# Układy odniesienia i układy współrzędnych

Szymon Cedrowski

Lekcja 1

# 1 Układ inercjalny

**Definicja 1. Układ inercjalny** to taki, w którym obowiązuje I zasada dynamiki Newtona – ciało, na które nie działa żadna siła zewnętrzna porusza się z zerowym przyspieszeniem.

Jeśli mamy układ ciał, to oddziaływania między nimi są siłami wewnętrznymi. Wówczas okazuje się, że układ środka masy jest układem inercjalnym.

## 1.1 Układ środka masy

Weźmy inercjalny układ ciał, gdzie każde z nich opisuje wektor położenia $\mathbf{r}_i$ i masa $m_i$.

**Definicja 2** (Środek masy)**.**

$$\mathbf{r}_\mathrm{c} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

Tak jakby układ COM jest przesunięty o wektor $\mathbf{r}_\mathrm{c}$ względem wyjściowego układu inercjalnego. Interesuje nas teraz jak ten wektor zmienia się w czasie.

**Twierdzenie 1.** Układ środka masy (COM) jest układem inercjalnym. Zachowuje się jak punkt materialny o masie całego układu.

*Dowód.* Policzymy przyspieszenie środka masy, czyli drugą pochodną położenia po czasie (pierwsza to prędkość, a zmiana prędkości w czasie to przyspieszenie).

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{a}_\mathrm{c} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \mathbf{a}_i = \frac{\sum \mathbf{F}_i}{\sum m_i}$$

Jeśli układ jest izolowany, czyli nie ma w sił zewnętrznych, to suma się zeruje i otrzymujemy

$$\mathbf{a}_\mathrm{c} = 0$$

■

**Wniosek 1.** W układzie COM wypadkowy pęd jest równy zero:

$$\sum \mathbf{p}'_i = \sum m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_\mathrm{c}) = \sum m_i\mathbf{v}_i - \sum m_i\mathbf{v}_i = 0$$

# 2 Układ nieinercjalny

**Definicja 3. Układ nieinercjalny** to taki, w którym ciała odczuwają pozorne siły bezwładności. Widzimy, że układ nieinercjalny musi się poruszać zmiennym ruchem względem inercjalnego.

Siły bezwładności wynikają tylko z ruchu układu odniesienia i ich przykładem jest siła odśrodkowa lub siła Coriolisa. Siła bezwładności wyraża się wzorem:

$$\mathbf{F}_\mathrm{b} = -m\mathbf{a},$$

gdzie $\mathbf{a}$ jest przyspieszeniem układu nieinercjalnego względem dowolnego układu inercjalnego.

# 3 Zmiana układu odniesienia – masa zredukowana

Załóżmy, że chcemy przejść z dowolnego inercjalnego układu odniesienia do układu, którego źródłem jest jedna z cząstek. Pozwoli to nam np. na redukcję ilości równań ruchu, albo po prostu spojrzenie na problem z innej perspektywy. W astrofizyce jest to bardzo istotne!

**Twierdzenie 2.** W układzie dwóch ciał, gdzie $\mathbf{a}_2$ jest przyspieszeniem względem inercjalnego układu odniesienia, a $\mathbf{a}_{21}$ jest przyspieszeniem ciała 2 względem 1, zachodzi związek:

$$\mathbf{a}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{a}_{21}$$

*Dowód.* Bez straty ogólności przyjmijmy, ze naszym układem inercjalnym jest COM. Wówczas:

$$m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 = 0$$

Zauważmy, że $\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$, co daje nam:

$$\mathbf{a}_2(m_2 + m_1) = m_1\mathbf{a}_{21}$$

a to jest już nasza teza. Analogicznie można znajdywać związki dla większych układów. Polecam przećwiczyć na przykładzie 3 ciał, a potem ogólnie $n$-ciał. ∎

**Wniosek 2** (Masa zredukowana)**.** Ruch jednego ciała względem drugiego możemy opisywać bardzo prosto, wprowadzając tzw. masę zredukowaną $\mu$, tj.:

$$\mathbf{F}_2 = \mu\mathbf{a}_{21} = \mu\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_{21}}{\mathrm{d}t^2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

# 4 Podstawowe układy współrzędnych w astronomii

## 4.1 Układ kartezjański

Siatka ortagonalna, dwie lub trzy współrzędne (2D lub 3D) opisujące długość wzdłuż osi: $(x, y, z)$. Przydatny do symulacji numerycznych i prostych zadanek z fizyki.

