ANALIZA MATEMATYCZNA III

„Teraz na ucieczkę już za późno. . . ”
– Regina Lewkowicz

„To Wam się przyda na pierwszym i drugim roku studiów. Teraz utrzymujemy taką narrację optymistyczną. Nie pesymistyczną. To Wam się przyda!”

Wykładowca:
Olga Ziemiańska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Granice II

1.1 Powtórka granic

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^3-1}{k^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\big(k^2+k+1\big)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

Zauważmy, że $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}\frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{k-1}{k}}+(n+1)^{\frac{k-2}{k}}n+\cdots+n^{\frac{k-1}{k}}} = 0$$

4. $|a_n|\to 1,\ a_n\neq 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n+a_n^2+\cdots+a_n^k-k}{a_n-1}$

$$= \lim \frac{(a_n-1)+\big(a_n^2-1\big)+\cdots+\big(a_n^k-1\big)}{a_n-1}$$

$$= \lim\Big[1+(a_n+1)+\cdots+\Big(a_n^{k-1}+\cdots+1\Big)\Big] = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$

Zauważmy, że $k\cdot k! = (k+1)!-k!$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k!$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1$$

6. $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)$

   Taktyka jest taka, żeby użyć wzoru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ i łańcuchowo to wszystko pozwijać. Przyjmując, że $x \neq 1$:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)}{(1-x)}(1+x)\left(1+x^2\right)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right)}{(1-x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

   Teraz trzeba się pobawić przypadkami dla różnych wartości x:

$$|x| < 1 \implies \lim a_n = \frac{1}{1-x}$$
$$x = -1 \overset{\text{baz.}}{\implies} \lim a_n = 0$$
$$x = 1 \overset{\text{baz.}}{\implies} \lim a_n = +\infty$$
$$x > 1 \implies \lim a_n = +\infty$$
$$x < -1 \implies \lim a_n = -\infty$$

7. $a_1 = b > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, T: $\lim a_n = \sqrt{a}$

   Z nierówności między średnimi mamy:

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a}$$

   zatem widzimy, że ciąg jest ograniczony od dołu przez $\sqrt{a}$. Trzeba jeszcze pokazać, że jest monotonicznie malejący, tj. $a_n \geq a_{n+1}$.

$$2a_n \geq a_n + \frac{a}{a_n}$$
$$a_n^2 \geq a \implies a_n \geq \sqrt{a}$$

   co jest oczywiście spełnione. W związku z powyższym granica istnieje. Typując kandydatów na granicę otrzymamy $\pm\sqrt{a}$, a zatem $\lim a_n = \sqrt{a}$.

1.2 Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Definicja 1 (Ciąg zbieżny)**.** Ciąg jest zbieżny, jeżeli ma skończoną granicę. Inaczej, jest rozbieżny do $\pm\infty$.

1. Ciąg (a_n) nie ma elementu największego $\implies$ można z niego wyjąć podciąg rosnący.

   Konstrukcja:

$$a_{n_1} = a_1$$

   Szukamy a_{n_2}, dla którego $n_2 > n_1$ oraz $a_{n_2} > a_{n_1}$. Takie a_{n_2} istnieje, bo inaczej a_{n_1} byłby największym wyrazem (a_n).

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots < a_{n_k}$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$$

   Szukamy $a_{n_{k+1}}$ zgodnego z wcześniejszymi założeniami konstrukcji. Takie $a_{n_{k+1}}$ istnieje, bo w przeciwnym przypadku $\max\left\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_k}\right\}$ byłoby największym elementem ciągu. To kończy krok indukcyjny konstrukcji podciągu rosnącego $\left(a_{n_k}\right)$.

Lemat 1 (Lemat Sierpińskiego)**.** Z każdego ciągu można wyjąć podciąg monotoniczny.

Dowód. 1. Każdy podciąg ciągu (a_n) ma wyraz największy.

Skonstruujemy podciąg monotoniczny nierosnący. Konstrukcja: a_{n_1} – największy element ciągu (o najmniejszym indeksie).

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots \geq a_{n_k}$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$$

a_{n_1} wybraliśmy jako $\sup\{a_1, a_2, \ldots\}$. Niech więc a_{n_2} będzie $\sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\}$ – ma to zawsze sens, zgodnie z założeniem o największym elemencie oraz dzięki temu, że $n_2 \geq n_1 + 1$. W ogólności, konstrukcję pociągniemy dalej biorąc $a_{n_{k+1}} = \sup\{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \ldots\}$.

2. Istnieje podciąg, który nie ma największego wyrazu.

Wybieramy podciąg rosnący z powyższego zadanka. Podciąg podciągu jest podciągiem wyjściowego ciągu zatem znaleźliśmy, co chcieliśmy.

