Równania Friedmana
Model kosmologiczny ΛCDM

Szymon Cedrowski

Lekcja 11

1 I równanie Friedmana

Rozważamy wszechświat zgodny z omawianymi wcześniej założeniami – jednorodny i izotropowy. Weźmy sferę o promieniu r, z obserwatorem w środku. Masa zawarta w tej sferze wynosi $M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$. Będziemy rozważali punkt materialny o masie m znajdujący się na powierzchni sfery. Energia potencjalna i kinetyczna tej cząstki, w teorii Newtona wyraża się wzorami:

$$U = -\frac{GMm}{r}, \quad T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

Jak wiemy, $r(t) = a(t)r_0$. Wierzymy w zasadę zachowania energii, zatem:

$$\begin{aligned} E = U + T &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4}{3}\pi\rho r^2 Gm \end{aligned}$$

Teraz przekształcamy aż do zadowalającej postaci.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{a}^2 r_0^2 - \frac{4}{3}\pi\rho G m a^2 r_0^2 \\ \frac{2E}{ma^2r_0^2} &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho \end{aligned}$$

Lewą stronę zastępujemy pewną specyficzną kombinacją stałych.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

Zaskakująco, dostaliśmy rzeczywiste równanie Friedmana bez stałej kosmologicznej, w którym mamy jakąś stałą k o zupełnie nieznanym znaczeniu. Interpretację uzyskalibyśmy rozwiązując równanie Einsteina.

Twierdzenie 1 (Równanie Friedmana)**.**

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{F1}$$

gdzie k jest krzywizną czasoprzestrzeni, a Λ stałą kosmologiczną reprezentującą ciemną energię.
$k > 0$ – wszechświat zamknięty (topologia sfery)
$k = 0$ – wszechświat płaski
$k < 0$ – wszechświat otwarty (topologia hiperboloidy)

2 Równanie płynu i II równanie Friedmana

2.1 Postać ogólna równania płynu kosmologicznego

Zapiszmy I zasadę termodynamiki:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V \tag{1}$$

Przyjmuje się, że ekspansja wszechświata zachodzi adiabatyczne, zatem $\mathrm{d}Q = 0$. Przyjmijmy ponadto, że $r_0 = 1$. Innymi słowy, będziemy rozważali energie na jednostki objętości, tj. gęstości energii.

$$U = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi a^3$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \dot{\rho} + 4\pi\rho c^2 a^2 \dot{a}, \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi a^2 \dot{a}$$

Równanie (1) dzielimy przez różniczkę czasu i postawiamy powyższe wyrażenia.

$$-p \cdot 4\pi a^2 \dot{a} = \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \dot{\rho} + 4\pi \rho c^2 a^2 \dot{a}$$
$$-p\dot{a} = \frac{1}{3} a c^2 \dot{\rho} + \rho c^2 \dot{a}$$

Po drobnych przekształceniach dostajemy równanie opisujące ewolucję gęstości zależną od ciśnienia i czasu.

Twierdzenie 2 (Równanie płynu)**.**

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

2.2 Równanie stanu

Definicja 1 (Kosmologiczny parametr stanu)**.** Wiele zależności w kosmologii upraszcza się, jeśli wprowadzimy pewien bezwymiarowy parametr, nazywany także równaniem stanu:

$$w \equiv \frac{p}{\rho c^2}$$

gdzie p jest ciśnieniem, a ρc^2 nazywane jest gęstością energii. W jednostkach zgeometryzowanych ($c = G = 1$) mamy po prostu $w = p/\rho$, stąd często pojęcia gęstość i gęstość energii mogą się mieszać.

Używając parametru stanu, równanie płynu wygląda następująco:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w) \tag{2}$$

Rozwiążemy to równanie różniczkowe. Zauważmy, że $\dot{\rho} = \rho'(a)\dot{a}$.

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}a}\frac{1}{\rho} = -\frac{3}{a}(1 + w)$$

Robimy separację zmiennych i całkujemy:

$$\int \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -3 \int \frac{1 + w}{a}\,\mathrm{d}a$$

W tym momencie należy zwrócić uwagę na to, że w może być funkcją czasu, gdyż zostało zdefiniowane poprzez gęstość. Przy okazji zamienimy w prawej całce czynnik skali na redshift.

$$\ln \rho = C + 3 \int \frac{1 + w(z)}{1 + z}\,\mathrm{d}z$$

Znajdźmy warunek na stałą całkowania. Funkcję znajdującą się po znaku + oznaczamy przez $f(z)$. Dla $z = 0$ mamy:

$$\ln \rho_0 = C + f(0)$$

Odejmujemy stronami i upraszczamy równanie.

