

ANALIZA

MATEMATYCZNA II

„Liczby zespolone, chińskie twierdzenie o resztach. Tutaj uczymy się rzeczy, które nie przydadzą się wam na maturze. One nigdy wam się nie przydadzą.”

Wykładowca:
Olga Ziemiańska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Drogi czytelniku,

Niniejszy skrypt traktuj jako uzupełnienie własnych notatek z analizy i zbiorów dodatkowych zadań, nie jako podręcznik. Skryba pisał „pod siebie” tak, aby lepiej mu się uczyło. Skrypt był tworzony podczas zajęć i w większości przypadków treść nie była później modyfikowana. Autor nie bierze żadnej odpowiedzialności za niewątpliwie występujące błędy, mogące nieumyślnie wprowadzić czytelnika w błąd. Ponadto, okres pisania tego skryptu zbiegł się z okresem intensywnej nauki \LaTeX a, nie ciężko więc za-uważyć ewoluujący styl tekstu. Prośby o ujednolicenie formatowania nie będą jakkolwiek uwzględniane :-)

Wszystkie inne uwagi, korekty jawnych błędów można kierować na maila: szymek.ced@gmail.com

Spis treści

1	Wielomiany	5
1.1	Dzielenie wielomianów	6
1.2	Pierwiastki wielokrotne	7
1.3	Schemat Hornera	7
1.4	Parzystość wielomianów	8
1.5	Wzory Viete’a dla wielomianów	9
1.6	Pierwiastki wymierne	11
1.7	Rozkładalność nad ciałem \mathbb{Z}	12
1.8	Rozkładalność nad ciałami \mathbb{Q}, \mathbb{C}	14
1.9	Pierwiastki sprzężone	14
1.10	Sprawdzian próbny i ćwiczonka	16
2	Pochodne (na szybko dla fizyków)	18
2.1	Iloraz różnicowy	18
2.2	Równanie stycznej	18
2.2.1	Przybliżenie wielomianowe funkcji różniczkowalnej	18
2.3	Własności pochodnych	19
2.4	Pochodne elementarne	19
2.4.1	$f(x) = x $	19
2.5	Pochodne wyższych rzędów	20
2.5.1	Wyższe pochodne wielomianów	20
3	Wielomiany extended edition	22
3.1	Wielomiany zwrotne	22
3.2	Wielomiany symetryczne	23
3.2.1	Wielomiany symetryczne podstawowe	23
3.3	Nierówności wielomianowe i układy równań wielomianowych	24
4	Funkcje wymierne	26
4.1	Rozkład na ułamki proste	26
4.2	Funkcje homograficzne	26
4.2.1	Pochodna homografii	27
4.3	Jakaś pała	28
4.3.1	Układy wielomianów symetrycznych	28
4.3.2	Jakiś moduł	28
4.3.3	Funkcja wymierna	29
4.3.4	Wymierności	29
5	Ciągi	31
5.1	Ciąg arytmetyczny	31
5.2	Ciąg geometryczny	33
5.3	Ciągi rosnące, malejące	35
5.4	Tożsamość Abela	35

6	Ciągi rekurencyjne	37
6.1	Ciąg Fibonacciego	38
6.2	Mnożenie macierzy	39
6.3	Diagonalizacja macierzy	39
6.3.1	Diagonalizacja macierzy na F_n	41
6.4	Srowadzenie rekurencji do prostych problemów	42
6.5	Zmienne współczynniki rekurencji liniowej	42
6.5.1	Generalna metoda	42
6.6	Równanie charakterystyczne	43
6.7	Układy rekurencji	44
7	Kresy	46
7.1	Zabawy z ε	46
8	Granice	49
8.1	Zabawy z ε , granice elementarne	49
8.2	Twierdzenie o trzech ciągach	51
8.3	Funkcja wykładnicza e^x	54
8.4	Zadansy	58
8.5	Granice średnich	60
8.6	Ciekawe twierdzenia	61

Rozdział 1

Wielomiany

Definicja 1 (Wielomian).

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, a_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$$

Definicja 2 (Stopień wielomianu).

$$\deg f = n$$

Twierdzenie 1. $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0, \exists_{M>0} |x| > M \implies |a_n x^n| > |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0|$

Dowód.

$$M = 2 + \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \implies M > 1 \implies 1 < |x| < |x^2| < \dots < |x^n|$$

$$\begin{aligned} |a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0| &\leq |a_{n-1} x^{n-1}| + \dots + |a_0| < |a_{n-1}| |x|^{n-1} + \dots + |a_0| |x|^{n-1} \\ &= |x|^{n-1} (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) < |x|^n |a_n| = |a_n x^n| \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 2. f nieparzystego stopnia $\wedge a_i \in \mathbb{R} \implies$ co najmniej 1 pierwiastek $\in \mathbb{R}$

Dowód. Weźmy $a_n > 0$. Wówczas mamy $x > M \wedge a_n > 0 \implies a_n x^n > 0$. Z Tw.1.1. $f(x) > 0$. Natomiast dla $x < -M \wedge a_n > 0 \implies a_n x^n < 0 \implies f(x) < 0$. Ciągłość wielomianu musi być zachowana na przedziale $x \in \langle -M, M \rangle$, zatem istnieje co najmniej 1 pierwiastek rzeczywisty. Analogicznie dla $a_n < 0$. ■

Twierdzenie 3. $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \wedge f(x) = 0, \forall_{x \in \mathbb{R}} \implies a_n = \dots = a_0 = 0$

Dowód. Z Twierdzenia 2 i jego dowodu $\implies a_n = 0$. Indukcją otrzymamy $a_i = 0$. ■

Twierdzenie 4. $a_n x^n + \dots + a_0 = b_m x^m + \dots + b_0, \forall_{x \in \mathbb{R}} \implies n = m \wedge a_i = b_i$

Dowód. Załóżmy, że $n > m$. Wówczas $a_n x^n + \dots + (a_m - b_m) x^m + \dots + (a_0 - b_0) = 0$. Z Tw.1.3. $a_n = 0, \dots, a_{m+1} = 0, a_m = b_m, \dots, a_0 = b_0$. ■

$$\deg f = n \wedge \deg g = m \quad (\deg(0) = -\infty)$$

Twierdzenie 5. Stopnie następujących wielomianów:

$$\deg(f + g) = \begin{cases} \max(n, m), & m \neq n \\ \leq m, & m = n \end{cases}$$

$$\deg(fg) = m + n$$

$$\deg(f \circ g) = mn$$

Dowód. Pozostawiam czytelnikowi :) ■

1.1 Dzielenie wielomianów

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

$$\deg r(x) < \deg g(x)$$

Cały czas będziemy dzielili pisemnie, biorąc jednomiany $q_i(x)$ tak, żeby skasował się pierwszy wyraz. Algorytm powtarzamy.

$$q_i(x) = \frac{a_i}{b_j} x^{i-j}$$

$$q(x) = \sum q_i(x)$$

Definicja 3.

$$g(x)|f(x) \iff r(x) = 0$$

Twierdzenie 6.

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x) \implies r(x) = f(a)$$

Dowód. $\deg r(x) < 1$, bo $\deg g(x) = 1$. Wstawiamy $x = a$ do $f(x)$ i dostajemy $f(a) = 0 + r(x)$. ■

Wniosek 1 (Twierdzenie Bezout). $f(a) = 0 \iff (x - a)|f(x)$

1. Znajdź $NWD(x^4 + x^2 + x - 1, x^3 + 1)$

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + x - 1 &= (x^3 + 1)q(x) + r(x) \\ (x^3 + 1) &= r(x)q_1(x) + r_1(x) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies x^4 + x^2 + x - 1 &= (x^3 + 1)x + (x^2 - 1) \\ (x^3 + 1) &= (x^2 - 1)x + (x + 1) \\ (x^2 - 1) &= (x + 1)(x - 1) + 0 \\ \implies NWD &= x + 1 \end{aligned}$$

Odwrócony algorytm Euklidesa:

$$x + 1 = (x^3 + 1) - (x^2 - 1)x = (x^3 + 1) - (f(x) - x(x^3 + 1))x = f(x)(-x) + g(x)(x^2 + 1) \blacktriangleright$$

$$2. n \in \mathbb{N} \implies (x-1)^2 \mid nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$$

Przede wszystkim przekształćmy trochę ten wielomian:

$$f(x) = n(x^{n+2} - 1) - x(n+2)(x^n - 1) = n(x-1)(x^{n+1} + x^n + x^{n-1} + \dots + 1) - x(n+2)(x-1)(x^{n-1} + \dots + 1) = (x-1)f_1(x)$$

$$\implies (x-1) \mid f(x)$$

Teraz pokażę, że pozostałość po dzieleniu tego wielomianu $f_1(x)$ także dzieli się przez $(x-1)$. Korzystając z pewnego często używanego twierdzenia o dzieleniu przez taki prosty wielomian stopnia 1,

$$f_1(x) = (x-1)g(x) + f_1(1)$$

Zatem należy tylko pokazać, że $f_1(1) = 0$. Sprawdźmy to!

$$f_1(1) = n(1^{n+1} + 1^n + 1^{n-1} + \dots + 1) - (n+2)(1^{n-1} + \dots + 1) = n(n+2) - n(n+2) = 0 \blacktriangleright$$

1.2 Pierwiastki wielokrotne

Definicja 4 (Krotność pierwiastka). a - pierwiastek $f(x)$. m - krotność pierwiastka:

$$(x-a)^m \mid f(x) \wedge (x-a)^{m+1} \nmid f(x)$$

Twierdzenie 7. $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ma $n+1$ pierwiastków $\implies f(x) = 0$.

Dowód. Indukcja:

$$n=1: f(x) = ax + b. \text{ Istnieją } r_1, r_2 \in \mathbb{R} \implies f(x) = 0$$

Założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$. Wtedy r_1, r_2, \dots, r_{n+1} - pierwiastki $f(x)$. Wówczas $f(x) = (x-r_{n+1})q(x)$, $q(x)$ ma n pierwiastków, $\deg q(x) = n-1$. Z założenia indukcyjnego $q = 0$. ■

Wniosek 2. Wielomian może mieć maksymalnie $\deg f$ pierwiastków, licząc z krotnościami.

1.3 Schemat Hornera

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

Dzielimy przez $(x-a)$ i szukamy współczynników $g(x)$ z $f(x) = (x-a)g(x) + f(a)$.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = (x-a)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0) + f(a)$$

$$x^n : a_n = b_{n-1}$$

$$x^{n-1} : a_{n-1} = -ab_{n-1} + b_{n-2} \dots$$

$$x^i : a_i = -ab_i + b_{i-1}$$

$$x^0 : a_0 = f(a) - ab_0$$

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1} \dots$$

$$b_i = ab_{i+1} + a_{i+1}$$

$$f(a) = a_0 + ab_0$$

1.

$$f \text{ ma współczynniki, } a, b \in \mathbb{Z}. \quad T: (a-b) \mid f(a) - f(b)$$

$$f(x) = (x-b)q(x) + f(b), x=a$$

$$f(a) - f(b) = (a-b)q(a); q(a) \text{ jest całkowite?}$$

$$\text{Niech } q(x) = b_n x^n + \dots + b_0.$$

Ze schematu Hornera $b_i = a_{i+1} + bb_{i+1} \implies q(x)$ ma współczynniki całkowite. \blacktriangleright

$$\text{Alternatywnie: } f(a) - f(b) = a_n a^n + \dots + a_0 - (a_n b^n + \dots + a_0) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \dots + a_1(a - b) = (a-b)(a_n R_n + a_{n-1} R_{n-1} + \dots + a_1) \text{ oraz } a_i, R_i \in \mathbb{Z}. \blacktriangleright$$

2.

$$w(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \quad T: \exists_{\alpha, p, q \in \mathbb{R}} w(x - \alpha) = x^3 + px + q.$$

$$f(x - \alpha) = (x - \alpha)^3 + b(x - \alpha)^2 + c(x - \alpha) + d = x^3 - 3\alpha x^2 + bx^2 + \dots \\ \implies 3\alpha = b \implies \alpha = \frac{b}{3} \blacktriangleright$$

3. $f(1) = -1, f(2) = 2, f(3) = 11$ Wyznacz resztę z dzielenia f przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)q(x) + r(x) \\ \implies r(x) = ax^2 + bx + c$$

Przy podstawieniu $f(1), f(2), f(3)$ zeruje się pierwszy człon wielomianu i zostaje $r(x)$.

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 11 \end{cases} \blacktriangleright$$

4. $T: \lfloor x \rfloor, |x|, \sqrt[3]{x}$ nie są wielomianami.

- $\lfloor x \rfloor$ nie może być wielomianem, gdyż nie jest funkcją ciągłą.
- $|x| = \sqrt{x^2}$ musiałby być wielomianem stopnia 1 x lub $-x$. Biorąc $f(x) = x$ otrzymamy sprzeczność dla $x < 0$. Analogicznie dla $f(x) = -x$.
- $\sqrt[3]{x} = a_n x^n + \dots + a_0$ Mamy równanie wielomianowe, więc stopnie muszą być równe. $\implies 1 = 3n$, co daje sprzeczność, gdyż n nie jest naturalne. \blacktriangleright

5. Znajdź wszystkie wielomiany $w(x)$, $\forall_x xw(x - 1) = (x + 1)w(x)$.

6. $T: w(x) = a_n x^n + \dots + a_0, a_i \in \mathbb{Z} \wedge 2|w(5) \wedge 5|w(2) \implies 10|w(7)$

Dowodziliśmy twierdzenie, że jeśli wielomian ma współczynniki całkowite oraz $a, b \in \mathbb{Z} \implies (a - b) | f(a) - f(b)$.

$$2|w(7) - w(5) \implies w(7) \equiv w(5) \equiv 0 \pmod{2} \\ 5|w(7) - w(2) \implies w(7) \equiv w(2) \equiv 0 \pmod{5} \\ \implies w(7) \equiv 0 \pmod{10} \blacktriangleright$$

7. $w(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$

1.4 Parzystość wielomianów

Twierdzenie 8. $w(x) = -w(-x) \iff a_k = 0$ dla $2 \mid k$

Dowód. \implies :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = -(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots \pm a_n x^n) = -a_0 + a_1 x - a_2 x^2 + \dots \pm a_n x^n \\ \implies 2(a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_k x^k) = 0 \\ a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots = 0 \\ \implies a_k = 0$$

\Leftarrow :

$$w(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots \\ w(-x) = -a_1 x - a_3 x^3 - a_5 x^5 - \dots = -w(x) \quad \blacksquare$$

Twierdzenie 9. $w(x) = w(-x) \iff a_k = 0$ dla $2 \nmid k$

Dowód. \implies :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots \pm a_n x^n \\ \implies 2(a_1 x + a_3 x^3 + \dots) = 0 \\ \implies a_k = 0$$

\Leftarrow :

$$w(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots$$

$$w(-x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots = w(x) \quad \blacksquare$$

1.5 Wzory Viete'a dla wielomianów

$$f(x) = a_nx^n + \dots + a_0$$

Niech x_1, \dots, x_n - pierwiastki f .

Twierdzenie 10.

$$\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Dowód. $a_nx^n + \dots + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$

$$x^{n-1} : a_{n-1} = a_n(-x_1 - x_2 - \dots - x_n) = -a_n \sum x_i \quad \blacksquare$$

Twierdzenie 11.

$$\sum_{i < j} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

Dowód. $x^{n-2} : a_{n-2} = a_n(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) = a_n \sum_{i < j} x_i x_j \quad \blacksquare$

Twierdzenie 12.

$$\prod x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Dowód. $f(x) = a_n(x - x_1)\dots(x - x_n) = a_n(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2)\dots(x - x_n) = \dots = a_n(x^n \pm \dots + (-1)^n x_1x_2\dots x_n)$

$$x^0 : a_0 = a_n(-1)^n \prod x_i \quad \blacksquare$$

1. f ściśle rosnąca $\iff p \geq 0$ ($f(x) = x^3 + px + q$).

\Leftarrow Innymi słowy $x > y \implies f(x) > f(y)$

$$x^3 + px + q > y^3 + py + q$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + p) > 0$$

$$(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 + p > 0$$

\implies Innymi słowy $p < 0$, $a = -p > 0 \implies (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 < a$

Bierzemy $y = 0$, $x = \frac{\sqrt{a}}{2}$, czyli f nie jest ściśle rosnąca. \blacktriangleright

2. Wzory Cardano. $w(x) = x^3 + 3ax - 2b$, $a > 0$ T : $w(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty równy $\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 + a^3}}$.

