^{1/p} = n^{1/p}|v_k|$$

■

**Twierdzenie 1.** Na przestrzeni skończonego wymiaru, czyli (z dokładnością do wyboru bazy i izomorfizmu)  $\mathbb{R}^n$  lub  $\mathbb{C}^n$ , wszystkie normy są równoważne.

*Dowód.* Później.

■

**Uwaga 2.** Co się stanie jeśli byśmy zmienili ciało na niezupełne. Czy wówczas też normy na np.  $\mathbb{Q}^2$  są równoważne? NIE!

Skonstruujmy kontrprzykład na  $\mathbb{Q}^2$ . Niech  $\|(q_1, q_2)\|_1 = |q_1| + |q_2|$  oraz  $\|(q_1, q_2)\| = |q_1 + \sqrt{2}q_2|$ . Niech  $\mathbb{Q} \ni q_n \rightarrow \sqrt{2}$ . Wówczas,

$$\begin{aligned} \|(q_n, -1)\| &\rightarrow 0 \\ \|(q_n, -1)\|_1 &\geq 1 \end{aligned}$$

a równoważność zbieżności wynika z równoważności norm. Skoro ten sam ciąg nie jest zbieżny w dwóch różnych normach na  $\mathbb{Q}^2$  to znaczy, że normy te nie mogły być równoważne.

## Ćwiczenia 2

**Twierdzenie 2.** Na przestrzeni liniowej skończonego wymiaru nad ciałem zupełnym ( $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ ) wszystkie normy są równoważne.

15 paź 2021

*Dowód.* Jeśli  $\dim V < \infty$ , dysponujemy rozważanymi wcześniej normami. Nad  $V$  ustalamy bazę  $\{e_i\}$  i ustalamy normę  $\|v\|_1 = \sum |v_j|$ . Weźmiemy teraz dowolną normę i pokażemy, że jest ona równoważna z normą pierwszą. Przez przechodniość relacji równoważności wiemy wtedy, że każde dwie są równoważne. Niech  $\|\cdot\|$  będzie tą normą.

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left\| \sum v_j e_j \right\| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum |v_j| \|e_j\| \\ &\leq \max_j \|e_j\| \|v\|_1 \end{aligned}$$

Niech  $c_2 = \max_j \|e_j\|$ . To wyszło nam za darmo, nie korzystaliśmy z zupełności ciała. Wykazaliśmy, że  $\|v\| \leq c_2 \|v\|_1$ . Teraz należy znaleźć stałą  $c_1$ . Zdefiniujmy sferę w sensie

normy pierwszej.  $S \stackrel{\text{def}}{=} \{v: \|v\|_1 \leq 1\}$ . Na  $S$  mamy funkcję, która jest tą normą bezindeksową  $\|\cdot\|: S \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Pokażemy, że  $S$  jest zwarte,  $\|\cdot\|$  jest ciągła oraz wykorzystamy fakt, że funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga kresy, co znaczy, że  $\exists_{p \in S}: f(p) = \inf_{x \in S} f(x)$ .

Zauważmy, że  $S$  jest ograniczony w  $\mathbb{R}^n$ , bo moduł każdej ze współrzędnej jest mniejszy do jedynki (jasne).  $S$  jest również domknięty, co wynika z definicji. Bierzymy bowiem pewien ciąg punktów na sferze, dla którego suma modułów współrzędnych każdego elementu jest mniejsza równa 1, nierówności nieostre przenoszą się do granicy.  $S$  zawiera więc swoje punkty skupienia. Domkniętość i ograniczoność w  $\mathbb{R}^n$  daje zwartość. Teraz badamy ciągłość normy. Traktujemy normę jako funkcję na  $\|\cdot\|: (V, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$ . Chcemy pokazać, że  $v_n \rightarrow v_0 \implies \|v_n\| \rightarrow \|v_0\|$ .

$$\|v_n\| = \|v_0 + (v_n - v_0)\| \leq \|v_0\| + \|v_n - v_0\|$$

Stąd,

$$\|v_n\| - \|v_0\| \leq \|v_n - v_0\|$$

W drugą stronę,

$$\begin{aligned} \|v_0\| &= \|v_n + (v_0 - v_n)\| \leq \|v_n\| + \|v_n - v_0\| \\ \|v_0\| - \|v_n\| &\leq \|v_n - v_0\| \end{aligned}$$

Z obu nierówności wynika, że  $|\|v_n\| - \|v_0\|| \leq \|v_n - v_0\|$ . Zbieżność  $v_n \rightarrow v_0$  oznacza, że  $\|v_n - v_0\| < \varepsilon$  dla  $n > N$ . W takim razie  $|\|v_n\| - \|v_0\|| < \varepsilon$ , co dowodzi ciągłości normy.

Wiemy więc, że norma na  $S$  osiąga kresy, czyli  $\inf_{v \in S} \|v\| = \|v_0\| > 0$ , gdzie  $v_0 \in S$ . Niech  $\|v_0\| = c_1$ . Weźmy wektor  $v \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left\| \|v\|_1 \frac{v}{\|v\|_1} \right\| = \|v\|_1 \left\| \frac{v}{\|v\|_1} \right\| \\ &\geq c_1 \|v\|_1 \end{aligned}$$

Korzystaliśmy wprost z zupełności ciała, jako że użyliśmy argumentu, że zwartość to domkniętość + ograniczoność.

Trzeba by jeszcze tylko naprawić małe oszustwo, mianowicie trzeba by pokazać, że  $S \subset (V, \|\cdot\|)$  jest zwarty (w tej topologii). Weźmy odwzorowanie identycznościowe  $\text{id}: (V, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V, \|\cdot\|)$ . Obraz przy odwzorowaniu ciągłym zbioru zwartego jest zwarty, co załatwia sprawę. ■

**Zadanie domowe 1**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  dla  $p \geq 1$  gdzie  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p}$ . Wykazać, z nierówności Holdera, że  $\|\cdot\|_p$  jest normą na  $\mathbb{R}^n$ , wykazać, że  $\ell_p$  jest przestrzenią Banacha oraz, że  $\forall_v \|v\|_p \rightarrow \|v\|_\infty$ .

Pokażmy, że  $\|\cdot\|$  jest normą. Zastosujemy nierówność Holdera. W tym wypadku,

$$\sum |x_j y_j| \leq \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_j|^q\right)^{1/q}$$

dla  $1/p + 1/q = 1$ . Szkic dowodu byłby następujący. BSO, można założyć, że  $\sum |x_j|^p = 1$  i druga też. W przeciwnym razie mogę przez to podzielić. Niech  $|x_j| = e^{\alpha_j}$  oraz  $|y_j| = e^{\beta_j}$ , zatem

$$\sum |x_j| |y_j| = \sum \exp\left(\frac{1}{p} p \alpha_j + \frac{1}{q} q \beta_j\right)$$

Z wypukłości  $\exp$ , można oszacować przez każdy składnik.

$$\leq \sum \left( \frac{1}{p} e^{p \alpha_j} + \frac{1}{q} e^{q \beta_j} \right) = 1$$

Teraz wykażmy, że  $\|\cdot\|_p$  jest normą na  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \|v + w\|_p^p &= \sum |v_n + w_n|^p = \sum |v_n + w_n| |v_n + w_n|^{p-1} \\ &\leq \sum |v_n| |v_n + w_n|^{p-1} + \sum |w_n| |v_n + w_n|^{p-1} \end{aligned}$$

Teraz używamy nierówności Holdera dla wag  $p$  i  $p/(p-1)$ ,

$$\begin{aligned} &\leq \left( \sum |v_n + w_n|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \|v\|_p + \|w\|_p \right) \\ &= \|v + w\|_p^{p-1} \left( \|v\|_p + \|w\|_p \right) \end{aligned}$$

To dowodzi nierówność trójkąta dla naszej normy.

