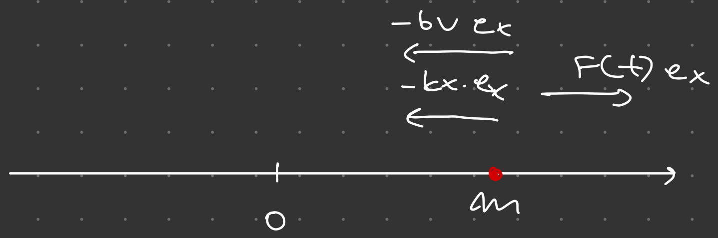
Zadanie 3
Ciało o masie m porusza się wzdłuż osi x pod działaniem następujących trzech sił: siły harmonicznej o wartości kx skierowanej przeciwnie do wychylenia ciała z punktu $x=0$, siły oporu o wartości bv, gdzie v jest wartością prędkości ciała, oraz bezpośrednio zależnej od czasu siły $F(t) = F_0t/T$ skierowanej wzdłuż osi x i działającej w przedziale czasu od $t=0$ do $t=T$. W chwili początkowej $t=0$ ciało spoczywało w punkcie $x=0$. Znajdź położenie ciała w chwili $t=T$, jeśli wiadomo, że zachodzi $b^2 < 4km$.

SZYMON CEDROWSKI

$b^2 < 4km$

$x(0) = 0$

$x(T) = ?$



$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + \frac{F_0}{T}t$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{F_0}{mT}\cdot t$$ Niech $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

RORJ: $x \sim e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 + \frac{b\lambda}{m} = 0$

$\Delta = \frac{b^2}{m^2} - 4\omega_0^2$. Niech $\frac{b}{m} = 2c$,

$= 4c^2 - 4\omega_0^2$ $\qquad b^2 < 4km = 4\omega_0^2 m^2$

$\Rightarrow 4c^2 < 4\omega_0^2 \Rightarrow \Delta < 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -c \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - c^2}}_{=\tilde{\omega}}$$

$$\Rightarrow x_0(t) = Ae^{(-c+i\tilde{\omega})t} + Be^{(-c-i\tilde{\omega})t} = e^{-ct}\left[D\sin(\tilde{\omega}t) + E\cos(\tilde{\omega}t)\right]$$

RSRN: Niejednorodność wielomianowa ma rozwiązanie w wielomianie. Postulujemy więc $x_s(t) = \varepsilon t + \delta$

$$\omega_0^2 \varepsilon t + \delta\omega_0^2 + 2c\varepsilon = \frac{F_0}{mT}\cdot t$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \varepsilon = \frac{F_0}{mT}; \quad \delta\omega_0^2 = -2c\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{F_0}{mT\omega_0^2}, \quad \delta = -\frac{2c}{\omega_0^2}\frac{F_0}{mT\omega_0^2} = -\frac{bF_0}{m^2T\frac{k^2}{m^2}}$$

$$\Rightarrow x_s(t) = \frac{F_0 t}{Tk} - \frac{bF_0}{Tk^2} = \frac{F_0}{Tk}\left(t - \frac{b}{k}\right)$$

Rozwiązanie pełne:

$$\Rightarrow x(t) = e^{-ct}\left(D\sin\tilde{\omega}t + E\cos\tilde{\omega}t\right) + \frac{F_0}{Tk}\left(t - \frac{b}{k}\right)$$

$x(0) = 0 \Rightarrow E = \frac{F_0 b}{Tk^2}$

w $t=0$ siła jest zerowa, więc $\dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = -ce^{-ct}\left(D\cos\tilde{\omega}t - E\sin\tilde{\omega}t\right) + \frac{F_0}{Tk}$$

$$\dot{x}(t=0) = -cD + \frac{F_0}{Tk} \Rightarrow D = \frac{F_0}{Tkc}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-ct}\left(\frac{F_0}{Tkc}\sin\tilde{\omega}t + \frac{F_0 b}{Tk^2}\cos\tilde{\omega}t\right) + \frac{F_0}{Tk}\left(t - \frac{b}{k}\right)$$

Położenie $x(T)$:

$$x(T) = e^{-cT}\left(\frac{F_0}{Tkc}\sin\tilde{\omega}T + \frac{F_0 b}{Tk^2}\cos\tilde{\omega}T\right) + \frac{F_0}{k} - \frac{F_0 b}{Tk^2}$$

//