ANALIZA MATEMATYCZNA III

„Teraz na ucieczkę już za późno. . . ”
– Regina Lewkowicz

„To Wam się przyda na pierwszym i drugim roku studiów. Teraz utrzymujemy taką narrację optymistyczną. Nie pesymistyczną. To Wam się przyda!”

Wykładowca:
Olga Ziemiańska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Granice II

1.1 Powtórka granic

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\big(k^2+k+1\big)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

Zauważmy, że $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}\frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{k-1}{k}}+(n+1)^{\frac{k-2}{k}}n+\cdots+n^{\frac{k-1}{k}}} = 0$$

4. $|a_n|\to 1$, $a_n\neq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+a_n^2+\cdots+a_n^k-k}{a_n-1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim \frac{(a_n-1)+\big(a_n^2-1\big)+\cdots+\big(a_n^k-1\big)}{a_n-1} \\
&= \lim\left[1+(a_n+1)+\cdots+\Big(a_n^{k-1}+\cdots+1\Big)\right] = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$

Zauważmy, że $k\cdot k! = (k+1)!-k!$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-k! \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1
\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)$

   Taktyka jest taka, żeby użyć wzoru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ i łańcuchowo to wszystko pozwijać. Przyjmując, że $x \neq 1$:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)}{(1-x)}(1+x)\left(1+x^2\right)\ldots\left(1+x^{2^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right)}{(1-x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

   Teraz trzeba się pobawić przypadkami dla różnych wartości x:

$$|x| < 1 \implies \lim a_n = \frac{1}{1-x}$$
$$x = -1 \overset{\text{baz.}}{\implies} \lim a_n = 0$$
$$x = 1 \overset{\text{baz.}}{\implies} \lim a_n = +\infty$$
$$x > 1 \implies \lim a_n = +\infty$$
$$x < -1 \implies \lim a_n = -\infty$$

7. $a_1 = b > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, T: $\lim a_n = \sqrt{a}$

   Z nierówności między średnimi mamy:

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a}$$

   zatem widzimy, że ciąg jest ograniczony od dołu przez $\sqrt{a}$. Trzeba jeszcze pokazać, że jest monotonicznie malejący, tj. $a_n \geq a_{n+1}$.

$$2a_n \geq a_n + \frac{a}{a_n}$$
$$a_n^2 \geq a \implies a_n \geq \sqrt{a}$$

   co jest oczywiście spełnione. W związku z powyższym granica istnieje. Typując kandydatów na granicę otrzymamy $\pm\sqrt{a}$, a zatem $\lim a_n = \sqrt{a}$.

1.2 Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Definicja 1 (Ciąg zbieżny)**.** Ciąg jest zbieżny, jeżeli ma skończoną granicę. Inaczej, jest rozbieżny do $\pm\infty$.

1. Ciąg (a_n) nie ma elementu największego $\implies$ można z niego wyjąć podciąg rosnący.

   Konstrukcja:

$$a_{n_1} = a_1$$

   Szukamy a_{n_2}, dla którego $n_2 > n_1$ oraz $a_{n_2} > a_{n_1}$. Takie a_{n_2} istnieje, bo inaczej a_{n_1} byłby największym wyrazem (a_n).

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots < a_{n_k}$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$$

   Szukamy $a_{n_{k+1}}$ zgodnego z wcześniejszymi założeniami konstrukcji. Takie $a_{n_{k+1}}$ istnieje, bo w przeciwnym przypadku $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_k}\}$ byłoby największym elementem ciągu. To kończy krok indukcyjny konstrukcji podciągu rosnącego $\left(a_{n_k}\right)$.

Lemat 1 (Lemat Sierpińskiego)**.** Z każdego ciągu można wyjąć podciąg monotoniczny.

Dowód. 1. Każdy podciąg ciągu (a_n) ma wyraz największy.

Skonstruujemy podciąg monotoniczny nierosnący. Konstrukcja: a_{n_1} – największy element ciągu (o najmniejszym indeksie).