## 4.2 Układ polarny/biegunowy

Układ dwuwymiarowy, siatka ortagonalna, odległość od źródła + kąt: $(r, \phi)$. Ekstremalnie przydatny (niezbędny) do problemu dwóch ciał oraz wszelkich problemów o symetrii względem punktu.

**Transformacje**

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

## 4.3 Układ sferyczny

Układ trójwymiarowy, ortagonalny. W zasadzie to układ biegunowy z dodanym trzecim wymiarem, poprzez wprowadzenie drugiego kąta mierzącego „wysokość”: $(r, \phi, \theta)$.

**Transformacje**

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

W trygonometrii sferycznej (czysta astronomia) rezygnujemy z promienia $r$ uzyskując układ dwuwymiarowy, w którym punkty leżą na sferze (np. niebieskiej). Wtedy dobierając odpowiednio punkty odniesienia, od których mierzymy kąty otrzymujemy kilka bardzo ważnych układów: horyzontalny, biegunowy równonocny, biegunowy godzinny, ekliptyczny. Więcej o nich już wkrótce …;-)

## 4.4 Układ cylindryczny

Układ trójwymiarowy, ortagonalny. Praktycznie układ biegunowy z dodaną wysokością: $(r, \phi, z)$. Przydatny do opisu problemów o symetrii osiowej, czyli galaktyki, dyski, płaska ziemia itd.

**Transformacje**

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

# 5 Ruch po okręgu

Skoro jakieś ciało porusza się po okręgu w układzie inercjalnym to znaczy, że działa na nie jakaś siła, bo inaczej poruszałoby się po prostej linii. Teraz znajdziemy wzór na tę ogólną siłę, zwaną od teraz siłą dośrodkową.

Widzimy, że problem ma idealną symetrię punktową, więc wprowadzimy układ biegunowy. Nasze badane ciało porusza się po okręgu o promieniu $R$ z prędkością kątową $\omega = \mathrm{d}\phi/\,\mathrm{d}t$. Żeby policzyć siłę, potrzebujemy przyspieszenie, zatem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \hat{x}R\cos\phi + \hat{y}R\sin\phi \\
\mathbf{v} &= \hat{x}R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\phi) + \hat{y}R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\phi) \\
&= -\hat{x}R\omega\sin\phi + \hat{y}R\omega\cos\phi \\
\mathbf{a} &= -\hat{x}R\omega^2\cos\phi - \hat{y}R\omega^2\sin\phi \\
&= -\omega^2\mathbf{r}
\end{aligned}$$

**Wniosek 3.** Siła dośrodkowa wyraża się wzorem

$$\mathbf{F}_\mathrm{d} = -m\omega^2\mathbf{r}$$

Minus mówi o tym, że siła działa do wewnątrz okręgu, jako że $\mathbf{r}$ jest wektorem pozycyjnym skierowanym zawsze na zewnątrz.

Można też sobie definiować prędkość kątową jako pseudowektor, skierowany prostopadle do płaszczyzny ruchu:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{r^2}$$

Wtedy otrzymujemy kolejny wzór na siłę dośrodkową:

$$\mathbf{F}_\mathrm{d} = -\frac{mv_\perp^2}{r^2}\mathbf{r} = -\frac{mv_\perp^2}{r}\hat{r}$$

gdzie $v_\perp$ jest składową prędkości prostopadłą do promienia wodzącego.