■

Twierdzenie 1 (Bolzano-Weierstrass)**.** Z każdego ciągu ograniczonego można wyjąć podciąg zbieżny. Jeśli ciąg jest ograniczony to granica jest skończona.

Dowód. Na mocy lematu Sierpińskiego, możemy wyjąć podciąg monotoniczny.
Ciąg monotoniczny ma granicę. A ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę skończoną. ■

Twierdzenie 2. Ciąg ma granicę $\iff$ każdy jego podciąg ma granicę.

Dowód. No ciąg jest swoim własnym podciągiem. Dowód oczywisty, przez poprawność. ■

Twierdzenie 3. (a_n) nie ma granicy $\implies$ ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Dowód. Zaprzeczamy warunkowi na istnienie granicy. Mamy $\left(a_{n_k}\right)$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$. Ale $\lim a_n$ nie istnieje.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\,|a_n - g| < \varepsilon$$

Zaprzeczenie:

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_N\exists_{n>N}\,|a_n - g| \geq \varepsilon \tag{W}$$

Czyli wystarczy pokazać, że to g nie jest granicą całego ciągu. Szukamy podciągu ciągu (a_n) na zewnątrz przedziału $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$. Z zaprzeczonego warunku (W) wynika istnienie podciągu, którego wyrazy leżą na zewnątrz przedziału, czyli albo po lewej albo po prawej mamy niekończenie wiele wyrazów. Załóżmy, że:

$$\exists_{\left(a_{n_l}\right)_{l\in\mathbb{N}}} \text{ t.że } a_{n_l} \geq g + \varepsilon$$

Teraz wybieramy podciąg zbieżny z $\left(a_{n_l}\right)$. Ale jego granica $\geq g + \varepsilon$. ■

Wniosek 1. $a_n \geq 0$, $a_n \to g$, $k \in \mathbb{N} \implies \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{g}$

Dowód. Załóżmy, że to nie prawda. Znajdzie się wówczas podciąg $\sqrt[k]{a_{n_l}} \to a \neq \sqrt[k]{g}$, dla $l \in \mathbb{N}$. Wiemy to z Twierdzenia 3.
Korzystając z tw. o granicy iloczynu dostajemy

$$a_{n_l} = \left(\sqrt[k]{a_{n_l}}\right)^k \xrightarrow{l\to\infty} a^k \neq g$$
$$\text{Ale } a_{n_l} \xrightarrow{l\to\infty} g$$

Sprzeczność. ■

Twierdzenie 4 (Warunek Cauchy'ego)**.** (a_n) jest zbieżny (ma skończoną granicę) $\iff$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{k,m>N}\, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Dowód. „ $\implies$ ”:

$$a_n \to g$$
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_{\varepsilon/2}}\forall_{n>N_{\varepsilon/2}}\, |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jeśli $m, k > N_{\varepsilon/2}$ to $a_m, a_k \in \big(g - \varepsilon/2, g + \varepsilon/2\big) \implies |a_n - a_k| < \varepsilon$

„ $\impliedby$ ”:
Pokazać, że (a_n) jest ograniczony.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{k,m>N}\, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Weźmy $\varepsilon = 1$. Istnieje N_1 takie, że

$$\forall_{k,m\geq N_1}\, |a_k - a_m| < 1$$

czyli $|a_k - a_{N_1+1}| < 1$.

$$1 > |a_k - a_{N_1}| \geq |a_k| - |a_{N_1+1}|$$
$$\text{czyli } |a_k| < |a_{N_1+1}| + 1 \text{ dla każdego } k > N_1$$

zatem ciąg jest ograniczony.
Teraz chcemy pokazać, że istnieje podciąg zbieżny $\big(a_{n_j}\big) \to g$ (z Twierdzenia B-W). Chcemy pokazać, że $a_n \to g$. Weźmy $\varepsilon > 0$.

$$\exists_N\forall_{k,m,j>N}\, |a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oraz } \left|a_{n_j} - g\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zależy nam na poszacowaniu $|a_k - g|$:

$$\begin{aligned} |a_k - g| &= |a_k - a_m + a_m - g| \\ &\overset{m=n_j}{\leq} |a_k - a_m| + \left|a_{n_j} - g\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

czyli $a_n \to g$. ■

1. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$
   Udowodnić, że jest zbieżny z kryterium Cauchy'ego.

$$\begin{aligned} |a_k - a_m| &\underset{k>m}{=} \left|(-1)^m\frac{1}{m+1} + (-1)^{m+1}\frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right| \\ &= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{k-m+1}\frac{1}{k} \overset{?}{<} \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

bo to długie jest dodatnie. Teraz trzeba pokazać tę nierówność.

$$-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{m+3}<0$$

i podobnie wszystkie pary, zatem po skasowaniu $1/(m+1)$ zostanie coś ujemnego. W związku z tym nasza nierówność działa. Stąd już widzimy, że $1/(m+1)$ może przyjmować dowolnie małe wartości dla $m > N$.

