Analiza III R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020 do powtórki: Twierdzenie o funkcj uwikłanej i badanie powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^n$.

> **Definicja 1.** Atlas – zbiór map $M \to \mathbb{R}^n$ (lokalnych układów współrzędnych), gdzie M jest rozmaitością

$$\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

Do badania czy rozmaitość można pokryć układem współrzędnych służy twierdzenie o funkcji uwikłanej.
Mapa rzutuje w dół $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, parametryzacja w górę $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Zadanie 1/S1 Rozważmy funkcję $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 - 1$. Wówczas sfera $\mathbb{S}^n$ to $f^{-1}(0)$. Rozważmy funkcję $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 1$ i niech $f^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} M \subset \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć system parametryzujący ten zbiór.

Dowód. Równanie domniemanej powierzchni możemy zapisać w postaci $2y^2 - 1 = \rho^2$, gdzie $\rho^2 = x^2 + z^2$ jest kwadratem współrzędnej „radialnej" w płaszczyźnie xz. Widzimy, że $y(\rho)$ opisuje hiperbolę.

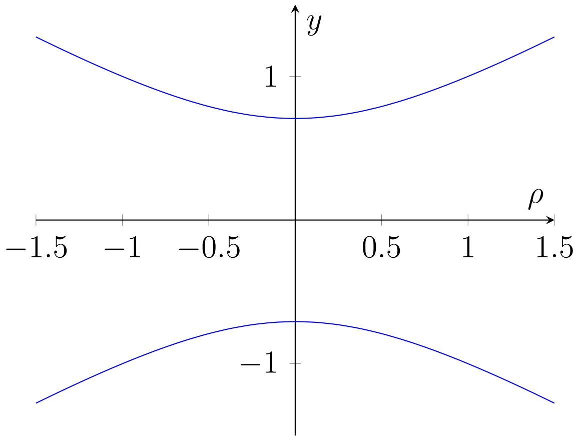
Ten zbiór M to hiperboloida dwupowłokowa. Czy ten zbiór tworzy powierzchnię?

$$f'(x, y, z) = [2x, -4y, 2z]$$

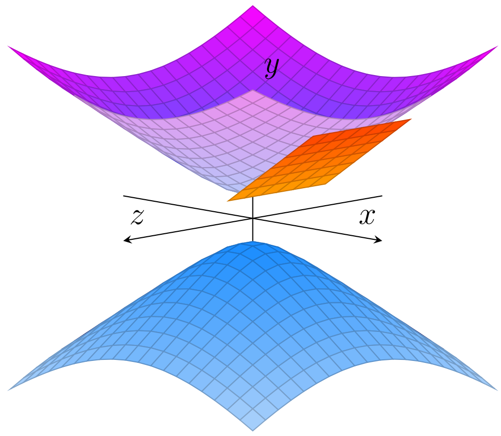
$f' = 0 \implies \operatorname{rk} f' = 0$ lub $f' \neq 0 \implies \operatorname{rk} f' = 1$. W naszym przypadku $f' \neq 0$, zatem M jest powierzchnią 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$. Będziemy zastanawiać się nad $\mathrm{T}_P M$ i nad afiniczną płaszczyzną styczną. Przestrzeń styczna w punkcie $p_0 = [x_0, y_0, z_0]$ to podprzestrzeń wektorowa. Afiniczna płaszczyzna styczna to trochę coś innego.

Zaproponujmy parametryzację górnego płata tej powierzchni $M_+ = \{p \in M \colon y > 0\}$. Będziemy parametryzować płaszczyzną xz.

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + s^2 + t^2} \\ t \end{bmatrix} \in M_+$$



Rysunek 1.1: Wykres $y(\rho)$, czyli przekrój hiperboloidy dwupowłokowej.



Rysunek 1.2: Powierzchnia M z afiniczną płaszczyzną styczną w punkcie $p = \left(3, \sqrt{5}, 0\right)$.

Przestrzeń styczna do p_0 to jądro tej pochodnej.

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{p_0}M_+ = \mathrm{T}_{p_0}M &= \ker[2x_0, -4y_0, 2z_0] \\ &= \left\{ \left[v_x, v_y, v_z\right] : x_0 v_x - 2y_0 v_y + z_0 v_z = 0 \right\} \end{aligned}$$

Afiniczna płaszczyzna styczna polega na tym, że bierzemy tą wyżej opisaną przestrzeń i dodajemy punkt zaczepienia. Są to punkty postaci $\left\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0}M\right\}$. Weźmy wektor $\left[w_x, w_y, w_z\right] = \mathbf{w} = p_0 + \mathbf{v}$. Stąd,

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x - x_0 \\ w_y - y_0 \\ w_z - z_0 \end{bmatrix}$$

Wstawiając to do równania na jądro,

$$\begin{aligned} \left\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0}M\right\} &= \left\{ \left[w_x, w_y, w_z\right] : x_0 w_x - 2y_0 w_y + z_0 w_z - \left(x_0^2 - 2y_0^2 + z_0^2\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left[w_x, w_y, w_z\right] : Aw_x + Bw_y + Cw_z + D = 0 \right\} \end{aligned}$$

■

Wstęp do form liniowych 1-formy na przestrzeni V: $V^* = \bigwedge^1 V^*$
Przykład 2-formy antysymetrycznej na przestrzeni V: oznaczenie $\bigwedge^2 V^*: \omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ oraz antysymetryczne: $\omega(v,w) = -\omega(w,v)$.

Ogólniej (jakiś tam funktor w kategorii czegoś tam xD): $\bigwedge^k V^*$: odwzorowania k–liniowe, antysymetryczne.

$$\omega^k \wedge \alpha^l \in \bigwedge^{k+l} V^*, \quad \text{2-liniowe, łączne}$$
$$\omega^k \wedge \alpha^l = (-1)^{kl} \alpha^l \wedge \omega^k$$
$$\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k}, \quad n = \dim V$$

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – baza V. Wówczas baza dualna to $\left\{e^1, \ldots, e^n\right\}$.
Baza $\bigwedge^2 V^*$: $\left\{e^i \wedge e^j : 1 \leq i < j \leq n\right\}$. Stąd potem kombinatoryczny wzór na wymiar (dbamy o uporządkowane iloczyny).

Zadanie 2/S1 Niech $\beta \in \bigwedge^{k+1} V^*$ i $0 \neq \omega \in \bigwedge^1 V^*$ takie, że $\beta \wedge \omega = 0$. Wykazać, że istnieje k-forma α taka, że $\beta = \alpha \wedge \omega$.

Można zrobić tak, żeby baza V^* była $\left\{\omega, e^2, \ldots, e^n\right\}$. Zatem,

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$
$$\beta \wedge e^1 = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} \left(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}\right) \wedge e^1 = 0$$

tam gdzie $e^{i_1} = e^1$ i tak iloczyn zewnętrzny się zeruje. Stąd, jeśli $e^{i_1} > 1$, to odpowiednie $\beta_{xyz} = 0$. Stąd,

$$\beta = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^1 \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$
$$\beta = \alpha \wedge \omega = (-1)^k \omega \wedge \alpha = (-1)^k e^1 \wedge \alpha$$

Zatem α istnieje i ma postać:

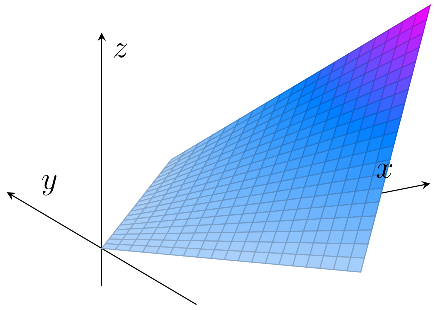
$$(-1)^k \alpha = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$

Jednakże α nie jest jednoznaczne, bo mamy wciąż swobodę wziąć $\alpha' = \alpha + t\omega$ i to też działa. Czy jest więcej stopni swobody?

Wykład 2: Ćwiczenia 2

19 paź 2020

Zadanie 4/S1 Mamy $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ i parametryzację powierzchni zanurzonej $[0,1] \times [0,1] \ni (u,v) \overset{\phi}{\mapsto} (u+v, u-v, uv) \in \mathbb{R}^3$. To jest tylko jeden płat, nie ma posklejanych parametryzacji. Mamy policzyć całkę po powierzchni z ω (orientacja do wyboru).



Rysunek 1.3: Powierzchnia M.

Jedyna głębsza rzecz w tym zadaniu to orientacja. Parametryzacja może być zgodna lub przeciwna z orientacją M.
Krok 1: cofnąć formę ω do $[0,1]\times[0,1]$. Innymi słowy obliczamy $\phi^*(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z)$. Ta procedura ma tę własność, że:

$$\phi^*\,\mathrm{d} = \mathrm{d}\phi^*$$
$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$$

Stąd,

$$\phi^*\omega = \phi^*x\,\mathrm{d}\phi^*y \wedge \mathrm{d}\phi^*z + \phi^*y\,\mathrm{d}\phi^*x \wedge \mathrm{d}\phi^*z$$

Myśląc w przyziemny sposób, po prostu trzeba podstawić te wszystkie zmienne i ich różniczki. A tak mniej przyziemnie, to $\phi^* f = f \circ \phi$.

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{d}\phi^*(xy) \wedge \mathrm{d}\phi^*z \\
&= \mathrm{d}(u+v)(u-v) \wedge \mathrm{d}(uv) \\
&= (2u\,\mathrm{d}u - 2v\,\mathrm{d}v) \wedge (u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u) \\
&= 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Teraz liczymy całkę z cofniętej formy.

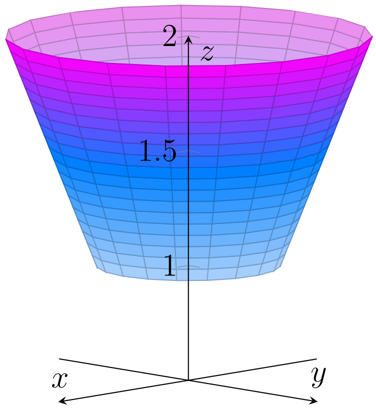
$$\int_{(M,\imath)} \omega = \pm \int_{[0,1]\times[0,1]} 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$+$, gdy ϕ zgodna z orientacją M; $-$, gdy ϕ nie jest zgodna. Przyjmijmy, że parametryzacja ϕ jest niezgodna z orientacją M.

$$\begin{aligned}
&= -\int_{[0,1]\times[0,1]} 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -4\int_{[0,1]\times[0,1]} u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

To ostatnie przejście z symetrii, bo każda całka da taki sam wkład.

Zadanie 5/S1 Mamy $\omega = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Całkujemy to po powierzchni stożka. $M = \left\{(x,y,z)\colon 1 \leq z \leq 2,\ 2z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$. M zorientowane jest na zewnątrz.



Rysunek 1.4: Powierzchnia M

Uwaga, ta forma jest osobliwa na stożku, ponieważ x i y może się na nim zerować. Nie powinno się takich form całkować po powierzchniach, na których dają osobliwości! Z założenia jest to **nielegalne**! Ale przekonamy się, że po cofnięciu tej formy do stożka osobliwości jakoś znikają magicznie. Powinniśmy to cofnąć omijając osobliwości i popatrzeć czy osobliwość znika (czy była pozorna).

Przyjmujemy parametryzację, w której jak się okaże, nie będzie osobliwości (zatem de facto w każdej innej też jej nie było):

$$\phi(\rho, \phi) = \begin{bmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ \rho/2 \end{bmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi],\ \rho \in [2, 4]$$

Co z orientacją? Jak sobie kręcę prawą ręką $e_\rho \to e_\phi$ to dostaję wektor przeciwny do orientacji M. Innymi słowy, reper $\left(n, e_\rho, e_\phi\right)$ nie jest zgodny z kanoniczną orientacją $\mathbb{R}^3$. Cofamy formę.

$$\phi^*\omega = \frac{1}{\rho\cos\phi}\,\mathrm{d}\rho\sin\phi \wedge \mathrm{d}\frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho\sin\phi}\,\mathrm{d}\frac{\rho}{2} \wedge \mathrm{d}\rho\cos\phi + \frac{2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\cos\phi \wedge \mathrm{d}\rho\sin\phi$$

Póki co osobliwości dalej są…

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi + \frac{2}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho - 2\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho = -\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

Osobliwości się skasowały. Coś się ciekawego dzieje na poziomie geometrycznym. Teraz kontrolując znak obliczamy całkę. Reper $\left(n, e_\phi, e_\rho\right)$ jest zgodny, więc „$-$" zostaje.

$$\int_{(M,\imath)} \omega = -\int_{\substack{\phi\in[0,2\pi] \\ \rho\in[2,4]}} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = -4\pi$$

Zadanie 1/S2 Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\phi\colon \mathbb{R}^4_+ \to \mathbb{R}^3_+$, $\phi(p,q,r,s) = (pq, qr, rs)$ oraz $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

ω – 2-forma na $\mathbb{R}^3_+$, $\quad \phi^*\omega$ – 2-forma na $\mathbb{R}^4_+$
Można to przepisać tak:

$$\begin{aligned}\omega &= (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= xyz\left(\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \wedge \frac{\mathrm{d}z}{z} + xyz\frac{\mathrm{d}x}{x} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y}\end{aligned}$$

Ten trick działa w kontekście, że można dzielić przez x, y, z, zatem one się nie mogą zerować.

$$= xyz\big[(\mathrm{d}\log y - \mathrm{d}\log x) \wedge \mathrm{d}\log z + \mathrm{d}\log x \wedge \mathrm{d}\log y\big]$$

Chcemy jeszcze, żeby pojawił się wspólny czynnik.

$$= xyz\big[(\mathrm{d}\log y - \mathrm{d}\log x) \wedge \mathrm{d}\log z + (\mathrm{d}\log x - \mathrm{d}\log y) \wedge \mathrm{d}\log y\big]$$

To działa, ponieważ po zwegowaniu to co dodaliśmy, zeruje się.

$$\begin{aligned}&= xyz\,\mathrm{d}(\log y - \log x) \wedge \mathrm{d}(\log z - \log y) \\ &= xyz\,\mathrm{d}\log\left(\frac{y}{x}\right) \wedge \mathrm{d}\log\left(\frac{z}{y}\right)\end{aligned}$$

Teraz możemy cofnąć formę.

$$\phi^*\omega = pq^2r^2s\,\mathrm{d}\log\frac{r}{s} \wedge \mathrm{d}\log\frac{s}{q}$$

Niepokojące jest to, że przekształcenie ϕ nie ma osobliwości, wyjściowa forma też nie ma, a my zrobiliśmy tak, że w zasadzie poza naszą dziedziną są osobliwości. Trochę sztucznie, ale działa.

$$\begin{aligned}&= pq^2r^2s\left(\frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{\mathrm{d}p}{p}\right) \wedge \left(\frac{\mathrm{d}s}{s} - \frac{\mathrm{d}q}{q}\right) \\ &= pq^2r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}s - q^2r^2\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}s - pqrs\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}q + qr^2s\,\mathrm{d}\end{aligned}$$

Nie ma osobliwości na całym $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 2/S2 Mamy 2-formę w $\mathbb{R}^4$: $\omega = f(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)$. Znaleźć warunki na f tak, żeby ω była zamknięta, tj. $d\omega = 0$. Znaleźć formę pierwotną $\theta\colon\ \mathrm{d}\theta = \omega$.

Najpierw bez żadnego wyrafinowania:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) \\ &\quad + \underbrace{f\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)}_{=0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t\right) \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t) = 0\end{aligned}$$

W związku z tym, dostajemy układ równań cząstkowych:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Wprowadźmy nowe współrzędne.

$$\begin{aligned} \alpha &= x + z, & \beta &= x - z \\ \gamma &= y + t, & \delta &= y - t \end{aligned}$$

Liczymy partiale:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_\alpha + \partial_\beta, & \partial_y &= \partial_\gamma + \partial_\delta \\ \partial_z &= \partial_\alpha - \partial_\beta, & \partial_t &= \partial_\gamma - \partial_\delta \end{aligned}$$

Stąd,

$$2\partial_\alpha f = 0, \quad 2\partial_\gamma f = 0$$

Czyli f jest stała względem α, γ. W związku z tym,

$$f(x, y, z, t) = h(\beta, \delta) = h(x - z, y - t)$$

ω ma postać:

$$\begin{aligned} \omega &= h(x - z, y - t)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) \\ &= h(x - z, y - t)\big(\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}(x - z)\,\mathrm{d}t\big) \\ &= h(x - z, y - t)\,\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}(y - t) \end{aligned}$$

Po zapisaniu w takiej postaci widać, że $\mathrm{d}\omega = 0$, bo w zmiennych β, δ to jest 2-forma. Po różniczkowaniu nie dałoby się utworzyć 3-formy z dwóch zmiennych.

Wykład 3: Ćwiczenia 3

22 paź 2020

Zadanie 2/S2 bis

$$\begin{aligned} \omega &= f\big((\mathrm{d}x - \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}y + (\mathrm{d}z - \mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}t\big) \\ &= f\big(\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}(y - t)\big) \end{aligned}$$

Chcemy pokazać, że to jest pewne cofnięcie 2-formy z pewnych współrzędnych.

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ x - z \\ y + t \\ y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \frac{\gamma + \delta}{2} \\ \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \frac{\gamma - \delta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Chcemy teraz cofnąć formę do $\phi^{-1*}\omega$.

$$\begin{aligned}
\phi^{-1*}\omega &= f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2}\right) \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta \\
&= g(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta \\
\mathrm{d}\omega = 0 \iff 0 &= \phi^{-1*}\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\, \phi^{-1*}\omega = \mathrm{d}(g\, \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta) \\
&= \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta \\
&= \frac{\partial g}{\partial \alpha} \mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta + \frac{\partial g}{\partial \gamma} \mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial g}{\partial \gamma}$$

$$g(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = g(0,\beta,0,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} h(x-z, y-t).$$

Szukanie form pierwotnych ω – zamknięta k-forma: $\mathrm{d}\omega = 0$. Znaleźć $\overset{k-1}{\eta}$: $\mathrm{d}\overset{k-1}{\eta} = \omega$. Lemat Poincare z praktycznego punktu widzenia jest mało użyteczny. Czasem jak obszar nie jest gwiaździsty, to ω też może mieć formę pierwotną.

Zadanie 3a/S2 $\overset{1}{\omega} \in \Omega^1(O)$, $O = \big\{(x,y)\colon y > 0\big\}$, $\omega = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{2x^2 - xy + y^2}$. Znaleźć formę pierwotną $\overset{0}{\eta} \in C^\infty(O)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{y}{y^2 - xy + 2x^2}\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2 - xy + 2x^2}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania jest

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Ponieważ,

$$\mathrm{d}\omega = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{2x^2 - xy + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2x^2 - xy + y^2}\right)\right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$

Zróżniczkujmy iloraz $\mathrm{d}\big(x/y\big)$ (uwaga: $y > 0$).

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{y} - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{y^2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$

$$\omega = \frac{y^2\,\mathrm{d}(x/y)}{2x^2 - xy + y^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1}$$

$$\phi\colon O \ni (x,y) \mapsto \frac{x}{y} = t \in \mathbb{R}$$

$$\rho(t) = \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - t + 1} \in \Omega^1(\mathbb{R})$$

Żeby z ρ dostać ω trzeba cofnąć przez ϕ.

$$\begin{aligned}\omega &= \phi^*\rho\\ \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\phi^*\rho = \phi^*\,\mathrm{d}\rho = 0\end{aligned}$$

Zeruje się, bo 2-fomy na $\mathbb{R}^1$ się zerują. Szukamy teraz $f(t)\colon\ \mathrm{d}f = \mathrm{d}t\,/\big(2t^2 - t + 1\big)$.