Dowodzimy tej granicy. Bierzemy ciąg ustalony i zbiegamy z  $p \rightarrow \infty$ .

$$(a_j^p)^{1/p} \leq |a_1^p + a_2^p + \dots|^{1/p} \leq (n a_j^p)^{1/p}$$

Z trzech ciągów mamy zbieżność po  $p$ . Tak byłoby dla ciągów skończonych w  $\mathbb{R}^n$ . Teraz chcielibyśmy to powtórzyć w  $\ell_p$ . ??????

**Zadanie domowe 2** Weźmy  $C([0, 1])$  z normą  $\|f\|_\infty = \sup |f|$  oraz  $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f|$ . Pokazać, że  $\|\cdot\|$  i  $\|\cdot\|_1$  nie są równoważne.

Ograniczenie w jedną stronę jest proste.

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f(x)| dx \leq \sup_{s \in [0,1]} |f(s)| \int_{[0,1]} dx = \|f\|_\infty$$

To nam mówi, że norma  $\|\cdot\|_\infty$  jest mocniejsza od  $\|\cdot\|_1$  (jeśli nie są równoważne). Teraz należałoby spytać czy istnieje taka stała  $c > 0$ , że  $\|f\|_\infty \leq c \|f\|_1$ . Jeśli normy nie są równoważne to istnieć nie może. Równoważność norm implikuje równoważność zbieżności, zatem wystarczy wskazać ciąg funkcyjny, który ma różne granice w obu normach. Weźmy następujący ciąg  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0, 1])$ :

$$f_n = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2 - 1/n] \\ nx + 1 - n/2 & x \in [1/2 - 1/n, 1/2] \\ -nx + 1 + n/2 & x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 & x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

Wizualnie, chodzi o taki zwężający się szpikulec o pikę w  $x = 1/2$ . Są to naturalnie funkcje ciągłe. Przyjrzymy się normom.  $\|f_n\|_\infty = 1$ , natomiast  $\|f_n\|_1 = 1/n$ . Jeśli  $f_n \rightarrow f$ , to  $\|f\|_\infty = 1$ , ale  $\|f\|_1 = 0$ . W takim razie, obie normy nie mogą być równoważne.

**Zadanie domowe 3** Niech  $V = \left\{ (a_n) : \exists_{N((a_n))} \forall_{n \geq N} a_n = 0 \right\}$ . Odnotujmy, że  $N$  jest funkcją danego ciągu, nie musi być uniwersalne. Pokazać, że normy  $\|\cdot\|_1$  oraz  $\|\cdot\|_\infty$  nie są równoważne. Pokazać (!), że nie istnieje taka norma, żeby  $V$  była zupełna.

Rozważmy ciągi  $(a_n)^k$  gdzie

$$a_n = \begin{cases} 1/k & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \|(a_n)^k\|_1 &= 1 \\ \|(a_n)^k\|_\infty &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

W takim razie nie istnieje  $c > 0$ , takie że dla każdego  $k$ ,

$$\|(a_n)^k\|_1 \leq c \|(a_n)^k\|_\infty$$

Argument jest więc taki sam jak w poprzednim zadaniu. Dlaczego nie da się tej przestrzeni uzupełnić?

Niech  $U_n$  oznacza ciągi, które od  $n$ -tego miejsca mają same zera. Naturalnie,

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

Jeśli  $U_n$  są nigdzie gęste, to można użyć twierdzenia Baire'a, z którego wynika, że  $V$  nie jest zupełna (bo przestrzeń zupełna nie da się przedstawić w postaci takiej sumy, o tym mówi twierdzenie). Nigdzie gęstość oznacza, że  $\text{int} \overline{U_n} = \emptyset$ .

Udowodnijmy domkniętość  $U_n$ : Rozważmy ciąg elementów  $U_n \supset (a_n)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} (b_n) \subset U_{n+i}$  (względem jakiejś dowolnej normy). Zauważmy, że  $U_{n+i} \equiv \mathbb{R}^{n+i}$ . W  $\mathbb{R}^{n+i}$  zbieżność jest po współrzędnych, a tam normy są równoważne. Stąd wynika, że  $i = 0$ , bo każdy ciąg o indeksie  $k$  ma tam zera, zatem granice z tych miejsc też są zerami, więc  $i$  się obcina. Stąd  $U_n$  jest domknięty bo zawiera swoje punkty skupienia.

Nigdzie gęstość  $U_n$ : Wiemy, że  $U_n$  jest domknięty, chcemy więc pokazać, że jego wnętrze w przestrzeni  $V$  jest puste. Niech  $a = (a_n) \in U_n$  oraz  $b = (a_1, \dots, a_n, \varepsilon, 0, \dots) \in U_{n+1}$ . Odległość  $b$  od ciągu  $(a_n)$  jest dowolnie mała, bowiem

$$\|a - b\| \leq \|(0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots)\|$$

Co to oznacza? Otóż punkt  $a \in U_n$  należy do wnętrza  $U_n$  jeśli istnieje otwarte otoczenie tego punktu zawarte wciąż w  $U_n$ . Pokazaliśmy, że dla każdego elementu  $a \in U_n$  można wybrać dowolnie bliski element z większej przestrzeni  $U_{n+1}$ , tj. taki, który będzie znajdował się w dowolnie małym otwartym otoczeniu. Oznacza to, że żaden z elementów  $a \in U_n$  nie należy do  $\text{int} U_n$ , zatem  $\text{int} U_n = \emptyset$ , co dowodzi nigdzie gęstości.

Zauważmy przy okazji, że taki argument stosuje się do dowolnej przestrzeni liniowo-topologicznej skończonego wymiaru. Otóż podprzestrzeń liniowa jest nigdzie gęsta w większej przestrzeni.



**Zadanie 1** W  $\ell_1$  znaleźć zbiór domknięty, ograniczony, ale nie zwarty.

$$D = \{v \in \ell_1 : \|v\| \leq 1\}$$

jest domknięty i ograniczony. Weźmy ciąg  $(a_n)^k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ . Zwartość (ciągwo) oznacza, że każdy ciąg ma podciąg zbieżny. Weźmy podciąg  $(a_n)^{k_l}$  zbieżny, skąd wynika, że jest ciągiem Cauchy'ego.

$$\left\| (a_n)^k - (a_n)^m \right\|_1 \stackrel{k \neq m}{=} 2$$

Oznacza to jawnie, że ten ciąg nie może być ciągiem Cauchy'ego. Sprzeczność. Oznacza to, że w tej podprzestrzeni  $D$  nie każdy ciąg ma podciąg zbieżny, a zatem  $D$  nie jest zwarty. Jest natomiast domknięty, bo zawiera wszystkie punkty skupienia (a właściwie to ich nie ma).

### Ćwiczenia 3

**Zadanie domowe 1** Wykazać ośrodkowość: a)  $C([0, 1])$ ,  $\|\cdot\|_\infty = \sup |f|$ ; b)  $\ell_p$ ,  $\|\cdot\|_p$ , 22 paź 2021 dla  $1 \leq p < \infty$ .

Po prostu wskazujemy przeliczalne podzbiory gęste.

