Fizyka

„Jak wydrążymy w Ziemi tunel i wrzucimy tam ucznia nieuczącego się magnetostatyki, to już wiemy że będzie poruszał się ruchem harmonicznym.”

Wykładowca:
Elżbieta Zawistowska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

1 Fale i optyka geometryczna **4**
1.1 Równanie falowe . . . 4
1.2 Zasada Huygensa . . . 5
1.3 Interferencja . . . 7
1.4 Moc i natężenie źródła . . . 9
1.5 Fale stojące . . . 10
1.6 Drgania własne . . . 11
1.7 Efekt Dopplera . . . 12
1.8 Interferencja 2 . . . 13
1.9 Siatka dyfrakcyjna . . . 15
1.10 Zwierciadła wklęsłe i wypukłe . . . 16
1.11 Pryzmat . . . 19
1.12 Soczewki . . . 19
1.13 Polaryzacja przez odbicie . . . 23
1.14 Powiększenie liniowe i kątowe . . . 23

2 Szczególna Teoria Względności **27**
2.1 Transformacja Galileusza . . . 27
2.2 Transformacja Lorentza . . . 29
2.3 Transformacja prędkości . . . 32
2.4 Dylatacja czasu . . . 32
2.5 Kontrakcja Lorentza . . . 32
2.6 Pęd relatywistyczny . . . 34
2.7 Energia relatywistyczna . . . 35
2.8 Zjawisko fotoelektryczne . . . 36
2.9 Względność pól $\vec{E}$, $\vec{B}$ . . . 36
2.9.1 Zmiana pola $\vec{B}$ przy zmianie układów inercjalnych . . . 38
2.10 Relatywistyczny efekt Dopplera . . . 39
2.10.1 Wyprowadzenie z równania fali . . . 40
2.11 Transformacja pędu i energii . . . 40
2.12 Transformacja siły . . . 41
2.12.1 Zadanko na miły początek wakacji . . . 42

Rozdział 1

Fale i optyka geometryczna

1.1 Równanie falowe

Definicja 1. Fala – zaburzenie w ośrodku przekazujące energię.

Twierdzenie 1. Równanie falowe w przestrzeni $n-$wymiarowej ma postać

$$\nabla^2 u\left(\vec{r}, t\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

gdzie u jest funkcją wychyleń, ewentualnie w przypadku fal akustycznych falą ciśnień, przesunięć lub generalnie przepływu. v jest prędkością rozchodzenia się fali w ośrodku.

Dowód. Dowód w 1D można przeprowadzić używając prawa Hooke'a. Na 3D rozszerzamy biorąc gotowe rozwiązania z 1D, jako że u jest funkcją współrzędnych niezależnych i czasu. Laplasjan ∇^2 wynika z transformacji między dowolnymi współrzędnymi krzywoliniowymi a wyjściowym układem kartezjańskim. ∎

Wniosek 1. Można pokazać, że ogólnym rozwiązaniem równania falowego w 1D jest

$$u(x,t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

czyli superpozycja dwóch fal biegnących w przeciwnych kierunkach.

Rozwiązań równania falowego szukamy metodą separacji zmiennych, postulując rozwiązania postaci $u\left(\vec{r}, t\right) = R\left(\vec{r}\right)T(t)$. Generalnie rozwiązanie może być obrzydliwe i nieanalityczne. Jednakże w szkole nie ma co się tym przejmować! Przykładowo zakładając, że fala nie ma żadnych składowych sferycznych, powinno się wszystko uprościć. Koniec końców powinniśmy skończyć z równaniami postaci:

$$R(r) = C_1(r)e^{ikr} + C_2(r)e^{-ikr}$$
$$R(r) = C(r)\cos(kr + \phi_1)$$

gdzie $k = \frac{\omega}{v}$ jest liczbą falową. Niezależnie od złożoności problemu składowa czasowa będzie zwykłym oscylatorem harmonicznym.

$$T(t) = D_1e^{i\omega t} + D_2e^{-i\omega t}$$
$$T(t) = D\cos(\omega t + \phi_2)$$

W związku z tym otrzymujemy równanie fali stojącej:

$$u(r,t) = u_+(r,t) + u_-(r,t) = A(r)\cos(kr - \omega t + \phi_+) + A(r)\cos(kr + \omega t + \phi_-)$$

W szczególności, falę biegnącą w kierunku dodatnim możemy przepisać jako:

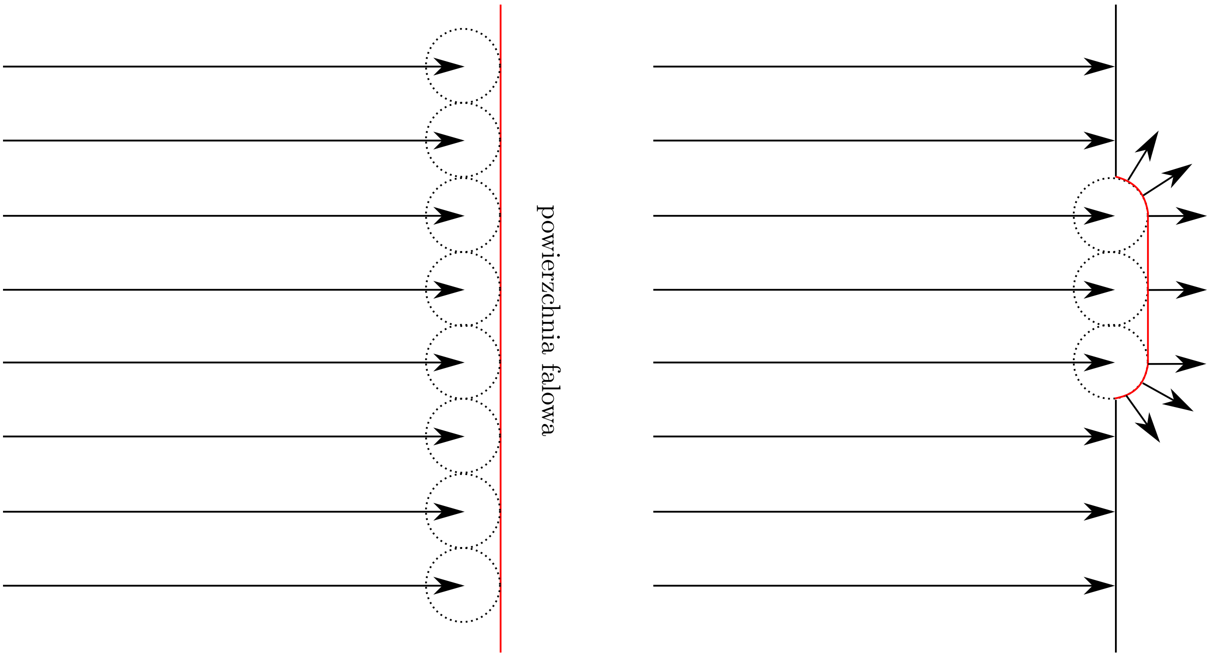
$$u_+(r,t) = A(r)\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) + \phi_+\right)$$

Definicja 2. Powierzchnia falowa – zbiór punktów fali o takiej samej fazie.

1.2 Zasada Huygensa

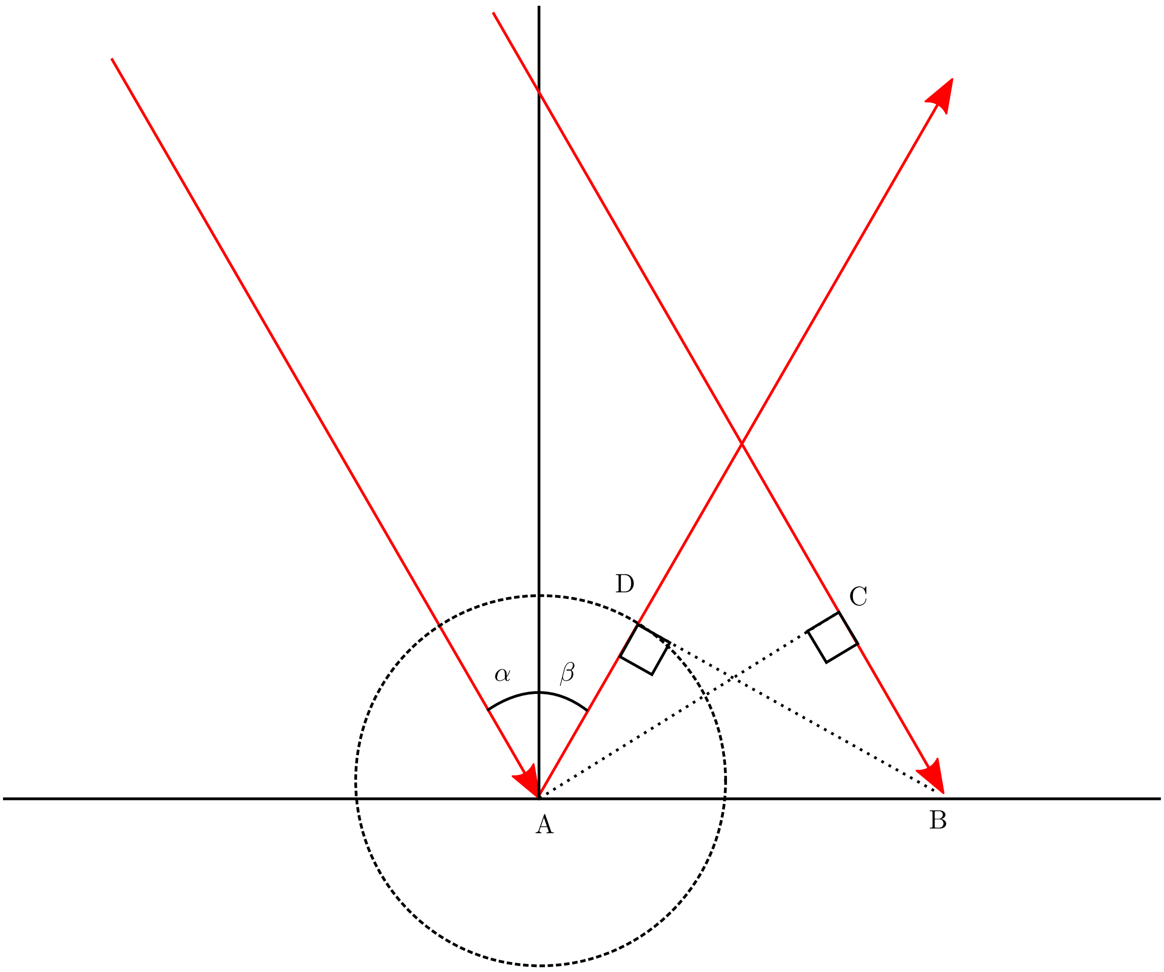
Twierdzenie 2. Z punktu, do którego dochodzi fala, rozchodzi się elementarna fala kulista. Nowa powierzchnia falowa jest styczną do wszystkich takich elementarnych fal kulistych.

Dowód. Dowód wynika z dość daleko idących manipulacji równaniem falowym. ■



Rysunek 1.1: Wizualizacja frontu falowego zgodnie z zasadą Huygensa. Po prawej stronie widzimy dyfrakcję.

Twierdzenie 3. Kąt padania jest równy kątowi odbicia.



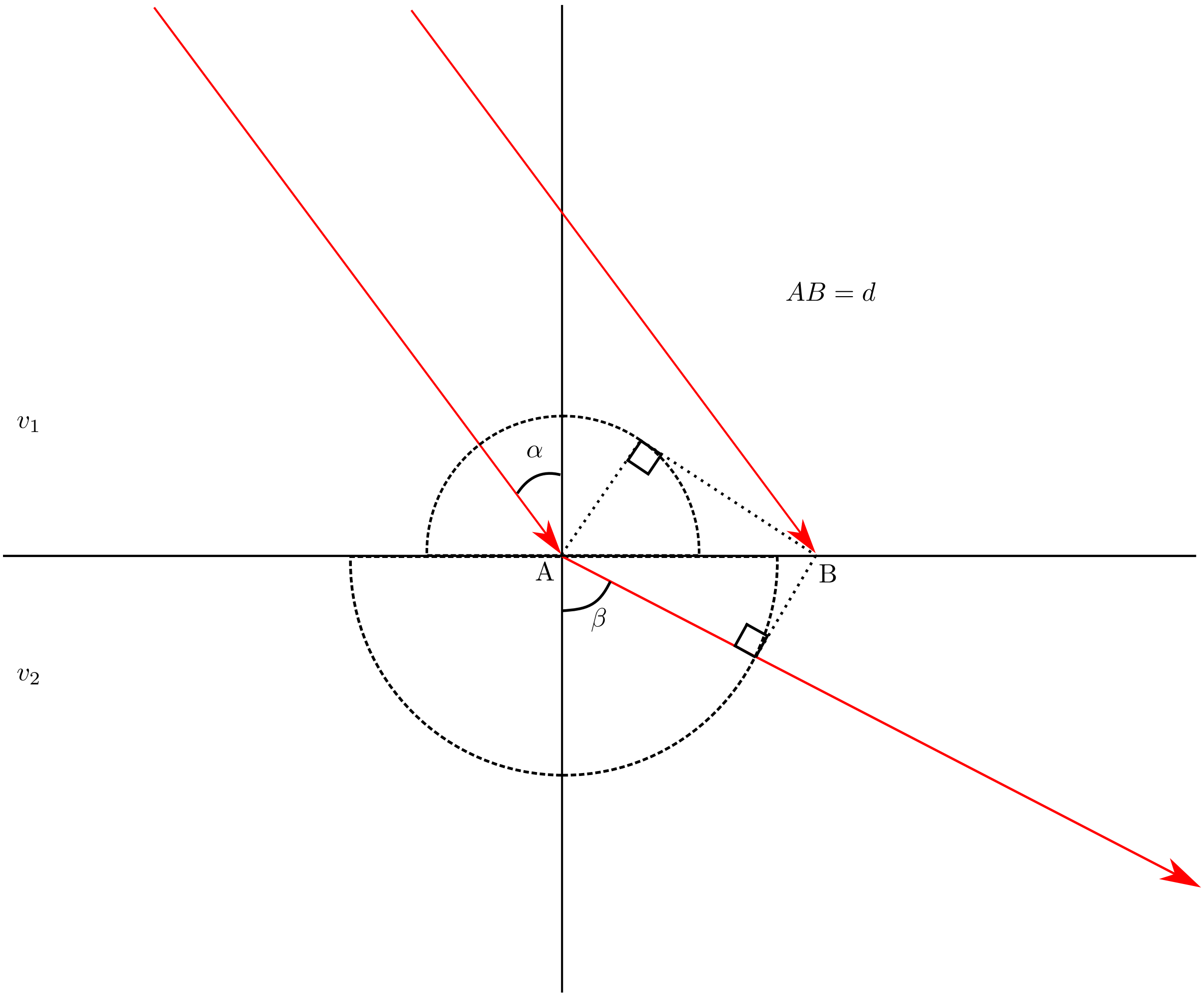
Rysunek 1.2: Odbicie fali od pewnej powierzchni. Druga wiązka jest równoległa.

Dowód. $AD = BC = vt$
BD - nowa powierzchnia falowa
Z cechy bkb $\triangle ABC \equiv \triangle ADB \Rightarrow \angle CBA = \angle DAB = \pi/2 - \alpha$
$\Rightarrow \beta = \alpha$ ■

Twierdzenie 4 (Prawo załamania)**.**

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

gdzie $n_i = c/v_i$ i jest bezwzględnym współczynnikiem załamania (względem próżni).



Rysunek 1.3: Zjawisko załamania fali przy przejściu do innego ośrodka (o innej prędkości propagacji fali). W tym przypadku $v_2 > v_1$

Dowód.

$$\frac{v_1 t}{d} = \sin\alpha, \ \frac{v_2 t}{d} = \sin\beta \ \Rightarrow \ \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

■

1.3 Interferencja

Niech będą sobie dwa źródła, emitujące fale z częstościami $\omega_1, \ \omega_2$.

$$u_1(r_1, t) = A(r_1)\sin\underbrace{\left(\omega_1\left(t - \frac{r_1}{v}\right) + \phi_{01}\right)}_{\phi_1}$$

$$u_2(r_2, t) = A(r_1)\sin\underbrace{\left(\omega_2\left(t - \frac{r_2}{v}\right) + \phi_{02}\right)}_{\phi_2}$$

Gdy dwa fronty falowe zderzają się, zachodzi interferencja. Fale nakładają się na siebie. Fale są sinusoidalne, zatem ich wzmacnianie lub wygaszanie zależy od różnicy w fazach.

Wniosek 2. Maksimum interferencyjne – $\Delta\phi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Minimum interferencyjne – $\Delta\phi = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

O interferencji mówimy dopiero, gdy jest to **stałe w czasie** zjawisko, tj. powstaje przestrzenny rozkład amplitudy fali. Zatem $\Delta\phi = \text{const.}(t)$.

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = t(\omega_1 - \omega_2) + \frac{1}{v}(\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1) + \phi_{01} - \phi_{02} = \text{const.}(t)$$

Stąd wyłaniają się dwa warunki konieczne do zajścia interferencji.

