Podstawy mechaniki CW

Wykładowca:

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Elementarz matematyczny

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020

Zadanie 2 Dany jest wektor $\vec{A}$ w układzie określonym przez wersory e_i, $i \subset \{1, 2, 3\}$. $\vec{A}$ ma postać $\vec{A} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$.

Dowód.

- długość wektora $\vec{A}$:

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = 9 + 16 + 25 = 50$$
$$A = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

- Wersor w kierunku $\vec{A}$:

$$\vec{t} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(3, 4, 5)}{5\sqrt{2}}$$

- Długość rzutu $\vec{A}$ na płaszczyznę xy:
  Nazwijmy ten rzut przez A_{xy}.

$$\vec{A}_{xy} = \left(\vec{A} \cdot e_x, \vec{A} \cdot e_y, 0\right) = (3, 4, 0)$$
$$\vec{A}_{xy} = 5$$

- Wektor prostopadły do $\vec{A}_{xy}$ i leżący na tej płaszczyźnie :

$$\vec{B} \cdot \vec{A}_{xy} = 0$$
$$3x + 4y = 0$$
$$\vec{B} = \left(x, -\frac{4}{3}x, 0\right), \quad \text{dla dowolnego } x \neq 0$$

∎

Zadanie 3 Wektor $\vec{A}$ rozłożyć na składową prostopadłą $\vec{A}_\perp$ i równoległą $\vec{A}_\parallel$ do wektora $\vec{t}$. Znaleźć składowe tych wektorów dla $\vec{A} = (5, 3, -4)$ oraz $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Dowód. W naszym przypadku $\vec{t}$ jest wersorem, zatem:

$$
\begin{aligned}
A_\parallel &= \vec{A} \cdot \vec{t} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \\
\vec{A}_\parallel &= (4, 4, 0) \\
\vec{A}_\perp &= \vec{A} - \vec{A}_\parallel = (1, -1, -4)
\end{aligned}
$$

Możemy sprawdzić, że

$$\vec{A}_\perp \cdot \vec{A}_\parallel = 0$$

■

Zadanie 4 Liczymy $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ dla $\vec{A} = (1, 2, 3)$, $\vec{B} = (4, 0, 0)$.

Dowód.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 12, -8)$$

Sprawdzamy czy $\vec{C}$ jest prostopadły do $\vec{A}$, $\vec{B}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{C} \cdot \vec{A} &= 24 - 24 = 0 \\
\vec{C} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
$$

■

Dygresja Symbol (tensor) Levi-Civity:

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_i \times \hat{e}_j &= \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \\
\varepsilon_{ijk} &= \begin{cases} 0 & \text{dowolne 2 indeksy takie same} \\ 1 & \text{permutacja parzysta} \\ -1 & \text{permutacja nieparzysta} \end{cases}
\end{aligned}
$$

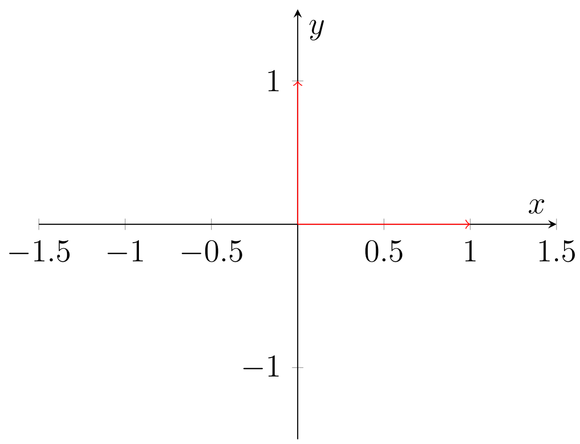
Oczywiście jest to antysymetryczny tensor typu $(0, 3)$.

Wykład 2: Ćwiczenia 2

22 paź 2020

Zadanie 7 Oblicz iloczyn macierzy $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ oraz wektora $\vec{r} = (1,0)$: $\vec{r}' = \mathbf{R}\vec{r}$, a następnie narysuj wektory $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ dla $\phi = \pi/2$.

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.1

Zadanie 8 Policzyć pochodne funkcji jednej zmiennej:

1.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4x^7+3x^5-2x^4+7x-2}{3x^4} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}x^3 + x - \frac{2}{3} + \frac{7}{3}x^{-3} - \frac{2}{3}x^{-4}\right) \\ &= 4x^2 + 1 - 7x^{-4} + \frac{8}{3}x^{-5}\end{aligned}$$

2. $\mathrm{d}/\mathrm{d}x\, f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) &= \frac{1}{\tan'\big(\arctan(x)\big)} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\big(\arctan(x)\big)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Zadanie 9 $\vec{A} = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Widzimy, że $\left\|\vec{A}\right\| = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\dot{x}r - r^{-1}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})x}{r^2} \\ &= \frac{\dot{x}y^2 + \dot{x}z^2 - xy\dot{y} - xz\dot{z}}{r^3}\end{aligned}$$

Można sprawdzić, że $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}'(t) = 0$. Można to wszystko zrobić ogólniej i prościej.

Twierdzenie 1. Weźmy $A(\vec{\alpha})$ o stałej długości $\left|\vec{A}\right| = B$. Wówczas zachodzi:

$$\begin{aligned}A(\vec{\alpha}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \\ \iff \vec{A}(\alpha) \perp \vec{A}'(\alpha)\end{aligned}$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\vec{A}(\alpha) \cdot \vec{A}(\alpha) &= B^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\vec{A}(\alpha) \cdot \vec{A}(\alpha)\right] &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\alpha} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{A} &= 0\end{aligned}$$

∎

Wykład 3: Ćwiczenia 3

23 paź 2020

Zadanie 10

1. $f(x, y) = x^2y^3 + x \sin y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^3 + \sin y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3x^2y^2 + x \cos y\end{aligned}$$

Zadanie 11 Rozwinąć w szereg potęgowy $f(x) = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-x^2/c^2}}$

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &\approx f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0)\\
f'(x) &= \frac{1}{2}\frac{2xm}{\left(1-x^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{mx}{\left(1-x^2/c^2\right)^{3/2}}\\
f''(x) &= \frac{m}{\left(1-x^2/c^2\right)^{3/2}} + 3x\cdot\frac{m/c^2}{\left(1-x^2/c^2\right)^{5/2}}\\
f(0+h) &= mc^2 + h\cdot 0 + \frac{h^2}{2}m + \mathcal{O}\left(h^3\right)
\end{aligned}
$$

Wykład 4: Ćwiczenia 4

29 paź 2020 Męczymy jedną całkę na kilka sposobów.

$$
\begin{aligned}
\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{matrix} z=\sin x\\ \mathrm{d}z = \cos x\,\mathrm{d}x\end{matrix}\right| = \int z\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{2}z^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C
\end{aligned}
$$

Zadanie 15

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} &= \frac{1}{g-\alpha v^2/m} = \frac{1}{g}\frac{1}{1-v_0^2v^2}\\
&= \frac{1}{g}\frac{1}{(1-\frac{v}{v_0})(1+\frac{v}{v_0})}\\
t(v) &= \int\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{g}\int\frac{1}{1-\frac{v}{v_0}}\frac{1}{1+\frac{v}{v_0}}\,\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{2g}\int\left[\frac{1}{1-\frac{v}{v_0}} + \frac{1}{1+\frac{v}{v_0}}\right]\mathrm{d}v\\
&= \frac{1}{2g}\left[-v_0\ln\left|1-\frac{v}{v_0}\right| + v_0\ln\left|1+\frac{v}{v_0}\right|\right] + C\\
&= \frac{v_0}{2g}\ln\left|\frac{1+v/v_0}{1-v/v_0}\right| + C
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że v nigdy nie przekracza v_0 (psułoby się). Dodatni argument loogarytmu jest zakodowany w sytuacji fizycznej. v_0 to prędkość graniczna.

Rozdział 2

Relatywistyka

Wykład 5: Ćwiczenia 5

30 paź 2020

Zadanie 1 Przepisujemy transformację Lorentza do macierzy.

$$\begin{cases} ct' &= \gamma\left(ct - \dfrac{vx}{c}\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \end{cases}, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

W drugą stronę,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

Zadanie 2 Kontrakcja długości. Przedmiot o długości l_0 porusza się z prędkością v względem laboratorium. Jaka jest długość l w układzie labu?

Położenie początku pręta. Początek w układzie primowanym to 0 i czas mierzenia to 0 w układzie nieprimowanym:

$$A\colon x'_A = 0,\ ct_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_A \end{pmatrix}$$

$$\implies x_A = 0,\ ct'_A = 0$$

Drugi koniec pręta:

$$B\colon x'_B = l_0,\ ct_B = ct_A = 0$$

$$\begin{pmatrix} ct'_B \\ l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies l_0 &= \gamma x_B \\ ct'_B &= -\gamma\beta x_B \end{aligned}$$

Stąd długość pręta w labie:

$$l = x_B - x_A = \frac{l_0}{\gamma}$$

Zadanie 3 Zegar o długości taktu τ porusza się z prędkością v. Jaka jest długość taktu zegara Δt w laboratorium?

Niech A to pierwszy takt zegara. $A\colon (0,0)_{U'} = (ct_A, x_A)_U$. Teraz drugie cyknięcie zegara. $B\colon (c\tau, 0)_{U'} = (ct_B, x_B)_U$. Mamy zależność $c\Delta t = ct_B - ct_A$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\implies ct_A = x_A = 0 & \\
\begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma c\tau \\ \gamma\beta c\tau \end{pmatrix} \\
\Delta t &= \gamma\tau
\end{aligned}$$

Zadanie 4 Wpychamy samochód do stodoły.

$$l = \frac{l_0}{\gamma} \leq \frac{l_0}{2} \implies \gamma \geq 2$$

Ale my to przeliczymy od podstaw. α to jak samochód mija drzwi stodoły.

$$\alpha\colon (ct_\alpha, x_\alpha)_U = \left(ct'_\alpha, x'_\alpha\right)_{U'} = (0,0)$$

Zdarzenie β to jak zderzak samochodu mija wylot stodoły. x'_β to oczywiście wciąż 0:

$$\beta\colon \left(ct_\beta, l_0/2\right)_U = \left(ct'_\beta, 0\right)$$

Liczymy na macierzach:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} ct_\beta \\ l_0/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'_\beta \\ 0 \end{pmatrix} \\
\implies ct'_\beta &= \frac{l_0}{2\gamma\beta},\ ct_\beta = \frac{l_0}{2\beta}
\end{aligned}$$

Wykład 6: Ćwiczenia 6

05 lis 2020

Zadanie 4a

- $A = (ct'_a, x'_a)$ – w układzie samochodu, gdy przód dojechał do końca stodoły.

$$ct'_a = ct'_\beta = \frac{1}{\gamma\beta}\frac{l}{2}$$
$$x_a = 0$$

Zaczynamy kręcić korbą,

$$\begin{pmatrix} ct_a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2\gamma\beta} \\ x'_a \end{pmatrix}$$
$$x'_a = -\frac{l}{2\gamma}$$
$$ct_a = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \beta\right) < ct_\beta$$

W układzie stodoły samochód nie wjechał jeszcze do końca.

c)

$$l' = \left|x'_a - 0\right| = \frac{l}{2\gamma}$$
$$B\colon (ct'_B, x'_B) = \left(\frac{l}{2\gamma\beta}, -l\right)$$
$$\begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l}{2\gamma\beta} \\ -l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{2\beta} - l\gamma\beta \\ \frac{l}{2} - \gamma l \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{l}{\sqrt{3}} - l\sqrt{3} \\ \frac{l}{2} - 2l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2l}{\sqrt{3}} \\ -\frac{3}{2}l \end{pmatrix}$$

Zadanie 5 Relatywistyczna deska ma szerokość L a chce przelecieć przez otwór w stole o szerokości $L/2$.