Pierwiastek musi być jeden, bo f ściśle rosnąca i w dodatku poprzednie twierdzenia o M . Sprawdzamy: $f(x) = b + \sqrt{b^2 + a^3} + b - \sqrt{b^2 + a^3} + 3a(\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 + a^3}}) - 2b + R_1 = \dots = 0$

\blacktriangleright

3. $a, b \in \mathbb{R} \wedge f(a) = a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0 \wedge f(b) = b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$ Oblicz $a + b$. *Hint! Sprowadź do postaci (1).*

Przesuwamy funkcje o 1. Wówczas:

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 2a - 16 = (a - 1)^3 + 2(a - 1) - 14, \wedge x = a - 1$$

$$x^3 + 2x - 14 = 0$$

$$y^3 + 2y + 14 = 0$$

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + 2(x + y) &= 0 \\(x + y)(2 + x^2 - xy + y^2) &= 0 \text{ Drugie się nie wyzeruje,} \\ \implies x + y = 0 &\implies a + b = 2 \blacktriangleright\end{aligned}$$

4. Wyznacz resztę z dzielenia $f(x) = x^{2018} - 2017x^{1009} + x^2 - 5x + 2018$ przez $x^2 - 1$. *Hint! Odradzam dzielenie.*

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 - 1)q(x) + r(x) \\r(x) &= ax + b \text{ Patrzymy co się zeruje w } f(x). \\f(1) = r(1) &= a + b \wedge f(-1) = r(-1) = b - a \\f(1) &= 1 - 2017 + 1 - 5 + 2018 = -2 \wedge f(-1) = 1 + 2017 + 1 + 5 + 2018 = 4042 \\ \text{I rozwiązujemy układ równań... } &\blacktriangleright\end{aligned}$$

5. $w(x)$ ma współczynniki wymierne. $T: (x - \sqrt{2})|w(x) \implies (x^2 - 2)|w(x)$

$$\begin{aligned}w(\sqrt{2}) &= 0 \text{ Rozkład wielomianu: } w(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})\dots = (x^2 - 2)\dots \implies \\T \iff : w(-\sqrt{2}) &= 0 \\w(\sqrt{2}) &= \sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} 2^i + \sqrt{2} \sum a_{2i+1} 2^i = 0 \\ \implies \sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} 2^i &= 0 \wedge \sqrt{2} \sum a_{2i+1} 2^i = 0 \\ \implies w(-\sqrt{2}) &= \sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} 2^i - \sqrt{2} \sum a_{2i+1} 2^i = 0 \blacktriangleright\end{aligned}$$

6. Niech x_1, x_2, x_3 oznaczają pierwiastki $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$. Obliczyć $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (-6)^2 - 2 \cdot 9 = 18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1^3 + 6x_1^2 + 9x_1 + 4 &= 0 \\x_2^3 + 6x_2^2 + 9x_2 + 4 &= 0 \\x_3^3 + 6x_3^2 + 9x_3 + 4 &= 0 \text{ Po dodaniu:} \\x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= -6 \cdot 18 - 9(-b) - 3 \cdot 4 \blacktriangleright\end{aligned}$$

7. Wykaż, że $x^3 + ax^2 - b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.

$$\begin{aligned}f(0) &= -b < 0 \text{ Z ciągłości i twierdzenia o } M \text{ } f(x) \text{ przetnie oś } x+. \\ \text{Wielomian trzeciego stopnia ma albo 3, albo 1 pierwiastek rzeczywisty (licząc z krotnościami).} \\ \text{Zakładając, że są 3:} \\ \implies x_1x_2x_3 &= b > 0 \wedge x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \\ \implies \text{Pierwiastków dodatnich jest 1 lub 3, ale gdyby były 3 to sprzeczność z drugim równaniem. } &\blacktriangleright\end{aligned}$$

8. x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami $x^3 + 6x + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 .

$$\begin{aligned}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 &\text{ to te nowe pierwiastki } F(x). \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 11 = -B, \text{ nie dzielimy przez } A, \text{ bo bierzemy wielomian unormowany.} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= (x_1x_2x_3)^2 = 36 = -D \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 &= (x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = -36 = C \\ \implies F(x) &= x^3 - 11x^2 - 36x - 36 \blacktriangleright\end{aligned}$$

- 9.

$$\begin{cases} u + v + w = 2 \\ u^2 + v^2 + w^2 = 14 \\ u^3 + v^3 + w^3 = 20 \end{cases}$$

Szukamy unormowanego wielomianu o pierwiastkach u, v, w .

$$\begin{aligned}F(x) &= x^3 + Bx^2 + Cx + D \\ B &= -2 \\ C &= \frac{2^2 - 14}{2} = -5\end{aligned}$$

$$\begin{cases} u^2 - 2u^3 - 5u + D = 0 \\ v^2 - 2v^3 - 5v + D = 0 \\ w^2 - 2w^3 - 5w + D = 0 \end{cases}$$

$$D = 6$$

$$\implies F(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \implies x_0 = 1$$

$$\implies F(x) = (x-1)(x^2 - x - 6) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

$$\implies \{u, v, w\} = \{1, -2, 3\} \blacktriangleright$$

10. $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \wedge |a_i| = 1 \wedge n$ pierwiastków \mathbb{R} ; Znaleźć wszystkie takie wielomiany.

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + \dots) = 1 - 2(\pm 1) = \{-1, 3\}$$

$$\implies x_1^2 + \dots + x_n^2 = 3$$

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq n \sqrt[n]{x_1^2 \dots x_n^2} = n$$

$$\implies \deg f \leq 3 \text{ (Założmy, że } f \text{ jest unormowany)}$$

STOPNIA 1:

$$\{x-1, x+2\}$$

STOPNIA 2:

$$\{x^2 + x - 1, x^2 - x - 1\}$$

STOPNIA 3:

$$\text{Mamy równość w nierówności Cauchy'ego} \implies x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$$

$$(x \pm 1)(x \pm 1)(x \pm 1)$$

$$\implies (x+1)^3 = \text{NIE}$$

$$(x+1)^2(x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$(x+1)(x-1)^2 = \dots$$

$$(x-1)^3 = \text{NIE} \blacktriangleright$$

1.6 Pierwiastki wymierne

Niech $w(x)$ ma współczynniki całkowite.

Twierdzenie 13 (I Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych). $(p, q) = 1 \wedge \frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wymiernym $w(x) \implies p|a_0 \wedge q|a_n$.

$$\text{Dowód. } 0 = w\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\implies 0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_0 q^n \implies q|a_n p^n \implies q|a_n$$

$$\text{analogicznie } p|a_0$$

■

1. Znajdź pierwiastki wymierne $15x^4 - 19^3 + 16x^2 - x - 3$.

Kandydaci to $\frac{p}{q}$.

$$p = \{\pm 1, \pm 3\}$$

$$q = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

$$\implies \frac{p}{q} = \{\text{kombinacje}\} - \text{możliwe pierwiastki} \blacktriangleright$$

2. $p, q, r \in \mathbb{Q} \wedge p + q + r, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, pqr \in \mathbb{Z}$. T: $p, q, r \in \mathbb{Z}$

$$\text{Niech } f(x) = (x-p)(x-q)(x-r)$$

$$f(x) = x^3 + Bx + Cx + D, \text{ Czy } B, C, D \in \mathbb{Z}?$$

$$B \in \mathbb{Z} \text{ bo } B = -p - q - r$$

$$D \in \mathbb{Z} \text{ bo } D = -pqr$$

$$C \in \mathbb{Z} \text{ bo } C = pq + qr + rp = pqr\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$$

$$\implies p - \text{wymierny pierwiastek} \implies p \in \mathbb{Z} \blacktriangleright$$

Wniosek 3. Wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest całkowity.

1. f ma współczynniki całkowite, $f(a) = f(b) = f(c) = 1$ dla $a, b, c \in \mathbb{Z}$ parami różnych. T : f nie ma pierwiastków całkowitych.

Niech x będzie pierwiastkiem całkowitym.

$$(a - x) | 1 \text{ bo } f(x) = 0$$

$$(b - x) | 1$$

$$(c - x) | 1$$

\implies Któreś dwa z a, b, c muszą być równe, więc sprzeczność. \blacktriangleright

2. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych. T : nie ma pierwiastków całkowitych.

$$f(a); f(a+1) \text{ nieparzyste}$$

$$a - x | f(a)$$

$$a + 1 - x | f(a+1)$$

Ale $a - x$ i $a + 1 - x$ są kolejne, więc jedna z nich jest parzysta i dzieli nieparzysty wielomian \implies sprzeczność. \blacktriangleright

Twierdzenie 14 (II Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych). $(p, q) = 1 \wedge \frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem $w(x) \wedge b \in \mathbb{Z}$. $T: w(b) \neq 0 \implies p - bq | w(b)$

Dowód. $w(x) = (x - b)v(x) + w(b)$

$v(x)$ ma współczynniki całkowite (co wynika ze schematu Hornera).

Resztę pozostawiam czytelnikowi :) \blacksquare

1. Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ liczba 1 jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $3x^4 - 6x^3 + ax^2 + 4x + b$

$$f(1) = 0 \implies -b = a + 1$$

$$f(x) = 3x^4 - 6x^3 + ax^2 + 6x - (a + 1) = (x - 1)(3x^3 - 3x^2 + (a + 3)x + (a + 1))$$

$$0 = g(1) = 2a + 4 \implies a = -2, b = 1 \blacktriangleright$$

1.7 Rozkładalność nad ciałem \mathbb{Z}

Definicja 5. $f(x) \in \mathbb{K}[x] \iff$ współczynniki $f(x) \in \mathbb{K}$; \mathbb{K} - ciało ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Definicja 6 (Rozkładalność). Mówimy, że $f(x)$ jest rozkładalny nad \mathbb{K}

$$\iff \exists_{g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]} f(x) = g(x)h(x) \wedge \deg g, \deg h \geq 1$$

Twierdzenie 15 (Kryterium Eisensteina). $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

Niech p - liczba pierwsza $p \nmid a_n$, $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$, $p^2 \nmid a_0$. Wówczas $f(x)$ jest nierozkładalny nad \mathbb{Z} .

Dowód. $f(x) = g(x)h(x)$

$$g(x) = b_m x^m + \dots + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

$$h(x) = c_l x^l + \dots + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

$$l + m = n, l, m \geq 1$$

$$\implies a_0 = b_0 c_0 \implies p \mid b_0, p \nmid c_0$$

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \implies p \mid b_1$$

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \implies p \mid b_2$$

\vdots

$$a_n \neq a_m = b_m c_0 + b_{m-1} c_1 + \dots \implies p \mid b_m$$

Ale $a_n = b_m c_1 \implies$ sprzeczność, bo p nie może dzielić a_n \blacksquare

Twierdzenie 16. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ jest rozkładalny nad $\mathbb{Z} \iff f(x-a)$ dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$ jest rozkładalny nad \mathbb{Z}

Dowód. \implies :

$$f(x) = g(x)h(x) \text{ nad } \mathbb{Z}$$

$$f(x-a) = g(x-a)h(x-a)$$

$$g(x-a) = b_m(x-a)^m + \dots + b_0 \implies \deg g = \text{const.}$$

Współczynniki też zostaną \mathbb{Z} z dwumianu Newtona.

\impliedby :

$$f(x-a) \rightsquigarrow f(x-a+a) = f(x)$$

■

1.

p - pierwsza; $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ jest nierozkładalne nad \mathbb{Z}

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = \frac{x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-1}x}{x} = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}$$

A z pierwszej klasy wiemy, że $p \mid \binom{p}{p-1}, \binom{p}{p-2}, \dots, \binom{p}{1}$

$$a_0 = \binom{p}{p-1} = p \implies p^2 \nmid a_0$$

\implies (z kryterium Eisensteina) $f(x)$ nierozkładalne nad \mathbb{Z} ►

2. T : $f(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$ nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$

Zauważmy, że 101 jest liczbą pierwszą, więc dobrze byłoby ją wykorzystać jako kryterium do Eisensteina. Nie da się go użyć wprost, więc rozważę wielomian $f(x-1)$, bo nie zmienia to kwestii rozkładalności $f(x)$ nad \mathbb{Z} .

$$f(x-1) = (x-1)^{101} + 101(x-1)^{100} + 102 = x^{101} - \binom{101}{1}x^{100} + \dots - 1 + 101(x^{100} - \binom{101}{1}x^{99} + \dots + 1) + 102$$

$$\text{oczywiście } 101 \mid \binom{101}{1}, \dots, \binom{101}{100}$$

$$\implies 101 \nmid a_{101}, 101 \mid a_{100}, \dots, a_1$$

$$a_0 = -1 + 101 + 102 = 202 \implies 101 \mid a_0 \wedge 101^2 \nmid a_0$$

Stąd, na podstawie kryterium Eisensteina wnioskujemy, że $f(x-1)$, a co za tym idzie $f(x)$ są nierozkładalne w $\mathbb{Z}[x]$ ►.

3. Jakie są pierwiastki wielomianu $h(x) = x^p - 1$

\mathbb{Z} 1 klasy płynie wniosek, że to się rozkłada nad \mathbb{C} na p wielomianów stopnia 1.

$$x^p - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)\dots(x-\varepsilon_{p-1})$$

$$x^{p-1} + \dots + 1 = (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\dots(x-\varepsilon_{p-1}) \text{ ►}$$

4.

$f(x) = g(x)h(x)$, $f, g, h \in \mathbb{Z}[x]$. p - liczba pierwsza dzieli wszystkie współczynniki $f(x)$.
Wówczas p dzieli wszystkie współczynniki $g(x)$ lub $h(x)$

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

$$h(x) = c_l x^l + \dots + c_0$$

$$m + l = n, m, l \geq 1$$

Zakładamy, że $p \mid b_0, b_1, \dots, b_{i-1}$ $p \nmid b_i$

$$a_i = c_0 b_i + c_1 b_{i-1} + \dots \implies p \mid c_0$$

$$a_{i+1} = c_0 b_{i+1} + c_1 b_i + c_2 b_{i-1} + \dots \implies p \mid c_1$$

$$a_{i+k} = \dots + c_k b_i + \dots = \text{mniejsze indeksy } c + c_k b_i + \text{mniejsze indeksy } b \implies p \mid c_k$$

$\implies p \mid$ wszystkie współczynniki $h(x)$ ►

1.8 Rozkładalność nad ciałami \mathbb{Q}, \mathbb{C}

Twierdzenie 17 (Lemat Gaussa). $f \in \mathbb{Z}[x]$ jest rozkładalne nad $\mathbb{Q} \implies$ jest rozkładalne nad \mathbb{Z} .
(w drugą stronę to oczywiście oczywiste)

Dowód. $f \in \mathbb{Z}[x]$, $g, h \in \mathbb{Q}[x]$, $f = gh$

$ag(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $bh(x) \in \mathbb{Z}[x]$ - zawsze wykonalne

$$f_1(x) = abf(x)$$

$$g_1(x) = ag(x)$$

$$h_1(x) = bh(x)$$

$$f_1(x) = g_1(x)h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

p - pierwsza taka, że $p \mid ab \implies p \mid$ wszystkie współczynniki $f_1(x) \implies (3) p \mid$ wszystkie współczynniki g_1 lub h_1

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{p} \in \mathbb{Z}[x]$$

$$g_2(x) = \frac{g_1(x)}{p} \in \mathbb{Z}[x]$$

$$\implies f_2(x) = \frac{ab}{p} f(x) = g_2(x)h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

... w skończonej ilości kroków $f(x) = g_k(x)h_l(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ■

Twierdzenie 18 (Zasadnicze twierdzenie algebry). $f(x) \in \mathbb{C}[x] \implies f(x)$ ma $\deg f$ pierwiastków

Wniosek 4. $f(x) \in \mathbb{R}[x] \implies f(x)$ ma $\deg f$ pierwiastków zespolonych

1.9 Pierwiastki sprzężone

Twierdzenie 19. $f \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 0 \implies f(\bar{z}) = 0$

Dowód. $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

$$\frac{f(z)}{f(z)} = 0 = \frac{a_n z^n + \dots + a_0}{a_n z^n + \dots + a_0} \text{ - sprzęgamy równanie stronami}$$

$$f(z) = \bar{0} = \overline{a_n z^n + \dots + a_0}$$

$$0 = \overline{a_n}(\bar{z})^n + \dots + \overline{a_0}$$

$$\implies 0 = a_n(\bar{z})^n + \dots + a_0 = f(\bar{z})$$

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots$$

$$f(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)\dots \wedge z \notin \mathbb{R}$$

$$(x - z)(x - \bar{z}) \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \in \mathbb{R}[x] \implies f(x) = (x - \dots)(x - \dots)\dots(x^2 + \dots)(x^2 + \dots), \Delta < 0 \quad \blacksquare$$

1. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ $x^2 + x + 1$ dzieli $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$

$$x^2 + x + 1 = (x - \varepsilon)(x - \bar{\varepsilon})$$

$$x^2 + x + 1 = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$f(\varepsilon) = 0 \iff f(\bar{\varepsilon}) = 0 \dots \text{ dla jakich } n \in \mathbb{N} \ f(\varepsilon) = 0 ?$$

$$1. \ n = 3k \implies f(\varepsilon) = 3$$

$$2. \ n = 3k + 1 \implies f(\varepsilon) = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

$$3. \ n = 3k + 2 \implies f(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 + 1 = 0$$

Wniosek: $3 \nmid n$ jest rozwiązaniem ►

2. Rozwiąż układ równań w zespole:

$$\begin{cases} u + v + w = 0 \\ u^2 + v^2 + w^2 = 0 \\ u^3 + v^3 + w^3 = 24 \end{cases}$$

Szukamy unormowanego wielomianu o pierwiastkach u, v, w .

$$F(t) = t^3 - 8 = 0$$

$$t^3 = 8$$

$$\implies \{u, v, w\} = \{2, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2\} \blacktriangleright$$

3. Mamy klasycznie nazwane pierwiastki z 1. Obliczyć: $(\varepsilon_0 + i)(\varepsilon_1 + i)\dots(\varepsilon_{n-1} + i)$

Pierwiastki z 1 są miejscami zerowymi wielomianu $f(x) = x^n - 1$, zatem

$$f(x) = (x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_1)\dots(x - \varepsilon_{n-1}) = x^n - 1.$$

$$\implies f(-i) = \prod(-i - \varepsilon_k) = (-1)^n \prod(i + \varepsilon_k) = (-i)^n - 1$$

$$\implies \prod(i + \varepsilon_k) = \frac{(-i)^n - 1}{(-1)^n} = ((-i)^n - 1)(-1)^n \blacktriangleright$$

4. $f \in \mathbb{C}[x]$ Czy $\exists f(x) = \bar{x} \in \mathbb{C}[x]$?

