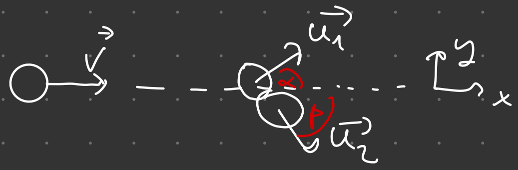
TEST

SZYMON CEDROWSKI

(1)

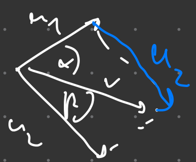


$$m\vec{v} = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 \quad \text{oraz} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}$$

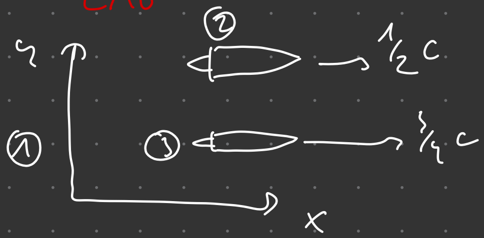
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \longrightarrow \quad \longleftarrow v^2 = u_1^2 + u_2^2$$

z tw. Pitagorasa (odwrotnego) wynika, że długości wektorów $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}$ tworzą Δ prostokątny, a $|\vec{v}|$ jest przeciwprostokątną, zatem $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ //



(3) LAB



$$v_{3/1} = \frac{v_{3/2} + v_{2/1}}{1 + \frac{v_{3/2} v_{2/1}}{c^2}}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{v_{3/2} + \frac{1}{2}}{1 + v_{3/2} \cdot \frac{1}{2}}$$

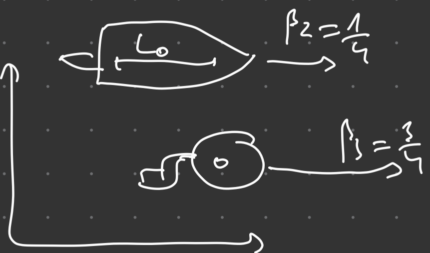
$$\frac{3}{4} + \frac{3}{8} v_{3/2} = v_{3/2} + \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{5}{8} v_{3/2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{v_{3/2} = \frac{2}{5} c}$$

(4) VAS1 f_0

$\beta = -\frac{3}{4}$ ($\beta > 0$, gdy się zbliża)

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{1/4}{7/4}} = \frac{100}{\sqrt{7}} \approx 37{,}8\ \mathrm{MHz} < f_0$$

(5)



$$\beta_3 = \frac{\beta_{3/2} + \beta_2}{1 + \beta_{3/2}\beta_2}$$

$$\beta_3 + \beta_2\beta_3\beta_{3/2} = \beta_{3/2} + \beta_2$$

$$\beta_{3/2} = \frac{\beta_3 - \beta_2}{1 - \beta_2\beta_3} = \frac{1/2}{1 - \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{13} = \frac{8}{13}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta_{3/2}^2} = L_0 \sqrt{1 - 8^2/13^2}$$

6

$\beta = 0{,}99$ $\qquad \tau = 2\mu s$

$$t = \gamma\tau \,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}99^2}} \simeq 7$$

$\Rightarrow t \simeq 14\,\mu s \rightarrow$ czas rozpadu w naszym układzie

$$\Rightarrow s = t\beta c = 14\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}99\cdot 3\cdot 10^{8}$$

$$= 99\cdot 3\cdot 14\ m = 4158\ m$$

7

$$E = \gamma m_e c^2 \Rightarrow 10 = \frac{E}{m_e c^2} = \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 10 \qquad \frac{1}{100} = 1-\beta^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{99}{100}} \simeq 0{,}995$$

8

Pokazywaliśmy, że $E = E'$, zatem

$$\frac{d}{dt}(mv\gamma) = qE \Rightarrow \frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{qE}{m}dt$$

całkujemy

$$\Rightarrow \frac{qE}{m}t + C = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \,, \quad v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

u nas $t = \frac{2mc}{qE} \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2c$

$$\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 4c^2 \Rightarrow v^2 = 4c^2 - 4v^2 \Rightarrow 5v^2 = 4c^2$$

$$\underline{v = \frac{2}{\sqrt{5}}c}$$

9

Dla gazów omawianych na wykładzie,

$$T\cdot V^{2/3} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow T_0 L^{2/3} = T\cdot\left(\frac{L}{27}\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow T = T_0\cdot 27^{2/3} = 9T_0 = 2700\ K$$

10

$S = 2\,m^2$ 

zgodnie z treścią, deszcz możemy potraktować jako ośrodek, oddziałujący z samochodem przez zderzenia cząsteczek, niezależnie.