Wniosek 3. Interferencja może zajść, jeżeli:

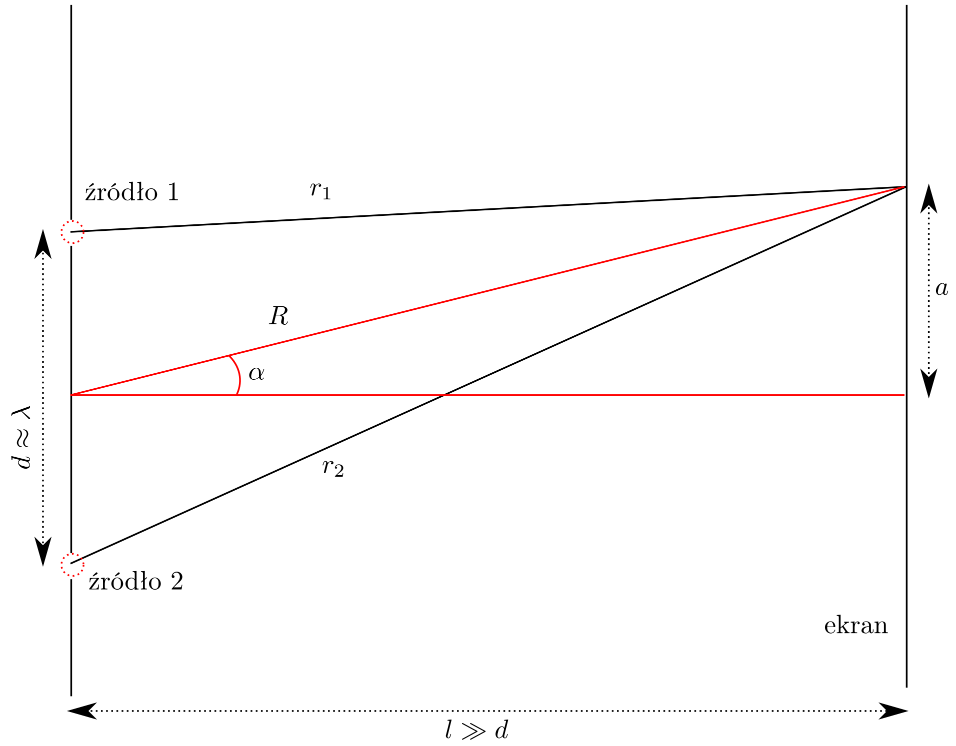
1. $\omega_1 = \omega_2$ – źródła są spójne
2. $\Delta\phi_0 = \text{const.}(t)$

Niech $\phi_{01} = \phi_{02}$. Wówczas $\Delta\phi = \frac{\omega}{v}(r_2 - r_1)$. Z warunku na maksimum mamy więc:

$$\frac{\omega}{v}(r_2 - r_1) = 2k\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = k\lambda$$

I analogicznie dla minimum interferencyjnego

$$\frac{\omega}{v}(r_2 - r_1) = (2k+1)\pi \Rightarrow r_2 - r_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$



Rysunek 1.4: Interferencja fal w punkcie. Widzimy, że $\Delta r \to 0$, zatem wyprowadzone wzory ścisłe są niepraktyczne. Zamiast tego można podjąć próbę wyrażenia warunków interferencyjnych poprzez wartości $R,\ \alpha$.

Szukamy przybliżenia na $\Delta r = r_2 - r_1$:

$$r_1^2 = \frac{d^2}{4} + R^2 - dR\sin\alpha$$

$$r_2^2 = \frac{d^2}{4} + R^2 + dr\sin\alpha$$
$$r_2^2 - r_1^2 = 2dR\sin\alpha = \Delta r(r_2 + r_1) \approx 2R\Delta r$$
$$\Delta r \approx d\sin\alpha$$

Wniosek 4. Maksimum interferencyjne – $d\sin\alpha = k\lambda$
Minimum interferencyjne – $d\sin\alpha = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

Jaka jest odległość kolejnych jasnych prążków na ekranie od osi?

$$k\lambda = d\frac{a}{\sqrt{l^2 + a^2}}$$

A zatem po prostych przekształceniach:

$$a(k) = \frac{k\lambda l}{\sqrt{d^2 - k^2\lambda^2}}$$

1.4 Moc i natężenie źródła

Definicja 3. Moc źródła – P, natężenie fali – I
Oficjalna zależność łącząca te dwie wartości ma postać:

$$P = \oint_S \vec{I} \cdot d\vec{S} = \frac{dE}{dt}$$

Jeśli założymy, że fala drga zgodnie z normalną do elementu powierzchni zamkniętej lub równolegle do niej (zerowy iloczyn skalarny) oraz, że całkujemy po powierzchni stałego natężenia, to możemy sobie napisać:

$$I = \frac{1}{S}\left(\frac{dE}{dt}\right)$$

gdzie dzielimy przez powierzchnię, przez którą fala przechodzi.

Fala mechaniczna jest masą połączonych, tycich oscylatorów harmonicznych. Całkowita energia takiego układu (fragmentu zaburzonego ośrodka o masie m) jest sumą średniej energii kinetycznej i potencjalnej. Zgodnie z twierdzeniem o wiriale (albo w tym przypadku na zdrową logikę), dla układu o potencjale oscylatora harmonicznego:

$$\langle E_{kin}\rangle = \langle E_{pot}\rangle$$

a zatem całkowita średnia energia wynosi:

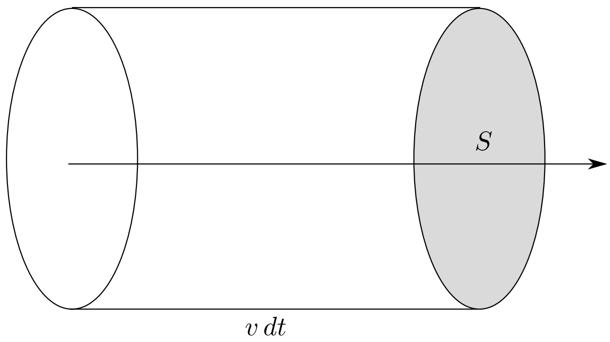
$$E = 2\langle E_{pot}\rangle$$

Dla ruchu harmonicznego, energia potencjalna wyrażała się wzorem:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_i\omega^2A^2\sin^2(\omega t - kr + \phi_0)$$

Wartością średnią $\sin^2(x)$ jest $1/2$ (wystarczy policzyć $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(x)\,dx$), zatem:

$$E = 2\langle E_{pot}\rangle = 2\frac{1}{4}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$



Rysunek 1.5: Objętość zajmowana przez element drgającej masy dm. Kierunek rozchodzenia się fali jest prostopadły do pola S.

Weźmy teraz dostatecznie małe dm. Różniczka energii tej „porcji" fali wynosi:

$$dE = \frac{1}{2}\rho v\, dt\, S\omega^2 A^2$$

$$\frac{1}{S}\left(\frac{dE}{dt}\right) = I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 A^2$$

Wniosek 5. Zachodzi zależność, przydatna przy określaniu własności fal rozchodzących się na różne sposoby:

$$I \propto A^2$$

Dla fali płaskiej, natężenie jest stałe, niezależnie od położenia. Rozchodzą się bowiem fale, których powierzchnie falowe są równoległymi prostymi.

$$I = \text{const.} \Rightarrow A = \text{const.}$$

Dla fali kulistej możemy zapisać:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = kA^2$$

$$I \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow A \propto \frac{1}{r}$$

Dla fali walcowej:

$$I = \frac{P}{2\pi r} = kA^2$$

$$I \propto \frac{1}{r} \Rightarrow A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

1.5 Fale stojące

Pojawiło się to już w równaniu falowym, ale teraz omówmy to dokładniej. Nałóżmy na siebie dwie fale biegnące o przeciwnych kierunkach drgań. Źródło drga następująco:

$$u(l,t) = A\sin\left[\omega t + \phi_0\right]$$

Drgania fali w dowolnym punkcie wyrażają się poprzez:

$$u(x,t) = \underbrace{A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x-l}{v}\right) + \phi_0\right]}_{u_+(x,t)} + \underbrace{A\sin\left[\omega\left(t - \frac{l-x}{v}\right) + \phi_0\right]}_{u_-(x,t)}$$

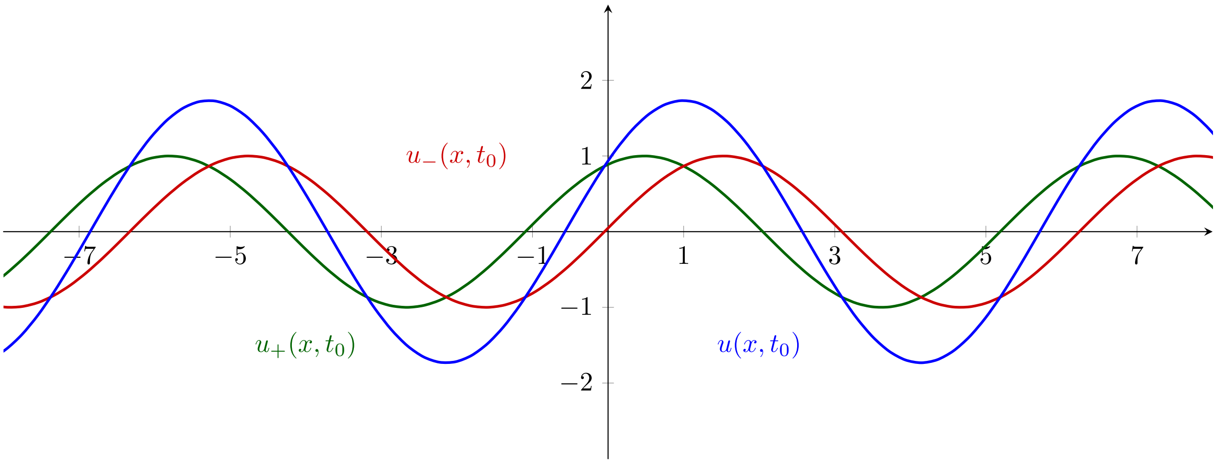
$$u(x,t) = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \underbrace{\frac{\omega l}{v} + \phi_0}_{\phi_+}\right] + A\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \underbrace{\phi_0 - \frac{\omega l}{v}}_{\phi_-}\right]$$

Korzystając z tożsamości $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ dostaniemy:

Wniosek 6. Równanie fali stojącej

$$u(x,t) = \underbrace{2A\cos\left[\frac{\omega}{v}(x-l)\right]}_{a(x)}\sin\left[\omega t + \phi_0\right]$$

Widzimy teraz skąd się wzięła ta nazwa. Człon czasowy jest niezależny od członu wychylenia z położenia równowagi. W związku z tym doliny i grzbiety nie przemieszczają się w czasie. Fala stoi i sobie oscyluje wokół stałych punktów.

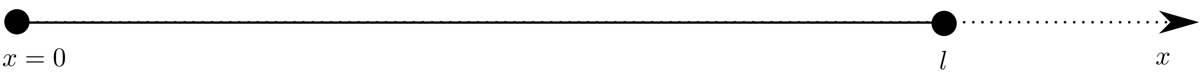


Rysunek 1.6: Wizualizacja fali stojącej w pewnym momencie, wraz z odpowiadającymi falami biegnącymi. Stałe miejsca zerowe $u(x,t)$ nazywamy **węzłami fali**, natomiast punkty osiągające największe amplitudy – **strzałkami fali**.

Stąd możemy odczytać warunek na węzły:

$$\frac{\omega x}{v} + \frac{\phi_- - \phi_+}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

1.6 Drgania własne



Rysunek 1.7: Weźmy strunę ograniczoną z dwóch stron. Stąd wniosek, że naturalnymi węzłami są punkty $x = 0,\ x = l$.

Z warunków na węzły dostajemy dwa równania:

$$\phi_- - \phi_+ = (2n+1)\pi$$

$$\frac{2l\omega}{v} + \phi_- - \phi_+ = (2m+1)\pi$$

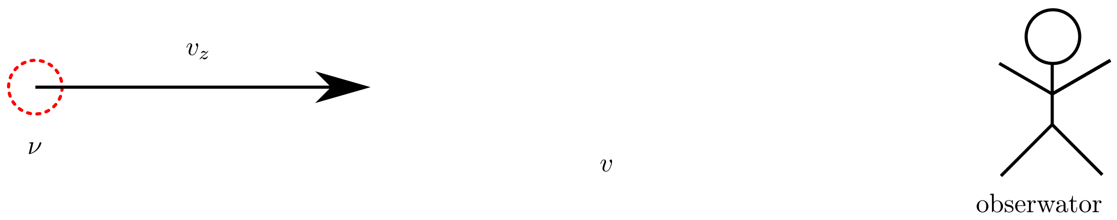
$$\Rightarrow\ \frac{2l\omega}{v} + (2n+1)\pi = (2m+1)\pi\ \Rightarrow\ \frac{2l\omega}{v} = 2k\pi$$

Stąd dostajemy kolejne harmoniczne fali:

$$\omega = \frac{k\pi v}{l} = \frac{kv}{2\nu},\ \ k \in \mathbb{N}$$

A tak poza tym, w problemach bardziej złożonych (np. drgania nie tylko w 1D) robi się to w zasadzie wprost z równania falowego. Jego rozwiązaniem jest także superpozycja rozwiązań postaci $u(\vec{r},t)$. Można wtedy zadać praktycznie dowolnie warunki brzegowe i rozwiązać.

1.7 Efekt Dopplera



Rysunek 1.8: Źródło o częstotliwości w układzie spoczywającym ν porusza się z prędkością v_z względem obserwatora. Prędkość rozchodzenia się fali w tym ośrodku wynosi v.

$$\lambda = vP = \frac{v}{\nu}$$

Długość fali odbierana przez obserwatora wynosi:

$$\lambda' = \lambda \mp v_z P = \frac{v}{\nu} \mp \frac{v_z}{\nu}$$

przy czym $-$ jest dla źródła zbliżającego się, a $+$ dla oddalającego.

$$\lambda' = \frac{v}{\nu'}$$

Wniosek 7. Źródło jest ruchome.
Częstotliwość, którą odbiera obserwator wynosi:

$$\nu' = \nu \frac{v}{v \mp v_z}$$

Rysunek 1.9: Teraz sytuacja analogiczna, tyle że obserwator się rusza a źródło jest nieruchome.

Tym razem droga między grzbietami fali jest taka sama, natomiast zmienia się czas między odbieraniem tych grzbietów, ponieważ obserwator się porusza. W związku z tym zmienia się okres fali.

$$P = \frac{\lambda}{v}$$

$$P' = \frac{\lambda}{v \pm v_{obs}}$$

przy czym $+$ odnosi się do zbliżającego się źródła, natomiast $-$ do oddalającego się.

$$P' = \frac{v}{\nu(v \pm v_{obs})} = \frac{1}{\nu'}$$

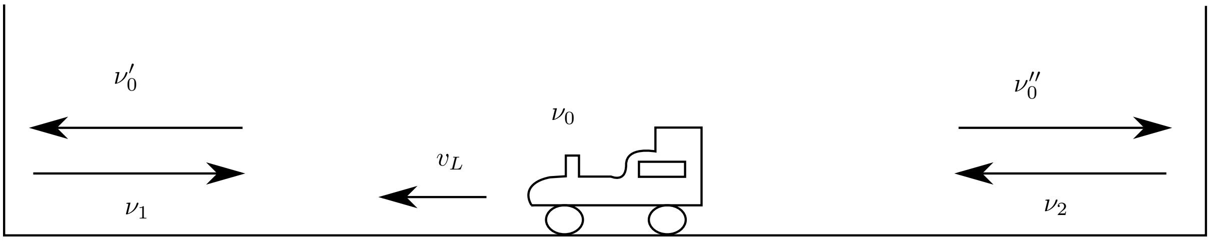
Wniosek 8. Obserwator jest ruchomy.
Częstotliwość, którą odbiera obserwator wynosi:

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_{obs}}{v}$$

Wniosek 9. Zarówno obserwator, jak i źródło są ruchome. Wówczas zachodzi związek:

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_{obs}}{v \mp v_z}$$

gdzie górne znaki odpowiadają sytuacji gdy wektory prędkości są skierowane ku sobie, a dolne gdy przeciwnie.



Rysunek 1.10: Lokomotywa gwiżdże z częstotliwością ν_0, a jedzie z prędkością v_L. Przed nią i za nią są ściany wąwozu. Jakie częstotliwości słyszy maszynista? Prędkość propagacji dźwięku wynosi v.

Zasadniczo mamy tutaj 3 różne częstotliwości, które powinien słyszeć maszynista.

$$\nu_0' = \nu_0 \frac{v}{v - v_L}$$

$$\nu_1 = \nu_0' \frac{v + v_L}{v} = \nu_0 \frac{v + v_L}{v - v_L}$$

Jest to pierwsza z trzech słyszanych częstotliwości. Drugą otrzymujemy analogicznie.

$$\nu_0'' = \nu_0 \frac{v}{v + v_L}$$

$$\nu_2 = \nu_0'' \frac{v - v_L}{v} = \nu_0 \frac{v - v_L}{v + v_L}$$

Trzecia częstotliwość jest tą emitowaną przez lokomotywę.