Założmy, że istnieje taki wielomian $f(x) = \bar{x}$. Wtedy dla $x \in \mathbb{R}$ wielomian $g(x) = f(x) - x = 0$ i ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Wobec tego $g(x)$ także w \mathbb{C} ma nieskończenie wiele miejsc zerowych $\implies f(x) = x = \bar{x}$ co daje sprzeczność \blacktriangleright

5. $f \in \mathbb{R}[x]$, $\forall x \in \mathbb{R} \quad xf(x-1) = (x+1)f(x)$ #szereg formalny

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0 \text{ bo } 1f(0) = 2f(1)$$

$$f(2) = 0 \text{ bo } 2f(1) = 3f(2) \quad \dots \text{indukcyjnie}$$

$$f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies \text{mamy za dużo pierwiastków} \implies f(x) = 0 \blacktriangleright$$

6. $f \in \mathbb{R}[x]$, $\forall x \in \mathbb{R} \quad xf(x-1) = (x-4)f(x+1)$

$$0f(0) = -4f(1) \implies f(1) = 0$$

$$4f(3) = 0 \implies f(3) = 0$$

$$\implies f(x) = (x-1)(x-3)g(x) \text{ to wstawiamy do pierwotnego równania wielomianowego}$$

$$x(x-2)(x-4)g(x-1) = (x-4)x(x-2)g(x+1)$$

$$g(x-1) = g(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\implies \dots = g(-1) = g(1) = g(3) = g(5) = \dots$$

Jeśli mamy taką samą wartość w nieskończenie wielu punktach to $g(x) = a$

$$\implies f(x) = a(x-1)(x-3)$$

$$ax(x-2)(x-4) = (x-4)ax(x-2) \implies a \in \mathbb{R} \text{ może być dowolne} \blacktriangleright$$

7. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f = n+1$, $f(k) = \frac{k}{k+1}$, $k = 1, \dots, n$; Ile wynosi $f(n+1)$?

$$(k+1)f(k) = k \implies y(x) = (x+1)f(x) - x \text{ przy czym } \deg y = n$$

Łatwo sprawdzić, że dla każdego k , $y(k) = 0$

$$\implies y(x) = (x+1)f(x) - x = a(x-1)(x-2)\dots(x-n)$$

$$x = -1 \implies 1 = a(-2)(-3)(-4)\dots(-1-n) = a(-1)^n(n+1)!$$

$$\implies a = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \text{ Teraz można już wszystko popodstawiać:}$$

$$f(n+1) = \frac{\frac{(-1)^n}{(n+1)!}n(n-1)\dots 1 + n+1}{n+2} = \frac{\frac{(-1)^n}{n+1} + n+1}{n+2} \blacktriangleright$$

8. $z_1 + \dots + z_5 = x_1^2 + \dots + x_5^2 = 0$, $|x_i| = 0$; T : z_1, \dots, z_5 są pierwiastkami $z^5 - a = 0$, $a \in \mathbb{C}$

To je pała na Viety:

$$(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_5) = z^5 + bz^4 + cz^3 + dz^2 + ez - a$$

Trzeba pokazać, że $b, c, d, e = 0$

$$\begin{aligned}
-b &= \sum z_i = 0 \text{ z założenia} \\
c &= \sum z_i z_j = \frac{(\sum z_k)^2 - \sum z_k^2}{2} = 0 \\
-d &= \sum x_i x_j x_k = \prod z_l \sum \frac{1}{x_m x_n} = \prod z_l \sum \frac{\overline{z_m z_n}}{|z_m|^2 |z_n|^2} = \frac{1}{|z|^4} \prod z_l \sum \overline{z_m z_n} = 0 \\
e &= \sum x_i x_j x_k x_l = \prod z_m \sum \frac{1}{z_n} = \frac{1}{|z|^2} \prod z_m \sum \overline{z_n} = 0
\end{aligned}$$

$\implies z_i$ są pierwiastkami wielomianu postaci $z^5 - a = 0$, więc wszystkie są pierwiastkami jednej liczby ►

Twierdzenie 20 (Szybkie uogólnienie PD). p - liczba pierwsza $\implies f(x) = x^p + px^{p-1} + p + 1$ nierozkładalny nad $\mathbb{Z}[x]$

1.10 Sprawdź i ćwicz

1. $2x^3 - 5x^2 - x + 1$ rozłożyć nad \mathbb{Z} , nad \mathbb{R}

$\frac{p}{q} \wedge (p, q) = 1 \implies p \mid 1 \wedge q \mid 2$
 $\implies \frac{p}{q} \in \{1, -1, 1/2, -1/2\}$ Teraz sprawdzamy, co pasuje i pasuje $-1/2$.
 $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = (x + \frac{1}{2})w(x) = (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 6x + 2)$ i to jest rozkład nad \mathbb{Q} ale można przerobić:
 $\dots = (2x + 1)(x^2 - 3x + 1)$
Dalej się nie da bo pierwiastki są niecałkowite \implies jest to rozkład nad \mathbb{Z} . Ale rozkład nad \mathbb{R} :
 $\dots = (2x + 1)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ ►

2. Rozwiązać równanie $x^4 + x^3 + 3x^2 - 8x + 14 = 0$ wiedząc, iż $1 + i$ jest pierwiastkiem.

$(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$ i dzielenie wielomianu początkowego:
 $x^4 + x^3 + 3x^2 - 8x + 14 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 3x + 7)$
Stąd kolejne dwa pierwiastki to: $\frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}i}{2}$ ►

3. Rozwiąż w \mathbb{C}

$$\begin{cases} u + v + w = 1 \\ uvw = 1 \\ |u| = |v| = |w| = 1 \end{cases}$$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 $a = -1, c = -1$
 $uvw\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) = uv + vw + wv = b = uvw(\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}) = 1$
 $\implies f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
 $\implies \{u, v, w\} = \{1, i, -i\}$ ►

4. Dla jakich $p, q \in \mathbb{R}$ $(x + 3)^2 \mid x^4 + px^2 + q$

$f(-3) = 0 \implies f(3) = 0$ więc mamy już 3 pierwiastki (liczymy z krotnościami)
Zatem hipotetyczny piąty pierwiastek $-x_0 \in \{x_0, 3, -3\}$
1) $-x_0 = x_0 \implies x_0 = 0 \implies q = 0 \implies f(x) = x^4 + px^2 \implies 0$ jest podwójnym pierwiastkiem, a tak nie może być.
2) $x_0 = -3 \implies f(x) = (x + 3)^3(x - 3)$ ale też sprzeczność.
3) $f(x) = (x + 3)^2(x - 3)^2 = x^4 - 18x^2 + 81$ i to jest już to, co się zgadza. ►

5. Udowodnij, że liczba zespolona o module 1 jest pierwiastkiem $x^n + z + 1 \iff n = 3m + 2$

\Leftarrow :
 $n = 3m + 2$ znamy równanie $z^2 + z + 1 = 0$, gdzie pierwiastkami są $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$
 $\varepsilon^{3m+2} + \varepsilon + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

$\Rightarrow :$

$\exists_{w \in \mathbb{C}} |w| = 1 : w^n + w + 1 = 0$ zatem po sprzężeniu:

$$w^{-n} + w^{-1} + 1 = 0$$

$$1 + w^{n-1} + w^n = 0 \Rightarrow w = w^{n-1} \Rightarrow w^2 = w^n \text{ Robimy podmiankę:}$$

$$\Rightarrow w^2 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 = \varepsilon^n \Rightarrow n \equiv 2 \pmod{3} \text{ (bo pierwotność pierwiastka musi się zgadzać)}$$

►

$$6. f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \text{ natomiast } g(x) = a_n + \dots + a_0 x^n; x_i \neq 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$$

$$x_i^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x_i} + \dots + a_0 \left(\frac{1}{x_i} \right)^n \right) = a_n x_i^n + \dots + a_0 = f(x_i) = 0 \Rightarrow g\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0 \text{ ►}$$

$$\text{Natomiast jeśli } x_i = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow \deg g(x) \leq n - 1$$

$$7. a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ parami różne; } f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1 \in \mathbb{Z}[x] \text{ T: } f \text{ nierozkładalny nad } \mathbb{Z}$$

Założmy, że $f(x) = h(x)g(x)$, $h, g \in \mathbb{Z}[x]$

$h(a_i)g(a_i) = f(a_i) = -1 \Rightarrow h(a_i) + g(a_i) = 0$, bo rozkład -1 jest tak a nie inny, a te wielomiany muszą być całkowite.

Zatem wielomian $w(x) = h(x) + g(x)$ ma co najmniej n pierwiastków. Ale $\deg w_x \leq n - 1 \Rightarrow w(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -g(x)g(x) \Rightarrow 1x^n + \dots = -1x^n + \dots$ zatem mamy sprzeczność, a wielomian $f(x)$ jest nierozkładalny. ►

$$8. a, b \in \mathbb{C} \wedge a, b \neq 0; az^3 + bz^2 + \bar{b}z + \bar{a} = 0 \text{ T: ten wielomian ma pierwiastki o module 1}$$

Hint! $f(z) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$

Sprawdzamy hinta i najwyraźniej działa :) (przemnożyć \bar{z}^3 , sprzęgnąć i podziwiać)

\Rightarrow mamy pierwiastki $z, \frac{1}{\bar{z}}, w$; zatem $\frac{1}{\bar{w}} \in \{w, z, \frac{1}{\bar{z}}\}$

$$1) \Rightarrow |w| = 1$$

$$2) \Rightarrow z = w \Rightarrow z z \frac{1}{\bar{z}} = -\frac{\bar{a}}{a} \Rightarrow |a| = 1$$

$$3) \Rightarrow \text{z Viety } |z| = 1 \text{ ►}$$

Rozdział 2

Pochodne (na szybko dla fizyków)

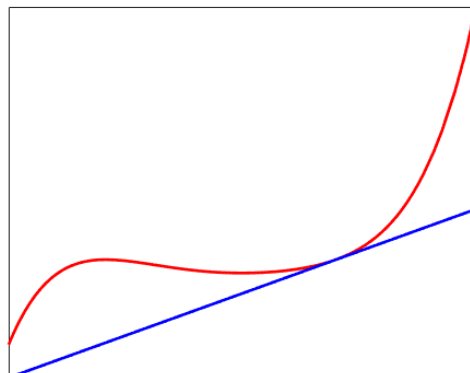
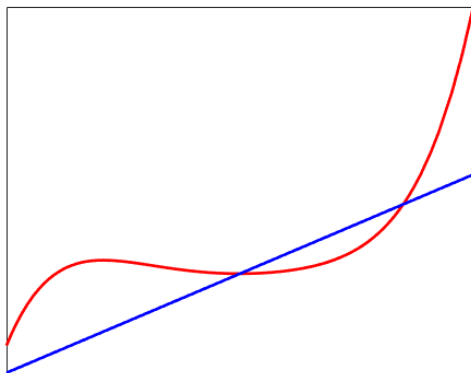
2.1 Iloraz różnicowy

$$y \rightarrow x \implies \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \rightarrow f'(x)$$

$f'(x) > 0$ - funkcja rośnie ($\tan \alpha > 0$)

$f'(x) < 0$ - funkcja maleje ($\tan \alpha < 0$)

\implies Geometrycznie, iloraz różnicowy to tangens siecznej stworzonej z punktów $(x, f(x))$ oraz $(y, f(y))$.
W granicy otrzymamy prostą styczną $\implies f'(x) = \tan \alpha$



2.2 Równanie stycznej

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2.2.1 Przybliżenie wielomianowe funkcji różniczkowalnej

Im bliżej x_0 jesteśmy, tym lepsze przybliżenie.

$$h \approx 0 \implies f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

I to jest jeden z sensów ich istnienia - przybliżamy funkcje za pomocą wielomianów! Im więcej pochodnych mamy tym lepsze przybliżenie ...Wolfram tak robi :)

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

2.3 Własności pochodnych

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f \pm g) &= \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \\ \frac{d}{dx}(fg) &= \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ \frac{d}{dx}f(g(x)) &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}\end{aligned}$$

2.4 Pochodne elementarne

Przetransformujmy iloraz różnicowy:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow f'(x)$$

Aby nie kaleczyć mej duszy...

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$1. \quad f(x) = c \quad f'(x) = 0$$

$$2. \quad f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h-x)(\dots)}{h} = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1} \implies nx^{n-1} \blacktriangleright$$

$$3. \quad f(x) = \sum a_i x^i \quad f'(x) = \sum i a_i x^{i-1}$$

$$4. \quad f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \dots \text{oraz z rachunku pól } \sin t < t < \tan t \\ t \approx 0 &\implies \frac{\sin t}{t} \approx 1 \\ \implies \dots &\implies \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \implies \cos x \blacktriangleright\end{aligned}$$

$$5. \quad f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \implies \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x \blacktriangleright$$

$$6. \quad f(x) = \tan x \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \text{podstawianie do wzorków wyżej} = \frac{1}{\cos^2 x} \blacktriangleright$$

2.4.1 $f(x) = |x|$

$$x_0 > 0 \implies \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} \approx 1$$

Styczną jest prosta $y = x$

$$x_0 < 0 \implies \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} \approx -1$$

Znów styczną jest prosta z wykresu funkcji!

$$x_0 = 0 \implies \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

\implies pochodna nieokreślona \implies pochodna w $(0, 0)$ nie istnieje!

2.5 Pochodne wyższych rzędów

2.5.1 Wyższe pochodne wielomianów

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1} \\ (x^n)'' &= n(n-1)x^{n-2} \\ (x^n)''' &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ (x^n)^{(n-1)} &= n!x \\ (x^n)^{(n)} &= n!\end{aligned}$$

Aplikując do wielomianu...

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\begin{aligned}f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= a_1 \\ f''(0) &= 2a_2 \text{ itd.}\end{aligned}$$

$$f^{(n-k)}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(n-i)!}{(k-i)!} a_{n-i} x^{k-i}$$

Twierdzenie 21. Dowieść, że wielomian przedstawia się w postaci:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Dowód. Wystarczy sprawdzić czy dla pewnego argumentu, w każdej pochodnej, aż do n-tej lewa strona zgadza się z prawą. Generalnie to dobrze policzyć takie coś:

$$y = x - a, \quad \frac{d}{dx} y(x)^n = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dy} y^n \frac{d}{dx} (x-c) = n(x-c)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}f(c) &= f(c) \\ f'(c) &= 0 + f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(c-c) + \dots = f'(c) \\ f''(c) &= f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(c-c) + \dots = f''(c) \text{ i tak dalej...} \\ f^{(n-1)}(c) &= f^{(n-1)}(c) + \frac{f^{(n)}(c)}{1!}(c-c) \\ f^{(n)}(c) &= f^{(n)}(c)\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 22. f, g są wielomianami, $\deg f = \deg g$, $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$, $k = 0, \dots, n \implies f = g$

Dowód. Przez poprawność. ■

Twierdzenie 23. f, g są wielomianami, $\deg f = \deg g$, $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$, $k = 0, \dots, n \implies f = g$

Dowód. Przez poprawność i indukcję od $k = n$ do 0. ■

Twierdzenie 24. c jest pierwiastkiem k -krotnym $\iff f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)} \neq 0$

1. $T: (x-1)^3 \mid (n-1)x^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x - (n-1)$

$$\begin{aligned}f(1) &= 0 \\ f'(x) &= (n-1)(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} + (n+1) \big|_{x=1} = 0 \\ f''(x) &= (n+1)n(n-1)x^{n-1} - (n+1)n(n-1)x^{n-2} \big|_{x=1} = 0 \blacktriangleright\end{aligned}$$

2. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ nie ma pierwiastków wielokrotnych.

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$f^{(k)}(x) = 1 + \dots + \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$$

Jeśli byłby jakiś pierwiastek wielokrotny to trzeba znaleźć jakieś c z twierdzenia 2.3.

$f(c) = f'(c) = 0 \implies c = 0$ i mamy sprzeczność bo $f(0) = 1$ ►

Rozdział 3

Wielomiany extended edition

3.1 Wielomiany zwrotne

Definicja 7. Wielomian nazywamy zwrotnym jeśli $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1, \dots$, $a_{n-i} = a_i$

Twierdzenie 25. Jeśli $2 \nmid \deg f$ wielomianu zwrotnego $\implies -1$ jest jego pierwiastkiem oraz $\frac{f(x)}{x+1}$ jest wielomianem zwrotnym.