2. Pokazać, że $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego.

   Pamiętamy (W). Weźmy $\varepsilon = 1/2$:

$$a_m - a_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \overset{?}{>} \frac{1}{2}$$
$$\forall_N \exists_{2(N+1),N+1>N} \left|a_{2(N+1)} - a_{N+1}\right| > \frac{1}{2}$$

   (a_n) ma granicę, ale nie jest zbieżny $\implies$ $\lim a_n = \pm\infty$, bo nie spełnia warunku Cauchy'ego. $\implies$ $\lim a_n = +\infty$

Twierdzenie 5 (Warunek Leibniza zbieżności szeregów)**.**

$$a_k - \text{nierosnący, } a_k \to 0 \implies b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \text{ jest zbieżny}$$

Dowód. Chcemy pokazać, że b_n spełnia warunek Cauchy'ego.
Uwaga: $\forall_n\, a_n \geq 0$
Załóżmy, że $\exists_{n_0}$ takie, że $a_{n_0} < 0$. Wtedy:

$$a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots \leq a_{n_0} < 0$$
$$\implies \lim a_n \leq a_{n_0}$$

co daje nam sprzeczność. Teraz chcemy poszacować ten moduł z Cauchy'ego:

$$|b_k - b_m| \overset{k\geq m}{=} \left|(-1)^{m+2}a_{m+1}+\cdots+(-1)^{k+1}a_k\right| \overset{?}{\leq} a_{n+1}$$
$$a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0$$
$$a_{m+3} - a_{m+4} \geq 0 \ldots$$

Konstrukcja taka, jak w poprzednich dowodach. Działa. ■

1. (a_n) – ciąg, $\lambda \in (0,1)$, $\forall_n\, |a_{n+2}-a_{n+1}| \leq \lambda|a_{n+1}-a_n|$
   T: (a_n) jest zbieżny

$$|a_{n+2}-a_{n+1}| \leq \lambda^2|a_n - a_{n-1}| \leq \ldots \leq \lambda^n|a_2-a_1|$$
$$\begin{aligned}|a_k - a_m| &= |a_k - a_{k-1} + \cdots - a_m| \\ &\overset{N.\triangle}{\leq} |a_k - a_{k-1}| + |a_{k-1}-a_{k-2}| + \cdots + |a_{m+1}-a_m| \\ &\leq \lambda^{k-2}|a_2-a_1| + \cdots + \lambda^{m-1}|a_2-a_1| \\ &= |a_2-a_1|\lambda^{m-1}\Big(1+\lambda+\cdots+\lambda^{k-m-1}\Big) \\ &= |a_2-a_1|\lambda^{m-1}\frac{1-\lambda^{k-m}}{1-\lambda} \\ &\leq |a_2-a_1|\frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda} \to 0\end{aligned}$$

2. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2+a_n}{1+a_n}$ – udowodnić zbieżność, obliczyć granicę.

$$\begin{aligned}|a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left|\frac{1}{1+a_{n+1}} - \frac{1}{1+a_n}\right| \overset{a_i \geq 1}{\leq} \frac{|a_{n+1}-a_n|}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \\ &\leq \frac{1}{4}|a_{n+1}-a_n|\end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest warunkiem zbieżności z poprzedniego zadania. Teraz przechodzimy z $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}g &= \frac{2+g}{1+g} \\ g + g^2 &= 2 + g \\ \implies g &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Twierdzenie 6. $x \in \mathbb{R} \implies$ możemy tak wybrać ciąg (α_n) gdzie $\alpha_n = \pm 1$, że

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}$$

Dowód. Dla chętnych ;-) ■

1.3 Twierdzenie Toeplitza

Twierdzenie 7 (Toeplitza o regularnym przekształceniu ciągu)**.** Niech

$$\left\{c_{n,k} \colon 1 \leq k \leq n, m \geq 1\right\}$$

będzie układem liczb rzeczywistych spełniającym następujące warunki:

$$\text{Przy ustalonych } k \in \mathbb{N},\ c_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \tag{2}$$

$$\exists_{c>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \left|c_{n,k}\right| \leq c \tag{3}$$

Jeśli $c_{n,k} \geq 0$ to (3) jest spełnione, bo ciąg zbieżny jest ograniczony.

Wówczas $\lim a_n = a \implies \lim b_n = a$, gdzie $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k$.

Można bardzo prosto zapamiętać te warunki, rysując tablicę z wyrazami ciągu:

$$\begin{array}{cccccc}
c_{1,1} & & & & & \\
c_{2,1} & c_{2,2} & & & & \\
c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} & \substack{\Sigma\to 1 \\ \Sigma|| \leq c} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \\
0 & 0 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Widzimy pewne podobieństwo do twierdzenia z tablicą z pierwszej klasy.

