Analiza III R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020 do powtórki: Twierdzenie o funkcj uwikłanej i badanie powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^n$.

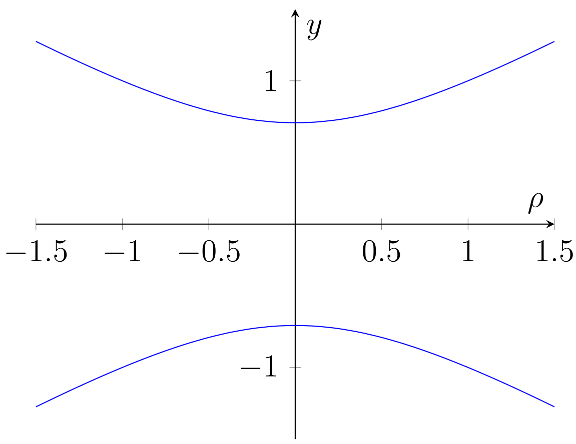
Definicja 1. Atlas – zbiór map $M \to \mathbb{R}^n$ (lokalnych układów współrzędnych), gdzie M jest rozmaitością

$$\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

Do badania czy rozmaitość można pokryć układem współrzędnych służy twierdzenie o funkcji uwikłanej.
Mapa rzutuje w dół $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, parametryzacja w górę $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Zadanie 1 Rozważmy funkcję $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 - 1$. Wówczas sfera $\mathbb{S}^n$ to $f^{-1}(0)$. Rozważmy funkcję $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 1$ i niech $f^{-1}(0) \overset{\text{def}}{=} M \subset \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć system parametryzujący ten zbiór.

Dowód. Równanie domniemanej powierzchni możemy zapisać w postaci $2y^2 - 1 = \rho^2$, gdzie $\rho^2 = x^2 + z^2$ jest kwadratem współrzędnej „radialnej" w płaszczyźnie xz. Widzimy, że $y(\rho)$ opisuje hiperbolę.



Rysunek 1: Wykres $y(\rho)$, czyli przekrój hiperboloidy dwupowłokowej.

Ten zbiór M to hiperboloida dwupowłokowa. Czy ten zbiór tworzy powierzchnię?

$$f'(x, y, z) = [2x, -4y, 2z]$$

$f' = 0 \implies \operatorname{rk} f' = 0$ lub $f' \neq 0 \implies \operatorname{rk} f' = 1$. W naszym przypadku $f' \neq 0$, zatem M jest powierzchnią 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$. Będziemy zastanawiać się nad $\mathrm{T}_P M$ i nad afiniczną płaszczyzną styczną. Przestrzeń styczna w punkcie $p_0 = [x_0, y_0, z_0]$ to podprzestrzeń wektorowa. Afiniczna płaszczyzna styczna to trochę coś innego.

Zaproponujmy parametryzację górnego płata tej powierzchni $M_+ = \{p \in M \colon y > 0\}$. Będziemy parametryzować płaszczyzną xz.

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+s^2+t^2} \\ t \end{bmatrix} \in M_+$$

Przestrzeń styczna do p_0 to jądro tej pochodnej.

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{p_0} M_+ = \mathrm{T}_{p_0} M &= \ker[2x_0, -4y_0, 2z_0] \\ &= \Big\{ \big[v_x, v_y, v_z\big] \colon x_0 v_x - 2y_0 v_y + z_0 v_z = 0 \Big\} \end{aligned}$$

Afiniczna płaszczyzna styczna polega na tym, że bierzemy tą wyżej opisaną przestrzeń i dodajemy punkt zaczepienia. Są to punkty postaci $\big\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0} M\big\}$. Weźmy wektor $\big[w_x, w_y, w_z\big] = \mathbf{w} = p_0 + \mathbf{v}$. Stąd,

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x - x_0 \\ w_y - y_0 \\ w_z - z_0 \end{bmatrix}$$

Wstawiając to do równania na jądro,

$$\begin{aligned} \big\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0} M\big\} &= \Big\{ \big[w_x, w_y, w_z\big] \colon x_0 w_x - 2y_0 w_y + z_0 w_z - \big(x_0^2 - 2y_0^2 + z_0^2\big) = 0 \Big\} \\ &= \Big\{ \big[w_x, w_y, w_z\big] \colon A w_x + B w_y + C w_z + D = 0 \Big\} \end{aligned}$$

■

Wstęp do form liniowych 1-formy na przestrzeni V: $V^* = \bigwedge^1 V^*$
Przykład 2-formy antysymetrycznej na przestrzeni V: oznaczenie $\bigwedge^2 V^* \colon \omega \colon V \times V \to \mathbb{R}$ oraz antysymetryczne $\omega(v, w) = \omega(w, v)$.

Ogólniej (jakiś tam funktor w kategorii czegoś tam xD): $\bigwedge^k V^*$: odwzorowania k–liniowe, antysymetryczne.

$$\begin{aligned} \omega^k \wedge \alpha^l &\in \bigwedge^{k+l} V^*, \quad \text{2-liniowe, łączne} \\ \omega^k \wedge \alpha^l &= (-1)^{kl} \alpha^l \wedge \omega^k \\ \dim \bigwedge^k V^* &= \binom{n}{k}, \quad n = \dim V \end{aligned}$$

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ – baza V. Wówczas baza dualna to $\big\{e^1, \dots, e^n\big\}$.
Baza $\bigwedge^2 V^*$: $\big\{e^i \wedge e^j \colon 1 \le i < j \le n\big\}$. Stąd potem kombinatoryczny wzór na wymiar (dbamy o uporządkowane iloczyny).

Zadanie 2 Niech $\beta \in \bigwedge^{k+1} V^*$ i $0 \neq \omega \in \bigwedge^1 V^*$ takie, że $\beta \wedge \omega = 0$. Wykazać, że istnieje k-forma α taka, że $\beta = \alpha \wedge \omega$.

Można zrobić tak, żeby baza V^* była $\left\{\omega, e^2, \ldots, e^n\right\}$. Zatem,

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$

$$\beta \wedge e^1 = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} \left(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}\right) \wedge e^1 = 0$$

tam gdzie $e^{i_1} = e^1$ i tak iloczyn zewnętrzny się zeruje. Stąd, jeśli $e^{i_1} > 1$, to odpowiednie $\beta_{xyz} = 0$. Stąd,

$$\beta = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^1 \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$

$$\beta = \alpha \wedge \omega = (-1)^k \omega \wedge \alpha = (-1)^k e^1 \wedge \alpha$$

Zatem α istnieje i ma postać:

$$(-1)^k \alpha = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$

Jednakże α nie jest jednoznaczne, bo mamy wciąż swobodę wziąć $\alpha' = \alpha + t\omega$ i to też działa. Czy jest więcej stopni swobody?