Dowód. Niech $\deg f = 2n + 1$. Wówczas:

$f(-1) = a_{2n+1}(-1)^{2n+1} + a_{2n}(-1)^{2n} + \dots + a_{2n}(-1)^1 + a_{2n+1}(-1)^0 = 0$, gdyż parzyste potęgi zjedzą się z nieparzystymi przy tych samych współczynnikach.

Teraz użyję czegoś, co myślałem, że nigdy nie użyję - schematu Hornera :)

$$f(x) = (x+1)g(x)$$

$$\text{Ze schematu } b_i = a_{i+1} - b_{i+1}$$

$$\implies b_{2n} = a_{2n+1}$$

$$\implies b_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1}$$

$$\implies b_i = \sum (-1)^{k+1} a_{i+k}$$

I teraz porównujemy wszystkie te indeksy, które mają być równe.

$b_{2n} = b_0 \iff a_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n+1}$ i widać, że te wyrazy, które się mają skasować, skasują się.

$b_{2n-1} = b_1 \iff a_{2n} - a_{2n+1} = a_2 - a_3 + \dots - a_{2n+1}$ i znów... analogicznie pokazujemy równość pozostałych współczynników $\implies g(x)$ jest zwrotny. ■

Wniosek 5. Jeśli $\deg f = 2n$ to dzielimy go przez x^n i podstawiamy $t = x + \frac{1}{x}$. Wówczas znajdziemy jego pierwiastki :)

1. $\frac{x^5+3x^3+3x^2+1}{x+1} = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 1$

Robimy magię z Wniosku 5:

$$\implies x^2 - x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \implies t^2 - t + 2 \implies t_1, t_2$$

$$\implies t_1 = x + \frac{1}{x} \wedge t_2 = x + \frac{1}{x}$$

a z tego dostajemy już 4 pierwiastki ►

2. $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2$ jest zwrotny i szukamy pierwiastków.

$$\implies \frac{2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2}{x+1} = 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2$$

$$\implies 2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$\implies 2t^2 + 3t - 20 \implies t_1 = -4, t_2 = 2.5$$

$$x + \frac{1}{x} = -4 \implies x^2 + 1 + 4x = 0 \implies x_1 = -2 - \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3} - 2$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \implies x^2 + 1 - \frac{5}{2}x = 0 \implies x_1 = 2, x_2 = 0.5$$

$$\implies \{2, \frac{1}{2}, -2 \pm \sqrt{3}, -1\} \blacktriangleright$$

Twierdzenie 26. a jest pierwiastkiem wielomianu zwrotnego $\implies \frac{1}{a}$ jest także pierwiastkiem.

Dowód. Dowód był przemycyony w którymś zadaniu z Wielomianów 1. ■

Twierdzenie 27. f – zwrotny $\iff \forall_{x \neq 0} x^n f(\frac{1}{x}) = f(x)$

Dowód. $a_n x^n + \dots + a_0 = x^n (a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_0) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0 x^n$
 \implies kolejne współczynniki są równe tak jak w definicji wielomianu zwrotnego. ■

3.2 Wielomiany symetryczne

Definicja 8 (Wielomian wielu zmiennych).

$$f(x, y) = \sum_{m, n \in \mathbb{N}} a_{m, n} x^m y^n$$

Definicja 9 (Wielomian symetryczny).

$$f(x, y) = f(y, x)$$

f jest symetryczny jeśli jest równy dla dowolnej permutacji zmiennych.

Na przykład $f(x, y, z) = x + y + z^3$ ale $f(z, y, x) = z + y + x^3 \implies f$ nie jest symetryczny.

3.2.1 Wielomiany symetryczne podstawowe

Definicja 10.

$$\begin{aligned} \sum x_i &= s_1 \\ \sum x_i x_j &= s_2 \dots \\ \prod x_i &= s_n \end{aligned}$$

Twierdzenie 28. Każdy wielomian symetryczny można uzyskać z wielomianów symetrycznych podstawowych poprzez operacje elementarne.

1. Wyrazić wielomiany poprzez wielomiany symetryczne podstawowe:

- $x^3 + y^3 + z^3$

Robimy wielomian, którego pierwiastkami są x, y, z .

$$f(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 \wedge f(x) = f(y) = f(z) = 0$$

$$f(x) = x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3$$

$$f(y) = y^3 - s_1 y^2 + s_2 y - s_3$$

$$f(z) = z^3 - s_1 z^2 + s_2 z - s_3$$

$$\implies x^3 + y^3 + z^3 = s_1(x^2 + y^2 + z^2) - s_2 s_1 + 3s_3 = s_1(s_1^2 - 2s_2) - s_1 s_2 + 3s_3 \blacktriangleright$$

- $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4) = R_1((R_1^2 - 2R_2)^2 - 2R_2^2 + 2R_2^2 - R_2(R_1^2 - 2R_2)) \blacktriangleright$

2. $x + y + z = 0 \implies x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \wedge 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$

Z poprzedniego mamy wzór na to z wielomianami podstawowymi, gdzie $s_1 = 0 \implies x^3 + y^3 + z^3 = 3s_2 = 3xyz$

Teraz można pomnożyć $tf(t)$ i zsumować $\implies x^4 + y^4 + z^4 = s_3(x + y + z) - s_2(x^2 + y^2 + z^2) = -s_2(s_1^2 - 2s_2) = 2s_2^2$
 Ale $s_2^2 = (xy + yz + zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$
 $\implies x^4 + y^4 + z^4 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2} \blacktriangleright$

3. $x^4 + y^4 + z^4$ wyrazić poprzez wielomiany symetryczne podstawowe.

$s_1 = x + y + z, \quad s_2 = xy + yz + zx, \quad s_3 = xyz$
 Możemy stworzyć funkcję $f(t) = t(t - x)(t - y)(t - z) \implies$
 $x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x = 0$
 $y^4 - s_1y^3 + s_2y^2 - s_3y = 0$
 $z^4 - s_1z^3 + s_2z^2 - s_3z = 0$

Sumujemy stronami i otrzymujemy:

$$x^4 + y^4 + z^4 = s_3(x + y + z) - s_2(x^2 + y^2 + z^2) + s_1(x^3 + y^3 + z^3) = s_3s_1 - s_2(s_1^2 - 2s_2) + s_1(x^3 + y^3 + z^3)$$

Ostatni niezmienny wyraz możemy zrobić analogicznie poprzez sumowanie trzech wielomianów, ale na szczęście już na lekcji to policzyliśmy.

$$\implies x^4 + y^4 + z^4 = s_3s_1 - s_2(s_1^2 - 2s_2) + s_1[s_1(s_1^2 - 2s_2) - s_1s_2 + 3s_3]$$

Może nawet da się to jakoś ładniej zapisać, ale po co się w to bawić... \blacktriangleright

3.3 Nierówności wielomianowe i układy równań wielomianowych

1. Znaleźć znak $f(x)$ w zależności od x

- $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 5)$
- $f(x) = (x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + 2)(x^2 - 4) = (x + 2)^2(x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$

2. Rozwiąż nierówności

- $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 > 0$
 $f(x) = (x - 1)(\text{ujemna } \Delta)$
 $\implies x > 1$
- $(x^2 - 1)(x^4 - 1)(x^3 + 1) \geq 0$
 $f(x) = (x^2 - 1)^2(x^2 + 1)(x^3 + 1)$
 $\implies x \in \langle -1, \infty \rangle$
- $x^4 + x^2 \geq 2x$
 $x(x - 1)(x^3 + x + 2) \geq 0$
 $\implies x \in (-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty \rangle$
- $(x^2 - 9)^2 \geq (x + 3)^2(2x^2 - 7x + 3)$
 $x = -3 \implies ' = '$
 $x \neq -3 \implies (x - 3)^2 - (3x^2 - 7x + 3) \geq 0$
 $-x^2 + x + 6 \geq 0$
 $\implies x \in \langle -2, 3 \rangle \cup \{-3\}$

3. Wykaż, że $\forall x \in \mathbb{R}$ zachodzi

- $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9 > 0$
 $(x^2 - x)^2 + (x - 3)^2 \geq 0 \implies > 0$
- $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$
 $(x^2 - x)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$

4. Rozwiąż układ

$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases}$$

Mnożymy stronami i mamy nową zmienną $t = xy$.

$$\implies 18t = 144 \implies t = 8$$

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 32 \\ \frac{y^3}{x} = 2 \end{cases} \implies (x, y) = (4, 2), (-4, -2) \blacktriangleright$$

$$5. \begin{cases} x^2 = 3x + 4y \\ y^2 = 4x + 3y \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = -x + y$$

$$1. x = y = \{7, 0\}$$

$$2. x + y = -1 \implies \text{sprzeczność} \blacktriangleright$$

Rozdział 4

Funkcje wymierne

Definicja 11. Funkcję wymierną definiujemy jako

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

gdzie $g(x)$ i $h(x)$ są funkcjami wielomianowymi.

Wniosek 6. Dziedzina funkcji wymiernej to

$$D(f) = D(g) \setminus X, \quad X = \{x : h(x) = 0\}$$

4.1 Rozkład na ułamki proste

Definicja 12. Dzielenie funkcji wymiernych definiuje się następująco

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

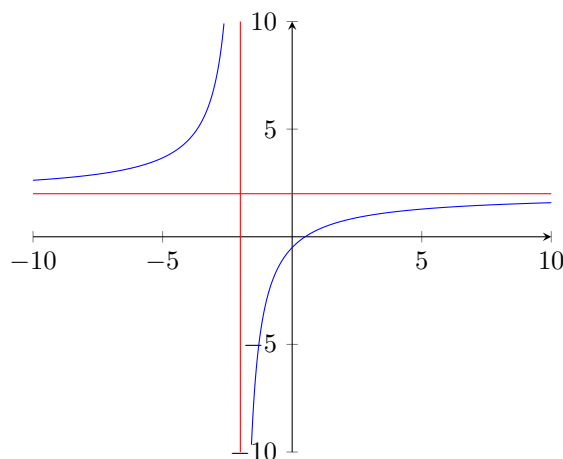
$$\deg r < \deg g$$

Twierdzenie 29. Resztę możemy rozłożyć na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{g(x)} &= \frac{r(x)}{(x - Q_1)^{n_1} (x - Q_2)^{n_2} \dots (x^2 + \dots)^{m_1} \dots} = \\ &= \frac{A_1^1}{(x - Q_1)^1} + \dots + \frac{A_{n_1}^1}{(x - Q_1)^{n_1}} + f(A_{n_k}^k, Q_k) + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \dots)^1} + \dots + f(B_{m_k}^k, C_{m_k}^k) + \dots \end{aligned}$$

Wniosek 7. Pojawiające się stałe znajdujemy z układów równań, wynikających z porównania współczynników przy potęgach uzyskanego wielomianu.

4.2 Funkcje homograficzne



Rysunek 4.1: $y(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ z asymptotami dla $x = -2$ i $y = 2$.

Definicja 13. Funkcją homograficzną jest funkcja postaci

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \wedge ad-bc \neq 0$$

czyli taka funkcyjka z ilorazu wielomianów stopnia 1.

Wniosek 8. Na macierzach ten warunek wygląda tak. Nwm, może przedstawienie w takiej formie przyda się do metody Cramera?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Twierdzenie 30. Każda funkcja homograficzna jest taką śmieszoną funkcją hiperboliczną.

Dowód.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{-\det(A)}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = A + \frac{B}{x+C}$$

Widać, że jeśli wyznacznik wynosi 0, to jest funkcja stała. ■

Twierdzenie 31. Asymptoty pionowe i poziome, wynikające z poprzedniego twierdzenia.

$$x = \frac{-d}{c} = -C$$

$$y = \frac{a}{c} = A$$

4.2.1 Pochodna homografii

Wniosek 9.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = \frac{\det(A)}{(cx+d)^2}$$

Homografia jest rosnąca na przedziałach dla $\det(A) > 0$ i malejąca dla $\det(A) < 0$.

4.3 Jakaś pała

4.3.1 Układy wielomianów symetrycznych

$$1. \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

Klasycznie przedstawiamy przez wielomiany symetryczne podstawowe.

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 - b = 7 \end{cases}$$

$\implies a = (3, -4) \implies b = (2, 9)$ i już stąd układziki równań symetrycznych podstawowych to prosta sprawa. ►

$$2. \begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3 \\ (1 - x)(1 - y) = 6 \\ b^2 + ab + a^2 - b + a = 2 \\ b - a = 5 \end{cases}$$

A stąd już zwykły układ z równaniem kwadratowym, a później układ z symetrycznymi podstawowymi. ►

$$3. \begin{cases} (x^2 + y^2)(x - y) = 13 \\ xy(x - y) = 6 \end{cases}$$

To nie jest symetryczne, ale jesteśmy sprytni ludzie $\implies z = -y$.

$$\begin{cases} (x^2 + z^2)(x + z) = 13 \\ xz(x + z) = -6 \\ (a^2 - 2b)a = 13 \\ ab = -6 \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

4.3.2 Jakiś moduł

$$1. \text{ Rozwiązać w rzeczywistych } |x^4 - 4| - x^2 - 2 = |x^4 - x^2 - 6|$$

Najpierw przypatrzmy się temu co pod modułami.

$$x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2) \implies \text{pierwiastki rzeczywiste } (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 + 2)(x^2 - 3) \implies \text{pierwiastki rzeczywiste } (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

Zatem mamy 5 przedziałów do zbadania.

$$x \in (-\infty, -\sqrt{3})$$

$$\implies x^4 - x^2 - 6 = x^4 - x^2 - 6$$

Mamy tożsamość \implies rozwiązaniem jest $x < -\sqrt{3}$

$$x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$$

$$\implies x^4 - 6 - x^2 = 6 + x^2 - x^4$$

$$\implies x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Mamy jedno rozwiązanie pasujące do przedziału $\implies x = -\sqrt{3}$

$$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\implies 2 - x^4 - x^2 = 6 + x^2 - x^4$$

$$\implies x^2 = -4 \text{ i nie mamy pierwiastków rzeczywistych.}$$

$$x \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$\implies x^4 - 6 - x^2 = 6 + x^2 - x^4$$

$$\implies x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Jedno rozwiązanie na danym przedziale $\implies x = \sqrt{3}$

$$x \in (\sqrt{3}, \infty)$$

Tak jak na pierwszym przedziale, tyle że teraz rozwiązaniem jest przedział $x \geq \sqrt{3}$

Finalnie rozwiązaniami rzeczywistymi są $x \leq -\sqrt{3}$ oraz $x \geq \sqrt{3}$ ►

2. Rozwiązać w rzeczywistych $|x^4 - 3x^2 - 4| = |x^4 - 1| - 3|x^2 + 1|$

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 - 4 &= (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2) \\x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) \\ \text{oraz } x^2 + 1 &\text{ zawsze jest dodatnie!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\in (-\infty, -2) \\x^4 - 3x^2 - 4 &= x^4 - 1 - 3x^2 - 3 \\ \text{Tożsamość} &\implies x < -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\in (-2, -1) \\4 + 3x^2 - x^4 &= x^4 - 1 - 3x^2 - 3 \\ \text{W tym przedziale jest jeden pierwiastek} &\implies x = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\in (-1, 1) \\4 + 3x^2 - x^4 &= 1 - x^4 - 3x^2 - 3 \\ \implies x^2 &= -\frac{4}{3} \\ \text{Brak rozwiązań rzeczywistych.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\in (1, 2) \\ \text{Analogicznie do tego, co już było mamy brak pierwiastków na przedziale.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\in (2, \infty) \\ \text{Analogicznie... mamy tożsamość} &\implies x \geq 2\end{aligned}$$

Podsumowując, rozwiązaniami tego nieprzyjemnego równania są $x \leq -2$ oraz $x \geq 2$ ►

4.3.3 Funkcja wymierna

1. Znaleźć parametr p taki, że dla $f(x) = \frac{px}{x^2+p^2+1}$, $f_{\max} = \frac{1}{4}$.

Można to jakoś pochodnymi pałować, ale bez nich też się da!

$$\begin{aligned}\frac{px}{x^2+p^2+1} &\leq \frac{1}{4} \implies \text{nierówność kwadratowa} \\ x^2 - 4px + p^2 + 1 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Jeśli taka funkcja jest zawsze dodatnia to } \Delta &< 0, \text{ natomiast szukane maksimum jest dla } \Delta = 0. \\ \implies \Delta = 16p^2 - 4(p^2 + 1) &= 12p^2 - 4 = 0 \\ \implies p &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \blacktriangleright\end{aligned}$$

A dla pochodnych to znajdujemy ekstremum dla $x = \pm\sqrt{p^2+1}$ i dalej to oczywiste $f(\pm\sqrt{p^2+1}) = \frac{1}{4}$.