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{1}{2t^2 - t + 1} = \frac{1}{2\big(t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\big)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\big(t - \frac{1}{4}\big)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\big(t - \frac{1}{4}\big)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{8}{7}\frac{1}{\frac{16}{7}\big(t - \frac{1}{4}\big)^2 + 1} = \frac{8}{7}\frac{1}{\Big(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\Big)^2 + 1}\\ f(t) &= \frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C\\ \overset{0}{\eta} &= \phi^* f = \frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\frac{\frac{4x}{y} - 1}{\sqrt{7}} + C\end{aligned}$$

Zadanie 3a/b Jak w zadaniu poprzednim, dla
$\omega = \dfrac{\big(x^2 + y^2\big)\,\mathrm{d}z - z(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \in \Omega^1(O),\ O = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(0,0,0)\big\}$.

W istocie ta forma zależy od 2 a nie 3 współrzędnych jak się dobrze przyjrzeć. Zauważmy, że $\mathrm{d}\big(x^2 + y^2\big) = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$. Weźmy współrzędne cylindryczne z tym, że aby móc różniczkować, muszę wziąć $\phi \in (0, 2\pi)$, czyli wyrzucić dodatnią oś OX (chcemy mieć zbiór otwarty, żebyśmy mogli z obu stron różniczkować). Zatem, $O' = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(t > 0, 0, 0)\big\}$.

Wyrazimy $\omega\,\big|_{O'}$ wyrazimy we współrzędnych (ρ, ϕ, z). Zobaczymy, że to się nam naturalnie przedłuży na O.

$$\omega\,\big|_{O'} = \frac{\rho^2\,\mathrm{d}z - \frac{z}{2}\,\mathrm{d}\rho^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Niech $\rho^2 = s,\ s > 0$.

$$= \frac{s\,\mathrm{d}z - \frac{z}{2}\,\mathrm{d}s}{\left(s + z^2\right)^{3/2}}$$

Sprawdzić, że $\mathrm{d}\omega = 0$. Szukamy $f(s,z)\colon\ \mathrm{d}f = \omega\,\big|_{O'}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= -\frac{z}{2}\frac{1}{\left(s + z^2\right)^{3/2}}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{s}{\left(s + z^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

Całkowanie ze względu na s,

$$\begin{aligned} f &= \frac{z}{(s+z^2)^{1/2}} + C(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{(s+z^2)^{1/2}} - \frac{z}{2}\frac{2z}{(s+z^2)^{3/2}} + C'(z) \\ &= \frac{s+z^2-z^2}{(s+z^2)^{3/2}} + C'(z) = \frac{s}{(s+z)^{3/2}} + C'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} + C'(z) \end{aligned}$$

Stąd,

$$C'(z) = 0 \implies f(s,z) = \frac{z}{(s+z^2)^{1/2}} + D$$

Definiujemy więc ostateczną formę:

$$\eta = \frac{z}{(z^2+y^2+z^2)^{1/2}}: \qquad \mathrm{d}\eta\,\Big|_{O'} = \omega\,\Big|_{O'}$$

Ponieważ O' jest gęsty w O (ta prosta OX ma wnętrze miary 0, a na brzegu funkcje gładkie się zgadzają), to $\mathrm{d}\eta = \omega$.

Zadanie 3b/S2 $\omega = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$, $\omega \in \Omega^2(O)$, $O = \big\{(x,y,z)\colon x^2+y^2>0\big\}$. Szukamy $\eta \in \Omega^1(O)\colon\ \mathrm{d}\eta = \omega$.

Znowu trzeba tu zauważyć współrzędne cylindryczne, so sugestywnie pojawia się w definicji zbioru O.

$$\begin{aligned} &x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Spójrzmy na współrzędne cylindryczne.

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= \rho\cos\phi\,\mathrm{d}(\rho\sin\phi) - \rho\sin\phi\,\mathrm{d}(\rho\cos\phi) \\ &= \ldots = \rho^2\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Podobnie,

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi$$

Forma we współrzędnych (ρ,ϕ,z):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-\rho^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\phi + z\rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z\rho\,\mathrm{d}\rho - \rho^2\,\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\wedge\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Sprowadziliśmy to do problemu znalezienia formy pierwotnej do 1-formy.
Szukamy $f(\rho, z)\colon \eta = f\,\mathrm{d}\phi$ spełnia $\mathrm{d}\eta = \omega$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{z\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} \xrightarrow{\text{całka po } \rho} f = -z\frac{1}{\left(z^2+\rho^2\right)^{1/2}} + C(z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{z}{\left(z^2+\rho^2\right)^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}\right)2z - \frac{1}{\left(z^2+\rho^2\right)^{1/2}} + C'(z) \\
&= \frac{z^2 - z^2 - \rho^2}{\left(z^2+\rho^2\right)^{3/2}} + C'(z) \\
&= \frac{-\rho^2}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} + C'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} + C'(z) \\
f(\rho, z) &= -\frac{z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}} + D
\end{aligned}$$

Mamy więc formę pierwotną $\eta\colon\ \mathrm{d}\eta = \omega$

$$\eta = -\frac{z}{\left(z^2+x^2+y^2\right)^{1/2}} \cdot \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)} \in \Omega^1(O)$$

Wykład 4: Ćwiczenia 4

26 paź 2020

Zadanie 0 $\omega = \dfrac{1}{xy^2z}(zt\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + tx\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t + yz\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x)$ określona na $O = \mathbb{R}^4_+$. Znaleźć formę pierwotną.

$$\omega = \frac{t}{xy^2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \frac{t}{y^2z}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{1}{yz}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t + \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x$$

Szukamy 1-formy $\theta \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^4_+\right)$ takiej, że $\mathrm{d}\theta = \omega$. Chcemy zapiać ω w postaci $\omega = \beta\wedge\alpha$, gdzie α jest zamknięta. Wówczas $\theta = f\alpha$, gdzie $\mathrm{d}f = \beta$. ($\omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}f\wedge\alpha$)

$$\omega = \frac{\mathrm{d}x}{x}\wedge\frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y\wedge\frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{\mathrm{d}z}{z}\wedge\frac{\mathrm{d}t}{y} + \frac{\mathrm{d}t}{y}\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Te wszystkie 1-formy ułamkowe z jednakowymi zmiennymi są zamknięte.

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\mathrm{d}t}{y} - \frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x} + \left(\frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}t}{y}\right)\wedge\frac{\mathrm{d}z}{z} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}t}{y} - \frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\wedge\left(\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}z}{z}\right)
\end{aligned}$$

Można zapisać to w taki sposób, by otrzymać dwie możliwe formy pierwotne.

$$= \mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)\wedge\mathrm{d}\log\left(\frac{x}{z}\right)$$

Mamy dwa rozwiązania:

$$\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\,\mathrm{d}\log\left(\frac{x}{z}\right)\right) = \omega$$

$$\theta = \frac{t}{y}\,\mathrm{d}\log\left(\frac{x}{z}\right)$$

Albo,

$$\mathrm{d}\left(-\log\left(\frac{x}{z}\right)\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)\right) = \omega$$

$$\theta' = -\log\left(\frac{x}{z}\right)\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)$$

Wniosek 1. Jakie inne θ można wskazać? Funkcja pierwotna zawsze jest wyznaczana z dokładnością do stałej. Natomiast swoboda znalezienia formy pierwotnej jest dużo większa. Niech $\omega \in \Omega^k(O)\colon \mathrm{d}\omega = 0$. Szukamy $\theta \in \Omega^{k-1}(O)\colon \mathrm{d}\theta = \omega$. Niech $\eta \in \Omega^{k-2}(O)$ i rozważmy $\theta + \mathrm{d}\eta = \theta_\eta$. Wówczas $\mathrm{d}\theta_\eta = \mathrm{d}(\theta + \mathrm{d}\eta) = \mathrm{d}\theta = \omega$. Wszystkie tego typu θ_η są dobrymi formami pierwotnymi.

Regułki jak działać ze zwężeniem:

$$\partial_t \lrcorner\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$
$$\partial_t \lrcorner\, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$$

Zadanie 1 Niech $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon z > 0\}$. Oblicz formę pierwotną do $\omega = \frac{1}{z^3}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$. Użyj kontrakcji punktowej $\phi\colon [0,1] \times O \to O$ dla $\phi(t,x,y,z) = (tx, ty, 1-t+tz)$.

$$\begin{aligned}\phi^*\omega = \big[&tx\,\mathrm{d}(ty) \wedge \mathrm{d}(1-t+tz) + ty\,\mathrm{d}(1-t+tz) \wedge \mathrm{d}(tx)\\ &+(1-t+tz)\,\mathrm{d}(tx) \wedge \mathrm{d}(ty)\big]\frac{1}{(1-t+tz)^3}\end{aligned}$$

Zaraz będziemy zwężać, więc w tym wyrażeniu, które nam powstanie zostawiamy tylko wyrazy zawierające $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^i$.

$$\begin{aligned}\partial_t \lrcorner \phi^*\omega &= \partial_t \lrcorner \Bigg[\frac{1}{(1-t+tz)^3}\big(t^2xy\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z + t^2x(z-1)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t\big) + ty\big((z-1)t\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x + tx\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\big)\\ &\qquad +\big(1+t(z-1)\big)(xt\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y + ty\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t) + \cdots\Bigg]\\ &= \frac{1}{\big(1+t(z-1)\big)^3}\big[t^2xy\,\mathrm{d}z - t^2x(z-1)\,\mathrm{d}y + t^2y(z-1)\,\mathrm{d}x - t^2yx\,\mathrm{d}z\\ &\qquad +\big(1-t(z-1)\big)tx\,\mathrm{d}y - \big(1+t(z-1)\big)t\,\mathrm{d}x\big]\end{aligned}$$

Jak obliczymy z tego całkę po t od 0 do 1 to mamy formę pierwotną. Wszędzie (prawie) pojawia się nam poniższa całka.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\big(1+(z-2)t\big)^3} &= -\frac{1}{2(z-1)}\frac{t^2}{\big(1+(z-1)t\big)^2}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\big(1+(z-1)t\big)^2} \\ &= -\frac{1}{2\big(1+(z-1)\big)^2(z-1)} - \dots\end{aligned}$$

No w każdym razie się dużo naliczymy xD „Ale ja mogę podać wynik tej procedurki". Policzmy to jeszcze raz, tylko sprytnie:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{z^3}\big((x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\big) \\ &= \frac{1}{z^3}\big(\rho^2\,\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}z + z\rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\big) \\ &= \frac{(-1)}{z^3}\rho^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\phi + \frac{\rho}{z^2}\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi \\ &= \left(\frac{\rho}{z^2}\,\mathrm{d}\rho - \frac{\rho^2}{z^3}\,\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Łatwo znaleźć funkcję zależną od ρ, z, której pochodną jest wyrażenie w nawiasie.

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2}\right)\wedge\mathrm{d}\phi$$

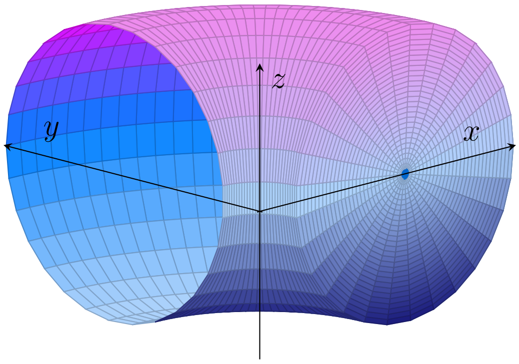
Teraz możemy wyliczyć formę pierwotną θ. Jeśli $\omega = \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\phi$, to $\theta = f\,\mathrm{d}\phi$.

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2}\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2}\frac{1}{\rho^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{z^2}\end{aligned}$$

Zadanie 2b Oblicz całkę $\int_{(\Sigma,\imath)}\omega$ z 2-formy $\omega = z^2\left(\frac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{\sqrt{(y-4)^2+z^2}} + \frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-4)^2+z^2}}\right)$ po powierzchni $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)^2 + z^2 = 9 \,\wedge\, x,y\geq 0\right\}$ zorientowanej na zewnątrz.

Zauważmy, że $\mathrm{d}\omega = 0$.

$$\mathrm{d}\omega_1 = \frac{2z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{\sqrt{(y-4)^2+z^2}} + \frac{z^2\left(-\frac{1}{2}\right)2z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{\left(\sqrt{(y-4)^2+z^2}\right)^3} = 0$$



Rysunek 1.5: Powierzchnia Σ, czyli ćwiartka torusa. Dodatkowo, powierzchnia boczna D_1.

Tak samo zachodzi dla drugiej (antysymetrycznej) części formy ω. Całkować będziemy po ćwiartce torusa. Zauważmy, że dane Σ wraz z D_1 i D_2 stanowią brzeg „wypełnionego" torusa T. Z twierdzenia Stokesa (orientacje zostawiając w kwestii czytelnika),

$$0 = \int_T \mathrm{d}\omega = \int_\Sigma \omega + \int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega$$

$$\int_\Sigma \omega = -\left(\int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega\right)$$

$$D_1 = \left\{y = 0,\ (x-4)^2 + z^2 \leq 9\right\}$$

$$D_2 = \left\{x = 0,\ (y-4)^2 + z^2 \leq 9\right\}$$

Całkując po D_1 pierwszy składnik formy zawierający $\mathrm{d}y$ oczywiście można pominąć, gdyż się zeruje ($y = 0$).

$$\int_{(D_1,\imath)} \omega = \int_{D_1} \frac{-z^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z}{\sqrt{(x-4)^2 + z^2}} = \left|\begin{matrix} x - 4 = \rho\cos\phi \\ z = \rho\sin\phi \\ \rho \in [0,3],\ \phi \in [0, 2\pi] \end{matrix}\right| = -\int_{D_1} \frac{\rho^2 \sin^2\phi \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi}{\rho}$$

$$= -\frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = -\frac{9}{2}\pi$$

Podobnie liczymy drugą całkę, teraz biorąc tylko pierwszy składnik formy ω.

$$\int_{(D_2,\imath)} \omega = -\int_{D_2} \frac{z^2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y}{\sqrt{(y-4)^2 + z^2}} = \frac{9}{2}\pi$$

$$\int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega = 0 = \int_\Sigma \omega$$

Czy można to było przewidzieć? Sama 2-forma ω jest antysymetryczna ze względu zamianę x, y, natomiast obszar Σ jest symetryczny ze względu na zamianę x, y. Zatem $\displaystyle\int_\Sigma \omega = 0$.

Wykład 5: Ćwiczenia 5

29 paź 2020

Zadanie 1b $\omega = \frac{1}{z^3}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$. Dana jest retrakcja punktowa $\phi(t,x,y,z) = (tx, ty, z^t)$. $z > 0$. Policzyć formę pierwotną.

Ostatnio sprawdziliśmy, że ta sama ω jest zamknięta. Szukamy więc η: $\mathrm{d}\eta = \omega$. Z Lematu Poincare dostajemy wzór na θ, który zależy od ϕ.

$$\eta = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \partial_t \lrcorner \phi^* \omega$$

Policzymy cofnięcie.

$$\phi^*\omega = \frac{1}{z^{3t}}\left[tx\,\mathrm{d}(ty) \wedge \mathrm{d}z^t + yt\,\mathrm{d}(z^t) \wedge \mathrm{d}(xt) + z^t\,\mathrm{d}(xt) \wedge \mathrm{d}(yt)\right]$$

Pamiętajmy, że $\mathrm{d}z^t = tz^{t-1}\,\mathrm{d}z + \log z z^t\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned} &= z^{-2t}t(t\log z - 1)\,\mathrm{d}t \wedge (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) + z^{-2t}t^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &\quad + z^{-2t-1}t^3(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Być może przyda się, że $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \rho^2\,\mathrm{d}\phi$.

$$\partial_t \lrcorner \phi^*\omega = z^{-2t}t(t\log z - 1)(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{d}t\, z^{-2t}t(t\log z - 1) &= \left| u = t\log z \right| = \frac{1}{(\log z)^2}\int_0^{\log z} u(u-1)e^{-2u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(\log z)^2}u^2 e^{-2u}\Big|_0^{\log 2} = -\frac{1}{2}z^{-2} \end{aligned}$$

Czyli,

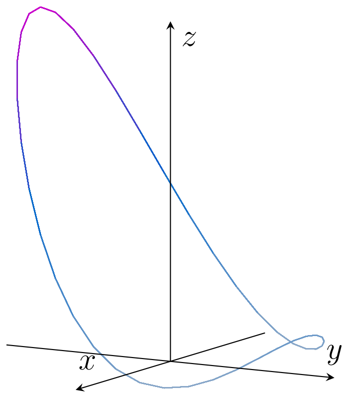
$$\eta = -\frac{1}{2}z^{-2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$

Zadanie 2a Oblicz całkę $\int_{(\Gamma,\imath)} \omega$ z 1-formy $\omega(x,y,z) = \left(z^2 - y^2\right)\mathrm{d}x - 2xy^2\,\mathrm{d}y + e^{\sqrt{z}}\cos z\,\mathrm{d}z$ po krzywej $\Gamma = \left\{\left(\cos t, \sin t, 8 - \cos^2 t - \sin t\right) : t \in [0, 2\pi)\right\}$ zorientowanej zegarowo.

Wniosek 2. $e^{\sqrt{z}}\cos z\,\mathrm{d}z$ jest formą zupełną (bo jest zamknięta). Niech jej forma pierwotna to f. Ponadto, Γ jest zamknięta (funkcje okresowe po pełnym okresie więc się zamknie). Stąd, z twierdzenia Stokesa:

$$\int_\Gamma \mathrm{d}f = \int_{\partial\Gamma = \varnothing} f = 0$$
$$\int_\Gamma e^{\sqrt{z}}\cos z\,\mathrm{d}z = 0$$

Takiego samego argumentu można użyć, abyć stwierdzić, że praca siły potencjalnej po zamkniętej krzywej jest zerowa!



Rysunek 1.6: Krzywa Γ.

W sposób trywialny acz formalny wprowadzamy parametryzację, aby cofnąć formę do krzywej.

$$\psi(t) = \big(\cos t, \sin t, 8 - \cos^2 t - \sin t\big) \colon t \in [0, 2\pi)$$

Nasza zadana parametryzacja nie jest zgodna z orientacją Γ, zatem:

$$\int_\Gamma \omega = -\int_0^{2\pi} \psi^* \omega = -\int_0^{2\pi} \Big[\big(8 - \cos^2 t - \sin t\big)^2 - \sin^2 t\Big](-1)\sin t \,\mathrm{d}t \\ - \underbrace{2\cos t \sin^2 t \cos t}_{\sin^2 2t} \mathrm{d}t$$

Obliczamy to, co nietrywialne.

$$\int_0^{2\pi} 2\cos^2 t \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \big(8 - \cos^2 t - \sin t\big)^2 \sin t \,\mathrm{d}t =$$

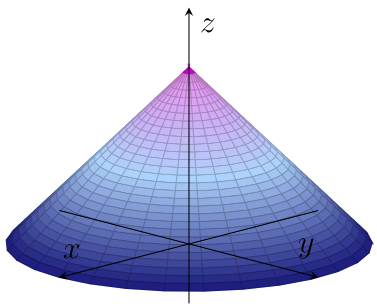
$$= \int_0^{2\pi} (64 + \cos^4 t + \sin^2 t - 16\cos^2 t - 16\sin t + 2\cos^2 t \sin t) \sin t \,\mathrm{d}t = -16\pi$$

Teraz liczymy wyjściową całkę.

$$\int_\Gamma \omega = -15\pi$$

Zadanie 3 Niech $\Sigma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = (1 - z)^2 \wedge 0 \leq z \leq 1\big\}$ o orientacji na zewnątrz. Niech $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ będzie dana wzorem $\omega(x, y, z) = (yz \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z$. Obliczyć całkę z formy po Σ.
Niech Σ będzie powierzchnią boczną „wypełnionego” stożka S ($\partial S = \Sigma \cup \{\text{denko}\}$).

$$\mathrm{d}\omega = (z \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z = (1 - z) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$



Rysunek 1.7: Zbiór Σ to powierzchnia boczna stożka.

