

# ANALIZA

## MATEMATYCZNA III

*„Teraz na ucieczkę już za późno...”*  
– Regina Lewkowicz

*„To Wam się przyda na pierwszym i drugim roku studiów. Teraz utrzymujemy taką narrację optymistyczną. Nie pesymistyczną. To Wam się przyda!”*

Wykładowca:  
Olga Ziemiańska

Skryba:  
Szymon Cedrowski

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Granice ciągów II</b>	<b>3</b>
1.1	Powtórka granic . . . . .	3
1.2	Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa . . . . .	4
1.3	Twierdzenie Toeplitza . . . . .	8
1.4	Twierdzenie Stolza . . . . .	11
1.5	Punkty skupienia, granica górna i dolna . . . . .	12
1.6	Losowe funkcje wykładnicze i logarytmy . . . . .	15
1.6.1	Cyferki atakują :-( . . . . .	18
1.6.2	Atakujemy granice :-)	19
<b>2</b>	<b>Granice funkcji</b>	<b>21</b>
2.1	Definicje Heinego i Cauchy’ego . . . . .	21
2.1.1	Granice lewo- i prawostronne . . . . .	24
2.2	Granice, pochodne, nierówności oraz własności exp i ln . . . . .	25
2.3	Ciągłość funkcji . . . . .	28
2.4	Twierdzenie Weierstrassa i Darboux . . . . .	30

# Rozdział 1

## Granice ciągów II

### 1.1 Powtórka granic

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)}$$

Zauważmy, że  $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$ ,

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2^2 - 2 + 1} \frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} = \frac{2}{3}$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(2k+1) - (2k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{(n+1)^{\frac{k-1}{k}} + (n+1)^{\frac{k-2}{k}}n + \dots + n^{\frac{k-1}{k}}} = 0$$

4.  $|a_n| \rightarrow 1, a_n \neq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_n^2 + \dots + a_n^k - k}{a_n - 1}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n - 1) + (a_n^2 - 1) + \dots + (a_n^k - 1)}{a_n - 1}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + (a_n + 1) + \dots + (a_n^{k-1} + \dots + 1) \right] = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}{(n+1)!}$

Zauważmy, że  $k \cdot k! = (k+1)! - k!$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (k+1)! - k!$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} = 1$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k})$$

Taktyka jest taka, żeby użyć wzoru  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  i łańcuchowo to wszystko pozwijać. Przyjmując, że  $x \neq 1$ :

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)}{(1-x)} (1+x)(1+x^2) \dots (1+x^{2^n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^n})}{(1-x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \end{aligned}$$

Teraz trzeba się pobawić przypadkami dla różnych wartości  $x$ :

$$|x| < 1 \implies \lim a_n = \frac{1}{1-x}$$

$$x = -1 \xrightarrow{\text{baz.}} \lim a_n = 0$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{baz.}} \lim a_n = +\infty$$

$$x > 1 \implies \lim a_n = +\infty$$

$$x < -1 \implies \lim a_n = -\infty$$

$$7. a_1 = b > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right), \quad T: \lim a_n = \sqrt{a}$$

Z nierówności między średnimi mamy:

$$\frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) \geq \sqrt{a}$$

zatem widzimy, że ciąg jest ograniczony od dołu przez  $\sqrt{a}$ . Trzeba jeszcze pokazać, że jest monotonicznie malejący, tj.  $a_n \geq a_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} 2a_n &\geq a_n + \frac{a}{a_n} \\ a_n^2 &\geq a \implies a_n \geq \sqrt{a} \end{aligned}$$

co jest oczywiście spełnione. W związku z powyższym granica istnieje. Typując kandydatów na granicę otrzymamy  $\pm\sqrt{a}$ , a zatem  $\lim a_n = \sqrt{a}$ .

## 1.2 Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

**Definicja 1** (Ciąg zbieżny). Ciąg jest zbieżny, jeżeli ma skończoną granicę. Inaczej, jest rozbieżny do  $\pm\infty$ .

1. Ciąg  $(a_n)$  nie ma elementu największego  $\implies$  można z niego wyjąć podciąg rosnący.

Konstrukcja:

$$a_{n_1} = a_1$$

Szukamy  $a_{n_2}$ , dla którego  $n_2 > n_1$  oraz  $a_{n_2} > a_{n_1}$ . Takie  $a_{n_2}$  istnieje, bo inaczej  $a_{n_1}$  byłby największym wyrazem  $(a_n)$ .

$$\begin{aligned} a_{n_1} &< a_{n_2} < \dots < a_{n_k} \\ n_1 &< n_2 < \dots < n_k \end{aligned}$$

Szukamy  $a_{n_{k+1}}$  zgodnego z wcześniejszymi założeniami konstrukcji. Takie  $a_{n_{k+1}}$  istnieje, bo w przeciwnym przypadku  $\max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_k}\}$  byłoby największym elementem ciągu. To kończy krok indukcyjny konstrukcji podciągu rosnącego  $(a_{n_k})$ .

**Lemat 1** (Lemat Sierpińskiego). Z każdego ciągu można wyjąć podciąg monotoniczny.

*Dowód.* 1. Każdy podciąg ciągu  $(a_n)$  ma wyraz największy.

Skonstruujemy podciąg monotoniczny nierosnący. Konstrukcja:  $a_{n_1}$  – największy element ciągu (o najmniejszym indeksie).

$$\begin{aligned} a_{n_1} &\geq a_{n_2} \geq \dots \geq a_{n_k} \\ n_1 &< n_2 < \dots < n_k \end{aligned}$$

$a_{n_1}$  wybraliśmy jako  $\sup\{a_1, a_2, \dots\}$ . Niech więc  $a_{n_2}$  będzie  $\sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\}$  – ma to zawsze sens, zgodnie z założeniem o największym elemencie oraz dzięki temu, że  $n_2 \geq n_1 + 1$ . W ogólności, konstrukcję pociągniemy dalej biorąc  $a_{n_{k+1}} = \sup\{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \dots\}$ .

2. Istnieje podciąg, który nie ma największego wyrazu.

Wybieramy podciąg rosnący z powyższego zadanka. Podciąg podciągu jest podciągiem wyjściowego ciągu zatem znaleźliśmy, co chcieliśmy. ■

**Twierdzenie 1** (Bolzano-Weierstrass). Z każdego ciągu ograniczonego można wyjąć podciąg zbieżny. Jeśli ciąg jest ograniczony to granica jest skończona.

*Dowód.* Na mocy lematu Sierpińskiego, możemy wyjąć podciąg monotoniczny.

Ciąg monotoniczny ma granicę. A ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę skończoną. ■

**Twierdzenie 2.** Ciąg ma granicę  $\iff$  każdy jego podciąg ma granicę.

*Dowód.* No ciąg jest swoim własnym podciągiem. Dowód oczywisty, przez poprawność. ■

**Twierdzenie 3.**  $(a_n)$  nie ma granicy  $\implies$  ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

*Dowód.* Zaprzeczamy warunkowi na istnienie granicy. Mamy  $(a_n)$  taki, że  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$ . Ale  $\lim a_n$  nie istnieje.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |a_n - g| < \varepsilon$$

Zaprzeczenie:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N |a_n - g| \geq \varepsilon \quad (\text{W})$$

Czyli wystarczy pokazać, że to  $g$  nie jest granicą całego ciągu. Szukamy podciągu ciągu  $(a_n)$  na zewnątrz przedziału  $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ . Z zaprzeczonego warunku (W) wynika istnienie podciągu, którego wyrazy leżą na zewnątrz przedziału, czyli albo po lewej albo po prawej mamy niekończenie wiele wyrazów. Załóżmy, że:

$$\exists (a_{n_l})_{l \in \mathbb{N}} \text{ t.j. } a_{n_l} \geq g + \varepsilon$$

Teraz wybieramy podciąg zbieżny z  $(a_{n_l})$ . Ale jego granica  $\geq g + \varepsilon$ . ■

**Wniosek 1.**  $a_n \geq 0, a_n \rightarrow g, k \in \mathbb{N} \implies \sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{g}$

*Dowód.* Załóżmy, że to nie prawda. Znajdzie się wówczas podciąg  $\sqrt[k]{a_{n_l}} \rightarrow a \neq \sqrt[k]{g}$ , dla  $l \in \mathbb{N}$ . Wiemy to z Twierdzenia 3.