4.3.4 Wymierności

1. $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Pokaż, że $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) &= a - b \in \mathbb{Q} \\ \implies \sqrt{a} - \sqrt{b} &\in \mathbb{Q} \\ \implies 2\sqrt{a} \in \mathbb{Q} &\implies \sqrt{a} \in \mathbb{Q} \blacktriangleright\end{aligned}$$

2. $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab} \in \mathbb{Q} \wedge a, b > 0 \wedge a, b \in \mathbb{Q}$. Pokaż, że $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1) &= (a - 1)(b - 1) \\ \implies (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1) &\in \mathbb{Q} \\ (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1) = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 &\in \mathbb{Q} \implies \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \\ \implies \sqrt{a}, \sqrt{b} &\in \mathbb{Q} \blacktriangleright\end{aligned}$$

3. W każdym przedziale (a, b) znajduje się liczba wymierna.

$$\iff \text{Istnieje takie } n \in \mathbb{N}, \text{ że } b - a > \frac{1}{n}$$

Definicja podłogi: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

$$\lfloor na \rfloor \leq na < \lfloor na \rfloor + 1 \quad / : n$$

$$\implies T \iff : a < \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} < b$$

$$b > a + \frac{1}{n} > \frac{\lfloor na \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\implies \text{Pasuje nam } \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}, \text{ bo jest wymierna i w przedziale } \blacktriangleright$$

4. Udowodnić, że w każdym przedziale znajduje się liczba niewymierna. *Hint!* $q \in \mathbb{Q}, r \notin \mathbb{Q} \implies q + r \notin \mathbb{Q}$

Rozdział 5

Ciągi

Definicja 14 (Ciąg).

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$$
$$f(n) \text{ oznaczamy } (a_n)_{n \geq 1}$$

Definicja 15 (Ciąg skończony).

$$f : \{k, k+1, \dots, k+r\} \mapsto \mathbb{C}$$

1. Znajdź wzór ($a_m = f(m)$) ciągu $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, \dots$

Niech $n \in \mathbb{N}$. Ilość występowania kolejnych n wzrasta jak kolejne liczby naturalne. Liczba n pojawia się więc w ciągu po raz pierwszy na pozycji $m = \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

$$\implies f\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) = n$$

Niech $m(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Otrzymujemy równanie na n : $n^2 - n + 2(1 - m) = 0$

$$n = \frac{1 + \sqrt{8m - 7}}{2}$$
$$\implies f(m(n)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8m - 7}$$

dla m wyliczonych w zależności od kolejnych n . Jednakże, aż do pojawienia się następnego n , dla kolejnych naturalnych argumentów m otrzymujemy te same wartości. W związku z tym, dziedzinę funkcji rozszerzymy do \mathbb{N} biorąc podłogę (jako, że f jest rosnącą). Finalnie:

$$f(m) = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8m - 7} \right\rfloor$$

5.1 Ciąg arytmetyczny

Definicja 16 (Ciąg arytmetyczny (C.A.)).

$$(a_n) : \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} - a_n = r$$

Twierdzenie 32. Zauważając, że $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_1 + r(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) = n\left(a_1 + \frac{r(n-1)}{2}\right) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Twierdzenie 33. Ciąg $(a_n)_1^\infty$ jest ciągiem arytmetycznym $\iff a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \forall n \geq 1$

Dowód. \implies :

Wychodzi z tego prostego przekształcenia definicji.

\impliedby :

To jest średnia arytmetyczna, zatem trafimy w środek - a_n . Zatem, między trzema wyrazami mamy taki sam odstęp r . ■

Twierdzenie 34. $(a_n)_1^\infty$ jest C.A. $\iff \forall n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

Dowód. \implies :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} &= \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{r}{a_n a_{n-1}} \\ \implies r \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right) &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{r(n-1)}{a_1 a_n} \end{aligned}$$

Gdy $r = 0$, to mamy ciąg stały i wtedy po lewej stronie mamy $\frac{n-1}{a_1^2}$, co jest tożsame z prawą stroną.

\impliedby :

Niech $r = a_2 - a_1$

Dla $n = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} &= \frac{2}{a_1 a_3} \\ \frac{a_3 + a_1}{a_1 a_2 a_3} &= \frac{2}{a_1 a_3} \implies a_1 + a_3 = 2a_2 \implies \text{ciąg poszedł dalej.} \end{aligned}$$

Teraz można indukcyjnie to pociągnąć.

Zakładamy, że ciąg jest arytmetyczny do n -tego miejsca. Pokażemy, że dla $n+1$ też jest.

$$\frac{a_2 \dots a_{n+1} + a_1 a_3 \dots a_{n+1} + \dots}{a_1 \dots a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n-1}}$$

Twierdzenie 35. (a_n) jest C.A. i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \geq \sqrt[n]{\prod a_i} \geq \sqrt{a_1 a_n}$$

Dowód. Zapiszmy zwykłe nierówności między średnimi:

$$\sqrt[n]{\prod a_i} \leq \frac{1}{n} \sum a_i = \frac{1}{n} \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Podobnie nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną, ale taką podniesioną do kwadratu:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left(\prod a_i\right)^2} &\geq \frac{n}{\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} + \frac{1}{a_1 a_n}} = \frac{n}{\frac{n-1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_1 a_n}} = a_1 a_n \\ &\implies \sqrt[n]{\prod a_i} \geq \sqrt{a_1 a_n} \end{aligned}$$

1. Mamy C.A. (a_n) . Czy (b_n) : $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ jest C.A.?

$$\begin{aligned} b_n &= (a_n + r)^2 - a_n^2 = 2a_n r + r^2 \\ b_{n-1} &= 2a_{n-1} r + r^2 \\ b_n - b_{n-1} &= 2r^2 \blacktriangleright \end{aligned}$$

2. (a_n) jest C.A. Czy $c_n = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}$ jest C.A.?

$$c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \dots + a_{n+1+k} - (a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}) = a_{n+1+k} - a_n = (k+1)r \blacktriangleright$$

3. Znaleźć C.A., którego suma pierwszych n wyrazów wynosi n^2 (dla każdego n).

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$$

$$S_{n+1} = (n+1)^2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 \blacktriangleright$$

4. (a_n) C.A. $\forall a_n \in \mathbb{N}$. Pewien wyraz tego ciągu jest kwadratem. Udowodnić, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest kwadratami.

$$a_n = k^2 = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{n+m} = a_1 + (n+m-1)r = k^2 + mr$$

5. Czy istnieje C.A., którego pewne 3 wyrazy wynoszą $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$?

6. Pierwiastki równania $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ tworzą C.A. dla pewnego a . Znajdź ten ciąg.

5.2 Ciąg geometryczny

Definicja 17 (Ciąg geometryczny (C.G.)).

$$(a_n) : \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = a_n q$$

$$\implies a_n = a_1 q^{n-1}$$

1. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ C.G. $\iff a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ dla $n > 1$

$$\implies : a_{n-1}a_{n+1} = a_1^2 q^{n-2} q^n = a_1^2 q^{2(n-1)} = a_n^2$$

$$\Leftarrow : a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} \implies \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Równość ta jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem cały ciąg jest ciągiem geometrycznym. \blacktriangleright

2. Czy 10, 11, 12 mogą być elementami ciągu geometrycznego?

$$\frac{11}{10} = q^n \wedge \frac{12}{11} = q^m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{11}{10}\right)^m = \left(\frac{12}{11}\right)^n$$

$$11^{n+m} = 10^m 12^n \implies \text{mamy sprzeczność z rozkładem} \blacktriangleright$$

3. $a_{n+m} = \alpha$, $a_{n-m} = \beta$, $n > m$. Znaleźć a_n, a_m

$$a_{n+m} = a_1 q^{n+m-1}, \quad a_{n-m} = a_1 q^{n-m-1}$$

$$a_{n+m} a_{n-m} = a_1^2 q^{2(n-1)} = a_n^2$$

$$\implies a_n = \sqrt{\alpha \beta} \operatorname{sgn}(a_1) \operatorname{sgn}(q)^{n-1}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{q^{n+m-1}}{q^{n-m-1}} = q^{2m}$$

4. Zaproponuj wzór na n -ty wyraz ciągu

(a) 1, 2, 3: $a_n = n$

(b) -1, 2, -3: $a_n = n(-1)^n$

(c) 1, 4, 27: $a_n = n^n$

(d) 2, 3, 5, 7, 11: $a_n = p_n$

(e) 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$: $a_n = 3^{3-n}$

5. Wyznacz najmniejszy wyraz ciągu (a_n)

(a) $a_n = n^2 - 5n + 1$

Weźmy funkcję rzeczywistą $f(x) = x^2 - 5x + 1$. Wartość minimalną otrzymujemy z pierwszej pochodnej:

$$0 = 2x - 5 \implies x = 2.5$$

W związku z tym minimum mamy dla $n = 2$ i $n = 3$.

$$\implies a_2 = a_3 = -5 \blacktriangleright$$

(b) $a_n = \sqrt[3]{n^4 - 2n^2 + 91}$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 91}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x-2}{3(x^2-2x+91)^{2/3}} = 0$$

$$x = 1 \implies n = 1 \text{ (bo -1 nie jest naturalne)}$$

$$\implies a_1 = \sqrt[3]{90} \blacktriangleright$$

6. Udowodnij, że ciąg $a_n = \frac{n^3+4n^2+n-1}{n^4+n^3+2n^2-2n-1}$ jest ograniczony od góry.

$a_1 = 5$ i istnieje podejrzenie, że to największy wyraz (funkcja zdaje się być malejąca na przedziale liczb naturalnych). Zatem sprawdzimy czy $a_n \leq 5$

$$n^3 + 4n^2 + n - 1 \leq 5n^4 + 5n^3 + 10n^2 - 10n - 5$$

$$5n^4 + 4n^3 + 6n^2 - 11n - 4 \geq 0 \text{ co jest prawdą dla } n \geq 1 \blacktriangleright$$

Twierdzenie 36 (Sumy z wyrazami ciągów). Niech $(a_n)_1^n$ będzie ciągiem geometrycznym.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{kn} = \sum_{k=1}^n k a_k = a_1 \left(\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2} \right)$$

Dowód.

$$\sum a_k = \sum a_1 q^{k-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\begin{aligned} \sum k a_k &= \sum k a_1 q^{k-1} = a_1(1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}) = a_1 \frac{d}{dq} (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = \\ &= a_1 \frac{d}{dq} \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1 \right) = a_1 \frac{d}{dq} \left(\frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \right) = a_1 \left(\frac{((n+1)q^n - 1)(q-1) - (q^{n+1} - q)}{(q-1)^2} \right) = \\ &= a_1 \left(\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2} \right) \end{aligned}$$

■

1. Oblicz sumę $\sum_{k=0}^{2019} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor$

Obliczę ogólniejszą sumę $\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor$. Wyjdźmy od tego, że $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$. Część ułamkową policzymy łatwo z teorii liczb: $2 \equiv -1 \pmod{3}$

$$2^k \equiv \begin{cases} 1, & 2 \mid k \\ -1, & 2 \nmid k \end{cases} \pmod{3} \implies \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor = \begin{cases} 1/3, & 2 \mid k \\ 2/3, & 2 \nmid k \end{cases}$$

$$\implies \sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n 2^k - \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{3} - \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \frac{2}{3} = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 2 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil)$$

Teraz łatwo można policzyć dla $n = 2019$:

$$\sum_{k=0}^{2019} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} (2^{2020} - 2 - 1009 - 2020) = \frac{1}{3} (2^{2020} - 3031) \blacktriangleright$$

5.3 Ciągi rosnące, malejące

Twierdzenie 37. Nierówność Bernouliego

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x, \quad \alpha \geq 1$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

dla $x > -1$

Równość zachodzi dla $x = 0$ lub $n = 1$.

1. $\sqrt[n]{n+1}$ jest malejący.

Chcemy pokazać, że dla $n > 1$ zachodzi $\sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n-1]{n}$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} < n$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} > \frac{1}{n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)n}$$

co jest spełnione z Bernouliego dla $n > 1$.

2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący.

Pokazujemy, że $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n$$

$$1 - \frac{1}{1+n} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

Z Bernouliego mamy:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} > 1 - \frac{1}{n+2}$$

$1 > 0$ ►

Można też prościej jeśli akceptujemy Bernouliego dla nienaturalnych.

5.4 Tożsamość Abela

Twierdzenie 38 (Sumowanie przez części). Niech $(x_n)_{n \geq 1}$ i $(y_n)_{n \geq 1}$ będą ciągami liczbowymi i $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Wówczas prawdziwa jest tożsamość

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (y_k - y_{k+1}) + s_n y_n$$

Dowód. Przeprowadzę dowód indukcyjny.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} x_k y_k &= \sum_{k=1}^{n-1} s_k (y_k - y_{k+1}) + s_n y_n + x_{n+1} y_{n+1} - s_n y_{n+1} + s_n y_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n s_k (y_k - y_{k+1}) + y_{n+1} (s_n + x_{n+1}) = \sum_{k=1}^n s_k (y_k - y_{k+1}) + s_{n+1} y_{n+1} \end{aligned}$$

■

1. Wyprowadź wzór na $\sum_{k=1}^n k$

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (-1) + s_n n = - \sum_{k=1}^{n-1} k + n^2 = - \sum_{k=1}^n k + n(n+1) \implies \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \blacktriangleright$$

2. Wzór na $\sum k(k+1)$

$$\begin{aligned}\sum k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}(-1) + \frac{n(n+1)}{2}(n+1) = -\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \\ &\Rightarrow \sum k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \blacktriangleright\end{aligned}$$

3. Wzór na $\sum k^2$

$$\begin{aligned}\sum k^2 &= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} + n\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 2\sum k^2 = n^2(n+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \\ &= n^2(n+1) - \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \Rightarrow \sum k^2 = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \blacktriangleright\end{aligned}$$

4. Wzór na $\sum kq^k$

$$\begin{aligned}\sum kq^k &= 1 + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n = \frac{(q + 2q^2 + \dots + nq^n)(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - nq^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{q\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) - nq^{n+1}}{1-q} = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2} \blacktriangleright\end{aligned}$$

Rozdział 6

Ciągi rekurencyjne

1. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$; Znajdź a_n .

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Teza: } a_n = \frac{1}{n}$$

Wtedy indukcyjnie powinno wychodzić: $a_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ ►

2. $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n^2 + 1}$

$$\text{Teza: } a_n = \sqrt{2^n - 1}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$$
 ►

- 3.

$f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_n(x) = x f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$ dla $n \geq 3$. Pokaż, że:

$$f_{n+1}(x) = x^n + \binom{n-1}{1} x^{n-2} + \binom{n-2}{2} x^{n-4} + \dots = \sum_{k=0} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$$

Pokażemy to indukcyjnie:

Sprawdzając dla $n = 1, 2, 3$ przekonujemy się, że to działa. Załóżmy więc, że teza jest prawdziwa dla każdego $k \in \mathbb{N}, k > 3$. Pokażemy, że jest prawdziwa dla $k+1$.

Z definicji ciągu mamy: $f_{k+1}(x) = x f_k(x) + f_{k-1}(x)$

$$\begin{aligned} \sum \binom{k-l}{l} x^{k-2l} &= x \sum \binom{k-1-l}{l} x^{k-1-2l} + \sum \binom{k-2-l}{l} x^{k-2-2l} = \\ &= \sum \binom{k-1-l}{l} x^{k-2l} + \sum \binom{k-2-l}{l} x^{k-2(l+1)} = \\ &= x^k + \sum_{l=1} \left[\binom{k-1-l}{l} + \binom{k-1-l}{l-1} \right] x^{k-2l} \end{aligned}$$

Przekształćmy te symbole Newtona:

$$\binom{k}{q} + \binom{k}{q-1} = \frac{(k+1)!(k-q+1) + (k+1)!q}{q!(k-q+1)!(k+1)} = \binom{k+1}{q} \left(\frac{k-q+1}{k+1} + \frac{q}{k+1} \right) = \binom{k+1}{q}$$

$$\Rightarrow f_{k+1}(x) = x^k + \sum_{l=1} \binom{k-l}{l} x^{k-2l} = \sum_{l=0} \binom{k-l}{l} x^{k-2l}$$

co kończy dowód indukcyjny. ►

6.1 Ciąg Fibonacciego

Definicja 18.

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Mamy pasek $1 \times n$. Na ile sposobów pokryć paskami $1 \times 1, 1 \times 2$?

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 3$$

Teza: $a_n = F_{n+1}$

Mamy dwa rozłączne przypadki, kładzenia prostokątka lub kwadracika. Dlatego to się ładnie sumuje. ►

- 2.

Udowodnić, że $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m+1} F_{n-m}$ dla $n > m$.

Dalej mamy prostokąt $1 \times n - 1$. Trzeba gdzieś w nim postawić kreskę. Mamy wtedy dwie opcje rozłączne. Prostokącik przykrywa kreskę lub nie.

Kreska będzie stała w miejscu $m - 1$. Wtedy po prawej stronie prostokąta jest $n - m$ miejsc. Gdy prostokącik nie przykrywa kreski mamy lewą stronę równości. Gdy przykrywa to mamy po lewej stronie prostokąta $m - 2$ miejsc do rozdziału z Fibonacciego, a po prawej $n - m - 1$. Stąd prawa strona równości. ►

- 3.

