Wstęp do kosmologii
Wszechświat wypełniony samą materią

Szymon Cedrowski

Lekcja 10

1 Definicje i założenia

Głównym założeniem klasycznej kosmologii jest tzw. zasada kosmologiczna mówiąca, że w wielkich skalach wszechświat jest jednorodny i izotropowy – wszędzie jest jednakowa gęstość i wszechświat okiem dowolnego obserwatora w dużych skalach będzie wyglądał jednakowo. Ponadto zakładamy, że w każdym miejscu działają jednakowe prawa fizyki, a ze względu na duże skale ewolucję wszechświata determinuje grawitacja. W końcu, przyjmujemy, że tą teorią grawitacji jest Ogólna Teoria Względności.

Jeszcze nie będziemy się wgłębiali w matematykę teorii względności, metryki i tego typu rzeczy. Wystarczy nam wiedzieć, że rozwiązując równania Einsteina dla wszechświata opisanego w pierwszym akapicie otrzymamy jawne rozwiązanie wiążące ewolucję czasoprzestrzeni z budżetem energetycznym wszechświata. W najprostszym przypadku zauważamy, że na ten budżet składa się materia (nierelatywistyczna). Ewolucję takiego wszechświata opisuje model Einsteina-de Sittera.

Definicja 1 (Czynnik skali)**.** Rozwiązanie ogólne dla jednorodnego wszechświata dopuszcza zmianę odległości między ciałami, wskutek rozszerzania się/kurczenia czasoprzestrzeni. Za globalny punkt odniesienia przyjmijmy czasy dzisiejsze oznaczane indeksem 0.
t_0 – czas mierzony od początku istnienia wszechświata do czasów dzisiejszych (wiek wszechświata)
r_0 – odległość między dowolnymi obiektami w czasach dzisiejszych
Zgodnie z rozwiązaniem równań, odległość zmienia się w sposób jednakowy między dowolnymi dwoma obiektami, zatem możemy wprowadzić czynnik skali $a(t)$, taki że:

$$r(t) = a(t)r_0$$

Zauważmy, że $a_0 = 1$. Czynnik skali pokazuje ułamek rozmiarów obecnego wszechświata w danym czasie t.

Wyznaczając funkcję $a(t)$ możemy odpowiedzieć na pytanie, jak w historii zmieniały się rozmiary i jak będą się zmieniały w przyszłości.

Definicja 2 (Parametr Hubble'a)**.** Jednym z podstawowych i bardzo użytecznych parametrów używanych w kosmologii jest parametr Hubble'a $H(a)$. Definiujemy go jako tempo ekspansji podzielone przez czynnik skali, tj.

$$H(a) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

W czasach dzisiejszych możemy mówić o stałej Hubble'a: $H(a_0) \equiv H_0$.

2 Model Einsteina-de Sittera

Podstawowym równaniem w kosmologii, otrzymywanym z OTW (jednakże, w następnym skrypcie wyprowadzimy je sobie z pewnymi zastrzeżeniami także z teorii Newtona) jest równanie Friedmana. Dla płaskiego wszechświata, tj. takiego, gdzie raz puszczone wiązki równoległe pozostaną równoległe, w którym nie mamy energii próżni, równanie wygląda następująco:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{1}$$

gdzie przez ρ oznaczamy zmienną w czasie (ale nie przestrzeni) gęstość materii. Spróbujmy wyznaczyć zależność funkcyjną $a(t)$. Najpierw zastanówmy się, jak ρ zależy od czynnika skali. Rozważmy sferę o promieniu $r(t)$ wokół obserwatora. Przyjmujemy, że masa zawarta w takiej zmieniającej rozmiar sferze jest stała.

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{M}{V(t)} = \frac{M}{\alpha r(t)^3} = \frac{M}{a(t)^3}\frac{1}{\alpha r_0^3} \\ \rho(a) &= \rho_0 a^{-3} \end{aligned}$$

Albo po prostu na rozumek, materia może rozprzestrzeniać się w 3 kierunkach przestrzennych, więc gęstość musi maleć z 3 potęgą rozmiarów. Wobec tego, otrzymujemy następujące równanie:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3}$$

Z użyciem parametru i stałej Hubble'a równanie 1 się nawet upraszcza:

$$\begin{aligned} \frac{H(a)^2}{H_0^2} &= \frac{\rho(a)}{\rho_0} \\ \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= H_0\frac{1}{a^{3/2}} \end{aligned} \tag{1a}$$

Rozwiązujemy proste równanie różniczkowe przenosząc jednoimienne zmienne na jedną stronę i całkując obustronnie.

$$\begin{aligned} \int a^{1/2}\,\mathrm{d}a &= H_0 \int \mathrm{d}t \\ \frac{2}{3}a^{3/2} &= H_0 t + C \end{aligned}$$

Podstawiając warunek początkowy $a = 0, t = 0$ otrzymujemy $C = 0$.

$$a(t) = \left(\frac{3H_0}{2}\right)^{2/3} t^{2/3} \tag{2}$$

Stąd prosto możemy wyznaczyć wiek wszechświata w modelu de Sittera, podstawiając $t = t_0$.