1.8 Interferencja 2

Jeśli światło zmienia ośrodek, to droga optyczna też się zmienia. Dzieje się tak przez zmianę długości fali.

$$\lambda = cP, \ \lambda_1 = vP$$

gdzie P jest okresem fali. Teraz robimy interferencję w tym nowym ośrodku:

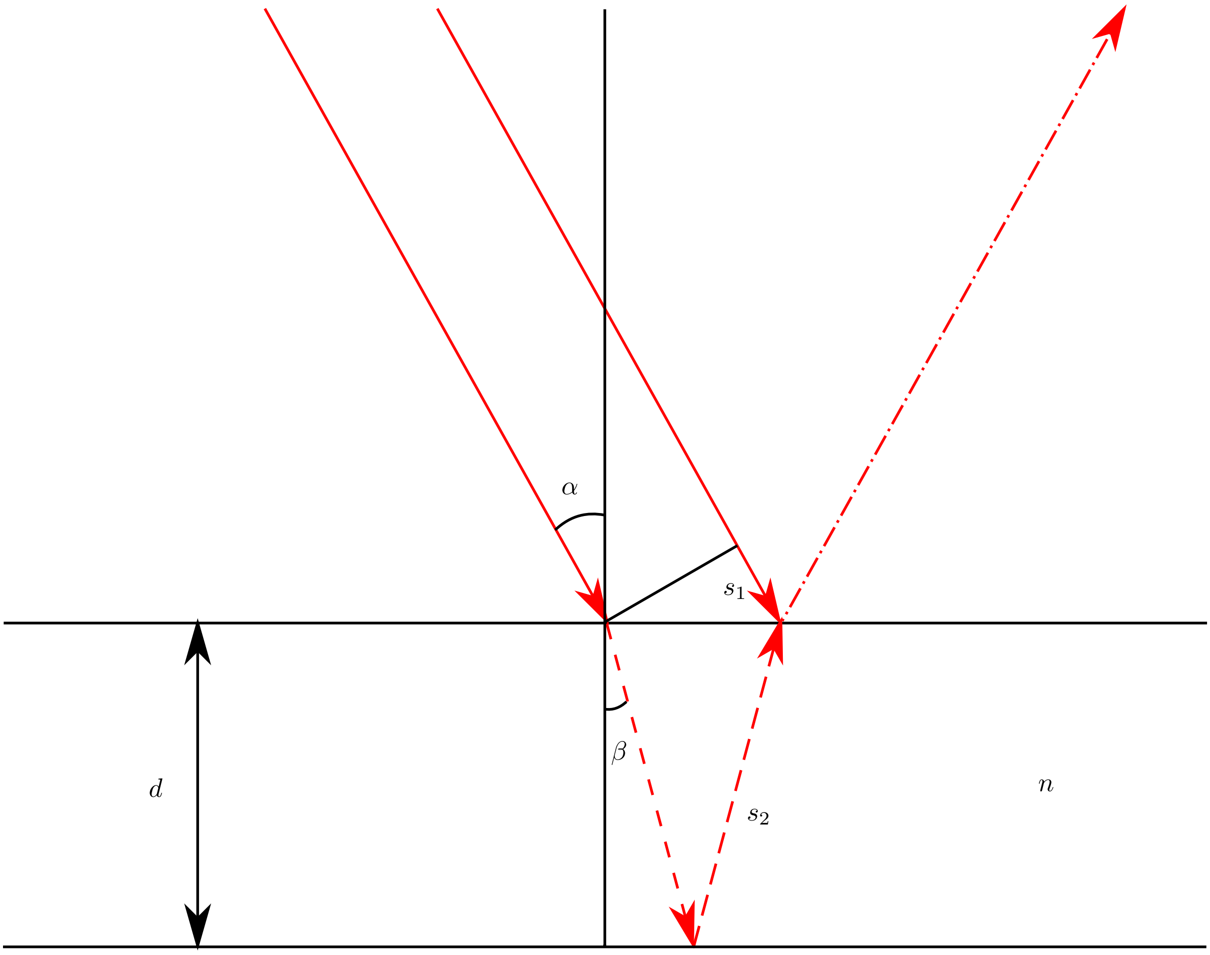
$$r_2 - r_1 = k\lambda_1 = \frac{k\lambda}{n}$$

Stąd wyrażenie $n(r_2 - r_1)$ nazywamy drogą optyczną.

Twierdzenie 5. Mierząc długość fali w próżni musimy uwzględniać drogę optyczną, a nie zwykłą drogę, którą pokonuje wiązka. Przenosi się to na wzory interferencyjne.

$$nd \sin\alpha = k\lambda$$

Wniosek 10. Przy odbiciu od gęstszego ośrodka faza fali zwiększa się o π, zatem długość o $\frac{\lambda}{2}$.



Rysunek 1.11: W tym przypadku mamy interferencję poprzez załamanie i odbicie fali. Wyznacz warunek na maksimum interferencyjne w zależności od d, n, α.

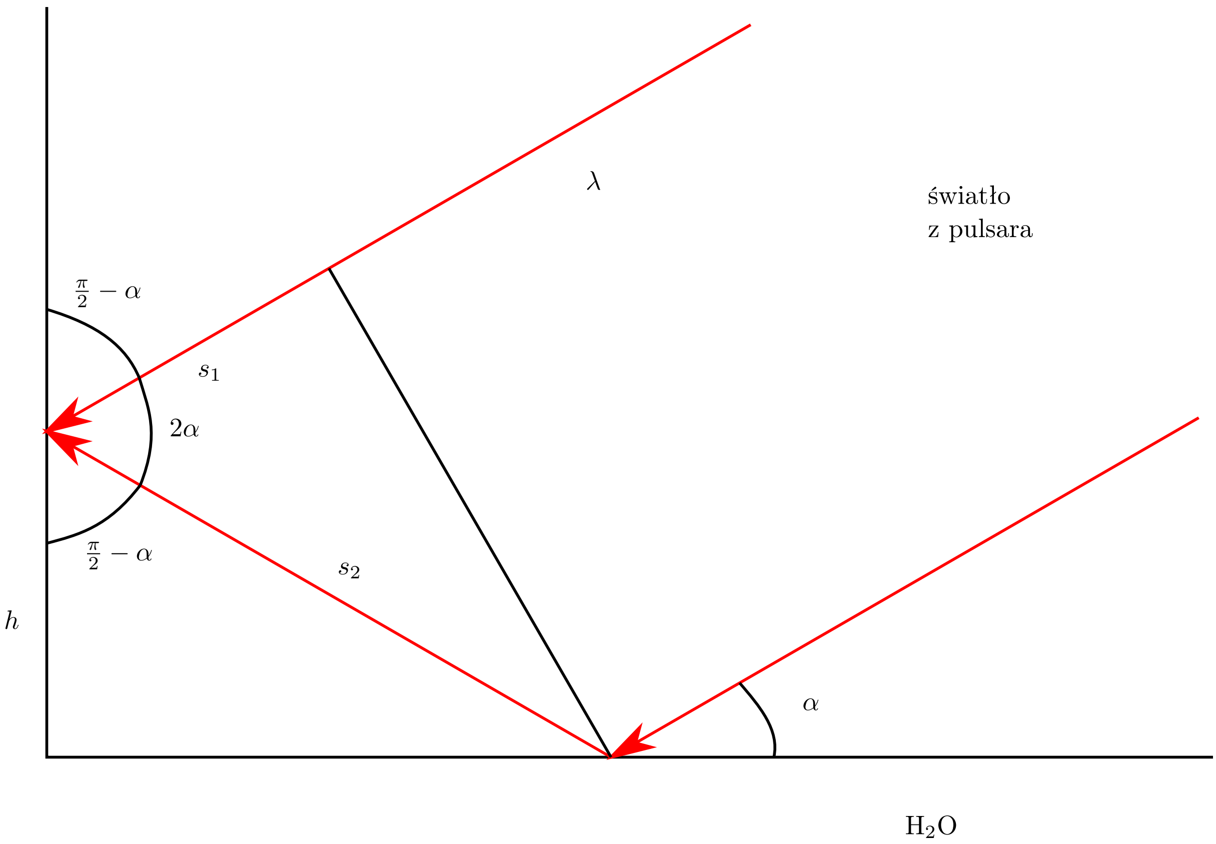
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \ \frac{d}{s_2} = \cos\beta, \ \frac{s_1}{2s_2 \sin\beta} = \sin\alpha$$

Droga optyczna na maksimum interferencyjne:

$$2s_2 n - s_1 = k\lambda + \underbrace{\frac{\lambda}{2}}_{\text{odbicie}} = \frac{2k+1}{2}\lambda$$

$$\Delta s = \frac{2d}{\cos\beta}(n - \sin\alpha\sin\beta) = \frac{2d}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}(n - \sin\alpha\sin\beta) = \frac{2dn}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\left(n - \frac{\sin^2\alpha}{n}\right)$$

$$\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \frac{2k+1}{2}\lambda$$



Rysunek 1.12: Leci sobie monochromatyczne światło z pulsara. Odbija się od jeziora i interferuje na odbiorniku, na wysokości h. Dla jakiego α występuje maksymalne wzmocnienie sygnału?

Na powierzchni jeziora następuje odbicie, a jest to ośrodek gęstszy optycznie, zatem zmienia się faza.

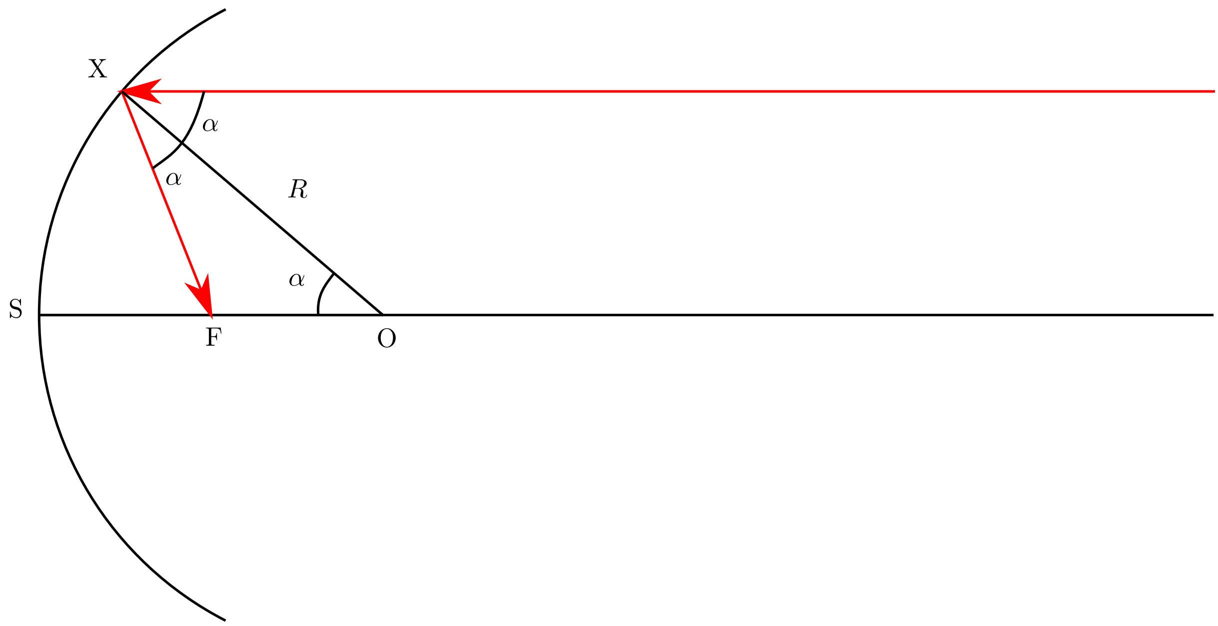
$$s_2 - s_1 = \frac{2k+1}{2}\lambda,\ \frac{s_1}{s_2} = \cos 2\alpha,\ \frac{h}{s_2} = \sin\alpha$$

$$\Delta s = \frac{h}{\sin\alpha}(1-\cos 2\alpha) = \frac{h}{\sin\alpha}\left(1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) = 2h\sin\alpha$$

1.9 Siatka dyfrakcyjna

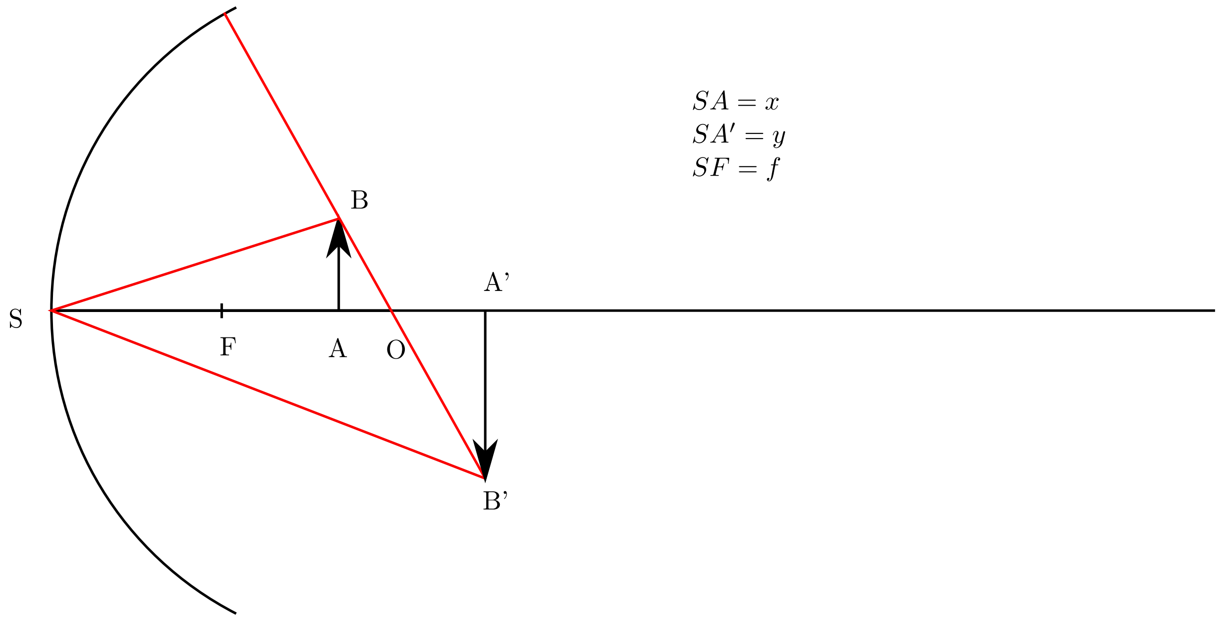
Definicja 4. Stała siatki dyfrakcyjnej – $d = 1\,\mathrm{mm}/N$, gdzie N to ilość rys/otworków na $1\,\mathrm{mm}$ siatki.

1.10 Zwierciadła wklęsłe i wypukłe



Rysunek 1.13: Zwierciadło kuliste wklęsłe w przybliżeniu małych kątów. Jeśli promienie są przyosiowe i równoległe do osi optycznej, to $XF \approx OF$ i przecinają się w jednym punkcie - ognisku

$$f = SF = R - OF = R - \frac{R}{2\cos\alpha} \approx \frac{R}{2}$$



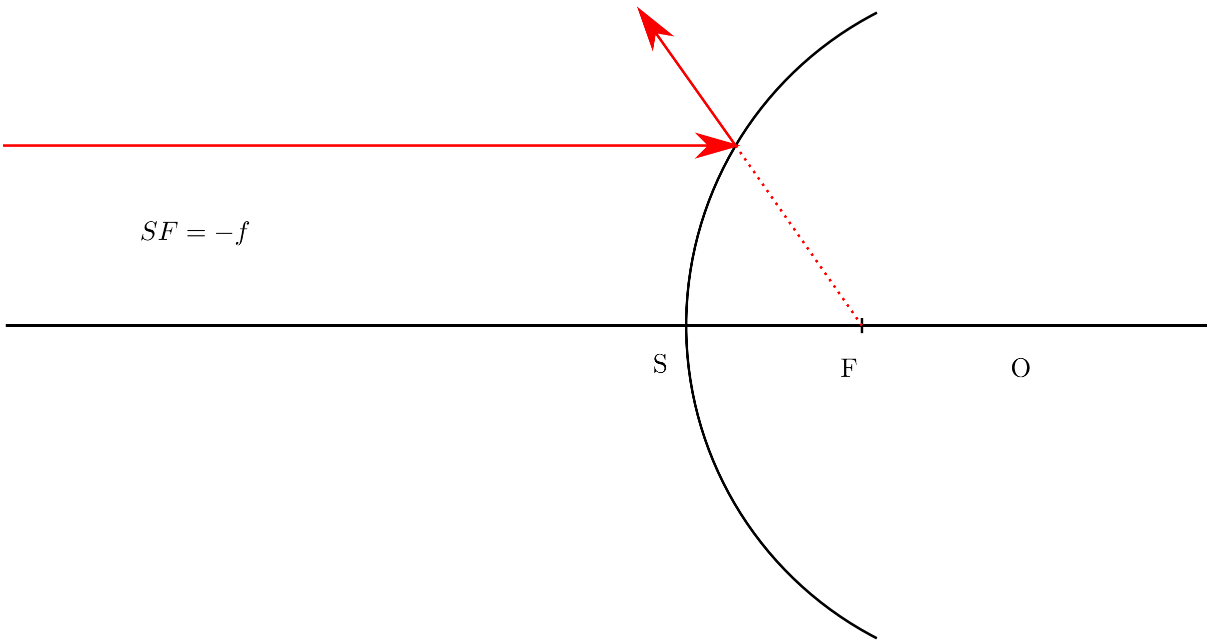
Rysunek 1.14: Obraz rzeczywisty, odwrócony, powiększony.

$$\triangle ABS \sim \triangle A'B'S\,(kkk), \;\; \triangle ABO \sim \triangle A'B'O\,(kkk)$$

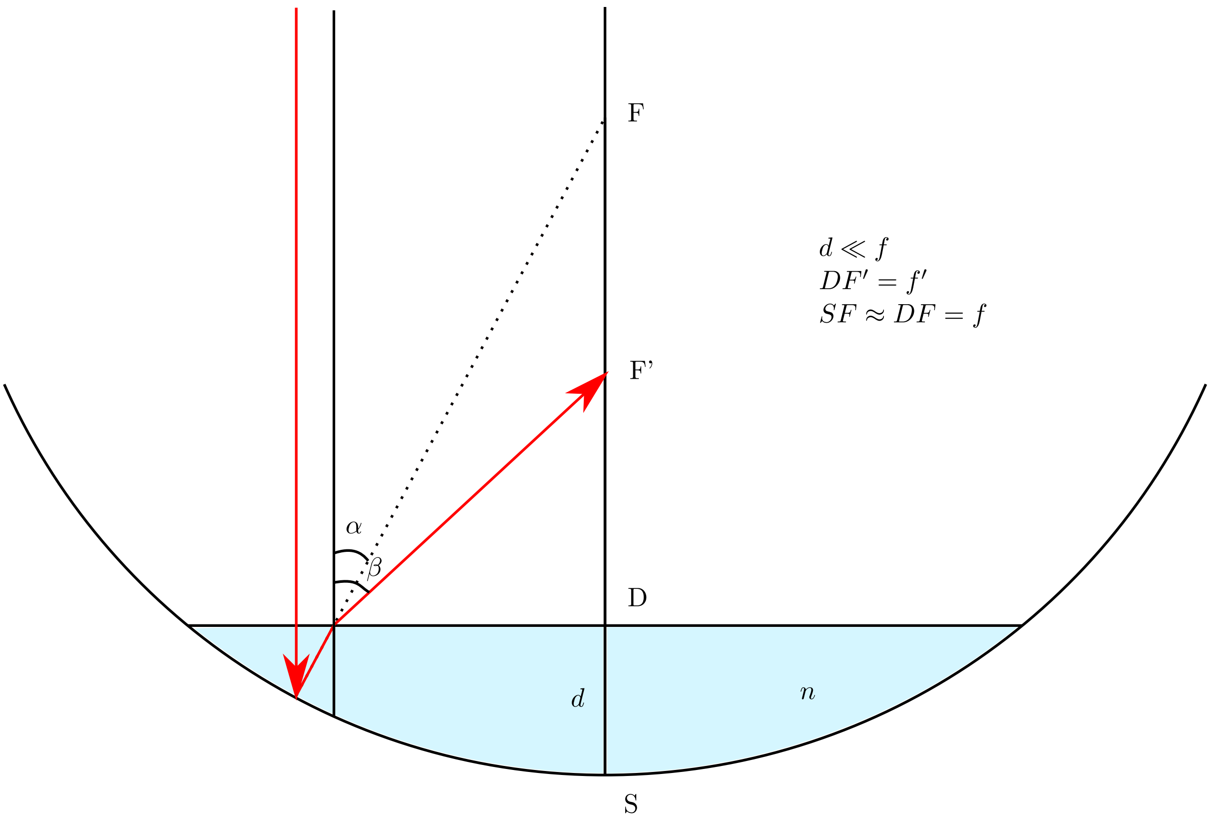
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'S}{AS} = \frac{y}{x}, \;\; \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'O}{AO} = \frac{y-2f}{2f-x}$$

$$2fy - xy = xy - 2fx$$
$$fx + fy = xy$$

Twierdzenie 6. Równanie soczewki:
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$
W przypadku wszystkiego, co pozorne w optyce umawiamy się, że długości takich odcinków są ujemne. Wtedy równanie soczewki pozostaje niezmienione. Jakby co, ognisko też może być pozorne.