- a) Z twierdzenia Weierstrassa można przybliżać (jednostajnie) każdą funkcję ciągłą na zwartym odcinku wielomianami, w szczególności o współczynnikach wymiernych.  $\mathbb{Q}$  jest oczywiście gęste. Oznacza to, że zbiór takich wielomianów jest gęsty w  $C([0, 1])$ .
- b) Niech  $(a_n) \in \ell_p$ . Ustalamy  $\varepsilon > 0$  i wybieramy takie  $N$ , że

$$\left( \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

Definiujemy ciąg

$$b_n = \begin{cases} a_n & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

Wówczas,

$$\|(a_n) - (b_n)\|_p = \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

Potrąfimy przybliżać dowolnie dokładnie dowolny punkt w  $\ell_p$ . Każdy tak skonstruowany  $(b_n)$  przedstawia się jako skończona kombinacja liniowa „bazy” ( $e_n$  to jedynka na  $n$ -tym miejscu). Na mocy poniższej uwagi to jest dość, by  $V$  była ośrodkowa.

**Lemat 1.** Jeżeli mamy przestrzeń  $(V, \|\cdot\|)$  i przeliczalny zbiór punktów  $e_1, e_2, \dots \in V$  oraz dla każdego  $v \in V$  istnieje skończona kombinacja liniowa tego zbioru, przybliżająca  $v$  :

$$\left\| v - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\| < \varepsilon$$

Wówczas  $V$  jest ośrodkowa.

*Dowód.* W  $\mathbb{R}^k$  istnieją wymierne współczynniki  $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{Q}$  o tej własności, że

$$\sum_{j=1}^k |a_j - q_j| < \varepsilon$$

W takim razie,

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{j=1}^k q_j e_j \right\| &\leq \left\| v - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^k (a_j - q_j) e_j \right\| \\ &\leq \varepsilon + \max_{j \leq k} \|e_j\| \varepsilon = \varepsilon' \end{aligned}$$

W takim razie dowolny wektor  $v \in V$  potrafimy dowolnie przybliżać przez wymierne skończone kombinacje. Stąd  $V$  jest ośrodkowa. ■

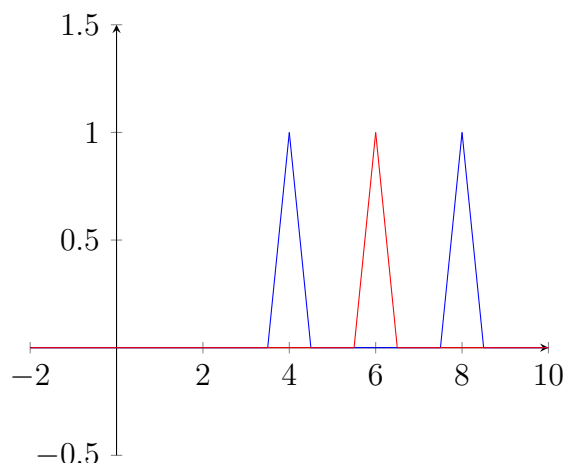
**Zadanie domowe 2** Wykazać, że nie są ośrodkowe: a)  $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$ ,  $\|\cdot\|_\infty = \sup |f|$  ; b)  $\ell_\infty$ ,  $\|\cdot\| = \sup_n |a_n|$ .

**Lemat 2.** Załóżmy, że mamy przestrzeń metryczną  $(X, d)$  a w niej rodzinę zbiorów  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  gdzie  $|\Lambda| > \aleph_0$  oraz wiemy, że dla każdego  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  zachodzi  $d(C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}) \geq r > 0$ . Wówczas,  $(X, d)$  nie jest ośrodkowa.

*Dowód.* Niech  $Q$  będzie ośrodkiem w  $(X, d)$ . Wówczas  $\forall p \in C_\lambda \exists q \in Q : d(p, q) < r/3$ . Ta nierówność wynika z własności, że zawsze znajdziemy coś dowolnie blisko z ośrodka. W każdej kuli musi być coś z ośrodka, a te kule są rozłączne gdyż  $d(C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}) \geq r$ , zatem ten ośrodek musiałby liczyć przynajmniej tyle co  $\Lambda$ . Czyli nie byłby przeliczalny. ■

a) Weźmy rodzinę podzbiorów liczb naturalnych  $\Lambda = 2^{\mathbb{N}}$  (zbiór nieprzeliczalny), które posłużą jednocześnie za zbiór „specjalnych” argumentów funkcji jak i numerację powstającej rodziny nieprzeliczalnie wielu funkcji. Rodzinę  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$  konstruujemy następująco:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & x \in \lambda \\ \text{spadek liniowy do 0} \\ \text{w przedziale } (x - 0.5, x + 0.5) & x \in \lambda \\ 0 & \text{w innym przypadku} \end{cases}$$



Rysunek 1: Przykładowo: niebieski szpikulec to  $f_{\lambda_1}$  a czerwony to  $f_{\lambda_2}$ , gdzie  $\lambda_1 = \{4, 8\}$  i  $\lambda_2 = \{6\}$ .

Obrazkowo, chodzi naturalnie o takie rozłączne szpikulce, jak na Rys. 1. Metryka indukowana przez normę supremum to metryka supremum  $d_\infty(f, g) = \sup |f - g|$ . W naszym przypadku  $d_\infty(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}) \stackrel{\lambda_1 \neq \lambda_2}{=} 1$ . W związku z tym  $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$  nie jest ośrodkowa.

- b) W przypadku przestrzeni ciągowej  $\ell_\infty$  ciągów ograniczonych, możemy znów rozważyć rodzinę  $\Lambda = 2^{\mathbb{N}}$  gdzie  $\lambda \in \Lambda$  jest pewnym podzbiorem liczb naturalnych. Skonstruujmy rodzinę nieprzeliczalnie wielu ciągów  $(a_n)_{\lambda \in \Lambda} \subset \ell_\infty$  takich, że

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \in \lambda \\ 0 & n \notin \lambda \end{cases}$$

Wówczas, dla wszystkich  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  mamy  $\|(a_n)_{\lambda_1} - (a_n)_{\lambda_2}\| = 1$ . To daje brak ośrodkowości.

**Zadanie domowe 3** Rozważmy przestrzeń ciągową  $\ell_p$ , dla  $1 < p < \infty$ . Niech  $L: \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$  będzie liniowe, ciągłe (!). Wykazać, że istnieje taki ciąg  $(b_n)$ , że  $L(a_n) = \sum b_n a_n$  oraz  $\sum |b_n|^q < \infty$ , gdzie  $1/p + 1/q = 1$ .

Zaczynamy od konstrukcji kandydata na  $(b_i)$ . Chcemy de facto, żeby ten ciąg był określony przez działanie operatora na „bazie” znanej ze skończonego wymiaru, tj.  $b_i = L(e_i)$  gdzie  $(e_i)$  to taki ciąg, który na  $i$ -tym miejscu ma 1 a wszędzie indziej 0. Niech  $a^{(n)} = (a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ . Wprowadzimy też szybkie oznaczenie  $a = (a_n)$ .

$$\|a - a^{(n)}\|_p = (\text{ogon zbieżnego szeregu}) = \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Bierzemy teraz następującą sumę:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n a_i L(e_i) = L\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) \\ &= La^{(n)} \xrightarrow[\text{ciągłość } L]{n \rightarrow \infty} La\end{aligned}$$