Korzystając z tw. o granicy iloczynu dostajemy

$$a_{n_l} = (\sqrt[k]{a_{n_l}})^k \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a^k \neq g$$

$$\text{Ale } a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} g$$

Sprzeczność. ■

**Twierdzenie 4** (Warunek Cauchy'ego).  $(a_n)$  jest zbieżny (ma skończoną granicę)  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, m > N |a_k - a_m| < \varepsilon$$

*Dowód.* „ $\implies$ ”:

$$a_n \rightarrow g$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon/2} \forall n > N_{\varepsilon/2} |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jeśli  $m, k > N_{\varepsilon/2}$  to  $a_m, a_k \in (g - \varepsilon/2, g + \varepsilon/2) \implies |a_n - a_k| < \varepsilon$

„ $\impliedby$ ”:

Pokazać, że  $(a_n)$  jest ograniczony.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, m > N |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Weźmy  $\varepsilon = 1$ . Istnieje  $N_1$  takie, że

$$\forall k, m \geq N_1 |a_k - a_m| < 1$$

czyli  $|a_k - a_{N_1+1}| < 1$ .

$$1 > |a_k - a_{N_1}| \geq |a_k| - |a_{N_1+1}|$$

$$\text{czyli } |a_k| < |a_{N_1+1}| + 1 \text{ dla każdego } k > N_1$$

zatem ciąg jest ograniczony.

Teraz chcemy pokazać, że istnieje podciąg zbieżny  $(a_{n_j}) \rightarrow g$  (z Twierdzenia B-W). Chcemy pokazać, że  $a_n \rightarrow g$ . Weźmy  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N \forall k, m, j > N |a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oraz } |a_{n_j} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zależy nam na poszacowaniu  $|a_k - g|$ :

$$|a_k - g| = |a_k - a_m + a_m - g|$$

$$\stackrel{m=n_j}{\leq} |a_k - a_m| + |a_{n_j} - g|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

czyli  $a_n \rightarrow g$ . ■

$$1. \ a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

Udowodnić, że jest zbieżny z kryterium Cauchy'ego.

$$|a_k - a_m| \stackrel{k>m}{=} \left| (-1)^m \frac{1}{m+1} + (-1)^{m+1} \frac{1}{m+2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right|$$

$$= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \dots + (-1)^{k-m+1} \frac{1}{k} \stackrel{?}{<} \frac{1}{m+1}$$

bo to długie jest dodatnie. Teraz trzeba pokazać tę nierówność.

$$-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{m+3} < 0$$

i podobnie wszystkie pary, zatem po skasowaniu  $1/(m+1)$  zostanie coś ujemnego. W związku z tym nasza nierówność działa. Stąd już widzimy, że  $1/(m+1)$  może przyjmować dowolnie małe wartości dla  $m > N$ .

2. Pokazać, że  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  nie spełnia warunku Cauchy'ego.

Pamiętamy (W). Weźmy  $\varepsilon = 1/2$ :

$$a_m - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \stackrel{?}{>} \frac{1}{2}$$

$$\forall_N \exists_{2(N+1), N+1 > N} \left| a_{2(N+1)} - a_{N+1} \right| > \frac{1}{2}$$

$(a_n)$  ma granicę, ale nie jest zbieżny  $\implies \lim a_n = \pm\infty$ , bo nie spełnia warunku Cauchy'ego.  
 $\implies \lim a_n = +\infty$

**Twierdzenie 5** (Warunek Leibniza zbieżności szeregów).

$$a_k - \text{nierosnący}, a_k \rightarrow 0 \implies b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \text{ jest zbieżny}$$

*Dowód.* Chcemy pokazać, że  $b_n$  spełnia warunek Cauchy'ego.

Uwaga:  $\forall_n a_n \geq 0$

Założmy, że  $\exists_{n_0}$  takie, że  $a_{n_0} < 0$ . Wtedy:

$$a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots \leq a_{n_0} < 0$$

$$\implies \lim a_n \leq a_{n_0}$$

co daje nam sprzeczność. Teraz chcemy poszacować ten moduł z Cauchy'ego:

$$|b_k - b_m| \stackrel{k \geq m}{=} \left| (-1)^{m+2} a_{m+1} + \dots + (-1)^{k+1} a_k \right| \stackrel{?}{\leq} a_{n+1}$$

$$a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0$$

$$a_{m+3} - a_{m+4} \geq 0 \dots$$

Konstrukcja taka, jak w poprzednich dowodach. Działa. ■

1.  $(a_n)$  – ciąg,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\forall_n |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n+1} - a_n|$   
 T:  $(a_n)$  jest zbieżny

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda^2 |a_n - a_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^n |a_2 - a_1|$$

$$|a_k - a_m| = |a_k - a_{k-1} + \dots - a_m|$$

$$\stackrel{N.\Delta}{\leq} |a_k - a_{k-1}| + |a_{k-1} - a_{k-2}| + \dots + |a_{m+1} - a_m|$$

$$\leq \lambda^{k-2} |a_2 - a_1| + \dots + \lambda^{m-1} |a_2 - a_1|$$

$$= |a_2 - a_1| \lambda^{m-1} (1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-m-1})$$

$$= |a_2 - a_1| \lambda^{m-1} \frac{1 - \lambda^{k-m}}{1 - \lambda}$$

$$\leq |a_2 - a_1| \frac{\lambda^{m-1}}{1 - \lambda} \rightarrow 0$$

2.  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$  – udowodnić zbieżność, obliczyć granicę.

$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left| \frac{1}{1+a_{n+1}} - \frac{1}{1+a_n} \right| \stackrel{a_i \geq 1}{=} \frac{|a_{n+1} - a_n|}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \\ &\leq \frac{1}{4} |a_{n+1} - a_n| \end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest warunkiem zbieżności z poprzedniego zadania. Teraz przechodzimy z  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} g &= \frac{2+g}{1+g} \\ g+g^2 &= 2+g \\ \Rightarrow g &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

**Twierdzenie 6.**  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$  możemy tak wybrać ciąg  $(\alpha_n)$  gdzie  $\alpha_n = \pm 1$ , że

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{k}$$

*Dowód.* Dla chętnych ;-)

■

## 1.3 Twierdzenie Toeplitza

**Twierdzenie 7** (Toeplitza o regularnym przekształceniu ciągu). Niech

$$\{c_{n,k} : 1 \leq k \leq n, m \geq 1\}$$

będzie układem liczb rzeczywistych spełniającym następujące warunki:

$$\text{Przy ustalonych } k \in \mathbb{N}, c_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n c_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (2)$$

$$\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq c \quad (3)$$

Jeśli  $c_{n,k} \geq 0$  to (3) jest spełnione, bo ciąg zbieżny jest ograniczony.

Wówczas  $\lim a_n = a \Rightarrow \lim b_n = a$ , gdzie  $b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k$ .

Można bardzo prosto zapamiętać te warunki, rysując tablicę z wyrazami ciągu:

$$\begin{array}{ccccccc} c_{1,1} & & & & & & \\ c_{2,1} & c_{2,2} & & & & & \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} & \sum_{\Sigma} \rightarrow 1 \\ & & & & & \sum_{\Sigma} || \leq c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \end{array}$$

Widzimy pewne podobieństwo do twierdzenia z tablicą z pierwszej klasy.



*Dowód.* Załóżmy, że  $a_n \rightarrow 0$ . Chcemy pokazać, że  $b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k \rightarrow 0$ , gdzie  $c_{n,k}$  jest zdefiniowane wg. (1), (2), (3).

$$a_n \rightarrow 0 \xRightarrow{\text{zbieżny}} \exists_{D>0} \forall_n |a_n| < D$$

Niech  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \underbrace{|c_{n,1}| |a_1| + \cdots + |c_{n,N_1}| |a_{N_1}|}_{< \varepsilon/2?} + \underbrace{|c_{n,N_1+1}| |a_{N_1+1}| + \cdots + |c_{n,n}| |a_n|}_{< \varepsilon/2?} \\ a_n \rightarrow 0 &\implies \exists_{N_1} \forall_{n>N_1} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C} \\ \implies |c_{n,N_1+1}| |a_{N_1+1}| + \cdots + |c_{n,n}| |a_n| &< \frac{\varepsilon}{2C} (|c_{n,N_1+1}| + \cdots + |c_{n,n}|) \stackrel{(3)}{<} \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Niech  $N_1$  będzie ustalone:

$$\begin{aligned} \exists_{N_2} \forall_{n>N_2} |c_{n,1}| + \cdots + |c_{n,N_1}| &< \frac{\varepsilon}{2D} \\ |c_{n,1}| |a_1| + \cdots + |c_{n,N_1}| |a_{N_1}| &< D \frac{\varepsilon}{2D} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Dla  $n > \max\{N_1, N_2\}$   $|b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ .

I tu się kończy dowód dla 0. Teraz dla  $a_n \rightarrow a$ :

$$\begin{aligned} a'_n &= a_n - a \rightarrow 0 \\ b_n &= \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^n c_{n,k} a'_k}_{\rightarrow 0} + a \underbrace{\sum_{k=1}^n c_{n,k}}_{\rightarrow a} \rightarrow a \end{aligned}$$

■

$$1. \lim a_n = a \implies \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

Wystarczy sprawdzić warunki (1), (2). Działa.

$$2. \lim a_n = a \implies \lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$$

Rozszerzając twierdzenie można zauważyć, że jeżeli (2)  $\rightarrow A$ , to teza zamienia się na  $\lim b_n = aA$ . Tutaj nasze  $A = 1/2$ , więc chcemy dobrać takie  $(c_{n,k})$ , żeby te sumy były zbieżne do  $1/2$ .

$$c_{n,k} = \frac{n-k+1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_{n,k} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{k}{n^2} \right) = 1 + \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &\rightarrow 1/2 \end{aligned} \quad (2)$$

Zatem granica sumy to  $a/2$ .

$$3. a_n \rightarrow a \implies \lim \left( \frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right) = ?$$

$$c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-k}} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots \rightarrow 2 \\ \implies \lim b_n &= 2a \end{aligned} \quad (2)$$

4.  $\lim a_n = a$ . Obliczyć  $\lim \left( \frac{a_n}{1 \cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{a_1}{n(n+1)} \right)$

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)}$$

$$\lim b_n = a$$

5. Obliczyć  $\lim \left( \frac{a_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_1}{2^{n-1}} \right)$

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n-k}} \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n c_{n,k} = -\frac{2}{3} \left( \left( -\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right) \rightarrow \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^n 2^{k-n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \lim b_n = 2/3a$$

6.  $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow +\infty$

$$\exists_{N_1} \forall_{n > N_1} a_n > 0$$

$$b_n = \underbrace{\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n}}_{\rightarrow 0} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}$$

Założmy, że  $\forall_n a_n > 0$ . Niech  $M > 0$ .  $\exists_N \forall_{n > N} b_n > M$ . Chcemy znaleźć takie  $N$ .

$$\exists_{N_1} \forall_{n > N_1} a_n > 2M$$

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n} > \frac{2M(n - N_1)}{n}$$

Dla jakich  $n$ ,  $\frac{n - N_1}{n} > \frac{1}{2}$ . Znaleźliśmy  $N = 2N_1$ .

7.  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \lim \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}$

$$c_{n,k} = \frac{b_{n-k+1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\sum c_{n,k} = \frac{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} \rightarrow b \quad (2)$$

8.  $(a_n), (b_n)$  są ciągami takimi, że  $b_n > 0, \lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty, \lim \frac{a_n}{b_n} = g$

T:  $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \rightarrow g$

$$a'_k = \frac{a_k}{b_k} \rightarrow g, c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n} \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\sum c_{n,k} a'_k = \sum \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$$

$$\sum c_{n,k} = 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \lim \sum c_{n,k} a'_k = g$$

9.  $b_n > 0, \lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty, \lim a_n = a$

T:  $\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + \cdots + b_n} \rightarrow a$

$$c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n}$$

10.  $b_n \rightarrow b$  oraz  $(a_n)$  jest taki, że  $b_n = 2a_n + a_{n-1}$ . Udowodnij, że istnieje  $\lim a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(b_n - a_{n-1}) = \frac{b_n}{2} - \frac{b_{n-1}}{4} + \frac{a_{n-2}}{4} \\ &= \frac{b_n}{2^1} - \frac{b_{n-1}}{2^2} + \frac{b_{n-2}}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{b_2}{2^{n-1}} + (-1)^{n+1} \frac{a_1}{2^n} \end{aligned}$$

Jest fajnie, więc korzystamy z Tw. Toeplitza:

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n+1-k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\sum_k c_{n,k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots \rightarrow \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\sum_k |c_{n,k}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \rightarrow 1 \quad (3)$$

## 1.4 Twierdzenie Stolza

**Twierdzenie 8 (Stolza).** Niech będą dane ciągi  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  takie, że:

$$y_n < y_{n+1}, \quad \lim y_n = +\infty \quad (1)$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = g \quad (2)$$

Wówczas  $\lim \frac{x_n}{y_n} = g$ .

*Dowód.*

$$a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

$$b_n = y_{n+1} - y_n$$

Korzystamy z ostatniego zadania. Otrzymujemy wówczas, że

$$g = \lim \frac{x_n - x_1}{y_n - y_1} = \lim \frac{\frac{x_n - x_1}{y_n - y_1}}{1 - \frac{y_1}{y_n}}$$

Używając założenia  $y_n \rightarrow +\infty$  widzimy, że  $\lim \frac{x_n}{y_n} = g$ . ■

$$1. \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ y_n &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 2$$

$$2. \quad \frac{n}{a^{n+1}} \left( a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n} \right), \quad a > 1$$

$$\begin{aligned} x_n &= a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n} \\ y_n &= \frac{a^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{a^{n+1}}{n+1} / \left( \frac{a^{n+2}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n} \right) = \frac{1}{a-1}$$

$$3. \frac{1}{n^{k+1}} \left( k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} \right)$$

$$\lim \Delta = \lim \frac{(k+n)!}{n!(n^{k+1} - n^k)} = \lim \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{n^k + n^{k-1}(n-1) + \dots + (n-1)^k} \\ = \frac{1}{k+1}$$

$$4. \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$y_n = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

## 1.5 Punkty skupienia, granica górna i dolna

**Definicja 2** (Punkt skupienia).  $g \in \mathbb{R}$  jest punktem skupienia ciągu  $(a_n)$  jeśli istnieje podciąg zbieżny do  $g$ . Czyli:

$$\forall \varepsilon \forall k \exists n_k |a_{n_k} - g| < \varepsilon$$

$S$  to zbiór punktów skupienia ciągu. Generalnie, punkt skupienia ciągu to taki punkt, w którego dowolnym otoczeniu znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

$$1. \text{ Znaleźć punkty skupienia ciągu } \frac{1}{2} \left( n - 2 - 3 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right) \left( n - 3 - 3 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right)$$

$$(a) \ n = 3k: \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = k-1 \implies a_n = 0$$

$$(b) \ n = 3k+1: \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = k \implies a_n = 1$$

$$(c) \ n = 3k+2: \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = k \implies a_n = 0$$

Zatem  $S = \{0, 1\}$

$$2. \frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}$$

$$n \bmod 2 \implies S = \{0, 2\}$$

$$3. \left( \cos \frac{n\pi}{3} \right)^n$$

$$n \bmod 6 \implies S = \{-1, 0, 1\}$$

4. Podciągi  $(a_{2k}), (a_{2k+1}), (a_{3k})$  są zbieżne. Udowodnić, że  $(a_n)$  jest zbieżny. Czy ze zbieżności dowolnych dwóch z tych podciągów wynika zbieżność?

Oczywiście jeśli dwa z trzech są zbieżne to nie mamy wynikania. Wystarczy choćby

$$(a) \ a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1$$

$$(b) \ a_{6k} = 1, a_{6k+1} = 0, a_{6k+2} = 1, a_{6k+3} = 1, a_{6k+4} = 1, a_{6k+5} = 0$$

$$(c) \ a_{6k} = 1, a_{6k+1} = 1, a_{6k+2} = 0, a_{6k+3} = 1, a_{6k+4} = 0, a_{6k+5} = 1$$

To teraz zbieżność z trzech ciągów. Przyjmijmy, że  $(a_{2n}) \rightarrow g_1, (a_{2k_1}) \rightarrow g_2, (a_{3k}) \rightarrow g_3$ .

Łatwo możemy pokazać, że  $g_1 = g_2 = g_3 = g$ :  $(a_{2k+1}), (a_{3k})$  mają wspólny podciąg  $(a_{6k+3})$ , zatem  $g_3 = g_2$ . Analogicznie  $g_3 = g_1$ . Skoro do tej samej granicy zbiegają podciąg parzyste i nieparzyste, to zbiega tam cały ciąg.

### Definicja 3.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest nieograniczony z góry} \\ -\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z góry i zbiór } S = \emptyset \\ \sup S & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z góry i zbiór } S \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest nieograniczony z dołu} \\ +\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z dołu i zbiór } S = \emptyset \\ \inf S & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z dołu i zbiór } S \neq \emptyset \end{cases}$$

Czasem stosuje się też notację  $\overline{\lim} \equiv \limsup$  oraz  $\underline{\lim} \equiv \liminf$ .