Rysunek 1.15: Zwierciadło kuliste wypukłe z pozornym ogniskiem. Otrzymywany obraz jest zawsze prosty, pozorny i pomniejszony.



Rysunek 1.16: Szukamy nową ogniskową po zalaniu zwierciadła cienką warstwą wody.

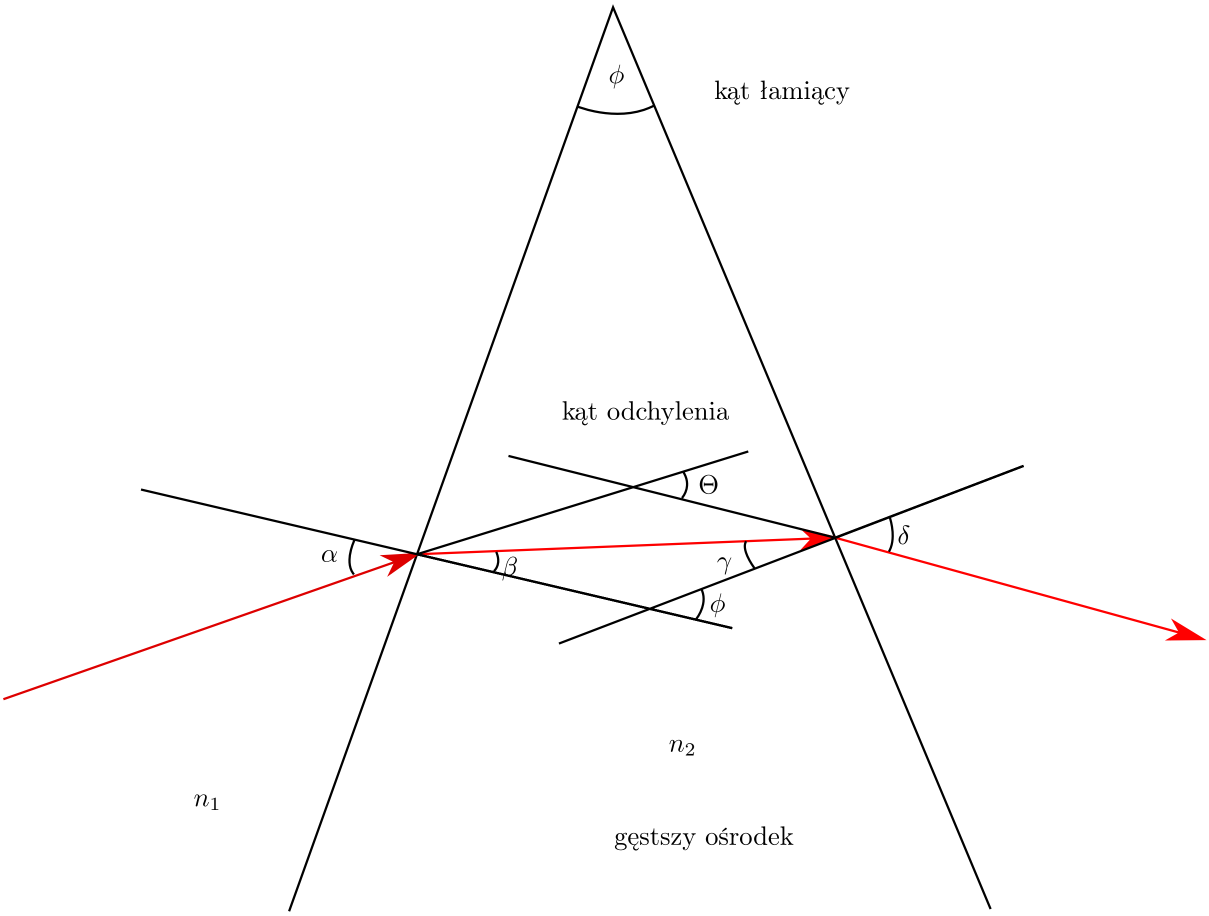
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n,\ \ f' = x\cot\beta,\ \ f = x\cot\alpha$$

$$f\tan\alpha = f'\tan\beta$$

Możemy teraz zrobić przybliżenie małych kątów.

$$f' = f\frac{\alpha}{\beta} = \frac{f}{n}$$

1.11 Pryzmat



Rysunek 1.17: Schemat pryzmatu.

Chcielibyśmy znaleźć kąt odchylenia w zależności od parametrów wejściowych. Będziemy robili przybliżenie małych kątów.

$$\Theta = \alpha - \beta + \delta - \gamma$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n_1}{n_2}, \ \frac{\gamma}{\delta} = \frac{n_1}{n_2}$$

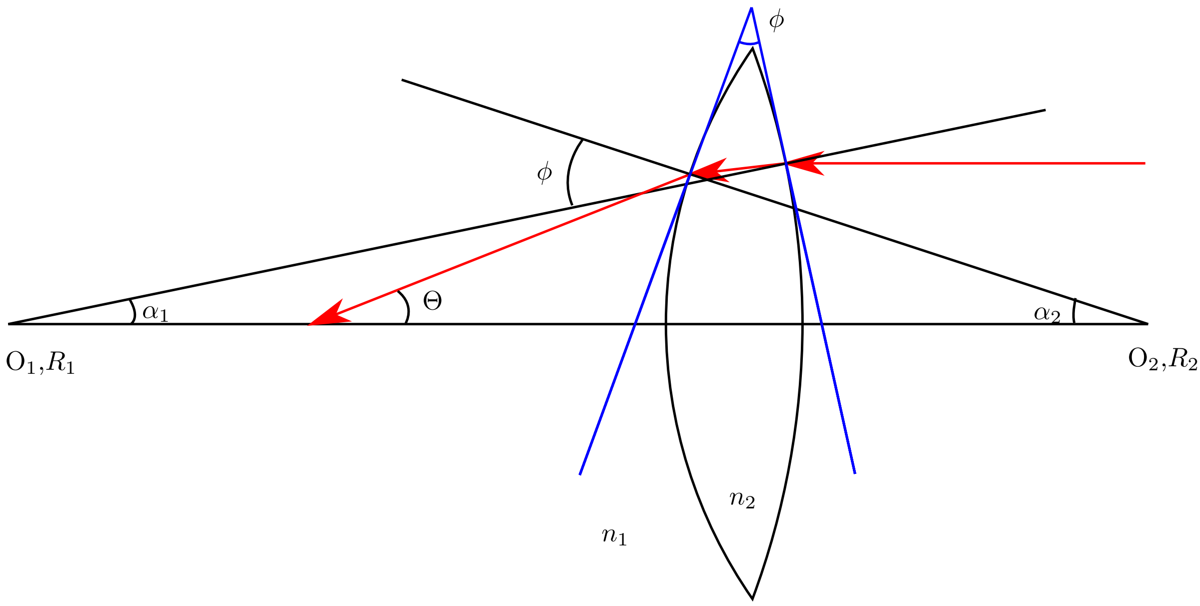
$$\Theta = \alpha \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \gamma \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) = \alpha \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \left(\phi - \frac{n_1}{n_2}\alpha\right)\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

Wniosek 11. Dla dostatecznie małych α kąt odchylenia zależy jedynie od ośrodka i kąta łamiącego.

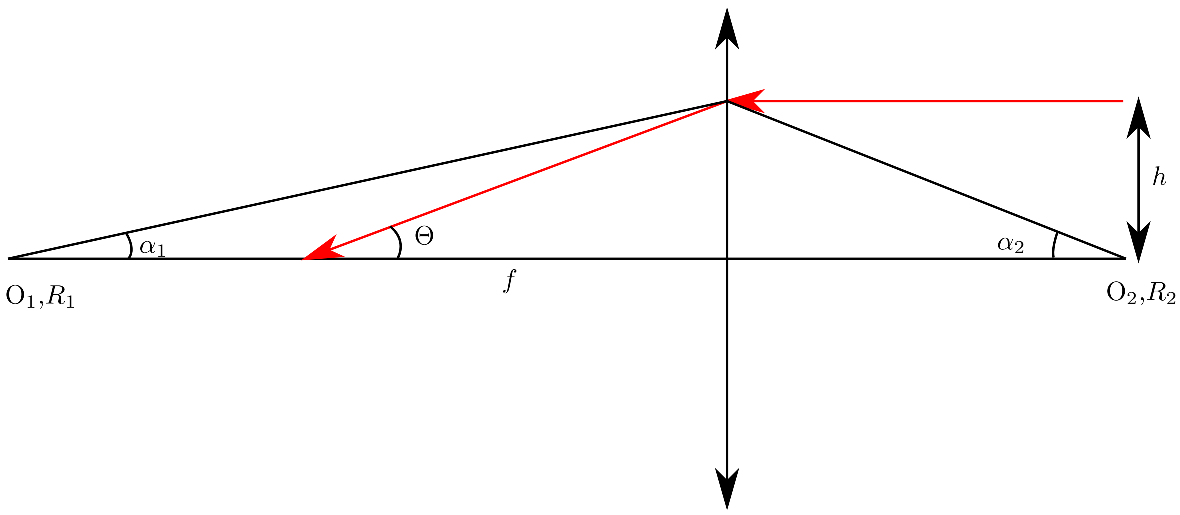
$$\Theta = \phi \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

1.12 Soczewki

Definicja 5. Soczewka - obiekt ograniczony dwiema powierzchniami sferycznymi.



Rysunek 1.18: Soczewka dwuwypukła z lokalnym pryzmatem i kątami łamiącymi i odchylenia.



Rysunek 1.19: Odchudzona soczewka.

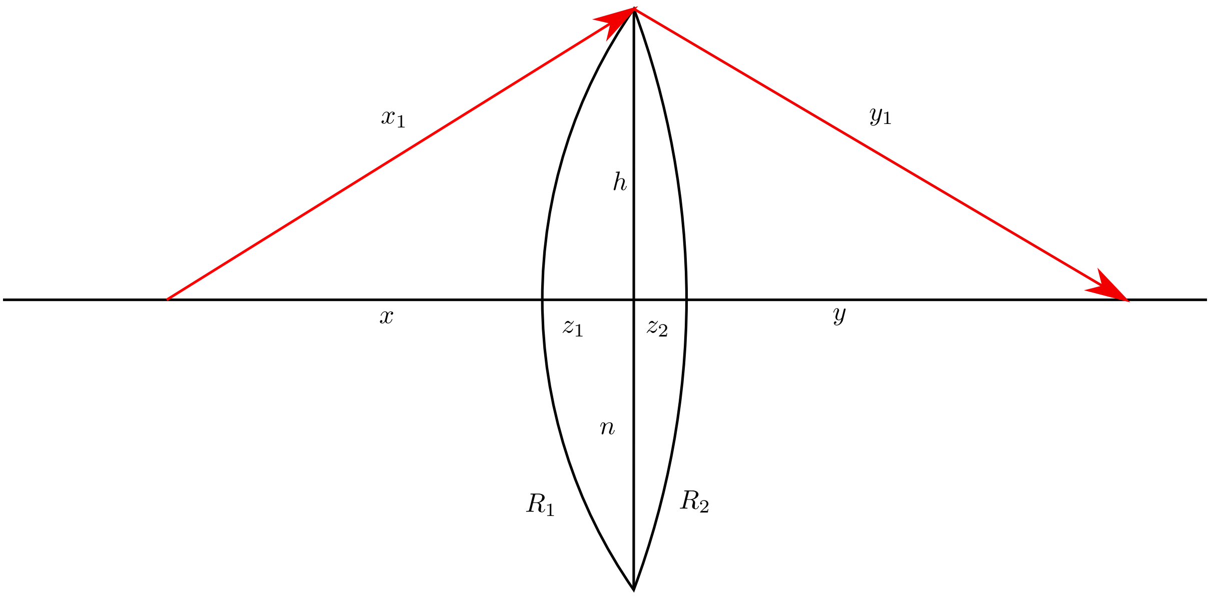
$$\Theta = \frac{h}{f} = (\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) = \left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2}\right)\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

Twierdzenie 7. Zdolność skupiająca soczewki:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)$$

Wzór jest symetryczny ze względu na R_1 i R_2.
$R > 0$ dla powierzchni wypukłej
$R < 0$ dla powierzchni wklęsłej

Twierdzenie 8. Soczewka nie zmienia fazy promieniom padającym pod różnymi kątami - droga optyczna jest stała, a obraz punktu jest punktem.



Rysunek 1.20: Schematyczne porównanie dwóch wiązek - czerwonej i współosiowej.

Dowód. Pokażemy, że $x_1 + y_1 = n(z_1 + z_2) + x + y$.

$$(R_1 - z_1)^2 + h^2 = R_1^2 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - h^2} \\ z_2 = R_2 - \sqrt{R_2^2 - h^2} \end{cases}$$

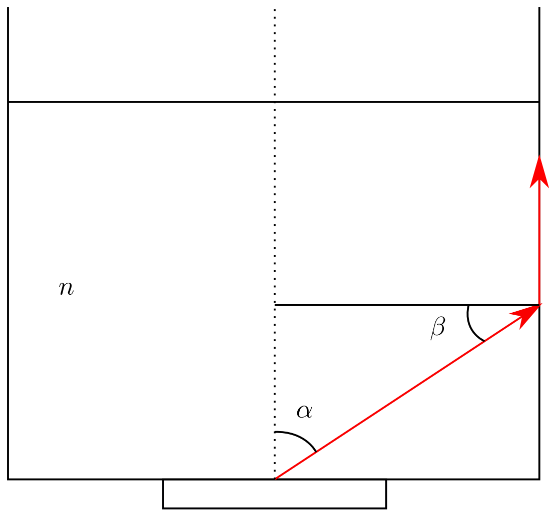
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{(x + z_1)^2 + h^2} \\ y_1 = \sqrt{(y + z_2)^2 + h^2} \end{cases}$$

Użyjemy przybliżenia $\sqrt{1+t} \approx 1 + t/2$, dla małych t.

$$x_1 = (x + z_1)\sqrt{1 + \frac{h^2}{(x+z_1)^2}} \approx (x + z_1)\left(1 + \frac{h^2}{2(x+z_1)^2}\right) = (x + z_1) + \frac{h^2}{2(x+z_1)}$$

$$z_1 = R_1 - R_1\sqrt{1 - \frac{h^2}{R_1^2}} \approx R_1 - R_1\left(1 - \frac{h^2}{2R_1^2}\right) = \frac{h^2}{2R_1^2}$$

Wystarczy się jeszcze tym pobawić i wyjdzie. ■



Rysunek 1.21: Patrzymy z boku przez wodę i nie widzimy pieniążka, na którym stoi szklanka. Dlaczego tak się dzieje?