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots \geq a_{n_k}$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$$

a_{n_1} wybraliśmy jako $\sup\{a_1, a_2, \ldots\}$. Niech więc a_{n_2} będzie $\sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\}$ – ma to zawsze sens, zgodnie z założeniem o największym elemencie oraz dzięki temu, że $n_2 \geq n_1 + 1$. W ogólności, konstrukcję pociągniemy dalej biorąc $a_{n_{k+1}} = \sup\big\{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \ldots\big\}$.

2. Istnieje podciąg, który nie ma największego wyrazu.

Wybieramy podciąg rosnący z powyższego zadanka. Podciąg podciągu jest podciągiem wyjściowego ciągu zatem znaleźliśmy, co chcieliśmy.

■

Twierdzenie 1 (Bolzano-Weierstrass)**.** Z każdego ciągu ograniczonego można wyjąć podciąg zbieżny. Jeśli ciąg jest ograniczony to granica jest skończona.

Dowód. Na mocy lematu Sierpińskiego, możemy wyjąć podciąg monotoniczny.
Ciąg monotoniczny ma granicę. A ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę skończoną. ■

Twierdzenie 2. Ciąg ma granicę $\iff$ każdy jego podciąg ma granicę.

Dowód. No ciąg jest swoim własnym podciągiem. Dowód oczywisty, przez poprawność. ■

Twierdzenie 3. (a_n) nie ma granicy $\implies$ ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Dowód. Zaprzeczamy warunkowi na istnienie granicy. Mamy $\big(a_{n_k}\big)$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$. Ale $\lim a_n$ nie istnieje.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\, |a_n - g| < \varepsilon$$

Zaprzeczenie:

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_N\exists_{n>N}\, |a_n - g| \geq \varepsilon \tag{W}$$

Czyli wystarczy pokazać, że to g nie jest granicą całego ciągu. Szukamy podciągu ciągu (a_n) na zewnątrz przedziału $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$. Z zaprzeczonego warunku (W) wynika istnienie podciągu, którego wyrazy leżą na zewnątrz przedziału, czyli albo po lewej albo po prawej mamy niekończenie wiele wyrazów. Załóżmy, że:

$$\exists_{\left(a_{n_l}\right)_{l\in\mathbb{N}}} \text{ t.że } a_{n_l} \geq g + \varepsilon$$

Teraz wybieramy podciąg zbieżny z $\big(a_{n_l}\big)$. Ale jego granica $\geq g + \varepsilon$. ■

Wniosek 1. $a_n \geq 0$, $a_n \to g$, $k \in \mathbb{N} \implies \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{g}$

Dowód. Załóżmy, że to nie prawda. Znajdzie się wówczas podciąg $\sqrt[k]{a_{n_l}} \to a \neq \sqrt[k]{g}$, dla $l \in \mathbb{N}$. Wiemy to z Twierdzenia 3.
Korzystając z tw. o granicy iloczynu dostajemy

$$a_{n_l} = \left(\sqrt[k]{a_{n_l}}\right)^k \xrightarrow{l\to\infty} a^k \neq g$$
$$\text{Ale } a_{n_l} \xrightarrow{l\to\infty} g$$

Sprzeczność. ∎

Twierdzenie 4 (Warunek Cauchy'ego)**.** (a_n) jest zbieżny (ma skończoną granicę) $\iff$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{k,m>N}\, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Dowód. „ $\implies$ ”:

$$a_n \to g$$
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_{\varepsilon/2}}\forall_{n>N_{\varepsilon/2}}\, |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jeśli $m, k > N_{\varepsilon/2}$ to $a_m, a_k \in \big(g - \varepsilon/2, g + \varepsilon/2\big) \implies |a_n - a_k| < \varepsilon$

„ $\impliedby$ ”:
Pokazać, że (a_n) jest ograniczony.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{k,m>N}\, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Weźmy $\varepsilon = 1$. Istnieje N_1 takie, że

$$\forall_{k,m\geq N_1}\, |a_k - a_m| < 1$$

czyli $|a_k - a_{N_1+1}| < 1$.