Udowodnić, że $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-k} \binom{n-k}{k}$

Kolejne wyrazy możemy traktować jako wartości wielomianów z dowodu wyżej (6.0, ex.3) dla argumentu $x = 1$

$\Rightarrow f_1(1) = 1, f_2(1) = 1, f_{n+1} = f_n(1) + f_{n-1}(1)$ co jest rekurencyjną definicją ciągu Fibonacciego!

$\Rightarrow F_{n+1} = f_{n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n-k} \binom{n-k}{k}$ ►

- 4.

F_n, F_{n+1} są względnie pierwsze.

$$d \mid F_n, F_{n+1} \Rightarrow d \mid F_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow d \mid F_1 = 1 \text{ ►}$$

Twierdzenie 39.

$$NWD(F_n, F_m) = F_{NWD(n,m)}$$

Dowód. Zakładamy, że $n > m$.

Teza₁: $NWD(F_n, F_m) = NWD(F_{n-m}, F_m) = NWD(F_n, F_{n-m}) = NWD(F_n, F_m, F_{n-m})$

$NWD(F_n, F_m) \mid F_{n-m}$

Z zadania 2 wynika, że $NWD(F_n, F_m) \mid F_{m-1} F_{n-m}$ ale F_m, F_{m-1} są względnie pierwsze.

$NWD(F_{n-m}, F_m) \mid F_n$ analogicznie

$NWD(F_n, F_{n-m}) \mid F_m$ także

$\Rightarrow NWD(F_n, F_m, F_{n-m})$

Teraz wystarczy przeprowadzić przez to Euklidesa, bo możemy do woli odejmować m :

Pierwsza linijka Euklidesa: $NWD(F_n, F_m) = NWD(F_{n-m}, F_m) = \dots = NWD(F_m, F_{r_1}) =$

Kolejne linijki: $= NWD(F_{m-r_1}, F_{r_1}) = NWD(F_{r_1}, F_{r_2}) = \dots = NWD(F_{r_k}, F_d) = NWD(F_{2d}, F_d) = NWD(F_d, F_d) = F_d$ ■

1. $a^2 - ab - b^2 = \pm 1$; $a, b \in \mathbb{N}$. Pokazać, że $a = F_{n+1}$, $b = F_n$.

Działa dla F_1, F_2 : $F_2^2 - F_1 F_2 - F_1^2 = -1$

$F_3^2 - F_2 F_3 - F_2^2 = 1 \dots$

Hipoteza jest taka, że to ± 1 idzie tak na przemian.

Udowodnijmy, że $a \geq b$.

$$a(a-b) = b^2 \pm 1 \geq 0 \implies a \geq b$$

Jakie równanie spełniają $a-b, b$?

$\implies b^2 - b(a-b) - (a-b)^2 = b^2 + ab - a^2 = -(a^2 - ab - b^2)$ zatem to się zamienia ± 1 .

$(a \geq b) \mapsto (b \geq a-b) \mapsto (a-b \geq b - (a-b))$ do momentu, gdy pasują nam naturalne. Jest to moment, gdy nierówności zamieniają się na równości.

$$a = b \implies -a^2 = \pm 1 \implies a = b = 1$$

Zatem algorytmem to schodzi do dwóch jedynek. Zatem a, b są względnie pierwsze. A na postawie tego algorytmu widzimy, że to też kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. ►

6.2 Mnożenie macierzy

Definicja 19. Macierze możemy przez siebie mnożyć jeżeli są wymiarów $n \times m$, $m \times p$. Wówczas wynikiem jest macierz $n \times p$ (n wierszy, p kolumn).

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

W ciągu Fibonacciego mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

Gdy mamy macierz kwadratową to można ją potęgować. Szczególnie ładne są jednostkowe macierze diagonalne.

$$A^0 = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI_n = I_n A = A$$

I w związku z tym jesteśmy w stanie napisać takie coś:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierze diagonalne ładnie się potęgują, więc ten syf z Fibonacciego trzeba zdiagonalizować!

6.3 Diagonalizacja macierzy

Potęgowanie macierzy diagonalnej

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^n \end{bmatrix}$$

Wartości własne i wektory własne

Definicja 20. Wartości własne λ i odpowiadające im wektory własne \mathbf{w} (których jest nieskończenie wiele dla danego λ) definiujemy z równości macierzowej:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$$

przy czym wektory własne \mathbf{w} nie mogą być zerowe. Wektory własne są odporne na obroty i odbicia z przekształcenia macierzą \mathbf{A} .

Wartości i przykładowe wektory własne możemy znaleźć rozwiązując powyższe równanie w następujący sposób:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Interesują nas rozwiązania dla $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = 0$, gdyż dla innego wyznacznika istnieje macierz odwrotna $(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)^{-1}$, skąd otrzymalibyśmy $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Zatem:

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) = 0$$

skąd otrzymujemy wielomian stopnia równego stopniowi macierzy \mathbf{A} . Następnie szukamy pierwiastków wielomianu, czyli wartości własnych macierzy. Jeśli nie są wielokrotne to mamy farta - można zrobić diagonalizację. Jeśli będą wielokrotne, to poza szczególnymi przypadkami nie da się jej przeprowadzić. Mając wyznaczone wartości własne, wracamy do wyjściowego równania i dostajemy układ równań na wektory własne dla każdego λ .

Twierdzenie 40. Diagonalizacja macierzy \mathbf{A} to przedstawienie jej w postaci iloczynu:

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}$$

gdzie \mathbf{W} jest macierzą, w której kolumnach są wektory własne dla kolejnych wartości własnych, natomiast $\mathbf{\Lambda}$ jest macierzą diagonalną z wartości własnych.

Dowód. Pokażemy, że $\mathbf{A}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}$ dla zdefiniowanych wyżej macierzy, bo wówczas jest spełniona także powyższa równość.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{W} &= \mathbf{A}[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_n] = [\mathbf{A}\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{w}_n] = \\ &= [\lambda_1\mathbf{w}_1 \quad \lambda_2\mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \lambda_n\mathbf{w}_n] = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\end{aligned}$$

■

Diagonalizacja ma extra własności. Łatwo można podnosić \mathbf{A} do rzeczywistych potęg, a także robić $\exp(\mathbf{A})$, a to się może przydać do równań różniczkowych, gdzie trzeba uziemić stałe.

Definicja 21 (Funkcje na macierzach diagonalnych). Funkcje możemy sobie definiować na macierzach diagonalnych jako:

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} f(a_{11}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(a_{22}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 41.

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{W}^{-1}$$

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{W}\exp(\mathbf{\Lambda})\mathbf{W}^{-1}$$

przy czym n może być nawet nienaturalne.

Dowód. (Dla $n \in \mathbb{N}$)

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1})(\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1})\dots(\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}) = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}\dots\mathbf{\Lambda}\mathbf{I}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{W}^{-1}$$

■

6.3.1 Diagonalizacja macierzy na F_n

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chcemy zdiagonalizować \mathbf{A} zgodnie z opisanym schematem, bo może dostaniemy coś fajnego.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\ \implies \lambda_1 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Teraz liczymy wektory własne z definicji:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\lambda_1)w_x + w_y \\ w_x - \lambda_1 w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \implies w_x = \lambda_1 w_y$$

Bierzemy sobie najprostsze wektory własne.

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \implies \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Trzeba jeszcze znaleźć macierz odwrotną do \mathbf{W} . Można to zrobić lepiej lub gorzej, ja to zrobię gorzej - z definicji, bo inaczej nie umiem :)

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\mathbf{W}^{-1} &= \mathbf{I} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 c & \lambda_1 b + \lambda_2 d \\ a + c & b + d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu prostego układu równań dostajemy:

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_1 \\ 1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Teraz można wszystko ze sobą posklejać:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \implies \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} \\ \implies \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} &= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalnie, po wielu cierpieniach otrzymujemy wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego!

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

6.4 Sprowadzenie rekurencji do prostych problemów

1. $a_1, a_{n+1} = pa_n + q$

Chcemy sprowadzić do czegoś, co potrafimy rozwiązać.

$$b_n = a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 2$$

$$b_{n+1} = pb_n - \text{geometryczny}$$

$$b_{n+1} = p^{n-1}b_2$$

$$a_n = b_{n+1} + a_n = b_{n+1} + b_n + a_{n-1} = \dots = b_{n+1} + b_n + \dots + b_2 + a_1 = b_2(p^{n-2} + p^{n-3} + \dots + 1) + a_1 = b_2 \frac{p^{n-1}-1}{p-1} + a_1 = (a_2 - a_1) \frac{p^{n-1}-1}{p-1} + a_1 = a_1 p^{n-1} + q \frac{p^{n-1}-1}{p-1}$$

$$a_{n+1} = a_1 p^n + q \frac{p^n - 1}{p - 1} \blacktriangleright$$

2. $S_n = \sum_{i=1}^n a_i, S_n = 4a_n - 3n + 2$. Znaleźć a_n .

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n - 3$$

$$a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n + 1$$

$$\implies a_{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n a_1 + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} \blacktriangleright$$

3. $a_1 = 1, a_n > 0, a_n a_{n+1}^2 = 36$

$$a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = 6^{1/2}$$

Rozważmy więc taką rekurencję: $a_n = 6^{b_n}$

$$b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = \frac{1}{2}$$

$$b_n + 2b_{n+1} = 2$$

$$\implies (b_{n+1} - r) = -\frac{1}{2}(b_n - r) \text{ czy da się znaleźć takie } r?$$

$$2b_{n+1} + b_n = 2r + r = 3r = 2 \implies r = \frac{2}{3}$$

$$(b_{n+1} - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}(b_n - \frac{2}{3})$$

$$b_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(b_{n-1} - \frac{2}{3}) = \dots = (-\frac{1}{2})^{n-1} \frac{1}{3}$$

$$\implies a_{n+1} = 6^{(-\frac{1}{2})^{n-1} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}} \blacktriangleright$$

6.5 Zmienne współczynniki rekurencji liniowej

1. $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

Wprowadzamy ciąg $b_n = \frac{a_n}{n!}$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

Niech $a_1 = 1$

$$b_{n+1} = \sum \frac{1}{(n+1-k)!} \blacktriangleright$$

2. $na_{n+1} = (n+2)a_n + n$

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n+2} + \frac{1}{n+2} \quad / : (n+1)$$

$$b_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)} = b_{n-1} + \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \blacktriangleright$$

6.5.1 Generalna metoda

$$a_{n+1} = f(n)a_n + g(n)$$

Szukamy takiego $h(n)$, że

$$f(n) = \frac{h(n)}{h(n+1)}$$

$$h(n+1)a_{n+1} = h(n)a_n + g(n)h(n+1)$$

$$b_{n+1} = b_n + H(n)$$

1. $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n^2 + \frac{1}{4}$. Dla jakich x_1 ciąg jest a) rosnący, b) malejący?

- (a) Z definicji wynika $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n > 0$

$$3x_n^2 - 4x_n + 1 > 0$$

$$(3x_n - 1)(x_n - 1) > 0$$

$$\implies x_n \in (0, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$$

$$x_1 > 1 \implies x_2 > x_1 > 1 \implies \dots \implies x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1 > 1$$

$$x_1 \in (0, \frac{1}{3}) \implies x_2 > x_1 > 0 \blacktriangleright$$

- (b) $\implies x_n \in (\frac{1}{3}, 1)$

Rozwiązanie w pracy domowej. \blacktriangleright

6.6 Równanie charakterystyczne

Wszystko to, co jest poniżej wynika z diagonalizacji macierzy reprezentującej równanie rekurencyjne. Równanie charakterystyczne tworzymy w następujący sposób:

$$a_n \longrightarrow x^n$$

Robiąc diagonalizację dojdziemy do wniosku, że rozwiązaniami jawnymi liniowych równań rekurencyjnych są równania poniższych postaci.

Twierdzenie 42. Dla niepowtarzających się wartości własnych, tj. $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$

$$a_n = \sum A_i x_i^n$$

Dla wielokrotnych wartości własnych, np. dla x_k powtarzającego się m razy:

$$a_n = \sum_{i \neq k} A_i x_i^n + \sum_{i=0}^{m-1} B_i n^i x_k^n$$

1. Znajdź wzór ogólny (a_n) dla $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 2$

$$\text{Równanie charakterystyczne: } x^2 = 3x - 2 \implies x_1 = 1, x_2 = 2$$

Pierwiastki różne:

$$a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$$

$$a_0 = A + B$$

$$a_1 = Ax_1 + Bx_2 \blacktriangleright$$

2. $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 1, a_1 = 4$

$$x^2 = 2x - 2 \implies x_1 = 1 - i, x_2 = 1 + i$$

$$a_n = A(1 - i)^n + B(1 + i)^n$$

$$1 = A + B$$

$$4 = A(1 - i) + B(1 + i)$$

$$\implies a_n = \frac{1 - 3i}{2}(1 + i)^n + \frac{1 + 3i}{2}(1 - i)^n$$

$$a_n = 2^{n/2} \frac{1-3i}{2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + 2^{n/2} \frac{1+3i}{2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

$$a_n = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} + 3 \cdot 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

To się cyklicznie powtarza co $\Delta n = 8$ ►

3. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 6$

$$x^2 = 4x - 4 \implies x = 2$$

Mamy pierwiastek podwójny, skąd mamy przepis (z diagonalizacji macierzy):

$$a_n = Ax^n + Bnx^n$$

$$1 = A$$

$$6 = 2A + 2B \implies B = 2$$

$$\implies a_n = 2^n + 2^{n+1}n = 2^n(1+2n) \text{ ►}$$

4. $a_{n+3} + a_{n+2} = 8a_{n+1} + 12a_n$

$$x^3 + x^2 = 8x + 12 \implies x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = -2$$

$$\implies a_n = A3^n + B(-2)^n + Cn(-2)^n$$

$$a_0 = A + B$$

$$a_1 = 3A - 2B - 2C$$

$$a_2 = 9A + 4B + 8C \text{ ►}$$

6.7 Układy rekurencji

1. $u_1 = 3$, $v_1 = 3$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

$$\implies v_n = \frac{u_{n+1} - 3u_n}{2} \implies v_{n+1} = \frac{u_{n+2} - 3u_{n+1}}{2} \text{ i pała}$$

Można też potęgować macierze:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$$

Tak czy inaczej dochodzimy do rekurencji tylko jednego ciągu: $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$, $u_1 = 3$, $u_2 = 11$

$$x^2 = 4x - 1 \implies x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\implies u_n = Ax_1^n + Bx_2^n \text{ ►}$$

2. Wypisać a_n, b_n przez a_1, b_1

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

$$\implies b_n = 2a_{n+1} - a_n$$

$$8a_{n+2} - 4a_{n+1} = a_n + 6a_{n+1} - 3a_n$$

$$4a_{n+2} - 5a_{n+1} + a_n = 0 \implies 4x^2 - 5x + 1 = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$$

Stąd już izi pała. ►

3. Udowodnij, że $2^{n-1} \mid \binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 25\binom{n}{5} + \dots$

Chcemy stworzyć rekurencję dla: $a_n = \sum 5^k \binom{n}{2k+1} = Ax_1^n + Bx_2^n$. Bez żadnego związku z niczym:

$$(1 + \sqrt{5})^n = \sum \binom{n}{k} 5^{k/2}, (1 - \sqrt{5})^n = \sum \binom{n}{k} (-1)^k 5^{k/2}$$

Będzie tak, że $a_n = A(1 + \sqrt{5})^n + B(1 - \sqrt{5})^n$

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$\implies a_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5})^n - \frac{1}{2\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^n$$

\implies równanie charakterystyczne: $x^2 = 2x + 4$

$$\implies a_{n+2} = 2a_{n+1} + 4a_n$$

I mamy oczywistą indukcję, która nam daje podzielność. ►

4. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ Udowodnij, że $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

Twierdzenie 43 (Przypomniane Twierdzenie Wilsona).

$$n! \equiv -1 \pmod{n+1}$$

dla każdego $n+1$ pierwszego.

Rozdział 7

Kresy

Definicja 22. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry liczbą $M \iff \forall a \in A \ a \leq M$

Definicja 23. Najmniejsze ograniczenie górne zbioru A nazywamy jego kresem górnym i nazywamy $\sup A$
Jeśli nie ma ograniczenia z góry to $\sup A = +\infty$

Definicja 24. Największe ograniczenie dolne zbioru A nazywamy jego kresem dolnym i nazywamy $\inf A$
Jeśli nie ma ograniczenia z dołu to $\inf A = -\infty$

Definicja 25. Największy element zbioru A jeśli istnieje oznaczamy $\max A$, a najmniejszy $\min A$

$$\begin{aligned}\sup \mathbb{R} &= +\infty, \inf \mathbb{R} = -\infty \\ \inf \mathbb{N} &= 1 = \min \mathbb{N} \\ \sup\{x \in \mathbb{R} : x < 0\} &= 0 \\ \max\{x \in \mathbb{R} : x < 0\} &= \text{nie ma}\end{aligned}$$

Twierdzenie 44. $A \subset \mathbb{R}$. $\sup A \in A \iff$ w A istnieje element maksymalny.

Dowód. \implies :

$\max A$ - element należy do A i jest ograniczeniem zbioru. Zatem z definicji, $\sup A = \max A$.

\impliedby :

Chcemy pokazać, że $\max A$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym.