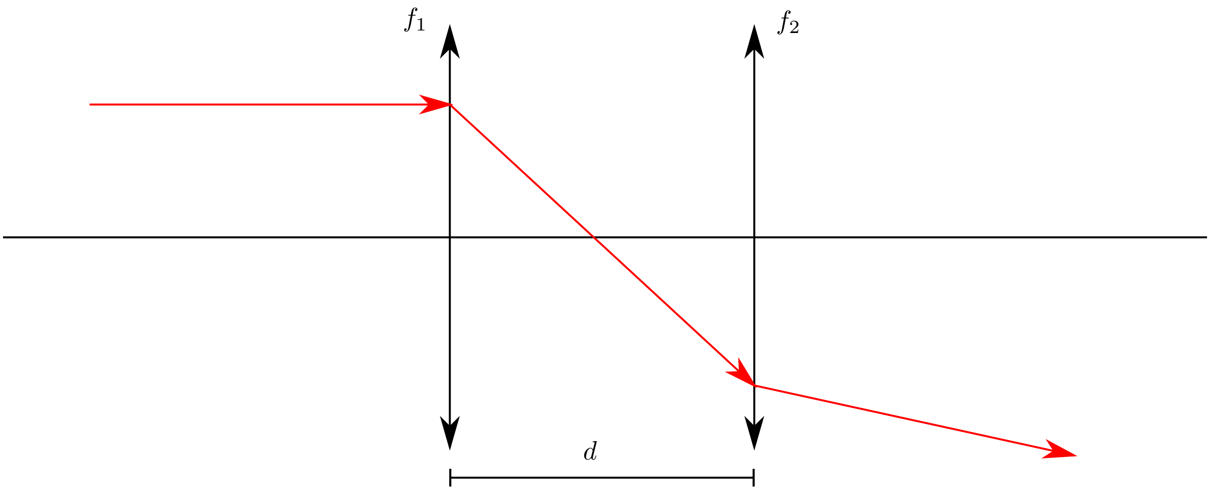
Światło pochodzące od pieniążka przechodzi przez wodę i na granicy ośrodków załamuje się. Nie możemy go zobaczyć przez całkowite wewnętrzne odbicie. Wyznaczymy warunek na n.

$$\beta \geq \alpha_{gr}, \ \alpha \leq \alpha_{gr}$$

$$\cos\alpha = \sin\beta \geq \frac{1}{n} \geq \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha \leq \frac{1}{2}, \ \sin^2\alpha_{gr} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow n \geq \sqrt{2}$$

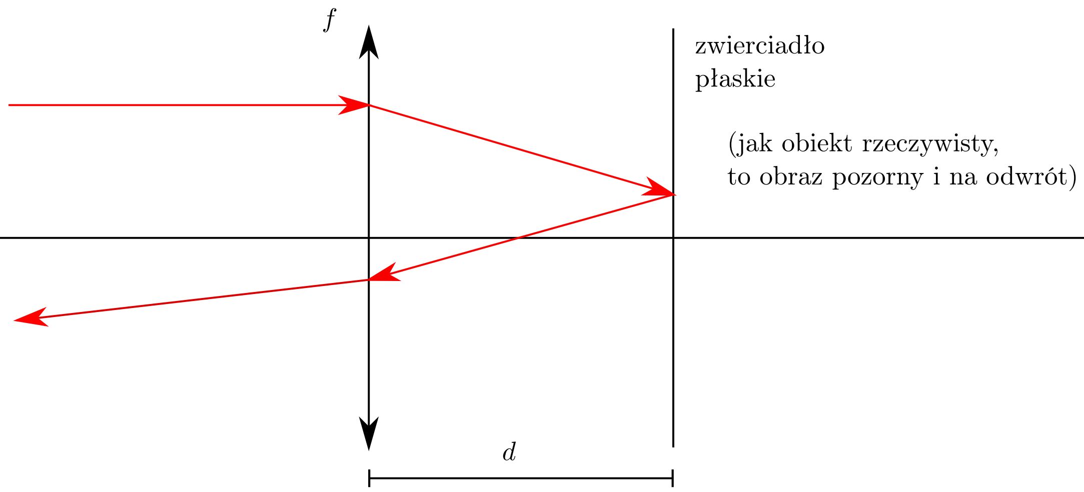


Rysunek 1.22: Czy da się przekształcić wiązkę zbieżną na rozbieżną za pomocą dwóch soczewek skupiających?

$$\underbrace{\frac{1}{f_1} = \frac{1}{y_1},}_{\text{startujemy z okolic } \infty} \qquad \frac{1}{y_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{d-y_1} = \frac{d-f_1-f_2}{f_2(d-f_1)}$$

Aby końcowy obraz był ujemny (pozorny) musi być spełnione:

$$f_1 < d < f_1 + f_2$$



Rysunek 1.23: Wyprowadzić warunki na powstanie obrazu rzeczywistego i pozornego po powtórnym przejściu przez soczewkę.

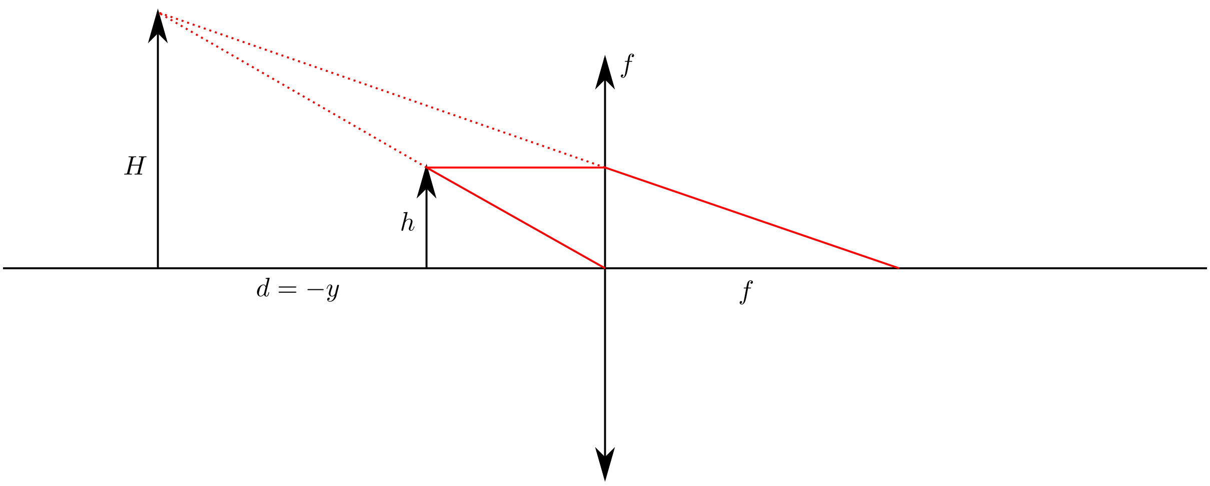
$$y_1 = f,\ x_2 = d - f,\ y_2 = -x_2 = f - d$$
$$x_3 = d - y_2 = 2d - f$$
$$\frac{1}{y_3} = \frac{1}{f} - \frac{1}{2d - f} \Rightarrow y_3 = \frac{f(2d - f)}{2(d - f)}$$

Stąd widać, że:

$$\begin{cases} d \in \big(f/2, f\big) & \text{– pozorny} \\ d \in \big(-\infty, f/2\big) \cup (f, +\infty) & \text{– rzeczywisty} \end{cases}$$

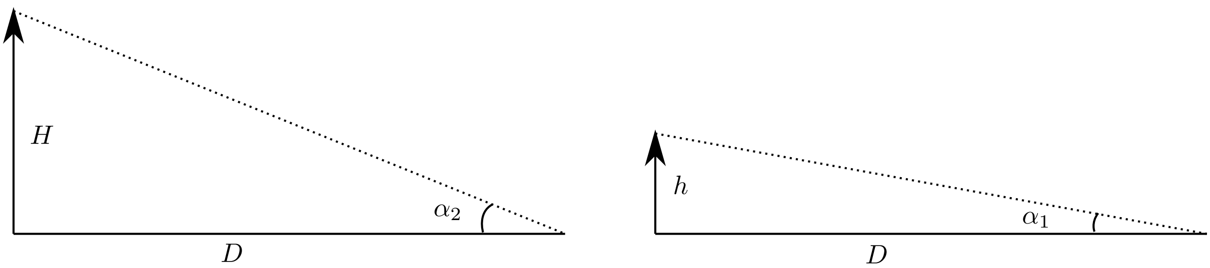
1.13 Polaryzacja przez odbicie

1.14 Powiększenie liniowe i kątowe



Rysunek 1.24: Schemat lupy. Obiekt jest postawiony w odległości $x < f$ przez co obraz jest powiększony, prosty i pozorny $(y < 0)$.

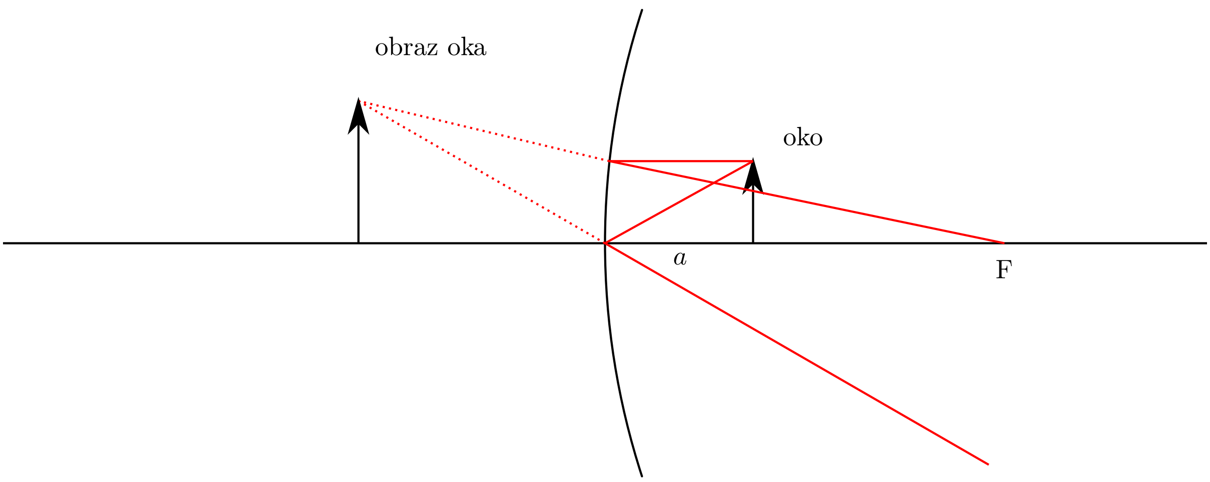
$$\text{Powiększenie liniowe: } p = \left|\frac{H}{h}\right| = \frac{d}{x} = d\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d}\right) = 1 + \frac{d}{f}$$



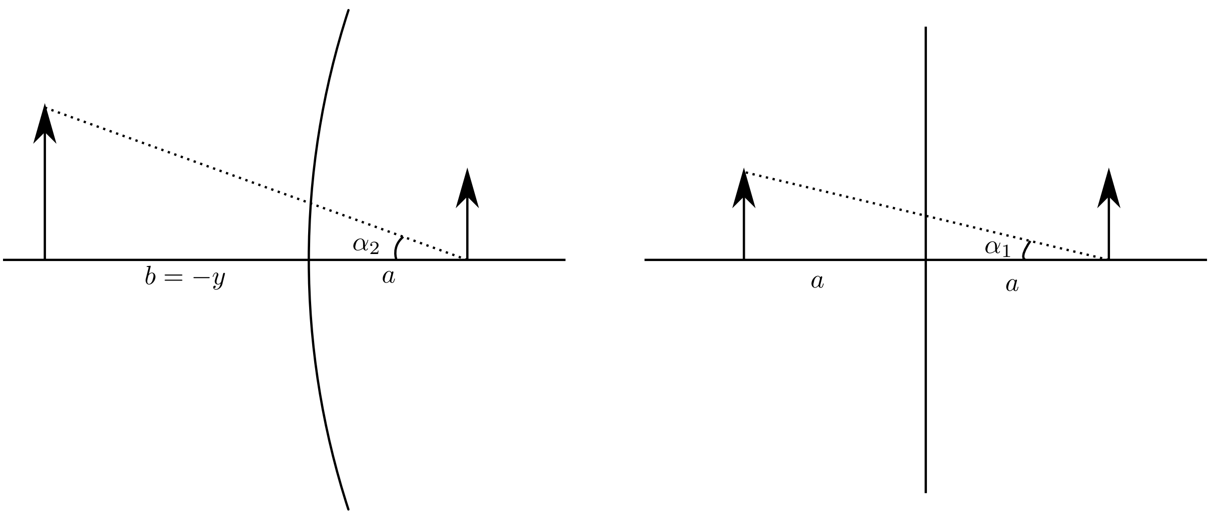
Rysunek 1.25: Schemat powiększenia kątowego, gdzie D jest odległością dobrego widzenia.

$$\text{Powiększenie kątowe: } p_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \approx \frac{H}{D} \cdot \frac{D}{h} = \frac{H}{h}$$

Widzimy więc, że powiększenia liniowe i kątowe dają te same wartości jedynie dla przybliżenia małych kątów.



Rysunek 1.26: Człowiek patrzy w zwierciadło sferyczne wklęsłe i widzi prosty obraz swojego oka. Rozmiar kątowy jest $N = 1.8$ razy większy niż rozmiar kątowy w zwierciadle płaskim umieszczonym w tej samej odległości a od oka. Wyznacz promień krzywizny zwierciadła.



Rysunek 1.27: Rozmiary kątowe w zwierciadle wklęsłym i w zwierciadle płaskim.

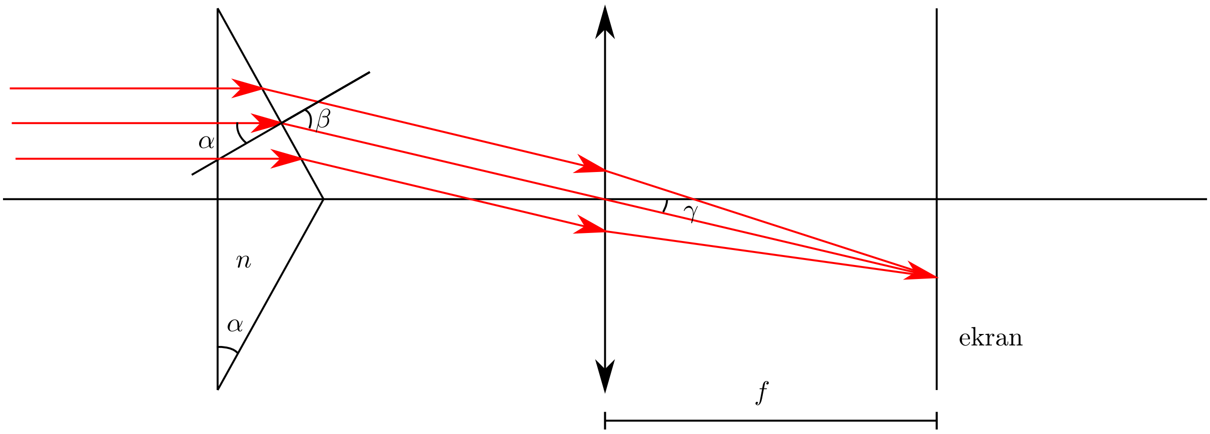
Oko nie jest jakimś wyjątkowo dużym obiektem, zatem rozmiary kątowe także powinny być stosunkowo niewielkie.

$$N = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \approx \frac{H}{a+b} \cdot \frac{2a}{h} = \frac{H}{h} \cdot \frac{2a}{a-y} = \frac{-y}{a} \cdot \frac{2a}{a-y}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{y} \Rightarrow R = \frac{2ay}{a+y}$$

$$Na - Ny + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{Na}{N-2}$$

$$R = \frac{\frac{2Na^2}{N-2}}{a + \frac{Na}{N-2}} = \frac{2Na^2}{2Na-2a} = \frac{Na}{N-1}$$



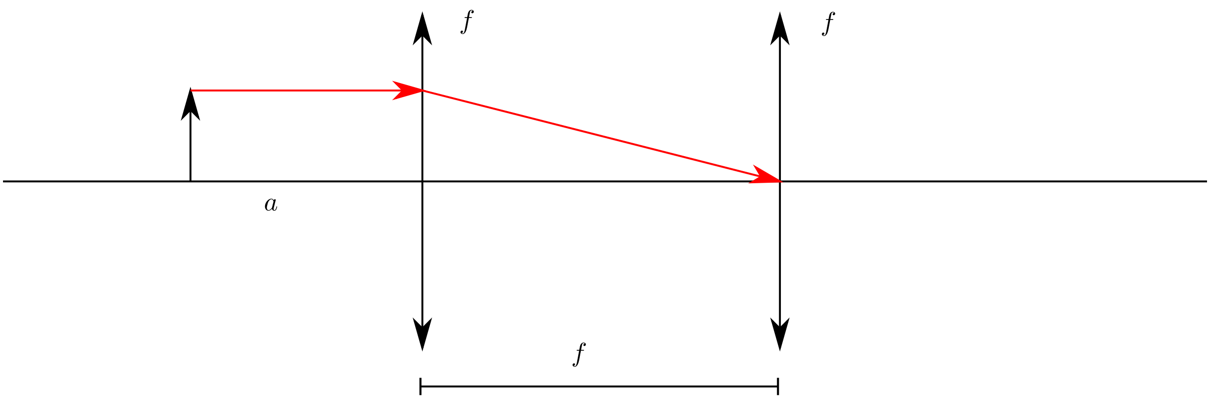
Rysunek 1.28: Jest sobie szklany stożek o kącie rozwarcia $\alpha \ll 1$, soczewka i ekran ustawiony w odległości f od niej. Jaki powstanie obraz?

Na ekranie powstanie okrąg. Równoległe promienie zawsze przecinają się w jednym punkcie, w płaszczyźnie ogniska, chyba że uwzględniamy komę. Obliczyć promień tego okręgu.

$$\frac{\beta}{\alpha} = n, \ \gamma + \frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta = \pi$$

$$\gamma = \beta - \alpha = \alpha(n-1)$$

$$R = f \tan\gamma \approx f\alpha(n-1)$$



Rysunek 1.29: Jaki powstanie obraz?