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \approx 9.5\,\mathrm{Gyr}$$

Otrzymaliśmy zdecydowanie zbyt młody wszechświat. Wniosek jest więc taki, że albo fizyka naszego modelu jest niepoprawna, albo na budżet energetyczny wszechświata nie składa się jedynie materia! Jesteśmy emocjonalnie związani z naszymi teoriami, więc wygodniej będzie postulować istnienie innych elementów modelu :)

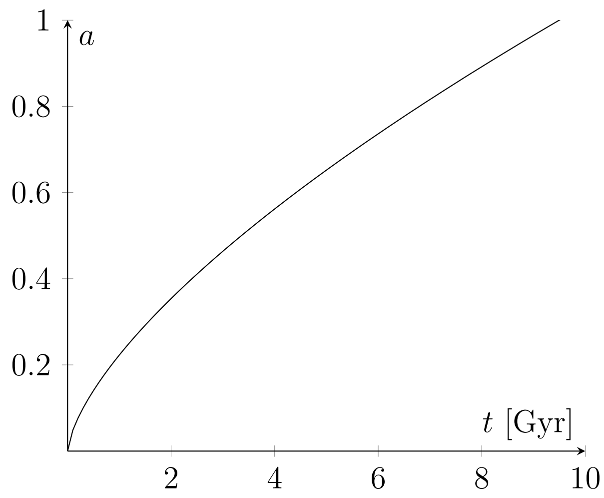
Możemy jeszcze względnie uprościć równanie 2 dzieląc przez analogiczne równanie dla czasów dzisiejszych.

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{2a}$$

Mamy już wszystko wyjaśnione, to możemy zadać pytanie jak zmienia się gęstość materii wraz z ewolucją wszechświata. Przy tym pamiętamy, że $\rho_0 = \dfrac{3H_0^2}{8\pi G}$.

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{3H_0}{2} t\right)^{-2} = \frac{1}{6\pi G t^2} \tag{3}$$

Zatem gęstość maleje z kwadratem czasu.
Często w mediach słyszy się też takie hasła typu „ekspansja wszechświata przyspiesza!”, albo „czy wszechświat czeka wielki kolaps” i wiele innych... Mając czynnik skali jesteśmy w stanie odpowiedzieć na te pytania. Co prawda nasza odpowiedź w tym prostym modelu nie będzie nawet poprawna, ale w ramach ćwiczeniowych policzmy to sobie.



Rysunek 1: Funkcja $a(t)$

Chcemy zobaczyć, czy ekspansja przyspiesza czy zwalnia, w tym celu musimy policzyć funkcję $\ddot{a}$. Jeśli ktoś umie podstawy analizy matematycznej, to patrząc na sam wykres powie, że funkcja jest wklęsła na całym przedziale, zatem $\ddot{a} < 0$. My jednak dwukrotnie zróżniczkujemy tę funkcję i się o tym przekonamy.

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}t^{2/3}}{\mathrm{d}t} = \frac{2A}{3}t^{-1/3} = Bt^{-1/3}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2} = B\frac{\mathrm{d}t^{-1/3}}{\mathrm{d}t} = -\frac{B}{3}t^{-4/3} < 0$$

W związku z powyższym, we wszechświecie z samą materią ekspansja spowalnia, aczkolwiek do samego końca wszechświat się rozszerza (gdyż $\dot{a} > 0$).

3 Mierzenie odległości

3.1 Przesunięcie ku czerwieni (redshift)

Wprowadźmy pewną często używaną wielkość fizyczną, pojawiającą się w wielu działach fizyki. Fale elektromagnetyczne mogą z wielu powodów zmieniać swoje długości, a co za tym idzie – kolor światła wysłanego przez dany obiekt nie musi pokrywać się z kolorem, który widzimy jako obserwator. Jednym z przykładów, który mogliście już poznać jest efekt Dopplera.

Definicja 3 (Redshift).

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1$$

gdzie λ_o to długość fali rejestrowanej przez obserwatora, a λ_e długość fali wysyłanej przez źródło.