Dowód. Załóżmy, że $a_n \to 0$. Chcemy pokazać, że $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k \to 0$, gdzie $c_{n,k}$ jest zdefiniowane wg. (1), (2), (3).

$$a_n \to 0 \overset{\text{zbieżny}}{\Longrightarrow} \exists_{D>0} \forall_n \, |a_n| < D$$

Niech $\varepsilon > 0$

$$|b_n| \le \underbrace{\left|c_{n,1}\right| |a_1| + \cdots + \left|c_{n,N_1}\right| |a_{N_1}|}_{<\varepsilon/2\,?} + \underbrace{\left|c_{n,N_1+1}\right| |a_{N_1+1}| + \cdots + \left|c_{n,n}\right| |a_n|}_{<\varepsilon/2\,?}$$

$$a_n \to 0 \implies \exists_{N_1} \forall_{n>N_1} \, |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

$$\implies \left|c_{n,N_1+1}\right| |a_{N_1+1}| + \cdots + \left|c_{n,n}\right| |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C} \Big(\left|c_{n,N_1+1}\right| + \cdots + \left|c_{n,n}\right| \Big) \overset{(3)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech N_1 będzie ustalone:

$$\exists_{N_2} \forall_{n>N_2} \, \left|c_{n,1}\right| + \cdots + \left|c_{n,N_1}\right| < \frac{\varepsilon}{2D}$$

$$\left|c_{n,1}\right| |a_1| + \cdots + \left|c_{n,N_1}\right| |a_{N_1}| < D \frac{\varepsilon}{2D} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Dla $n > \max\{N_1, N_2\}$ $|b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.
I tu się kończy dowód dla 0. Teraz dla $a_n \to a$:

$$a'_n = a_n - a \to 0$$

$$b_n = \sum_{k-1}^{n} c_{n,k} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a'_k}_{\to 0} + a \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}}_{\to a} \to a$$

■

1. $\lim a_n = a \implies \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$

   Wystarczy sprawdzić warunki (1), (2). Działa.

2. $\lim a_n = a \implies \lim \frac{n a_1 + (n-1) a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$

   Rozszerzając twierdzenie można zauważyć, że jeżeli (2) $\to A$, to teza zamienia się na $\lim b_n = aA$. Tutaj nasze $A = 1/2$, więc chcemy dobrać takie $(c_{n,k})$, żeby te sumy były zbieżne do 1/2.

$$c_{n,k} = \frac{n-k+1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{k}{n^2} \right) = 1 + \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2n^2} \tag{2}$$

$$\to 1/2$$

   Zatem granica sumy to $a/2$.

3. $a_n \to a \implies \lim \left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right) = ?$

$$c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \to 2 \tag{2}$$

$$\implies \lim b_n = 2a$$

4. $\lim a_n = a$. Obliczyć $\lim\left(\frac{a_n}{1\cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{a_1}{n(n+1)}\right)$

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)}$$
$$\lim b_n = a$$

5. Obliczyć $\lim\left(\frac{a_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k}\frac{1}{2^{n-k}} \to 0 \tag{1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} = -\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \to \frac{2}{3} \tag{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \left|c_{n,k}\right| = \sum 2^{k-n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 \tag{3}$$
$$\Longrightarrow \lim b_n = 2/3a$$

6. $a_n \to +\infty \implies b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to +\infty$

$$\exists_{N_1}\forall_{n>N_1}\, a_n > 0$$
$$b_n = \underbrace{\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n}}_{\to 0} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}$$

Załóżmy, że $\forall_n\, a_n > 0$. Niech $M > 0$. $\exists_N\forall_{n>N}\, b_n > M$. Chcemy znaleźć takie N.

$$\exists_{N_1}\forall_{n>N_1} a_n > 2M$$

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n} > \frac{2M(n-N_1)}{n}$$

Dla jakich n, $\frac{n-N_1}{n} > \frac{1}{2}$. Znaleźliśmy $N = 2N_1$.