Na wykładzie rozważaliśmy ten problem otrzymując zależność:

$$t(v) = \frac{m}{2\rho S}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right)$$

Dla $v = 5\,m/s$ i $v_0 = 10\,m/s$,

$$t = \frac{1000}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1000}{4} = 25\,s$$

2 Zmiana pędu odbijającego się fotonu względem nieruchomego lustra to:

$$\Delta p = 2\cdot hf/c$$

w jednostce czasu takich fotonów jest N.

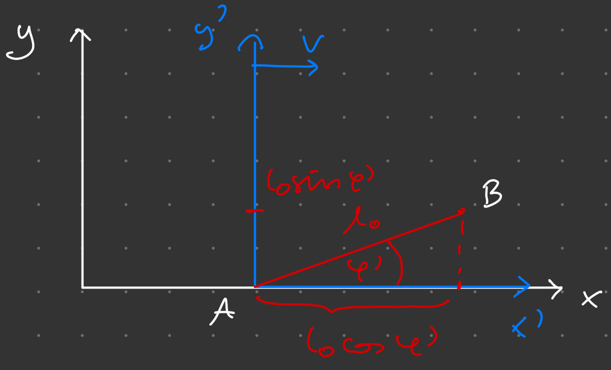
$$\Rightarrow \frac{\Delta p_c}{\Delta t} = \frac{2Nhf}{c\,\Delta t} = Mg$$

$$\frac{Nhf}{\Delta t} = P$$

$$\Rightarrow P = \frac{Mgc}{2}$$

ZADANIE 1 SZYMON CEDROWSKI

Zadanie 1
Układ odniesienia U' porusza się wzdłuż osi x ze stałą prędkością V w układzie odniesienia U. Osie x i x' układów U i U' pokrywają się. W układzie U' spoczywa pręt o długości l_0 tworzący kąt φ' z osią x'. Jaką długość pręta l i jaki kąt φ utworzony przez pręt z osią x zmierzy obserwator w U?



Przyjmujemy synchronizację obu układów w chwili $t = t' = 0$, tj.:

$$(0,0,0)_U = (0,0,0)_{U'}$$

Badamy położenie końca pręta.

Kontrakcji ulega składowa równoległa do osi x', składowa prostopadła pozostaje bez zmian.

$$\begin{cases} x_B = \dfrac{l_0 \cos\varphi'}{\gamma} = l_0 \cos\varphi' \left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ y_B = y_B' = l_0 \sin\varphi' \end{cases}$$

Długość w układzie U:

$$l = \left(x_B^2 + y_B^2\right)^{1/2} = l_0 \left(\cos^2\varphi' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \sin^2\varphi'\right)^{1/2}$$

$$= l_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2\varphi'\right)^{1/2}$$

Kąt nachylenia pręta w U:

$$\tan\varphi = \frac{y_B}{x_B} = \frac{l_0 \sin\varphi'}{l_0 \cos\varphi'} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \tan\varphi' \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

//

ZADANIE 3 SZYMON CEDROWSKI

Zadanie 3
W akceleratorze protony p padają na nieruchomą tarczę składającą się z jąder pierwiastka X. Oblicz minimalną energię protonów E_p potrzebną do wyprodukowania antyprotonów $\bar{p}$ w procesie

$$p + X \longrightarrow X + p + p + \bar{p}\ .$$

Wykonaj obliczenia dla tarczy wodorowej, przyjmując: $m_X = m_p = 938\,\mathrm{MeV}/c^2$.