DO DOMU ■

7.1 Zabawy z ε

Twierdzenie 45. Ograniczenie górne c niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest jego kresem górnym \iff
 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \ a > c - \varepsilon$

Analogiczne twierdzenie dla infimum.

Dowód. \implies :

$c = \sup A \implies c - \varepsilon < \sup A$. Jeśli nie istnieje $a \in A$ pomiędzy $c - \varepsilon$, $\sup A$ to $c - \varepsilon$ jest ograniczeniem górnym. Sprzeczność, bo $\sup A$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym.

$\implies \exists_a c - \varepsilon < a \leq \sup A$

\Leftarrow :

Chcemy pokazać, że c jest najmniejszym ograniczeniem górnym. Załóżmy, że istnieje mniejsze ograniczenie górne $b < c$.

Przyjmujemy $\varepsilon = c - b > 0 \implies \exists_a a > b$. Znaleźliśmy element większy od b , zatem mamy sprzeczność. ■

1. Znajdź kresy zbioru: $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$$\inf\{\frac{1}{n}\} = 0, \sup\{\frac{1}{n}\} = 1$$

Praca domowa pisemna!

2. Znajdź kresy zbioru: $\{x^2 - 4x + 8 : x \in [-5, 5]\}$

$$\inf = f(2), \sup = 13$$

3. Znajdź kresy zbioru: $\{\frac{x-1}{x+1} : x > -1\}$

$$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$\sup\left\{\frac{1}{x+1}\right\} = +\infty, \text{ chcemy pokazać, że } \forall_{M>0} \exists_{a'} a' > M$$

$$\frac{1}{x+1} > M \iff x < \frac{1}{M} - 1. \text{ Weźmiemy } x = \frac{1}{M+1} - 1 \text{ i wychodzi już nierówność}$$

$$\implies \sup A' = +\infty$$

$$\inf A' = 0$$

$$\text{Szukamy } \frac{1}{x+1} < \varepsilon \implies x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\text{Weźmy } x = \frac{2}{\varepsilon} - 1 \text{ i wychodzi, że } \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$$

Zatem wracając do wyjściowego zbioru dostajemy $\sup A = 1$, $\inf A = -\infty$

4. Kresy $B = \left\{\frac{n-k}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$

$$\frac{n-k}{n+k} = 1 - \frac{2k}{n+k}, \frac{n-k}{n+k} = -1 + \frac{2n}{n+k}$$

$$\forall_{b \in B} \implies -1 < b < 1$$

Chcemy pokazać, że $\sup B = 1$, $\inf B = -1$

Bierzemy sobie $n = 1$ i $k \implies +\infty$, $\frac{2n}{n+k} = \frac{2}{1+k}$; tego infimum to 0 $\implies \inf B = -1$

$k = 1, n \implies +\infty$ i analogicznie wychodzi.

5. Kresy $C = \{q^n : n \in \mathbb{N}\}$

Dla $q \geq 1$ $\inf C = q$, $\sup C = +\infty$

Bierzemy dowolne $M > 0$ i pokazujemy, że dowolny element zbioru je przeskoczy.

$\forall_{M>0} \exists_{n \in \mathbb{N}} q^n > M$ co pokażemy z Bernouliego.

$$q^n = (1 + q - 1)^n \geq 1 + n(q - 1) > M ?$$

$$q > 1 \implies n > \frac{M-1}{q-1}, \text{ więc weźmy sobie } n = \left\lfloor \frac{M-1}{q-1} \right\rfloor + 2$$

6. Kresy $D = \{A \sin x + B \cos x : x \in \mathbb{R}\}$

$$\text{Z nierówności Schwarza: } |A| |\sin x| + |B| |\cos x| \leq \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

Równość zachodzi dla $(|A|, |B|) = \lambda(|\sin x|, |\cos x|)$

$$|\sin x| = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, |\cos x| = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Chcemy znaleźć $x \in \mathbb{R}$

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ oraz takie } x:$$

$$A \sin x + B \cos x = -\sqrt{A^2 + B^2}$$

$x : \sin x = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \cos x = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ dla maksimum i z minusami dla minimum.
Zatem są to też suprema.

$$7. \text{ Kresy } E = \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} : x, y \in (0, 1), x + y = 1 \right\}$$

Podstawmy warunek: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3}{(1+x)(2-x)}, x \in (0, 1)$

Szacowanie od dołu ze średniej harmonicznej da nam: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{4}{3} \implies \inf E = \min E = \frac{4}{3}$

Supremum natomiast jest dla minimum paraboli w mianowniku (pierwiastki -1,2).

$$8. \text{ Kresy } F = \left\{ \frac{1-x}{1+x} + \frac{1-y}{1+y} : x, y \in (0, 1), x + y = 1 \right\}$$

$$= \frac{1-x}{1+x} + \frac{x}{2-x} = -2 + 2\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}\right) \text{ i mamy to samo co w E.}$$

$$9. \text{ Kresy } G = \left\{ \frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Z indukcji widać, że $n^2 < 2^n$. Jeśli $n + m > 4$ to $\frac{(n+m)^2}{2^{nm}}$

Twierdzenie 46.

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Dowód. $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$

$b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$

$\implies a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$

Dodatkowo $\sup A + \sup B$ jest ograniczeniem górnym, zatem: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

■

Rozdział 8

Granice

*„Mamy jeszcze 5 minut... to zdefiniuję granicę.
Historyczny moment! W końcu jakaś analiza!”*

Definicja 26 (Granica ciągu). Liczba g jest granicą ciągu (a_n) :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon |a_n - g| < \varepsilon \iff g = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Definicja 27 (Granica nieskończona). $+\infty$ jest granicą (a_n) :

$$\forall M > 0 \exists n_M \forall n > n_M a_n > M \iff +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

8.1 Zabawy z ε , granice elementarne

Twierdzenie 47 (Granica ciągu geometrycznego).

$$\begin{aligned} q \in (-1, 1) &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \\ q = 1 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1 \\ q > 1 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty \\ q < -1 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \text{ nie istnieje} \end{aligned}$$

Dowód. 1. $|q| < 1$: Niech $M = \frac{1}{|q|} - 1$

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+M)^n} \stackrel{\text{Bern.}}{\leq} \frac{1}{1+nM} < \frac{1}{nM} < \varepsilon$$

W związku z tym możemy wziąć następujące n_ε :

$$n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon M} \right\rfloor + 1$$

2. $q = 1$: $\forall n \in \mathbb{N} \ q^n = 1 \implies q^n \rightarrow 1$

3. $q > 1$: Niech $N = q - 1$

$$q^n = (1+N)^n \stackrel{\text{Bern.}}{\geq} 1 + nN > nN > M$$

Zatem wystarczy wziąć następujące n_M :

$$n_M = \left\lfloor \frac{M}{N} \right\rfloor + 1$$

4. $q < -1$: Wystarczy pokazać, że pewne podciągi osiągają różne granice.

Dla $n \bmod 2 = 0 - q^n = |q|^n \rightarrow +\infty$.

Dla $n \bmod 2 = 1 - q^n = -|q|^n \rightarrow -\infty$.

■

Twierdzenie 48. $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$. Wówczas:

$$a_n + b_n \rightarrow a + b$$

$$\lambda a_n \rightarrow \lambda a$$

$$|a_n| \rightarrow |a|$$

$$a_n b_n \rightarrow ab$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (*)$$

* jeśli $b_n \neq 0, b \neq 0$

Dowód. a, b - skończone

T: $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + b$

$\varepsilon > 0$ - chcemy pokazać, że \exists_{n_ε} takie, że $\forall_{n > n_\varepsilon}$

$$|a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Bierzemy $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$

$\frac{\varepsilon}{2} > 0$ zatem \exists_{n_1} takie, że $\forall_{n > n_1} |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Analogicznie $\forall_{n > n_2} |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ ►

T: $a_n b_n \rightarrow ab$

$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n - a||b_n - b| + |a||b_n - b| + |b||a_n - a|$ Tutaj

dobieramy n_1, n_2, n_3, n_4

Wtedy $n_\varepsilon = \max\{n_i\}$

■

Twierdzenie 49. a_n - ograniczony, $b_n \rightarrow 0$. Wówczas $a_n b_n \rightarrow 0$

Dowód. $\varepsilon > 0$

Szukamy n_ε takiego, że $\forall_{n > n_\varepsilon} |a_n b_n - 0| < \varepsilon$

$$|a_n||b_n| < \varepsilon$$

■

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^2}{n^2 - 5n + 7}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^2}{n^2 - 5n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2}{1 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{9}{1} = 9 \quad \blacktriangleright$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0 \quad \blacktriangleright$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 4^n}{5^n + 4^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 4^n}{5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n} = 1 \quad \blacktriangleright$$

Wniosek 10. $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Natomiast dla ostrej nierówności dalej mamy \leq w granicy.

Twierdzenie 50. $a_n \rightarrow g$, $a_n \geq 0$ ($g \geq 0$) Niech $k \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$a_n^{1/k} \rightarrow g^{1/k}$$

Jeśli $a_n \rightarrow +\infty$, $a_n \geq 0$ to

$$a_n^{1/k} \rightarrow +\infty$$

Dowód. $M > 0$

Szukamy n_M takie, że $\forall_{n > n_M} a_n^{\frac{1}{k}} > M$

$a_n > M^k$, ale $\lim a_n = +\infty$ zatem istnieje n_1 takie, że $\forall_{n > n_1} a_n > M^k$ ►

$a_n \rightarrow g$ - skończone $a_n, g \geq 0$

$\varepsilon > 0$ $|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{g}| < \varepsilon$

$$\left| (g + a_n - g)^{1/k} - g^{1/k} \right| = g^{1/k} \left| \left(1 + \frac{a_n - g}{g} \right)^{1/k} - 1 \right| \leq g^{1/k} \left| \frac{1}{kg} (a_n - g) \right| = \frac{g^{1/k}}{kg} |a_n - g|$$

a to jest stała · coś dowolnie małe ■

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} + 1)^2}{n - 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} + 1)^2}{n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2}{n \left(1 - \frac{3}{n} \right)} = 1 \text{ ►}$$

8.2 Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie 51 (Twierdzenie o trzech ciągach). $a_n \leq b_n \leq c_n$

$$a_n \rightarrow g, c_n \rightarrow g \implies b_n \rightarrow g$$

Szczególne przypadki:

- $b_n \leq c_n, b_n \rightarrow +\infty \implies c_n \rightarrow +\infty$
- $a_n \leq b_n, b_n \rightarrow -\infty \implies a_n \rightarrow -\infty$

Dowód. $\varepsilon > 0$

Szukamy n_ε takiego, że $\forall_{n > n_\varepsilon} |b_n - g| < \varepsilon$

$$b_n \in \langle a_n, c_n \rangle \Rightarrow t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$b_n = ta_n + (1 - t)c_n$$

$$g = tg + (1 - t)g$$

$$|b_n - g| = |t(a_n - g) + (1 - t)(c_n - g)| \leq t|a_n - g| + (1 - t)|c_n - g|$$

1. $a \geq 1$ Pokazać, że $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

$$\frac{a + (n - 1)}{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq 1$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wszystko dąży do 1. ►

2. $a > 0$ Pokazać, że $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

Jeśli $a \geq 1$ to twierdzenie o kanapce. Natomiast, jeśli $0 < a < 1$ to $\frac{1}{a} > 1$

$$\frac{n}{\frac{1}{a} + \frac{n-1}{1}} \leq \sqrt[n]{a} \leq 1$$

Widać, że lewe zbiega do 1, więc wszystko działa. ►

3. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < \frac{n + 2\sqrt{n} - 2}{n}$$

4. $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

$$3 \sqrt[n]{2} > \sqrt[n]{2^n + 3^n} > \sqrt[n]{3^n}$$

$$a_n, c_n \rightarrow 3, \text{ więc } \lim \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \blacktriangleright$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$

$$0 \leftarrow \frac{1}{n} \geq \frac{\sin n}{n} \geq -\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\text{Zatem } \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0.$$

Definicja 28 (Podciąg ciągu (a_n)). Jest to ciąg $b_n = a_{n_m}$. Bierzymy część ale nie nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n) .

Twierdzenie 52. Jeśli a_n jest zbieżny to każdy jego podciąg też jest zbieżny do tej samej granicy.

1. $\lim \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

$$\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

2. $\lim \sqrt[n]{5n^3 + 8n + 3}$

$$\sqrt[n]{n^3} \sqrt[n]{5 + \frac{8}{n^2} + \frac{3}{n^3}} \rightarrow 1^3 \cdot 1 = 1$$

Twierdzenie 53 (O granicy ciągu monotonicznego).

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots$$

$$\lim a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$$

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots$$

$$\lim a_n = \inf\{a_1, a_2, \dots\}$$

Nieskończoności też są okej.

1. Udowodnić, że $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ ma skończoną granicę.

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + \frac{1}{2^2}, a_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots$$

Wystarczy wykazać, że ten ciąg ma ograniczenie górne (bo jest monotoniczny).

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n}$$

W związku z tym $a_n < 2$. \blacktriangleright

2. Obliczanie pierwiastka kwadratowego:

$$a, b > 0$$

$$a_1 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2}$$

Jeśli granica istnieje to:

$$g = \frac{g + \frac{a}{g}}{2} \implies g = \pm\sqrt{a}, \pm\infty$$

Zauważamy, że $a_n > 0$. Chcemy pokazać, że ciąg ma granicę. Pokażemy, że od pewnego momentu jest monotoniczny i ograniczony.

$$\frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a}$$

$$T': a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq \sqrt{a}$$

$$a_n \geq \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2} \implies 2a_n \geq a_n + \frac{a}{a_n}$$

$$a_n^2 > a \implies a_n \geq \sqrt{a}, \quad n \geq 2$$

a to zostało już pokazane, zatem ciąg jest monotonicznie malejący i jego granicą jest infimum \sqrt{a} .
►

3. Pokazać przez rekurencję, że $\lim \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 1$

Ten ciąg jest monotoniczny i ograniczony z dołu, zatem lim istnieje. Trzeba teraz ułożyć równanie. Niech $b_n = \sqrt[n]{a}$. Wówczas $b_n = a_{2n}$. Jest to podciąg a_n , zatem $\lim a_n = \lim b_n = g$.

$$a_n = (b_n)^2 \implies g = g^2 \implies g = 0, 1, +\infty$$

Ciąg jest malejący, więc nie może być $+\infty$. 1 natomiast jest ograniczeniem dolnym. W związku z tym $g = 1$. ►

$$4. \quad \lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \quad \blacktriangleright$$

$$5. \quad q \in \mathbb{R}, \quad \lim \frac{q^n}{n!} = 0$$

$$\frac{|q|^n}{n!} = \frac{|q|^m}{m!} \cdot \frac{|q|}{m+1} \cdot \dots \cdot \frac{|q|}{n}$$

Szukamy $m \in \mathbb{N}$ t. że $\frac{|q|}{m+1} < \frac{1}{2}$.

$$0 < \left| \frac{q^n}{n!} \right| < \frac{|q|^m}{m!} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-m} \rightarrow 0 \quad \blacktriangleright$$

Twierdzenie 54. $k \in \mathbb{N}, \quad q > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$$

Funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż potęgowa.

Dowód. Trzeba wziąć odpowiednio duże n .

$$q = 1 + r, \quad r > 0, \quad n > k + 1$$

$$q^n = 1 + \dots + \binom{n}{k+1} r^{k+1} > \binom{n}{k+1} r^{k+1}$$

$$0 < \frac{n^k}{q^n} < \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} r^{k+1}} = \frac{n^k (k+1)!}{r^{k+1} n(n-1) \dots (n-k-1)}$$

W mianowniku jest większa potęga n , zatem całość zbiega do 0. ■

Twierdzenie 55.

$$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow +\infty$$

$$1. a > 1 \implies a_n^{b_n} \rightarrow +\infty$$

$$2. 1 > a > 0 \implies a_n^{b_n} \rightarrow 0$$

$$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow -\infty$$

$$1. a > 1 \implies a_n^{b_n} \rightarrow 0$$

$$2. 1 > a > 0 \implies a_n^{b_n} \rightarrow +\infty$$

1. Udowodnij z trzech ciągów, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+3]{n-1} = 1$

Od pewnego momentu, dla dostatecznie dużych n :

$$1 < \sqrt[n+3]{n-1} < \sqrt[n+3]{n+3} \rightarrow 1$$

2. $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow +\infty \implies a_n^{b_n}$ nie ma granicy.

$$a_n = 2^{\frac{(-1)^n}{n}}$$

Parzyste – $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$

Nieparzyste – $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \rightarrow 1$

$\implies a_n \rightarrow 1$

$$b_n = n^2 \implies a_n^{b_n} = 2^{(-1)^{k_n}}$$

Parzyste $\rightarrow +\infty$

Nieparzyste $\rightarrow 0$

$$3. \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ciąg jest rosnący z Bernoulliego. Trzeba jeszcze pokazać, że jest ograniczony.

Interesuje nas funkcja wykładnicza e^x . Weźmy sobie ustalone $x \in \mathbb{R}$

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Dość odległy cel jest taki by pokazać, że $a_n \rightarrow e^x$.