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = 3 \int_0^z \frac{1 + w(z)}{1 + z}\,\mathrm{d}z$$

Twierdzenie 3 (Ewolucja gęstości płynu)**.** W ogólnym przypadku, równanie na gęstość wiąże się z parametrem stanu jak poniżej.

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(3 \int_0^z \frac{1 + w(z)}{1 + z}\,\mathrm{d}z\right) \tag{3}$$

2.3 Płyny o stałym równaniu stanu

Rozwiążemy równanie 3 w przypadku, gdy $w = \text{const.}$

$$\ln\frac{\rho(z)}{\rho_0} = 3(1+w)\int_0^z \frac{1}{1+z}\,\mathrm{d}z$$
$$\ln\frac{\rho(z)}{\rho_0} = 3(1+w)\ln(1+z)$$
$$\log_{1+z}\big(\rho/\rho_0\big) = 3(1+w)$$

Finalnie, otrzymujemy prostą zależność:

Twierdzenie 4.

$$\rho(z) = \rho_0(1+z)^{3(1+w)} \tag{3a}$$

lub alternatywnie:

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$$

Z poprzedniego skryptu pamiętamy, że dla materii, $\rho_m = \rho_0 a^{-3}$. Spróbujmy to udowodnić z wyżej wyprowadzonego równania. Dla nierelatywistycznego gazu mamy zależność: $p = \rho\alpha RT$, gdzie $\alpha \sim 10^{-3}$ dla wodoru. Stąd w przypadku materii nierelatywistycznej (zimnej) mamy $w = \alpha RT/c^2 \approx 0$. $w = 0$ daje nam oczekiwaną ewolucję gęstości.

Podobnie sytuacja wygląda w przypadku promieniowania i cząstek ultra-relatywistycznych. Tym razem używamy równania stanu gazu fotonowego, dla którego $p = \frac{1}{3}\epsilon$, a zatem $w = \frac{1}{3}$. Taki parametr stanu daje nam ewolucję: $\rho_r = \rho_0 a^{-4}$.

Ciemna materia reprezentowana przez stałą kosmologiczną jest z założenia stała w czasie, zatem $3(1+w) = 0$. Stąd wniosek, że dla stałej kosmologicznej Λ mamy dokładnie $w = -1$. Jest to bardzo istotna informacja. Patrząc na definicję parametru stanu widzimy, że ciemna energia wywiera ujemne ciśnienie (działa odpychająco).
Często słyszy się, że ciemna energia jest przyczyną przyspieszającej ekspansji wszechświata. Zastanówmy się więc jaki warunek musi spełniać w, aby pewien płyn był przyczyną tego przyspieszenia.

2.4 II równanie Friedmana

Zróżniczkujmy stronami po czasie równanie (F1).

$$\frac{8\pi G}{3}\dot\rho = kc^2\frac{\mathrm{d}a^{-2}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = -\frac{2kc^2}{a^3}\dot a + 2\frac{\dot a}{a}\frac{\ddot a a - \dot a^2}{a^2}$$

Wstawiamy równanie (2).

$$-8\pi G\rho H(1+w) = -\frac{2kc^2}{a^2}H + 2H\frac{\ddot a a - \dot a^2}{a^2} = -2H\frac{kc^2}{a^2} + 2H\frac{\ddot a}{a} - 2H^3$$
$$-4\pi G\rho(1+w) = \frac{\ddot a}{a} - \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Teraz wystarczy to tylko uporządkować.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho\left(\frac{1}{3} + w\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Twierdzenie 5 (II równanie Friedmana)**.**

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda c^2 - 4\pi G\rho(1 + 3w) \tag{F2}$$

3 Parametry kosmologiczne

3.1 Transformacja równań Friedmana

Okazuje się, że jeśli zdefiniujemy $\rho' = \rho - \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$, $p' = p + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$, to możemy uprościć równania Friedmana.

Wniosek 1 (I równanie Friedmana)**.**

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho' - \frac{kc^2}{a^2} \tag{F1a}$$

Wniosek 2 (II równanie Friedmana)**.**

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho'\left(1 + \frac{3p'}{\rho' c^2}\right)$$

Dla parametru stanu: $w' = \frac{p'}{\rho' c^2}$ otrzymujemy:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho'(1 + 3w') \tag{F2a}$$

Stąd prosty wniosek, że ekspansja wszechświata przyspiesza ($\ddot{a} > 0$) jeśli $w' < -\frac{1}{3}$.
Jeśli przyjmiemy model jednopłynowy, tak jak np. w przypadku modelu Einsteina de-Sittera, możemy wstawić $\Lambda = 0$, skąd dostajemy, że płyn dominujący ekspansję wszechświata musi mieć $w < -\frac{1}{3}$ aby powodować przyspieszoną ekspansję (inflację).

