

Analiza III R

Wykładowca:
dr hab. Katarzyna Grabowska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

1	Geometria różniczkowa	4
	Powtórka z Analizy II	4
	Objętość kuli B_n	4
	Pole powierzchni sfery n -wymiarowej	7
	Strumień pola przez ramkę	8

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Powtórka z Analizy II

16 paź 2020

Objętość kuli B_n

Obszar całkowania dany jest przez:

$$B_n = \left\{ (x^1, \dots, x^n) : \sum_{n=1}^n (x^i)^2 \leq 1 \right\}$$

Objętość będzie dana przez całkę Riemanna z 1:

$$\int_{B_n} 1 \, dx^1 \, dx^2 \cdots dx^n$$

Jak mamy współrzędne w przestrzeni \mathbb{R}^n to mamy związane z nimi wektory **bazy standardowej** w przestrzeni stycznej: $\mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n) \rightsquigarrow (\partial_1, \dots, \partial_n)$.

Jak całkujemy to jest potrzebna jakaś miara objętości, np. iloczyn skalarny i w bazie st. jest on przyjemną macierzą diagonalną:

$$(\partial_i \mid \partial_j)_{\text{st}} = [g]_{\text{st}} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$$

Do całkowania jest nam potrzebna również kanoniczna forma objętości $\Omega_n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ i wtedy przechodzimy z całki Riemanna do obiektu z geometrii różniczkowej:

$$\int_{B_n} dx^1 \cdots dx^n = \int_{(B_n, \iota_+)} \Omega_n$$

Musimy najpierw zamienić zmienne na takie współrzędne wielo-sferyczne. Działają bardzo podobnie jak zwykle biegunowe i sferyczne. A oto algorytm ich tworzenia.

Bierzemy najpierw st: $(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n)$ i ruszając tylko ostatnie dwie zmienne przekształcamy je na biegunowe sf1: $(x^1, \dots, x^{n-2}, r^{n-1}, \phi^{n-1})$ takie, że:

$$\begin{cases} x^{n-1} = r^{n-1} \cos \phi^{n-1} \\ x^n = r^{n-1} \sin \phi^{n-1} \end{cases}$$

Teraz trzeba napisać macierz zamiany zmiennych czyli macierz identyczności z bazy sf1 do st. Wspomnienia z algebry:

Twierdzenie 1 (Zmiana formy dwuliniowej przy zmianie bazy).

$$[g]_{\text{sf1}}^{\text{sf1}} = \left([id]_{\text{sf}}^{\text{st}} \right)^{\top} [g]_{\text{st}}^{\text{st}} [id]_{\text{sf}}^{\text{st}}$$

iloczyn skalarny w nowej bazie = macierz zamiany zmiennych[†] · iloczyn skalarny w starej bazie · macierz zamiany zmiennych

Dygresja. Można by tensorowo? Przy przejściu ze współrzędnych (x^1, \dots, x^n) do (x'^1, \dots, x'^n) mamy:

$$g'_{\nu'_1 \nu'_2} = \sum_{\nu_1, \nu_2} g_{\nu_1 \nu_2} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\nu'_2}}$$

Wracając do wcześniejszego liczenia, w układzie biegunowym mamy:

$$\begin{aligned} \partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial_y \\ &= \cos \phi \cdot \partial_x + \sin \phi \cdot \partial_y \\ \partial_\phi &= -r \sin \phi \cdot \partial_x + r \cos \phi \cdot \partial_y \end{aligned}$$

Wówczas w bazie standardowej,

$$[\partial_r]^{\text{st}} = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}, \quad [\partial_\phi]^{\text{st}} = \begin{bmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z bazy do bazy składa się z wektorów nowej bazy zapisanej w starej bazie, czyli w naszym przypadku:

$$[id]_{\text{sf1}}^{\text{st}} = \text{diag}(1, \dots, 1) \oplus \begin{bmatrix} \cos \phi^{n-1} & -r^{n-1} \sin \phi^{n-1} \\ \sin \phi^{n-1} & r^{n-1} \cos \phi^{n-1} \end{bmatrix} = M_1$$