Skrócenie dotyczy tylko kierunku równoległego do ruchu. Najlepiej zorientować układ zgodnie z ruchem. Układ stołu to nieprimowany, a deski to primowany. Zdarzenie A to, w którym lewy koniec deski przechodzi przez stół. B to samo dla prawego końca deski.

$$
\begin{aligned}
A_U &\colon (ct_A, x_A, y_A) = (0,0,0) \\
B_U &\colon (ct_B, x_B, y_B) = \left(0, \frac{l}{2}\cos\alpha, \frac{l}{2}\sin\alpha\right) \\
A_{U'} &\colon (0,0,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} ct'_B \\ x'_B \\ y'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct_B - \gamma\beta x_B \\ -\gamma\beta ct_B + \gamma x_B \\ y_B \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
x'_B &= \gamma \frac{L}{2}\cos\alpha \\
y'_B &= y_B = \frac{L}{2}\sin\alpha \\
(L')^2 &= (x'_B)^2 + (y'_B)^2 = \frac{L^2}{4}\left(\gamma^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\
&= \frac{L^2}{4}\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \beta^2\sin^2\alpha}{1-\beta^2} \\
&= \frac{L^2}{4}\frac{1-\beta^2\sin^2\alpha}{1-\beta^2} = L^2 \\
4 - 4\beta^2 &= 1 - \beta^2\sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

$\alpha = \pi/6$,

$$
\begin{aligned}
\beta^2 &= \frac{4}{5} \\
\beta &= \frac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Zadanie 6 Relatywistyczny efekt Dopplera. Spoczywające źródło emituje światło ν_0. Jaką częstość zobaczy obserwator, gdy źródło będzie się poruszało z v? $v > 0$ gdy źródło się zbliża.

A – do obserwatora dociera pierwszy grzbiet fali, B – gdzie jest kolejny grzbiet fali w chwili 0 w układzie primowanym (źródła).

$$
\begin{aligned}
A &\colon (ct_A, x_A)_U = (0,0)_U = (0,0)_{U'} \\
B &\colon (ct'_B, x'_B)_{U'} = (0, -\lambda_0)_{U'}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda_0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
c\Delta t &= |x_B| + ct_B = \gamma\lambda_0 - \gamma\beta\lambda_0 \\
&= \gamma\lambda_0(1-\beta) \\
\Delta t &= \frac{\gamma\lambda_0(1-\beta)}{c} = \frac{\lambda_0}{c}\frac{1-\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{1}{\nu_0}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \\
\nu &= \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}
\end{aligned}
$$

Wykład 7

06 lis 2020

Zadanie 7 Mamy układ U' – układ źródła. U – układ obserwatora. Obserwator porusza się z $\vec{v} = -\beta e_x$, gdzie $\beta > 0$.

Zadanie 8 U – układ obserwatora. U' – w którym λ_0.
A – lewy koniec fali. B – prawy koniec fali

$$\begin{aligned} A&\colon (ct'_A, x'_A) \\ x'_A &= x'_z + ct'_A \end{aligned}$$

Lewy koniec wyleciał ze źródła w chwili $t'_Z = 0$ i w chwili t_A był na x'_A. Weźmy sobie współrzędną źródła $x'_Z = 0$.

$$B\colon (ct'_B, x'_B) = (ct'_A, x'_A + \lambda_0) = (ct'_A, ct'_A + \lambda_0)$$

Układ primowany od nas ucieka, czyli są plusy w transformacji.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'_A \\ ct'_A \end{pmatrix} = \gamma ct'_A \begin{pmatrix} 1+\beta \\ 1+\beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'_A \\ ct'_A + \lambda_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trzeba uważać na czas! Trzeba mierzyć długość w tej samej chwili!

$$\begin{aligned} \lambda &= x_B(ct_B) - x_A(ct_B) = x_B - ct_B \\ \lambda &= \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \end{aligned}$$

Wykład 8: Ćwiczenia 8

13 lis 2020

Zadanie 9 W poprzednim zadaniu uzyskaliśmy wzory ogólne,

$$
\begin{aligned}
s(\beta) &= c\int \beta\gamma \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\beta}\,\mathrm{d}\beta = \left| \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{a'}{c}(1-\beta^2) \\ \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\beta} &= \frac{c}{a'}\frac{1}{1-\beta^2} \end{aligned} \right| \\
&= \frac{c^2}{a'}\int \frac{\beta}{1-\beta^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{d}\beta \\
&= \frac{c^2}{a'}\int \frac{\beta}{(1-\beta^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\beta = \left| z = \beta^2 \right| \\
&= \frac{c^2}{2a'}\int \frac{\mathrm{d}z}{(1-z)^{3/2}} = \frac{c^2}{a'}(1-z)^{-1/2} + C \\
&= \frac{c^2}{a'}\gamma + C \\
s(0) &= 0 = \frac{c^2}{a'} + C \\
s(\beta) &= \frac{c^2}{a'}(\gamma - 1)
\end{aligned}
$$

Teraz liczymy czas inercjalny,

$$
\begin{aligned}
t(\beta) &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\beta}\,\mathrm{d}\beta = \left| \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\beta} = \frac{c}{a'}\gamma^3 \right| \\
&= \int_0^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\beta'}\,\mathrm{d}\beta' = \frac{c}{a'}\int_0^\beta (1-\beta'^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}\beta' \\
&= \frac{c}{a'}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Bigg|_0^\beta = \frac{c}{a'}\beta\gamma
\end{aligned}
$$

Zadanie 10

$$
\begin{aligned}
a' &= \frac{c}{\mathrm{rok}} = \frac{3\cdot 10^8}{\pi\cdot 10^7} = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\
\beta_{\max} &= \beta(\tau = 5\,\mathrm{yr}) = \frac{e^{10}-1}{e^{10}+1}
\end{aligned}
$$

Jeśli analizujemy wyrażenia typu $1-\beta$, nie możemy przyjmować $\beta = 1$. Ale tak poza tym, to w sumie są okazje, gdy można przyjąć $\beta = 1$.

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(e^{10}+1)^2-(e^{10}-1)^2}{(e^{10}+1)^2}}} \\
&= \sqrt{\frac{(e^{10}+1)^2}{4e^{10}}} = \frac{e^{10}+1}{2e^5} \approx 74
\end{aligned}
$$

Teraz będziemy liczyli całkowitą drogę podczas podróży.

$$
s = 2s(\beta_{\max}) = 2\frac{c^2}{a'}(\gamma - 1) = 2\frac{c^2}{a'}\cdot 73 = 146\,\mathrm{ly}
$$

Oraz czas względem labu, tam i z powrotem,

$$
\begin{aligned}
t &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4t(\beta_{\max}) \\
&= 4\frac{c}{a'}\gamma\beta = 4\cdot\mathrm{rok}\cdot 1\cdot 74 = 296\,\mathrm{yrs}
\end{aligned}
$$

Zadanie 11 Używamy wzorów na składowe prędkości obiektów. Prędkość względna układów to β.

$$\begin{aligned}
v'_x &= \frac{v_x - \beta c}{1 - v_x\beta/c} \\
v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x\beta/c)} \\
\tan\theta &= \frac{v_y}{v_x} \\
v_x &= \frac{v'_x + \beta c}{1 + \frac{v'_x\beta}{c}} \\
v_y &= \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x\beta}{c})} \\
\tan\theta &= \frac{v'_y}{\gamma(v'_x + \beta c)} \\
\vec{v}' &= (v'\cos\theta', v'\sin\theta')
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\tan\theta = \frac{v'\sin\theta'}{(v'\cos\theta' + \beta c)\gamma}$$

Wykład 9: Ćwiczenia 9

19 lis 2020

Zadanie 12 DO UZUPEŁNIENIA
Efekt (V – prędkość układu obserwatora „primowanego”, który obserwuje cząstkę ruszająca się z prędkością β w układzie nieprimowanym):

$$\frac{E'}{c} = \gamma(V)\left(\frac{E}{c} - \beta V p\right)$$

Postać macierzowa (jak się policzy jeszcze p'):

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \end{pmatrix}$$

Pozostałe składowe pędu transformują się trywialnie.

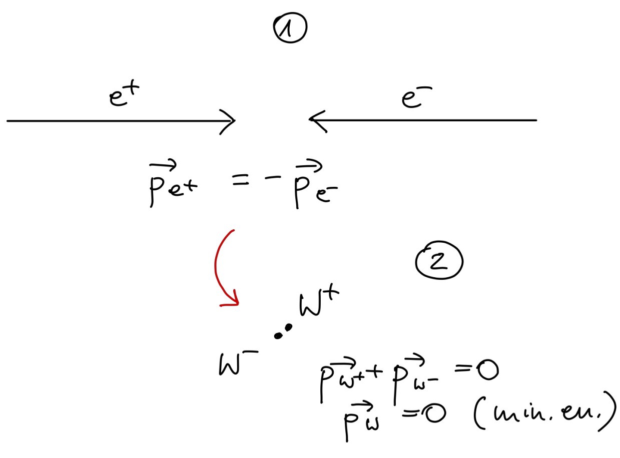
Zadanie 13 Efekt Dopplera.
λ_0 – fala światła w układzie rakiety
β – prędkość rakiety w układzie obserwatora
λ – długość światła w układzie obserwatora

Rozważamy transformację czteropędu fotonu między układami. Niech układ primowany będzie układem rakiety.

$$
\begin{aligned}
E' &= \frac{hc}{\lambda_0} \\
p' &= E'/c \\
\begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'/c \\ p' \end{pmatrix} \\
\frac{E}{c} &= \gamma\left(\frac{E'}{c} + \beta p'\right) = \gamma\frac{E'}{c}(1+\beta) \\
p &= \gamma\left(\beta\frac{E'}{c} + p'\right) = \gamma\frac{E'}{c}(1+\beta) \\
h\nu = E &= \gamma E'(1+\beta) = \gamma h\nu_0(1+\beta) \\
&= \gamma\frac{hc}{\lambda_0}(1+\beta) = \frac{hc}{\lambda} \\
\lambda &= \lambda_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \lambda_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy znów to samo.

Zadanie 14 Pytamy jaka musi być minimalna energia.
1. Zasada zachowania czterowektora energii–pędu: $P_1 = \left(\sum E_i, \sum p_i\right) = P_2$
2. Układy, w których łatwo wyrazić czterowektory.
3. Długość czterowektora jest zachowana: $P_1^2 = P_2^2 = P_2'^2$

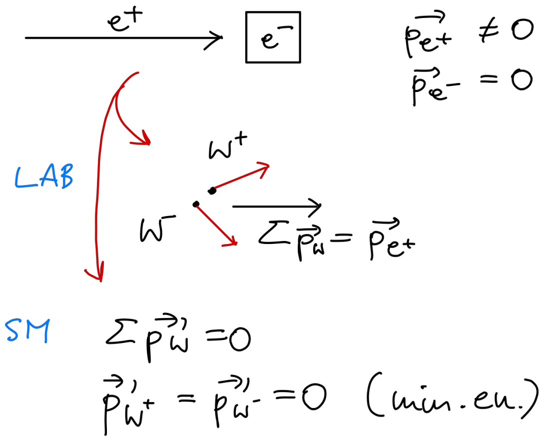


Rysunek 2.1: 14a

$$
\begin{aligned}
P_{e+} &= (E, \vec{p}_{e+}c) \\
P_{e-} &= (E, -\vec{p}_{e+}c) \\
s_1 &= (2E)^2 - \left((\vec{p} - \vec{p})c\right)^2 = 4E^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_2 &= (P_{W+} + P_{W-})^2 = \left| P_W = (m_W c^2, \vec{0}) \right| \\
&= 4m_W^2 c^4 \\
s_1 &= s_2 \\
E &= m_W c^2
\end{aligned}
$$

Taka musi być minimalna energia wiązki elektronów.



Rysunek 2.2: 14b

Teraz robimy drugi punkt.

$$
\begin{aligned}
P_{e+} &= (E, \vec{p}_{e+} c) \\
P_{e-} &= (m_e c^2, \vec{0}) \\
s_1 &= (E + m_e c^2)^2 - (\vec{p}_{e+} c)^2 = E^2 + 2E m_e c^2 + m_e^2 c^4 - (\vec{p}_{e+} c)^2
\end{aligned}
$$

Długość czterowektoru energii-pędu cząstki to mc^2.