Najwygodniej działać we współrzędnych walcowych.

$$
\begin{aligned}
&= (1-z)\rho \,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z \\
\int_S \mathrm{d}\omega &= \int_S (1-z)\rho \,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{\substack{0\le\rho\le 1-z \\ 0\le z\le 1}} (1-z)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{1-z} \mathrm{d}\rho\, \rho(1-z) = 2\pi \int_0^1 \frac{(1-z)^3}{2} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Teraz wiadomo, że wynik musi być taki sam jak całka z ω to brzegu stożka z kanoniczną orientacją. Całka po denku jest zerowa ($z = 0$), zatem:

$$
\int_S \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{4} = \int_{(\partial S, \imath)} \omega = \int_{(\Sigma, \imath)} \omega
$$

Zasadniczo właśnie to policzyliśmy używając twierdzenia Stokesa. Możemy jednak sprawdzić licząc to wprost. Parametryzacja powierzchni bocznej:

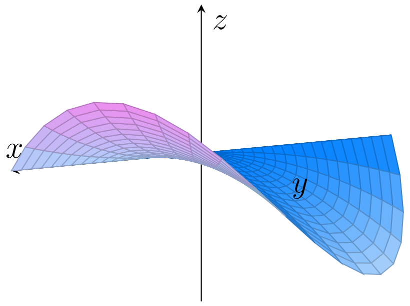
$$
\psi(z, \phi) = \big((1-z)\cos\phi, (1-z)\sin\phi, z\big)
$$

gdzie $\phi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 1]$. Aby powierzchnia miała orientację na zewnątrz, chcemy by pierwszą współrzędną było ϕ, a drugą z.

$$
\begin{aligned}
\int_{(\Sigma,\imath)} \omega &= \int_{\substack{\phi\in[0,2\pi] \\ z\in[0,1]}} \Big[(1-z)\sin\phi z \,\mathrm{d}\big[(1-z)\cos\phi\big] + (1-z)\cos\phi \,\mathrm{d}\big[(1-z)\sin\phi\big]\Big] \wedge \mathrm{d}z \\
&= \int_{\substack{\phi\in[0,2\pi] \\ z\in[0,1]}} \big[(1-z)^2 z(-\sin^2\phi) + (1-z)^2\cos^2\phi \ \big] \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}z \\
&= \pi \int_0^1 \mathrm{d}z \,(1-z)^3 \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Wyszło to samo!

Zadanie 3(i2) Obliczyć krążenie pola wektorowego V po brzegu powierzchni Σ.
$V(x,y,z) = xz\big((6z-3xy)\partial_x + 2x\partial_y + 3x\partial_z\big)$, $\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = xy,\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\big\}$.



Rysunek 1.8: Powierzchnia Σ. $\partial\Sigma$ składa się z prostej $y=0$ i z krzywej ograniczającej tę powierzchnię, dla której $x^2+y^2=1$.

$$\int_{\partial\Sigma} V\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\partial\Sigma} \tilde{V}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

gdzie $\tilde{V}$ jest polem wektorowym na brzegu.

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= xz\big((6z-3z)\partial_x + 2x\partial_y + 3x\partial_z\big)\\
V &\overset{\partial\Sigma}{=} \tilde{V}\\
\int_{\partial\Sigma} \tilde{V}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\partial\Sigma} G(\tilde{V}) &= \int_{\partial\Sigma} xz(3z\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y + 3x\,\mathrm{d}z)\\
&= \int_{\partial\Sigma} \underbrace{\frac{3}{2}\,\mathrm{d}(xz)^2}_{\text{wkład zerowy}} + 2x^2z\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Wkład jest zerowy z tego samego powodu, dla którego wkład był zerowy w zadaniu 2a (całka z formy zupełnej po krzywej zamkniętej).

$$\overset{z=xy}{=} \underbrace{\int_{\substack{y=0\\x^2\leq 1}} 2x^3y\,\mathrm{d}y}_{=0} + \int_{\substack{x^2+y^2=1\\y\geq 0}} 2x^3y\,\mathrm{d}y$$

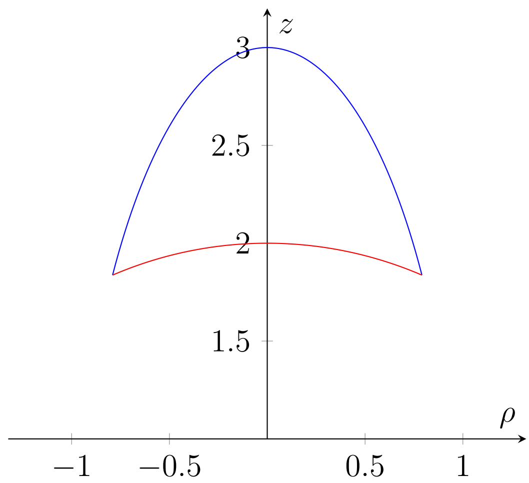
Wprowadzamy parametryzację $\psi\colon (\phi) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$, $\phi \in [0,\pi]$,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi 2\cos^3\phi \sin\phi \cos\phi\,\mathrm{d}\phi\\
&= -\frac{2}{5}\cos^5\phi\,\bigg|_0^\pi = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

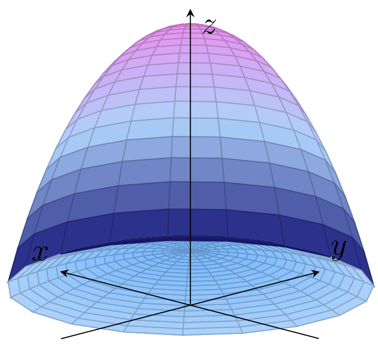
Wykład 6: Ćwiczenia 6

02 lis 2020

Zadanie 4(ii.1)/S3 Oblicz strumień pola wektorowego V przez powierzchnię Σ.
$V = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\left(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z\right)$,
$\Sigma = \left\{ \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \wedge x^2+y^2+z^2 \geq b^2 \wedge 0 < a < b < c \wedge z \geq 0 \right\}$



Rysunek 1.9: Przekrój osiowy powierzchni Σ dla $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ wraz z S – wycinkiem przekroju sfery o promieniu b.



Rysunek 1.10: Powierzchnia Σ (elipsoida obrotowa) z dodanym denkiem S.

W celu policzenia strumienia pola chcemy obliczyć $\omega = V \lrcorner \Omega$ i je scałkować. Na poziomie operatywnym, robimy podmiany $\partial_x \to \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\partial_y \to \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, $\partial_z \to \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$$

Liczymy pochodną zewnętrzną.

$$\mathrm{d}\omega = \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\left(2x^2+2y^2+2z^2\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0$$

Teraz widzimy, że warto skorzystać z twierdzenia Stokesa. Całkujemy po wydłużonej czapeczce elipsoidy. Możemy to domknąć jeszcze kawałkiem sfery. Wówczas,

$$\int_\Sigma \omega = \int_S \omega$$

przy czym w obu całkach jest przyjęta orientacja na zewnątrz powierzchni całkowania! Nasze pole wektorowe jest równoległe do wektora normalnego do powierzchni sfery, ponadto to pole jest na sferze stałe! W związku z tym nie musimy się nawet dużo naliczyć.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{r^3}\vec{r} \\ V \cdot \vec{n}_S &= \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2} \overset{\text{na } S}{=} \frac{1}{b^2} \\ \int_S \omega &= \frac{1}{b^2} \int_{\substack{\phi \in [0,2\pi] \\ \theta \in [0,\alpha]}} b^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\ &= 2\pi \cos\theta \Big|_0^\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

Pozostaje tylko wyznaczyć kąt α, który odpowiada kątowi od osi z do punktu przecięcia elipsy o półosiach a, c z okręgiem o promieniu b. Przecinamy dwie krzywe.

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \rho^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$$

Z prostej trygonometrii wyjdzie α.

$$\begin{aligned} z^2\left(a^2 - c^2\right) &= c^2\left(a^2 - b^2\right) \\ \cos^2\alpha &= \frac{z^2}{b^2} \\ \cos^2\alpha &= \frac{c^2}{b^2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \end{aligned}$$

Finalnie,

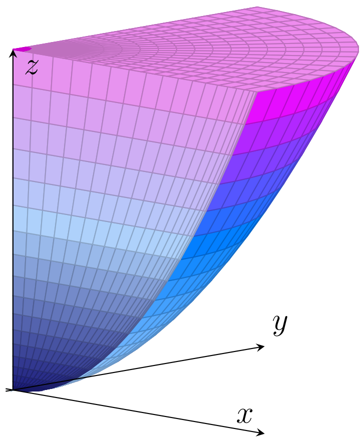
$$\int_\Sigma \omega = \int_S \omega = 2\pi\left[1 - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\right]$$

Zadanie 4(ii.2)/S3 $V = xz\partial_x + x^2y\partial_y + y^2z\partial_z$, liczymy strumień po $\partial\Sigma$, gdzie $\Sigma = \left\{0 \le z \le x^2 + y^2 \le 1 \, \wedge \, x, y \ge 0\right\}$. Orientacja indukowana z $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

Najpierw przeliczamy element strumienia na 2-formę.

$$\begin{aligned} \omega &= xz \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + y^2z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\omega &= z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= (x^2 + y^2 + z) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \neq 0 \end{aligned}$$

Ta forma nie znika, ale pewnie można i tak skorzystać ze Stokesa. Naszą objętością Σ jest paraboloida obrotowa. Brzeg Σ składa się z 4 części.



Rysunek 1.11: $\partial\Sigma$: ściany $x = 0$, $y = 0$, denko $z = 1$ oraz część paraboloidy obrotowej.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma}\omega &= \int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega = \int_{\Sigma}(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1(z+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1\mathrm{d}z\left(z\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{3}{8}z^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

Zadanie 4(ii.3)/S3 $V = z\left(e^x\sin y\partial_x + e^x\cos y\partial_y + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_z\right)$, $\Sigma = H_1\cup H_2$, gdzie H_1, H_2 to półsfery zawarte w brzegu $\left\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4 \wedge y\ge 0\right\} = \chi$.

$$\omega = z\left(e^x\sin y\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + e^x\cos y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)$$

Po różniczkowaniu pierwsze dwie części się wyzerują. Stąd,

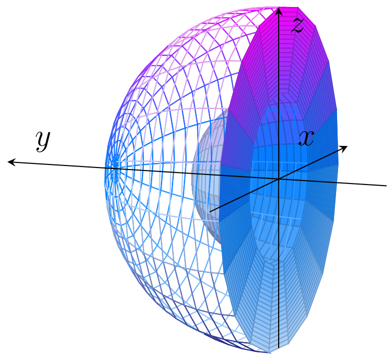
$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

Rozważmy parametryzację współrzędnymi sferycznymi:

$$\psi\colon \begin{bmatrix} r\\ \theta\\ \phi\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\end{bmatrix}$$

Na potrzeby parametryzacji naszych sfer będziemy mieli $\theta\in[0,\pi]$ oraz $\phi\in[0,\pi]$. Teraz musimy skontrolować znaki przy orientacjach form objętości. Wiadomo, że:

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$$



Rysunek 1.12: $\partial\chi = H_1 \cup H_2 \cup R$, gdzie R jest dyskiem $\{1 \leq r \leq 2 \wedge y = 0\}$. H_1 jest zorientowana do wewnątrz (orientacja $-$), H_2 na zewnątrz ($+$), a R w stronę $-\hat{y}$ ($-$).

Z twierdzenia Stokesa,

$$\int_{(H_1\cup H_2,\partial\imath)} \omega + \int_{(R,\partial\imath)} \omega = \int_{(\chi,\imath)} \mathrm{d}\omega = \int_{(\chi,\imath)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Możemy przyjąć, że orientacja zgodna z (x, y, z) jest orientacją χ. Wówczas orientacją w całce po R jest ta wynikająca z kręcenia wektorami $x \to z$ (dostajemy kierunek $-y$), zatem chcemy mieć wyraz $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

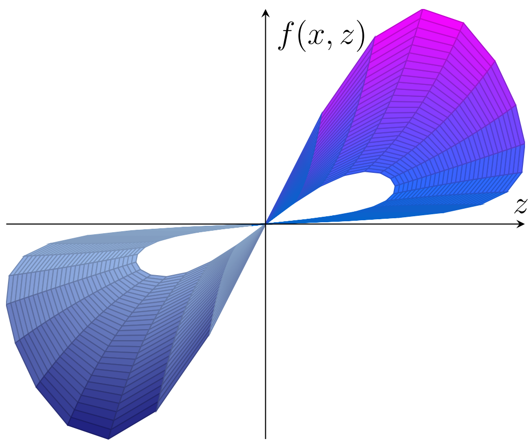
$$\int_{(R,\partial\imath)} \omega = \int_{(R,\partial\imath)} ze^x \cos y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\int_R ze^x \cos y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$$
$$R = \left\{1 \leq x^2 + z^2 \leq 4 \wedge y = 0\right\}$$

Zauważmy, że obszar R jest symetryczny ze względu na zamianę $z \to -z$, a forma $\omega\big|_R$ antysymetryczna. Stąd,

$$\int_R \omega = 0$$

Zostaliśmy więc z prostą całką:

$$\int_{H_1\cup H_2} \omega = \int_\chi \frac{r^2 \sin\theta}{r \sin\theta} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \int_0^\pi \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_1^2 r \, \mathrm{d}r$$
$$= \frac{3}{2}\pi^2$$



Rysunek 1.13: Argument z antysymetrią obrazowo. $f(x, z) = ze^x$

Wykład 7: Ćwiczenia 7

05 lis 2020

Zadanie 5/S3 pomocnicze $\mathrm{d}\overset{k}{\omega} = 0$ na O, który jest ściągalny to istnieje $\overset{k-1}{\eta}:\ \mathrm{d}\eta = \omega$. Wykazać, że jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ jest zamknięta oraz $\int_{S^1} \omega = 0$ to ω jest zupełna.

Chcemy wskazać funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\colon \mathrm{d}f = \omega$. Trzeba ją skonstruować, inaczej nie da rady. Nasz obszar nie jest ściągalny, więc lemat Poincare też nie pomoże. Przykładowo, wyrzucenie całej półosi z układu współrzędnych daje już retrakcję.

Niech $O_+ = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_2}$ oraz $O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_2}$. Każdy z tych zbiorów jest ściągalny, zatem ω ma potencjał na każdym z tych obszarów (oczywiście nie musi być to ten sam potencjał). Z Lematu Poincare, istnieją $f_\pm$ takie, że:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_+ &= \omega\,\big|_{O_+} \\ \mathrm{d}f_- &= \omega\,\big|_{O_-} \\ \mathrm{d}(f_+ - f_-) &= (\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega)\,\big|_{O_+\cap O_-} = 0 \end{aligned}$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{e_2}$. Istnieją stałe c_+ i c_- takie, że

$$f_+ - f_- = \begin{cases} c_+ & x > 0 \\ c_- & x < 0 \end{cases}$$

Pytanie brzmi czy $c_+ = c_-$? Jeśli tak, to $f_+ = f_- + c$. Czyli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ określona wzorem f_- na O_- oraz $f_+ - c$ na O_+ spełnia $\mathrm{d}f = \omega$. Użyjmy warunku z całką po okręgu.

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S^1} \omega &= \int_{\text{góra}} \omega + \int_{\text{dół}} \omega \\ &= \int_{\text{góra}} \mathrm{d}f_- + \int_{\text{dół}} \mathrm{d}f_+ \end{aligned}$$

Całka z pochodnej to różnica wartości na brzegu, zatem

$$= f_-(-1,0) - f_-(1,0) + f_+(1,0) - f_+(-1,0) = 0$$

Stąd,

$$f_+(1,0) - f_-(1,0) = f_+(-1,0) - f_-(-1,0)$$

Stąd wynika, że $c_+ = c_-$ i to kończy nasz dowód.

Lemat do zadania 5 (dla chętnych do domu).
Wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})$ jest zamknięta oraz $\displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2=1 \\ z=0}} \theta = 0$, to θ jest zupełna.

Zadanie 5/S3 Mamy $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\mathrm{d}\omega = 0$, $\int_{S^2} \omega = 0$. Pokazać, że ω jest zupełna.

Wskazówka,

$$\begin{aligned} O_+ &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_z} \\ O_- &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_z} \end{aligned}$$

mają retrakcję. Należy skorzystać z lematu Poincare i znaleźć potencjały na O_+ i O_-. Niech $\theta_\pm \in \Omega^1(O_\pm)\colon\ \mathrm{d}\theta_\pm = \omega\big|_{O_\pm}$. Zauważmy, że

$$\mathrm{d}(\theta_+ - \theta_-)\Big|_{O_+ \cap O_-} = 0$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z}$. Czy $\int_{S^1} \theta_+ - \theta_- = 0$?

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S^2} \omega &= \int_{S^2_+} \omega + \int_{S^2_-} \omega \\ &= \int_{S^2_+} \mathrm{d}\theta_- + \int_{S^2_-} \mathrm{d}\theta_+ \end{aligned}$$

Ze Stokesa,

$$\begin{aligned} &= \int_{(S^1,+)} \theta_- + \int_{(S^1,-)} \theta_+ \\ &= \int_{(S^1,+)} (\theta_- - \theta_+) \end{aligned}$$

Istnieje $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})\colon \theta_+ - \theta_- = \mathrm{d}f$. Czy istnieją funkcje $f_+ \in C^\infty(O_+)$ i $f_- \in C^\infty(O_-)$ takie, że $f = f_+ - f_-$ na $O_+ \cap O_-$. Jeśli tak, to $(\theta_+ - \theta_-) = \mathrm{d}f = \mathrm{d}f_+ - \mathrm{d}f_-$. Stąd, $\theta_+ - \mathrm{d}f_+ = \theta_- - \mathrm{d}f_-$. Stąd istniałaby $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ dana wzorem:

$$\begin{aligned} \eta\big|_{O_+} &= \theta_+ - \mathrm{d}f_+ \\ \eta\big|_{O_-} &= \theta_- - \mathrm{d}f_- \end{aligned}$$

oraz

$$\mathrm{d}\eta = \omega$$

Dlaczego takie f_+ i f_- istnieją? Dobre pytanie! Może kiedyś dokończymy ten dowód :)

Rozdział 2

Analiza zespolona

Zadanie 1a/S4 Znaleźć funkcję holomorficzną taką, że $\mathrm{Re}(f(z)) = e^x \cos y$, $f(0) = 1$.

Warunki Cauchy'ego-Riemanna dla $f(z) = u(z) + iv(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Wynik mógłby pojawić się przez rozwiązywanie tego układu równań. Ale można też zgadnąć: $f(z) = e^z$. Ale rozwiążmy to analitycznie.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= e^x \cos y \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\
v &= \int e^x \cos y \,\mathrm{d}y = e^x \sin y + C(x) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y \\
C'(x) &= 0 \\
f(0) &= 1 \implies C = 0
\end{aligned}$$

Stąd,

$$f(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z$$

Zadanie 1c/S4 $\mathrm{Im}(f(z)) = 3x + 2xy$, $f(-i) = 2$.

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= 3iz, \quad \mathrm{Im}(f_1(z)) = 3x \\
f_2(z) &= z^2, \quad \mathrm{Im}(f_2(z)) = 2xy \\
f &= f_1 + f_2 + C = 3iz + z^2 + C \\
f(-i) &= 3i(-i) + i^2 + C = 2 \\
C &= 0
\end{aligned}$$

Zadanie 1b/S4 $\mathrm{Re}(f(z)) = \sin x/(\cos x + \cosh y)$, $f(0) = 0$.