1. Jeśli  $\limsup a_n = -\infty$  to  $\lim a_n = -\infty$

Gdyby  $(a_n)$  był ograniczony z dołu, to z tw. B-W ma podciąg zbieżny, czyli  $S \neq \emptyset \implies (a_n)$  jest nieograniczony z dołu. Jak ciąg nie ma granicy to ma dwie granice. Nie może być to liczba rzeczywista, bo  $S$  jest pusty, zatem musi być to  $-\infty$ .

$$\implies \lim a_n = -\infty$$

2. Znaleźć granicę górną i dolną  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \frac{\sin n\pi}{4}$

$$S = \pm e + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 0 \right\}$$

$$\implies \liminf a_n = -e - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\implies \limsup a_n = e + 1$$

3.  $\left(2 \cos \frac{2n\pi}{3}\right)^n$

$$2 \cos \frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 & n = 3k \\ -1 & n = 3l + 1 \end{cases}$$

$$a_{3k} = 2^{3k} \rightarrow +\infty \implies \limsup = +\infty$$

$$a_{3k+1} = (-1)^{3k+1}$$

$$a_{3k-1} = (-1)^{3k-1} \implies S = \{-1, 1\}$$

$$\implies \liminf = -1$$

### Twierdzenie 9.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Równość zachodzi  $\iff$  ciąg ma granicę.

*Dowód.* 1.  $\limsup = -\infty \implies \lim = -\infty$

Z definicji  $a_n$  – ograniczony z góry,  $S = \emptyset$ , zatem  $\liminf = -\infty$ .

$$2. \limsup = +\infty \implies \liminf \leq \limsup = +\infty$$

Założmy, że  $\limsup = \liminf = +\infty$ . Chcemy pokazać, że  $\lim = +\infty$ .

Z definicji dowodzimy analogicznie, jak w pierwszym zadaniu.

$$3. \limsup \in \mathbb{R} \implies S \neq \emptyset$$

$$\implies \liminf = \begin{cases} -\infty & < \sup S \\ \inf S & \leq \sup S \end{cases}$$

Założmy, że  $\limsup = \liminf \in \mathbb{R} \implies \liminf = \inf S \implies \sup S = \inf S$

Stąd wynika, że  $\overline{S} = 1$ . Ponadto ciąg jest ograniczony z góry, zatem  $S = \{g\}$ ,  $g = \lim a_n$ . ■

**Wniosek 2.** Istnieje podciąg zbieżny do  $\limsup a_n$  i tak samo dla  $\liminf a_n$ .

*Dowód.* 1.  $\limsup = -\infty \implies \lim = -\infty$

2.  $\limsup = +\infty \implies$  PRACA DOMOWA, znaleźć podciąg rozbieżny do  $+\infty$  :)

$$3. \limsup = \sup S = g$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \forall k \exists n_k > k \quad |a_{n_k} - g| < \varepsilon \\ g = \sup S \implies \exists s \in S \quad |g - s| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$s$  – punkt skupienia ciągu

$$\begin{aligned} \exists n_k > k \quad |a_{n_k} - s| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |a_{n_k} - g| \leq |a_{n_k} - s| + |g - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Stąd widzimy, że  $g = \max S$ , bo  $g \in S$ . ■

1.  $(a_n) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ . Udowodnić, że  $S = [0, 1]$ .

2.  $(a_n)$ :  $l = \liminf a_n$ ,  $K = \limsup a_n$  oraz  $\lim a_{n+1} - a_n = 0$ . Udowodnić, że  $S = [l, K]$ .

Założmy, że  $a \in (l, K)$  nie jest punktem skupienia.

$$\exists \varepsilon > 0 \exists k \forall n_k > k \quad |a_{n_k} - a| > \varepsilon$$

Oznacza to, że na przedziale  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  jest skończona liczba wyrazów ciągu. Możemy ten  $\varepsilon$  tak poprawić, żeby nie było żadnych wyrazów ciągu.

$$\lim a_{n+1} - a_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

Począwszy od  $N$  każdy kolejny wyraz ciągu łąduje po którejś ze stron tej wyrwy przedzielonej przez  $a$ . Założmy, że:

$$n > N, \quad a_n \in (a + \varepsilon, K]$$

Czyli w przedziale  $[l, a - \varepsilon]$  jest skończenie wiele wyrazów ciągu. Sprzeczność, bo  $l$  jest punktem skupienia ciągu.

$$3. a_n = \sqrt[n]{\binom{kn}{n}}, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\lim \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \lim \frac{\binom{k(n+1)}{n+1}}{\binom{kn}{n}}$$

O ile istnieje! (Tw. d'Alemberta czy jakiegoś innego Cauchy'ego)

$$\begin{aligned}
 &= \lim \frac{[k(n+1)]!}{(n+1)![(k-1)(n+1)]!} \frac{n![(k-1)n]!}{(kn)!} \\
 &= \lim \frac{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+k)}{(kn+1-n)(kn+2-n)\dots(kn+k-1-n)} \frac{1}{n+1} \\
 &= \lim k \left(1 + \frac{n}{kn+1-n}\right) \left(1 + \frac{n}{kn+2-n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{kn+k-1-n}\right) \\
 &= k \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

4.  $a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ (1+a_n)/2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$  Ile punktów skupienia ma ten ciąg?

$$\begin{aligned}
 a_{2n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{a_1}{2^{2n-1}} \rightarrow \frac{2}{3} \\
 a_{2n+1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{a_1}{2^{2n}} \rightarrow \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

## 1.6 Losowe funkcje wykładnicze i logarytmy

Powtórzmy sobie to, co udowodniliśmy rok temu.

**Definicja 4** (Eksponenta).

$$\begin{aligned}
 \exp(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\
 e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718
 \end{aligned}$$

Pokazywaliśmy, że ta definicja ma sens (zbieżność i te sprawy). Naszym celem było pokazanie, że  $\exp(x) = e^x$  dla  $x \in \mathbb{Q}$  (póki co).

**Twierdzenie 10** (Rozwinięcie w szereg Maclaurina).

$$\begin{aligned}
 \exp(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\
 e &= 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + r_n \\
 \frac{1}{n+1} &< n!r_n < \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

*Dowód.*  $x > 0$ ,  $n \geq k$

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j \geq \\
 &\geq 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x^3}{3!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{x^k}{k!} = b_n \\
 b_n &\rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \\
 \Rightarrow \exp(x) &\geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \rightarrow \exp(x)
 \end{aligned}$$

■

A tutaj dowód szacowania ogonów:

*Dowód.*

$$\begin{aligned}
 e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \cdots + \frac{1}{(k+n)!} \right) \\
 \frac{1}{(k+1)!} + \cdots + \frac{1}{(k+n)!} &\leq \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)(k+1)!} + \cdots + \frac{1}{(k+2)^{n-1}(k+1)!} \\
 &= \frac{1}{(k+1)!} \frac{1 - \left(\frac{1}{k+2}\right)^n}{1 - \frac{1}{k+2}} < \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{k+2}} \\
 &= \frac{k+2}{k!(k+1)^2} < \frac{1}{kk!}
 \end{aligned}$$

■

**Lemat 2** (O ciągach szybkozbieżnych do zera).

$$na_n \rightarrow 0 \implies (1 + a_n)^n \rightarrow 1$$

*Dowód.* Chcemy użyć twierdzenia o trzech ciągach.

$$(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \rightarrow 1$$

Przy założeniach  $a_n > -1$ , co jest prawdą dla dostatecznie dużych  $n$ .

$$(1 + a_n)^n = \left( \frac{1}{1 + \frac{-a_n}{1+a_n}} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{-a_n}{1+a_n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{-na_n}{1+a_n}} \rightarrow 1$$

Zatem mamy ograniczenia z dołu i góry.

■

**Lemat 3.**

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

*Dowód.* Chcemy pokazać, że:

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} \\
 \lim \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} &= \lim \left( \frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}} \right)^n = \lim \left( 1 + \frac{\frac{xy}{n^2}}{\frac{n+x+y}{n}} \right)^n = \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \frac{xy}{x+y+n} \right)^n
 \end{aligned}$$

Używając lematu o ciągach szybkozbieżnych do zera,

$$\lim \frac{xy}{n+x+y} = 0 \implies \lim \left( 1 + \frac{xy}{n(x+y+n)} \right)^n = 1$$

■

**Lemat 4.**

$$\exp(q) = e^q, \quad q \in \mathbb{Q}$$



*Dowód.* Prosto z Lematu 4 płynie wniosek, że dla  $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = e^n$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} \exp(-n) \exp(n) &= \exp(0) = 1 \implies \exp(-n) = \frac{1}{e^n} \\ \implies \forall_{k \in \mathbb{Z}} \exp(k) &= e^k \end{aligned}$$

Niech  $k \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{m}{k}\right) &= \exp\left(\frac{1}{k}\right)^m \\ \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n &= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}\right) \exp\left(\frac{1}{n}\right) \dots}_{n} = e \implies \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Uogólniając identycznie jak w przypadku  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , możemy zapisać, że

$$\exp\left(\frac{1}{k}\right) = e^{\frac{1}{k}} \implies \exp\left(\frac{m}{k}\right) = e^{\frac{m}{k}}$$