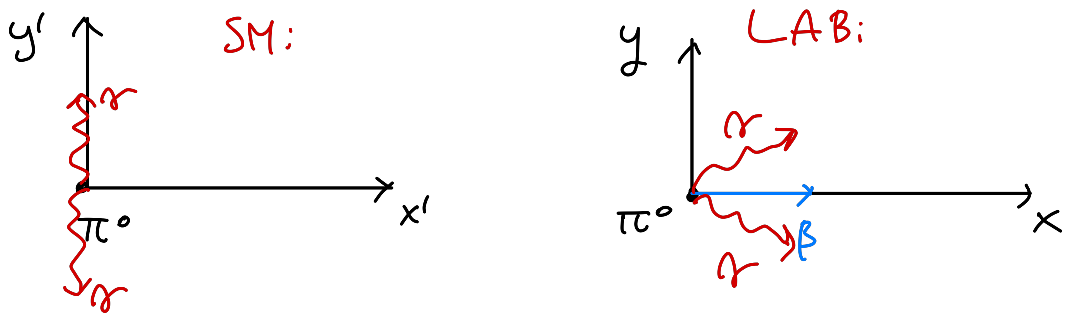
$$
= 2E m_e c^2 + 2m_e^2 c^4
$$

Teraz wyrażamy s_2 w układzie środka masy.

$$
\begin{aligned}
s_2 &= (P'_{W+} + P'_{W-})^2 = \left| \text{SM: } \sum p'_i = 0,\ \vec{p}'_i = 0 \right| = 4m_W^2 c^4 \\
s_1 &= s_2 \\
E &= 2\frac{m_W^2}{m_e} c^2 - m_e c^2
\end{aligned}
$$

Wykład 10: Ćwiczenia 10

20 lis 2020



Rysunek 2.3: Rozpad π_0.

Zadanie 15 Niech prędkość pionu w układzie LAB to β. Wówczas,

$$
\begin{aligned}
E' &= mc^2 \\
E &= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = 2mc^2 = \gamma mc^2 \\
\gamma &= 2
\end{aligned}
$$

Szukamy kąta rozpadu.

$$\cos(2\phi) = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}$$

Teraz rozważamy pędy fotonów w układzie SM.

$$
\begin{aligned}
p'_{1x} &= p'_{2x} = 0 \\
p'_{1y} &= \frac{E'_1}{c}, \quad p'_{2y} = -\frac{E'_2}{c} \\
E'_1 + E'_2 &= mc^2 = 2E' \\
\frac{E'}{c} &= \frac{mc}{2} \\
P'_1 &= \left(\frac{mc}{2}, 0, \frac{mc}{2}, 0\right) \\
P'_2 &= \left(\frac{mc}{2}, 0, -\frac{mc}{2}, 0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p_{1x} \\ p_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mc}{2} \\ 0 \\ \frac{mc}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \frac{mc}{2} \\ \gamma\beta \frac{mc}{2} \\ \frac{mc}{2} \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E_2}{c} \\ p_{2x} \\ p_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mc}{2} \\ 0 \\ -\frac{mc}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{mc}{2} \\ -\gamma\beta\frac{mc}{2} \\ \frac{mc}{2} \end{pmatrix}$$

Jaki są więc trójpędy?

$$\vec{p}_1 = \frac{mc}{2}(\gamma\beta, 1, 0)$$
$$\vec{p}_2 = \frac{mc}{2}(\gamma\beta, -1, 0)$$

Teraz możemy policzyć kąt rozpadu.

$$\cos(2\phi) = \frac{\gamma^2\beta^2 - 1}{\gamma^2\beta^2 + 1} \cdot \frac{1-\beta^2}{\beta^2 + 1 - \beta^2} = \frac{\beta^2 - 1 + \beta^2}{1-\beta^2} = 2\beta^2 - 1$$
$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\cos(2\phi) = \frac{1}{2}$$
$$\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1$$

Widać, że

$$\cos\phi = \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\phi = \frac{\pi}{6}$$

No albo szanujmy się! Przecież każdy wie, że

$$2\phi = \frac{\pi}{3}$$

Zadanie 16 Liczymy 4-pęd fotonu.

$$(E, c\vec{p}) = (E, E\cos\theta, -E\sin\theta)$$
$$\begin{pmatrix} E' \\ cp'_x \\ cp'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ E\cos\theta \\ -E\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma(E - E\beta\cos\theta) \\ \gamma(-E\beta + E\cos\theta) \\ -E\sin\theta \end{pmatrix}$$

Teraz patrzmy w drugiej sytuacji, jak to wygląda z założeń zadania.

$$(E', \vec{p}') = (E', -E'\cos\theta, -E'\sin\theta)$$

Porównujemy składowe.

$$-E'\cos\theta = \gamma(-E\beta + E\cos\theta) = \gamma E(\cos\theta - \beta)$$
$$E' = \gamma(E - E\beta\cos\theta) = \gamma E(1 - \beta\cos\theta)$$
$$E'\cos\theta = \gamma E\cos\theta(1 - \beta\cos\theta)$$
$$-\gamma E(\cos\theta - \beta) = \gamma E\cos\theta(1 - \beta\cos\theta)$$

Szukamy zależności β od kąta θ.

$$-\cos\theta + \beta = \cos\theta - \beta\cos\theta$$
$$\beta = \frac{2cos\theta}{1+\cos\theta}$$

Zauważmy, że jak wstawimy $\theta = 0$ (gwiazdy na wprost), to oznacza, że lecimy z prędkością c.

Rozdział 3

Zestaw 3

Wykład 11

26 lis 2020

Zadanie 2

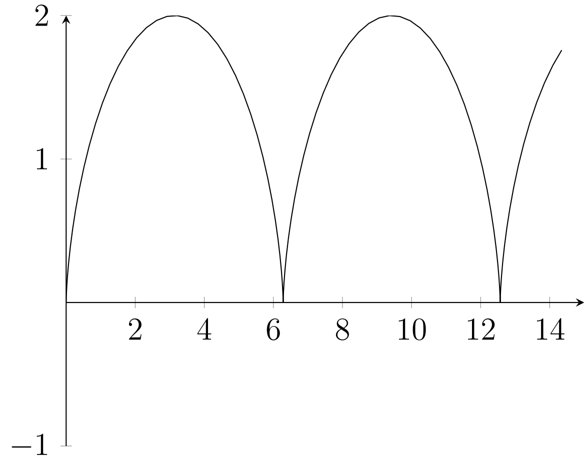
$$
\begin{aligned}
\phi &= \omega t \\
\vec{r}'(t) &= -R(\sin\omega t, \cos\omega t) \\
\vec{v}'(t) &= -R\omega(\cos\omega t, -\sin\omega t) \\
\vec{a}'(t) &= -R\omega^2(-\sin\omega t, -\cos\omega t) \\
&= R\omega^2(\sin\omega t, \cos\omega t) \\
a_t' &= \vec{a}' \cdot \vec{t} = R\omega^2(\sin\omega t, \cos\omega t) \cdot -(\cos\omega t, -\sin\omega t) = 0 \\
a_n' &= \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{a^2} = R\omega^2
\end{aligned}
$$

Teraz robimy drugi punkt.

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{R} + \vec{r}' \\
\vec{R} &= \big(x(t), R\big) = (vt, R) = R(\omega t, 1) \\
\vec{r} &= R(\omega t, 1) - R(\sin\omega t, \cos\omega t) \\
&= R(\omega t - \sin\omega t, 1 - \cos\omega t) \\
\vec{v} &= R\omega(1 - \cos\omega t, \sin\omega t) \\
\vec{a} &= R\omega^2(\sin\omega t, \cos\omega t) \\
|\vec{v}|^2 &= R^2\omega^2\Big[(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t\Big] = \left|\sqrt{\frac{1-\cos\omega t}{2}} = \left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|\right| \\
&= 4R^2\omega^2\frac{1-\cos\omega t}{2} = 4R^2\omega^2\sin^2\frac{\omega t}{2} \\
|\vec{v}| &= 2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| \\
a_t &= \vec{a}\cdot\vec{t} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \frac{R^2\omega^3}{v}\sin\omega t = \frac{R^2\omega^3 2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}}{2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|} \\
&= R\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}\,\mathrm{sgn}\left(\sin\frac{\omega t}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\omega t}{2}\right) = \begin{cases} +1 & \frac{\omega t}{2} \in (0,\pi) + 2k\pi \\ -1 & \frac{\omega t}{2} \in (\pi,2\pi) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a^2 - a_t^2 = R^2\omega^4\big(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\big) - R^2\omega^4\cos^2\frac{\omega t}{2} \\ &= R^2\omega^4\left(1 - \cos^2\frac{\omega t}{2}\right) \\ a_n &= R\omega^2\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| \end{aligned}$$



Rysunek 3.1

Zadanie 3

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (A\cos\omega t, A\sin\omega t, Bt) \\ \mathrm{d}s &= |\vec{v}|\,\mathrm{d}t \\ |\vec{v}| &= \sqrt{A^2\omega^2 + B^2} \\ \mathrm{d}s &= \sqrt{A^2\omega^2 + B^2}\,\mathrm{d}t \\ s(t_1,t_2) &= \int_{s(t_1)}^{s(t_2)} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{A^2\omega^2 + B^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{A^2\omega^2 + B^2}(t_2 - t_1) \\ \vec{t} &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \end{aligned}$$

Wspomnienia z wykładu,

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right| \\ \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{v} = \frac{\mathrm{d}\frac{\vec{v}}{v}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{v} = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[(A^2\omega^2 + B^2)^{-1/2}(-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t, B)\Big] \\ &= \frac{1}{v^2}\big(-A\omega^2\cos\omega t, -A\omega^2\sin\omega t, 0\big) = -A\omega^2(A^2\omega^2 + B^2)^{-1}(\cos\omega t, \sin\omega t, 0) \end{aligned}$$

Stąd,

$$\vec{n} = -(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$$
$$\kappa = \frac{A\omega^2}{A^2\omega^2 + B^2}$$

Wykład 12

27 lis 2020

Wykład 13

03 gru 2020

Praca domowa Wersory w układzie sferycznym. Układ sferyczny to następująca parametryzacja $\mathbb{R}^3$:

$$\psi\colon (r,\theta,\phi) \mapsto (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$$
$$r > 0,\ \theta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,2\pi)$$

Liczymy lokalne wektory bazowe rozpinające przestrzeń styczną.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x^i}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x^i} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}\\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x^i}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x^i} = r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}\\
\frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x^i}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x^i} = -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}\\
\left|\frac{\partial}{\partial r}\right| &= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \theta}\right| = r, \quad \left|\frac{\partial}{\partial \phi}\right| = r\sin\theta
\end{aligned}$$

Teraz liczymy wersory,

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z\\
\hat{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - \sin\theta\,\hat{e}_z\\
\hat{e}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y
\end{aligned}$$

I pochodne wersorów,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{r}} &= \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi\\
\dot{\hat{\theta}} &= \cos\theta\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi - \dot{\theta}\,\hat{e}_r\\
\dot{\hat{\phi}} &= -\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{e}_r - \cos\theta\dot{\phi}\,\hat{e}_\theta
\end{aligned}$$

A w układzie cylindrycznym.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}} &= \dot{\phi}\hat{e}_\theta\\
\dot{\hat{\phi}} &= -\dot{\phi}\hat{e}_\rho\\
\dot{\hat{z}} &= 0
\end{aligned}$$

Zadanie 7 Układ kartezjański:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= xe_x + ye_y + ze_z = (z, y, z)_{xyz}\\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{x}e_x + \dot{y}e_y + \dot{z}e_z\\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y + \ddot{z}e_z\end{aligned}$$

Układ walcowy:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z\\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{z}\hat{e}_z\\ &= \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z\\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\dot{\phi}\dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z\\ &= \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\phi - \rho\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + \ddot{z}\hat{e}_z\\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z\end{aligned}$$

Układ sferyczny:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r\hat{e}_r\\ \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r\\ &= \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi\\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{e}}_\theta\\ &\quad + \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{e}_\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi}\hat{e}_\phi + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + r\sin\theta\dot{\phi}\dot{\hat{e}}_\phi\\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2\right)\hat{e}_\theta\\ &\quad + \left(2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\phi\end{aligned}$$

Zadanie 8 Elementy długości łuków.