LAB przed (1)

p $E_p, \vec{p}_p$ X

SM po (2')

minimalna energia protonów (E_p) $\Leftrightarrow$ $\vec{p}_i' = 0$

X, p, $\bar{p}$, p $\longrightarrow$ $\vec{p}_i' = 0$

Zapiszemy 4-pędy układów:

$$\vec{P}_1 = \left(E_p + m_X c^2,\ p_p c,\ 0 \right) \quad \text{(lab przed)}$$

$$\vec{P}_2' = \left([3m_p + m_X] c^2,\ 0,\ 0 \right) \quad \text{(SM po)}$$

$$\vec{P}_1^{\,2} = \vec{P}_2'^{\,2} \Leftrightarrow (3m_p + m_X)^2 c^4 = (E_p + m_X c^2)^2 - (p_p c)^2$$

$$= \underbrace{E_p^2 - (p_p c)^2}_{(m_p c^2)^2} + (m_X c^2)^2 + 2E_p m_X c^2$$

$$\Rightarrow 2E_p m_X c^2 = c^4 \left[9m_p^2 + \cancel{m_X^2} + 6m_p m_X - m_p^2 - \cancel{m_X^2} \right]$$

$$= c^4 \left[8m_p^2 + 6m_p m_X \right]$$

$$\Rightarrow E_p = c^2 m_p \left(4\frac{m_p}{m_X} + 3 \right) \quad //$$

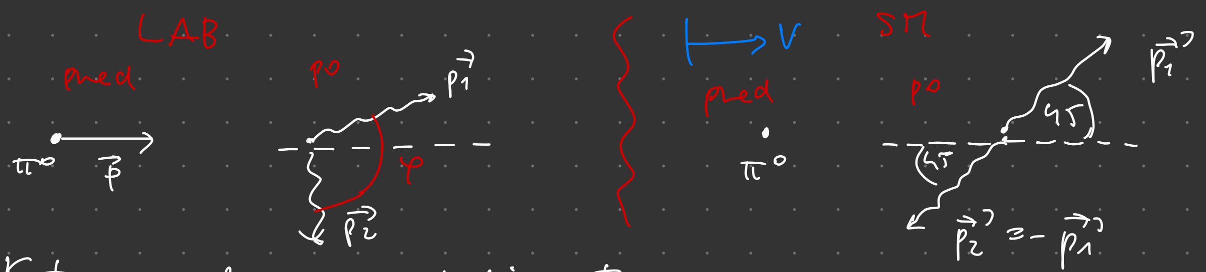
Czas coś policzyć. $m_X = m_p = 938\ \mathrm{MeV}/c^2$

$$E_p = \cancel{c^2} \cdot 938 \frac{\mathrm{MeV}}{\cancel{c^2}} (4 + 3) = 6566\ \mathrm{MeV}$$

ZADANIE 4

SZYMON CEDROWSKI

Zadanie 4
Mezon π^0 o masie $m = 140$ MeV/c^2 i pędzie $p = 500$ MeV/c w układzie laboratorium rozpada się na dwa fotony ($\pi^0 \to \gamma\gamma$) w taki sposób, że jeden z fotonów jest emitowany w ich układzie środka masy pod kątem 45° do kierunku lotu π^0. Znajdź kąt między fotonami w układzie laboratoryjnym.



Kąt rozpadu w labie to:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p_1}\cdot\vec{p_2}}{|\vec{p_1}||\vec{p_2}|}$$

Pędy fotonów w ich układzie SM:

$$p_{1r}' = \left(p_1'c, \frac{p_1'c}{\sqrt2}, \frac{p_1'c}{\sqrt2}\right), \quad p_{2r}' = \left(p_1'c, -\frac{p_1'c}{\sqrt2}, -\frac{p_1'c}{\sqrt2}\right)$$

Oczywiście SR fotonów $\equiv$ SM mezonu,

$$mc^2 = 2p_1'c, \quad p_{1x}' = \frac{mc}{2\sqrt2}, \quad p_{1y}' = \frac{mc}{2\sqrt2}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_{1x} \\ p_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mc}{2} \\ \frac{mc}{2\sqrt2} \\ \frac{mc}{2\sqrt2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mc}{2}\gamma\left(1 + \beta/\sqrt2\right) \\ \frac{mc}{2}\gamma\left(\beta + 1/\sqrt2\right) \\ mc/(2\sqrt2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{p_1} = \frac{mc}{2}\left(\gamma\beta + \frac{\gamma}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$$

analogicznie obliczamy $\vec{p_2}$.