■

**Lemat 5** (Najważniejsza nierówność z exp).

$$\exp(x) \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

*Dowód.*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \stackrel{\text{Bern.}}{\geq} 1 + n \frac{x}{n}$$

dla  $x/n > -1$ . Zatem od pewnego momentu, dla dostatecznie dużych  $n$  nam działa, a to wystarczy bo tym bardziej w granicy działa. ■

**Twierdzenie 11.**

$$x_n \rightarrow x \implies \exp(x_n) \rightarrow \exp(x)$$

*Dowód.*

$$\begin{aligned} h_n \rightarrow 0 &\implies \exp(h_n) \rightarrow 1 \\ 1 \leftarrow 1 + h_n &\leq \exp(h_n) = \frac{1}{\exp(-h_n)} \leq \frac{1}{1 - h_n} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Z trzech ciągów mamy  $\exp(h_n) \rightarrow 1$ .  $h_n < 1$  więc dla dostatecznie dużych  $n$  to prawda.

$$\exp(x_n) = \exp(x_n - x) \exp(x) \rightarrow \exp(x)$$

■

**Twierdzenie 12.** Przyjmijmy już, że  $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exp(x) = e^x$ , ale nie wiemy co to  $e^\alpha$  dla  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Własności funkcji  $a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ :

- |                        |   |
|------------------------|---|
| 1. $a^x > 0$           | 4. $a^x$ rosnąca dla $a > 1$ ,<br>zatem jest różnowartościowa |
| 2. $a^{x+y} = a^x a^y$ | $a^x$ malejąca dla $a \in (0, 1)$                             |
| 3. $a^0 = 1$           | 5. $a^{-x} = 1/a^x$   |

**Wniosek 3.** Istnieje funkcja odwrotna, której dziedziną jest obraz  $a^x$ .  
 Obraz  $a^x = (0, +\infty)$ . Funkcję odwrotną będziemy nazywać logarytmem:  $\log_a x: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zauważmy, że:

$\log_a x$  jest rosnącą, gdy  $a > 1$  oraz malejącą gdy  $a \in (0, 1)$ .

**Twierdzenie 13** (Własności logarytmu). Zestaw takich podstawowych narzędzi:

- |                                       |                       |
|---------------------------------------|-----------------------|
| 1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ | 3. $\log_a a^x = x$   |
| 2. $\log_a x^y = y \log_a x$          | 4. $a^{\log_a x} = x$ |

*Dowód.* Jest bardzo elementarny. ■

**Twierdzenie 14** (Zmiana podstawy logarytmu).

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b, \quad a \neq 1, c \neq 1$$

*Dowód.*

$$T: \log_a b = \log_a c \log_c b$$

Wystarczy pokazać, że potęgi przy  $a$  są takie same.

$$\left(a^{\log_a c}\right)^{\log_c b} = c^{\log_c b} = b$$

■

### 1.6.1 Cyferki atakują :-)

1.  $\log_{1/a} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a x$
2.  $\log_{a^b} x = \frac{1}{b} \log_a x$
3.  $10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \log 9 - \log 2} = 10 \cdot 100^{\log 3 - \log 2} = 10 \cdot 100^{\log 3/2} = 10 \cdot \left(10^2\right)^{\log 3/2} = 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$
4.  $15^{2 \log_{15} 40} = 15^{\log_{15} 40^2} = 40^2$
5.  $7^{\log_{49} 5 - 1} = \frac{7^{\log_{49} 5}}{7} = \frac{49^{\log_{49} \sqrt{5}}}{7} = \frac{\sqrt{5}}{7}$

**Wniosek 4.**

$$\log a > \log b \iff a > b$$

1.  $\log 2 < \frac{1}{3} \iff 2 < 10^{1/3} \iff 8 < 10$
2.  $2 \log 7 < 2 - \log 2 \iff \log 49 < \log \frac{100}{2} \iff 49 < 50$
3.  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \implies x = -\frac{1}{4}$

$$4. \log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6 \implies 1.5 \log_x 7 = 6 \implies x = \sqrt[4]{7}$$

$$5. x^{\log x} = \frac{100}{x} \implies y = \log x \implies x = 10^y \implies 10^{y^2} = \frac{100}{10^y} \implies y^2 + y = 2 \implies x = 10, \frac{1}{100}$$

$$6. x^{\log_5 x} = 625 = 5^4 \implies y = \log_5 x \implies y^2 = 4 \implies x = 25, \frac{1}{25}$$

$$7. \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{7-3x} = 3^{3x-7} \implies \left(\frac{1}{7}\right)^{3x-7} = 1 \implies 3x = 7$$

$$8. \begin{cases} \frac{\log x + \log y}{\log(x+y)} = 1 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}, \quad x > 0, y > 0$$

$$\begin{cases} xy = x + y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

Wzory skróconego mnożenia, pałologia stosowana i finiszujemy.

$$9. \begin{cases} xy = 40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log y = s, 10^s &= y \\ \begin{cases} 10^s x = 40 \\ x^s = 4 \end{cases} &\implies 10^s x = 10x^s \\ \left(\frac{x}{10}\right)^{s-1} &= 1 \implies x = 10 \text{ lub } s = 1 \end{aligned}$$

$$10. \begin{cases} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - y^2) = 1 &\implies \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 1 \\ \log_2(x-y) &= \log_3 \frac{1}{x-y}, \quad x+y, x-y > 0 \\ 2^a = \frac{1}{3^a} &= x-y \implies a = 0 \\ x-y &= 1, x+y = 2 \end{aligned}$$

### 1.6.2 Atakujemy granice :-)

$$1. \lim(n!e - \lfloor n!e \rfloor)$$

Wiemy, że  $n!e = K + x_n$ , gdzie  $K \in \mathbb{Z}$  i  $x_n < 1$  oraz  $x_n \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \lim(n!e - \lfloor n!e \rfloor) &= K - \lim \lfloor K + x_n \rfloor \\ &= K - \lim \lfloor K \rfloor = 0 \end{aligned}$$

$$2. a, b \in \mathbb{R}, a_n - \text{rekurencyjnie:}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a, a_2 = b, a_{n+1} = \frac{n-1}{n}a_n + \frac{1}{n}a_{n-1} \\
a_{n+1} - a_n &= \frac{-1}{n}(a_n - a_{n-1}) \\
b_n &= a_{n+1} - a_n, b_n = -\frac{b_{n-1}}{n} \\
\Rightarrow b_n &= (-1)^{n-1} \frac{b-a}{n!} \\
a_{n+1} &= b_n + a_n = b_n + b_{n-1} + a_{n-1} \\
&= a + \sum_{i=1}^n b_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + (b-a)e^{-1}
\end{aligned}$$

sprawdzić to ostatnie!

$$\begin{aligned}
3. \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \\
= \sum \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \sum \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} \\
= \sum \frac{1}{8} \left( \frac{(2k+1)^2 - (2k-1)^2}{(2k+1)^2(2k-1)^2} \right) \rightarrow \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \sum \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{k(k+1)}} \\
= \sum \left( \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \rightarrow 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \sum \frac{1}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}} \\
= \sum \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \sum \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \rightarrow 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. m \in \mathbb{N}, \sum \frac{1}{k(k+m)} \\
= \frac{1}{m} \sum \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+m} \right) \rightarrow \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \sum \frac{k}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \\
= \sum \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)} - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \right) \\
= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \right) \rightarrow \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

## Rozdział 2

# Granice funkcji

### 2.1 Definicje Heinego i Cauchy'ego

**Definicja 5** (Punkt skupienia zbioru).  $p$  jest punktem skupienia zbioru  $A \subset \mathbb{R} \iff$

$$\exists_{(a_n) \rightarrow p} a_n \in A, a_n \neq p$$

**Przykład:**  $0$  jest punktem skupienia  $A = (0, 1)$ .

**Uwaga:**  $+\infty, -\infty$  też mogą być punktami skupienia.

**Definicja 6** (Heinego).  $p$  - punkt skupienia  $D_f$ , granica w punkcie  $p$  funkcji  $f$ :

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = g \iff \forall_{\substack{(x_n) \rightarrow p \\ x_n \neq p}} f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

**Przykład:** Jaka jest granica w zerze funkcji  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \forall_n f(x_n) = 1, x_n \neq 0, \text{ zatem } f(x_n) \rightarrow 1 \\ \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \end{aligned}$$