Układ kartezjański:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\\ &= \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2\\ \mathrm{d}s &= |\vec{v}|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Układ walcowy:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2\\ &= \left[\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2\\ &= \left[v_\rho^2 + v_\phi^2 + v_z^2\right]\mathrm{d}t^2\end{aligned}$$

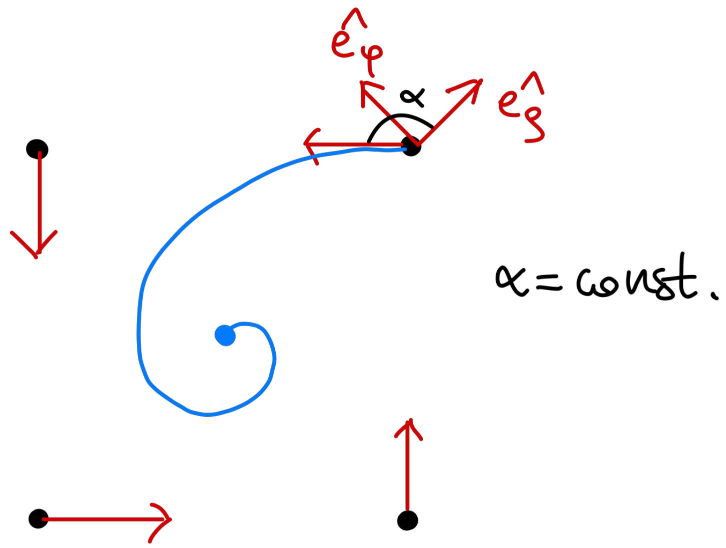
Układ sferyczny:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = v^2\,\mathrm{d}t^2 &= \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right]\mathrm{d}t^2 \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2 \end{aligned}$$

Można też na to patrzeć jak na:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

Zadanie 9 Z pająkami



Rysunek 3.2: pajaki

Kwadrat z pająkami obraca się w czasie i kurczy, jednakże z symetrii to zawsze jest kwadrat. Stąd, α jest stały, jako kąt między bokiem kwadratu (wektorem prędkości pająka) a przekątną kwadratu.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(v_\rho, v_\phi\right) \\ v_\rho &= \vec{v}\cdot\hat{e}_\rho = v\cos\alpha = -\frac{v}{\sqrt{2}} \\ v_\phi &= \vec{v}\cdot\hat{e}_\phi = v\cos\left(\alpha - \pi/2\right) = \frac{v}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

I dostajemy równanie różniczkowe.

$$\begin{aligned} -\frac{v}{\sqrt{2}} &= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \\ \frac{v}{\sqrt{2}} &= \rho\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Teraz należy to odcałkować i dostać równania na $\rho(t), \phi(t)$.

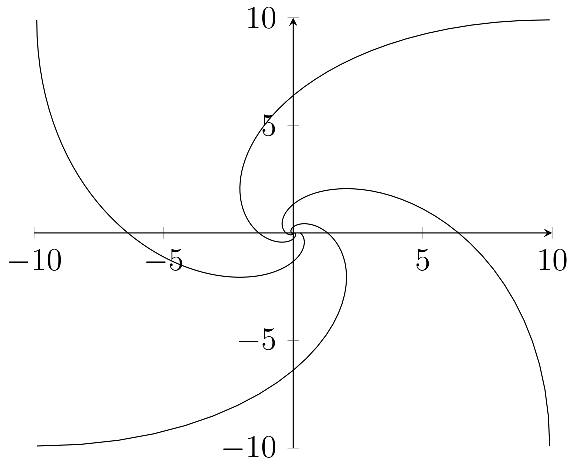
$$\rho(t) = -\frac{vt}{\sqrt{2}} + \rho_0 > 0$$
$$\phi(t) = \frac{v}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{-\frac{vt}{\sqrt{2}} + \rho_0} = v \int \frac{\mathrm{d}t}{-vt + \rho_0\sqrt{2}}$$

Moduł w logarytmie można ominąć, gdyż gdyż $\rho \geq 0$.

$$= -\log\left(-vt + \rho_0\sqrt{2}\right) + C$$
$$\phi_0 = -\log\left(\rho_0\sqrt{2}\right) + C$$
$$\phi(t) = \log\frac{\rho_0\sqrt{2}}{\rho_0\sqrt{2} - vt} + \phi_0$$

Możemy też postąpić nieco inaczej i dostać równanie na trajektorię $\rho(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi} = -\rho$$
$$\int \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\int \mathrm{d}\phi$$
$$\log\rho = -\phi + C$$
$$\log\rho_0 = -\phi_0 + C$$
$$\log\frac{\rho}{\rho_0} = \phi_0 - \phi$$
$$\rho(\phi) = \rho_0 e^{\phi_0 - \phi}$$



Rysunek 3.3

Czas do konsumpcji uzyskamy przez podstawienie $\rho(T) = 0$.

$$\rho_0 = \frac{vT}{\sqrt{2}}$$
$$T = \frac{\rho_0\sqrt{2}}{v}$$

Teraz składowe przyspieszenia.

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = -\rho\left(\frac{v}{\rho\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{v^2}{2\rho}$$
$$\ddot{\phi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{\rho\sqrt{2}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{v}{\rho\sqrt{2}}\right)\dot{\rho}$$
$$a_\phi = \rho\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = \frac{-v^2}{\rho} + \frac{v^2}{2\rho} = -\frac{v^2}{2\rho}$$

No i jeszcze rozłóżmy wektor w bazie wektora stycznego.

$$a_t = 0$$

gdyż $\vec{v} = \text{const.}$ (w tej bazie). Można sprawdzić:

$$a_t = \vec{a}\cdot\vec{t}$$
$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\left(-\frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}, 0\right)}{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$a_t = \frac{v^2}{2\rho}(-1,-1,0)\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = 0$$

Stąd,

$$a_n = a = \frac{v^2}{2\rho}\sqrt{2}$$

Ponadto, z wykładu:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho_t}$$
$$\rho_t = \sqrt{2}\rho(t)$$

gdzie ρ_t jest promieniem krzywizny. Jeszcze policzymy całkowitą drogę.

$$s = \int \mathrm{d}s = \int_0^T v\,\mathrm{d}t = vT = \rho_0\sqrt{2}$$

Zestaw 4

Zadanie 1 Wystrzeliliśmy rakietę w polu o natężeniu g, o masie startowej M. Silnik ustawiony tak, aby przyspieszenie rakiety przy braku grawitacji wynosiło a i było stałe w czasie pracy silnika. Znane jest $M/m_{\text{końcowe}}$.

$$\vec{g} = -g\hat{e}_x$$

Jeśli $g = 0$, to:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0 = \text{const.}$$

Rozważamy zmiany pędu Ariane 5. Prędkość gazów wylotowych względem rakiety to $\vec{w} = w\hat{e}_x$.

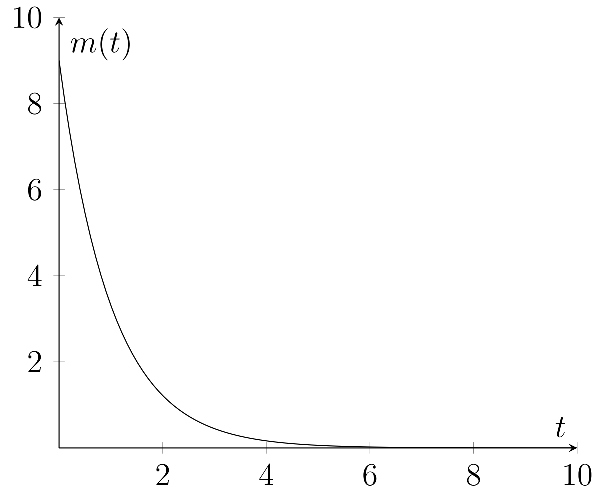
$$\begin{aligned}
mv &= (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) - \mathrm{d}m\,(w + v)\\
0 &= m\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}m + \mathrm{d}m\,\mathrm{d}v - w\,\mathrm{d}m - v\,\mathrm{d}m\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} &= \frac{w}{m} - \frac{1}{m}\,\mathrm{d}v = \frac{w}{m} - \frac{1}{m}v'\,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Przechodząc z $\mathrm{d}m \to 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} &= \frac{w}{m}\\
\int \mathrm{d}v &= \int \frac{w}{m}\,\mathrm{d}m\\
v &= w\log|m| + v_0\\
v(M) &= 0\\
v &= w\log\left|\frac{m}{M}\right|
\end{aligned}$$

Teraz używamy warunku na stały ciąg:

$$\begin{aligned}
a = \text{const.} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\
\int \mathrm{d}v &= \int a\,\mathrm{d}t = at + v_0\\
v(t) &= at = v\big(m(t)\big)\\
v(m) &= w\log\left|\frac{m}{M}\right| = w\log\left|\frac{m(t)}{M}\right|\\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{w}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \frac{m}{w}a\\
e^{at} &= \left|\frac{m(t)}{M}\right|^{w}\\
e^{\frac{at}{w}} &= \left|\frac{m(t)}{M}\right| = \frac{m(t)}{M}\\
m(t) &= Me^{\frac{at}{w}}
\end{aligned}$$



Rysunek 3.4: Zauważając, że $w < 0$, dostajemy taką zależność.

(a) Jak długo pracował silnik jeśli znany jest stosunek masy końcowej do początkowej?

$$\begin{aligned}\frac{m_k(T)}{M} &= e^{aT/w}\\ \log\frac{m_k}{M} &= \frac{aT}{w}\\ T &= \frac{w}{a}\log\frac{m_k}{M}\end{aligned}$$

Teraz chcemy dołączyć siłę grawitacji.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= \vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_x\\ \mathrm{d}\vec{p} &= \vec{F}\,\mathrm{d}t = m\vec{g}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Grawitacja działa na wszystkie gragmenty rakiety, nieważne czy się odrywają czy nie.

$$\begin{aligned}-(m+\mathrm{d}m)g\,\mathrm{d}t - g|\mathrm{d}m|\,\mathrm{d}t &= (m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v) - \mathrm{d}m\,(v+w) - mv\\ mg\,\mathrm{d}t &= (m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v) - \mathrm{d}m\,(v+w) - mv\\ \mathrm{d}v &= \frac{w}{m}\,\mathrm{d}m - g\,\mathrm{d}t\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{w}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - g\end{aligned}$$

Przechodząc z $\mathrm{d}t \to 0$ mamy pochodne:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= w\frac{\dot{m}}{m} - g = a - g\\ v(t) &= (a-g)t\\ v(T) &= (a-g)T\\ h(T) &= \frac{1}{2}(a-g)T^2\end{aligned}$$

Ale w tym mmencie rakieta ma wciąż prędkość i teraz będzie ją hamowała grawitacja, więc to nie jest odpowiedź. Czas hamowania to τ.

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{v(T)}{g} \\
h_1 &= \frac{1}{2} g\tau^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2(T)}{g} = \frac{(a-g)^2T^2}{2g} \\
H &= h + h_1 = \frac{(a-g)T^2}{2} + \frac{(a-g)^2T^2}{2g} = \frac{(a-g)T^2}{2}\left(1 + \frac{a-g}{g}\right) \\
&= \frac{(a-g)T^2}{2}\frac{a}{g} = \frac{(a-g)}{2g}\frac{w^2}{a}\log^2\frac{m_k}{M} \\
T_{\text{tot}} &= T + \tau = \frac{a}{g}T
\end{aligned}$$

Wykład 14: Ćwiczenia 14

10 gru 2020

Dla ogólnej siły zewnętrznej, działającej na układ otwarty,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = w\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + F$$

gdzie v jest prędkością tego ciała, które odpowiada „rakiecie” i tak samo F to siła działająca na „rakietę”.

Zadanie 2 Wiotka lina o masie M i długości L wisi w ziemskim polu grawitacyjnym przyczepiona za pomocy dwóch haków do sufitu. Nagle jeden z końców liny zwolniono. Obliczyć siłę z jaką lina wyrywa drugi hak z sufitu.

$$p = p_L + p_P = 0 + m_P v_P = \frac{M}{L} l_P v_P$$

Wiemy, że $v_P = gt$, $l_P = L/2 - h/2 = L/2 - gt^2/4$.

$$= \frac{M}{L}\left(\frac{L}{2} - \frac{gt^2}{4}\right)gt$$

Teraz zapisujemy zmianę pędu całej liny.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= Mg - N \\
N &= Mg - \dot{p} = Mg - \frac{Mg}{2} + \frac{3}{4}\frac{M}{L}g^2t^2
\end{aligned}$$

T to moment gdy lina się całkiem rozwinie.

$$\begin{aligned}
N(T) &= \frac{Mg}{2} + \underbrace{\frac{gT^2}{2}}_{L}\frac{3Mg}{2L} = \frac{Mg}{2} + \frac{3Mg}{2} \\
&= 2Mg
\end{aligned}$$

Można to również rozwiązać używając tego ogólnego równania dla układu otwartego.