$$1 > |a_k - a_{N_1}| \geq |a_k| - |a_{N_1+1}|$$
$$\text{czyli } |a_k| < |a_{N_1+1}| + 1 \text{ dla każdego } k > N_1$$

zatem ciąg jest ograniczony.
Teraz chcemy pokazać, że istnieje podciąg zbieżny $\big(a_{n_j}\big) \to g$ (z Twierdzenia B-W). Chcemy pokazać, że $a_n \to g$. Weźmy $\varepsilon > 0$.

$$\exists_N\forall_{k,m,j>N}\, |a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oraz } \big|a_{n_j} - g\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zależy nam na poszacowaniu $|a_k - g|$:

$$\begin{aligned}|a_k - g| &= |a_k - a_m + a_m - g|\\ &\overset{m=n_j}{\leq} |a_k - a_m| + \big|a_{n_j} - g\big|\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

czyli $a_n \to g$. ∎

1. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$
   Udowodnić, że jest zbieżny z kryterium Cauchy'ego.

$$\begin{aligned}|a_k - a_m| &\underset{k>m}{=} \left|(-1)^m\frac{1}{m+1} + (-1)^{m+1}\frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right|\\ &= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{k-m+1}\frac{1}{k} \overset{?}{<} \frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

bo to długie jest dodatnie. Teraz trzeba pokazać tę nierówność.

$$-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{m+3}<0$$

i podobnie wszystkie pary, zatem po skasowaniu $1/(m+1)$ zostanie coś ujemnego. W związku z tym nasza nierówność działa. Stąd już widzimy, że $1/(m+1)$ może przyjmować dowolnie małe wartości dla $m>N$.

2. Pokazać, że $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego.

   Pamiętamy (W). Weźmy $\varepsilon = 1/2$:

$$a_m - a_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \overset{?}{>} \frac{1}{2}$$
$$\forall_N \exists_{2(N+1),N+1>N} \left|a_{2(N+1)} - a_{N+1}\right| > \frac{1}{2}$$

   (a_n) ma granicę, ale nie jest zbieżny $\implies$ $\lim a_n = \pm\infty$, bo nie spełnia warunku Cauchy'ego. $\implies$ $\lim a_n = +\infty$

Twierdzenie 5 (Warunek Leibniza zbieżności szeregów)**.**

$$a_k \text{ – nierosnący, } a_k \to 0 \implies b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \text{ jest zbieżny}$$

Dowód. Chcemy pokazać, że b_n spełnia warunek Cauchy'ego.
Uwaga: $\forall_n\, a_n \geq 0$
Załóżmy, że $\exists_{n_0}$ takie, że $a_{n_0} < 0$. Wtedy:

$$a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots \leq a_{n_0} < 0$$
$$\implies \lim a_n \leq a_{n_0}$$

co daje nam sprzeczność. Teraz chcemy poszacować ten moduł z Cauchy'ego:

$$|b_k - b_m| \overset{k\geq m}{=} \left|(-1)^{m+2}a_{m+1}+\cdots+(-1)^{k+1}a_k\right| \overset{?}{\leq} a_{n+1}$$
$$a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0$$
$$a_{m+3} - a_{m+4} \geq 0 \ldots$$

Konstrukcja taka, jak w poprzednich dowodach. Działa. ∎

1. (a_n) – ciąg, $\lambda \in (0,1)$, $\forall_n\, |a_{n+2}-a_{n+1}| \leq \lambda|a_{n+1}-a_n|$
   T: (a_n) jest zbieżny

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}-a_{n+1}| &\leq \lambda^2|a_n - a_{n-1}| \leq \ldots \leq \lambda^n|a_2-a_1| \\
|a_k - a_m| &= |a_k - a_{k-1} + \cdots - a_m| \\
&\overset{N.\triangle}{\leq} |a_k - a_{k-1}| + |a_{k-1}-a_{k-2}| + \cdots + |a_{m+1}-a_m| \\
&\leq \lambda^{k-2}|a_2 - a_1| + \cdots + \lambda^{m-1}|a_2-a_1| \\
&= |a_2-a_1|\lambda^{m-1}\Big(1+\lambda+\cdots+\lambda^{k-m-1}\Big) \\
&= |a_2-a_1|\lambda^{m-1}\frac{1-\lambda^{k-m}}{1-\lambda} \\
&\leq |a_2-a_1|\frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda} \to 0
\end{aligned}$$