Czyli,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = La$$

Teraz czy to  $(b_n)$  jest w ogóle z  $\ell_q$ , tak jak miało być. Równoważnie musimy pokazać, że  $\|(b_n)\|_q < \infty$  (pokażemy nawet coś silniejszego). Weźmy analogicznie jak poprzednio, ciąg  $b^{(n)}$  będący obcięciem ciągu  $b$  do pierwszych  $n$  wyrazów. Naturalnie  $b^{(n)} \in \ell_p$  jako ciąg skończony. Zdefiniujmy ciąg  $c^{(n)}$  jako potęgę obcięcia ciągu  $b$  z pewnym twistem (zachowaniem znaku):

$$c_j^{(n)} = \begin{cases} |b_j|^{q-1} \operatorname{sgn} b_j & j \leq n \\ 0 & j > n \end{cases}$$

Z liniowości wynika, że

$$Lc^{(n)} = \sum_{j=1}^n |b_j|^{q-1} b_j \operatorname{sgn} b_j = \sum_{j=1}^n |b_j|^{q-1} |b_j| = \|b^{(n)}\|_q^q$$

Na boku policzmy natomiast  $p$ -tą normę z  $c^{(n)}$ .

$$\|c^{(n)}\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^{p(q-1)} \right)^{1/p} \stackrel{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}{=} \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{1/p} = \|b^{(n)}\|_q^{q/p}$$

Jednym z równoważnych warunków ciągłości operatora liniowego jest  $\|Lv\| \leq \|L\| \|v\|$ . Możemy napisać, że

$$\|Lc^{(n)}\| \leq \|L\| \|c^{(n)}\|_p$$

zatem,

$$\|b^{(n)}\|_q^q \leq \|L\| \|b^{(n)}\|_q^{q/p} = \|L\| \|b^{(n)}\|_q^{q-1}$$

Stąd,

$$\|L\| \geq \|b^{(n)}\|_q$$

Zauważmy jednak, że  $\|L\|$  nie zależy od  $n$ , zatem przechodząc granicznie dostajemy  $b \in \ell_q$  oraz  $\|b\|_q \leq \|L\| < \infty$ .

Pokażemy jeszcze jednak, że w rzeczywistości zachodzi równość  $\|L\| = \|b\|_q$ . Pokazując to wykażemy, że  $\ell_p^* \cong \ell_q$ . Sprawa jest zasadniczo prosta. Chcemy dostać oszacowanie z drugiej strony. Z nierówności Holdera (tutaj trywialnej, bo  $p, q$  są od razu sprzężone),

$$|La| \stackrel{H}{\leq} \|a\|_p \|b\|_q$$

dzieląc przez normę  $a$  otrzymujemy de facto ograniczenie górne na normę operatorową,

$$\|L\| \leq \|b\|_q$$

Dostaliśmy więc oszacowania z obu stron i wnioskujemy, że  $\|L\| = \|b\|_q$ . Aby podsumować,  $\ell_p^*$  jest izometryczna do  $\ell_q$  dla sprzężonych  $(p, q)$  – dla dowolnego funkcyjonału liniowego ciągłego  $L: \ell_p \rightarrow \mathbb{K}$ , tj.  $L \in \ell_p^*$  znaleźliśmy odpowiadający mu  $b \in \ell_q$ .

## Ćwiczenia 4

**Zadanie domowe 5** Niech zbiór  $A$  będzie mierzalny, ograniczony. Wykazać, że

29 paź 2021

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \cos nx \, dl_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \sin nx \, dl_1 = 0$$

Krok pierwszy to zrobić to na przedziale  $[a, b]$ . Możemy wziąć taką część przedziału (wnętrza). Na przedziałach, jeśli istnieje całka Riemanna, to Lebesgue'a też i są sobie równe, więc można liczyć całkowiec normalnie.

$$\left| \int_{[a,b]} \sin nx \, dx \right| = \left| -\frac{1}{n} \cos nx \right|_a^b \leq \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Analogicznie dla całki z  $\cos nx$ . Dla odcinków teza się zgadza. Teraz trzeba przejść do zbioru mierzalnego ograniczonego. Jedną z opcji polega na użyciu znanego lematu, który sobie szybko udowodnimy.

**Lemat 3.** Niech  $A$  będzie zbiorem mierzalnym,  $\mu(A) < \infty$ . Wówczas dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje skończona rodzina rozłącznych otwartych odcinków  $(I_n)_{n=1}^{k_\varepsilon}$  taka, że

$$\mu \left( A \Delta \bigcup_{n=1}^{k_\varepsilon} I_n \right) < \varepsilon$$

gdzie  $\Delta$  oznacza różnicę symetryczną zbiorów. Oznaczmy jeszcze  $O = \bigcup I_n$ .

*Dowód.* Wiadomo, że dla każdego zbioru mierzalnego  $A$  istnieje takie otwarte pokrycie  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , w którym się zawiera  $A$ , że  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) \leq \mu(A) + \varepsilon$ . W takim razie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(I_n) < \infty$ , czyli możemy wybrać takie  $k$ , że  $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(I_n) < \varepsilon$ . Naszą kolekcją będzie więc  $(I_n)_{n=1}^k$ . Teraz,

$$\mu(A \Delta O) = \mu((A \setminus O) \cup (O \setminus A))$$

Te zbiory składające się na sumę symetryczną są rozłączne.

$$= \mu(A \setminus O) + \mu(O \setminus A)$$

Teraz będziemy używać subaddytywności miary.

$$\begin{aligned}
 &\leq \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \setminus O\right) + \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \setminus A\right) \\
 &\leq \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) - \mu(A) \\
 &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
 \end{aligned}$$

■

Wówczas,

$$\left|\int_A \sin nx \, dx\right| \leq \left|\int_O \sin nx \, dx\right| + \left|\int_{A \setminus O} \sin nx \, dx\right|$$

W drugiej całce szacujemy jednostajnie moduł sinusa przez jedynkę. Wówczas  $\mu(A \setminus O) < \varepsilon$ , jako że  $\mu(A \setminus O) + \mu(O \setminus A) < \varepsilon$ . Pierwsza całka to suma po odcinkach, pokazaliśmy że zanika.

$$\leq \left|\int_O \sin nx \, dx\right| + \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



Jest jeszcze inna linia argumentu, korzystająca bardziej wprost z definicji całki po zbiorze mierzalnym. Może być ona przydatna w innych sytuacjach. Weźmy  $A \subset [0, 2\pi]$ . Wówczas możemy zapisać:

$$\int_A \sin nx \, dx = \int_{[0, 2\pi]} \chi_A \sin nx \, dx$$

Przypomnijmy sobie lemat Urysohna mówiący, że dla każdej pary niepustych, domkniętych i rozłącznych zbiorów  $D_1, D_2$  w przestrzeni metrycznej  $X$ , istnieje funkcja ciągła  $f: X \rightarrow [0, 1]$  przyjmująca wartości na tych zbiorach:  $f(D_1) = 0$  i  $f(D_2) = 1$ . Zasadniczo nawet łatwo napisać wzór tej funkcji,

$$f(x) = \frac{d(x, D_1)}{d(x, D_1) + d(x, D_2)}$$

W naszym przypadku  $A$  nie spełnia koniecznych założeń lematu jednak wiemy, że zbiór mierzalny zawsze możemy przybliżyć domkniętym zbiorem  $D \subset A$  o mierze różniącej się epsilonowo od miary  $A$ , tj.  $\mu(A \setminus D) < \varepsilon$ . Wówczas na bazie lematu Urysohna możemy skonstruować funkcję ciągłą  $f$ , która spełnia  $f(D) = 1$ . Wtedy miara zbioru na którym  $f$  różni się od  $\chi_A$  jest epsilonowo mała, tj.  $\int |f - \chi_A| < \varepsilon$ . W takim razie,

$$\left|\int_{[0, 2\pi]} \chi_A \sin nx \, dx\right| \leq \left|\int_{[0, 2\pi]} f \sin nx \, dx\right| + \int_{[0, 2\pi]} |f - \chi_A| |\sin nx| \, dx$$

$\sin nx$  można jednostajnie przeszacować przez 1, zostając z epsilon z drugiej całki.

$$\leq \left| \int_{[0,2\pi]} f \sin nx \right| + \varepsilon$$

W ten sposób zostajemy z taką przyjemną całką, która podpada pod lemat Riemanna-Lebesgue'a o transformacie Fouriera, który mówi, że transformata Fouriera funkcji  $f \in L^1$  całkowalnej w sensie Lebesgue'a zanika w nieskończoności, tj.

$$\int f(x) e^{-izx} dx \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$$

W szczególności oznacza to, że

$$\int f(x) \sin(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

To załatwia sprawę.