Wykład 15

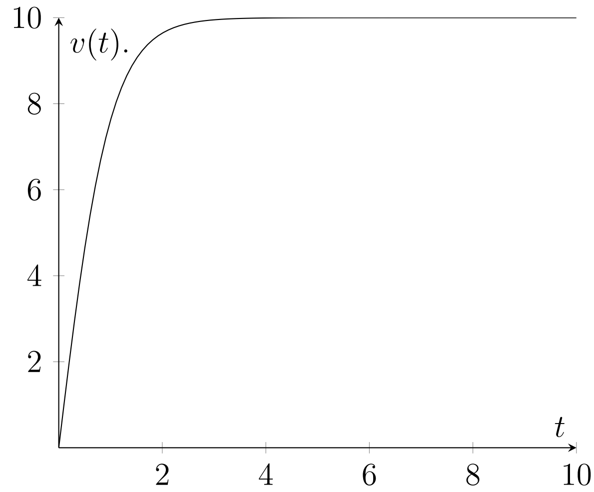
11 gru 2020

Zadanie 3 Ciało o masie m spada w polu g w ośrodku z siłą oporu proporcjonalną do kwadratu prędkości. Znaleźć zależność prędkości i przebytej drogi od czasu.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_{op} + F_g = mg - \alpha(\dot{x})^2 \\ m\ddot{x} + \alpha\dot{x}^2 &= mg \end{aligned}$$

Jest to równanie nieliniowe niejednorodne.

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= mg - \alpha v^2 \\ \dot{v} &= g - \frac{\alpha}{m}v^2 \\ \int \frac{\dot{v}}{g - \frac{\alpha}{m}v^2}\,\mathrm{d}t &= \int \mathrm{d}t \\ \int \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{\alpha}{m}v^2} &= \int \mathrm{d}t \\ t = \frac{1}{g}\int \frac{\mathrm{d}v}{1 - \frac{v^2}{v_0^2}} &= \frac{1}{g}\int \frac{\mathrm{d}v}{\left(1 + \frac{v}{v_0}\right)\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)} \\ &= \frac{1}{2g}\left[-v_0 \log\left|1 - \frac{v}{v_0}\right| + v_0 \log\left|1 + \frac{v}{v_0}\right|\right] \\ &= \frac{v_0}{2g}\log\left|\frac{1 + v/v_0}{1 - v/v_0}\right| = \frac{v_0}{2g}\log\left|\frac{v + v_0}{v_0 - v}\right| + C \\ v(0) &= 0 \\ 0 &= \frac{v_0}{2g}\log(1) + C \implies C = 0 \\ \frac{2g}{v_0}t &= \log\left|\frac{v + v_0}{v_0 - v}\right| \\ \frac{v + v_0}{v_0 - v} &= e^{\frac{2g}{v_0}t} \\ v(t) &= v_0\frac{e^{\frac{2g}{v_0}t} - 1}{e^{\frac{2g}{v_0}t} + 1} = v_0 \tanh\frac{gt}{v_0} \xrightarrow{t\to\infty} v_0 \end{aligned}$$

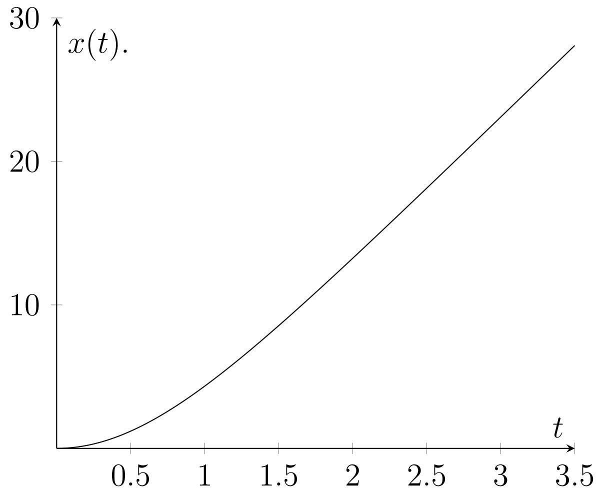


Rysunek 3.5: $v(t)$ dla prędkości granicznej $v_0 = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = v_0 \int_0^t \tanh\frac{gt}{v_0}\,\mathrm{d}t$$

Wolfram głosi,

$$\begin{aligned} &= \frac{v_0^2}{g}\log\left(\cosh\frac{gt}{v_0}\right)\Bigg|_0^t \\ &= \frac{v_0^2}{g}\log\left(\cosh\frac{gt}{v_0}\right) \end{aligned}$$



Rysunek 3.6: $x(t)$ dla prędkości granicznej $v_0 = 10\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Wykład 16

17 gru 2020

Zadanie 5

(a) kulka na sprężynce położonej na stole

Niech położenie równowagi będzie w $x = 0$.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \end{aligned}$$

RORJ:

$$\begin{aligned} x(t) &\sim e^{\lambda t} \\ \lambda^2 + \omega_0^2 &= 0 \\ \lambda &= \pm i\omega_0 \\ x(t) &= Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Podstawiając $x_0 = 0, v_0$,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

(b) kulka w polu na sprężynie

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + mg \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= g \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= g \end{aligned}$$

Stan równowagi jest w stanie trochę rozciągniętym przez grawitację. Zatem z naszego równania wynika, że $x = 0$ jest w miejscu gdzie sprężyna nie jest rozciągnięta (tak jakby nie było grawitacji)! RORJ:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ x(t) &= Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \end{aligned}$$

RSRN:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= g \\ x(t) &= C \\ C &= \frac{g}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

RORN = RORJ + RSRN:

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} + \frac{g}{\omega_0^2}$$

Stąd, położenie równowagi wynosi

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{g}{\omega_0^2} \\ x(0) &= x_0 \\ A &= -B \\ z(t) &= x(t) - \frac{g}{\omega_0^2} \\ z(t) &= Ae^{i\omega_0 t} - Ae^{-i\omega_0 t} \\ \dot{z} &= \dot{x}(t) \\ A &= \frac{v_0}{2i\omega_0} \\ z(t) &= \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega^2}$$

Wróćmy do ogólnej postaci równania oscylatora.

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \\ A &= |A|e^{i\phi_A} \\ B &= |B|e^{-i\phi_B} \\ x(t) &= |A|e^{i\omega_0 t + i\phi_A} + |B|e^{-i\omega_0 t - i\phi_B} \end{aligned}$$

Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $x - \overline{x} = 0$.

$$0 = x - \overline{x} = e^{i\omega_0 t}\Big[|A|e^{i\phi_A} - |B|e^{i\phi_B}\Big] + e^{-i\omega_0 t}\Big[|B|e^{-i\phi_B} - |A|e^{-i\phi_A}\Big]$$

Stąd,

$$\begin{aligned} |A|e^{i\phi_A} &= |B|e^{i\phi_B} \\ |A|e^{-i\phi_A} &= |B|e^{-i\phi_B} \end{aligned}$$

Zatem,

$$A = \overline{B}$$

Teraz tak,

$$\begin{aligned} x(t) &= |A|(e^{i\omega_0 t + i\phi} + e^{-i\omega_0 t - i\phi}) \\ &= |A| 2\cos(\omega_0 t + \phi) \\ &= C\cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}$$

Zadanie 6 Oscylator z siłą harmoniczną wymuszającą i oporem.

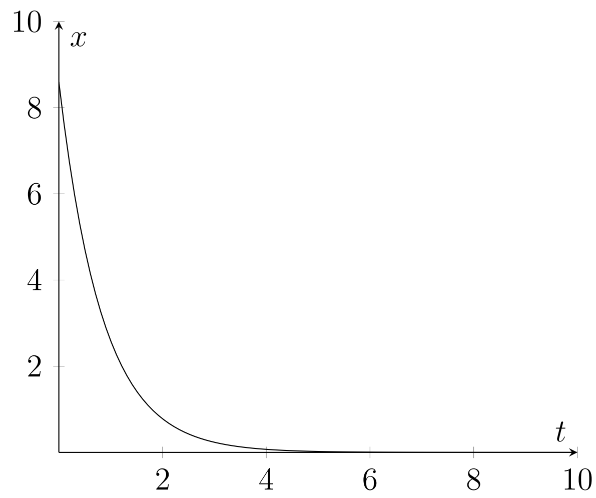
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - 2\beta m\dot{x} + F\sin(\omega t) \\ \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F}{m}\sin(\omega t) = a\sin(\omega t) \end{aligned}$$

RORJ:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0\\ \Delta = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\beta^2 - \omega_0^2)\\ \lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\end{aligned}$$

1. $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ – tłumienie jest silne

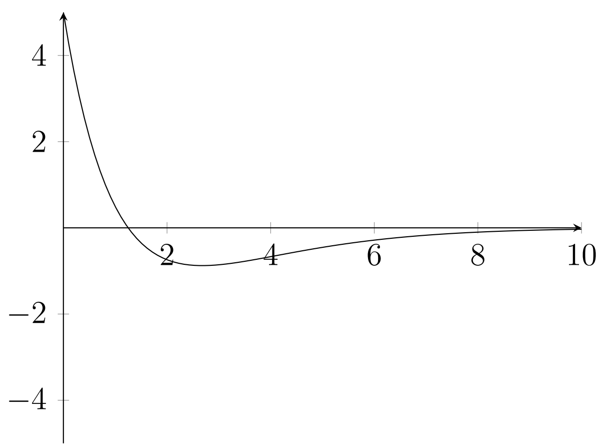
$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^{\left(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}\\ &= e^{-\beta t}\left(Ae^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + Be^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right)\\ &= e^{-\beta t}C\cosh\left(\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t + \phi\right)\end{aligned}$$



Rysunek 3.7

2. $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$

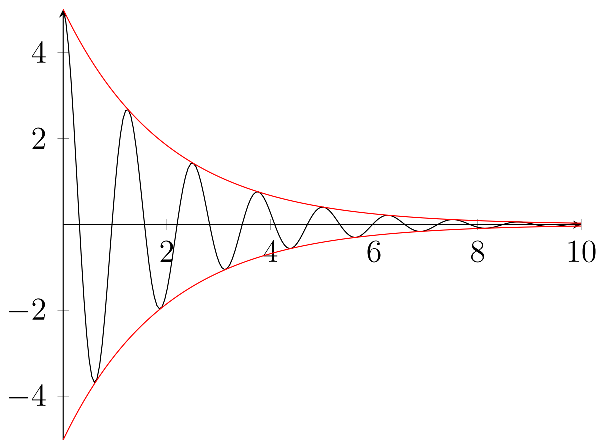
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$$



Rysunek 3.8

3. $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

$$\begin{aligned}
\lambda_{1/2} &= -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\tilde{\omega} \\
x(t) &= e^{-\beta t}\left[Ae^{i\tilde{\omega}t} + Be^{-i\tilde{\omega}t}\right] \\
&= e^{-\beta t} C\cos(\tilde{\omega}t + \phi)
\end{aligned}$$



Rysunek 3.9

Teraz wracamy do rzeczywistego zadania, czyli wracamy do siły wymuszającej. Rozważmy dwa sprzężone oscylatory, tj. nasz badany oscylator jest częścią urojoną rozwiązania poniższego równania różniczkowego:

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = ae^{i\omega t}$$

RSRN: Postulujemy rozwiązanie szczególne postaci $z_s(t) = he^{i(\omega t + \gamma)}$. Wstawiamy to do równania i szukamy warunków na stałe h, γ.

$$\begin{aligned}
-\omega^2 z(t) + 2i\omega\beta z(t) + \omega_0^2 z(t) &= \frac{ae^{-i\gamma}}{h} z(t) \\
-\omega^2 + 2i\omega\beta + \omega_0^2 &= \frac{a}{h} e^{-i\gamma}
\end{aligned}$$

Dostajemy dwa równania z analizy części rzeczywistej i urojonej,

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \frac{a}{h}\cos\gamma \tag{1}$$

$$2\omega\beta = -\frac{a}{h}\sin\gamma \tag{2}$$

Możemy wyeliminować γ podnosząc oba równania do kwadratu i dodając je,

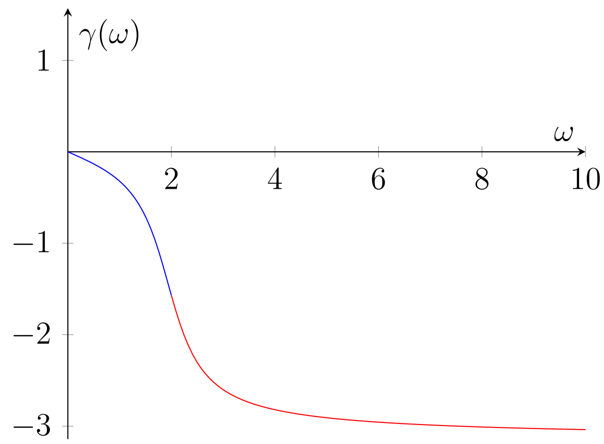
$$\frac{a^2}{h^2} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2$$

$$(h, \gamma)\colon \begin{cases} h = \dfrac{a}{\sqrt{4\omega^2\beta^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \\ \tan\gamma = -\dfrac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

W ten sposób wyznaczyliśmy h i γ w funkcjach parametrów układu. Jest jeszcze ciekawa rzecz dot. fazy. Mianowicie, zawsze $\sin\gamma < 0$ co oznacza, że chcemy zawsze mieć $\gamma < 0$. Innymi słowy, na kolejnych przedziałach trzeba odpowiednio dobrać $n \in \mathbb{Z}$ tak, by $\gamma(\omega)$ była ciągła.

$$\begin{aligned}
&\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\beta}{\omega^2-\omega_0^2}\right) + n\pi \\
&n = 0 \quad \text{dla } \omega < \omega_0 \\
&n = -1 \quad \text{dla } \omega > \omega_0
\end{aligned}$$

Wówczas dla $\omega = \omega_0$ mamy $\gamma = -\pi/2$, dla $\omega \to \infty$ mamy $\gamma \to -\pi$.