W przypadku kosmologii, fala elektromagnetyczna zmienia swoją długość proporcjonalnie do zmiany skal wszechświata. Przyjmijmy, że obserwujemy falę wysłaną do nas w czasie t_e i odbieramy ją dzisiaj, w czasie $t_o = t_0$. W tym czasie wszechświat zmienił swoje rozmiary a_o/a_e razy. W związku z tym,

$$\lambda_o = \lambda_e \cdot \frac{a_o}{a_e} = \lambda_e \cdot \frac{1}{a_e}$$

Przekształcamy wzór na redshift:

$$z = \frac{1}{a_e} - 1$$

Twierdzenie 1. Uzyskaliśmy w ten sposób równoważny sposób badania historii wszechświata z tym, że parametr z jest wyznaczalny obserwacyjnie. Mamy następującą formułę do konwersji na czynnik skali:

$$1 + z = \frac{1}{a(t_e)}$$

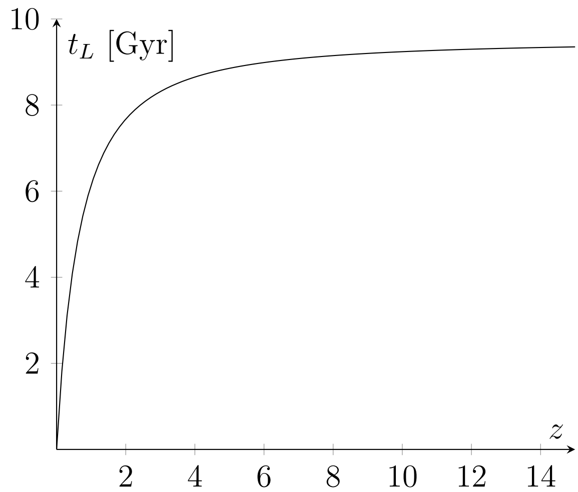
3.2 Lookback time

Wyznaczając funkcję $t(z)$ dowiadujemy się na jaki okres historii wszechświata patrzymy mierząc dane przesunięcie ku czerwieni. W modelu de Sittera:

$$1 + z = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3}$$
$$t(z) = t_0(1+z)^{-3/2}$$

Czasem wygodniej spytać jak długo leciała do nas dana fala, czyli jak daleko w przeszłość się cofamy patrząc na pewien obiekt. Tzw. lookback time wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} t_L(z) &= t_0 - t(z) \\ &= t_0\Big[1 - (1+z)^{-3/2}\Big] \end{aligned}$$



Rysunek 2: Lookback time, czyli jak daleko w przeszłość patrzymy.

3.3 Dystans właściwy i współporuszający się

Po angielsku brzmi chyba trochę lepiej: proper distance oraz comoving distance. W gruncie rzeczy (mimo wzorów, które niektórych zaraz może przestraszą) sprawa jest bardzo prosta! Cofnijmy się do definicji czynnika skali:

$$r(t) = a(t)r_0$$

Dystans właściwy to taki, jaki byśmy zmierzyli w momencie t między pewnymi obiektami, gdybyśmy przyłożyli linijkę (pamiętajmy, że rozważamy płaską czasoprzestrzeń). Jest to więc po prostu $r(t)$.

Dystans współporuszający się między dowolnymi obiektami jest stały w czasie – jego założeniem jest usunięcie efektu ekspansji. Uwaga! Jest on stały tylko jeśli pomijając ekspansję, dane obiekty nie oddalają się od siebie z innych przyczyn. Naszym globalnym punktem odniesienia były czasy dzisiejsze, zatem comoving distance r_0 jest po prostu tym dystansem, który mierzymy dzisiaj.

Obiecałem, że jeszcze nie będę wprowadzał zbyt zaawansowanego aparatu matematycznego, żadnych metryk ani form różniczkowych, zatem rozważyliśmy sobie na kółku dyskretne zmiany czynnika skali i przeanalizowaliśmy podróż fotonu w takim wszechświecie. Dystans właściwy mierzyliśmy jako drogę, którą przebył foton od czasu emisji t_e do obecnego czasu t_0. Analiza ta doprowadziła nas do wniosku, że dystans r_0 przebyty przez foton możemy policzyć w poniższy sposób:

$$r_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{c\Delta t_i}{a_i}$$

Następnie całkując w rozumku doszliśmy do wniosku, że poprawnym wzorem dla ciągłych czynników skali będzie:

$$r_0 = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

Stąd już proste wnioski.