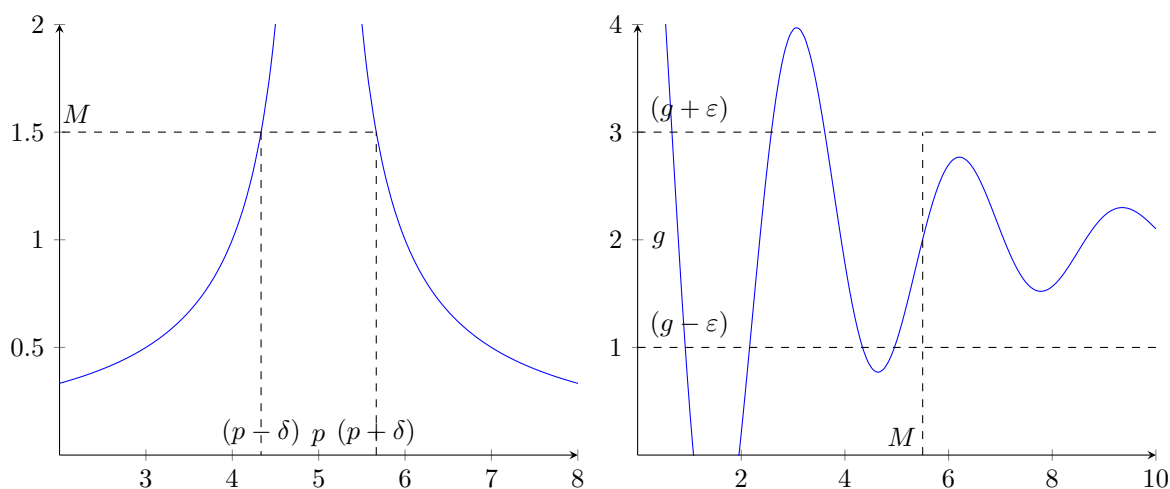
**Definicja 7** (Cauchy'ego). ( $x \neq p$ ) Mamy kilka definicji granicy funkcji w punkcie, w zależności od rodzajów tych punktów/granic:

$$p, g \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = g \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon \quad (1)$$

$$p \in \mathbb{R}, g = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty \iff \forall_M \exists_{\delta > 0} 0 < |x - p| < \delta \implies f(x) > M \quad (2)$$

$$p = +\infty, g \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_M x > M \implies |f(x) - g| < \varepsilon \quad (3)$$

$$p = +\infty, g = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall_M \exists_K x > K \implies f(x) > M \quad (4)$$



Rysunek 2.1: Wizualizacja definicji 2 i 3.

$$1. f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$x_n = \frac{1}{n} \implies f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n \rightarrow +\infty$$

$$x_n = -\frac{1}{n} \implies f(x_n) \rightarrow -\infty$$

$$\xRightarrow{\text{Heine}} g \text{ nie istnieje}$$

$$2. f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Postulujemy  $p = 0$ ,  $g = +\infty$ . Chcąc użyć definicji Cauchy'ego, zakładamy  $M > 0$  i szukamy  $\delta$ .

$$\begin{aligned} |x - 0| &< \delta \\ \delta = \frac{1}{\sqrt{M}} &\implies \frac{1}{x^2} > M \\ \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

**Definicja 8.** Funkcja Dirichleta:  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

**Przypomnienie:** W każdym przedziale znajdzie się liczba wymierna i niewymierna.

**Twierdzenie 15.** Funkcja Dirichleta nie ma granicy w żadnym punkcie.

*Dowód.* Dowód rozbijemy na kilka przypadków:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ nie istnieje:}$$

$$n \rightarrow +\infty \implies f(n) = 1$$

$$n + \sqrt{3} \rightarrow +\infty \implies f(n + \sqrt{3}) = 0$$

Stąd wnioskujemy, że tam granica nie istnieje.

2.  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  nie istnieje:

$$p - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}, \quad p - \frac{1}{n} \rightarrow p \implies f\left(p - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$p - \frac{\sqrt{3}}{n} \notin \mathbb{Q}, \quad p - \frac{\sqrt{3}}{n} \rightarrow p \implies f\left(p - \frac{\sqrt{3}}{n}\right) = 0$$

3.  $p \notin \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  nie istnieje: DO DOMU!

■

1.  $f(x) = \lfloor -x^2 \rfloor$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

Zauważmy, że:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (-1, 0) \\ -1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

W związku z tym, na podstawie definicji Heinego stwierdzamy, że  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ .

**Definicja 9.** Funkcja Riemanna:  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \end{cases}$

**Twierdzenie 16.**

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \text{ nie istnieją}$$

*Dowód.* 1. Dla nieskończoności idzie prosto:

$$f(\pm n\sqrt{2}) = 0$$

$$f(\pm n) = \pm 1$$

Zatem  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  nie istnieje.

2.  $a \in \mathbb{R}$ : Chcemy użyć definicji Cauchy'ego. Weźmy  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon > \frac{1}{n}$$

Teraz szukamy jakiejś  $\delta$ .  $\delta \approx \frac{1}{n!}$ . Niech  $l, k \in \mathbb{Z}$  i będą takie, że  $\frac{k}{n!} < a < \frac{l}{n!}$  oraz, że te liczby tworzą najwęższy możliwy taki przedział.

$$\implies \text{długość} \left( \frac{k}{n!}, \frac{l}{n!} \right) \text{ wynosi co najwyżej } \frac{2}{n!}$$

$$k + 1 = l \quad \text{lub} \quad k + 2 = l$$

Chcemy sprawdzić czy zachodzi taka implikacja, bo wtedy wiemy, że nasza  $\delta$  działa:

$$x \in \left( \frac{k}{n!}, \frac{l}{n!} \right) \xrightarrow{x \neq a} f(x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Zróbmy to przez sprzeczność zakładając, że  $\exists f(x) > \frac{1}{n}$ . Weźmy sobie  $x = \frac{p}{m}$  :

$$\frac{k}{n!} < \frac{p}{m} < \frac{l}{n!}, \quad p \in \mathbb{Z}, m \leq n, (p, m) = 1$$

W tej sytuacji  $f(x) = \frac{1}{m}$ . Przy poczynionych założeniach, jeśli  $m|n!$ , to  $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ .

$$m|n! \implies \frac{p}{m} = \frac{s}{n!}, s \in \mathbb{Z} \implies s < (k, l)$$

sprzeczność, bo wtedy  $s = k$  lub  $s = l$  lub  $\frac{s}{n!} = a$ .

$$\implies f(x) < \frac{1}{n}$$

■

**Twierdzenie 17.** Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie są równoważne.

*Dowód.* 1. Heine  $\implies$  Cauchy, przez sprzeczność:

Weźmy zaprzeczenie definicji Cauchy'ego i spróbujemy ją wyprowadzić z Heinego:

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} (0 < |x - p| < \delta) \wedge (|f(x) - g| \geq \varepsilon)$$

$p$  jest punktem skupienia, zatem:

$$\forall_n \exists_{x_n \neq p} |x_n - p| < \varepsilon$$

Ale jednocześnie  $|f(x_n) - g| \geq \varepsilon$ , co daje nam sprzeczność, bo  $f(x_n) \not\rightarrow g$ ,  $x_n \rightarrow p$ ,  $x_n \neq p$ , jak nam daje Heine.

2. Cauchy  $\implies$  Heine:

Weźmy dowolne  $x_n \rightarrow p$ ,  $x_n \neq p$ . Chcemy pokazać, że  $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_N \forall_{n > N} |f(x_n) - g| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0, \text{ szukamy } N, \text{ ale } \exists_{\delta > 0} 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon \\ \exists_N \forall_{n > N} 0 < |x_n - p| < \delta \implies |f(x_n) - g| < \varepsilon \end{aligned}$$

■

### 2.1.1 Granice lewo- i prawostronne

**Definicja 10** (Granica lewostronna).

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = g \iff \forall_{(x_n) \rightarrow p} \substack{x_n > p \\ f(x_n) \rightarrow g}$$

**Definicja 11** (Granica prawostronna).

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = g \iff \forall_{(x_n) \rightarrow p} \substack{x_n < p \\ f(x_n) \rightarrow g}$$

**Wniosek 5.**

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = g \iff \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = g$$



**Przykład:**

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x}: \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \implies & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ nie istnieje} \end{aligned}$$

## 2.2 Granice, pochodne, nierówności oraz własności exp i ln

**Twierdzenie 18.**

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} (n+1)^n < n!e^n < (n+1)^{n+1}$$

*Dowód.* Z drugiej klasy znamy podobną własność:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Możemy ją użyć dosłownie dla każdego  $n$ :

$$\begin{aligned} e^n &> \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1 \cdot (n+1)!}{2 \cdot n!} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot (n+1)!}{2 \cdot 3 \cdot n!} \dots \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)^n}{n!} \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy drugą stronę nierówności:

$$e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

■

1. Pokazać, że  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$  dla  $|x| < 1$ .

$$\begin{aligned} e^{-x} &\geq 1 - x \\ \frac{1}{e^x} &\geq 1 - x \quad (\text{dodatnie } x < 1) \\ e^x &\leq \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Niech  $x_n \rightarrow 0$  i  $x_n \neq 0$ .

$$\begin{aligned} 1 + x_n &\leq e^{x_n} \leq \frac{1}{1 - x_n} \\ x_n &\leq e^{x_n} - 1 \leq \frac{x_n}{1 - x_n} \\ 1 &\leq \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \leq \frac{1}{1 - x_n} \end{aligned}$$

Dla innych wyrazów nierówności się także odwracają. W obu przypadkach z trzech ciągów zbiega do 1.