Rysunek 3.10: $\gamma(\omega)$ dla $\beta = 1/2$, $\omega_0 = 2$.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}\left(Ae^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}\right) \\ e^{-\beta t}(A+Bt) \\ e^{-\beta t}C\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\phi\right) \end{cases} + h\sin(\omega t+\gamma)$$

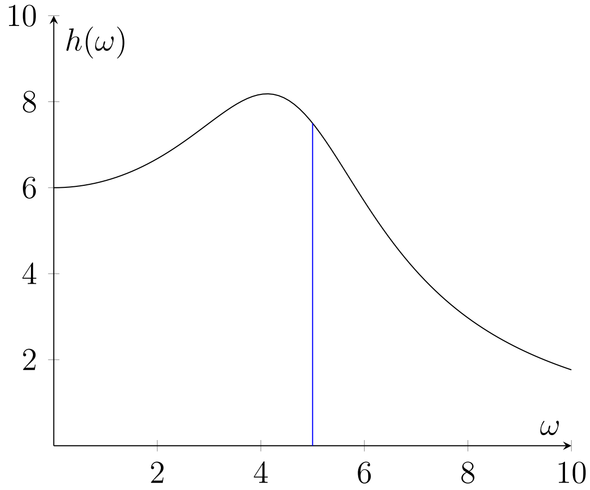
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = h\sin(\omega t+\gamma)$$

Gdzie nie mamy na myśli takiej normalnej granicy tylko asymptotykę funkcji. Zróbmy krzywą rezonansową, czyli wykres tej granicznej amplitudy drgań po zaniku drgań tłumionych. Zauważmy, że jeśli $\beta \neq 0$, to maksimum rezonansu nie przypada na $\omega = \omega_0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\omega} &= -\frac{8a\omega\beta^2 - 4a(\omega_0^2-\omega^2)\omega}{2\big(4\omega^2\beta^2 + (\omega_0^2-\omega)^2\big)^{3/2}} \\
0 &= 2\omega\beta^2 - \omega(\omega_0^2-\omega^2)
\end{aligned}$$

Oczywiście $\omega = 0$ odpada jako punkt maksimum, zatem

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 - \omega^2 &= 2\beta^2 \\
\omega_{\max} &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}
\end{aligned}$$



Rysunek 3.11: $a = 150$, $\omega_0 = 5$, $\beta = 2$

Wykład 17: Siły centralne

07 sty 2021 Środek układu współrzędnych będziemy zawsze umieszczali w tym generatorze siły centralnej. Wtedy siła centralna wygląda prosto: $\vec{F} = R\hat{e}_r$.

Zadanie 1 Wzór Bineta.

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= F_r \hat{e}_r \\
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \\
\vec{M} &= \vec{r} \times F_r \hat{e}_r = r F_r \hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\vec{L} = \text{const.}$$

W związku z tym, płaszczyzna ruchu rozpięta przez wektor wodzący i pęd jest stała. Stąd, ruch pod wpływem siły centralnej jest płaski. Wniosek jest taki, że warto używać układu walcowego, gdzie $z = 0$, $\dot{z} = 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ r & 0 & 0 \\ m\dot{r} & mr\dot{\phi} & 0 \end{vmatrix} = mr^2 \dot{\phi} \hat{e}_z \\
L &= mr^2 \dot{\phi} = \text{const.} \\
\dot{\phi} &= \frac{L}{mr^2}
\end{aligned}$$

Jest to bardzo pożyteczna podmianka. Chcemy znaleźć ruch, tj.:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

I w układzie walcowym,

$$\begin{bmatrix} F_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

Trzeci wiersz jest trywialny, pierwsze dwa coś nam wnoszą doo sytuacji. Stąd,

$$\begin{aligned} F_r &= \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \\ \dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

Niech $w = 1/r$.

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{m}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\phi^2}\frac{L}{mr^2} - \left(\frac{L}{mr}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\phi^2}$$

Wstawiając do wzoru na siłę,

$$F_r = -\frac{L^2}{mr^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)$$

Finalnie,

Wniosek 1 (Wzór Bineta)**.**

$$F_r = -\frac{L^2 w^2}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\phi^2} + w\right)$$

Ten wzór pozwala nam znaleźć siłę jak znamy tor, przykładowo.

Teraz rozważmy obraz energetyczny. $U = U(r)$ bo inaczej siła nie byłaby centralna.

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + U(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + U(r)}_{U_{\text{eff}}} \\ \dot{r} &= \left[\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr} - U(r)\right)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Wyrażenie to jest określane jako całka energii. Możemy też zamienić to na pochodną po kącie.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{mr^2}{L}\left[\frac{2}{m}\left(E - \frac{L^2}{2mr} - U(r)\right)\right]^{1/2}$$

Dostajemy wzór na trajektorię zależy od energii i momentu pędu.
Teraz postaramy się powyciągać nowe wnioski.

$$E - U(w) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{m}{2}\frac{L^2}{m^2}w'^2 + \frac{L^2}{2m}w^2$$
$$= \frac{L^2}{2m}\left(w^2 + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right)$$

Różniczkujemy obustronnie po ϕ, żeby pozbyć się nieliniowości dotyczącej kwadratu.

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\phi} = \frac{L^2}{2m}\left(2ww' + 2w'w''\right)$$

No i fajnie ale po lewej stronie nie ma w'. Spróbujmy jeszcze usilniej,

$$\frac{\mathrm{d}U(w)}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w}w'$$
$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w}w' = \frac{L^2}{m}w'\left(w'' + w\right)$$
$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} = \frac{L^2}{m}\left(w'' + w\right)$$
$$w'' + w = -\frac{m}{L^2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w}$$

Mamy równanie oscylatora harmonicznego z $\omega_0^2 = 1$. Ale jest jeszcze człon niejednorodny, z którym trzeba walczyć mniej lub więcej w zależności od siły centralnej.
Pozostaje pytanie czy moglibyśmy legalnie skasować w'. Otóż, $w' = 0$ gdy mamy ekstremum $r(\phi)$. Zawsze będzie takie ekstremum dla ruchu z siłą centralną. Widzimy jednak, że nie gubimy żadnego rozwiązania.

Wykład 18

14 sty 2021

Zestaw 5

Zadanie 2 Kulka o masie m, porusza się bez tarcia po płaszczyźnie. Jest wciągana ze stałą prędkością u po nici. W chwili początkowej jest w odległości R od otworu, prędkość transwersalna względem otworu to v_0.

$L_0 = mr_0v_0$, $L =$const. $\dot{r} =$ const. $= -u$. Korzystamy z układu walcowego.

$$m\vec{a} = \vec{F},\ \vec{F} = -N\hat{e}_\rho,\ N > 0$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} -N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$0 = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}$$
$$N = m(\rho\dot{\phi}^2 - \ddot{\rho})$$
$$\rho = r_0 - ut$$
$$0 = (r_0 - ut)\ddot{\phi} - 2u\dot{\phi}$$

Weźmy $\alpha = \dot{\phi}$,

$$0 = (r_0 - ut)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - 2u\alpha$$

To jest równanie proste do scałkowania,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} &= \frac{2u}{R-ut}\,\mathrm{d}t \\
\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} &= \int_0^t \frac{2u}{R-ut}\,\mathrm{d}t \\
\log\frac{\alpha}{\alpha_0} &= -2\log\left(1-\frac{ut}{R}\right) \\
\log\frac{\alpha}{\alpha_0} &= \log\left(\frac{R}{R-ut}\right)^2 \\
\frac{\alpha}{\alpha_0} &= \frac{R}{R-ut} \\
\dot{\phi} &= \dot{\phi}_0\left(\frac{R}{R-ut}\right)^2 = \dot{\phi}_0\frac{1}{\left(1-\frac{ut}{R}\right)^2} \\
\phi(t) &= \dot{\phi}_0\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(1-\frac{ut}{R}\right)^2} = \dot{\phi}_0\frac{R}{u}\frac{1}{1-\frac{ut}{R}} + C
\end{aligned}$$

Jeśli $\phi(0) = 0$ oraz $\dot{\phi}_0 = v_0/R$,

$$\phi(t) = \frac{v_0}{u}\left(\frac{1}{1-\frac{ut}{R}} - 1\right) = v_0 t\frac{1}{R-ut} = \frac{v_0 t}{\rho}$$

Teraz byśmy chcieli wyznaczyć trajektorię.

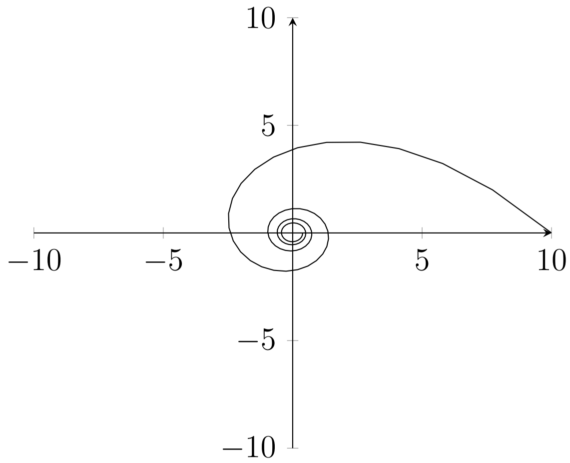
$$\begin{aligned}
t &= \frac{\rho\phi}{v_0} \\
\rho &= R - u\frac{\rho\phi}{v_0} \\
\rho\left(1+\frac{\phi u}{v_0}\right) &= R \\
\rho(\phi) &= \frac{R}{1+\frac{\phi u}{v_0}} = \frac{Rv_0}{v_0+\phi u}
\end{aligned}$$

Skoro, $\ddot{\rho} = 0$, to

$$N = m\rho\dot{\phi}^2 = m\rho\frac{v_0^2R^2}{(R-ut)^4} = \frac{mv_0^2R^2}{\rho^3}$$

Siła wciągająca bardzo szybko maleje z odległością. Teraz rozwiązujemy to zadanie poprzez stałe ruchu. Wiemy, że moment pędu jest stały:

$$\begin{aligned}
L &= m\rho^2\dot{\phi} = L_0 = mRv_0 \\
\dot{\phi} &= \frac{Rv_0}{\rho^2} = \frac{Rv_0}{(R-ut)^2}
\end{aligned}$$



Rysunek 3.12: $\rho(\phi)$

Wychodzi od razu! Teraz siła naciągu,

$$N = m\rho\dot{\phi}^2 = m\rho\frac{L_0^2}{m^2\rho^4} = \frac{L_0^2}{m\rho^3}$$

Teraz liczymy jaką pracę wykonamy.

$$\begin{aligned}
W &= \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{F}\cdot(\mathrm{d}\rho\,\hat{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_\phi) \\
&= -\int_R^\rho N\,\mathrm{d}\rho = \int_\rho^R \frac{mv_0^2R^2}{\rho^3}\,\mathrm{d}\rho = -\frac{mv_0^2R^2}{2}\frac{1}{\rho^2}\bigg|_\rho^R \\
&= \frac{mv_0^2R^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right) > 0
\end{aligned}$$

Ta praca została zmagazynowana w energii kinetycznej kulki, zatem możemy to policzyć też w taki sposób.

$$\begin{aligned}
W &= E_k(\rho) - E_k(R) \\
E_k(\rho) &= \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) = \frac{m}{2}\left(u^2 + \frac{L_0^2}{m^2\rho^2}\right) \\
W &= \frac{m}{2}\left(u^2 + \frac{L_0^2}{m^2\rho^2} - u^2 - \frac{L_0^2}{m^2R^2}\right) = \frac{mL_0^2}{2m^2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right) \\
&= \frac{mv_0^2R^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right)
\end{aligned}$$

Zadanie 3 Mamy punkt w polu siły $\vec{F} = -k\vec{r}$ (gumka o zaniedbywalnej długości swobodnej), wirujący wokół centrum z momentem pędu $\vec{L}$. Znaleźć równanie ruchu $f(\ddot{r}, \dot{r}, r) = 0$. Poszukamy też rozwiązań dla małych perturbacji wokół położenia równowagi.

