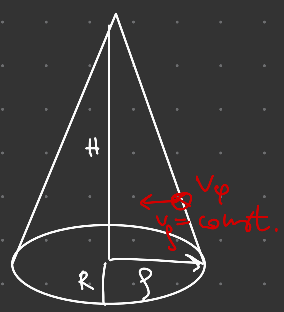
SZYMON CEDROWSKI

Zadanie 1
Pewien student fizyki wytresował swojego karalucha w ten sposób, że porusza się on zawsze ze stałą co do wartości prędkością v_0 względem podłoża po którym chodzi. Następnie student postawił karalucha na krawędzi podstawy stożka o promieniu R i wysokości H, i kazał mu dotrzeć do wierzchołka stożka w taki sposób, że odległość karalucha od osi stożka, ϱ, zmniejsza się w stałym tempie $\dot{\varrho} = -R/T$, gdzie T jest pewną stałą dodatnią. Oblicz, z jaką prędkością kątową ω względem osi stożka musi się poruszać karaluch. Znajdź lokalny promień krzywizny toru na początku ruchu karalucha.



$$v_0^2 = \varrho(t)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{R^2}{T^2} + \dot{z}^2$$

$$|v_\varrho| t = R - \varrho(t) \Rightarrow \varrho(t) = \frac{R}{T}(T-t)$$

$$\frac{H}{R} = \frac{H-z}{\varrho} \Rightarrow z(t) = H\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right) = H\frac{t}{T}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{R^2}{T^2}(T-t)^2\omega^2 + \frac{R^2}{T^2} + \frac{H^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 R^2 (T-t)^2 = v_0^2 T^2 - R^2 - H^2$$

$$\omega = \frac{\sqrt{v_0^2T^2 - R^2 - H^2}}{R(T-t)} = \frac{\alpha}{R(T-t)} \quad //$$

Jeszcze promień krzywizny.

$$\vec{v} = \left(-\frac{R}{T}, \varrho\omega, \frac{H}{T}\right), \quad |\vec{v}| = v_0 \Rightarrow \vec{t} = \frac{\vec{v}}{v_0}$$

$$\Rightarrow ds = v_0\, dt$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v_0}\frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v_0}\right)}{dt} = \frac{1}{v_0^2}\vec{a}$$

w układzie cylindrycznym...

$$\ddot{\varrho} = \ddot{z} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \left(-\varrho\omega^2, 2\dot{\varrho}\omega + \varrho\dot{\omega}, 0\right)$$

$$|\vec{a}| = \left[\varrho^2\omega^4 + 4\dot{\varrho}^2\omega^2 + \varrho^2\dot{\omega}^2 + 4\varrho\dot{\varrho}\omega\dot{\omega}\right]^{1/2}; \quad \vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{v_0^2}|\vec{a}|\cdot\vec{n} \Rightarrow K = \frac{|\vec{a}|}{v_0^2} = \frac{1}{\mathcal{R}}$$

→ prom. krzywizny

$$\Rightarrow \mathcal{R} = \frac{v_0^2}{|\vec{a}|} = \frac{v_0^2}{\left[\frac{R^2}{T^2}\frac{\alpha^4}{R^4(T-t)^2} + \left(-\frac{2R}{T}\frac{\alpha}{\cancel{R}(T-t)} + \frac{\cancel{R}}{T}\cancel{(T-t)}\frac{\alpha}{\cancel{R}(T-t)^{\cancel{2}}}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{v_0^2}{\left[\frac{\alpha^4}{T^2R^2(T-t)^2} + \frac{\alpha^2}{T^2(T-t)^2}\right]^{1/2}} = \frac{v_0^2 RT(T-t)}{\sqrt{\alpha^4 + \alpha^2R^2}}$$

gdzie $\alpha^2 = v_0^2T^2 - R^2 - H^2$ //

$$\Rightarrow \text{w } t=0: \quad \mathcal{R} = \frac{v_0^2RT^2}{\sqrt{\alpha^4 + \alpha^2R^2}}$$