**Definicja 12** (Pochodna funkcji).

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

1. Policzyc pochodną funkcji  $e^x$ .

$$\frac{de^x}{dx} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{x+t} - e^x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} e^x \left( \frac{e^t - 1}{t} \right) = e^x$$

2.  $a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$

$$\begin{aligned} a^x &= e^{x \ln a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x \ln a}{n} \right)^n \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \ln a = \ln a \end{aligned}$$

3.  $a > 0$ ,  $\forall_{x \in \mathbb{R}} a^x \geq 1 + x$ ; Teza:  $a = e$

4. Udowodnić, że  $\forall_{x > -1} \frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1) \leq x$

$$e^x \geq 1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$$

Przypomnijmy sobie, że dla  $t < 1$  mamy  $e^t \leq \frac{1}{1-t}$

$$\frac{x}{1+x} < 1 \implies e^{\frac{x}{1+x}} \geq \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x}} = 1 + x$$

**Wniosek 6.**

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

**Wniosek 7.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

**Wniosek 8.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} \stackrel{a \neq 1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a e \ln(1+x)}{x} = \log_a e$$

1. Pochodna logarytmu:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(x)}{dx} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(x+t) - \ln x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{x+t}{x}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{t}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

**Wniosek 9.**

$$x_n, x > 0, \quad x_n \rightarrow x \iff \ln(x_n) \rightarrow \ln(x)$$

*Dowód.*

$$\ln(x_n) - \ln(x) \rightarrow 0$$

$$\ln\left(\frac{x_n}{x}\right) \rightarrow 0$$

Z najważniejszej nierówności na logarytmach (trzy ciągi) dąży do 0.  
W drugą stronę z ciągłości funkcji exp. ■

**Wniosek 10.**

$$a_n, a > 0 \quad a_n \rightarrow a, x_n \rightarrow x \implies a_n^{x_n} \rightarrow a^x$$

*Dowód.* Wystarczy pokazać, że

$$\ln(a_n^{x_n}) \rightarrow \ln(a^x)$$

Potęgowanie zamieniamy na mnożenie ciągów, a to już było udowodnione. ■

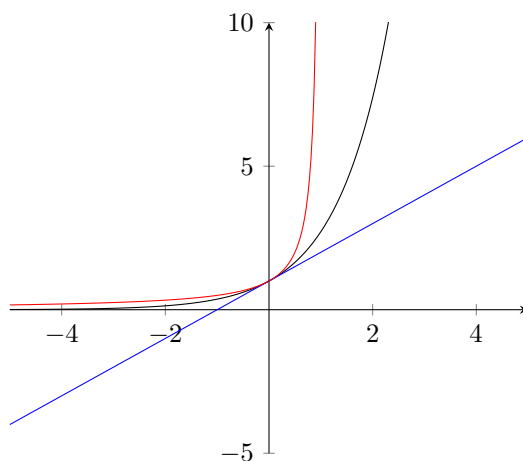
**Wniosek 11.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \text{bo } e^x \geq 1 + x$$

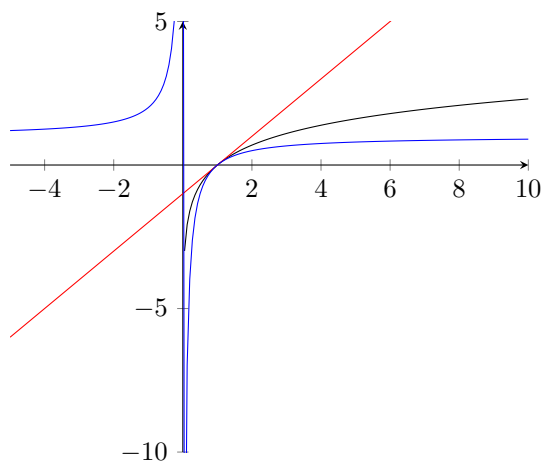
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad (\text{z odwrotności funkcji})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



Rysunek 2.2:  $1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$

Rysunek 2.3:  $\frac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1$ 

**Twierdzenie 19** (Arytmetyka granic).  $f, g$  mają granicę w  $x_0$ , to  $f+g, f-g, f \cdot g$  mają granicę w  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Jeśli  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \implies$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

**Wniosek 12.**

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{dla } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

**Przykład:**  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, g \neq 0, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\alpha \ln x} - 1}{\alpha \ln x} \cdot \frac{\beta \ln x}{e^{\beta \ln x} - 1} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

## 2.3 Ciągłość funkcji

**Definicja 13** (Funkcja ciągła). Funkcja jest ciągła jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny. Funkcja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $p \in A$  jeśli zachodzi jeden z dwóch przypadków.

1.  $p$  jest punktem izolowanym (nie jest punktem skupienia  $A = D_f$ )
2.  $p$  jest punktem skupienia oraz  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$

**Przykłady:**

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x, & f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \quad - \text{ta też!} \\ f(x) &= \frac{1}{x}, & D_f &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Także  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $x^n$  i wiele innych takich, które nie wyglądają na ciągłe.

**Definicja 14.** Zbiór dyskretny to taki, który składa się z punktów izolowanych.

**Wniosek 13.**  $f, g$  ciągłe w punkcie  $x_0 \in D_f \cap D_g \implies f + g, f - g, fg$  są ciągłe w  $x_0$ . Iloraz także, z warunkiem jak zawsze.  
Zatem wielomiany, funkcje wymierne, trygonometryczne są ciągłe.

**Twierdzenie 20.** Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

*Dowód.*

$$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$$

$f$  jest ciągła w punkcie  $x \in A$ ,  $g$  jest ciągła w  $f(x) \in B$ . Chcemy pokazać, że

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\implies g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x)) \\ x_n \rightarrow x &\implies f(x_n) \rightarrow f(x) \\ &\implies g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x)) \end{aligned}$$

Jeśli  $x \in A$  jest izolowany, to

■

**Wniosek 14.** Zdefiniujmy sobie następującą funkcję:

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

Zauważmy, że jest ona zdefiniowana jedynie dla  $x > 0$ . Funkcję  $f(x) = x^x$  da się przedłużyć w sposób ciągły na  $[0, +\infty)$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = 1, \quad \text{bo:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{y=1/x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{y}}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\ln y}{y} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-z}{e^z} = 0$$

W związku z tym przedłużenie ciągle wygląda tak:

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

## 2.4 Twierdzenie Weierstrassa i Darboux

**Definicja 15** (Kresy funkcji). Kres górny funkcji na zbiorze  $A$ :  $\sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\}$   
 Kres dolny:  $\inf_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A\}$

**Twierdzenie 21** (Twierdzenie Weierstrassa). Funkcja ciągła na odcinku domkniętym (tak naprawdę na zbiorze zwartym) jest ograniczona i osiąga swoje kresy.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

czyli  $m < f(x) < M$  oraz istnieją  $x_0 \in [a, b]$   $f(x_0) = \sup_A f$  oraz  $y_0 \in [a, b]$   $f(y_0) = \inf_A f$ .

*Dowód.* 1. Funkcja jest ograniczona:

Jeśli nie jest ograniczona, to istnieje ciąg  $(x_n) \subset [a, b]$  taki, że  $|f(x_n)| \rightarrow +\infty$ .