2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2+a_n}{1+a_n}$ – udowodnić zbieżność, obliczyć granicę.

$$\begin{aligned}|a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left|\frac{1}{1+a_{n+1}} - \frac{1}{1+a_n}\right| \overset{a_i \geq 1}{\leq} \frac{|a_{n+1}-a_n|}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \\ &\leq \frac{1}{4}|a_{n+1}-a_n|\end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest warunkiem zbieżności z poprzedniego zadania. Teraz przechodzimy z $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned}g &= \frac{2+g}{1+g} \\ g + g^2 &= 2+g \\ \implies g &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Twierdzenie 6. $x \in \mathbb{R} \implies$ możemy tak wybrać ciąg (α_n) gdzie $\alpha_n = \pm 1$, że

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}$$

Dowód. Dla chętnych ;-) ∎

1.3 Twierdzenie Toeplitza

Twierdzenie 7 (Toeplitza o regularnym przekształceniu ciągu)**.** Niech

$$\left\{c_{n,k} \colon 1 \leq k \leq n, m \geq 1\right\}$$

będzie układem liczb rzeczywistych spełniającym następujące warunki:

$$\text{Przy ustalonych } k \in \mathbb{N},\ c_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \tag{2}$$

$$\exists_{c>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \left|c_{n,k}\right| \leq c \tag{3}$$

Jeśli $c_{n,k} \geq 0$ to (3) jest spełnione, bo ciąg zbieżny jest ograniczony.

Wówczas $\lim a_n = a \implies \lim b_n = a$, gdzie $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k$.

Można bardzo prosto zapamiętać te warunki, rysując tablicę z wyrazami ciągu:

$$\begin{array}{cccccc}
c_{1,1} & & & & & \\
c_{2,1} & c_{2,2} & & & & \\
c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} & {\scriptstyle \Sigma\to 1 \atop \Sigma|\,|\leq c} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 &
\end{array}$$

Widzimy pewne podobieństwo do twierdzenia z tablicą z pierwszej klasy.

Dowód. Załóżmy, że $a_n \to 0$. Chcemy pokazać, że $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k \to 0$, gdzie $c_{n,k}$ jest zdefiniowane wg. (1), (2), (3).

$$a_n \to 0 \overset{\text{zbieżny}}{\implies} \exists_{D>0} \forall_n \, |a_n| < D$$

Niech $\varepsilon > 0$

$$|b_n| \leq \underbrace{\left|c_{n,1}\right||a_1| + \cdots + \left|c_{n,N_1}\right||a_{N_1}|}_{<\varepsilon/2\,?} + \underbrace{\left|c_{n,N_1+1}\right||a_{N_1+1}| + \cdots + \left|c_{n,n}\right||a_n|}_{<\varepsilon/2\,?}$$

$$a_n \to 0 \implies \exists_{N_1} \forall_{n>N_1} \, |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

$$\implies \left|c_{n,N_1+1}\right||a_{N_1+1}| + \cdots + \left|c_{n,n}\right||a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}\Big(\left|c_{n,N_1+1}\right| + \cdots + \left|c_{n,n}\right|\Big) \overset{(3)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech N_1 będzie ustalone:

$$\exists_{N_2} \forall_{n>N_2} \left|c_{n,1}\right| + \cdots + \left|c_{n,N_1}\right| < \frac{\varepsilon}{2D}$$

$$\left|c_{n,1}\right||a_1| + \cdots + \left|c_{n,N_1}\right||a_{N_1}| < D\frac{\varepsilon}{2D} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Dla $n > \max\{N_1, N_2\}$ $|b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.
I tu się kończy dowód dla 0. Teraz dla $a_n \to a$:

$$a'_n = a_n - a \to 0$$

$$b_n = \sum_{k-1}^{n} c_{n,k} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a'_k}_{\to 0} + a \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}}_{\to a} \to a$$

■

1. $\lim a_n = a \implies \lim \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$

   Wystarczy sprawdzić warunki (1), (2). Działa.

