

Kolokwium z Analizy III R, zadanie 1

18 stycznia 2021

Uwagi organizacyjne: Na rozwiązanie kolokwium należy przeznaczyć nie więcej niż 4 godziny. Rozwiązania należy przesłać do poniedziałku do 23:59. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem. Każde zadanie należy zeskanować **osobno** i osobno wgrać na platformę Kampus. Proszę upewnić się, że telefon komórkowy, komputer, tablet itd. leżą w dużej odległości a kalkulator i inne pomoce naukowe są głęboko schowane.

Zadanie 1.[6pkt] Niech f będzie funkcją meromorficzną na \mathbb{C} , spełniającą

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

której bieguny $a_1, a_2, \dots, a_m \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} (-1)^n f(n)$$

istnieje i jest równa

$$- \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{a_k} \left(\frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)} \right).$$

Wykazać, że dla $a \notin i\mathbb{Z}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \sinh(\pi a)}.$$