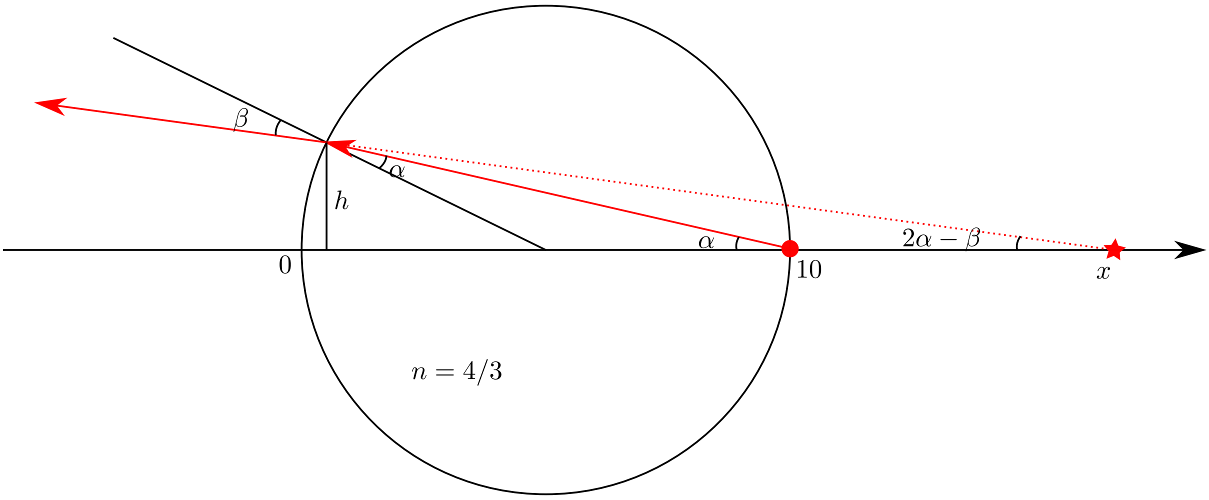
$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{a-f}{af}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f - y_1} + \frac{1}{y_2}$$

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f - \frac{af}{a-f}} = \frac{\frac{af}{f-a}}{f\left(f - \frac{af}{a-f}\right)} = \frac{a}{(f-a)\left(f + \frac{af}{f-a}\right)} = \frac{a}{f^2 - af + af}$$

$$y_2 = \frac{f^2}{a}$$

Zatem obraz zawsze będzie rzeczywisty. Tak samo byłoby dla innych soczewek - zawsze $f^2 > 0$.



Rysunek 1.30: Trzymamy oko zaraz przy cieniutkiej kuli wypełnionej wodą. Na osi optycznej umieszczamy paproszek i pytamy jak zmieni się odległość od paproszka, którą widzimy?

Odległość, którą postrzegamy pochodzi od przedłużenia załamanego promienia przyosiowego. Musimy zatem policzyć odległość x.

$$\frac{h}{2R} \approx \tan\alpha \approx \alpha$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{\beta}{\alpha} = n$$

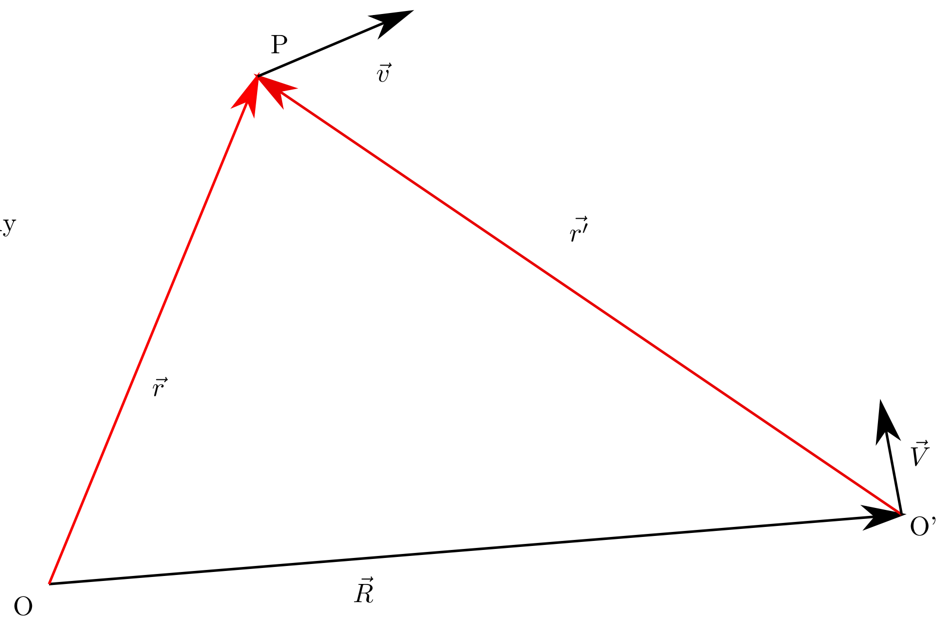
$$x \approx \frac{h}{\tan(2\alpha - \beta)} \approx \frac{h}{2\alpha - \beta} = \frac{2R\alpha}{2\alpha - n\alpha} = \frac{2R}{\frac{2}{3}} = 3R = 15$$

Rozdział 2

Szczególna Teoria Względności

2.1 Transformacja Galileusza

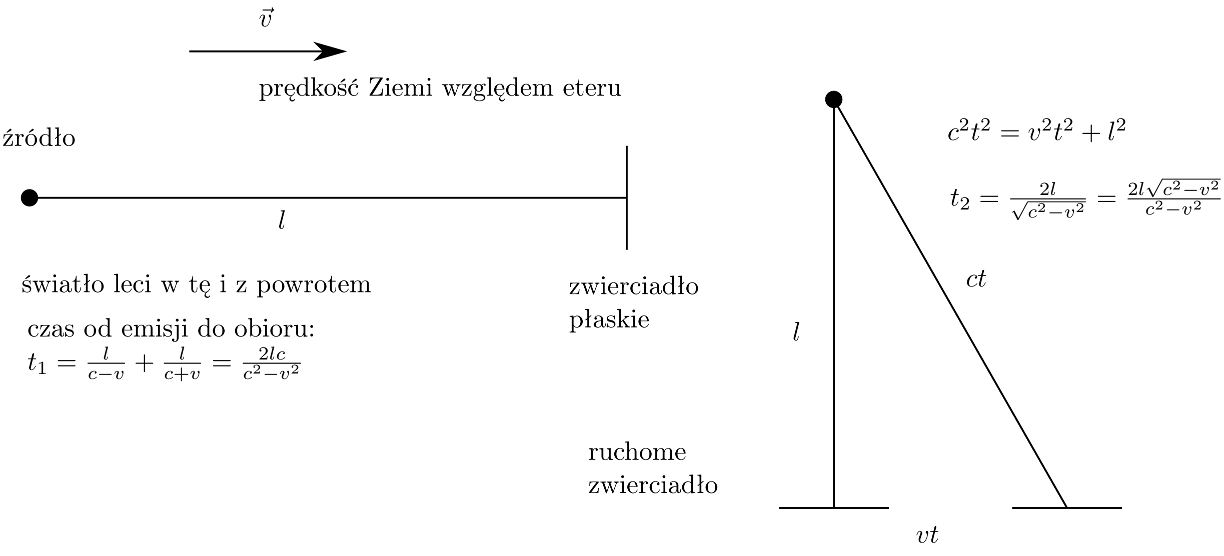
dwa układy
inercjalne



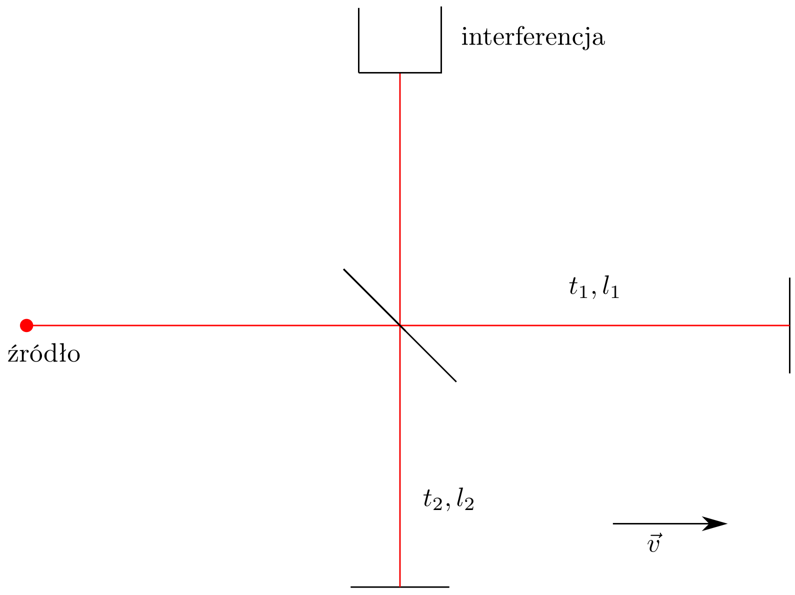
Rysunek 2.1: Mamy dwa układy inercjalne, poruszające się względem siebie. Czas mierzą tak samo. $\vec{R} = \vec{R_0} + \vec{V}t$. Niech $\vec{R_0} = 0$.

Przejście między tymi układami opisuje transformacja Galileuszowa:

$$P'(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} - \vec{R} \\ t' = t \\ \vec{v'} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r'}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} - \vec{V} \\ \vec{a'} = \vec{a} \end{cases}$$



Rysunek 2.2: Widzimy, że $t_2 < t_1$. Efekt doświadczenia był negatywny. Nie wykryto prędkości Ziemi względem eteru. Interpretacje były dwie: Ziemia jest wyróżnionym układem lub światło rozchodzi się z tą samą prędkością w każdym układzie.



Rysunek 2.3: Interferometryczny eksperyment Michelsona-Morleya.

$$\Delta t = \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2} - \frac{2l_2\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2}$$

Po obróceniu interferometru o $\pi/2$:

$$\Delta t' = \frac{2\left(l_1\sqrt{c^2 - v^2} - l_2 c\right)}{c^2 - v^2}$$

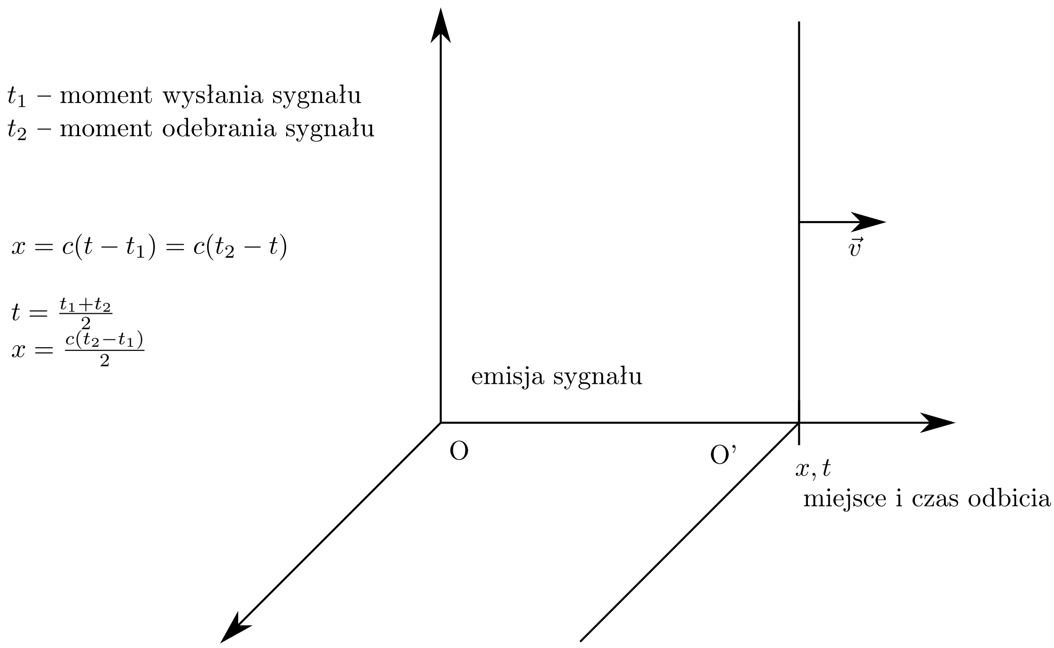
$$\tau = \Delta t - \Delta t' = \frac{2\left[l_1\left(c - \sqrt{c^2 - v^2}\right) + l_2\left(c - \sqrt{c^2 - v^2}\right)\right]}{c^2 - v^2} = \frac{2(l_1 + l_2)\left(c - \sqrt{c^2 - v^2}\right)}{c^2 - v^2}$$

$$c\tau = k\lambda$$

Z doświadczenia nie zaobserwowaliśmy przesunięcia prążków, zatem

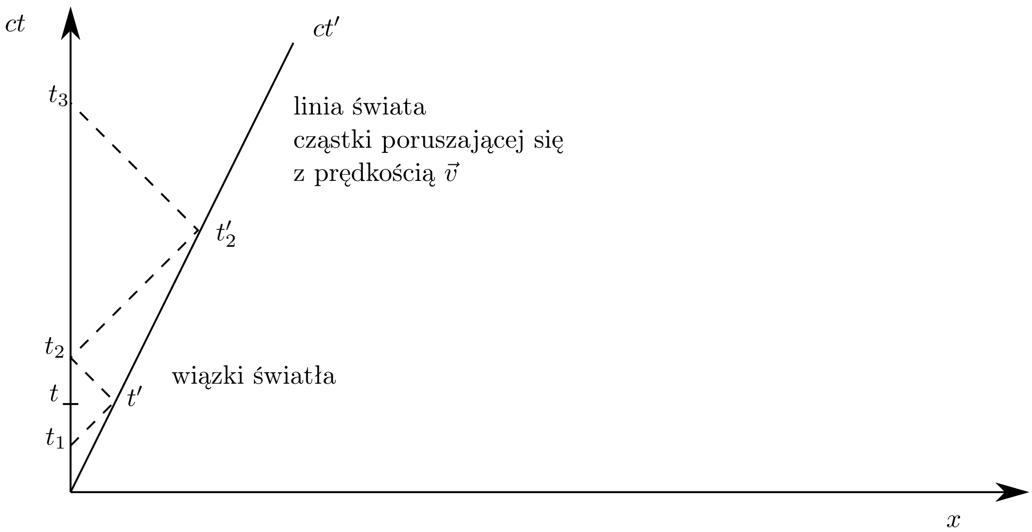
$$c = \sqrt{c^2 - v^2} \Rightarrow v = 0$$

skąd wcześniej wspomniane interpretacje doświadczenia Michelsona-Morleya.



Rysunek 2.4: Układ wysyłający i odbierający wiązki światła.

2.2 Transformacja Lorentza



Rysunek 2.5: Randomowe worldlines. Linia świata układu cząstki to oś czasowa ct' tego układu. Dla obserwatora w układzie spoczywającym odbicie następuje w chwili t, dla poruszającego się w momencie t'.

$$\frac{t'}{t_1} = \frac{t'_2}{t_2} = \alpha, \quad \frac{t_2}{t'} = \frac{t_3}{t'_2} = \alpha$$

gdyż układy są równoważne.

$$t_1 = \frac{t'}{\alpha}, \quad t_2 = \alpha t'$$

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{t'}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow t' \leq t$$

Z punktu widzenia O' t i t' nie są zdarzeniami równoczesnymi. Dla niego równoczesne jest t' i jakieś wydarzenie na ct przed t.

$$c(t_2 - t_1) = v(t_1 + t_2)$$

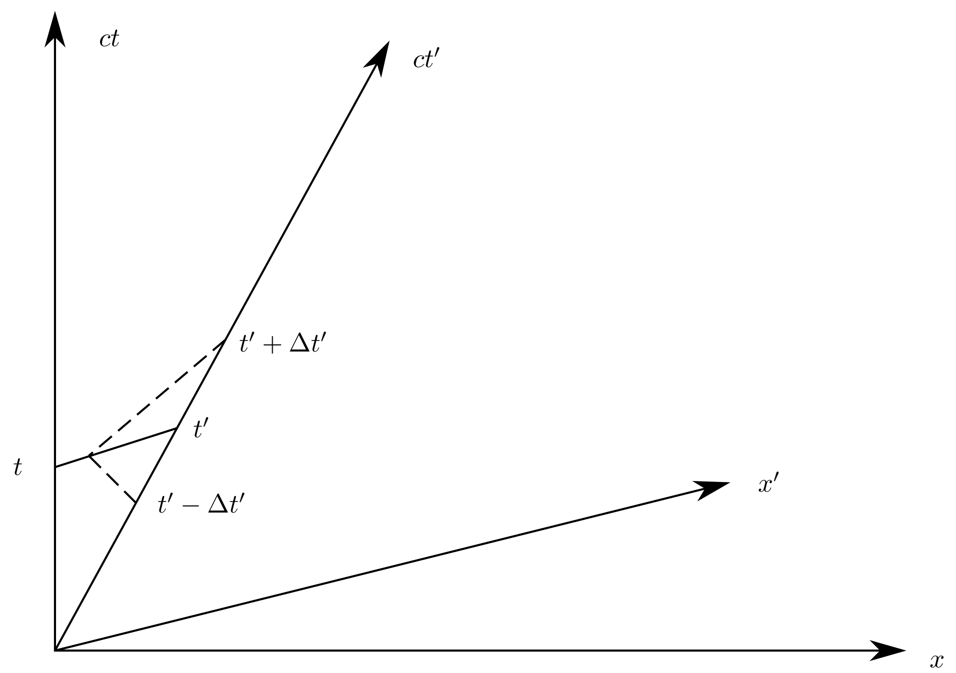
$$ct'\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) = vt'\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$c\left(\alpha^2 - 1\right) = v\left(\alpha^2 + 1\right)$$

$$\alpha^2(c - v) = c + v$$

Wniosek 12.

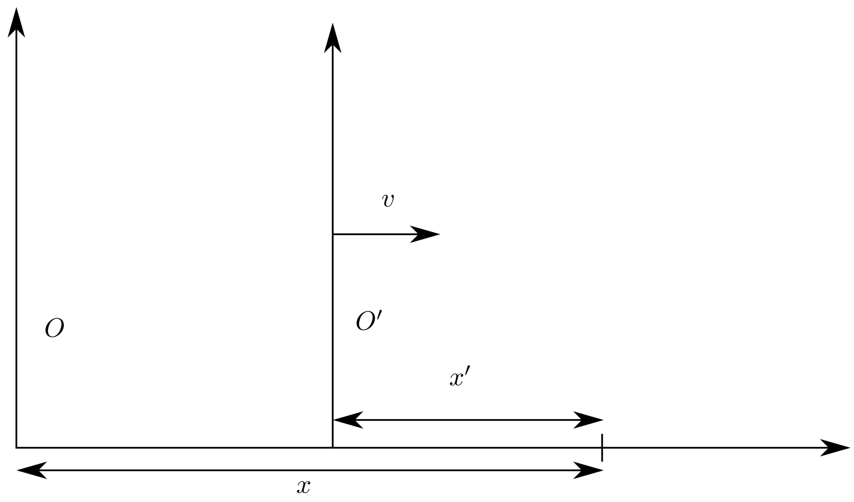
$$\alpha = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$



Rysunek 2.6: Tutaj t', t są równoczesne z punktu widzenia O'.