Siła jest oczywiście centralna, więc ruch jest płaski i moment pędu jest zachowany. Jeśli my tę kulkę dodatkowo pstrykniemy siłą radialną (centralną) to nie zmienimy jej momentu pędu. W ten sposób uzyskamy oscylacje wokół orbity kołowej.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 + \frac{k}{m}\rho$$

$$L = m\rho^2\dot{\phi} = L_0$$

$$\dot{\phi} = \frac{L_0}{m\rho^2}$$

I wstawiamy stałe ruchu do równania.

$$\ddot{\rho} - \frac{L_0^2}{m^2\rho^3} + \frac{k}{m}\rho = 0$$

Mamy równanie nieliniowe, ale my chcemy rozważyć tylko zaburzenia, zatem będzie dobrze.

$$\rho(t) = \rho_0 + x(t), \quad x(t) \ll \rho_0$$

Szukamy momentu pędu na tym okręgu, $\rho(t) = \rho_0$,

$$\frac{L_0^2}{m^2\rho_0^3} = \frac{k}{m}\rho_0$$

$$L_0 = \sqrt{km}\rho_0^2$$

I wracamy do zaburzeń,

$$\ddot{\rho} = \ddot{x}$$

$$\rho^{-3} = (\rho_0 + x)^{-3} = \rho_0^{-3}\left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)^{-3}$$

$$= \rho_0^{-3}\left(1 - \frac{3}{\rho_0}x + \mathcal{O}(x^2)\right)$$

$$\approx \rho_0^{-3}\left(1 - \frac{3x}{\rho_0}\right)$$

Wstawiamy to do równania ruchu.

$$\ddot{x} - \frac{L_0^2}{m^2}\rho_0^{-3}\left(1 - \frac{3x}{\rho_0}\right) + \frac{k}{m}(\rho_0 + x) = 0$$

$$\ddot{x} + \left(\frac{3L_0^2}{m^2\rho_0^4} + \frac{k}{m}\right)x + \left(-\frac{L_0^2}{m^2\rho_0^3} + \frac{k\rho_0}{m}\right) = 0$$

To co wisi bez x, to jest to co by wisiało w ruchu po okręgu, zatem suma wyrazów, które nam wiszą są równe 0, gdyż równanie ruchu po okręgu z założenia jest spełnione. Innym sposobem by się przekonać, jest rozpisanie wyliczonego wcześniej L_0.

$$\ddot{x} + \left(\frac{3L_0^2}{m^2\rho_0^4} + \frac{k}{m}\right)x = 0$$

No i cyk równanie oscylatora, bo współczynnik przy x jest dodatni.

$$\omega_0^2 = \frac{3L_0^2}{m^2\rho_0^4} + \frac{k}{m} > 0$$
$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Stąd, zaburzenia to są oscylacje wokół stabilnego ruchu po okręgu.

Zadanie 4 Możliwe orbity w potencjale $U(r) = -\alpha/r^2$ dla $\alpha > 0$.

Wykład 19

15 sty 2021

Zadanie 5 Problem Keplera

Przypominamy sobie równanie wiążące stałe ruchu i potencjał.

$$E - U(w) = \frac{L^2}{2\mu}\left(w'^2 + w^2\right)$$

Sprowadziliśmy to do równania liniowego,

$$w'' + w = -\frac{\mu}{L^2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w}$$

W naszym przypadku,

$$U(w) = -\alpha w$$

Wstawiamy do równania,

$$w'' + w = \frac{\mu}{L^2}\alpha$$

Jest to niejednorodne równanie oscylatora harmonicznego z $\omega = 1$.
RORJ:

$$w_1(\phi) = A\cos(\phi + \phi_0)$$

RSRN:

$$w_2(\phi) = \frac{\mu\alpha}{L^2}$$

Stąd pełne rozwiązanie to:

$$w(\phi) = \frac{\mu\alpha}{L^2} + A\cos(\phi + \phi_0)$$
$$E = E_k + U = \frac{\mu\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = E_{k_1}^* + E_{k_2}^* + U$$
$$L = \mu r^2\dot{\phi} = L_1^* + L_2^* = m_1 r_1^{*2}\dot{\phi} + m_2 r_2^{*2}\dot{\phi}$$

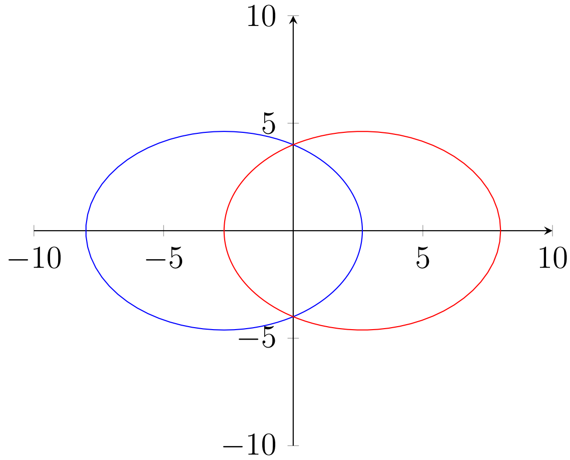
Zmienne z „*” są zmiennymi względem środka masy. ϕ jest oczywiście to samo, bo środek masy musi być zachowany.

$$
\begin{aligned}
E + \alpha A\cos(\phi+\phi_0) + \frac{\mu\alpha^2}{L^2} &= \frac{L^2}{2\mu}\left(A^2\sin^2(\phi+\phi_0) + A^2\cos^2(\phi+\phi_0) + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu\alpha}{L^2}A\cos(\phi+\phi_0)\right)\\
&= \frac{L^2A^2}{2\mu} + \alpha A\cos(\phi+\phi_0) + \frac{\mu\alpha^2}{2L^2}\\
E &= -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} + \frac{L^2A^2}{2\mu}\\
A^2 &= \frac{2L^2E+\mu\alpha^2}{2L^2}\frac{2\mu}{L^2} = \frac{2L^2E\mu+\mu^2\alpha^2}{L^4} = \frac{2E\mu}{L^2} + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4}\\
&= \frac{\mu^2\alpha^2}{L^4}\left(\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}+1\right)\\
|A| &= \frac{\mu\alpha}{L^2}\sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} = \frac{\mu\alpha}{L^2}\varepsilon
\end{aligned}
$$

Teraz wracamy do trajektorii,

$$
\begin{aligned}
r(\phi) &= \frac{L^2}{\mu\alpha}\frac{1}{1\pm\varepsilon\cos(\phi+\phi_0)}\\
p &= \frac{L^2}{\mu\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}}
\end{aligned}
$$

Mamy równanie parametryczne krzywej stożkowej. Ten $\pm$ daje nam dwie możliwe krzywe stożkowe przystające, ale dla dwóch różnych ognisk.



Rysunek 3.13: Elispy ($\varepsilon \in (0,1)$) dla $\phi_0 = 0$ mamy wariant z plusem dla niebieskiego i wariant z minusem dla czerwonego.

Liczymy półoś wielką,

$$
\begin{aligned}
2a &= p\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}\\
p &= a(1-\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

I rozważmy półoś małą,

$$\begin{aligned}
b &= r(\phi_b)\sin\phi_b \\
\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right|_{\phi_b} &= 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{p\sin\phi}{1-\varepsilon\cos\phi}\right) \\
&= p\frac{\cos\phi(1-\varepsilon\cos\phi)-\varepsilon\sin^2\phi}{(1-\varepsilon\cos\phi)^2} \\
0 &= \cos\phi + \varepsilon(\sin^2\phi+\cos^2\phi) \\
\cos\phi &= -\varepsilon \\
\sin\phi &= \sqrt{1-\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

Stąd, półoś mała:

$$\begin{aligned}
b &= \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \\
a &= \frac{p}{1-\varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E}
\end{aligned}$$

Stąd wniosek, że długość tej elipsy nie zależy od momentu pędu, a tylko od energii. Moment pędu bardziej narzuca spłaszczenie elipsy (ale energia również).

Wykład 20

21 sty 2021 DO UZUPEŁNIENIA

$$v_I^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{a}\right) = \frac{G(M+m)}{a} = 7.9\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Dla v_{II}, $E=0$ czyli $a\to\infty$.

$$\begin{aligned}
v_{II}^2 &= G(M+m)\frac{2}{r} \\
v_{II} &= \sqrt{2}v_I = 11.2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}
\end{aligned}$$

Zadanie 9 Wyznaczyć masę układu podwójnego gwiazd, jeśli odległość między składnikami układu jest stała i wynosi r, zaś czas obiegu wynosi T.

$$M+m = \frac{4\pi^2a^3}{GT^2}$$

Zadanie 10 Dwie jednakowe kule o masie m (oraz o zaniedbywalnym promieniu) w chwili początkowej spoczywały w odległości R od siebie. Po jakim czasie kule zderzą się ze sobą? $m=1$, $R=1$

Mamy elipsę zdegenerowaną ruch względnego o półosi $R/2$.

$$\begin{aligned}
T^2 &= \frac{4\pi^2R^3}{16Gm} \\
t_s &= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R^3}{Gm}} \approx 26^{\mathrm{h}}
\end{aligned}$$

Zestaw 6

Prędkość przy zmianie układów:

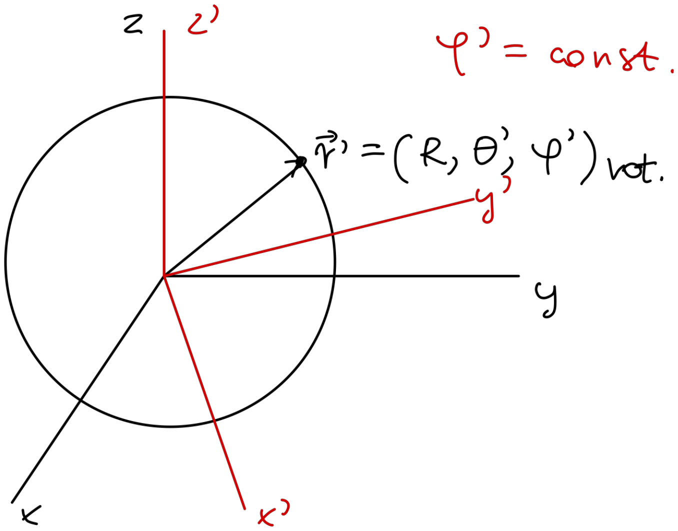
$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

gdzie tę drugą pochodną liczymy względem nowego układu współrzędnych odległego o wektor wodzący $\vec{R}$ od wyjściowego.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{tr}}{\mathrm{d}t} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}'$$

Zadanie 1 Po południku jednostajnie obracającej się kuli o promieniu R porusza się punkt ze stałą prędkością V' (w układzie kuli). Znaleźć $\vec{v}$ i $\vec{a}$ w układzie nieruchomy na dwa sposoby. Na pałę i transformując z układu obracającej się kuli.



Rysunek 3.14: kulanieinercjalny

$$\begin{aligned}
\phi' &= \text{const.} \\
\theta' &= \frac{\pi}{2} - \dot{\theta} t = \frac{\pi}{2} - \frac{V'}{R} t = \theta \\
\vec{r} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_U = \begin{bmatrix} R\sin\theta\cos(\omega t) \\ R\sin\theta\sin(\omega t) \\ R\cos\theta \end{bmatrix}_U
\end{aligned}$$

W tym przypadku $\vec{R} = 0$ zatem $\vec{r} = \vec{r}'$ ale inaczej wyrażone. Robimy rzutowania na różne osi.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\theta\cos(\omega t) - \sin\theta\sin(\omega t)\omega \\ \dot{\theta}\cos\theta\sin(\omega t) + \sin\theta\cos(\omega t)\omega \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}_U$$

I jeszcze przyspieszenie:

$$a_x = \ddot{\theta}\cos\theta\cos(\omega t) - \dot{\theta}^2\sin\theta\cos(\omega t) - \dot{\theta}\omega\cos\theta\sin(\omega t) - \omega\dot{\theta}\cos\theta\sin(\omega t) - \omega^2\sin\theta\cos(\omega t)$$

i tak dalej...