Atakujemy R.C.R.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
v &= \int \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C(y) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\cos x}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sin^2 x}{(\cos x + cshy)^2} \\
&= \frac{1 + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cosh y}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
&= \frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} + C'(y) \\
C &= \text{const.} \\
f(z) &= \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y} + i\frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C \\
&= \frac{\sin x + i \sinh y}{\cos x + \cosh y} + C = \frac{\sin x + \sin(iy)}{\cos x + \cos(iy)} + C
\end{aligned}
$$

$C = 0$,

$$
= \frac{2 \sin \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}}{2 \cos \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}} = \tan \frac{z}{2}
$$

Wykład 8: Ćwiczenia 8

09 lis 2020

Zadanie 2/S4 Znaleźć homografię odwzorowującą $\Omega_1 = K(0,2) \setminus \overline{K}(1,1)$ na $\Omega_2 = \{\omega \in \mathbb{C} \colon 0 < \mathrm{Re}(\omega) < 1\}$.

Wstęp teoretyczny Odwzorowanie afiniczne $\alpha z + \beta$ jest wyznaczone przez wartości w dwóch punktach płaszczyzny zespolonej. Jak podamy 2 punkty, to istnieje dokładnie jedno tego typu odwzorowanie, które te dwa punkty w inne dwa punkty przerzuca.

$$\exists!\, \alpha z + \beta \colon \alpha z_1 + \beta = w_1,\ \alpha z_2 + \beta = w_2$$

Definicja 2 (Sfera Riemanna)**.**

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Homografię $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ możemy zapiać jako:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & z \neq -\dfrac{d}{c} \cup \{\infty\} \\ \infty & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c} & z = +\infty \end{cases}$$
$$h(\infty) = \infty \iff c = 0,\ a \neq 0$$

Wówczas h jest afiniczne. Niech $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$.

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Wówczas $h(z_1) = 0$, $h(z_2) = \infty$, $h(z_3) = 1$. Od tej pory zakładamy, że homografia nie jest odwzorowaniem stałym, tj. $ad - bc \neq 0$. Homografie składamy zgodnie z regułą mnożenia macierzy. W szczególności homografie tworzą grupę przekształceń.

Twierdzenie 1. Jeśli $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, to istnieje dokładnie jedna homografia $h\colon h(z_i) = w_i$.

Dowód. Niech $\big[h_1(z_1), h_1(z_2), h_1(z_3)\big] = [0, \infty, 1]$. Wówczas $\big[h_2^{-1}(w_1), h_2^{-1}(w_2), h_2^{-1}(w_3)\big] = [0, \infty, 1]$. W związku z tym, $h_2 \circ h_1$ jest okej. Co z jednoznacznością?

Przypuśćmy, że $h, \tilde{h}$ są okej. Jeśli $z_3 = w_3 = \infty$, to $h, \tilde{h}$ jest afiniczne, a zatem $h = \tilde{h}$. Niech $g, \tilde{g}$ to będą homografie takie, że $(0, 1, \infty) \overset{g}{\mapsto} (z_1, z_2, z_3)$ oraz $(w_1, w_2, w_3) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} (0, 1, \infty)$. Zauważmy, że $\tilde{g}hg$ oraz $\tilde{g}\tilde{h}g$ są identycznościowe. Zatem,

$$h = \tilde{h} = \tilde{g}^{-1} \circ g$$

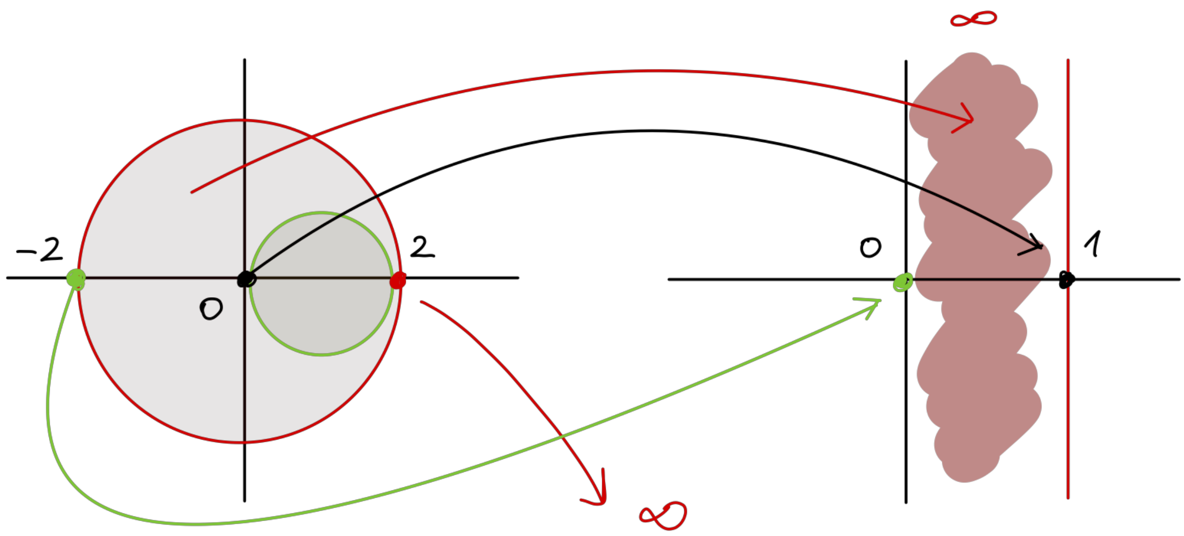
■

Teraz trzeba popatrzyć na to w świetle naszego zadania. Istnieje dokładnie jedna homografia, która:

$$h(2) = +\infty, \quad h(0) = 1, \quad h(-2) = 0$$
$$h(z) = -\frac{z+2}{z-2}$$

Można łatwo sprawdzić (czy raczej się upewnić), że wszystkie punkty przenoszą się odpowiednio. Skorzystaliśmy jedynie z faktu, że te obszary są topologicznie sensowne, zatem brzegi przechodzą na brzegi, wnętrza na wnętrza. Przy homomorfizmie, odwzorowanie obszaru spójnego jest spójne. Skorzystaliśmy też z tego, że homografie przerzucają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

Uwaga! Odwzorowanie homograficzne, które przerzuca dane 3 punkty na dane 3 punkty jest jedno, ale całe obszary na inne obszary; może być wiele – wystarczy wybrać z tych obszarów jakieś inne punkty.



Rysunek 2.1: Homografia przerzucająca rozważane obszary.

Zadanie 3/S4 $f(z) = u(z) + iv(z) \to f(\rho, \phi) = R(\rho, \phi)e^{i\Phi(\rho,\phi)}$. Wyprowadzić warunki C-R dla R, Φ.

Ustalmy ρ_0, ϕ_0. $z_0 = \rho_0 e^{i\phi_0}$ oraz $z_{\Delta\rho} = (\rho_0 + \Delta\rho)e^{i\phi_0}$, $z_{\Delta\phi} = \rho_0 e^{i(\phi_0+\Delta\phi)}$. Jak z dowolnych dwóch kierunków zbiegając do z_0 dostaniemy to samo, to mamy funkcję holomorficzną.

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{f(z_{\Delta\rho}) - f(z_0)}{z_{\Delta\rho} - z_0} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(z_{\Delta\phi}) - f(z_0)}{z_{\Delta\phi} - z_0}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{f(z_{\Delta\rho}) - f(z_0)}{z_{\Delta\rho} - z_0} &= \frac{R(\rho_0 + \Delta\rho, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0 + \Delta\rho, \phi_0)\big) - R(\rho_0, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0)\big)}{\Delta\rho e^{i\phi_0}} \\ &= e^{-i\phi_0}\left[\frac{\partial R}{\partial \rho} e^{i\Phi(\rho_0,\phi_0)} + Re^{i\Phi} i \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right]\end{aligned}$$

Tak samo druga granica,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(z_{\Delta\phi}) - f(z_0)}{z_{\Delta\phi} - z_0} &\underset{\substack{\text{analogiczne}\\\text{wyrażenie}}}{=} \\ &= \frac{1}{i\rho_0 e^{i\phi_0}} \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{1}{\Delta\phi}\Big[R(\rho_0, \phi_0 + \Delta\phi)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0 + \Delta\phi)\big) \\ &\quad - R(\rho_0, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0)\big)\Big] \\ &= \frac{1}{i\rho_0} e^{i\phi_0}\left(\frac{\partial R}{\partial \phi} e^{i\Phi} + Re^{i\Phi} i \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równania C-R:

$$\frac{1}{i\rho_0}\left(\frac{\partial R}{\partial \phi} + Ri\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial R}{\partial \rho} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone, dostając piękne równania C-R we współrzędnych „biegunowo-biegunowych":

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = \frac{\partial R}{\partial\rho}$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\phi} = R\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$$

Zadanie 5a/S4 Obliczyć całkę $\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$ korzystając ze wzoru Cauchy'ego.

Niech $D = K(0,1)$, $f(z) = e^z$. Wówczas,

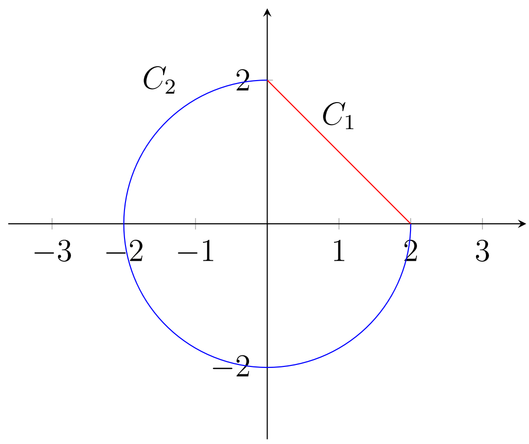
$$2\pi i = 2\pi i f(0) = \oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$$

Wykład 9: Ćwiczenia 9

16 lis 2020

Zadanie 4/S4 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$. Obliczyć $\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ i $\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, jeśli C_1 to odcinek łączący $z_0 = 2$ i $z_1 = 2i$; ,$C_2\colon \phi \mapsto 2e^{i\phi}$, $\phi \in \left[\pi/2, 2\pi\right]$.

To zadanie nikomu się nie podoba, nikt go niestety nie lubi. Nawet odpowiedź jest głupia, więc tylko zagaimy co należy zrobić.



Rysunek 2.2

Osobliwości f są w $z_1 = 0$ oraz $z_2 = -1$.

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$
$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\frac{1}{2+t(2i-2)} - \frac{1}{3+t(2i-2)}\right](2i-2)\,\mathrm{d}t$$

Użyjemy logarytmu, w ustalonej gałęzi: $\log z = \log|z| + i\arg z$, gdzie $\arg z \in (-\pi, \pi)$.

$$\begin{aligned}
&= \log\big[2 + t(2i-2)\big]\Big|_0^1 - \log\big[3 + t(2i-2)\big]\Big|_0^1 \\
&= \log(2i) - \log(2) - \log(1+2i) + \log(3) \\
&= \log\sqrt{5} + i\arg\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}i}\right)
\end{aligned}$$

No i teraz spróbujmy drugą całkę obliczyć.

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\pi/2}^{2\pi} 2e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi \left(\frac{1}{2e^{i\phi}} - \frac{1}{2e^{i\phi}+1}\right) \\
&= i\frac{3}{2}\pi - \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{2e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi}{2e^{i\phi}+1}
\end{aligned}$$

To można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej (bo jest to wymierna funkcja od funkcji trygonometrycznych). Znajdźmy jakiś związek między tymi całkami.

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1\cup C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \oint_{C_1\cup C_2} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z$$

Na mocy wzoru Cauchy'ego,

$$= 2\pi i(1-1) = 0$$

Można też od razu z całkowania przez residua. Tak czy inaczej,

$$\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Zadanie 6/S4 Wykazać, że forma $\omega = \dfrac{\mathrm{d}z}{z-a}$ określona na $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ jest zamknięta ale nie zupełna. Zbadać zamkniętość i zupełność form $\mathrm{Re}(\omega)$ i $\mathrm{Im}(\omega)$.

Zauważmy, że wystarczy rozważyć $a = 0$, a potem przesuwać tę całą zabawę.

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z = 0$$

Stąd forma ω jest zamknięta. Ponadto, ze wzoru Cauchy'ego

$$\int_{C(0,1)} \omega = 2\pi i \neq 0$$

Forma zamknięta, której całka po okręgu (brzegu) nie daje 0, nie jest zupełna. To rezultat z twierdzenia Stokesa w banalnej formie.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{z} &= \frac{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y}{x+iy} = \frac{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}(x-iy) \\
&= \underbrace{\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}}_{\mathrm{Re}(\omega)} + i\underbrace{\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}}_{\mathrm{Im}(\omega)} \\
&= \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right] + i\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

Stąd widzimy, że $\mathrm{Re}(\omega)$ i $\mathrm{Im}(\omega)$ są zamknięte, natomiast $\mathrm{Re}(\omega)$ jest zupełna, a $\mathrm{Im}(\omega)$ nie.

Zadanie 5/S4 Korzystając ze wzoru Cauchy'ego obliczyć (a) $\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$, (b) $\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$, (c) $\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$.

(a)

$$\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

(b)

$$\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \oint \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\frac{1}{2i}\,\mathrm{d}z$$

Teraz w obu całkach mamy tylko pojedyncze bieguny, zatem używamy Cauchy'ego. $f(z)$ jest stałe i takie samo w obu przypadkach, zatem całki się znoszą.

$$= 0$$

(c)

$$\begin{aligned}\oint_{C(0,2)} \frac{1}{z}\frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z &= \oint \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)}\right) \\ &= 2\pi i\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0\end{aligned}$$

Zadanie 1/S5 Znaleźć punkty osobliwe dla podanych funkcji i określić ich rodzaj. (a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2}$, (b) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

(a) Punktami podejrzanymi są $z_1 = \pi/2$ oraz $z_2 = -\pi/2$. Jeśli daje się przedłużyć funkcję do funkcji holomorficznej w punkcie podejrzanym, to jest to osobliwość pozorna. Należy policzyć granicę.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\pm\pi/2} \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2} &\overset{H}{=} \lim_{z\to\pm\pi/2} \frac{-\sin z}{2z} \\ &= \frac{-(\pm 1)}{2 \pm \pi/2} = -\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

Są to więc osobliwości pozorne.

(b) Punkt podejrzany to taki, że $e^z - 1 = 0$, czyli $z \in \{2k\pi i \colon k \in \mathbb{Z}\}$. Dla $k = 0$, $f(z) \xrightarrow{z\to 0} 1$, zatem tam jest osobliwość pozorna.
Dla $k \neq 0$,

$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{e^z - 1} \cdot z = 2k\pi i$$

Jest to więc biegun rzędu 1. Innymi słowy, wyłuskaliśmy tę najmniejszą potęgę $z - 2k\pi i$, która nam daje skończoną granicę.

Wykład 10: Ćwiczenia 10

19 lis 2020

Zadanie 2/S5 Znaleźć bieguny i ich rzędy i obliczyć residua. (a) $f(z) = \dfrac{z^n e^{1/z}}{z+1}$, (b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$, (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^5 - z^7}$.

Definicja 3 (Residuum w nieskończoności)**.**

$$\operatorname{Res}_\infty f = -\operatorname{Res}_0 \left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\right)$$

Wniosek 3. Niech z_0 będzie biegunem rzędu k.

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} (z-z_0)^k f(z)$$

(a)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Dla $z_0 = 0$,

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\,\mathrm{d}z$$

Rozwińmy funkcję w $z_0 = 0$. Jest to osobliwość istotna dla $n \in \mathbb{Z}$.

$$f(z) = z^n \frac{1}{1+z} e^{\frac{1}{z}} = z^n \sum_{l=0}^{\infty} z^l (-1)^l \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k k!}$$

$$f(z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!} z^{l+n-k}$$

$$a_{-1} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!}, \quad l+n-k = -1$$

Teraz trzeba rozważyć przypadki. $l = k-n-1$, $l \geq 0$, $k \geq n+1$. W domu co, jeśli $n \geq 0, n < 0$.

$$a_{-1} = \sum_{k\geq n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k!} = (-1)^{n-1} \left[e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right]$$

Przypadek $z = -1$. $f(z)$ ma biegun regularny w $z = -1$.

$$\operatorname{Res}_{-1} \frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{z+1} = (-1)^n e^{1/-1} = (-1)^n e^{-1}$$

Jeszcze residuum w nieskończoności.

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z^n} e^z}{\frac{1}{z}+1} = \frac{e^z z^{-n+1}}{1+z}$$

$$\operatorname{Res}_\infty f = \operatorname{Res}_0 \frac{-e^z z^{-n+1}}{(1+z)z^2} = \operatorname{Res}_0 \frac{-e^z}{z^{n+1}(1+z)}$$

Dla $-n-1 \geq 0$ jest to pozorna osobliwość. A poza tym przypadkiem, to mamy biegun rzędu $n+1$.

$$\frac{e^z}{(1+z)} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{\substack{k=0\\l=0}}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (-1)^l z^l z^{-n-1}$$

$k + l - n - 1 = -1$, skąd $k + l = n$.

$$\sum_{\substack{k+l=n\\k,l\geq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!}$$

To ostatnie można sobie obliczyć jakoś.

(c)

$$\frac{1}{z^5 - z^7} = \frac{1}{z^5(1-z^2)}$$

Osobliwości mamy w $0, +1, -1$ i być może w ∞. W 0 jest biegun rzędu 5, w $+1, -1$ rzędu 1.

$$\operatorname{Res}_1 f = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z^5(1-z^2)}(z-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z^5(1-z)(1+z)}(z+1) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}_0 f = \frac{1}{4!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4} z^5 \frac{1}{z^5(1-z^2)} = \frac{1}{4!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4} \frac{1}{1-z^2}$$

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots$$

Ta procedura odczytuje 4 współczynnik w szeregu Taylora w zerze, zatem

$$\operatorname{Res}_0 f = 1$$

Zadanie 4/S5 Wyrazić w postaci całek konturowych współczynnik a_n szeregu Laurent funkcji $\cot(z)$ w pierścieniu $\pi < |z| < 2\pi$. Obliczyć a_1.

$$\cot(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Niech $\gamma = C(0, 3/2\pi)$.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \cot(z)\,\mathrm{d}z$$

Zauważmy, że:

$$\oint_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Można więc prosto całkować cały szereg wyraz po wyrazie (szereg niemal jednostajnie zbieżny).

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cot(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^2 \sin z}\,\mathrm{d}z$$

Możemy zastosować rachunek residuów. 0 jest biegunem rzędu 3, $\pi, -\pi$ rzędu 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\pi f &= \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{z^2 \sin z}(z-\pi) = \frac{1}{\pi^2} \\
\mathrm{Res}_{-\pi} f &= \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{z^2 \sin z}(z+\pi) = \frac{1}{\pi^2} \\
\mathrm{Res}_0 f &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{\cos z}{z^2 \sin z} z^3\right) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{1}{\sin^2 z} z + \cot z\right) \\
&= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z} + 2z\frac{\cos z}{\sin^3 z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-2\sin^2 z + 2z\sin z\cos z}{\sin^4 z} \overset{\text{Taylor}}{=} -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Teraz mamy współczynnik,

$$a_1 = \sum \mathrm{Res}_i = \frac{1}{\pi^2}\cdot 2 - \frac{1}{3}$$

Zadanie 5/S4 Całkujemy funkcje wymierne. Wykazać, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\pi$.

Rozważamy funkcję zespoloną:

$$f(z) = \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Bierzemy obszar, który zawiera osobliwości, czyli taki półokrąg górny.