7. $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\lim \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}$

$$c_{n,k} = \frac{b_{n-k+1}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$
$$\sum c_{n,k} = \frac{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} \to b \tag{2}$$

8. (a_n), (b_n) są ciągami takimi, że $b_n > 0$, $\lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty$, $\lim\frac{a_n}{b_n} = g$
T: $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \to g$

$$a'_k = \frac{a_k}{b_k} \to g,\ c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n} \to 0 \tag{1}$$
$$\sum c_{n,k}a'_k = \sum \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n}\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$$
$$\sum c_{n,k} = 1 \tag{2}$$
$$\Longrightarrow \lim \sum c_{n,k}a'_k = g$$

9. $b_n > 0$, $\lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty$, $\lim a_n = a$
T: $\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + \cdots + b_n} \to a$

$$c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n}$$

10. $b_n \to b$ oraz (a_n) jest taki, że $b_n = 2a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że istnieje $\lim a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(b_n - a_{n-1}) = \frac{b_n}{2} - \frac{b_{n-1}}{4} + \frac{a_{n-2}}{4} \\ &= \frac{b_n}{2^1} - \frac{b_{n-1}}{2^2} + \frac{b_{n-2}}{2^3} - \dots + (-1)^n \frac{b_2}{2^{n-1}} + (-1)^{n+1} \frac{a_1}{2^n} \end{aligned}$$

Jest fajnie, więc korzystamy z Tw. Toeplitza:

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n+1-k}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_k c_{n,k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots \to \frac{1}{3} \tag{2}$$

$$\sum_k |c_{n,k}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \to 1 \tag{3}$$

1.4 Twierdzenie Stolza

Twierdzenie 8 (Stolza)**.** Niech będą dane ciągi (x_n), (y_n) takie, że:

$$y_n < y_{n+1}, \quad \lim y_n = +\infty \tag{1}$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = g \tag{2}$$

Wówczas $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = g$.

Dowód.

$$a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

$$b_n = y_{n+1} - y_n$$

Korzystamy z ostatniego zadania. Otrzymujemy wówczas, że

$$g = \lim \frac{x_n - x_1}{y_n - y_1} = \lim \frac{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_1}{y_n}}{1 - \frac{y_1}{y_n}}$$

Używając założenia $y_n \to +\infty$ widzimy, że $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = g$. ∎

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$y_n = \sqrt{n}$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 2$$

2. $\dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a + \dfrac{a^2}{2} + \dots + \dfrac{a^n}{n}\right)$, $a > 1$

$$x_n = a + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^n}{n}$$

$$y_n = \frac{a^{n+1}}{n}$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{a^{n+1}}{n+1} \Big/ \left(\frac{a^{n+2}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{a-1}$$

3. $\dfrac{1}{n^{k+1}}\left(k! + \dfrac{(k+1)!}{1!} + \cdots + \dfrac{(k+n)!}{n!}\right)$

$$\begin{aligned}\lim \Delta = \lim \frac{(k+n)!}{n!\big(n^{k+1} - n^k\big)} &= \lim \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{n^k + n^{k-1}(n-1) + \cdots + (n-1)^k} \\ &= \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ y_n &= \sqrt{n} \to +\infty \\ \lim &\frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = 2\big(\sqrt{2} - 1\big)\end{aligned}$$

1.5 Punkty skupienia, granica górna i dolna

Definicja 2 (Punkt skupienia)**.** $g \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia ciągu (a_n) jeśli istnieje podciąg zbieżny do g. Czyli:

$$\forall_\varepsilon \forall_k \exists_{n_k} \left|a_{n_k} - g\right| < \varepsilon$$

S to zbiór punktów skupienia ciągu. Generalnie, punkt skupienia ciągu to taki punkt, w którego dowolnym otoczeniu znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

1. Znaleźć punkty skupienia ciągu $\dfrac{1}{2}\left(n - 2 - 3\left\lfloor\dfrac{n-1}{3}\right\rfloor\right)\left(n - 3 - 3\left\lfloor\dfrac{n-1}{3}\right\rfloor\right)$

   (a) $n = 3k$: $\left\lfloor\dfrac{n-1}{3}\right\rfloor = k - 1 \implies a_n = 0$

   (b) $n = 3k+1$: $\left\lfloor\dfrac{n-1}{3}\right\rfloor = k \implies a_n = 1$

   (c) $n = 3k+2$: $\left\lfloor\dfrac{n-1}{3}\right\rfloor = k \implies a_n = 0$

   Zatem $S = \{0, 1\}$

2. $\dfrac{\big(1 - (-1)^n\big)2^n + 1}{2^n + 3}$

$$n \mod 2 \implies S = \{0, 2\}$$

3. $\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)^n$

$$n \mod 6 \implies S = \{-1, 0, 1\}$$

4. Podciągi $(a_{2k}), (a_{2k+1}), (a_{3k})$ są zbieżne. Udowodnić, że (a_n) jest zbieżny. Czy ze zbieżności dowolnych dwóch z tych podciągów wynika zbieżność?