**Definicja 2** (Iloczyn skalarny). Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ . Iloczyn skalarny na  $V$  to odwzorowanie

$$(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

takie, że dla dowolnych  $v, w \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} (v, w) &= \overline{(w, v)} \\ (v, \lambda w) &= \lambda(v, w) \\ (v_1 + v_2, w) &= (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, v) &= 0 \iff v = 0 \end{aligned}$$

Zatem jest to odwzorowanie liniowe w drugim argumencie i antyliniowe w pierwszym. Nad ciałem  $\mathbb{R}$  redukuje się do odwzorowania dwuliniowego symetrycznego.

**Zadanie domowe 7** Iloczyn skalarny implikuje normę  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ .

a) Pokazać, że jest to norma

b) Weźmy przestrzeń unormowaną nad ciałem  $\mathbb{R}$ . Definiujemy odwzorowanie  $(v, w) = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$ . Wykazać równoważność:  $(\cdot, \cdot)$  jest iloczynem skalarnym  $\iff 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$  (tożsamość równoległoboku).

a) Trzeba sprawdzić 3 warunki.

$$\|v\| = 0 \iff (v, v) = 0 \xrightarrow{\text{def}} v = 0$$

Drugi warunek to wyciąganie stałej,

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|^2 &= (\lambda v, \lambda v) = \lambda \overline{\lambda} (v, v) = |\lambda|^2 \|v\|^2 \\ \|\lambda v\| &= |\lambda| \|v\| \end{aligned}$$

Jak zawsze, najciekawsza jest nierówność trójkąta. Tutaj potrzebujemy nierówność Schwarza. Najprościej ją udowodnić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left\| v - \frac{\|v\|^2}{(v, w)} w \right\|^2 \\
 &= \|v\|^2 + \frac{\|v\|^4 \|w\|^2}{|(v, w)|^2} - \frac{\|v\|^2}{(v, w)} (v, w) - \frac{\|v\|^2}{(v, w)} (w, v) \\
 &= \frac{\|v\|^2}{|(v, w)|^2} \left( \|v\|^2 \|w\|^2 - (v, w)(w, v) \right)
 \end{aligned}$$

Po skróceniu dodatniego wyrazu,

$$0 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 - |(v, w)|^2$$

Finalnie otrzymujemy nierówność Schwarza:

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$$

Teraz dowodzimy nierówność trójkąta tej normy,

$$\begin{aligned}
 \|v + w\|^2 &= (v + w, v + w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\operatorname{Re}(v, w) \\
 &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|(v, w)| \\
 &\stackrel{S}{\leq} \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\| \\
 &= (\|v\| + \|w\|)^2
 \end{aligned}$$

Zatem,

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Stąd  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$  jest normą.

- b) Dowód w prawą stronę jest prosty. Wiemy, że  $(\cdot, \cdot)$  jest iloczynem skalarnym, wi-  
dzimy również, że zgodnie z podanym wzorem,  $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ . Nad  $\mathbb{R}$  iloczyn  
skalarny jest symetryczny, zatem

$$\begin{aligned}
 \|v + w\|^2 &= (v + w, v + w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v, w) \\
 \|v - w\|^2 &= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(v, w)
 \end{aligned}$$

Stąd,

$$2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$$

czyli tożsamość równoległoboku jest spełniona.

Dowód w drugą stronę wymaga kilku kroków. Musimy wykazać po kolei własności  
odwzorowania  $(\cdot, \cdot)$ , które ma być iloczynem skalarnym. Ma to być odwzorowanie



symetryczne i dwuliniowe (z symetrii liniowość w jednym argumencie wystarczy). Symetria  $(v, w) = (w, v)$  jest oczywista z formuły definiującej  $(\cdot, \cdot)$ . Oczywiście jest również  $(v, v) = 0 \iff v = 0$ . Dalej wykazujemy addytywność  $(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$ . Zauważmy, że po prawej stronie będą się pojawiać wyrażenia typu  $\|v_i \pm w\|^2$ . Rozważmy więc tożsamość równoległoboku dla  $x = v_1 + w$  i  $y = v_2$ .

$$2\|v_1 + w\|^2 + 2\|v_2\|^2 = \|v_1 + v_2 + w\|^2 + \|v_1 - v_2 + w\|^2$$

Stąd wyłapujemy wyraz pojawiający się po lewej stronie dowodzonej własności.

$$\|v_1 + v_2 + w\|^2 = 2\|v_1 + w\|^2 + 2\|v_2\|^2 - \|v_1 - v_2 + w\|^2$$

Zamieniając miejscami  $v_1$  z  $v_2$  nic się nie zmienia bo po lewej stronie istotna jest tylko ich suma. Stąd,

$$= 2\|v_2 + w\|^2 + 2\|v_1\|^2 - \|v_2 - v_1 + w\|^2$$

Po lewej stronie dowodzonej własności pojawia się również analogiczny człon z  $-w$ . Stąd,

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2 - w\|^2 &= 2\|v_1 - w\|^2 + 2\|v_2\|^2 - \|v_2 - v_1 + w\|^2 \\ &= 2\|v_2 - w\|^2 + 2\|v_1\|^2 - \|v_1 - v_2 + w\|^2 \end{aligned}$$

Dodajemy stronami pary obu otrzymanych tożsamości,

$$\begin{aligned} 2\|v_1 + v_2 + w\|^2 &= 2(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2) + 2\|v_1 + w\|^2 + 2\|v_2 + w\|^2 - (*) \\ 2\|v_1 + v_2 - w\|^2 &= 2(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2) + 2\|v_1 - w\|^2 + 2\|v_2 - w\|^2 - (*) \end{aligned}$$

Po podstawieniu do definicji  $(\cdot, \cdot)$  otrzymamy

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$$

Mamy więc addytywność. Do pełnej liniowości brakuje własności  $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$  dla  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Z addytywności jest to oczywiste (zasadniczo czysto indukcyjnie) dla  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Zauważmy, że własność ta dla  $\lambda = -1$  jest również spełniona w trywialny sposób:

$$\begin{aligned} 4(v, -w) &= \|v - w\|^2 - \|v + w\|^2 = \\ &= -(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) = -4(v, w) \end{aligned}$$

Stąd, tożsamość jest spełniona dla wszystkich  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Następnym krokiem jest przedłużyć to na  $\mathbb{Q}$ . Niech  $\lambda = a/b$  gdzie  $a, b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$  oraz  $w' = w/b \in V$ . Wówczas,

$$\begin{aligned} b(v, \lambda w) &= b(v, aw') = a(v, bw') = a(v, w) \\ (v, \lambda w) &= \frac{a}{b}(v, w) = \lambda(v, w) \end{aligned}$$

Mamy już więc tę własność dla  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . Zauważmy, że  $\mathbb{R}_{\neq 0} \ni \lambda \xrightarrow{f} \frac{1}{\lambda}(v, \lambda w)$  jest ciągła dla danych  $v, w \in V$ . Pokazaliśmy, że  $f(\lambda) = (v, w)$  dla wszystkich  $\lambda \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$ . Ale  $\mathbb{Q}$  jest gęste  $\mathbb{R}$ , więc z ciągłości rozciąga się na  $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ .

Tak przy okazji zauważmy, że zdefiniowanie tego iloczynu skalarnego przez sumę/różnicę (itp) norm powoduje automatycznie, że iloczyn skalarny jest ciągły na  $V$ . Na drugich ćwiczeniach pokazywaliśmy bowiem, że norma  $\|\cdot\|$  traktowana jako odwzorowanie  $(V, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła (proste nierówności trójkąta).

Niech  $V$  będzie przestrzenią nad  $\mathbb{R}$  (nad  $\mathbb{C}$  pewnie też) gdzie  $\dim V < \infty$ . Weźmy podprzestrzeń  $W \subset V$ . Istnieje  $U$  domknięta (bo każda podprzestrzeń jest domknięta) taka, że  $V = W \oplus U$ . Niech na  $V$  będzie iloczyn skalarny, gdzie  $V$  jest Banacha w normie od iloczynu (takie coś nazywa się przestrzenią Hilberta). Niech  $U = W^\perp = \bigcap_{w \in W} \{(\cdot, w) = 0\}$ .

**Przykład patologii w nieskończonym wymiarze** Istnieje  $W \subset V$  domknięta, gdzie  $(V, \|\cdot\|)$  jest Banacha, taka, że nie istnieje domknięta  $U \subset V$  dopełniająca  $V$ , czyli taka, że  $V = W \oplus U$ .

Czyli nie działa coś, co w przestrzeni skończonego wymiaru jest oczywiste. Dlatego przestrzenie Hilberta są jakby bliższe temu przypadkowi skończonego wymiarowego, niż przestrzenie Banacha których normy nie pochodzą od iloczynu.

$$V = \ell_\infty, \|(a_n)\| = \sup |a_n|$$

$$V \supset W = C_0 = \{(a_n) : \lim a_n = 0\}$$

Sprawdźmy, że  $C_0 \subset \ell_\infty$  jest domknięta. Muszę wiedzieć, że jeśli wezmę ciąg punktów w  $C_0$ , jego granica też musi leżeć w  $C_0$ . W normie supremum ta zbieżność jest jasna. Rysujemy dwa pasy o szerokości  $\varepsilon$ . Podobny argument dlaczego jednostajna granica funkcji ciągłej jest ciągła.

Założmy, że  $\ell_\infty = C_0 \oplus U$  gdzie  $U$  jest domknięta. Przestrzenie są domknięte, więc istnieje ciągły rzut z  $\ell_\infty$  na  $U$ . Pomysł. Wyrznięmy nieprzeliczalnie dużą rodzinę podzbiorów  $\ell_\infty$  :  $\chi_\lambda \in \ell_\infty$  gdzie  $\lambda \in \Lambda$ .  $\chi_\lambda$  jest funkcją charakterystyczną podzbioru  $\mathbb{N}$ . Żadna z tych funkcji charakterystycznych nie należy do  $C_0$  dla żadnego  $\lambda$ .

Ponadto, jeśli  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , to  $|\chi_{\lambda_1}^{-1}(1) \cap \chi_{\lambda_2}^{-1}(1)| < \infty$ . Ponadto (zakładamy)  $|\Lambda| > \aleph_0$ . Konstrukcja tej rodziny jest taka:

$$\chi_\lambda : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1) \cap \mathbb{Q}$$

identyfikujemy jednoznacznie. Natomiast  $\Lambda = (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ . Wówczas  $\chi_\lambda^{-1}(1)$  to ciąg wymierny zbiegający do  $\lambda$ . Więc przecięcie takich dwóch zbiorów może być tylko skończone.

Wiemy już więc, że istnieje więc taki ciąg dużej mocy. Weźmy odwzorowanie  $L$  liniowe ciągłe na hipotetycznej przestrzeni dopełniającej  $U$ , tj.  $L \in B(U, \mathbb{R})$ . Ustalmy  $\varepsilon_0 > 0$ . Przyjrzyjmy się zbiorowi  $D_{\varepsilon_0} = \{\lambda \in \Lambda : |L(\chi_\lambda)| \geq \varepsilon_0\}$ . Twierdzimy, że moc takiego zbioru jest skończona. Dlaczego?

Wyberzmy skończoną rodzinę z  $\Lambda$ :  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in D_{\varepsilon_0}$  (parami różne). Obserwacja: sumujemy następujące wielkości:

$$v = \sum_{j=1}^n \operatorname{sgn}(L(\chi_{\lambda_j})) \cdot \chi_{\lambda_j}$$

Poza skończonym zbiorem, wszystkie nośniki są rozłączne (!). W takim razie taki zbiór skończony (ciąg) należy na pewno do  $C_0$ , bo potem jest tożsamościowo zerowy.

Od pewnego miejsca będą znaki i jedynki, zatem nie będzie dużych liczb. W  $\ell_\infty/C_0$  (modulo  $C_0$ ) napiszemy ten wektor  $v$  o normie 1.

Z drugiej strony te znaki są tak dobrane, że

$$L(v) \geq n\varepsilon_0$$

ale to wektor o normie 1, zatem  $n \leq \|L\|/\varepsilon_0$  (ciągłość). Zatem

$$\left| \lambda: |L(\chi_\lambda)| > 0 \right| \leq \aleph_0$$

dla każdego odwzorowania liniowego ciągłego.

Jeszcze do tego wrócimy.

**Zadanie domowe 4** Dany jest ciąg  $(a_n)$  o wyrazach nieujemnych  $a_n \geq 0$ . Pokaż, że jeśli dla każdego ciągu  $(b_n) \in \ell_2$  o wyrazach nieujemnych zachodzi  $\sum a_n b_n < \infty$ , to  $\sum (a_n)^2 < \infty$  (tj.  $(a_n) \in \ell_2$ ). Ponadto, uogólnij na przypadek  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie domowe 6** Niech  $(n_k)$  to ściśle rosnący ciąg gdzie  $n_k \in \mathbb{N}$ . Definiujemy zbiór  $A = \{x: \sin(n_k x) \text{ jest zbieżny}\}$ . Pokazać, że  $l_1(A) = 0$ . Warto skorzystać z zadania 5.

## Ćwiczenia 5

**Zadanie 1** Mając rozkład przestrzeni  $V = V_1 \oplus V_2$  zupełnej, z normą  $\|\cdot\|$  na podprzestrzeni  $V_1, V_2$  domknięte, wykazać że rzut  $\text{pr}: V \rightarrow V_1$  dany wzorem  $(v_1, v_2) \mapsto v_1$  jest ciągły.

05 lis 2021

$V_1, V_2$  oczywiście dziedziczą normę z  $V$  (norma obcięta do podprzestrzeni liniowej jest normą). Ciągłość odwzorowania liniowego jest równoważna ciągłości w zerze. Weźmy ciąg punktów  $v_n \in V$ . Ciąg rozkłada się na składowe  $(v_{n1}, v_{n2})$ . Zakładając  $v_n \rightarrow 0$ , chcemy pokazać, że implikuje to  $v_{n1} \rightarrow 0$ .