Warto też zauważyć, że równanie płynu także jest niezmienne względem transformacji wprowadzonej na początku tego akapitu.

3.2 Parametr gęstości

Od teraz za równania bazowe będziemy traktowali (F1a) i (F2a), ponieważ pozwalają nam uwzględniać energię próżni w budżecie całkowitej gęstości wszechświata ρ'. W takim wypadku, pozostaje nam bliżej nieznany parametr k. Za punkt odniesienia do opisu matematycznego przyjmujemy wszechświat płaski ($k = 0$). Wprowadzimy sobie parametry, których wartość wzięta z obserwacji będzie pośrednio związana z krzywizną wszechświata.

Definicja 2 (Gęstość krytyczna)**.** Gęstość krytyczną definiujemy jako:

$$\rho_c' \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Jest on oczywiście zależny od czasu, jako że H jest funkcją czasu.

Przekonaliśmy się, że wszechświat z całą pewnością nie jest modelem jednopłynowym, zatem dobrze byłoby zdefiniować parametr mówiący o udziale tych płynów w gęstości krytycznej.

Definicja 3 (Parametr gęstości)**.** Parametr wyjściowy, zależny od czasu:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c'}$$

Parametr niezależny od czasu ($t = t_0$):

$$\Omega_{0,i} \equiv \frac{\rho_{0,i}}{\rho_{0,c}'}$$

Ewolucję wiążemy poprzez równanie płynu.

Wniosek 3. $\rho' \equiv \sum \rho_i$ oraz $\Omega \equiv \sum \Omega_i$

$$\begin{array}{ccc} k = 0 & \rho' = \rho_c & \Omega = 1 \\ k > 0 & \rho' < \rho_c & \Omega < 1 \\ k < 0 & \rho' > \rho_c & \Omega > 1 \end{array}$$

W taki sposób możemy mierzyć krzywiznę wszechświata.

4 Model kosmologiczny ΛCDM

Z poprzedniego kółka pamiętamy, że (zgodnie z wprowadzoną wyżej konwencją) możemy zapisać równanie (F1a) jako:

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{\rho'}{\rho_{0,c}'} = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{0,c}'} = \sum_i \frac{\rho_{0,i} a^{-3(1+w_i)}}{\rho_{0,c}'} \\ &= \sum_i \Omega_{0,i} a^{-3(1+w_i)} \end{aligned}$$

Twierdzenie 6 (Równanie Friedmana po raz ostatni)**.** W klasycznym modelu ΛCDM, czyli w modelu z zimną ciemną materią i stałą kosmologiczną mamy:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_{0,\mathrm{mat.}} a^{-3} + \Omega_{0,\mathrm{rad.}} a^{-4} + \Omega_{0,\Lambda}\right]$$

gdzie $\Omega_{0,\mathrm{mat.}}$ to zawartość nierelatywistycznej (zimnej) materii, tj. materii widzialnej (barionowej) i ciemnej materii; $\Omega_{0,\mathrm{rad.}}$ to zawartość promieniowania (fotony i materia ultra-relatywistyczna); $\Omega_{0,\Lambda}$ to zawartość ciemnej energii w postaci stałej kosmologicznej, tj. energia próżni.

Wniosek 4 (Bezpośrednie uwzględnienie krzywizny)**.** Powyższe równanie zakłada, że $\Omega = 1$ tylko w przypadku wszechświata płaskiego. Jeśli chcemy, aby $\Omega = 1$ niezależnie od krzywizny czasoprzestrzeni, powinniśmy dodać do równania $\Omega_{0,k}$. Z równania (F1a) widzimy, że parametr ten zmienia się jak a^{-2}.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_{0,\mathrm{mat.}} a^{-3} + \Omega_{0,\mathrm{rad.}} a^{-4} + \Omega_{0,k} a^{-2} + \Omega_{0,\Lambda}\right], \quad \Omega = 1$$

Patrząc na powyższe równania widzimy, że wraz z ewolucją wszechświata najszybciej zanika promieniowanie, potem materia, natomiast stała kosmologiczna nie zanika. Oznacza to, że w świecie ze stałą ciemną energią prędzej czy później zaczyna ona dominować, co powoduje przyspieszoną ekspansję.