Chcemy pokazać, że ten ciąg jest zbieżny (rosnący od pewnego momentu, ograniczony). Wtedy wiemy, że pewna funkcja $\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ma sens.

8.3 Funkcja wykładnicza e^x

Lemat 1. Jeśli $n > -x \neq 0 \implies a_{n+1} > a_n$

Dowód. $n > -x \implies n+1 > -x$

$$1 + \frac{x}{n} > 0, 1 + \frac{x}{n+1} > 0, \dots$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} > \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{n}{n+x}$$

$$\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \geq 1 - (n+1) \frac{x}{(n+x)(n+1)} = \frac{n}{n+x}$$

$$-\frac{x}{(n+x)(n+1)} > -1, \quad x < 0$$

$$\left| -\frac{x}{(n+x)(n+1)} \right| = \frac{x}{n+x} \frac{1}{n+1} < 1$$

■

Lemat 2.

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ jest ograniczony.}$$

Dowód.

$$x < 0 \implies \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < 1$$

dla dostatecznie dużych n ($n > -x$)

$$x = 0 \implies a_n = 1$$

 $x > 0$. Jeśli $n > x$ to $(1 - \frac{x}{n}) > 0$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} < \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} = b_n$$

 b_n jest malejący, bo $(1 - \frac{x}{n})^n$ jest rosnący dla $x > n$.

$$\implies \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n_0}\right)^{n_0}}, \quad n_0 > x$$

W związku z tym:

$$\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

jest dobrze określona.

■

Definicja 29 (Liczba Eulera).

$$\exp(1) = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Twierdzenie 56.

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$$

$$\implies e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Możemy szukać wtedy dowolnych przybliżeń/szacować ogony:

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) < ?$$

Dowód. $x > 0, n \geq k$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j \geq$$

$$\geq 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x^3}{3!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{x^k}{k!} = b_n$$

$$b_n \rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \rightarrow \exp(x)$$

■

Wniosek 11.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

Twierdzenie 57.

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{kk!}$$

Dowód.

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots + \frac{1}{(k+n)!}\right)$$

$$\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots + \frac{1}{(k+n)!} \leq \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)^2(k+1)!} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{(k+2)^{n-1}(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!} \frac{1 - \left(\frac{1}{k+2}\right)^n}{1 - \frac{1}{k+2}} < \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{k+2}} = \frac{k+2}{k!(k+1)^2} < \frac{1}{kk!}$$

■

Wniosek 12. e – niewymierna*Dowód.* $a, b \in \mathbb{N}$

$$e = \frac{a}{b} \Rightarrow 0 < \frac{a}{b} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{b!}\right) < \frac{1}{bb!}$$

$$0 < a(b-1)! - \left(2b! + \frac{b!}{2!} + \dots + 1\right) < \frac{1}{b}$$

Sprzeczność!

■

Lemat 3 (O ciągach szybkozbieżnych do zera).

$$\lim na_n = 0 \Rightarrow \lim(1 + a_n)^n = 1$$

Dowód. Chcemy użyć twierdzenia o trzech ciągach.

$$(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \rightarrow 1$$

Przy założeniach $a_n > -1$, co jest prawdą dla dostatecznie dużych n .

$$(1 + a_n)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{-a_n}{1+a_n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{-a_n}{1+a_n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{-na_n}{1+a_n}} \rightarrow 1$$

Zatem mamy ograniczenia z dołu i góry.

■

Twierdzenie 58.

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exp(x) \geq 1 + x$$

Dowód. Od pewnego momentu (dla dostatecznie dużych n) mamy $\frac{x}{n} > -1$.

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &\geq 1 + x \implies \exp(x) \geq 1 + x \end{aligned}$$

■

Lemat 4.

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

Dowód. Chcemy pokazać, że:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \geq N} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} \\ \lim \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} &= \lim \left(\frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{\frac{xy}{n^2}}{\frac{n+x+y}{n}} \right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n} \frac{xy}{x+y+n} \right)^n \end{aligned}$$

Używając lematu o ciągach szybkozbieżnych do zera,

$$\lim \frac{xy}{n+x+y} = 0 \implies \lim \left(1 + \frac{xy}{n(x+y+n)} \right)^n = 1$$

■

Wniosek 13.

$$\forall_{q \in \mathbb{Q}} \exp(q) = e^q$$

Dowód. Prosto z Lematu 4 płynie wniosek, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = e^n$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} \exp(-n) \exp(n) &= \exp(0) = 1 \implies \exp(-n) = \frac{1}{e^n} \\ \implies \forall_{k \in \mathbb{Z}} \exp(k) &= e^k \end{aligned}$$

Niech $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{m}{k}\right) &= \exp\left(\frac{1}{k}\right)^m \\ \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n &= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}\right) \exp\left(\frac{1}{n}\right) \dots \exp\left(\frac{1}{n}\right)}_n = e \implies \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Uogólniając identycznie jak w przypadku $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, możemy zapisać, że

$$\exp\left(\frac{1}{k}\right) = e^{\frac{1}{k}} \implies \exp\left(\frac{m}{k}\right) = e^{\frac{m}{k}}$$

■

8.4 Zadansy

1. $\lim \left(\frac{n+3}{2n} \right)^n$

$$0 < \left(\frac{n+3}{2n} \right)^n < \left(\frac{2}{3} \right)^n \rightarrow 0$$

dla dostatecznie dużego n .

2. $\lim \left(\frac{2n+4}{2n+3} \right)^n$

$$= \lim \left(\frac{2 + \frac{4}{n}}{2 + \frac{3}{n}} \right)^n = \lim \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1.5}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^{1.5}} = \sqrt{e}$$

3. $\lim \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{5-2n}$

$$= \lim \left(\frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \right)^{5-2n} = \lim \left(\frac{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} \right)^{-2} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^5 = \left(\frac{e^4}{e^3} \right)^{-2} \cdot 1^5 = e^{-2}$$

4. $\lim \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{(-1)^n n}$

$(-1)^n$ sugeruje patrzenie na podciągi o indeksach mod 2.

$$n = 2k : \quad \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$n = 2k + 1 : \quad \lim \left(1 + \frac{-1}{n} \right)^{-n} = (e^{-1})^{-1} = e$$

Wszystkie podciągi dążą do e , zatem cały ciąg dąży do e .

5. $\lim \left(n + 1 - \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^i \frac{k-1}{k!} \right) = x$

$$\sum_{k=2}^i \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^i \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{i!}$$

$$\sum_{i=2}^n 1 - \frac{1}{i!} = n - 1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i!}$$

$$x = \lim \left(2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i!} \right) = \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} = e$$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n!e\pi)$

Najpierw przekształćmy wyraz $n!e$:

$$\begin{aligned} n!e &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{j!} = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{n!}{j!} \\ &= \underbrace{K}_{\in \mathbb{Z}} + x_n \end{aligned}$$

Teraz znajdziemy ograniczenia górne i dolne ciągu x_n :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} < x_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &< \sum_{j=n+1}^{\infty} n^{n-j} = \sum_{j=1}^{\infty} n^{-j} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{n}\right)^j \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} - 1}{\frac{1}{n} - 1} - 1 \right) = \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

Mając ograniczenia możemy użyć twierdzenia o trzech ciągach:

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &\leftarrow \frac{1}{n+1} < x_n < \frac{1}{n-1} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow x_n &\rightsquigarrow 0\end{aligned}$$

Teraz można już policzyć wyjściową granicę:

$$\begin{aligned}\lim \sin(2\pi n!e) &= \lim \sin(2\pi K + 2\pi x_n) \\ &= \lim \sin(2\pi x_n) = 0\end{aligned}$$

7. F_n – *Fibonacci*. $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n}$, $\lim \sqrt[n]{F_n}$

$$F_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n, \quad x_1 > x_2$$

$$\begin{aligned}\lim \sqrt[n]{F_n} &= \lim x_1 \sqrt[n]{\alpha + \beta \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} = x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \lim \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim \frac{\alpha x_1^{n+1} + \beta x_2^{n+1}}{\alpha x_1^n + \beta x_2^n} = \lim x_1 \frac{\alpha + \beta \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n+1}}{\alpha + \beta \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} = x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Wniosek 14. Ciąg (a_n) jest określony równaniem rekurencyjnym liniowym o stałych współczynnikach. Równanie charakterystyczne może mieć nawet pierwiastki wielokrotne. Wówczas zachodzi:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

gdzie x_i są pierwiastkami charakterystycznymi rekurencji.

1. $\lim \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k}$

$$\begin{aligned}\sum \frac{k}{n^2 + n} &< \sum \frac{k}{n^2 + k} < \sum \frac{k}{n^2} \\ \sum \frac{k}{n^2 + n} &= \frac{1}{2} \frac{n^2 + n}{n^2 + n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \sum \frac{k}{n^2} &= \frac{1}{2} \frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \lim \sum \frac{k}{n^2 + k} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

8.5 Granice średnich

Twierdzenie 59 (Twierdzenie Stolza (bez dowodu)). Niech będą dane dwa ciągi $(a_n), (b_n)$, przy czym (a_n) jest rosnący i zbieżny do ∞ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = g$$

gdzie g jest skończoną lub nieskończoną granicą.

Twierdzenie 60 (Granica średniej arytmetycznej).

$$\lim a_n = g \implies \lim \frac{1}{n} \sum a_i = g$$

Dowód. Z Twierdzenia Stolza:

$$\begin{aligned} a_n &= n, \quad b_n = \sum_{i=1}^n c_i \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n c_i - \sum_{i=1}^{n-1} c_i}{1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n} &= g \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 61 (Granica średniej harmoniczej).

$$\lim a_n = g \implies \lim \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} = g$$

Dowód.

$$\lim \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} = \lim \frac{1}{\frac{\sum \frac{1}{a_i}}{n}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = \lim a_n$$

■

Twierdzenie 62 (Granica średniej geometrycznej).

$$\lim a_n = g \implies \lim \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} = g, \quad a_n > 0$$

Dowód.

$$H_n \leq G_n \leq A_n$$

Na podstawie twierdzeń 60, 61: $H_n \rightarrow g$, $A_n \rightarrow g$.

Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $G_n \rightarrow g$.

■

Wniosek 15.

$$a_n > 0, \lim a_n \neq 0 \implies \lim H_n = \lim G_n = \lim A_n = \lim a_n$$

8.6 Ciekawe twierdzenia

Twierdzenie 63. $a_n > 0$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \vee \lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \lim a_n = 0$$

Dowód. Dla dostatecznie dużych $n \geq N$ możemy zapisać:

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad q \in (0, 1)$$

$$a_{N+1} \leq qa_N$$

$$a_{N+2} \leq qa_{N+1} \leq q^2 a_N$$

$$a_n \leq \dots \leq q^{n-N} a_N$$

$$0 < a_n \leq q^{n-N} a_N \rightarrow 0$$

Z twierdzenia o trzech ciągach $a_n \rightarrow 0$. Dowód dla drugiej alternatywy jest analogiczny, a nawet prostszy. ■

1. $\lim \frac{2^n n!}{n^n}$

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1 \\ &\implies \lim a_n = 0 \end{aligned}$$

2. $\lim \frac{n^n}{(2n)!}$

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{1}{2(2n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0 \\ &\implies \lim a_n = 0 \end{aligned}$$

3. $a_1 = 1, a_{n+1} = \sin(a_n)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff \sin(a_n) < a_n \\ &\iff a_n \in (0, \pi) \end{aligned}$$

To założenie jest spełnione, zatem ciąg jest monotonicznie malejący i ograniczony.

$$g = \sin g \implies g = 0$$

4. $a_1 = \sqrt{c}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$

Typujemy kandydatów na granicę:

$$g = \sqrt{g + c}$$

$$\Delta = 1 + 4c$$

$$g = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}, +\infty$$

Granica z minusem odpada, gdyż może być ujemna, a $a_n > 0$. Teraz pokażemy, że ciąg jest rosnący.

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n &\iff \sqrt{a_n + c} > a_n \\ &\iff a_n \in \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \right) \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że $\forall_n a_n \in \left(0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}\right)$. To już leci indukcyjnie.

$$0 < a_k < \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

$$0 < \sqrt{0 + c} < a_{k+1} < \sqrt{\frac{1 + 2c + \sqrt{1 + 4c}}{2}} = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{1 + 4c})^2}{4}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

Twierdzenie 64.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g, \quad a_n > 0$$

Dowód. Niech $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Z twierdzenia o granicy średnich, mamy:

$$\lim c_n = g \implies \lim \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n c_i} = g$$

$$\lim \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n c_i} = \lim \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{a_i}} = \frac{\lim \sqrt[n]{a_{n+1}}}{\lim \sqrt[n]{a_1}} = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

■

Lemat 5.

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Dowód.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ jest ściśle rosnący} \implies e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ malejący?} \implies e = \inf \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$$

$$T' : \quad 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n} \quad (\text{Bernoulli})$$

$$1 > 0$$

■

$$1. \quad \lim n(\sqrt[n]{e} - 1)$$

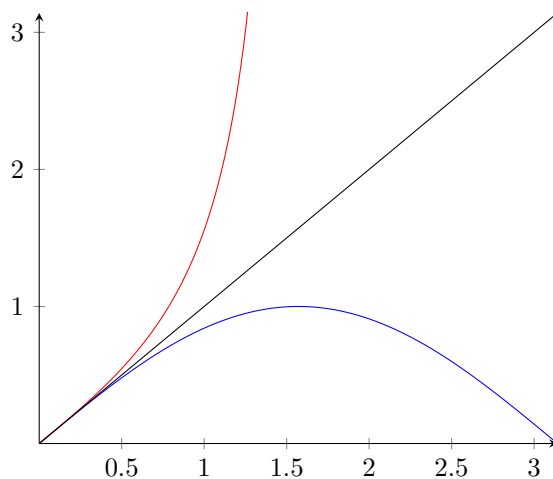
Korzystamy z Lematu 5:

$$n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = 1 < n(\sqrt[n]{e} - 1) < n \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) - 1 \right] = \frac{n}{n-1} \rightarrow 1$$

Po prawej stronie wzięliśmy wyraz $n-1$, ponieważ Lemat 5 działa dla każdego n , w szczególności dla takiego. W związku z powyższym, z twierdzenia o trzech ciągach, szukana granica to 1.

2. $x_n \rightarrow 0, x_n > 0, \lim \frac{\sin x_n}{x_n}$

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \sin x < x < \tan x$$



Rysunek 8.1: Wykresy funkcji x , $\sin x$, $\tan x$ dla argumentów $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Dla dostatecznie dużych n , możemy użyć tego faktu (który dowodziliśmy w pierwszej klasie):

$$1 > \frac{\sin x_n}{x_n} > \cos x_n \rightarrow 1$$

Zatem $\lim \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

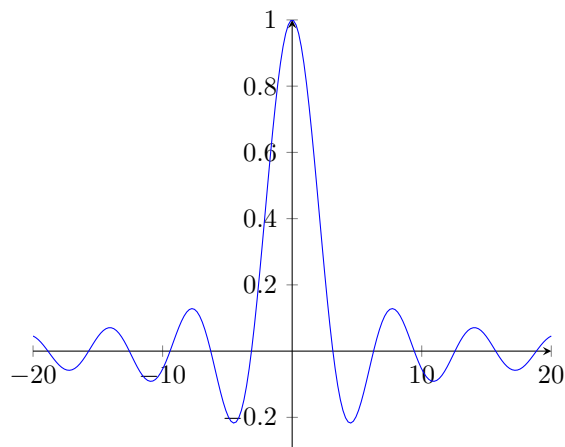
3. $x_n \neq 0, x_n \rightarrow 0, \lim \frac{\sin x_n}{x_n}$

Jeśli x_n jest dodatni, to wtedy poprzednie zadanie. Jeśli natomiast jest ujemny, to:

$$1 > \frac{\sin(-x_n)}{-x_n} > \cos(-x_n) \rightarrow 1$$

$$1 > \frac{-\sin x_n}{-x_n} > \cos x_n$$

Korzystając z parzystości i nieparzystości funkcji, pokazaliśmy, że granica jest ta sama.



Rysunek 8.2: Wykres funkcji $f(x) = \text{sinc } x$.

Wniosek 16 (Granica sinca).

$$x_n \neq 0, x_n \rightarrow 0 \implies \lim \frac{\sin x_n}{x_n} \stackrel{\text{def}}{=} \lim \text{sinc } x_n = 1$$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2n!e\pi)$

Korzystając z wcześniej policzonej wartości $n!e = K + x_n$, gdzie $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mamy:

$$\begin{aligned} \lim n \sin(2\pi n!e) &= \lim n \sin(2\pi x_n) \\ &= \lim [2\pi n x_n \text{sinc}(2\pi x_n)] \\ &= \lim 2\pi n x_n \cdot \lim \text{sinc}(2\pi x_n) \end{aligned}$$

Granica sinca jest już nam znana, natomiast granicę $n x_n$ policzymy od podstaw:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< x_n < \frac{1}{n-1} \\ 1 \leftarrow \frac{n}{n+1} &< n x_n < \frac{n}{n-1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

W związku z tym $n x_n \rightsquigarrow 1$ oraz

$$\lim n \sin(2\pi n!e) = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$