Teraz rozważamy rotujący układ (x', y', z').

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= \begin{bmatrix} R\sin\theta \\ 0 \\ R\cos\theta \end{bmatrix}_{U'} \\
\vec{v}' = \dot{\vec{r}'} &= \begin{bmatrix} R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ -R\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix}_{U'}
\end{aligned}$$

Uwaga! Ta kropa to jest pochodna primowana, która ignoruje zmienność osi. To jest pochodna względem ruszającego się układu. I jeszcze jedna pseudo-pochodna,

$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= \begin{bmatrix} R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \\ -R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta \end{bmatrix}_{U'} \\
&= -R\dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

I ewidentnie jest to przyspieszenie dośrodkowe w tym układzie poruszającym się, w którym kulka rusza się po południku, czyli po okręgu. Teraz byśmy chcieli wrócić do układu inercjalnego.

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{v}_{tr} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R\dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix}_{U'} + R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{U,U'} \times \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{U'} \\
&= R\dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix}_{U'} + \omega R \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} R \cos\theta \\ \omega R \sin\theta \\ -\dot{\theta} R \sin\theta \end{bmatrix}_{U'} \\
\hat{e}_x' &= \cos\omega t\, \hat{e}_x + \sin\omega t\, \hat{e}_y \\
\hat{e}_y' &= -\sin\omega t\, \hat{e}_x + \cos\omega t\, \hat{e}_y \\
M(\mathrm{id})_{U'}^{U} &= \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\vec{v}_U = M(\mathrm{id})_{U'}^{U} \vec{v}_{U'} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} R \cos\theta \cos\omega t - \omega R \cos\theta \sin\omega t \\ R\dot{\theta} \cos\theta \sin\omega t + \omega R \sin\theta \cos\omega t \\ -\dot{\theta} R \sin\theta \end{bmatrix}_U
\end{aligned}
$$

Wersja manualna,

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_U &= R\dot{\theta}\cos\theta\big(\cos\omega t\hat{e}_x + \sin\omega t\hat{e}_y\big) + \omega R \sin\theta\big(-\sin\omega t\hat{e}_x + \cos\omega t\hat{e}_y\big) - \dot{\theta} R \sin\theta\, \hat{e}_z \\
&= \hat{e}_x\Big(R\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t - \omega R \sin\theta \sin\omega t\Big) + \hat{e}_y\Big(R\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + \omega R \sin\theta\cos\omega t\Big) \\
&\quad + \hat{e}_z\Big(-\dot{\theta} R \sin\theta\Big)
\end{aligned}
$$

Teraz liczymy przyspieszenie.

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}' + \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{tr}}{\mathrm{d}t} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times \vec{r}'\big) + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}' \\
&= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \big(\vec{\omega} \times \vec{r}'\big) \\
2\vec{\omega} \times \vec{v} &= 2\omega R\dot{\theta} coos\theta\, \hat{e}_y' \\
\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -\omega^2 R \sin\theta\, \hat{e}_x' \\
\vec{a} &= -R\dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{U'} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\omega R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} + \begin{bmatrix} -\omega^2 R \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}
\end{aligned}
$$

I teraz jeszcze raz moglibyśmy przemnożyć przez macierz transformacyjną i już.

Zadanie 2 Mamy rurkę i kulkę.

$$
\vec{r}' = \begin{bmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}, \quad \vec{v}' = \begin{bmatrix} \dot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}, \quad \vec{a}' = \begin{bmatrix} \ddot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{U,U'}
$$

$$m\vec{a} = \vec{F} = \begin{bmatrix} T \\ N \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

Oczywiście T i N w tym miejscu nie mają ustalonego znaku. Teraz piszemy master-formułę na przyspieszenie upraszczając już zerowe wyrazy.

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$
$$\vec{a}' = \frac{1}{m}\vec{F} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

Przechodzimy do składowych.

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = 2\begin{vmatrix} e'_x & e'_y & e'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{x}'\omega \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$
$$\vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} e'_x & e'_y & e'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x'\omega \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$
$$\vec{\omega} \times \left(\vec{w} \times \vec{r}'\right) = \begin{bmatrix} -\omega^2 x' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$
$$\begin{bmatrix} \ddot{x}' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} T \\ N \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{x}'\omega \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} + \omega^2\begin{bmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

Stąd,

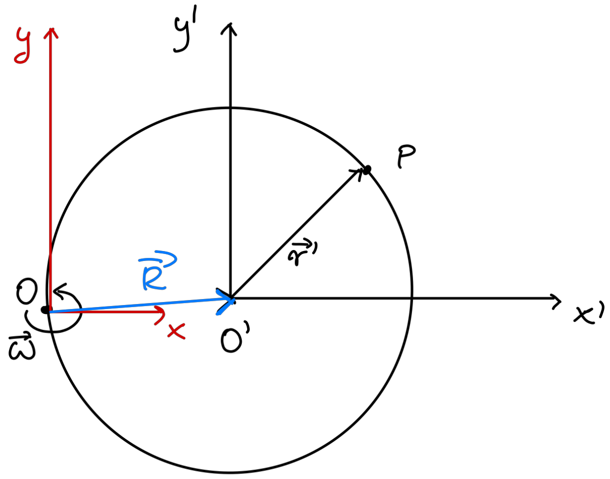
$$N = 2\dot{x}'\omega m$$
$$\vec{T} = -f|N|\,\hat{e}_{v'} = -f\left|2\dot{x}'\omega m\right|\frac{\dot{x}'}{|\dot{x}'|}\,\hat{e}'_x$$
$$= -2m\omega f\dot{x}'\,\hat{e}_{x'}$$

Teraz wracamy do siły tarcia z równania ruchu.

$$\ddot{x}' = -2\omega f\dot{x}' + \omega^2 x'$$

Wykład 21

28 sty 2021 PO PRZERWIE,



Rysunek 3.15: koralikobrot

Zadanie 3 Koralik na obracającym się okręgu o promieniu r może obracać się bez tarcia. Okrąg wiruje wokół punktu O na obwodzie z prędkością ω. Znaleźć równanie ruchu koralika w układzie na sztywno związanym z okręgiem, we współrzędnych biegunowych oraz siłę z jaką okrąg oddziałuje na koralik.
Jedyną siłą rzeczywistą jest ta nacisku okręgu na koralik. Siła rzeczywista jest w układzie inercjalnym dobrze zdefiniowana:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{N}}{m}, \quad \vec{N} = -N\hat{e}_\rho,\ N > 0$$

Opisujemy ruch.

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}' \\
\vec{a}_{tr} &= \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right) \\
\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\prime\vec{R}}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{\omega} \times \vec{R} \\
\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} &= \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})
\end{aligned}$$

I rozpisujemy wektory.

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} -N \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}, \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} r\cos\phi \\ -r\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}_{U,U'}, \quad \vec{v}' = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\phi} \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

Teraz trzeba pomnożyć trochę.

$$\vec{\omega} \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} e'_\rho & e'_\phi & e'_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega r \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \begin{bmatrix} -\omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{R} = \begin{bmatrix} \omega r \sin\phi \\ \omega r \cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \begin{bmatrix} -\omega^2 r \cos\phi \\ \omega^2 r \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \begin{bmatrix} -2r\dot{\phi}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

Łączymy fakty,

$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= \begin{bmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 \\ \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}_{U'} = \vec{a} - \vec{a}_{tr} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{N}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} - \omega^2 r \begin{bmatrix} -\cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} + \begin{bmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} + \begin{bmatrix} 2r\dot{\phi}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'} \\
\dot{\rho} = 0 &\implies \ddot{\rho} = 0 \\
&\begin{cases} -r\dot{\phi}^2 = -\frac{N}{m} + r\omega^2 \cos\phi + \omega^2 r + 2\omega r\dot{\phi} \\ r\ddot{\phi} = -r\omega^2 \sin\phi \end{cases}
\end{aligned}$$

I rozwiązujemy.

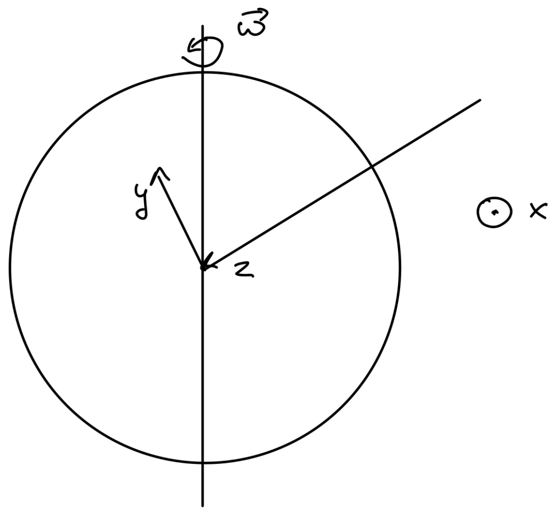
$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= -\omega^2 \sin\phi \\
\dot{\phi} &= u(\phi) \\
\ddot{\phi} &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}u \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}u &= -\omega^2 \sin\phi \\
\mathrm{d}u\, u &= -\omega^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \\
\frac{1}{2}u^2 &= \omega^2 \cos\phi + C
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \omega^2 \cos\phi + C$$
$$\dot{\phi} = \sqrt{2\omega^2 \cos\phi + 2C}$$

Weźmy jakiś warunek początkowy. Jeśli $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = 0$, to $\ddot{\phi} = 0$ czyli ciało sobie będzie cały czas spoczywało. To jest przypadek tego, gdy kulka jest nieruchoma względem ruchomego okręgu. Zasadniczo tylko taki umiemy ładnie analitycznie na tym poziomie rozwiązać xD

$$0 = \sqrt{2\omega^2 + 2C}$$
$$C = -\omega^2$$
$$\dot{\phi} = \sqrt{2\omega^2(\cos\phi - 1)}$$
$$\frac{N}{m} = \omega^2 r(\cos\phi + 1)$$
$$N = 2m\omega^2 r$$

Zadanie 4 Z wieży o wysokości h znajdującej się na obracającej się Ziemi puszczono ciało. Znaleźć odchylenie toru ciała od pionu, zakładając że stanowi małą poprawkę. Pominąć siłę odśrodkową i opory powietrza.



Rysunek 3.16: spadek

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{tr} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\vec{r}'$$

translacja jest zerowa, oraz dwa ostatnie człony się zerują; przedostatni gdyż zaniedbujemy siłę odśrodkową.

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}', \quad |\vec{g}| \gg |2\vec{\omega} \times \vec{v}'|$$

Teraz magia przybliżeń. W zerowym rzędzie, $\vec{a}' = g$. Wówczas,

$$
\begin{aligned}
\vec{a}' &= \begin{bmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}^{(0)} \\
z(t)^{(0)} &= -h - R + \frac{gt^2}{2} \\
\dot{z}(t)^{(0)} &= gt
\end{aligned}
$$

Do kolejnego przybliżenia wstawiamy przybliżenie uzyskane w zerowym rzędzie.

$$
2(\vec{\omega} \times \vec{v}') = \begin{bmatrix} 2\omega gt\cos\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}
$$

Stąd,

$$
\begin{aligned}
\vec{a}'^{(1)} &= \begin{bmatrix} -2\omega gt\cos\phi \\ 0 \\ g \end{bmatrix}_{U'} \\
\dot{x}' &= -\omega gt^2\cos\phi + v'_{0x}
\end{aligned}
$$

Bierzemy $v'_{0x} = 0$ i $x'_{0x} = 0$.

$$
x' = -\frac{1}{3}\omega gt^3\cos\phi
$$

To teraz pytanie o ile się przesuniemy przy spadku z wysokości 100 m. Szacujemy czas spadku przez:

$$
\begin{aligned}
T &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\
x'(T) &= -\frac{1}{3}g\omega\cos\phi\sqrt{\frac{8h^3}{g^3}} \\
&= -\frac{2}{3}\omega\cos\phi\sqrt{\frac{2h^3}{g}}
\end{aligned}
$$

Dla $\phi = 0$,

$$
\begin{aligned}
x'(0^\circ) &= -2.2\,\mathrm{cm} \\
x'(52^\circ) &= -1.4\,\mathrm{cm} \\
x'(90^\circ) &= 0\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

A te odchylenia są na wschód.