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ p_{2x} \\ p_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mc}{2}\gamma\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt2}\right) \\ \frac{mc}{2}\gamma\left(\beta - \frac{1}{\sqrt2}\right) \\ -\frac{mc}{2\sqrt2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p_2} = \frac{mc}{2}\left(\gamma\beta - \frac{\gamma}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$$

$$\vec{p_1}\cdot\vec{p_2} = \frac{m^2c^2}{4}\left(\gamma^2\beta^2 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

Trzeba jeszcze powiązać γ ze znanym nam pędem mezonu. Rozpatrzmy energię mezonu.

$$\gamma mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2} = 1-\frac{1}{1+(p/mc)^2}$$

$$= \frac{(p/mc)^2}{1+(p/mc)^2}$$

$$\Rightarrow \gamma^2\beta^2 = (p/mc)^2$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = \frac{m^2c^2}{4}\left(\frac{p^2}{m^2c^2} - \frac{1+p^2/m^2c^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{m^2c^2}{4}\left(\frac{2p^2}{2(mc)^2} - \frac{(mc)^2+p^2}{2(mc)^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(mc)^2}{4}\left(\frac{p^2-(mc)^2}{2(mc)^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{(mc)^2}{4}\gamma^2\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{(mc)^2}{4}\left(1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right)$$

$$= \frac{(mc)^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{p_1 p_2} = \frac{p^2-2(mc)^2}{2(mc^2)} \Big/ \left(\frac{2(mc)^2+p^2}{2(mc)^2}\right)$$

$$= \frac{p^2-2(mc)^2}{2(mc)^2+p^2}$$

$m = 140$ MeV/c²

$p = 500$ MeV/c

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{500^2 - 2\cdot 140^2}{2\cdot 140^2 + 500^2} = \frac{527}{723}$$

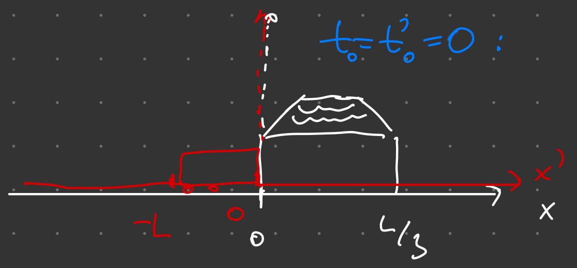
$$\Rightarrow \varphi \simeq 43°$$

ZADANIE 2 SZYMON CEDROWSKI

Zadanie 2

Pewien sprytny student skonstruował podświetlny pojazd o długości L i postanowił go zamknąć na chwilę w stodole o długości $L/3$. Załóż, że drzwi wejściowe i wyjściowe znajdują się odpowiednio na początku i na końcu stodoły, a stodoła jest tak zbudowana, że w każdej chwili – w układzie stodoły – przynajmniej jedne drzwi muszą być zamknięte. Przyjmij, że zdarzenie, że przód pojazdu pokrywa się z drzwiami wejściowymi stodoły, odpowiada chwilom $t = 0$ (układ stodoły) i $t' = 0$ (układ pojazdu) oraz wyznacza początki układów współrzędnych U i U'.

a) Jaka musi być minimalna prędkość pojazdu, aby się to udało?
b) Dla wyznaczonej w poprzednim punkcie prędkości minimalnej podaj w układzie stodoły współrzędne zdarzenia, które w układzie pojazdu scharakteryzowane jest tym, że następuje na przodzie pojazdu w momencie, gdy drzwi wejściowe stodoły zamykają się.
c) Czy z punktu widzenia kierowcy pojazd będzie choć przez chwilę zamknięty w stodole?



a) Zachodzi kontrakcja wzdłuż osi ruchu, tj.

$$\frac{L}{\gamma} \leq \frac{L}{3} \Rightarrow \gamma \geq 3$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \beta_{min} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow v_{min} \simeq 0{,}94c$$

b) Rozważamy sytuację dla β_{min}, zatem opisywane zdarzenie można równoważnie opisać jako takie, gdzie dla obserwatora w stodole bolid dociera do jej końca (wówczas tył wjeżdża do początku i drzwi się zamykają).

$$A = (ct, L/3)_U = (ct', 0)_{U'}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ L/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \gamma\beta ct' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \gamma t' \\ t' = \dfrac{L}{3\gamma\beta c} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{L}{3\beta c} = \frac{L}{2\sqrt{2}c}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{L}{2\sqrt{2}}, \frac{L}{3}\right)_U = \left(\frac{L}{6\sqrt{2}}, 0\right)_{U'}$$

c) Z punktu widzenia kierowcy to stodoła ulega kontrakcji, więc wydaje mu się nawet jeszcze krótsza niż $L/3$, a on sam we własnym układzie ma długość L.

$\Rightarrow$ pojazd nigdy nie stwierdzi, że jest zamknięty w stodole.