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi f\left(Re^{i\phi}\right) Re^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi$$

Wkład radialny. Już to bezpośrednie szacowanie całki pomijamy.

$$\int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\phi}+3}{(R^2e^{2i\phi}+1)(R^2e^{2i\phi}+4)} \cdot Re^{i\phi} i \,\mathrm{d}\phi = \int_0^\pi \frac{\mathcal{O}(R^3)}{\mathcal{O}(R^4)} \to 0$$

Stąd,

$$\begin{aligned} 2\pi i(\mathrm{Res}_i f + \mathrm{Res}_{2i} f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)} \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{Res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{z^2+3}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{3i} \\ \mathrm{Res}_{2i} f &= \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{12i} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi i\left(\frac{1}{3i}+\frac{1}{12i}\right) = \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

Wykład 11: Ćwiczenia 11

23 lis 2020

Zadanie 3/S5 Rozwinąć w szereg Laurent $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ w $\mathcal{R}(1+i, 1, \sqrt{5})$.

Dobrze jest zacząć od rozkładu na ułamki proste.

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{A}{z+i} + \frac{B}{(z+i)^2} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{(z-i)^2} \\ &= \frac{i}{4}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{i}{4}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2} \end{aligned}$$

Każdy z tych składników rozkłada się osobno w szereg.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z+i-(1+i)+(1+i)} = \frac{1}{z-(1+i)+1+2i} \\ &= \frac{1}{1+2i}\frac{1}{1+\frac{z-(1+i)}{1+2i}} \end{aligned}$$

Trzeba sprawdzić moduł. Przy naszych założeniach,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{z-(1+i)}{1+2i}\right| < 1 \\ &= \frac{1}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{z-(1+i)}{1+2i}\right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}(z-1-i)^n \end{aligned}$$

Drugi wyraz jest mniej więcej pochodną pierwszego, więc rozwija się prosto, poprzez różniczkowanie wyrazu po wyrazie. Odpuścimy to sobie.

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1-i+1} = \frac{1}{z-(1+i)+1}$$

Niby jest ładnie, ale zauważmy, że

$$1 < \left|z - (1+i)\right| < \sqrt{5}$$

czego nie można użyć w szeregu.

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \frac{1}{1 + \frac{1}{z-(1+i)}}$$

To już może grać rolę wyrazu w szeregu geometrycznym.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[z - (1+i)\right]^{-n-1}$$

I tak dalej w tym duchu można kontynuować zabawę.

Zadanie 5/S5 cd

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

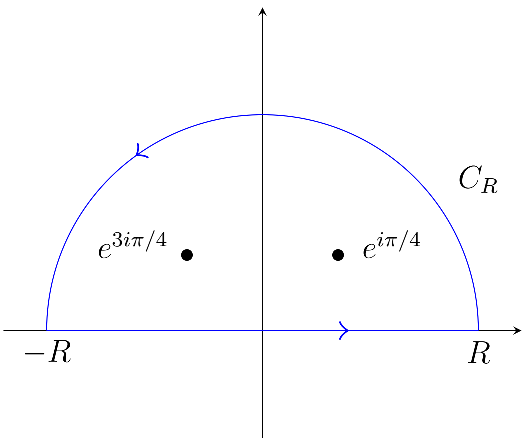
Będziemy korzystali z lematu Jordana. Funkcja podcałkowa jest parzysta.

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Bierzemy więc funkcję zespoloną:

$$f(z) = \frac{1}{2i}\frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4}$$

którą całkujemy po górnym półokręgu o promieniu R. Lemat Jordana tutaj pracuje, gdyż $g(z) = z^3/(1+z^4) \xrightarrow{z\to\infty} 0$. W związku z tym, całka po górnym łuku zanika w $R \to \infty$. W naszym obszarze mamy 2 residua.



Rysunek 2.3: Kontur półkole.

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{2i} \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z}_{\substack{R\to\infty \\ \to 0}} = 2\pi i [\mathrm{Res}_{e^{i\pi/4}} f + \mathrm{Res}_{e^{3i\pi/4}} f]$$

W $z_0 = e^{i\pi/4}$, jak i w $e^{3i\pi/4}$ jest biegun rzędu 1, zatem:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{e^{i\pi/4}} f &= \lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{1}{2i} \frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4} \left(z - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \overset{H}{=} \frac{1}{2i} \frac{e^{\frac{3}{4}i\pi} e^{ie^{i\pi/4}}}{4e^{\frac{3}{4}i\pi}} \\
&= \frac{1}{8i} e^{i\sqrt{2}/2} e^{-\sqrt{2}/2} \\
\mathrm{Res}_{e^{3i\pi/4}} f &= \lim_{z\to e^{3i\pi/4}} \frac{1}{2i} \frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4} \left(z - e^{\frac{3}{4}i\pi}\right) \\
&\overset{H}{=} \frac{1}{8i} e^{ie^{i3\pi/4}} = \frac{1}{8i} e^{-i\sqrt{2}/2} e^{-\sqrt{2}/2}
\end{aligned}$$

To teraz można podjąć się policzenia sumy tych potworności.

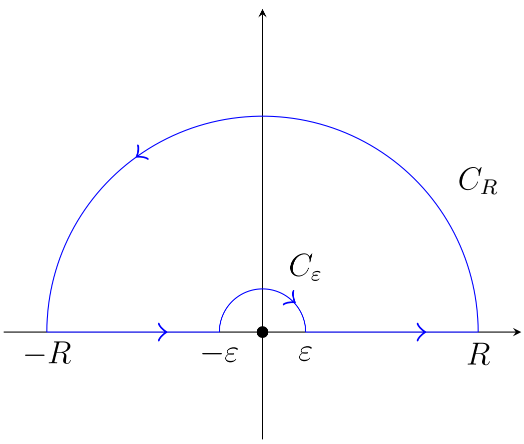
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} e^{-\sqrt{2}/2} \left(e^{-i\sqrt{2}/2} + e^{i\sqrt{2}/2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-\sqrt{2}/2}$$

Na podstawie rozważań na początku, jest to oczywiście szukana całka.

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2}{-4} = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{-4}$$

Weźmy funkcję $f(z) = \dfrac{e^{2iz} - 1}{-4z^2}$ i scałkujmy po konturze „Słoń", tak aby obskoczyć osobliwość w 0.



Rysunek 2.4: Kontur słoń. $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon,\frown} f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{C_R,\frown} f(z)\,\mathrm{d}z}_{\to 0}$$

Ostatnia całka zanika z lematu Jordana.

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{R\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Teraz pozostaje kosmetyka.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2iz}-1}{-4z^2}\,\mathrm{d}z$$

Wniosek 4. Jeśli $g(z)$ jest ciągła wokół z_0,

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\varepsilon\to 0} i(\beta-\alpha)g(z_0)$$

Stąd,

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2iz}-1}{-4z^2}\,\mathrm{d}z = i\pi\lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}-1}{-4z} = \frac{\pi}{2}$$

Zadanie 7a/S5 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$, dla $a \in (-\pi, \pi)$.

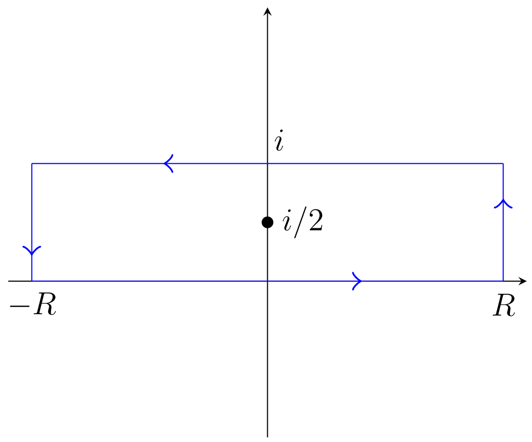
Naturalnie,

$$\cosh(az) = \frac{e^{az}+e^{-az}}{2}$$
$$f(z) = \frac{e^{az}}{\cosh(\pi z)}$$

Wybór konturu być może narzuca się trochę zauważając, że

$$\cosh\pi(x+i) = -\cosh\pi x$$

Scałkujmy ją po ciekawym konturze. $\cosh(\pi z)$ ma biegun w $z_0 = i/2$. Podążymy prostokątnym konturem.



Rysunek 2.5: Kontur prostokąt. $R\to\infty$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+i)}}{\cosh \pi(x+i)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{e^{a(R+it)}}{\cosh \pi(R+it)} i\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{0} \frac{e^{a(-R+it)}}{\cosh \pi(-R+it)} i\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{i/2} \frac{e^{az}}{\cosh \pi z}$$

Zauważmy, że pierwsze człony dzięki parzystości funkcji podcałkowej są w oczywisty sposób związane z wyjściową całką, natomiast pozostałe dwa wyrazy zdają się zanikać. Postulujemy więc, że:

$$L \xrightarrow{R\to\infty} 2I\left(1+e^{ia}\right)$$
$$P = 2\pi i \lim_{z\to i/2} \frac{e^{az}\left(z-i/2\right)}{\cosh \pi z} \overset{H}{=} 2\pi i \frac{e^{ia/2}}{\pi \sinh \frac{\pi i}{2}} = 2e^{ia/2}$$

Stąd wyliczamy wartość całki,

$$2I\left(1+e^{ia}\right) = 2e^{ia/2}$$
$$I = \frac{e^{ia/2}}{1+e^{ia}} = \frac{e^{ia/2}/2}{e^{ia/2}\left(e^{ia/2}+e^{-ia/2}\right)/2}$$
$$= \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$$

Trzeba jeszcze pokazać, że te pozostałe dwie całki zanikają.

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{a(R+it)}}{\cosh \pi(R+it)}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 \frac{e^{aR}\,\mathrm{d}t}{\left|\frac{e^{\pi(R+it)}+e^{-\pi(R+it)}}{2}\right|} \le \int_0^1 \frac{e^{aR}\,\mathrm{d}t}{\frac{e^{\pi R}-1}{2}}$$
$$= \frac{2e^{aR}}{e^{\pi R}-1}\cdot 1 \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

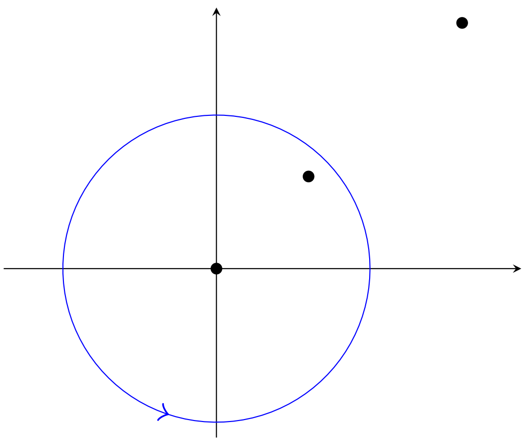
Zbiega jeśli $|a| < \pi$, tak więc tutaj wykorzystaliśmy to założenie.

Wykład 12: Ćwiczenia 12

26 lis 2020

Zadanie 6a/S5 $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{1-2p\cos\phi+p^2}$, $|p| \neq 1$.
Zamieniamy taką całkę na całkę konturową.

$$z = e^{i\phi}, \quad \mathrm{d}z = ie^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi = iz\,\mathrm{d}\phi$$
$$\cos z = \frac{z+1/z}{2}$$
$$I = \oint_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{2iz}\left(1-2p\frac{z+1/z}{2}+p^2\right)^{-1}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)\,\mathrm{d}z}{z(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}$$



Rysunek 2.6

Rachunki dalej robimy dla $|p| < 1$. Wówczas są dwie osobliwości $z = 0$, $z = p$.

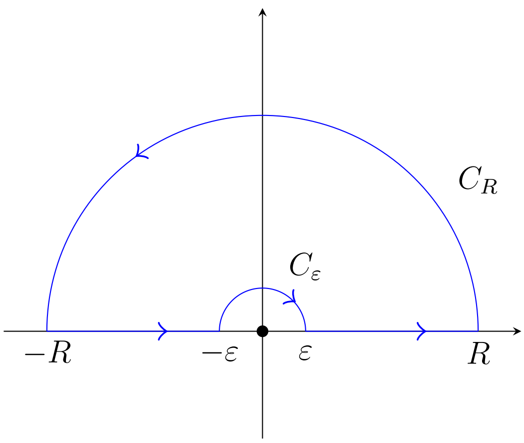
$$I = \frac{2\pi i}{-p2i}\left[\operatorname{Res}_0 f + \operatorname{Res}_p f\right] = \frac{2\pi i}{-p2i}\left[zf(z)\Big|_{z=0} + (z-p)f(z)\Big|_{z=p}\right]$$

$$= -\frac{\pi}{p}\left[1 + \frac{p^2+1}{p\left(p-\frac{1}{p}\right)}\right]$$

Zadanie 3/S6 Całki po konturze typu DS. Całkujemy funkcję $f(z) = (\log z)^2(z^2 + a^2)^{-1}$, gdzie $a > 0$. Wykazać, że:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8a}(\pi^2 + 4\log^2 a)$
2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\log a$

Logarytm zespolony: $\arg z \in (-\pi, \pi)$, $\log z = \log|z| + i\arg z$.



Rysunek 2.7: Kontur słoń. $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

Szacowanie $\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ oraz $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ zrobimy na końcu.

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} f$$

W $z = ia$ jest biegun prosty, zatem

$$\begin{aligned} &= 2\pi i \frac{\big(\log(ia)\big)^2}{(ia+ia)} = \frac{2\pi i}{2ia}\left(\log a + \frac{i\pi}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{a}\left(\log(a)^2 - \frac{\pi}{4} + i\pi \log a\right) \end{aligned}$$

Teraz liczymy limity lewej strony, zakładając już, że całki po półokręgach zanikają.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} LHS &= \int_{-\infty}^{0} \frac{(\log(-t)+i\pi)^2}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{(\log t)^2}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{(\log t + i\pi)^2}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{(\log t)^2}{t^2+a^2} \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{\pi^2}{t^2+a^2} + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Porównując części urojone dostajemy pierwszą z szukanych całek:

$$\frac{\pi^2}{a}\log a = 2\pi \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}$$

Drugą całkę liczymy z rachunku residuów, po zwykłym górnym półokręgu z osobliwością w ia. Całka z funkcji typu $1/z^2$ zanika przy całkowaniu po półokręgu, zatem zostaje tylko szukana całka po osi.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\pi^2\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^2\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} f \\ &= \pi i \frac{\pi^2}{2ia} = \frac{\pi^3}{2a} \end{aligned}$$

Finalnie,

$$\begin{aligned} 2\int_0^\infty \frac{\log^2(t)}{t^2+a^2} - \frac{\pi^3}{2a} &= -\frac{\pi^3}{4a} + \frac{\pi}{a}\log^2(a) \\ \int_0^\infty \frac{\log^2(t)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{\pi^3}{8a} + \frac{\pi}{2a}\log^2(a) \end{aligned}$$

Na koniec zapowiedziane szacowania. Bierzemy $z = Re^{i\phi}$, $\phi \in [0,\pi]$

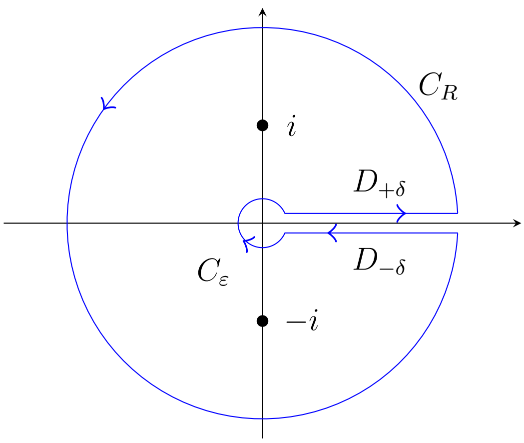
$$\begin{aligned} \left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{(\log R + i\phi)^2}{R^2 e^{2i\phi} + a^2} R e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi\right| \\ &\leq \frac{4R\log^2 R}{R^2 - a^2}\cdot \pi \xrightarrow{R\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Podobnie w drugim szacowaniu sprowadza się to do:

$$\varepsilon \log^2 \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Komentarz: de facto powinniśmy całkować trochę powyżej ujemnej osi x, a dopiero potem przejść granicznie do tej osi.

Zadanie 4/S6 Całka po dziurce od klucza. Całkujemy $f(z) = \exp(a \log z)/(z^2+1)^2$ dla $-1 < a < 3$. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a \, \mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi(1-a)}{4\cos\frac{\pi a}{2}}$.



Rysunek 2.8: Kontur Γ dziurka od klucza. $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$. Wówczas również $\delta \to 0$.

Tym razem mamy inne cięcie logarytmu, gdzie wycinamy $\mathbb{R}_+$. Wówczas, $z^a = e^{a \log z}$, gdzie $\log z = \log|z| + i \arg z$, dla $\arg z \in (0, 2\pi)$.
Tym razem bieguny (rzędu 2) mamy w i oraz $-i$.

$$\oint_\Gamma \frac{z^a \, \mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = 2\pi i [\mathrm{Res}_i f + \mathrm{Res}_{-i} f]$$

gdzie są to bieguny rzędu 2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_i f &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z-i)^n f(z) \bigg|_{z=i, n=2} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z^a}{(z+i)^2} \bigg|_{z=e^{i\pi/2}} = \frac{a z^{a-1}}{(z+i)^2} - \frac{2z^a}{(z+i)^3} \bigg|_{z=i} \\
&= \frac{a e^{i\pi/2(a-1)}}{(2i)^2} - 2\frac{e^{i\pi/2a}}{(2i)^3} = \frac{e^{i\pi a/2}}{(2i)^2}\left(-ia - \frac{2}{2i}\right) = \frac{e^{ia\frac{\pi}{2}}}{4} i(a-1) \\
&= \frac{i}{4} e^{ia\frac{\pi}{2}} (a-1) \\
\mathrm{Res}_{-i} f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z^a}{(z-i)^2} \bigg|_{z=-i} = \left[\frac{a z^{a-1}}{(z-i)^2} - 2\frac{z^a}{(z-i)^3}\right] \bigg|_{z=-i=e^{i3\pi/2}}
\end{aligned}$$

Uwaga, żeby nie wziąć fazy $-i\pi/2$, tylko taką zgodną z logarytmem tj. $3\pi i/2$.

$$= \frac{e^{ia\frac{3}{2}\pi}}{(-2i)^2} i(a-1)$$

Teraz analiza konturów. Zakładamy, że całki po okręgach się kasują, co potem pokażemy.

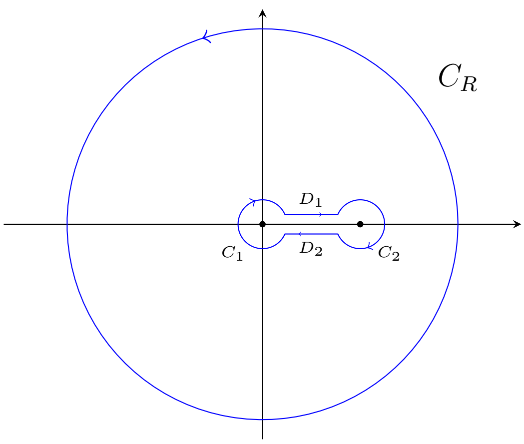
$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{(xe^{2\pi i})^a}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= (1-e^{2\pi i a})\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x}_{I} = 2\pi i\sum \operatorname{Res} f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= -\frac{\pi}{2}(a-1)\frac{e^{i\frac{\pi}{2}a}-e^{\frac{3}{2}i\pi a}}{1-e^{2\pi i a}}\\ &= -\frac{\pi}{2}(a-1)e^{i\pi a}\frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2}a}-e^{i\frac{\pi}{2}a}\right)}{e^{i\pi a}(e^{-i\pi a}-e^{i\pi a})}\\ &= -\frac{\pi}{2}(a-1)\frac{\sin\frac{\pi}{2}a}{\sin\pi a} = \frac{\pi}{4}(1-a)\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}a}\end{aligned}$$

Wynik jest dobry, zostało szacowanie całek po okręgach.