Teraz robimy drugą zamianę bazy. Startujemy z sf1. Bierzemy dwie ostatnie współrzędne metryczne x^{n-2} , r^{n-1} i będą nowe współrzędne sf2: $(x^1, \dots, r^{n-2}, \phi^{n-2}, \phi^{n-1})$ takie, że:

$$\begin{cases} x^{n-2} = r^{n-2} \cos \phi^{n-2} \\ r^{n-1} = r^{n-2} \sin \phi^{n-2} \end{cases}$$

przy czym $r^{n-2} \in (0, \infty)$, natomiast w odróżnieniu od $\phi^{n-1} \in (0, 2\pi)$, mamy $\phi^{n-2} \in (0, \pi)$. A jest tak dlatego, że $r^{n-1} > 0$, zatem większe argumenty sinusa by nam to psuły. W przejściu sf1 \rightarrow sf2 zostaje taka sama ostatnia zmienna ϕ^{n-1} zatem

$$[id]_{\text{sf2}}^{\text{sf1}} = \underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1)}_{(n-3) \times (n-3)} \oplus \begin{bmatrix} \cos \phi^{n-2} & -r^{n-2} \sin \phi^{n-2} \\ \sin \phi^{n-2} & r^{n-2} \cos \phi^{n-2} \end{bmatrix} \oplus \text{diag}(1) = M_2$$

Możemy tak zamieniać dalej. Wtedy,

$$\begin{aligned} [g]_{\text{sf2}}^{\text{sf2}} &= M_2^{\top} [g]_{\text{sf1}}^{\text{sf1}} M_2 \\ &= M_2^{\top} M_1^{\top} [g]_{\text{st}}^{\text{st}} M_1 M_2 \\ &= M_2^{\top} M_1^{\top} M_1 M_2 \\ &= M_2^{\top} \left[\underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1)}_{n-2} \oplus \text{diag}\left(1, (r^{n-1})^2\right) \right] M_2 \end{aligned}$$

Zauważmy, że to pojedyncze przekształcenie de facto działa nam za każdym razem na jakies dwa elementy z macierzy klatkowej.

$$\begin{aligned} &= \text{diag}\left(1, \dots, 1, (r^{n-2})^2, (r^{n-1})^2\right) \\ &= \text{diag}\left(1, \dots, 1, (r^{n-2})^2, (r^{n-2} \sin \phi^{n-2})^2\right) \end{aligned}$$

Widzimy już co się będzie działo jak będziemy dalej przesuwali sf2 do sf(n-1): $(r, \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{n-1})$, gdzie

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \phi^1 \\ r^2 = r \sin \phi^1 \end{cases}$$

Wówczas,

$$\begin{aligned} [g]_{\text{sf}(n-1)}^{\text{sf}(n-1)} &= \begin{bmatrix} \cos \phi^1 & \sin \phi^1 \\ -r \sin \phi^1 & r \cos \phi^1 \end{bmatrix} \text{diag}\left(1, 1, (r^2)^2, \dots, (r^{n-1})^2\right) \begin{bmatrix} \cos \phi^1 & -r \sin \phi^1 \\ \sin \phi^1 & r \cos \phi^1 \end{bmatrix} \\ &= \text{diag}\left(1, r^2, (r \sin \phi^1)^2, (r \sin \phi^1 \sin \phi^2)^2, \dots, (r \sin \phi^1 \sin \phi^2 \dots \sin \phi^{n-2})^2\right) \end{aligned}$$

Teraz bardzo łatwo policzymy wyznacznik macierzy diagonalnej:

$$\sqrt{\det g} = r^{n-1} (\sin \phi^1)^{n-2} \dots (\sin \phi^{n-2})$$

Przypomnijmy sobie pewną całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^n \phi \, d\phi &= -\sin^{n-1} \phi \cos \phi \Big|_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \cos^2 \phi \, d\phi \\ &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \, d\phi - (n-1) \int_0^\pi \sin^n \phi \, d\phi \end{aligned}$$

Dostajemy wzór rekurencyjny:

$$(*) = \int_0^\pi \sin^n \phi \, d\phi = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \, d\phi$$

Teraz rozważamy względem parzystości:

1. $n = 2k$

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \int_0^\pi \sin^{2k-4} \phi \, d\phi = \frac{(2k-1)(2k-3) \dots 3}{2k(2k-2) \dots 4} \int_0^\pi \sin^2 \phi \, d\phi \\ &= \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \pi \end{aligned}$$

2. $n = 2k+1$

$$(*) = \frac{2k!!}{(2k+1)!!} \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi = 2 \cdot \frac{2k!!}{(2k+1)!!}$$

Teraz możemy policzyć objętość kuli n -wymiarowej.

$$\Omega_n = r^{n-1} (\sin \phi^1)^{n-2} \cdots (\sin \phi^{n-2}) dr \wedge d\phi^1 \wedge \cdots \wedge d\phi^{n-1}$$

W kategoriach całki Riemanna mamy zamianę zmiennych postaci:

$$dx^1 \cdots dx^n = \det(M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1) dr \cdots d\phi^{n-1}$$

Nie robiliśmy tego w taki sposób, bo bezpośrednie mnożenie tych macierzy zamiany zmiennych jest bardzo kłopotliwe. Z formami różniczkowymi i iloczynem skalarnym wyszło prościej.

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{2k} &= \int_0^R r^{2k-1} dr \int_0^\pi (\sin \phi^1)^{2k-2} d\phi^1 \cdots \int_0^\pi \sin \phi^{2k-2} d\phi^{2k-2} \int_0^{2\pi} d\phi^{2k-1} \\ &= \frac{1}{2k} R^{2k} \cdot 2\pi \cdot \left(\text{te wszystkie współczynniki} \right) = R^{2k} \frac{1}{2k} \frac{1}{(2k-2)!!} \pi^k 2^k \\ &= \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \end{aligned}$$

To samo powtarzamy dla przypadku nieparzystego.

$$\text{Vol}_{2k+1} = \frac{\pi^k 2^{k+1}}{(2k+1)!!} R^{2k+1}$$

Pole powierzchni sfery n -wymiarowej

Wygodniej będzie liczyć pole $(n-1)$ -wymiarowej sfery zanurzonej w \mathbb{R}^n .

Przepis na formę objętości:

1. Zanurzenie $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$
2. Metryka w \mathbb{R}^n
3. Obcięcie formy do S^{n-1}
4. Produkcja formy objętości i całkowanie.

Obcięcie oznacza ustalenie $r = R$. Wtedy przestajemy formę obliczać na wektorze dr i wymiar macierzy spada.

$$g|_{S^{n-1}} = \text{diag}\left(R^2, (R \sin \phi^1)^2, \dots, (R \sin \phi^1 \cdots \sin \phi^{n-2})^2\right)$$

Pole powierzchni sfery to będzie całka z obciętej formy objętości:

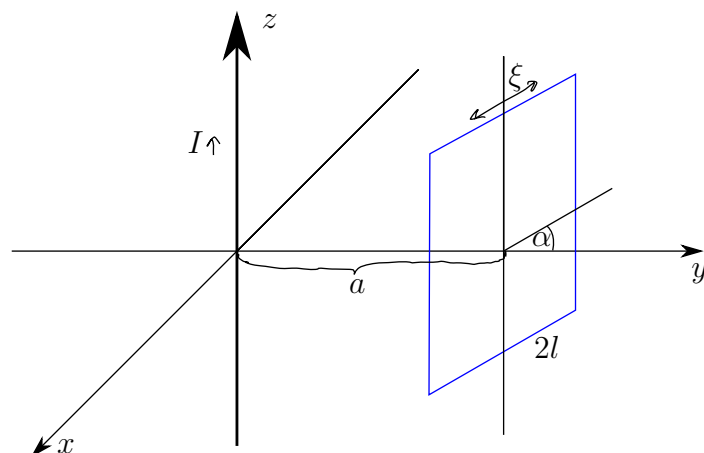
$$S = \int_{(S^{n-1}, i_+)} \Omega = \int_{(S^{n-1}, i_+)} \sqrt{\det g|_{S^{n-1}}} d\phi^1 \wedge \cdots \wedge d\phi^{n-1}$$

Rachunkowo to ta sama całka co poprzednio z pominięciem całki po r , wobec tego

$$= \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!} R^{2k-1}, & n = 2k \\ \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!} R^{2k}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Przy czym pamiętamy, że n to wymiar przestrzeni, w której zanurzamy.

