Podstawy mechaniki CW

Wykładowca:

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020

Zadanie 2 Dany jest wektor $\vec{A}$ w układzie określonym przez wersory e_i, $i \subset \{1, 2, 3\}$. $\vec{A}$ ma postać $\vec{A} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$.

Dowód.

- długość wektora $\vec{A}$:

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = 9 + 16 + 25 = 50$$
$$A = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

- Wersor w kierunku $\vec{A}$:

$$\vec{t} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(3, 4, 5)}{5\sqrt{2}}$$

- Długość rzutu $\vec{A}$ na płaszczyznę xy:
  Nazwijmy ten rzut przez A_{xy}.

$$\vec{A}_{xy} = \left(\vec{A} \cdot e_x, \vec{A} \cdot e_y, 0\right) = (3, 4, 0)$$
$$\vec{A}_{xy} = 5$$

- Wektor prostopadły do $\vec{A}_{xy}$ i leżący na tej płaszczyźnie :

$$\vec{B} \cdot \vec{A}_{xy} = 0$$
$$3x + 4y = 0$$
$$\vec{B} = \left(x, -\frac{4}{3}x, 0\right), \quad \text{dla dowolnego } x \neq 0$$

■

Zadanie 3 Wektor $A\cdot$ rozłożyć na składową prostopadłą $\vec{A}_\perp$ i równoległą $\vec{A}_\parallel$ do wektora $\vec{t}$. Znaleźć składowe tych wektorów dla $\vec{A} = (5, 3, -4)$ oraz $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Dowód. W naszym przypadku $\vec{t}$ jest wersorem, zatem:

$$A_\parallel = \vec{A} \cdot \vec{t} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$
$$\vec{A}_\parallel = (4, 4, 0)$$
$$\vec{A}_\perp = \vec{A} - \vec{A}_\parallel = (1, -1, -4)$$

Możemy sprawdzić, że

$$\vec{A}_\perp \cdot \vec{A}_\parallel = 0$$

■

Zadanie 4 Liczymy $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ dla $\vec{A} = (1, 2, 3)$, $\vec{B} = (4, 0, 0)$.

Dowód.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 12, -8)$$

Sprawdzamy czy $\vec{C}$ jest prostopadły do $\vec{A}$, $\vec{B}$.

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = 24 - 24 = 0$$
$$\vec{C} \cdot \vec{B} = 0$$

■

Dygresja Symbol (tensor) Levi-Civity:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$$
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{dowolne 2 indeksy takie same} \\ 1 & \text{permutacja parzysta} \\ -1 & \text{permutacja nieparzysta} \end{cases}$$

Oczywiście jest to antysymetryczny tensor typu $(0, 3)$.