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_0^{2\pi}\frac{\left|\varepsilon^a e^{2i\phi a}\right|\left|\varepsilon e^{i\phi}i\right|\mathrm{d}\phi}{\left|\varepsilon^2e^{i\phi}+a^2\right|^2}\\ &\le \frac{\varepsilon^{a+1}}{(a^2-\varepsilon^2)^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \xrightarrow[a>-1]{\varepsilon\to 0} 0\\ \left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_0^{2\pi}\frac{R^{a+1}\,\mathrm{d}\phi}{\left|R^2e^{2i\phi}+a^2\right|^2}\\ &\le \int_0^{2\pi}\frac{R^{a+1}}{(R^2-a^2)^2}\,\mathrm{d}\phi = 2\pi\frac{R^{a+1}}{R^2-\alpha^2}\xrightarrow[a<3]{R\to\infty} 0\end{aligned}$$

Zadanie 5/S6 Całka po kości: $\int_0^1 \sqrt[3]{x(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$



Rysunek 2.9: Kontur kość $\Gamma = C_1(r)\cup C_2(r)\cup D_1(\varepsilon)\cup D_2(\varepsilon)\cup C_R$, gdzie $R\to\infty$, $r,\varepsilon\to 0$. Ta kość działa tak, że otacza zegarowo granice całkowania, tj. $z\in\{0,1\}$.

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}(1-x)\,\mathrm{d}x$$

Natomiast jest tam wieloznaczność, gdyż

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^{1/3} = e^{\frac{1}{3}\log\frac{z}{1-z}}$$
$$\log u = \log|u| + i\arg u, \quad u \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$$
$$\frac{z}{1-z}\big([0,1)\big) = [0,\infty)$$

W funkcji wykładniczej ważna jest faza. W zależności od tego czy będziemy podchodzili do wyciętego odcinka od dołu czy od góry, mamy różne fazy.

$$\begin{aligned}\frac{t+i\varepsilon}{1-t-i\varepsilon} &= \frac{t(1-t)-\varepsilon^2+i\varepsilon}{(1-t)^2+\varepsilon^2}\\ &= \frac{t(1-t)-\varepsilon^2}{(1-t)^2+\varepsilon^2} + i\frac{\varepsilon}{(1-t)^2+\varepsilon^2}\end{aligned}$$

Argument jest dodatni dla $\varepsilon \to 0^+$. Stąd faza tego wyrażenia jest bliska 0. Podobny rachunek pokazuje, że faza $(t-i\varepsilon)/(1-t+i\varepsilon)$ jest bliska 2π. Niech sama kość będzie określona jako epsilonowy kontur Γ_ε. Wówczas,

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}_\infty f = -\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Postulujemy, że przeżyją tylko całki po trzonach, a stawy zanikną.

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}(1-x)\,\mathrm{d}x - e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}(1-x)\,\mathrm{d}x\\ &= -2\pi i\,\mathrm{Res}_0\left[\left(\frac{1}{z-1}\right)^{1/3}\frac{z-1}{z^3}\right] = -2\pi i\,\mathrm{Res}_0\, g\end{aligned}$$

Uwaga! Prawa działania na potęgach nie działają w dziedzinie zespolonej, gdyż w ogólności $\log(ab) \neq \log a + \log b$ oraz $\log\frac{1}{a} \neq -\log a$. Te równości zachodzą pewnie tylko z dokładnością do czynnika $2k\pi i$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} &= e^{\alpha\log\frac{1}{z}} = e^{\alpha\left(\log\frac{1}{|z|}+i\arg\frac{1}{z}\right)}\\ &= e^{\alpha\left(\log\frac{1}{|z|}+i(2\pi-\arg z)\right)} = e^{2\pi i\alpha}e^{\alpha\left(\log\frac{1}{|z|}-i\arg z\right)}\\ &= e^{2\pi i\alpha}e^{-\alpha\left(\log|z|+i\arg z\right)} = e^{2\pi i\alpha}z^{-\alpha}\end{aligned}$$

Stąd wniosek, że:

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{1}{z^3}(z-1)(z-1)^{-1/3}e^{\frac{2\pi i}{3}}\\ &= \frac{1}{z^3}e^{\log(z-1)}e^{-\frac{1}{3}\log(z-1)}e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{z^3}e^{\frac{2}{3}\log(z-1)}e^{\frac{2\pi i}{3}}\\ &= \frac{1}{z^3}e^{\frac{2\pi i}{3}}(z-1)^{2/3}\end{aligned}$$

Finalnie, mamy biegun rzędu 3 w zerze, zatem

$$\operatorname{Res}_0 g = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z-1)^{2/3}e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{9}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

I w granicy,

$$\begin{aligned}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}(1-x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi i}{9}e^{-\frac{2\pi i}{3}}\\ \int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}(1-x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2\pi i}{9}\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{-\frac{i\pi}{3}}}\\ &= \frac{\pi}{9}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\end{aligned}$$

Zostaje jeszcze szacowanie całek po małych okręgach. Dla pierwszego, $x=\varepsilon e^{i\phi}$, $\phi\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{\varepsilon e^{i\phi}}{1-\varepsilon e^{i\phi}}\right)^{1/3}\left(1-\varepsilon e^{i\phi}\right)\varepsilon e^{i\phi}i\,\mathrm{d}\phi\right| &\le \int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^{1/3}}{1-\varepsilon}(1+\varepsilon)\varepsilon\,\mathrm{d}\phi\\ &= \varepsilon^{4/3}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}2\pi \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0\end{aligned}$$

Podobnie w przypadku drugiego okręgu.

Wykład 13: Ćwiczenia 13

30 lis 2020

Zadanie 1(iii)/S7 Używając pojęcia $\operatorname{Res}(f,\infty)$ wyznaczyć wartość całek konturowych dla $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^{10}-2)}$, $\Gamma = C(0,2)$.

Standardowo,

$$I=\oint_\Gamma\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,0)+\sum_{k=0}^{9}\operatorname{Res}\left(f,\ \sqrt[10]{2}e^{\frac{2k\pi i}{10}}\right)\right]$$

W zerze mamy pierwiastek rzędu 3, a pozostałe pierwiastki są biegunami prostymi. Ewidentnie jest to dosyć trudne, ale da się prościej podchodząc do tej całki z przeciwnej strony.

$$\begin{aligned}I = -2\pi i\operatorname{Res}(f,\infty) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)\\ &= 2\pi i\operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{z^2}\frac{z^3}{\left(\frac{1}{z^{10}}-2\right)}\right) = 2\pi i\operatorname{Res}_0\left(\frac{z^{11}}{1-2z^{10}}\right) = 0\end{aligned}$$

Stąd, bezwysiłkowo pokazaliśmy, że:

$$\oint_\Gamma\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10}-2)} = 0$$

Zadanie 1(ii)/S7 Używając pojęcia $\operatorname{Res}(f,\infty)$ wyznaczyć wartość całek konturowych dla $f(z) = z\cos\dfrac{z}{z+1}$, $\Gamma = C(0,2)$.

Zauważmy, że w punkcie $z=-1$ mamy punkt istotnie osobliwy.

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma z\cos\frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z &= -2\pi i\operatorname{Res}(f,\infty) = 2\pi i\operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right)\\ &= 2\pi i\operatorname{Res}_0\left(\frac{1}{z^3}\cos\frac{1}{1+z}\right)\\ &= 2\pi i\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\cos\frac{1}{z+1}\bigg|_{z=0} = -\pi i(\cos 1 + 2\sin 1)\end{aligned}$$

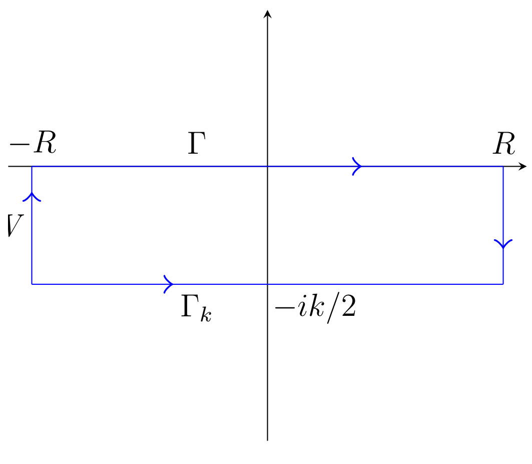
Zadanie ∼4/S7 Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = e^{-x^2}$, $k\in\mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{ik}{2}\right)^2}e^{-\frac{k^2}{4}}\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{k^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{ik}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Teraz odbywa się taka niby zamiana zmiennych, którą zaraz uzasadnimy: $\tilde{x} = x - \frac{ik}{2}$,

$$= e^{-\frac{k^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}e^{-\frac{k^2}{4}}$$

Funkcja $f(z) = e^{-z^2}$ jest holomorficzna na całym $\mathbb{C}$. Możemy więc sobie wziąć dowolny kontur pozwalający na udowodnienie równości tych całek wobec przesunięć.



Rysunek 2.10: Kontur prostokąt. $R\to\infty$

Rozpisujemy poszczególne całki na tym konturze.

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_k} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{ik}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Ponadto, całki po pionowych odcinkach zanikają w nieskończoności,

$$z = -R - (1-t)\frac{ik}{2},\ t \in [0,1]$$

$$\begin{aligned}\left|\int_W e^{-z^2}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^1 \exp\left[-\left(R - (1-t)\frac{ik}{2}\right)^2\right]\frac{ik}{2}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^1 \left|e^{-R^2}e^{R(1-t)ik}e^{(1-t)^2\frac{k^2}{2}}\right|\left|\frac{ik}{2}\right|\mathrm{d}t \\ &= e^{-R^2}\int_0^1 \frac{k}{2}e^{(1-t)^2\frac{k^2}{2}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{R\to\infty} 0\end{aligned}$$

Podobnie po drugim brzegu. Ponieważ $f(z)$ jest holomorficzna na $\mathbb{C}$, to:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{ik}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Wykład 14: Ćwiczenia 14

03 gru 2020

Zadanie 3(i)/S7 Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna funkcja f holomorficzna na $\mathbb{C}\setminus\{2,i\}$ o biegunie pierwszego rzędu w $z=i$ i biegunie drugiego rzędu w $z=2$ i taka, że $\lim\limits_{z\to\infty} z^2 f(z) = 1$ oraz $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi$ dla $\gamma = \big\{(1+i)t\colon t\in\mathbb{R}\big\}$.

Przypominamy sobie twierdzenie Liouville'a. $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ jest analityczna i ograniczona to f jest stała. Nasza funkcja musi mieć postać:

$$f = \frac{az^2+bz+c}{(z-i)(z-2)^2} + h(z)$$

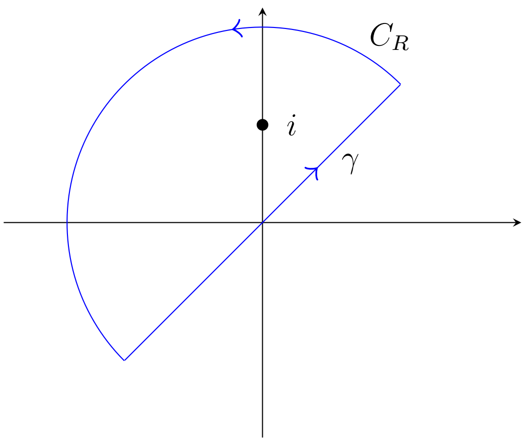
gdzie $h(z)$ jest całkowita (tj. holomorficzna na całym $\mathbb{C}$ – rozwija się w szereg Taylora). Skoro $h(z)$ znika w ∞ i jest całkowita, to musi być stała z tw. Liouville'a. Stąd, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Szukamy a,b,c.

$$z^2 f(z) \xrightarrow{z\to\infty} 1 \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 1\end{cases}$$

gdyż takie a,b wyznaczają oczekiwaną asymptotykę.

$$f(z) = \frac{z+c}{(z-i)(z-2)^2}$$

Musimy jeszcze wykorzystać całkowy warunek. Trzeba scałkować po takiej całej prostej γ. Domkniemy ją półokręgiem zawierającym $z=i$.



Rysunek 2.11: Kontur półokrąg. $R \to \infty$

W granicy w nieskończoności ta całka po łuku zanika, gdyż mianownik jest o dwa rzędy większy od licznika. Stąd,

$$\begin{aligned}
2\pi i \operatorname{Res}_i f &= 2\pi \\
\operatorname{Res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{z+c}{(z-2)^2} = \frac{c+i}{3-2i} \\
c+i &= -i(3-4i) = -3i-4 \\
c &= -4i-4
\end{aligned}$$

Finalnie, szukana funkcja ma postać:

$$f(z) = \frac{z-4-4i}{(z-i)(z-2)^2}$$

Zadanie 2(ii)/S7 Całkując po kości policzyć $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}$, $n \geq 1$

Po kości dobrze całkuje się wyrażenia postaci:

$$\int R(x) \sqrt[n]{\frac{ax-b}{cx-d}}\, \mathrm{d}x$$

Musimy trochę przekształcić naszą całkę.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{2n-1} \sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{matrix} \right| \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-1} \sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Niech funkcja podcałkowa w dziedzinie zespolonej to f. Wewnątrz kości nie ma żadnych osobliwości, zatem

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \operatorname{Res}_\infty f = -2\pi i \operatorname{Res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} \\
\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{z^{n-1}} \sqrt[3]{\frac{1/z}{1-1/z}} = \frac{1}{z^{n+1}} \sqrt[3]{\frac{1}{z-1}}
\end{aligned}$$

Jak oblicza się taki pierwiastek?

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{1}{u}} &= e^{\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{u}\right)} = e^{\frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{|u|}+i\arg\frac{1}{u}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{3}\left(-\log|u|-i\arg u+2\pi i\right)} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{3}}e^{-\frac{1}{3}\left(\log|u|+i\arg u\right)} = e^{\frac{2\pi i}{3}}u^{-\frac{1}{3}} \\
\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^{n+1}}e^{\frac{2\pi i}{3}}(z-1)^{-1/3} \\
\mathrm{Res}_0\,\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) &= e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(z-1)^{-1/3}\bigg|_{z=0} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\cdots\left(-\frac{(3n-2)}{3}\right)(-1)^{n-\frac{1}{3}} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{3}}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\dots\cdot3n}(-1)^n e^{\frac{i\pi}{3}} \\
\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= -e^{\frac{\pi i}{3}}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\dots\cdot3n}(-1)^n 2\pi i \\
&= \int_0^1 t^{n-1}\sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t - e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^1 t^{n-1}\sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t \\
\int_0^1 t^{n-1}\sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t &= -2\pi i\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\dots\cdot3n} \\
&= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\dots\cdot3n} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\dots\cdot3n}
\end{aligned}
$$

No i ta dwójka się skraca, bo ona pojawiła się przy tych wszystkich podstawieniach. Także udało się!

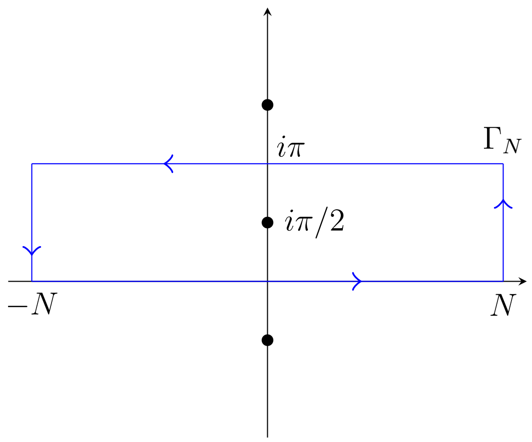
$$
\int_0^1 \mathrm{d}x\,x^{2n}\frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdot\dots\cdot3n}
$$

Należałoby jeszcze sprawdzić, że całki po małych okręgach znikają gdy $\varepsilon\to0$.

Zadanie 4(i)/S7 Transformata Fouriera funkcji $\dfrac{1}{\cosh x}$.

Trzeba po prostu obliczyć całkę:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\cosh x}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x
$$



Rysunek 2.12: Kontur prostokąt. $R \to \infty$

Całkujemy po prostokącie, biegunem rzędu 1 jest $z = \frac{i\pi}{2}$, gdyż

$$\lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \frac{z - i\pi/2}{\cosh z} = \frac{1}{\sinh \frac{i\pi}{2}} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}} = -i$$

Liczymy całkę po prostokącie o boku $2N$.

$$\oint_{\Gamma_N} \frac{e^{-ikz}}{\cosh z} \,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_{i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ikz}}{\cosh z} = 2\pi e^{-ik\frac{i\pi}{2}}$$
$$= 2\pi e^{k\frac{\pi}{2}}$$

Sprawdzamy w rozumku, że całki po $\gamma_1 = \{N + i\pi t \colon t \in [0,1]\}$ i $\gamma_2 = \{-N + i\pi t \colon t \in [0,1]\}$ zanikają w ∞. I w związku z tym,

$$\lim_{N\to\infty} \oint_{\Gamma_N} \frac{e^{-ikz}}{\cosh z} \,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{\cosh x} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}$$
$$\cosh(x+i\pi) = \frac{e^{x+i\pi} + e^{-x-i\pi}}{2} = -\cosh x$$
$$\lim_{N\to\infty} \oint_{\Gamma_N} \frac{e^{-ikz}}{\cosh z} \,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{\cosh x} \,\mathrm{d}x + e^{k\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik\pi}}{\cosh x} \,\mathrm{d}x = 2\pi e^{k\frac{\pi}{2}}$$

Stąd,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{\cosh x} \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi e^{k\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{k\pi}} = \frac{\pi}{\cosh \frac{k\pi}{2}}$$

Widzimy, że transformata Fouriera z $1/\cosh x$ jest przeskalowaniem tej funkcji. Oszacujmy jeszcze te zanikające całki.

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{e^{ikz}}{\cosh z} \,\mathrm{d}z \right| \le \int_0^1 \left| \frac{e^{ik(N+it\pi)}}{\cosh(N+it\pi)} \right| \mathrm{d}t$$
$$\left|\cosh(N+it\pi)\right| = \left| \frac{e^N e^{it\pi} + e^{-N} e^{it\pi}}{2} \right| \ge \frac{e^N - e^{-N}}{2}$$
$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{e^{ikz}}{\cosh z} \,\mathrm{d}z \right| \le \int_0^1 2 \frac{e^{-k+\pi}}{e^N - e^{-N}} \,\mathrm{d}t \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Zadanie 5(i)/S7 Udowodnij tożsamość $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tanh \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$

Wniosek 5. Niech f meromorficzna na $\mathbb{C}$ taka, że $zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$ i mająca skończoną liczbę punktów osobliwych $\{a_1, \ldots, a_l\} \cap \mathbb{R} = \varnothing$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(n) = -\sum_{i=1}^{l} \operatorname{Res}_{a_i} \pi \cot(\pi z) f(z)$$

Dowód. Całkujemy funkcję $f(z)\pi\cot(\pi z)$ po konturze Q_N, gdzie Q_N jest kwadratem o wierzchołkach w punktach $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$.