   Oczywiście jeśli dwa z trzech są zbieżne to nie mamy wynikania. Wystarczy choćby

   (a) $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1$

   (b) $a_{6k} = 1, a_{6k+1} = 0, a_{6k+2} = 1, a_{6k+3} = 1, a_{6k+4} = 1, a_{6k+5} = 0$

(c) $a_{6k} = 1, a_{6k+1} = 1, a_{6k+2} = 0, a_{6k+3} = 1, a_{6k+4} = 0, a_{6k+5} = 1$

To teraz zbieżność z trzech ciągów. Przyjmijmy, że $(a_{2n}) \to g_1, (a_{2k_1}) \to g_2, (a_{3k}) \to g_3$. Łatwo możemy pokazać, że $g_1 = g_2 = g_3 = g$: $(a_{2k+1}), (a_{3k})$ mają wspólny podciąg (a_{6k+3}), zatem $g_3 = g_2$. Analogicznie $g_3 = g_1$. Skoro do tej samej granicy zbiegają podciągi parzyste i nieparzyste, to zbiega tam cały ciąg.

Definicja 3.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest nieograniczony z góry} \\ -\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z góry i zbiór } S = \varnothing \\ \sup S & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z góry i zbiór } S \neq \varnothing \end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest nieograniczony z dołu} \\ +\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z dołu i zbiór } S = \varnothing \\ \inf S & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z dołu i zbiór } S \neq \varnothing \end{cases}$$

Czasem stosuje się się też notację $\overline{\lim} \equiv \limsup$ oraz $\underline{\lim} \equiv \liminf$.

1. Jeśli $\limsup a_n = -\infty$ to $\lim a_n = -\infty$

   Gdyby (a_n) był ograniczony z dołu, to z tw. B-W ma podciąg zbieżny, czyli $S \neq \varnothing \implies (a_n)$ jest nieograniczony z dołu. Jak ciąg nie ma granicy to ma dwie granice. Nie może być to liczba rzeczywista, bo S jest pusty, zatem musi być to $-\infty$.
   $\implies \lim a_n = -\infty$

2. Znaleźć granicę górną i dolną $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \frac{\sin n\pi}{4}$

$$S = \pm e + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 0 \right\}$$
$$\implies \liminf a_n = -e - \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\implies \limsup a_n = e + 1$$

3. $\left(2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)^n$

$$2\cos\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 & n = 3k \\ -1 & n = 3l + 1 \end{cases}$$
$$a_{3k} = 2^{3k} \to +\infty \implies \limsup = +\infty$$
$$a_{3k+1} = (-1)^{3k+1}$$
$$a_{3k-1} = (-1)^{3k-1} \implies S = \{-1, 1\}$$
$$\implies \liminf = -1$$

Twierdzenie 9.

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Równość zachodzi $\iff$ ciąg ma granicę.

Dowód. 1. $\limsup = -\infty \implies \lim = -\infty$
Z definicji a_n – ograniczony z góry, $S = \varnothing$, zatem $\liminf = -\infty$.

2. $\limsup = +\infty \implies \liminf \leq \limsup = +\infty$
   Załóżmy, że $\limsup = \liminf = +\infty$. Chcemy pokazać, że $\lim = +\infty$.
   Z definicji dowodzimy analogicznie, jak w pierwszym zadaniu.

3. $\limsup \in \mathbb{R} \implies S \neq \varnothing$

$$\implies \liminf = \begin{cases} -\infty & < \sup S \\ \inf S & \leq \sup S \end{cases}$$

   Załóżmy, że $\limsup = \liminf \in \mathbb{R} \implies \liminf = \inf S \implies \sup S = \inf S$
   Stąd wynika, że $\overline{S} = 1$. Ponadto ciąg jest ograniczony z góry, zatem $S = \{g\}$, $g = \lim a_n$.

■

> **Wniosek 2.** Istnieje podciąg zbieżny do $\limsup a_n$ i tak samo dla $\liminf a_n$.

Dowód. 1. $\limsup = -\infty \implies \lim = -\infty$

2. $\limsup = +\infty \implies$ PRACA DOMOWA, znaleźć podciąg rozbieżny do $+\infty$:)

3. $\limsup = \sup S = g$

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_k\exists_{n_k>k} \left|a_{n_k} - g\right| < \varepsilon$$
$$g = \sup S \implies \exists_{s\in S} |g - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   s – punkt skupienia ciągu

$$\exists_{n_k>k} \left|a_{n_k} - s\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\left|a_{n_k} - g\right| \leq \left|a_{n_k} - s\right| + |g + s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   Stąd widzimy, że $g = \max S$, bo $g \in S$.

■

1. $(a_n) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$. Udowodnić, że $S = [0, 1]$.

2. $(a_n)\colon l = \liminf a_n$, $K = \limsup a_n$ oraz $\lim a_{n+1} - a_n = 0$. Udowodnić, że $S = [l, K]$.