Na  $V_1 \oplus V_2$  ustalmy nową normę  $\|\cdot\|^\sim$  taką, że

$$\|(v_1, v_2)\|^\sim = \|v_1\| + \|v_2\|$$

Wówczas można określić operator

$$\begin{aligned} T: (V_1 \oplus V_2, \|\cdot\|^\sim) &\rightarrow (V, \|\cdot\|) \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Wówczas,

$$\|T(v_1, v_2)\| = \|v_1 + v_2\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|v_1\| + \|v_2\| \stackrel{\text{def}}{=} \|(v_1, v_2)\|^\sim$$

Stąd wnioskujemy, że odwzorowanie  $T$  jest ciągłe. Ponadto, jest również różnowartościowe, gdyż z definicji sumy prostej,  $\forall v \in V \exists! (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2: v = v_1 + v_2$  ( $T$  jest de facto mądrze wyrażoną identycznością między tymi przestrzeniami). W takim razie,

korzystając z twierdzenia o odwzorowaniu otwartym (które wymaga zupełności),  $T^{-1}$  jest ciągłe.

$$\begin{aligned}v &= v_1 + v_2 \\ T^{-1}v &= (v_1, v_2)\end{aligned}$$

Ciągłość oznacza, że istnieje taka stała  $c > 0$ , dla której  $\|(v_1, v_2)\|^\sim \leq c\|v\|$ . Weźmy ciąg  $V \ni v_n = v_{n1} + v_{n2}$ .

$$\|v_{n1}\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|v_{n1}\| + \|v_{n2}\| \stackrel{\text{def}}{=} \|(v_{n1}, v_{n2})\|^\sim \stackrel{\text{ciągłość}}{\leq} c\|v_n\|$$

Oznacza to, że jeśli  $v_n \rightarrow 0$ , to  $v_{n1} \rightarrow 0$ . Pokazaliśmy więc, że rzut jest ciągły, niezbędna była jednak zupełność przestrzeni.

## Ćwiczenia 6

19 lis 2021 **Zadanie domowe 1** Niech  $D = \{a_n : \sum |a_n| \leq 1\} \subset \ell_2$ . Teza:  $D$  jest domknięty i ma puste wnętrze.

**Zadanie domowe 2** Niech  $1 < p < q < \infty$ . Mamy oczywiste liniowe odwzorowanie włożenia  $\text{Id}_{p,q} : \ell_p \rightarrow \ell_q$ . Pokazać, że to włożenie jest ciągłe i obliczyć jego normę.

Niech  $(a_n) \in \ell_p$ . Rozważmy unormowany ciąg  $(b_n) = (a_n) / \|(a_n)\|_p$ . Wynika stąd, że  $\forall n \in \mathbb{N} |b_n| \leq 1$ . W takim razie,

$$\begin{aligned}|b_n|^q &\leq |b_n|^p \\ |a_n|^q &\leq |a_n|^p \|(a_n)\|_p^{q-p} < \infty\end{aligned}$$

Wynika stąd, że  $(a_n) \in \ell_p \implies (a_n) \in \ell_q$ , tj.  $\ell_p \subset \ell_q$  jeśli  $p < q$  (i to włożenie w ogóle ma sens). W takim razie, po zsumowaniu

$$\begin{aligned}\|(a_n)\|_q^q &\leq \|(a_n)\|_p^p \|(a_n)\|_p^{q-p} = \|(a_n)\|_p^q \\ \|(a_n)\|_q &\leq \|(a_n)\|_p\end{aligned}$$

Teraz pokażemy ciągłość, konstruując jednocześnie domysł na normę operatora.

$$\|\text{Id}_{p,q}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(a_n) \in \ell_p} \frac{\|\text{Id}_{p,q}(a_n)\|_q}{\|(a_n)\|_p} = \sup_{(a_n) \in \ell_p} \frac{\|(a_n)\|_q}{\|(a_n)\|_p} \leq 1$$

To zapewnia już ciągłość (w zasadzie nawet poprzednia nierówność ją już zapewniała). Aby pokazać, że  $\|\text{Id}_{p,q}\| = 1$ , wystarczy wskazać ciąg  $(c_n)$  wysycający tę nierówność. Zauważmy, że w naturalny sposób działa  $(c_n) = (1, 0, 0, \dots)$ .

**Uwaga 3.** Pokazaliśmy, że  $\ell_p \subset \ell_q$  dla  $p < q$ . Jak to wygląda w przestrzeniach  $L_p([0, 1])$ ? Czy włożenie  $\text{Id}_{p,1} : L_p([0, 1]) \rightarrow L_1([0, 1])$  ma sens?  $[0, 1]$  ma skończoną miarę, czyli jeśli  $f \in L_1$ , to oznacza, że osobliwości nie są szczególnie patologiczne. Intuicyjnie, warunek na bycie w  $L_p$  jest silniejszy, bo jeśli  $f \in L_p$  ma osobliwości, to  $f^p$  wybucha nawet szybciej. Spodziewamy się więc sytuacji odwrotnej niż w przestrzeniach ciągłych, mianowicie  $L_p \subset L_1$ .

Użyjmy nierówności Holdera,

$$\int 1 \cdot |f| \leq \|1\|_q \|f\|_p = \|f\|_p$$

$$\|\text{Id}_{p,1} f\|_1 \leq \|f\|_p$$

Pokazuje to, że  $L_p \subset L_1$ . Ponadto  $\|\text{Id}_{p,1}\| = 1$ , gdyż nierówność jest wysycona dla  $f = 1$ .

Podobnie, używając nierówności Holdera można pokazać, że dla skończonej przestrzeni mierzalnej  $(X, \mu)$  (przykładem jest oczywiście  $([0, 1], dl_1)$ ), zachodzi  $L_q(X) \subset L_p(X)$  dla  $1 \leq p < q \leq \infty$ .

**Zadanie domowe 3**  $T: \ell_1 \rightarrow C_0 \subset \ell_\infty$  (czyli topologia zadawana przez obcięcie  $\|\cdot\|_\infty$ ), gdzie  $C_0 = \{(a_n): \lim a_n = 0\}$ . Niech  $(Ta)_n = \sum_{k=n}^\infty a_k$  (bierzemy ogon szeregu). Zapis  $(Ta)_n$  oznacza  $n$ -ty wyraz ciągu otrzymanego z  $Ta \in C_0$ . Pokazać, że  $T$  ciągłe i policzyć  $\|T\|$ .

Zapiszmy normę występującą w definicji normy operatora. Dla dowolnego  $a \in \ell_1$ ,

$$\|Ta\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=n}^\infty a_k \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=n}^\infty |a_k|$$

$$= \sum_{k=1}^\infty |a_k| = \|a\|_1$$

Stąd,

$$\|T\| = \sup_{a \in \ell_1} \frac{\|Ta\|_\infty}{\|a\|_1} \leq 1$$

Operator  $T$  jest więc ciągły. Po wstawieniu ciągu  $c = (1, 0, 0, \dots)$  przekonujemy się, że  $\|c\|_1 = 1$  oraz  $\|Tc\|_\infty = 1$ , zatem  $\|T\| = 1$ .

**Zadanie 4-ε**  $T: L_p([0, 1]) \rightarrow L_p([0, 1])$  zdefiniowane przez  $(Tf)(x) = (x^2 + x)f(x)$ . Pokazać ciągłość i policzyć normę.

Postępujemy standardowo, z zamysłem podobnym do zadania 6.