Strumień pola przez ramkę



Rysunek 1.1: ramka

Potencjał wektorowy \vec{A} pola \vec{B} :

$$\vec{A}(x, y, z) = -K \log \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Strumień pola przez powierzchnię liczymy definiując pole normalne \vec{n} , wyznaczamy element powierzchni $d\sigma$ i całkujemy po powierzchni Σ .

$$\int_{\Sigma} (\vec{n} | \vec{x}) d\sigma$$

Wprowadźmy w otoczeniu Σ układ współrzędnych taki jaki byłby wygodny (x^1, \dots, x^n) : $\Sigma = \{x^1 = 0\}$, $\|\partial_{x^1}\| = 1$, $(\partial_{x^1} | \partial_{x^i}) = 0$. Czyli $\vec{n} = \partial_{x^1}$. Wówczas rachunki są prostsze, bo metryka wygląda:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \implies d\sigma = \sqrt{\det g} dx^2 \cdots dx^n$$

Weźmy nasze pole $\vec{x} = x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2 + \cdots + x^n \partial_n$. Z założenia mamy, że $(\vec{n} | \vec{x}) = x^1$, zatem:

$$\int_{\Sigma} (\vec{n} | \vec{x}) d\sigma = \int_{\Sigma} x^1 \sqrt{\det g} dx^2 \cdots dx^n$$

Używając geometrii różniczkowej można prościej. Mamy powierzchnię zanurzoną $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ i formę objętości $\Omega = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Popatrzmy na pole wektorowe x zwężone z Ω (tensorowo $\Omega_{[a_1 \dots a_n]} x^{a_1}$):

$$x \lrcorner \Omega = \sqrt{\det g} (x^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n - x^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots \pm x^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1})$$

Zauważmy, że na powierzchni Σ z wyżej wybranymi współrzędnymi $x^1 = 0$, zatem przy obcięciu formy Ω do powierzchni zerują się wszystkie wedge, które zawierają dx^1 .

$$x \lrcorner \Omega|_{\Sigma} = \sqrt{\det g} x^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Licząc całkę z tej zwężonej formy,

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma, +)} x \lrcorner \Omega &= \int_{(\Sigma, +)} \sqrt{\det g} x^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \int_{\Sigma} x^1 \sqrt{\det g} dx^2 \cdots dx^n \end{aligned}$$

Wyrażenie po lewej stronie jest obiektem czysto geometrycznym i nie zależy od współrzędnych. Możemy więc olać tę metodę ze szczególnym układem i liczyć ten obiekt po lewej.

Wracając do naszego zadania. Mamy liczyć strumień pola $B = \nabla \times A$ czyli chcemy całkować $B \lrcorner \Omega = dG(A)$ (z definicji rotacji A), gdzie $G: TM \rightarrow T^*M$ jest iloczynem skalarnym. Użyjemy współrzędnych walcowych.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = r dr \wedge d\phi \wedge dz$$

Liczymy $G(A)$ gdzie A było dane w wyżej.

$$\begin{aligned} G(A) &= -K \log r dz \quad (\text{tensorowo } g_{ab} A^a = A_b) \\ dG(A) &= -K \frac{1}{r} dr \wedge dz = K \frac{1}{r} dz \wedge dr \end{aligned}$$

Musimy wprowadzić parametryzację ramki.

$$\begin{cases} y = a + \xi \cos \alpha \\ x = -\xi \sin \alpha \\ z = z \end{cases}, \quad \xi \in [-l, l], z \in [-l, l]$$

Formę zdefiniowaną na całym \mathbb{R}^3 musimy obciąć do samej ramki.

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ 2r dr &= 2x dx + 2y dy \\ dr &= \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy = \frac{1}{r} \left(\xi \sin \alpha (d\xi) \sin \alpha + (a + \xi \cos \alpha) d\xi \cos \alpha \right) \\ &= \frac{1}{r} (a \cos \alpha + \xi) d\xi \end{aligned}$$