   Załóżmy, że $a \in (l, K)$ nie jest punktem skupienia.

$$\exists_{\varepsilon>0}\exists_k\forall_{n_k>k} \left|a_{n_k} - a\right| > \varepsilon$$

   Oznacza to, że na przedziale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ jest skończona liczba wyrazów ciągu. Możemy ten ε tak poprawić, żeby nie było żadnych wyrazów ciągu.

$$\lim a_{n+1} - a_n = 0 \iff \forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N} |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

   Począwszy od N każdy kolejny wyraz ciągu ląduje po którejś ze stron tej wyrwy przedzielonej przez a. Załóżmy, że:

$$n > N, \quad a_n \in (a + \varepsilon, K]$$

   Czyli w przedziale $[l, a - \varepsilon]$ jest skończenie wiele wyrazów ciągu. Sprzeczność, bo l jest punktem skupienia ciągu.

3. $a_n = \sqrt[n]{\binom{kn}{n}}$, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\lim \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \lim \frac{\binom{k(n+1)}{n+1}}{\binom{kn}{n}}$$

O ile istnieje! (Tw. d'Alemberta czy jakiegoś innego Cauchy'ego)

$$
\begin{aligned}
&= \lim \frac{[k(n+1)]!}{(n+1)![(k-1)(n+1)]!} \frac{n![(k-1)n]!}{(kn)!} \\
&= \lim \frac{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+k)}{(kn+1-n)(kn+2-n)\dots(kn+k-1-n)} \frac{1}{n+1} \\
&= \lim k\left(1+\frac{n}{kn+1-n}\right)\left(1+\frac{n}{kn+2-n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{kn+k+1-n}\right) \\
&= k\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}
\end{aligned}
$$

4. $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ (1+a_n)/2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$ Ile punktów skupienia ma ten ciąg?

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{a_1}{2^{2n-1}} \to \frac{2}{3} \\
a_{2n+1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{a_1}{2^{2n}} \to \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

1.6 Funkcje wykładnicze i logarytmy

Powtórzmy sobie to, co udowodniliśmy rok temu.

Definicja 4 (Eksponenta)**.**

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718
\end{aligned}
$$

Pokazywaliśmy, że ta definicja ma sens (zbieżność i te sprawy). Naszym celem było pokazanie, że $\exp(x) = e^x$ dla $x \in \mathbb{Q}$ (póki co).

Twierdzenie 10 (Rozwinięcie w szereg Maclaurina)**.**

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \\
e &= 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + r_n \\
\frac{1}{n+1} &< n!r_n < \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Dowód. $x > 0,\ n \geq k$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{x}{n}\right)^j \geq$$

$$\geq 1 + x + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{x^k}{k!} = b_n$$

$$b_n \to 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$$

$$\implies \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \geq \left(1+\frac{x}{k}\right)^k \to \exp(x)$$

■

A tutaj dowód szacowania ogonów:

Dowód.

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots + \frac{1}{(k+n)!}\right)$$

$$\frac{1}{(k+1)!} + \cdots + \frac{1}{(k+n)!} \le \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)(k+1)!} + \cdots + \frac{1}{(k+2)^{n-1}(k+1)!}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\frac{1-\left(\frac{1}{k+2}\right)^n}{1-\frac{1}{k+2}} < \frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{k+2}}$$

$$= \frac{k+2}{k!(k+1)^2} < \frac{1}{kk!}$$

■

Lemat 2 (O ciągach szybkozbieżnych do zera)**.**

$$na_n \to 0 \implies (1+a_n)^n \to 1$$

Dowód. Chcemy użyć twierdzenia o trzech ciągach.

$$(1+a_n)^n \ge 1 + na_n \to 1$$

Przy założeniach $a_n > -1$, co jest prawdą dla dostatecznie dużych n.

$$(1+a_n)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{-a_n}{1+a_n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{-a_n}{1+a_n}\right)^n} \le \frac{1}{1+\frac{-na_n}{1+a_n}} \to 1$$

Zatem mamy ograniczenia z dołu i góry. ■

Lemat 3.

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Dowód. Chcemy pokazać, że:

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n}$$

$$\lim\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim\left(\frac{1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \lim\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{\frac{n+x+y}{n}}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\frac{xy}{x+y+n}\right)^n$$

Używając lematu o ciągach szybkozbieżnych do zera,

$$\lim\frac{xy}{n+x+y} = 0 \implies \lim\left(1+\frac{xy}{n(x+y+n)}\right)^n = 1$$

■

Lemat 4.

$$\exp(q) = e^q, \quad q \in \mathbb{Q}$$

Dowód. Prosto z Lematu 4 płynie wniosek, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = e^n$$

Ponadto,

$$\exp(-n)\exp(n) = \exp(0) = 1 \implies \exp(-n) = \frac{1}{e^n}$$
$$\implies \forall_{k\in\mathbb{Z}} \exp(k) = e^k$$

Niech $k \neq 0$,

$$\exp\left(\frac{m}{k}\right) = \exp\left(\frac{1}{k}\right)^m$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\exp\left(\frac{1}{n}\right)\dots}_{n} = e \implies \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$$

Uogólniając identycznie jak w przypadku $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, możemy zapisać, że

$$\exp\left(\frac{1}{k}\right) = e^{\frac{1}{k}} \implies \exp\left(\frac{m}{k}\right) = e^{\frac{m}{k}}$$

■

Lemat 5 (Najważniejsza nierówność z exp)**.**

$$\exp(x) \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Dowód.