Zauważmy, że istnieje $M > 0$ takie, że $\sup_{z\in Q_n} \left|\pi\cot(\pi z)\right| < M$ dla wszystkich N.

$$\left|\int_{Q_N} f(z)\pi\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Rzeczywiście, na przykład można to oszacować tak:

$$\left|\int_{\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i)}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)(1-i)} f(z)\pi\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z\right| =$$

gdzie $z = \left(N+\frac{1}{2}\right)\big((-1-i) + t(1-i-(-1-i))\big) = \left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t)$,

$$= \left|\int_0^1 f\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t)\right)\pi\cot\left(\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t)\right)\left(N+\frac{1}{2}\right)2\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\le M\int_0^1 \left|f\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t)\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)\right| 2\,\mathrm{d}t \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Teraz, stąd

$$0 \leftarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{Q_n} \cdots = \sum_{z\in Q_N} \operatorname{Res}\big(f(z)\pi\cot(\pi z), z\big)$$

$$\operatorname{Res}\big(f(z)\pi\cot(\pi z), n\big) = f(n)\pi\cos(\pi z)\frac{z-n}{\sin(\pi z)} \to f(n)$$

$$0 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} f(n) + \sum_j \operatorname{Res}_{a_j}\big(f(z)\pi\cot(\pi z)\big)$$

Teraz jedziemy z szacowaniem. Czy $\left|\pi\cot(\pi z)\right| < M$ dla $z \in \left[(N+1/2)(-1-i), (N+1/2)(1-i)\right]$.

$$\begin{aligned}
z &= \left(N+\frac{1}{2}\right)\Big(-1-i+t\big(1-i-(-1-i)\big)\Big), \quad t\in[0,1] \\
&= \left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t) \\
\left|\pi\cot(\pi z)\right| &= \pi\left|\frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)}+e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)}}{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)}+e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)}}\right| \\
&\le \frac{2\pi e^{\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\left(N+\frac{1}{2}\right)}-e^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}} \le \frac{2\pi e^{N+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}e^{N+\frac{1}{2}}} = 4\pi
\end{aligned}$$

A 4π nie zależy od N. Na tej samej zasadzie można sobie poradzić z drugą krawędzią. . .

■

W naszym zadanku, $zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1} &= -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2+z+1}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2+z+1}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi\cot(\pi z_1)}{z_1-z_2} - \frac{\pi\cot(\pi z_2)}{z_2-z_1} \\
&= -\frac{\pi}{z_1-z_2}\big(\cot(\pi z_1)-\cot(\pi z_2)\big) \\
z_1 - z_2 &= -i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Teraz policzmy to wyrażenie dla jednego pierwiastka.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{z_1-z_2}\cot(\pi z_1) &= \frac{\pi}{z_1-z_2}\frac{\cos(\pi z_1)}{\sin(\pi z_1)} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{e^{i\pi z_1}+e^{-i\pi z_1}}{e^{i\pi z_1}-e^{-i\pi z_1}} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{e^{i\pi\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}+e^{-i\pi\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{e^{i\pi\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}-e^{-i\pi\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{-ie^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+ie^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{ie^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}+ie^{\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}}} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sinh\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}{\cosh\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\tanh\frac{\pi\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Stąd już widać, że po cierpliwym wyliczeniu tego samego dla z_2 dostaniemy poprawny wynik.

Wykład 15: Ćwiczenia 15

07 gru 2020

Zadanie 6/S7 Wykaż, że wszystkie zera wielomianu $t^5-t+16 \in \mathbb{C}[t]$ leżą w pierścieniu $\mathcal{R}(0,1,2)$, a nadto, że dokładnie dwa z nich mają dodatnią część rzeczywistą.

Twierdzenie 2 (Rouche)**.** K – zwarty $\subset \mathbb{C}$ z brzegiem ∂K.
Rozważamy $f, g\colon K \supset O \to \mathbb{C}$ holomorficzne i $|g|_{\partial K} < |f|_{\partial K}$.
Wówczas liczby zer f i $f+g$ we wnętrzu K są równe, licząc z krotnościami.

Interesują nas zera wielomianu $z^5 - z + 16 \in \mathcal{R}(0,1,2)$. Musimy spojrzeć na brzegi tego pierścienia. Na $C(0,2)$,

$$\left|g(z)\right| = |-z+16| < |z|^5 = \left|f(z)\right|$$

Z twierdzenia Rouche, liczba pierwiastków wielomianu z^5 w $K(0,2)$ (we wnętrzu obszaru zwartego, tj. w niedomkniętym kole) jest równa liczbie pierwiastków wielomianu $z^5 - z + 16$ w $K(0,2)$.
Wniosek: wszystkie zera wielomianu $z^5 - z + 16$ są w $K(0,2)$, gdyż wszystkie zera z^5 były w tym zbiorze, a badany wielomian jest tego samego stopnia.

Z drugiej strony, na „wewnętrznym" brzegu pierścienia, $C(0,1)$ mamy:

$$|-z+16| > 15 > |z|^5 = 1$$

Z twierdzenia Rouche, wielomiany $-z + 16$ i $z^5 - z + 16$ mają tyle samo zer w $K(0,1)$. Ale $-z + 16$ nie ma tam ani jednego zera, zatem $z^5 - z + 16$ również nie ma tam zer. Stąd wniosek, że $z^5 - z + 16$ ma pierwiastki tylko w $\mathcal{R}(0,1,2)$.

Twierdzenie 3 (Liczba zer − biegunów funkcji meromorficznej)**.** Niech $h\colon O \to \mathbb{C}$ będzie funkcją meromorficzną oraz $\Gamma \subset O$ będzie zwartym obszarem z brzegiem. Przez N_z oznaczamy liczbę zer, a przez N_b liczbę biegunów wewnątrz Γ (licząc z krotnościami). Wówczas,

$$N_z - N_b = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \frac{h'(z)}{h(z)}\,\mathrm{d}z$$

Zauważmy co można powiedzieć o funkcji, która nie jest osobliwa na Γ. Udowodnijmy twierdzenie Rouche.

Dowód.

$$N_z(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$
$$N_z(f+g) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \frac{f'+g'}{f+g}\,\mathrm{d}z$$

Ponieważ $|g| < |f|$ na brzegu, zatem nie ma problemu z zerowaniem się tam tego. Ponadto,

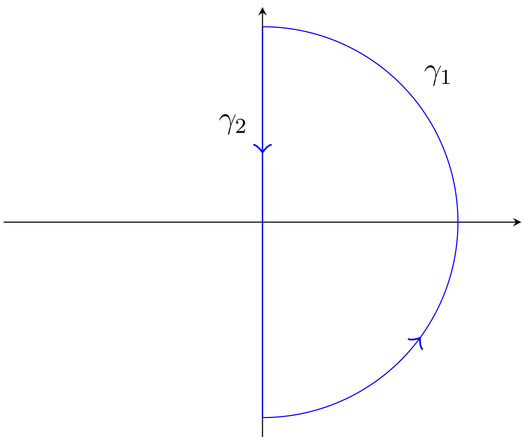
$$[0,1] \ni s \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \frac{f'+sg'}{f+sg}\,\mathrm{d}z = N_z(f+sg)$$

Tak zdefiniowana funkcja parametru s jest ciągła gdyż funkcja podcałkowa jest ciągła i całkujemy po zbiorze zwartym, i przyjmuje wartości w $\mathbb{Z}$, zatem $N_z(f+sg)$ nie zależy od s. Stąd, w szczególności

$$N_z(f) = N_z(f+g)$$

A to jest dokładnie treść twierdzenia Rouche. ∎

Przez N_z^+ oznaczamy liczbę zer o $\operatorname{Re} z_0 > 0$. Używamy twierdzenia z wykładu o różnicy liczby zer i biegunów. Będziemy całkowali następujący kontur:



Rysunek 2.13: Kontur Γ_R półokrąg. $R \to \infty$

Dla naszej funkcji wielomianowej: $f(z) = z^5 - z + 16$,

$$N_2^+ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{5z^4 - 1}{z^5 - z + 16} \, \mathrm{d}z \stackrel{?}{=} 2$$

$$\gamma_1 = \left\{ Re^{i\phi} \colon \phi \in \left[-\pi/2, \pi/2 \right] \right\}$$

Nie jest łatwo wyliczyć tę całkę, ale łatwo zbadać jej asymptotykę.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{5z^4 - 1}{z^5 - z + 16} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(5R^4 e^{4i\phi} - 1) Re^{i\phi} i \, \mathrm{d}\phi}{R^5 e^{5i\phi} - Re^{i\phi} + 16}$$

$$\xrightarrow{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5i \, \mathrm{d}\phi = \frac{5}{2}$$

Teraz jeszcze drugi kontur:

$$\gamma_2 = \left\{ -iRt \colon t \in [-1, 1] \right\}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{5z^4 - 1}{z^5 - z + 16} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{(5R^4 t^4 - 1)(-iR)}{16 - iRt(R^4 t^4 - 1)} \, \mathrm{d}t = (*)$$

$$Rt(R^4 t^4 - 1) = Rt(Rt - 1)(Rt + 1)(R^2 t^2 + 1)$$

Co prawda, nie jest to odwzorowanie różnowartościowe ale dodając jeszcze fakt, że idziemy po jakiejś drodze na płaszczyźnie zespolonej, tj. idziemy krzywą, cofamy się po niej, potem znów idziemy przed siebie powoduje, że to co przeszliśmy dwa razy kasuje się. Znajdujemy się cały czas po prawej stornie zera, nie obiegamy go. Efektywnie możemy więc napisać, że:

$$2\pi i (*) = \int_{16 + iR(R^4 - 1)}^{16 - iR(R^4 - 1)} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Decydujemy się na logarytm z wyciętą osią $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} &= \log(16 - iR(R^4 - 1)) - \log(16 + iR(R^4 - 1)) \\ &= i \arg(16 - iR(R^4 - 1)) - i \arg(16 + iR(R^4 - 1)) \\ &\xrightarrow{R \to \infty} -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} = -i\pi \end{aligned}$$

Stąd,

$$N_z^+ = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

To dowodzi, że rzeczywiście nasz wielomian ma dokładnie dwa pierwiastki o dodatnich częściach rzeczywistych.

Wykład 16: Ćwiczenia 16

10 gru 2020

Zadanie Wykazać, że $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$: $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

Wzór:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum \operatorname{Res}_{a_i}\big(f(z)\pi\cot(\pi z)\big)$$

gdzie a_i są osobliwościami f i zakłada się, że $a_i \notin \mathbb{Z}$, $zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$.
Niech z ustalone i $z \notin \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{(\xi - z)^2} \\ \xi f(\xi) &\xrightarrow{\xi\to\infty} 0 \end{aligned}$$

z jest biegunem rzędu 2.

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(z-n)^2} &= -\operatorname{Res}_z\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{(\zeta - z)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\pi\cot(\pi z))\Big|_{\xi=z} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \end{aligned}$$

Rozumowanie to można przeprowadzić jeszcze w inny sposób.
Szereg funkcyjny $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, ponieważ można go zapisać w takiej postaci:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(1 - \frac{z}{n}\right)^2}$$

jeśli $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ jest zwarty,

$$\inf_{z\in K}\left|1 - \frac{z}{n}\right| = \sigma_n \to 1$$

Dla dostatecznie dużych n,

$$\left|1 - \frac{z}{n}\right| \geq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1}{n^2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{n}\right)^2}\right| \leq \frac{4}{n^2}$$

Na mocy kryterium Weierstrassa, nasz szereg jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie. W szczególności, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ jest funkcją holomorficzną.

Bieguny $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ i $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} \in \mathbb{Z}$ oraz

$$\lim_{z\to n}\left[\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{(z-n)^2}\right] = \frac{\pi^2}{6}$$

Stąd różnica tych funkcji jest funkcją całkowitą. Jeśli udowodnimy, że funkcja $f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ jest ograniczona to jako całkowita musi być stała. Biorąc granicę $z = it \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ przekonujemy się, że stała jest zerowa.

W pasku $\operatorname{Im} z \leq 1$ i z uwagi na 1-okresowość funkcji $f(z)$ jest ona ograniczona. W pasie $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ badamy ograniczoność dla $0 < \operatorname{Re} z < 1$. $z = x + iy$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|n-z|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2+y^2} \leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2} < \infty$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi(x+iy)} - e^{-i\pi(x+iy)}\right)}$$

Korzystając z $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$,

$$\leq \frac{\pi^2}{\frac{1}{2}\sinh^2|y|} \xrightarrow{y\to\infty} 0$$

Funkcje ograniczone muszą być stałe i z asymptotyki $f(z)$ musi być równa 0 (tw. Liouville'a).

Zadanie Funkcje Bessela.

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\xi^n$$

gdzie $J_n(z)$ nazywamy funkcjami Bessela. Są to współczynniki przy rozwinięciu funkcji z lewej strony w szereg Laurent w $\xi = 0$. Wyprowadzimy wzory całkowe na funkcje Bessela.

Współczynniki w rozwinięciu wyrażają się całkami z wykładu:

$$
\begin{aligned}
J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\frac{1}{2}z\left(\xi-\xi^{-1}\right)}}{\xi^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \left|\xi = e^{i\phi},\, \phi\in[-\pi,\pi]\right| \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\frac{1}{2}z\left(e^{i\phi}-e^{-i\phi}\right)}}{e^{(n+1)i\phi}}e^{i\phi}i\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\phi-n\phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\sin\phi-n\phi)\,\mathrm{d}\phi}_{\text{parzysta}}+\frac{i}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(zsin\phi-n\phi)\,\mathrm{d}\phi}_{\text{nieparzysta}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(z\sin\phi-n\phi)\,\mathrm{d}\phi = J_n(z)
\end{aligned}
$$

Rozdział 3

Teoria miary

Wykład 17: Ćwiczenia 17

14 gru 2020

Definicja 4 (Pierścień)**.** Pierścieniem (zbiorów) nazywamy niepustą klasę $\mathcal{R} \subset 2^X$ taką, że jeśli $A, B \in \mathcal{R}$ to $A \cup B \in \mathcal{R}, A \setminus B \in \mathcal{R}$.
Zauważmy, z definicji tej wynika, że $A \setminus A = \varnothing \in \mathcal{R}$.

Definicja 5 (Algebra)**.** Algebrą (zbiorów) nazywamy niepustą klasę $\mathcal{P} \subset 2^X$ taką, że jeśli $A, B \in \mathcal{R}$ to $A \cup B \in \mathcal{P}, A' \in \mathcal{P}$ oraz $\varnothing \in \mathcal{P}$ (lub równoważnie $X \in \mathcal{P}$).

Zadanie 0/S8

1. Wykazać, że każda algebra jest pierścieniem oraz, że pierścień $\mathcal{R}$ taki, że $X \in \mathcal{R}$ jest algebrą.

   Jeśli $\mathcal{P}$ jest algebrą, to jest zamknięta na przecięcia, tj. $A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$. Wystarczy bowiem pokazać, że $X \setminus (A \cap B) \in \mathcal{P}$. Prawo de Morgana mówi, że $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ i oba należą do algebry, zatem suma należy do algebry. Stąd $X \setminus (X \setminus (A \cap B)) = A \cap B \in \mathcal{P}$.
   Chcemy pokazać, że algebra jest pierścieniem. Czy jeśli $A, B \in \mathcal{P} \implies A \setminus B \in \mathcal{P}$? Otóż $A \setminus B = A \cap B' \in \mathcal{P}$.

   Teraz druga implikacja: jeśli $X \in \mathcal{R}$ to $\mathcal{R}$ jest algebrą (zbiorów). Oczywiście $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$. Jeśli $B \in \mathcal{R} \implies B' = X \setminus B \in \mathcal{R}$, bo $X \in \mathcal{R}$. Koniec.

   Uwaga: można sprawdzić, że jeśli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem podzbiorów X, to $(\mathcal{R}, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem w sensie algebry, gdzie $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$, natomiast $A \odot B = A \cap B$.
   Zauważmy, że $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{R}$ oraz $A \cap B = A \setminus (A \triangle B) \in \mathcal{R}$.

2. Niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem oraz $\mathcal{P}$ jest klasą tych podzbiorów $A \subset X$, że $A \in \mathcal{R}$ lub $X \setminus A \in \mathcal{R}$. Wykazać, że $\mathcal{P}$ jest algebrą.

Bierzemy $A, B \in \mathcal{P} \implies A', B' \in \mathcal{P}$. Pytanie czy $A \cup B \in \mathcal{P}$? Są możliwe różne sytuacje.
Jeśli $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{P}$.
Jeśli $A \in \mathcal{R}$ i $B' \in \mathcal{R} \implies B' \setminus A \in \mathcal{R}$ ale również $B' \cap A' \in \mathcal{R} \implies B' \cap A' \in \mathcal{P} \implies (B' \cap A')' \in \mathcal{P}$. Stąd, z prawa de Morgana $B \cup A \in \mathcal{P}$.
Jeśli $A' \in \mathcal{R}$ i $B' \in \mathcal{R} \implies A' \cap B' \in \mathcal{R} \implies (A' \cap B')' \in \mathcal{P} \implies A'' \cup B'' = A \cup B \in \mathcal{P}$.

3. Niech $\mathcal{E}$ będzie klasą przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$. Czy $\mathcal{E}$ jest pierścieniem?

   $A, B \in \mathcal{E} \implies A, B$ są przeliczalne, zatem $A \cup B$ jest przeliczalny, zatem $A \cup B \in \mathcal{E}$. Podobnie $A \setminus B \subset A$, zatem $A \setminus B$ jest przeliczalny. Stąd $\mathcal{E}$ jest pierścieniem. Oczywiście nie jest algebrą, gdyż cały zbiór $X = \mathbb{R}$ nie jest przeliczalny, a $\mathbb{R} \in \mathcal{P}$.

4. Niech $\mathcal{F} = \{A - \text{przeliczalny lub } A' - \text{przeliczalny}\}$. Widzimy, że $\mathcal{F}$ jest algebrą (z definicji). A każda algebra jest pierścieniem.

5. Dla jakich przestrzeni topologicznych klasa zbiorów otwartych tworzy pierścień? Równoważnie można spytać kiedy topologia tworzy algebrę. Otóż wszystkie zbiory muszą być otwarte i domknięte (przykładowo może to być topologia dyskretna, ale są też inne).

Definicja 6 (σ-algebra zbiorów)**.** $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P} \implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{P}$ oraz $A' \in \mathcal{P}$.

Zadanie 1/S8

1. Dana jest rodzina $\mathcal{P}$ podzbiorów zbioru X taka, że $X \in \mathcal{P}$ oraz $A, B \in \mathcal{P} \implies A \setminus B \in \mathcal{P}$. Wykazać, że $\mathcal{P}$ jest algebrą podzbiorów zbioru X.

   Prawa de Morgana ad mortem defecatam. $A \cup B = X \setminus (A' \cap B') = X \setminus (A' \setminus B) = X \setminus ((X \setminus A) \setminus B)$. Każdy z kolejnych nawiasów należy do $\mathcal{P}$ (rozplątujemy od środka ciąg zawierań).

2. Dana jest σ-algebra $\mathcal{P}$ podzbiorów zbioru X oraz podzbiór $Y \subset X$. Wykazać, że rodzina $\{A \cap Y \colon A \in \mathcal{P}\}$ jest σ-algebrą podzbiorów Y.

   Bierzemy $Y \subset X$. Bierzemy wszystkie przecięcia z elementami σ-algebry i pytamy czy to jest σ-algebra podzbiorów Y. Niech $B_i \in \{A \cap Y \colon A \in \mathcal{P},\ i \in \mathbb{N}\}$. Bierzemy sumę $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y \cap A_i = Y \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \{Y \cap A \colon A \in \mathcal{P}\}$. Co z dopełnieniem? $B = Y \cap A$, $B' = Y \setminus (Y \cap A) = Y \cap (X \setminus A) \in \{Y \cap A \colon A \in \mathcal{P}\}$.
   Stąd wniosek, że σ-algebry można obcinać i dostawać σ-algebry.

3. Dana jest algebra $\mathcal{P}$ podzbiorów X taka, że dla każdego rosnącego ciągu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ mamy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$. Wykazać, że $\mathcal{P}$ jest σ-algebrą.