Skoro proste przechodzą na proste, to transformacja także musi być liniowa. Zatem szukamy współczynników.

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t \\ t' = \gamma t + \delta x \end{cases}$$



Rysunek 2.7

Weźmy sobie punkt O':

$$x' = 0,\ x = vt \Rightarrow 0 = \alpha vt + \beta t \Rightarrow \beta = -\alpha v$$

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \gamma t + \delta x \end{cases}$$

Teraz popatrzmy na punkt O w układzie primowanym:

$$x' = -vt',\ x = 0 \Rightarrow x' = -v\left(\gamma t + \delta x\right) = -v\gamma t = -\alpha tv \Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \alpha t + \delta x \end{cases}$$

$$c = \frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = \frac{\alpha(x - vt)}{\alpha t + \delta x}$$

$$\alpha tx = \delta x^2 = \alpha vt - \alpha vt$$

$$\delta = -\frac{\alpha vt^2}{x^2} = -\frac{-\alpha v}{c^2}$$

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ t' = \alpha\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

Korzystając z faktu, że układy są równoważne, to transformacja odwrotna powinna wyglądać:

$$\begin{cases} x = \alpha(x' + vt') \\ t = \alpha\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{x}{x' + vt'} = \frac{x}{\alpha(x - vt) + \alpha\left(vt - \frac{v^2}{c^2}x\right)}$$

$$\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dla transformacji Galileusza $\alpha = 1$, zatem musimy wziąć znak $+$.

Twierdzenie 9 (Transformacja Lorentza)**.**

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2.3 Transformacja prędkości

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \alpha^2(v_x - v)\left(1 + \frac{vv'_x}{c^2}\right)$$

$$\frac{v'_x}{\alpha^2} = \frac{vv_xv'_x}{c^2} + v_x - v - \frac{v^2v'_x}{c^2}$$

$$v'_x\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{vv_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = v_x - v$$

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}$$

Dla $v_x = c$ mamy:

$$v'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c(c - v)}{c - v} = c$$

Więc wyjściowe założenie działa.

2.4 Dylatacja czasu

Niech proces odbywa się w stałym miejscu. Rozważamy początki i końce.

$$x'_1 = x'_2;\ t'_1, t'_2;\ \Delta t' = t'_2 - t'_1$$

Ile trwa ten proces z punktu widzenia układu nieprimowanego?

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq \Delta t'$$

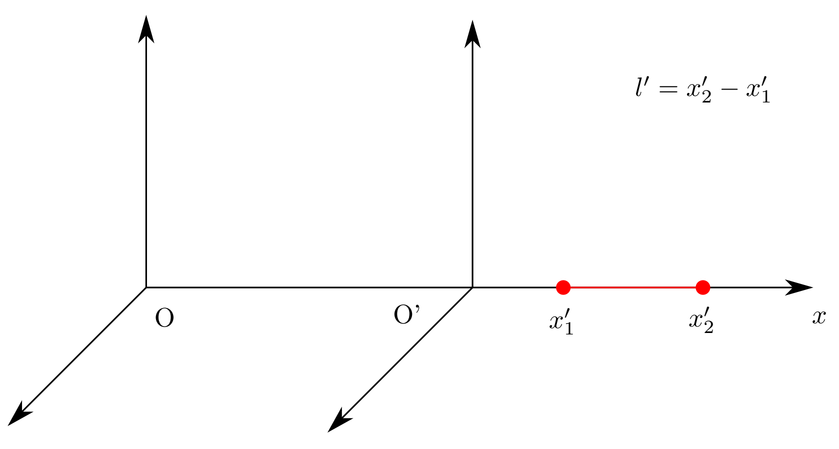
Zatem czas procesu jest najkrótszy w układzie, w którym się proces nie przemieszcza.

$\Delta t'$ – czas nadawania audycji przez kosmonautów. Statek startuje z Ziemi i się oddala z prędkością v. Ile czasu trwało odbieranie audycji?

$$\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{c} = \frac{v\Delta t'}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t' \frac{c + v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \Delta t' \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

Ten pierwiastek to ten stosunek $\frac{t_1}{t'_1}$, jak już sobie wcześniej pokazaliśmy.

2.5 Kontrakcja Lorentza



Rysunek 2.8: Pręt spoczywa w O'. Jaka jest długość wg. obserwatora w układzie O? Mierzymy tak, że otrzymujemy (x_1, x_2) w tym samym czasie – $t_1 = t_2$.

$$l' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1 - vt_2 + vt_1) = \gamma l$$

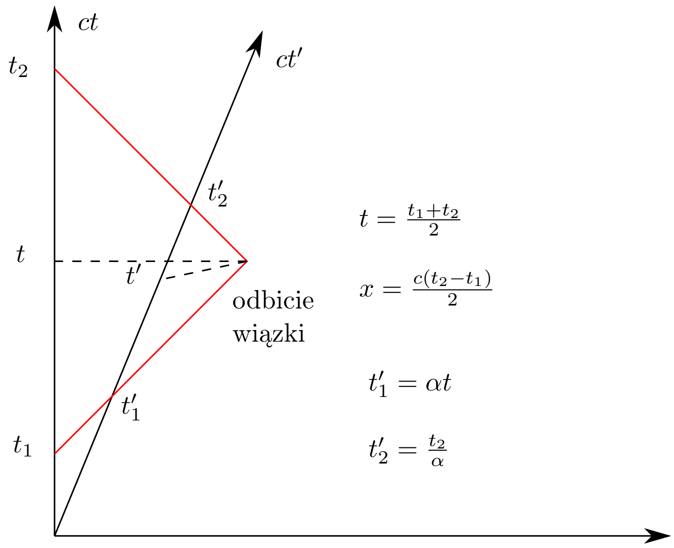
$$l = l'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Teraz niech obserwator mierzy chwile, w których pręt go mijał w jakimś miejscu $x - t_1 \neq t_2$. Teraz pomiar jest w jednym miejscu, więc $x_2 = x_1$.

$$l = v(t_1 - t_2)$$

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{v(t_1 - t_2)}{\sqrt{q - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wyszło oczywiście to samo.



Rysunek 2.9: Inne, geometryczne wyprowadzenie transformacji Lorentza.

$$t_1 = t - \frac{x}{c}, \; t_2 = t + \frac{x}{c}$$

$$t_1' = t' - \frac{x'}{c}, \; t_2' = t' + \frac{x'}{c}$$

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1'}{\alpha} + t_2'\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{t' - \frac{x'}{c}}{\alpha} + \left(t' + \frac{x'}{c}\right)\right) = \frac{1}{2}\left\{t'\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{x'}{c}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right\} =$$

$$= \frac{t'c}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{x'v}{c\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t'c + \frac{vx'}{c}\right)$$

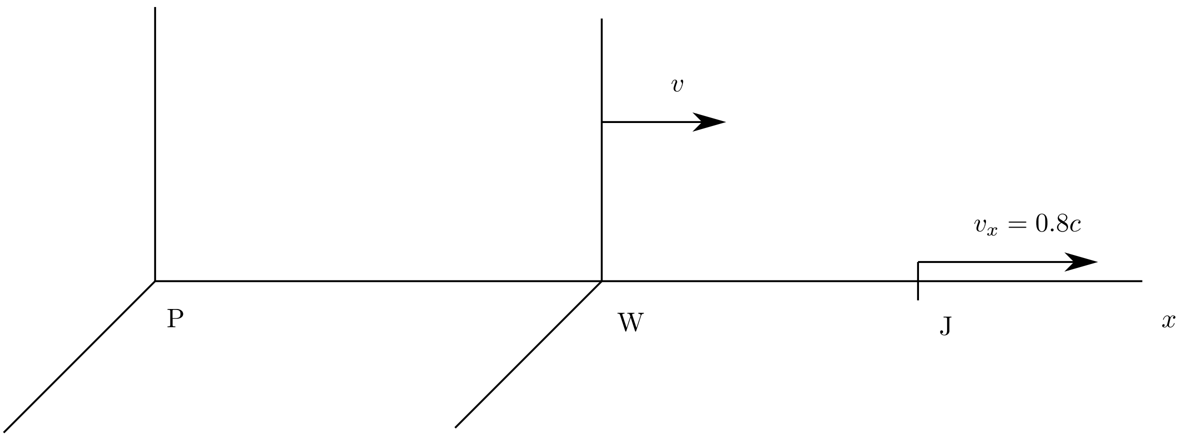
Weźmy cząstkę w układzie O o prędkości $\vec{v_p} = \big(v_x, v_y\big)$. Ile wynosi v_y'?

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dt'} = v_y\frac{dt}{dt'} = v_y\alpha\left(1 + \frac{vv_x'}{c^2}\right) = \dots$$

Tymczasem

$$v_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}} = \frac{v_y}{1 - \frac{vv_x}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Jacek porusza się względem „spoczywającego” Placka z prędkością $v = 0.8c$. Z jaką prędkością porusza się Wacek jeśli wiadomo, że Jacek i Placek oddalają się od niego z takimi samymi co do wartości, lecz przeciwnie skierowanymi prędkościami.



Rysunek 2.10: Zgodnie z założeniami, $v = v'_x$.

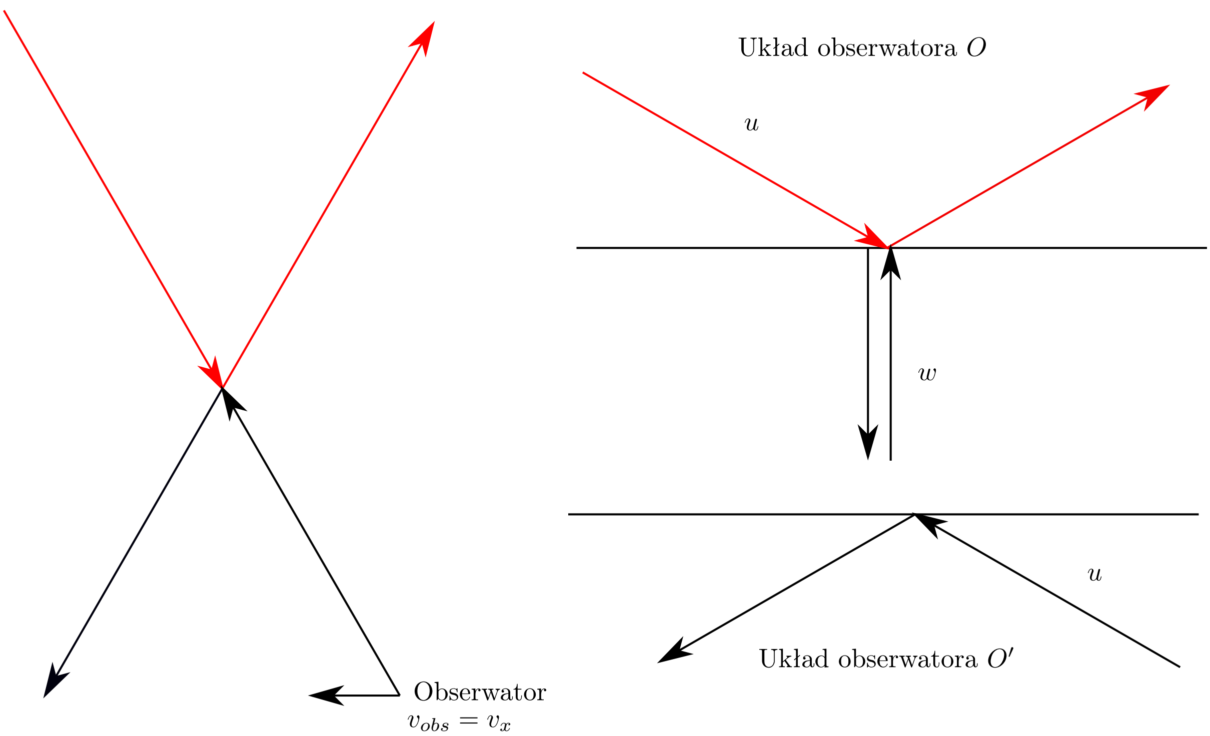
$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{vv_x}{c^2}} = v = \frac{0.8c - v}{1 - \frac{0.8v}{c}}$$
$$0.8v^2 - 2cv + 0.8c^2 = 0$$
$$\sqrt{\Delta} = 2c\sqrt{1 - 0.8^2} = 1.2c \implies v = \frac{2 \pm 1.2}{1.6}c = 0.5c$$

2.6 Pęd relatywistyczny

Wierzymy w zasadę zachowania pędu, ale będziemy szukać pędu postaci

$$\vec{p} = m(v)\vec{v}$$

Weźmy układ, w którym $\vec{v_p} = (v_x, v_y)$. Rozważmy zderzenie dwóch jednakowych cząstek.



Rysunek 2.11: Patrząc na dolną cząstkę: $v_y = w$, $v'_y = u_y$. Prędkość względna układów $v = u_x$

$$u_y = w\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}$$

Zapiszmy zasadę zachowania pędu w kierunku y:

$$m(w)w - m(u)u_y = m(u)u_y - m(w)w \implies m(w)w = m(u)u_y$$

$$m(w) = m(u)\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}$$

$$w \to 0 \implies m(0) = m = m(u)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\vec{p} = m(u)\vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \implies v^2 = \frac{p^2}{m^2+\frac{p^2}{c^2}} \to_{p^2\to\infty} c^2$$

Zatem nie rozpędzimy się bardziej niż do c.

2.7 Energia relatywistyczna

$$x \ll 1 \implies f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}\dots$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{v}{c^2}$$

$$\frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\frac{v}{c^2} + \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{c^2}\Big|_{v=0} = \frac{1}{c^2}$$

$$\implies \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m + \frac{mv^2}{2c^2} + \dots$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots = mc^2 + E_k$$

Twierdzenie 10 (Energia cząstki relatywistycznej)**.**

$$E = mc^2 + E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ oraz } v \ll c \implies E_k \to \frac{mv^2}{2}$$

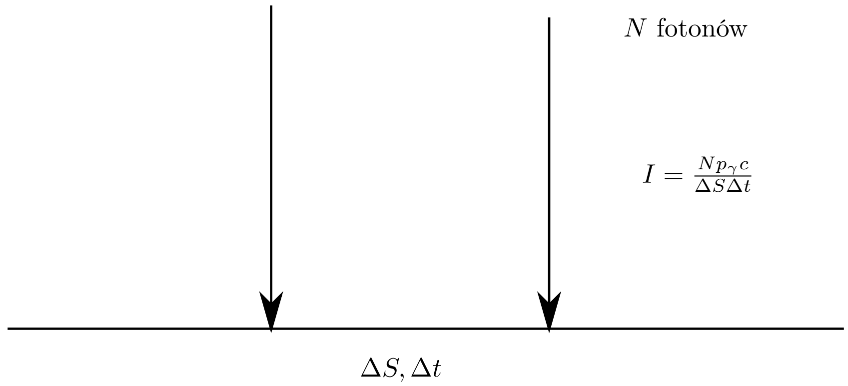
Wniosek 13.

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

2.8 Zjawisko fotoelektryczne

Z energii relatywistycznej wynika, że masa fotonu $m_\gamma = 0$, natomiast foton ma energię $E_\gamma = p_\gamma c$. W połączeniu z $E_\gamma = h\nu$:

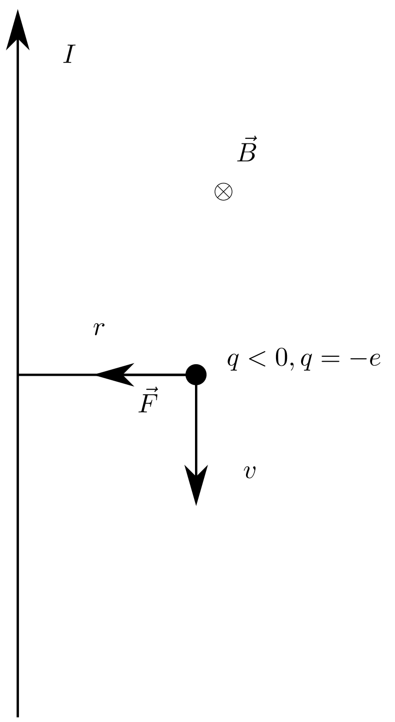
$$\Longrightarrow p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$$



Rysunek 2.12: Ciśnienie fotonów.

DO UZUPEŁNIENIA!!!

2.9 Względność pól $\vec{E}$, $\vec{B}$



Rysunek 2.13: Ludek sobie siedzi na ładunku i mówi że się ładunek nie porusza. Więc nie ma siły Lorentza. Mamy paradoks. W układzie związanym z drutem ładunek się porusza. Prędkość unoszenia jest dużo mniejsza od prędkości światła. Rozwiązaniem tego paradoksu jest uwzględnienie efektów relatywistycznych. Przyjmujemy, że prędkość tego ładunku jest taka jak średnia prędkość unoszenia w drucie.

W układzie związanym z drutem, drut nie jest naładowany – $\rho_+ = -\rho_- = \rho$

$$F = evB, \;\; B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = vSne \implies I = v\rho S$$

$$F = ev\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{ev^2\mu_0\rho S}{2\pi r}$$

Pamiętajmy jeszcze, że $c^2 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$.

$$\implies F = \frac{ev^2\rho S}{2\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

$$S\rho = \frac{Q}{l}$$

Teraz bierzemy układ nieruchomego ładunku.