2. $\lim a_n = a \implies \lim \dfrac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$

   Rozszerzając twierdzenie można zauważyć, że jeżeli (2) $\to A$, to teza zamienia się na $\lim b_n = aA$. Tutaj nasze $A = 1/2$, więc chcemy dobrać takie $\big(c_{n,k}\big)$, żeby te sumy były zbieżne do $1/2$.

$$c_{n,k} = \frac{n-k+1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{k}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2n^2} \tag{2}$$

$$\to 1/2$$

   Zatem granica sumy to $a/2$.

3. $a_n \to a \implies \lim\left(\dfrac{a_n}{1} + \dfrac{a_{n-1}}{2} + \cdots + \dfrac{a_1}{2^{n-1}}\right) = ?$

$$c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \to 2 \tag{2}$$

$$\implies \lim b_n = 2a$$

4. $\lim a_n = a$. Obliczyć $\lim\left(\frac{a_n}{1\cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{a_1}{n(n+1)}\right)$

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)}$$
$$\lim b_n = a$$

5. Obliczyć $\lim\left(\frac{a_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k}\frac{1}{2^{n-k}} \to 0 \tag{1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} = -\frac{2}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) \to \frac{2}{3} \tag{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \left|c_{n,k}\right| = \sum 2^{k-n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 \tag{3}$$
$$\implies \lim b_n = 2/3a$$

6. $a_n \to +\infty \implies b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to +\infty$

$$\exists_{N_1}\forall_{n>N_1}\, a_n > 0$$
$$b_n = \underbrace{\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n}}_{\to 0} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}$$

Załóżmy, że $\forall_n\, a_n > 0$. Niech $M > 0$. $\exists_N\forall_{n>N}\, b_n > M$. Chcemy znaleźć takie N.

$$\exists_{N_1}\forall_{n>N_1} a_n > 2M$$

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n} > \frac{2M(n-N_1)}{n}$$

Dla jakich n, $\frac{n-N_1}{n} > \frac{1}{2}$. Znaleźliśmy $N = 2N_1$.

7. $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\lim \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}$

$$c_{n,k} = \frac{b_{n-k+1}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$
$$\sum c_{n,k} = \frac{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} \to b \tag{2}$$

8. (a_n), (b_n) są ciągami takimi, że $b_n > 0$, $\lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty$, $\lim\frac{a_n}{b_n} = g$

T: $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \to g$

$$a'_k = \frac{a_k}{b_k} \to g,\ c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n} \to 0 \tag{1}$$
$$\sum c_{n,k}a'_k = \sum \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n}\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$$
$$\sum c_{n,k} = 1 \tag{2}$$
$$\implies \lim \sum c_{n,k}a'_k = g$$

9. $b_n > 0$, $\lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty$, $\lim a_n = a$

T: $\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + \cdots + b_n} \to a$

$$c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n}$$

1.4 Twierdzenie Stolza

Twierdzenie 8 (Stolza)**.** Niech będą dane ciągi (x_n), (y_n) takie, że:

$$y_n < y_{n+1}, \quad \lim y_n = +\infty \tag{1}$$
$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = g \tag{2}$$

Wówczas $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = g$.

Dowód.

$$a_n =$$
$$b_n =$$

Korzystamy z ostatniego zadania. ■

1. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$y_n = \sqrt{n}$$
$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 2$$

2. $\dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a + \dfrac{a^2}{2} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}\right)$, $a > 1$

$$x_n = a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}$$
$$y_n = \frac{a^{n+1}}{n}$$
$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{a^{n+1}}{n+1}\bigg/\left(\frac{a^{n+2}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{a-1}$$

3. $\dfrac{1}{n^{k+1}}\left(k! + \dfrac{(k+1)!}{1!} + \cdots + \dfrac{(k+n)!}{n!}\right)$

$$\lim \Delta = \lim \frac{(k+n)!}{n!\big(n^{k+1} - n^k\big)} = \lim \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{n^k + n^{k-1}(n-1) + \cdots + (n-1)^k}$$
$$= \frac{1}{k+1}$$