   Przypuśćmy, że $A_i \in \mathcal{P}$ i $i \in \mathbb{N}$. Czy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}$? Rozważmy $B_i = A_1 \cup \cdots \cup A_i \in \mathcal{P}$. Oczywiście $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_i \subset \cdots$. Stąd $\mathcal{P} \ni \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

Zadanie 2/S8 Niech $(\mathcal{P}_n \colon n \in \mathbb{N})$ będzie rodziną algebr podzbiorów X taką, że jeśli $Y \in \mathcal{P}_n$, to $Y \in \mathcal{P}_{n+1}$. Wykazać, że rodzina $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ jest algebrą podzbiorów zbioru X. Podać przykład, gdzie $\mathcal{P}_n$ są σ-algebrami, $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$, ale suma nie jest σ-algebrą.

Wiemy, że $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$, a $\mathcal{P}$ jest ich sumą. Bierzemy $A, B \in \mathcal{P} \implies \exists_{m\leq n} \colon A \in \mathcal{P}_n, B \in \mathcal{P}_m$. Ponadto $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_n \implies A \in \mathcal{P}_n, B \in \mathcal{P}_n \implies A \cup B \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$.
Trzeba jeszcze pokazać, że dopełnienie nas nie wyprowadza. $A \in \mathcal{P} \implies \exists_n \colon A \in \mathcal{P}_n \implies X \setminus A \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$. Stąd, $\mathcal{P}$ jest algebrą.

Kontrprzykład na to, że suma σ-algebr nie musi być σ-algebrą. Niech $X = [0,1]$, $\mathcal{P}_1 = \big\{\varnothing, [0,1], [0,1), \{1\}\big\}$, $\mathcal{P}_2 = \left\langle \left\{ Y \in \mathcal{P}_1 \colon \big[0, 1/2\big], \big(1/2, 1\big] \right\} \right\rangle$ jest najmniejszą σ-algebrą zawierającą ten zbiór w środku $\{\}$. Oczywiście $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Jak skonstruujemy indukcyjnie $\mathcal{P}_{k-1}$, to $\mathcal{P}_k = \left\langle \left\{ Y \in \mathcal{P}_{k-1} \colon \big[0, \frac{1}{k}\big], \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right] \right\} \right\rangle$. Jedyny singlet w ten sposób powstający to $\{1\}$.
Mamy indukcyjnie skonstruowaną rodzinę σ-algebr $\mathcal{P}_n \colon \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ i jedynym singletem w $\mathcal{P}_n$ jest $\{1\}$. Ponadto, $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right] \subset \mathcal{P}_k$.

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right] = (0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \colon \quad A_k \in \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$$

Zauważmy, że $(0,1] \notin \mathcal{P}$. Gdyby należało, że $[0,1] \setminus (0,1] = \{0\} \in \mathcal{P}$. Sprzeczność.

Wykład 18: Ćwiczenia 18

17 gru 2020

Zadanie 3/S8 Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną podzbiorów X spełniających $Y \in \mathcal{P} \iff Y$ skończony lub $X \setminus Y$ skończony. Wykazać, że $\mathcal{P}$ jest algebrą. Wykazać, że $\mathcal{P}$ jest σ-algebrą $\iff X$ jest skończony.

Na poprzednich ćwiczeniach pokazaliśmy, że $\mathcal{P} - \big\{A \subset X \colon A \in \mathcal{R},\ X \setminus A \in \mathcal{R}\big\}$ jest algebrą. Tym razem, czy $\mathcal{R} = \{A \subset X \colon A -$ skończony$\}$ jest pierścieniem? Jest, bo $A \cup B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$. Stąd $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ jest algebrą pochodzącą od $\mathcal{R}$.

Uwaga: $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ jest najmniejszą algebrą zawierającą pierścień $\mathcal{R}$. Jeśli E jest klasą podzbiorów zbioru X to $\mathcal{R}(E)$ nazywamy najmniejszy pierścień zawierający E oraz $\mathcal{A}(E)$ jest najmniejszą algebrą zawierającą E.

Dlaczego $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$? $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \implies \mathcal{P}_{\mathcal{R}\subset\mathcal{A}}$. $\mathcal{A} \in \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ to $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Wobec tego $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{A}$. Innymi słowy $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ jest najmniejszą algebrą zawierającą $\mathcal{R}$.

Definicja 7. Miara too funkcja $\mu \colon \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, gdzie $\mu(A) = 0$ dla A skończonego i $\mu(A) = 1$ dla A koskończonego.
μ jest funkcją addytywną. $A, B \in \mathcal{P} \colon A \cap B = \varnothing \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ oraz $\mu(\varnothing) = 0$.

1. Jeśli A, B skończone to $A \cup B$ skończone, wówczas $\mu(A \cup B) = 0 = \mu(A) + \mu(B)$
2. A skończony, B koskończony oraz $A \cap B = \varnothing \implies A \cup B$ jest koskończony. Stąd $\mu(A \cup B) = 1 = \mu(A) + \mu(B)$
3. A, B koskończone $\implies A \cap B \neq \varnothing$

Czy μ jest σ-addytywna? Jeśli $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}\colon A_i \cap A_j = \varnothing$ oraz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{P} \implies \sum \mu(A_i) = \mu\big(\bigcup A_i\big)$? Otóż nie musi tak być. Wystarczy wziąć $A_i = \{i\}$. Wówczas $\mu(A_i) = 0$ oraz $\bigcup A_i = \mathbb{N} \in \mathcal{P}$. Zatem $\mu\big(\bigcup A_i\big) = 1 \neq \sum \mu(A_i) = 0$.

Weźmy natomiast $X = \mathbb{R}$. Pokazać, że μ jest miarą σ-addytywną. Weźmy $A_i \in \mathcal{P}$, $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ oraz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{P}$.

- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ jest skończona. Od pewnego miejsca wszystkie zbiory są więc puste. Zatem $\mu(A_i) = 0$ i $\mu\big(\bigcup A_i\big) = 0 \implies \sum \mu(A_i) = \mu\big(\bigcup A_i\big)$.
- $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ jest koskończona. Oczywiście przecięcie ma być trywialne. Istnieje wówczas takie $i_0\colon A_{i_0}$ jest koskończone oraz dla $i \neq i_0$, $A_i \subset X \setminus A_{i_0}$ jest skończony. Stąd $\mu\big(\bigcup A_i\big) = 1$ oraz $\sum \mu(A_i) = \mu(A_{i_0}) = 1$.

Czyli jak zbiór jest dostatecznie duży to funkcja robi się σ-addytywna.

Zadanie 4/S8 Opisać pierścień $\mathcal{R}(E)$ generowany przez rodzinę podzbiorów E zbioru X.

1. $E = \{A\}$, gdzie A jest ustalonym ustalonym podzbiorem X

   $\mathcal{R}(E) = \{A, \varnothing\}$, bo $\varnothing$ zawsze musi być. Zauważmy, że to już tworzy pierścień.

2. $E = \{B \subset A\}$, gdzie A jest ustalonym podzbiorem X

   $\mathcal{R}(E) = 2^A = E$, bo suma mnie nie wyprowadza, różnica też nie. To już jest wygenerowany pierścień.

3. E jest klasą podzbiorów X zawierających dokładnie 2 elementy.

   Jeśli $|X| \leq 1$ to $E = \varnothing$ i $\mathcal{R}(E) = \{\varnothing\}$.
   Jeśli $|X| = 2$ to $E = \{X\}$, zatem $\mathcal{R}(E) = \{\varnothing, X\}$.
   Jeśli $|X| > 2$, np. $X = \{0, 1, 2\}$, to $E = \big\{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}\big\}$. Zauważmy, że przecięcia nie wyprowadzają z pierścienia. $\mathcal{R}(E) = \big\{\varnothing, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1, 2\}\big\}$.
   Patrząc ogólnie, dla wszystkich zbiorów skończonych X będzie $\mathcal{R}(E) = 2^X$. Dla nieskończonych X, $\mathcal{R}(E) \supset \{A\colon A-$ skończony$\}$. Ponieważ to już jest pierścień, to musi być równość, a nie tylko zawieranie.

Niech S będzie σ-pierścieniem. Mówimy, że A jest σ-skończony jeśli $A \in S$ i $\exists A_i\colon \mu(A_i) < \infty$ i $A \subset \bigcup A_i$.
Uwaga: zawieranie można zamienić na równość, bo $A = A \cap \bigcup A_i = \bigcup A \cap A_i$ oraz $\mu(A \cap A_i) \leq \mu(A_i) < \infty$. Można założyć, że zbiór σ-skończony A jest sumą nieprzecinających się podzbiorów miary skończonej. $A = \bigcup A_i = \bigcup B_i$, gdzie $B_i = \bigcup_{j=1}^{i} A_j$. Stąd

$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(B_i - B_{i-1})$, gdzie $B_0 = \varnothing$.

Wykazać, że klasa zbiorów σ-skończonych jest σ-pierścieniem.

$A = \bigcup A_i$, $B = \bigcup B_j$, $A \cup B = \bigcup C_i$ DOKOŃCZYĆ

Zadanie 6/S8 μ – miara na σ-pierścieniu $\mathcal{R}$. D to klasa rozłącznych zbioorów mierzalnych. Wykazać, że jeśli E jest zbiorem σ-skończonym too $\mu(E \cap A) \neq 0$ dla co anjwyżej przeliczalnej liczby elementów $A \in D$.

$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, gdzie $\mu(E_i) < \infty$.

Wykład 19: Ćwiczenia 19

21 gru 2020

Klasy monotoniczne

Definicja 8 (Klasa monotoniczna)**.** Rodzina $\varnothing \neq E \subset 2^X$ taka, że dla każdego $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$: $A_n \subset A_{n+1}$ mamy $\bigcup A_n \in E$, lub dla $B_n \supset B_{n+1}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in E$, nazywana jest klasą monotoniczną.

Zawsze można wygenerować najmniejszą klasę monotoniczną, zawierająca wskazaną rodzinę wzbiorów.

Zadanie 1 Niech $F \subset 2^X$. Wykazać, że istnieje najmniejsza klasa monotoniczna zawierająca F. Klasę tą oznacza się przez $M(F)$.

Takie coś dowodzi się standardowo przez następujący ruch. 2^X jest klasą monotoniczną zawierającą F. Jeśli mamy rodzinę klas monotonicznych, to ich przecięcie jest również klasą monotoniczną (bo przecięcie elementów klas jest dalej monotoniczne). Jeśli przecięliśmy wszystkie klasy zawierające F, to ten byt jest najmniejszą klasą monotoniczną zawierającą F. Mówimy, że F generuje $M(F)$.

Zadanie 2 Wykazać, że σ-pierścień jest klasą monotoniczną. Wykazać, że monotoniczny pierścień jest σ-pierścieniem.

(a) S – σ-pierścień. Rozważamy $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, gdzie $A_i \in S$. Ponadto wiemy, że $\bigcup A_i \in S$, bo S jest σ-pierścieniem. Stąd, w szczególności S jest klasą monotoniczną. Podobnie trzeba rozważyć malejące rodziny zbiorów.

(b) $\mathcal{R}$ – monotoniczny pierścień. Niech $B_i \in \mathcal{R}$. Wiemy, że $A_j = B_1 \cup \cdots \cup B_j \in \mathcal{R}$. Skoro $\mathcal{R}$ jest monotoniczny, $A_j \subset A_{j+1} \implies \bigcup A_j \in \mathcal{R}$, ale ta suma jest identyczna z $\bigcup B_j$.

Zadanie 3 Jeśli $\mathcal{R}$ jest pierścieniem, to najmniejsza klasa monotoniczna $M(\mathcal{R})$ zawierająca $\mathcal{R}$ jest równa najmniejszemu σ-pierścieniowi, który zawiera $\mathcal{R}$.

Dowód. Krok 1: Wykazać, że $M(\mathcal{R}) \subset S(\mathcal{R})$. Otóż σ-pierścień jest klasą monotoniczną i zawiera $\mathcal{R}$, a $M(\mathcal{R})$ jest najmniejszą klasą zawierającą $\mathcal{R}$, zatem zawieranie jest prawdziwe.

Krok 2: Wykazać, że $M(\mathcal{R})$ jest σ-pierścieniem. Wówczas bowiem $\mathcal{R} \subset M(\mathcal{R}) \implies S(\mathcal{R}) \subset M(\mathcal{R})$. W istocie wystarczy wykazać, że $M(\mathcal{R})$ jest pierścieniem (bo już jest monotoniczną klasą).

Ustalmy F i zdefiniujmy $K(F) = \big\{E \subset X \colon E \setminus F,\ F \setminus E,\ E \cup F \in M(\mathcal{R})\big\}$. Definicja jest symetryczna ze względu na przestawienie E i F, więc $E \in K(F) \iff F \in K(E)$. Jeśli $K(E) \neq \varnothing$ to $K(E)$ jest klasą monotoniczną. Przypuścimy bowiem, że $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K(E)$ oraz $F_n \subset F_{n+1}$ i $E \setminus F_n$, $F_n \setminus E$, $F_n \cup E \in M(\mathcal{R})$. Czy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \in K(E)$?

(a) $\left(\bigcup F_n\right) \cup E = \bigcup (F_n \cup E) \in M(\mathcal{R})$, bo pod sumą stoi monotoniczna rodzina wzrastająca.

(b) $\left(\bigcup F_n\right) \setminus E = \bigcup (F_n \setminus E) \in M(\mathcal{R})$. Argument jak poprzednio.

(c) $E \setminus F_n$ jest tym razem malejącą rodziną zbiorów. $\cap(E \setminus F_n) = E \setminus \bigcup F_n$.

Podobne rozumowanie trzeba przeprowadzić dla malejących rodzin zbiorów. Chcemy sprawdzić, czy dla $F_n \supset F_{n+1}$, $\bigcap F_n \in K(R)$.

(a) $E \setminus \bigcap F_n \in M(\mathcal{R})$, gdyż ...

W końcu, jeśli $K(E)$ jest niepusty, to $K(E)$ jest klasą monotoniczną.

Krok 3: Wykazać, że jeśli $E, F \in \mathcal{R}$, to $E \in K(F)$. Otóż $E \cup F$, $E \setminus F$, $F \setminus E \in \mathcal{R} \subset M(\mathcal{R})$.

Krok 4: W szczególności jeśli $F \in \mathcal{R}$, to $K(F) \neq \varnothing$ zawiera $\mathcal{R}$ i jest klasą monotoniczną. Przekonaliśmy się, że $M(\mathcal{R}) \subset K(F)$.

Krok 5: Jeśli $E \in M(\mathcal{R})$ i $F \in \mathcal{R} \implies F \in K(E)$ ■

Wykład 20: Prawdopodobieństwo

07 sty 2021

Zadanie 0 Przypomnieć podstawowe schematy kombinatoryczne: wariacje z powtórzeniami, wariacje bez powtórzeń, kombinacje, permutacje.

Definicja 9 (Permutacje)**.** Permutacje zbioru $\{1, \dots, n\}$ to wszystkie bijekcje tego zbioru. Zbiór permutacji S_n (lub π_n) tworzy grupę. Liczba permutacji to $\#S_n = n!$.

Definicja 10 (Kombinacje bez powtórzeń)**.** k – kombinacje zbioru $\{1,\ldots,n\}$ to podzbiory k-elementowe podzbiory zbioru n-elementowego lub też odwzorowania ściśle rosnące z $\{1,\ldots,k\}$ do $\{1,\ldots,n\}$.
Kombinacje bez powtórzeń oznaczamy przez C_k^n i $\#C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Definicja 11 (Kombinacje z powtórzeniami)**.** k – kombinacje z powtórzeniami zbioru $\{1,\ldots,n\}$ to zbiór odwzorowań niemalejących z $\{1,\ldots,k\}$ do $\{1,\ldots,n\}$.
Kombinacje bez powtórzeń oznaczamy przez CR_k^n i $\#CR_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Dowód. Wypisujemy ten dowolny ciąg niemalejący: $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$. Przypisujemy mu ciąg ściśle rosnący: $1 \leq a_1 < a_2+1 < a_3+2 < \cdots < a_k+k-1 \leq n+k-1$. Ta odpowiedniość jest 1:1. W związku z tym liczba tych kombinacji ciągu rosnącego jest równa liczbie kombinacji z powtórzeniami zbioru wyjściowego.

$$\#CR_n^k = \#C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

∎

Zadanko Na ile sposobów można zapisać k jako sumę n składników: $k = r_1+r_2+\cdots+r_n$ gdzie $0 \leq r_i \leq k$?

Rozważamy k jedynek i kombinacje z powtórzeniami mówią nam na której pozycji mamy ulokować jedynki. Przykładowo przy $k=2$, $n=4$: kombinacja $(1,1)$: $2+0+0+0$, dla $(2,4)$: $0+1+0+1$ itd. Stąd, liczba takich sposobów zapisu liczby k jest równa liczbie CR_n^k.

Definicja 12 (Wariacje z powtórzeniami)**.** k-wariacje z powtórzeniami zbioru n-elementowego to odwzorowania z $\{1,\ldots,k\}$ do $\{1,\ldots,n\}$. Wówczas $\#VR_n^k = n^k$.

Definicja 13 (Wariacje bez powtórzeń)**.** k-wariacje bez powtórzeń zbioru n-elementowego to odwzorowania różnowartościowe z $\{1,\ldots,k\}$ do $\{1,\ldots,n\}$. Wówczas $\#V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Zadanie 1 Na ile sposobów można rozdać n pączków k osobom? Albo, bardziej abstrakcyjnie, na ile sposobów można rozmieścić n nierozróżnialnych kul do k rozróżnialnych przegródek? (Statystyka Bosego-Einsteina)

To jest podział liczby n na k liczb jak poprzednio, tj. $n = r_1 + \cdots + r_k$. Stąd, liczba sposobów to:

$$CR_n^k = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

k i n obróciły się miejscami.

Zadanie 2 Na ile sposobów można podzielić liczbę naturalną n na sumę naturalnych składników (kolejność sumowania ma znaczenie, tj. $3+2+3$ i $2+3+3$ to różne podziały). A ile jest podziałów jeśli kolejność nie ma znaczenia? Uwaga! W drugim przypadku jawny wzór nie jest znany, można jedynie podać zależność rekurencyjną.

Wydaje się, że ta liczba to 2^{n-1}. Można to prosto pokazać wstawiając słupki między kulki. Slotów jest $n-1$ i w każdy mogę wstawić słupek ale mogę też nie wstawić, zatem mam 2^{n-1} możliwości.

Zadanie 11 Rzucamy kostką tak długo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią liczby rzutów.

Zawsze można zbudować jakiś schemat probabilistyczny, być może bardzo skomplikowany który pozwala myśleć o tym o robimy.
Niech $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \cdots \times \{1, \ldots, 6\}$ oraz

$$P(\{\underbrace{r_1, r_2, \ldots, r_n}_{\text{zadane}}, \underbrace{\ldots}_{\text{dowolne}}\}) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Niech $Y\colon \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ będzie zmienną losową taką, że $Y\big((r_j)_{j\in\mathbb{N}}\big) = k$ jeśli w k-tym rzucie kostką pojawią się w końcu wszystkie ścianki. No i my byśmy chcieli policzyć takie coś:

$$E(Y) = \int_\Omega Y(\omega)\,\mathrm{d}P$$

Wydaje się to karkołomne, ale się da.

Rozważmy zmienną losową o rozkładzie geometrycznym. Prawdopodobieństwo sukcesu pojawia się dopiero w k-tej próbie. $p \in (0, 1)$,

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

Rozkład ten jest już unormowany. Policzmy wartość oczekiwaną takiej zmiennej losowej.

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p &= p\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(1-p)^k \\ &= -p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k \\ &= -p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Tak przygotowani jesteśmy w stanie to zadanko rozwiązać. Dla nas sukcesem jest dostanie innej liczby oczek niż w poprzednich rzutach.