Twierdzenie 2 (Comoving distance)**.** Jeśli t_e jest czasem emisji, a t czasem odbioru, to:

$$r_0(t_e, t) = c \int_{t_e}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

Twierdzenie 3 (Proper distance)**.** Przy jednakowych oznaczeniach,

$$r(t_e, t) = a(t)c \int_{t_e}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

Wniosek 1 (Dystans w czasie emisji)**.** Czasem przyda nam się także odległość między źródłem a odbiorcą w momencie, w którym został wysłany sygnał. Tę wartość oznaczymy sobie przez r_e:

$$r_e(t_e, t) = a(t_e)c \int_{t_e}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

4 Horyzonty kosmologiczne

Zrozumieliśmy jak wszechświat zmienia swoje rozmiary, jak wiąże się z tym rejestrowanie sygnałów oraz czym jest dystans. Mając takie tło teoretyczne możemy zacząć zastanawiać się nad poważnymi problemami, takimi jak: jaki jest nasz horyzont poznawczy? Gdzie znajduje się najdalszy obserwowalny obiekt? Czy kiedykolwiek będziemy w stanie zobaczyć wszystko co kiedykolwiek powstało we wszechświecie?...

4.1 Horyzont cząstek

Zaczniemy od pytania, jak daleko znajduje się obiekt, którego światło wysłane na początku istnienia wszechświata właśnie do nas dociera, czyli gdzie jest najdalszy obecnie obserwowalny obiekt? Uwaga! W tym rozważaniu pomijamy oczywiście epoki, w których wszechświat był nieprzenikalny przez promieniowanie, a zatem nie możemy go zaobserwować (przynajmniej nie w taki sposób).
Sprawa jest prosta: coś wysyła fotony w czasie $t = 0$ i docierają do nas w czasie t. Jaki jest horyzont cząstek d_p?

Definicja 4 (Horyzont cząstek)**.**

$$d_p(t) = a(t)c \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

4.2 Horyzont zdarzeń

W przypadku czarnych dziur horyzont zdarzeń odpowiada miejscu, poza które zewnętrzny obserwator nie jest w stanie zajrzeć. Tak samo w kosmologii horyzont zdarzeń mówi nam w jakiej odległości znajduje się najdalszy obiekt który kiedykolwiek bylibyśmy w stanie zobaczyć. Jest to niejako ostateczny horyzont poznawczy.
Tym razem: coś wysyła fotony w chwili t i docierają do nas w możliwie najodleglejszym czasie, tj. w momencie końca wszechświata. Możemy przyjąć, że tej chwili odpowiada $t_{\max} \to \infty$, jeśli nie będzie jakiegoś wielkiego kolapsu itp.

Definicja 5 (Horyzont zdarzeń)**.**

$$d_e(t) = a(t)c \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

Jak interpretować tę wartość? Jeśli jakiś obiekt znajdujący się w odległości $r > d_e$ wyemituje dzisiaj światło, to już nigdy nie zobaczymy go takiego, jaki jest dzisiaj.

Na kółku liczyliśmy sobie jeszcze promienie horyzontów w modelu de Sittera, a także tempo ekspansji tych horyzontów. Polecam wykonać rachunki w ramach ćwiczenia. Tu przywołam tylko istotny wniosek dotyczący modelu Einsteina-de Sittera. We wszechświecie z samą materią dostajemy $d_e(t) = +\infty$. Oznacza to, że nie ma takiego obiektu, którego kiedykolwiek nie dałoby się zaobserwować. W rzeczywistym wszechświecie nie jest tak kolorowo…

4.3 Prawo i horyzont Hubble'a

Na deserek wyprowadzimy sobie prawo Hubble'a.

$$\begin{aligned} r(t) &= a(t)r_0 \\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= v_{\mathrm{rec}}(t) = \dot{a}r_0 + a\dot{r} \\ &= \frac{\dot{a}}{a} \cdot ar_0 + a\dot{r} \end{aligned}$$

Twierdzenie 4 (Prawo Hubble'a)**.**

$$v_{\mathrm{rec}}(t) = H(t)r(t) + a(t)v_{\mathrm{wł},0}$$

Dla czasów dzisiejszych:

$$v_{\mathrm{rec},0} = H_0 r_0 + v_{\mathrm{wł},0}$$

Stąd narzuca się jeszcze jeden rodzaj horyzontu kosmologicznego. W jakiej odległości od obserwatora znajdują się obiekty oddalające się z prędkością równą prędkości światła? (zakładamy, że $v_{\mathrm{wł}} = 0$)

Definicja 6 (Horyzont Hubble'a)**.**

$$d_H(t) = \frac{c}{H(t)}$$

Uwaga! To, że dla odległości $r > d_H$ obiekty uciekają od nas szybciej niż c nie znaczy, że są łamane jakieś prawa fizyki :) Pamiętajmy o względności i układach nieinercjalnych. c jest maksymalną prędkością w układach inercjalnych! Podobnie to, że coś oddala się od nas szybciej niż c nie znaczy jeszcze, że w tej chwili tego nie widzimy (patrz horyzont cząstek).