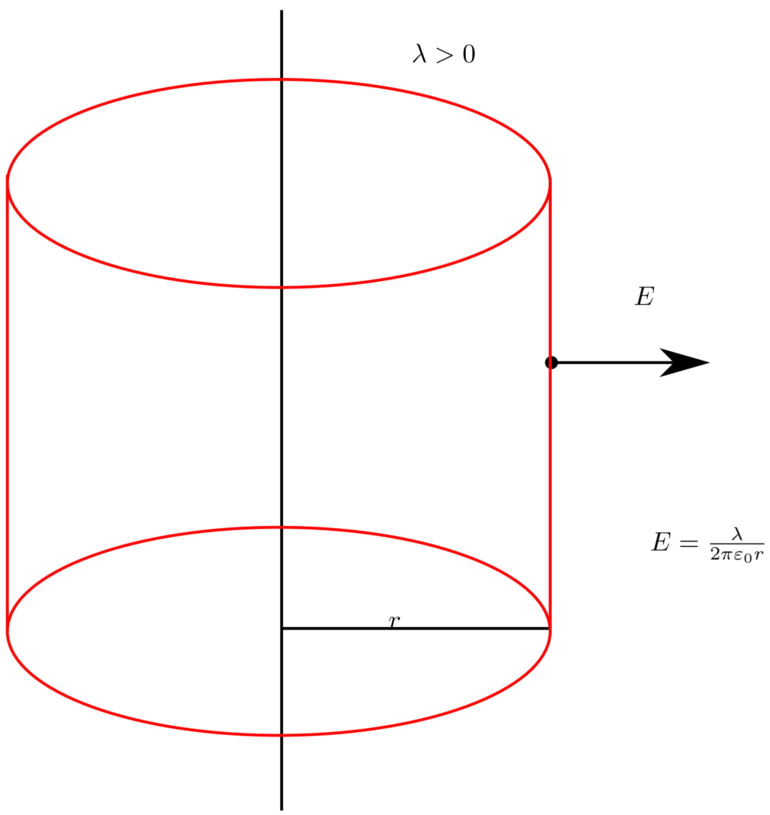
$$S\rho'_+ = \frac{Q}{l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$S\rho'_- = \frac{Q\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{l}$$

$$S\left(\rho'_+ - \rho'_-\right) = \frac{Q}{l}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{Q}{l}\frac{v^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

I teraz elektrostatyka. Drut w tym układzie zrobił się dodatnio naładowany.

$$\lambda = S\left(\rho'_+ - \rho'_-\right)$$



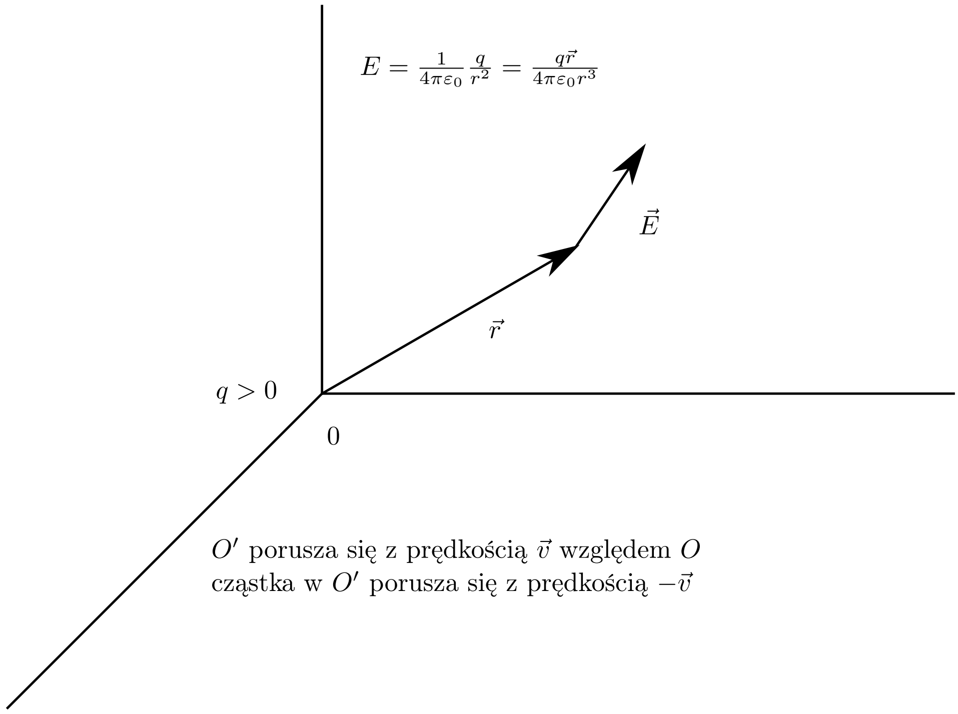
Rysunek 2.14

$$F' = eE = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{e\rho v^2 S}{2\pi\varepsilon_0 r c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Wniosek 14. Pola elektryczne i magnetyczne są względne i trzeba uważać!

DO UZUPEŁNIENIA!

2.9.1 Zmiana pola $\vec{B}$ przy zmianie układów inercjalnych



Rysunek 2.15: BEwz

Twierdzenie 11 (Przypomnienie prawa Biote'a-Savarta)**.** Pole od elementu druta, w którym płynie prąd.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}$$

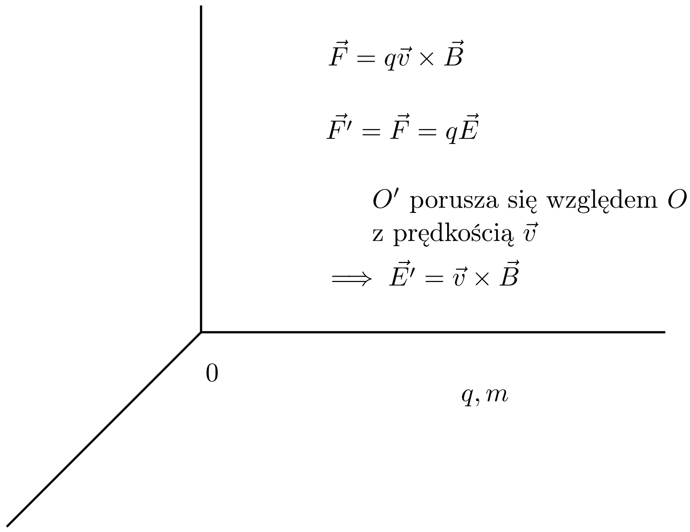
$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \frac{-\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}\\ &= \frac{-\mu_0\varepsilon_0 q\vec{v}\times\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\\ &= -\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\end{aligned}$$

Wniosek 15.

$$O - \text{pole } \vec{B}$$

$$O' - \text{pole } \vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}$$

Przechodząc do innego układu możemy przyjąć, że poprawka na zmianę pola magnetycznego jest zaniedbywana.



Rysunek 2.16: $\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

2.10 Relatywistyczny efekt Dopplera

Rozważamy sobie lecące światło: $v = c$. Mamy f_0, T_0 to częstotliwość i okres źródła stojącego. f, T odnoszą się do źródła ruchomego.
Zbliża się źródło. Dylatacja czasu:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$f = f_0 \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$f' = f_0 \frac{c}{c - v} \frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$f' = f_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}$$

gdzie v oznaczało prędkość źródła.

Teraz rozważmy poruszającego się obserwatora. Tu się zmienia długość fali, zamiast okresu.

$$\lambda_0 = cT_0$$

$$\lambda = cT_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$f' = \frac{f(c + v)}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$f' = f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

gdzie v to prędkość obserwatora.

Wniosek 16. Zatem widzimy, że jeśli patrzymy na falę elektromagnetyczną, to nieważne czy porusza się obserwator, czy źródło.

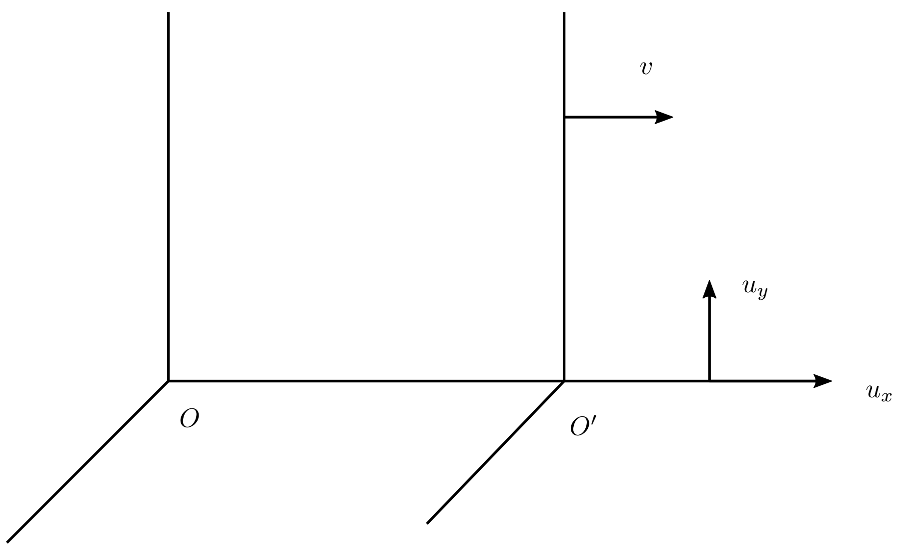
2.10.1 Wyprowadzenie z równania fali

$$\begin{aligned} u(0,t) &= A\sin(\omega t) \\ u(x,t) &= A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right] \\ \phi &= \omega\left(t-\frac{x}{c}\right) = \omega t - kx \\ \phi' &= \omega' t' - k' x' \end{aligned}$$

Teraz podstawiamy t, x z odwrotnej transformacji Lorentza:

$$\begin{aligned} \phi = \omega\frac{t'+vx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - k\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{t'\left(\omega - kx\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + x'\left(\ldots\right) \\ \implies \omega' = \frac{\omega\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \omega\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} = \omega\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\ \implies f' = f\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \end{aligned}$$

2.11 Transformacja pędu i energii



Rysunek 2.17: $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$ct' = \frac{ct - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$y' = y$$

$$p_x = \frac{mu_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad p'_x = \frac{mu_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$
$$\frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad \frac{E'}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$

Popatrzmy na czas własny procesu w układzie cząstki:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \Delta t'\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}$$

$$p'_x = \frac{m\Delta x'}{\Delta t'\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m\Delta x'}{\Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m(\Delta x - v\Delta t)}{\Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$= \frac{mu_x - mv}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{E}{c^2}\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p_x - \frac{Ev}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{E'}{c} = \frac{mc\Delta t'}{\Delta t'\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{mc\Delta t'}{\Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{2}}} = \frac{m\left(c\Delta t - \frac{v\Delta x}{c}\right)}{\Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$= \frac{mc - \frac{vu_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{E}{c} - \frac{vp_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Widzimy, że odpowiednikami transformacji Lorentza są:

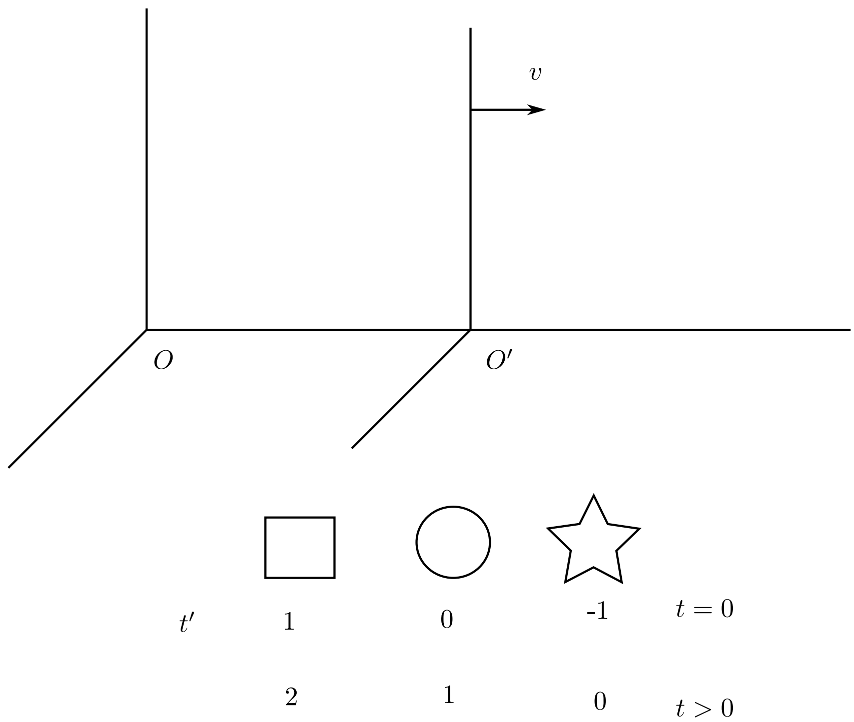
$$x \to p_x$$
$$ct \to \frac{E}{c}$$

$$p'_y = \frac{m\Delta y'}{\Delta t'\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m\Delta y}{\Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mu_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = p_y$$

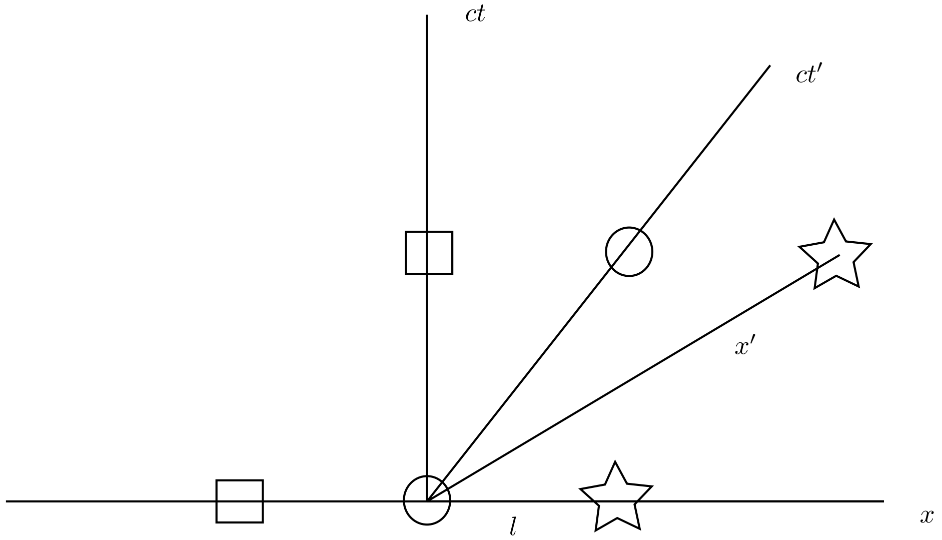
2.12 Transformacja siły

$$F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t}; \quad F'_y = \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}$$
$$F'_y = \frac{\Delta p'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}} = \frac{F_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

2.12.1 Zadanko na miły początek wakacji



Rysunek 2.18: Zegary są na osi x. Obserwatorzy priomowani zapisują czasy jak mijają zegary, l – odległość między zegarami; v, $l' =$? Układy synchronizują zegarki w chwili zerowej.



Rysunek 2.19: Te same zegary na wykresach.

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = vt$$

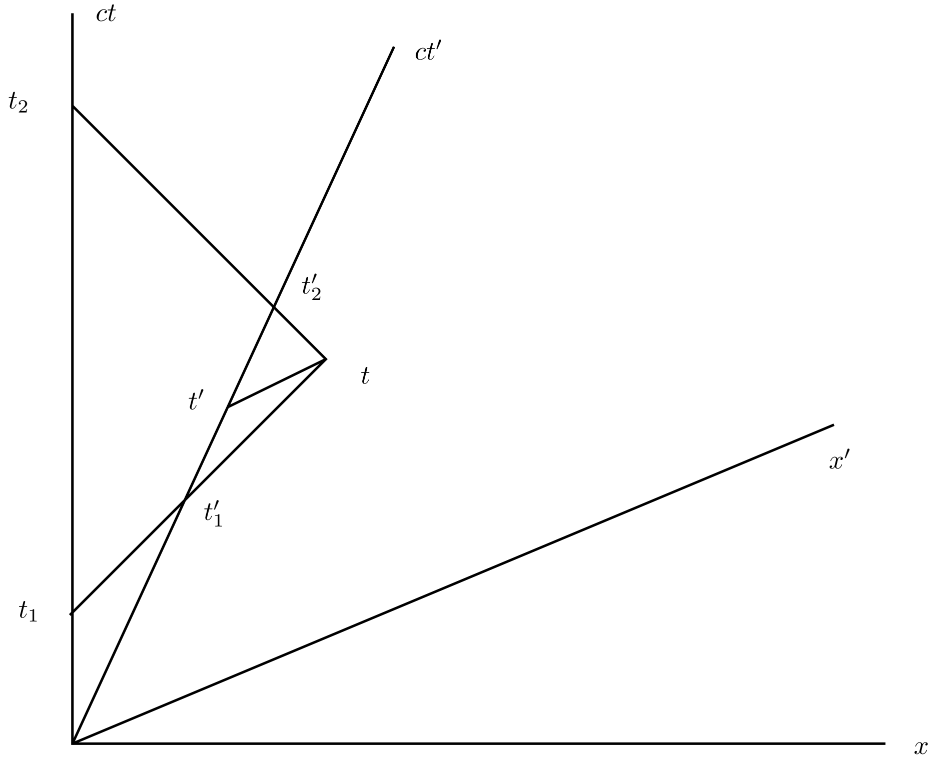
$$t' = 1 = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dla kwadrata mamy: $t = 0,\ t' = 1,\ x = -l$:

$$\Longrightarrow\ t' = 1 = \frac{-\frac{v(-l)}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Mamy 4 równania z 4 niewiadomymi, więc możemy już to rozwiązać.

$$v = \frac{c\sqrt{2}}{2}, \quad l' = c\sqrt{2}$$



Rysunek 2.20: Te same zegary once again...