Ale ciąg  $(x_n)$  jest ograniczony (zawarty w przedziale domkniętym)  $\xrightarrow{B-W}$  czyli istnieje podciąg zbieżny  $(x_{n_k}) \rightarrow x_0 \in [a, b]$ , ale  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ . To daje nam sprzeczność, bo jest różne od  $+\infty$ . Zatem funkcja jest ograniczona na  $[a, b]$ .

$$2. M = \sup_{[a,b]} f(x) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \implies \exists f(x_n) \xrightarrow{x_n \in [a,b]} M$$

$$\xrightarrow{B-W} (x_{n_k}) \rightarrow x_0 \in [a, b] \xrightarrow{\text{ciągłość } f} f(x_0) = M$$

■

**Twierdzenie 22** (Twierdzenie Darboux).  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła. Niech  $y$  będzie dowolną liczbą z przedziału otwartego o końcach  $f(a), f(b)$ . Wówczas:

$$\exists c \in (a, b) \quad f(c) = y$$

**Równoważne sformułowanie:**  $f(a), f(b)$  mają różne znaki, to istnieje pierwiastek  $x \in (a, b)$ .

*Dowód.*  $f(a) < y < f(b)$

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < y\} \neq \emptyset$$

Niech  $c = \sup A$ . Wówczas naszą tezę będzie  $f(c) = y$ . Pokażemy, że  $f(c) \leq y$ .

$$x_n \in A, x_n \rightarrow c \xrightarrow{\text{ciągłość}} f(x_n) \rightarrow f(c) \implies f(c) < y$$

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \in (f(a), f(b)) \implies \exists c \in (a, b) \quad f(c) = y$$

Ale  $f(x_n) < y \implies f(c) \leq y$ .

Szukamy ciągu  $y_n \in [a, b] \setminus A$ ,  $y_n \rightarrow c$ :  $f(y_n) \geq y$ . Na przykład:

$$y_n \rightarrow c^+ : y_n = c + \frac{b-a}{n} < b$$

$$f(y_n) \geq y, f(y_n) \rightarrow f(c) \implies f(c) \geq y$$

$$\implies f(c) = y, c \in (a, b)$$

■

**Wniosek 15.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to  $f([a, b]) = \left[ \min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f \right]$

**Wniosek 16.**  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  jest ciągła to ma punkt stały, czyli istnieje  $x \in [a, b]$  takie, że  $f(x) = x$ .

*Dowód.* Weźmy  $g(x) = f(x) - x$ . Wówczas:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Stąd wynika, że  $g$  ma pierwiastek z własności Darboux. ■

**Twierdzenie 23.**  $f: [a, b] \rightarrow [A, B]$  jest ciągła, równowartościowa i „na”. Wówczas  $f^{-1}$  jest ciągła.

**Uwaga:** Jak sobie weźmiemy  $f: A \rightarrow B$  ciągłą, to jej funkcja odwrotna nie musi być wcale ciągła.

**Przykład:** Skonstruujmy sobie coś co działa, a potem popsujmy tak, żeby nie działało (wstęp do myślenia jak chan Topologii I).

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} \rightarrow X &= \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \\ f(n) &= \frac{1}{n} \text{ jest ciągła} \\ f^{-1}: X &\rightarrow \mathbb{N} \text{ też jest} \\ f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) &= n \\ Y &= X \cup \{0\}, \quad \{0\} \text{ jest punktem skupienia} \end{aligned}$$

Teraz psujemy funkcję:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{N} \cup \{0\} &\rightarrow Y \\ g(n) &= \frac{1}{n} \\ g(0) &= 0 \\ g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) &\not\rightarrow g^{-1}(0), \quad \text{zatem } g^{-1} \text{ nie jest ciągła.} \end{aligned}$$

1.  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, 1: 1$ , ciągła  $\implies f$  jest ściśle monotoniczna

Udowodnimy to przez sprzeczność. Załóżmy, że:

$$\begin{aligned} a &< y_1 < y_2 < y_3 < b \\ f(y_1) &< f(y_2) > f(y_3) \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $f(y_3) \in (f(y_1), f(y_2))$  albo analogiczne przedziały (w każdym razie jeden między dwoma pozostałymi). Z twierdzenia Darboux istnieje  $c \in (y_1, y_2): f(c) = f(y_3)$ . Sprzeczność, bo  $1: 1$  oraz  $y_3 \notin (y_1, y_2)$ .

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$$

Jak zawsze, warto użyć najsilniejszej nierówności na eksponentach:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x &\geq 1 + x \\ \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}\right) &\geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n)!} \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

Ponadto, mamy jeszcze inną nierówność:

$$\begin{aligned} \forall_{|x|<1} e^x &\leq \frac{1}{1-x} \\ \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}\right) &\leq \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{n+k}} = \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{n+k-1} \\ &= \frac{2n}{n} = 2 \end{aligned}$$

Logarytmując stronami obie nierówności otrzymujemy tezę.

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sinc}^2(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= e^{\alpha \ln(1+x)} \\ \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha \end{aligned}$$

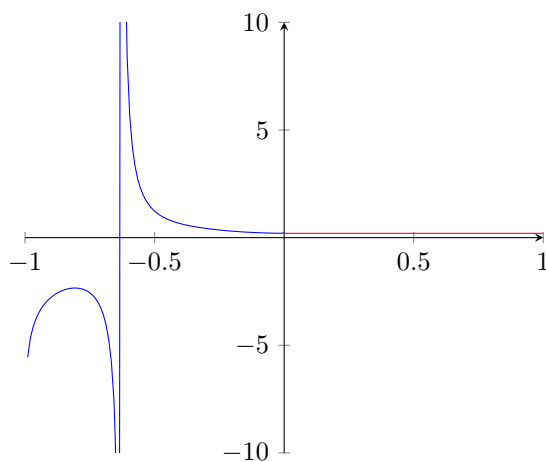
#### 5. Jak dobrać stałe, aby funkcja była ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sin(\sin(ax))}, & x < 0 \\ b, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Wyznaczyć stałe } a, b.$$

Obie „strony” tej funkcji są ciągłe. Wątpliwości może wzbudzać jedynie  $x = 0$ . W tym punkcie musi być spełniony warunek:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ \frac{\ln(1+x)}{\sin(\sin(ax))} &= \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{\sin(ax)}{\sin(\sin(ax))} \cdot \frac{x}{\sin(ax)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} = b \end{aligned}$$

Stąd widzimy, że  $a \neq 0$ ,  $ab = 1$  jest wystarczającym warunkiem ciągłości funkcji w jej całej dziedzinie.



Rysunek 2.4:  $f(x)$  dla  $a = 5$ .



$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \sqrt{ab}$$

$$\left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \exp \left( \frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right) \right)$$

$$\text{Niech } c = \frac{b}{a}.$$

$$= \exp \left( \frac{1}{x} \ln a^x \left( \frac{1 + c^x}{2} \right) \right) = a \exp \left( \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1 + c^x}{2} \right) \right)$$

Użyjmy naszych logarytmowych nierówności.

$$\begin{aligned} \frac{c^x - 1}{c^x + 1} &\leq \ln \left( \frac{1 + c^x}{2} \right) \leq \frac{c^x - 1}{2} \\ \underbrace{\frac{c^x - 1}{x(c^x + 1)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\ln c}{2}} &\leq \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1 + c^x}{2} \right) \leq \underbrace{\frac{c^x - 1}{2x}}_{\rightarrow \frac{\ln c}{2}} \implies \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1 + c^x}{2} \right) \rightsquigarrow \ln \sqrt{c} \end{aligned}$$

Podsumowując,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} &= a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left( \frac{1}{x} \ln \left( \frac{1 + c^x}{2} \right) \right) = a \sqrt{c} = a \sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^x - x^a}{x - a} &= \frac{a^x - a^a + a^a - x^a}{x - a} = a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} + \frac{a^a - x^a}{x - a} \\ &= a^a \underbrace{\frac{a^t - 1}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} \ln a} + \frac{a^a \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^a - 1 \right]}{a \left( \frac{x}{a} - 1 \right)} \rightarrow a^a \ln a - a^{a-1} a = a^a (\ln a - 1) \end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+13}{x-13} \right)^{x^2+7}$$

$$\begin{aligned} &= \left( 1 + \frac{26}{x-13} \right)^{\frac{x-13}{26} \cdot (x^2+7) \cdot \frac{26}{x-13}} = f(x)^{g(x)}: f(x) \rightarrow e, g(x) \rightarrow +\infty \\ \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+13}{x-13} \right)^{x^2+7} &= +\infty \end{aligned}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 5} \right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1-x}{x^2 + 6x + 6} \right)^{\frac{x^2+6x+5}{1-x} \cdot \frac{x(1-x)}{x^2+6x+5}} = e^{-1}$$

**Wniosek 17.**

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$$

**Twierdzenie 24.**  $f: [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła oraz  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \implies$   
 $f$  jest ograniczona na  $[a, +\infty)$ .

*Dowód.*

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_M \forall_{x > M} |f(x) - A| < \varepsilon$$

Niech  $\varepsilon = 1$ .

$$\exists_{M_1} \forall_{x > M_1} A - 1 < f(x) < A + 1$$

$\implies f(x)$  jest ograniczona na  $[M_1 + 1, +\infty)$ . Chcemy pokazać, że jest też ograniczona na  $[a, M_1 + 1]$ . Korzystamy, że funkcja ciągła na przedziale zwartym jest ograniczona, zatem  $f$  musi być ograniczona. ■