Tablica 1: Parametry modelu ΛCDM

Ω_b	0.0486
Ω_DM	0.2589
Ω_Λ	0.6911
Ω_r	$\sim 10^{-4}$

Oczywiście wartości te obarczone są błędami pomiarowymi, których nie podałem. Obecnie, błędy te są rzędu $\sim 10^{-3}$. W celach ćwiczeniowych przyjmiemy jednak, że $\Omega_\mathrm{r} = 1 - \Omega_\mathrm{m} - \Omega_\Lambda = 0.0014$.

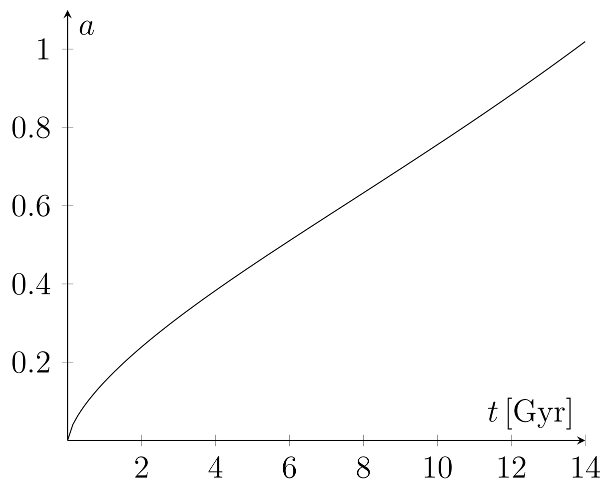
4.1 Rozwiązanie analityczne dla modelu dwupłynowego

Równanie Friedmana ma analityczne rozwiązanie dla modelu składającego się z materii i stałej kosmologicznej. Jest to sensowne przybliżenie rzeczywistej ewolucji wszechświata dla dostatecznie małych redshiftów. Dawniej bowiem (w okolicach wielkiego wybuchu) promieniowanie odgrywało dużą rolę (ewolucja $\sim a^{-4}$). Rozwiązanie to prezentuje się następująco:

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_\mathrm{m}}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3H_0}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda} t\right)$$

Natomiast z użyciem przesunięcia ku czerwieni,

$$z(t) = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\mathrm{m}}\right)^{1/3} \sinh^{-2/3}\left(\frac{3H_0}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda} t\right) - 1$$



Rysunek 1: Ewolucja $a(t)$ we wszechświecie z materią barionową, ciemną materią i stałą kosmologiczną.

Po samym wykresie widzimy, że funkcja zmienia swoją wypukłość, a zatem następuje przejście między deceleracją a akceleracją ekspansji. Zaraz policzymy to dokładniej. Najpierw jednak policzmy sobie wiek wszechświata.

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\mathrm{m}}\right)^{1/2} \\ &= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left[\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\mathrm{m}}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{\Omega_\mathrm{m}}\right)^{1/2}\right] \\ &= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left[\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}}}\right] = 13.72\,\mathrm{Gyr} \end{aligned}$$

Oszczędzę wam już liczenie brzydkich pochodnych i napiszę co wychodzi, gdy policzymy drugą pochodną $a(t)$ i przyrównamy ją do 0. Będzie to moment, w którym wszechświat zaczął przyspieszać.

$$\begin{aligned} a_t &= \left(\frac{\Omega_\mathrm{m}}{2\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} = 0.61 \\ z_t &= 0.65 \end{aligned}$$

Możemy jeszcze spytać jak dawno temu nastąpiło to przejście. W tym celu policzymy (podobnie jak t_0) wprowadzany już Lookback time.

$$\begin{aligned} t(z) &= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \frac{(1+z)^{-3/2}\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}}} \\ &= \frac{2}{3H_0\sqrt{\omega_\Lambda}} \ln\left[\frac{(1+z)^{-3/2}\sqrt{\Omega_\Lambda} + \sqrt{(1+z)^{-3}\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{m}}}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}}}\right] \end{aligned}$$

A zatem,

$$t_L(z) = t_0 - t(z) = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left[\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{(1+z)^{-3}\Omega_\Lambda} + \sqrt{(1+z)^{-3}\Omega_\Lambda + \Omega_{\mathrm{m}}}}\right]$$

Stąd wyliczymy, że:

$$t_L(z_t) = 6.16\,\mathrm{Gyr}$$

Czyli przejście do $\ddot{a} > 0$ rozumiane także jako era dominacji ciemnej energii nastąpiło ponad 6 miliardów lat temu. Zapewne widzicie, że można się w to wszystko wgryźć dużo bardziej i wyciągać wiele innych informacji, natomiast my na tym poprzestaniemy.