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 (x^2 + x)^p |f|^p \leq 2^p \int_0^1 |f|^p = 2^p \|f\|_p^p$$

$$\|T\| = \sup_{f \in L_p([0,1])} \frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} \leq 2$$

Naturalnie domyślamy się, że  $\|T\| = 2$ . Trzeba wymyślić taki ciąg  $f_n \subset L_p([0, 1])$ , który wysyci tę nierówność. Posługujemy się tym samym trickiem co w zadaniu 6, tj. zauważamy, że  $(x^2 + x)$  jest funkcją ściśle rosnącą na  $[0, 1]$ , najbardziej więc  $f$  jest skalowana

na otoczeniu jedynki. Spróbujmy więc wziąć ciąg

$$\begin{aligned} f_n &= \chi_{[1-\frac{1}{n}, 1]} \\ \|f_n\|_p^p &= \frac{1}{n} \\ \|Tf_n\|_p^p &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (x^2 + x)^p dx \end{aligned}$$

Szacujemy biorąc minimum na przedziale,

$$\geq \frac{1}{n} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]^p$$

Stąd,

$$\begin{aligned} \frac{\|Tf_n\|_p^p}{\|f_n\|_p^p} &\geq \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]^p \\ \|T\| &\geq \sup_{f_n \in L_p([0,1])} \frac{\|Tf_n\|_p}{\|f_n\|_p} \\ &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] = 2 \end{aligned}$$

Wobec tego,  $\|T\| = 2$ .

**Zadanie domowe 4**  $T: L_p([0, 1]) \rightarrow L_1([0, 1])$  zdefiniowane przez  $(Tf)(x) = (x^2 + x)f(x)$ . Pokazać ciągłość i policzyć normę.

Standardowo,

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |x^2 + x| |f| \leq \int_0^1 \leq 2 \int_0^1 |f| \stackrel{H}{\leq} 2 \|f\|_p$$

To już daje ciągłość  $T$ . Spodziewamy się również, że  $\|T\| = 2$ , jednak nie jest to aż tak proste jak poprzednio, bo tym razem nie jesteśmy na tych samych przestrzeniach. Gdybyśmy spróbowali powtórzyć to samo z ciągiem  $f_n = \chi_{[1-\frac{1}{n}, 1]}$ , otrzymalibyśmy

$$\begin{aligned} \|Tf_n\|_1 &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \|f_n\|_p &= \frac{1}{n^{1/p}} \\ \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_p} &= \frac{\frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^{1/p}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Z resztą supremum tego ciągu też jest mniejsze niż 2. Możemy jednak użyć nierówności Holdera w celu jak najlepszego oszacowania normy,

$$\|Tf\|_1 \stackrel{H}{\leq} \|x^2 + x\|_q \|f\|_p$$

dla  $(p, q)$  sprzężonych. Znamy warunek na to, kiedy nierówność Holdera przechodzi w równość. Otóż  $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q \iff |f|^p = \alpha |g|^q$ . W naszym przypadku są to funkcje postaci

$$f_\alpha(x) = \alpha(x^2 + x)^{\frac{q}{p}} = \alpha \sqrt[p-1]{x^2 + x} \in L_p([0, 1])$$

...

**Zadanie domowe 5**  $L_a: C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  gdzie

$$L_a f = + \int_0^a f - \int_a^1 f$$

Pokazać, że  $L_a$  jest ciągłe i policzyć normę.

Przyjmujemy oczywiście  $\mathbb{R}$  z normą  $|\cdot|$ . Wówczas,

$$\begin{aligned} |L_a f| &= \left| \int_0^a f - \int_a^1 f \right| \leq \int_0^1 |f| = \|f\|_1 \\ &\leq \int_0^1 |f| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Stąd,

$$\|L_a\| = \sup_{f \in C([0, 1])} \frac{|L_a f|}{\|f\|_\infty} \leq 1$$

Widać więc, że  $L_a$  jest ciągły, chcielibyśmy natomiast przekonać się, że  $\|L_a\| = 1$ . Nie trudno się domyślić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, a) \\ -1 & x \in [a, 1] \end{cases}$$

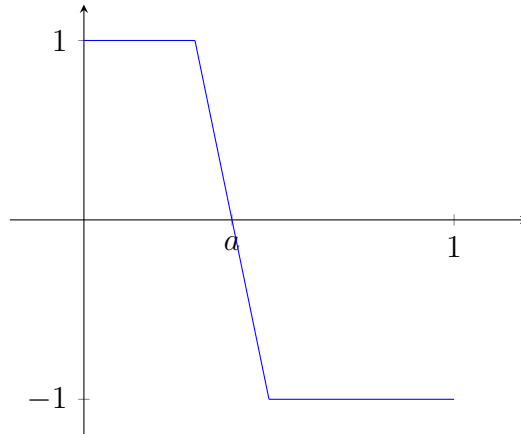
wysyciłaby nierówność, jednak ma ona taką wadę, że nie jest w  $C([0, 1])$ . Rozważmy więc ciąg funkcji ciągłych (Rys. 2)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, a - 1/n) \\ \text{liniowy spadek} & x \in [a - 1/n, a + 1/n) \\ -1 & x \in [a + 1/n, 1] \end{cases}$$

Naturalnie, położenie  $a \in (0, 1)$  może być tak niefortunne, że przedziały użyte w definicji  $f_n$  nie będą miały sensu, natomiast zawsze będzie istnieć  $N \in \mathbb{N}$  takie, że dla każdego  $n > N$ ,  $f_n$  będzie dobrze określona.  $f_n$  są tak skonstruowane, aby  $\|f_n\|_\infty = 1$ . Wówczas,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{f \in C([0, 1])} \frac{|L_a f|}{\|f\|_\infty} \geq \sup_{(f_n) \subset C([0, 1])} \frac{|L_a f_n|}{\|f_n\|_\infty} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 1 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc zestaw nierówności  $\|T\| \leq 1$  oraz  $\|T\| \geq 1$ , z których wynika, że  $\|T\| = 1$ .

Rysunek 2:  $f_n(x)$ 

**Zadanie domowe 6** Niech  $T: L_p([0, 1]) \rightarrow L_p([0, 1])$  gdzie  $p \geq 1$ , zadane przez  $(Tf)(x) = f(\sqrt{x})$ . Pokazać ciągłość i policzyć normę.

Zaczynamy klasycznie,

$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 |f(\sqrt{x})|^p dx = \int_0^1 |f(u)|^p u du$$

$u = \sqrt{x} \quad du = (2\sqrt{x})^{-1} dx$

Szacujemy  $u$  przez jedynekę,

$$\leq 2 \int_0^1 |f(u)|^p du = 2\|f\|_p^p$$

W takim razie,

$$\|T\| = \sup_{f \in L_p([0,1])} \frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} \leq 2^{1/p}$$

To gwarantuje ciągłość  $T$  i daje podejrzenie, że jego normą jest  $2^{1/p}$ . Zauważmy, że  $u(\sqrt{x})$  jest funkcją rosnącą, maksymalny wkład daje więc w otoczeniu jedynki, gdzie jest równa 1. Chcielibyśmy więc wprowadzić ciąg funkcji wysycających tę nierówność, będących indyktorami otoczenia jedynki, tj.

$$\begin{aligned} f_n &= \chi_{[1-\frac{1}{n}, 1]} \\ \|f_n\|_p &= \frac{1}{n} \\ \|Tf_n\|_p^p &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \\ \frac{\|Tf_n\|_p^p}{\|f_n\|_p^p} &= 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Stąd,

$$\|T\| \geq \sup_{(f_n) \subset L_p([0,1])} \frac{\|Tf_n\|_p}{\|f_n\|_p} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{1/p} = 2^{1/p}$$

Skoro  $\|T\| \geq 2^{1/p}$  i  $\|T\| \leq 2^{1/p}$ , to  $\|T\| = 2^{1/p}$ .