Kolokwium z Analizy IIIR, zadanie 4

18 stycznia 2021

Uwagi organizacyjne: Na rozwiązanie kolokwium należy przeznaczyć nie więcej niż 4 godziny. Rozwiązania należy przesłać do poniedziałku do 23:59. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem. Każde zadanie należy zeskanować **osobno** i osobno wgrać na platformę Kampus. Proszę upewnić się, że telefon komórkowy, komputer, tablet itd. leżą w dużej odległości a kalkulator i inne pomoce naukowe są głęboko schowane.

Zadanie 4.[6pkt] Wykorzystując wynik z ćwiczeń:

$$\forall_{a>0} \; : \; \int_0^\infty \mathsf{d}x \, \frac{\log x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \log a \,,$$

udowodnić stwierdzenie:

$$\forall_{\epsilon \in \{-1,1\}} \; : \; \int_0^\infty \mathsf{d}x \, \frac{x^2 + \epsilon}{x^4 + 1} \log x = (1 - \epsilon) \, \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} \,.$$

W dowodzie (można) użyć całki konturowej z funkcji

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{z^2 + 1}$$

po brzegu obszaru ($0 < r < R$)

$$O = \{ \; z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| \in \,]r, R[\; \} \cap \{ \; z \in \mathbb{C} \quad | \quad \operatorname{Arg}(z) \in \,]0, \tfrac{\pi}{4}[\; \} \,.$$

Powodzenia !!!

Katarzyna Grabowska
Paweł Kasprzak
Rafał R. Suszek