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \overset{\text{Bern.}}{\geq} 1 + n\frac{x}{n}$$

dla $x/n > -1$. Zatem od pewnego momentu, dla dostatecznie dużych n nam działa, a to wystarczy bo tym bardziej w granicy działa. ■

Twierdzenie 11.

$$x_n \to x \implies \exp(x_n) \to \exp(x)$$

Dowód.

$$h_n \to 0 \implies \exp(h_n) \to 1$$
$$1 \leftarrow 1 + h_n \leq \exp(h_n) = \frac{1}{\exp(-h_n)} \leq \frac{1}{1 - h_n} \to 1$$

Z trzech ciągów mamy $\exp(h_n) \to 1$. $h_n < 1$ więc dla dostatecznie dużych n to prawda.

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - x)\exp(x) \to \exp(x)$$

■

Twierdzenie 12. Przyjmijmy już, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \exp(x) = e^x$, ale nie wiemy co to e^α dla $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Własności funkcji a^x, $a > 0$, $a \neq 1$:

1. $a^x > 0$
2. $a^{x+y} = a^x a^y$
3. $a^0 = 1$
4. a^x rosnąca dla $a > 1$,
   zatem jest różnowartościowa
   a^x malejąca dla $a \in (0, 1)$
5. $a^{-x} = 1/a^x$

Wniosek 3. Istnieje funkcja odwrotna, której dziedziną jest obraz a^x.
Obraz $a^x = (0, +\infty)$. Funkcję odwrotną będziemy nazywać logarytmem: $\log_a x \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Zauważmy, że:
$\log_a x$ jest rosnąca, gdy $a > 1$ oraz malejąca gdy $a \in (0, 1)$.

Twierdzenie 13 (Własności logarytmu)**.** Zestaw takich podstawowych narzędzi:

1. $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$

Dowód. Jest bardzo elementarny. ■

Twierdzenie 14 (Zmiana podstawy logarytmu)**.**

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b, \quad a \neq 1, c \neq 1$$

Dowód.

$$\text{T: } \log_a b = \log_a c \log_c b$$

Wystarczy pokazać, że potęgi przy a są takie same.

$$\left(a^{\log_a c}\right)^{\log_c b} = c^{\log_c b} = b$$

■

1.6.1 Cyferki atakują :-(

1. $\log_{1/a} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a x$
2. $\log_{a^b} x = \dfrac{1}{b} \log_a x$
3. $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2} = 10 \cdot 100^{\log 3 - \log 2} = 10 \cdot 100^{\log 3/2} = 10 \cdot \left(10^2\right)^{\log 3/2} = 10 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$
4. $15^{2 \log_{15} 40} = 15^{\log_{15} 40^2} = 40^2$
5. $7^{\log_{49} 5 - 1} = \dfrac{7^{\log_{49} 5}}{7} = \dfrac{49^{\log_{49} \sqrt{5}}}{7} = \dfrac{\sqrt{5}}{7}$

Wniosek 4.

$$\log a > \log b \iff a > b$$

1. $\log 2 < \dfrac{1}{3} \iff 2 < 10^{1/3} \iff 8 < 10$
2. $2 \log 7 < 2 - \log 2 \iff \log 49 < \log \dfrac{100}{2} \iff 49 < 50$
3. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} \implies x = -\dfrac{1}{4}$

4. $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6 \implies 1.5 \log_x 7 = 6 \implies x = \sqrt[4]{7}$

5. $x^{\log x} = \dfrac{100}{x} \implies y = \log x \implies x = 10^y \implies 10^{y^2} = \dfrac{100}{10^y} \implies y^2 + y = 2 \implies x = 10, \ \dfrac{1}{100}$

6. $x^{\log_5 x} = 625 = 5^4 \implies y = \log_5 x \implies y^2 = 4 \implies x = 25, \ \dfrac{1}{25}$

7. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7-3x} = 3^{3x-7} \implies \left(\dfrac{1}{7}\right)^{3x-7} = 1 \implies 3x = 7$

8. $\begin{cases} \dfrac{\log x + \log y}{\log(x+y)} = 1 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}, \quad x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} xy = x + y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Wzory skróconego mnożenia, pałologia stosowana i finiszujemy.