Wykład 17: Wysmołkowa inżynierska karta wzorów

16 sty 2021 (Z wykładu 21)

Precesja koła Koło obraca się normalnie, wokół osi $\hat{x}$ przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do ramy. Ta oś jest zaczepiona prostopadle do sufitu, środek masy koła oddalony od linki ($\hat{z}$) na odległość r. Puszczamy koło i działa na nie grawitacja, która daje moment siły skierowany prostopadle do osi obrotu.

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= -rmg\,\hat{x} \times \hat{z} = rmg\,\hat{y} \\
\vec{L}_0 &= L\hat{x} \\
mgr\,\hat{y} &= \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Zmiana pędu $\mathrm{d}\vec{L}$ ma kierunek $\hat{y}$, prostopadły do kierunku momentu pędu, zatem wektor momentu pędu będzie się obracał, a oś przyczepiona do linki wraz z nim, zatem wektor momentu pędu będzie odbywał ruch po okręgu – moduł momentu pędu będzie zachowany. Możemy wprowadzić układ cylindryczny.

$$\begin{aligned}
mgre_\phi &= \frac{\mathrm{d}(Le_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}e_r + L\dot{\phi}e_\phi \\
L &= \text{const.} \\
mgr &= L\dot{\phi} \\
\dot{\phi} = \Omega &= \frac{mgr}{L}
\end{aligned}$$

Ω nazywamy częstością precesji.

Momenty bezwładności Płaska obręcz o promieniu R:

$$I = mR^2$$

Płaski krążek o promieniu R:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Jednorodna kula o promieniu R:

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Sfera o promieniu R:

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

Pręt o długości l, względem osi prostopadłej i przechodzącej przez środek masy:

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

Wahadło fizyczne Niech O będzie punktem zawieszenia, S środkiem masy, I_O momentem bezwładności względem O, $d = |SO|$.

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$$

Jaką długość l (długość zredukowana) musi mieć wahadło matematyczne, żeby mieć taki sam okres jak powyższe wahadło fizyczne?

$$l = \frac{I_O}{md}$$

Okres pozostanie taki sam, jeśli wahadło fizyczne powiesimy w odległości l od punktu O, tj. w punkcie O', gdzie $|OO'| = l$ dla współliniowych O, S, O'.
Ponadto, jeśli bryłę uderzymy w punkcie O', to wykona ona czysty obrót wokół punktu O. Jeśli uderzymy gdzie indziej, to dojdzie do tego ruch postępowy. Czysty ruch postępowy jest przy uderzeniu w środek masy.

(Z wykładu 22)

Wahadło torsyjne Mamy odkształcający się sprężyście drut o promieniu r i krążkową tackę o promieniu R i momencie I_0. Na tę tackę możemy zadziałać stycznym momentem siły $\vec{M}$. Definiujemy moment kierujący D jako $M = -D\alpha$. Dlaczego taka zależność ma sens to już kwestia właściwości odkształceń ścinających na drucie.

$$I_0 \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = M = -D\alpha$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

Mierząc okresy wahadeł torsyjnych dostajemy informację o momencie bezwładności zawieszonej bryły i własności sprężyste druta zawarte w D.

Ścinanie Naprężenie styczne:

$$\sigma_t = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}$$

gdzie F to siła działająca stycznie na bryłę, S to efektywna styczna powierzchnia działania F. Formulacja prawa Hooke'a:

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

gdzie γ to kąt odkształcenia (ścinania) a G to moduł sztywności. Z warunków równowagi możemy wyprowadzić wartość momentu ścinającego.
Naprężenie styczne cienkiej rurki o promieniu r i długości l:

$$\sigma_t = \frac{r\phi}{l} G$$

gdzie ϕ to kąt skręcenia względem prostopadłej płaszczyzny. Moment ścinający dla pełnego pręta o promieniu R i długości l:

$$M = \frac{G\phi}{l}\frac{\pi R^4}{2} = D\phi$$

Dla generalnych prętów moment kierujący jest wyrażony przez geometryczny moment bezwładności.

$$D = \frac{G}{l}J, \quad J = \int_S r^2 \, \mathrm{d}S$$

gdzie całka jest po przekroju pręta.

Sprężyna Dla sprężyny o ciasno nawiniętych zwojach o promieniach R_S, liczbie zwojów N długość drutu wynosi $l = 2\pi R_S N$. Promień drutu to r. Moment ścinający równoważy moment $M = R_S F$ siły zewnętrznej wzdłuż osi. Zmiana długości sprężyny przez ścinanie ma zależność: $\phi = \Delta x / R_s$. Stąd,

$$F = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N}\Delta x$$

Stąd siła równoważąca wewnątrz sprężyny wynosi:

$$F_s = -k\Delta x, \quad k = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N}$$

Rozciąganie Definiujemy wydłużenie względne jako $\varepsilon = \Delta l / l_0$. Prawo Hooke'a dla niewielkich odkształceń,

$$\sigma_n = \frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}S}$$
$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E}$$

gdzie tym razem siła jest normalna do powierzchni, a zatem rozciąga bryłę. E nazywamy modułem Younga. Wydłużenie względne i kąt ścinania łączy współczynnik Poissona:

$$\mu = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Zmiany objętości przy odkształceniach sprężystych Rozciąganie pręta:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sigma_n}{E}(1 - 2\mu)$$

Z doświadczenia podczas rozciągania objętość się zwiększa, zatem

$$\mu \leq \frac{1}{2}$$

Rozważmy sześcian umieszczony w obszarze stałego ciśnienia. Zapiszemy, że $\delta = -\kappa p = -p/K$, gdzie p to ciśnienie, κ to współczynnik ściśliwości, a K to moduł ściśliwości. Każda z krawędzi ulegnie skróceniu o czynnik $\left(1 - \frac{p}{E}\right)$, jednocześnie w kierunku poprzecznym będzie rozciągana i ulegnie wydłużeniu o czynnik $\left(1+\frac{\mu p}{E}\right)^2$. Długość krawędzi na końcu:

$$
\begin{aligned}
l &= l_0\left(1-\frac{p}{E}\right)\left(1+\frac{\mu p}{E}\right)^2 \\
-\delta &= \frac{3(1-2\mu)}{E}p \\
K &= \frac{E}{3(1-2\mu)}
\end{aligned}
$$

Dla izotropowego materiału mamy zależność między modułem sztywności, modułem Younga i współczynnikiem Poissona.

$$E = 2E(1+\mu)$$

Stąd, $\mu > -1$.

Ugięcie belki Belka ugina się pod wpływem momentu siły zewnętrznej F działającej na końcu belki. Podejść jest kilka. Możemy mierzyć kąt ugięcia ϕ. Niech belka ma długość l. Jeśli element ugiętej belki ma długość Δx, to moment sił sprężystości w belce wyniesie:

$$M = EJ\frac{\phi}{\Delta x}$$

Moment ten będzie równoważony przez moment siły zewnętrznej:

$$M = (l-x)F$$

Ugięcie całkowite możemy mierzyć poprzez odległość w osi z od najwyższego do najmniejszego punktu belki:

$$\Delta S = \phi(l-x)$$

Stąd,

$$S = \frac{1}{3}\frac{F}{EJ}l^3$$

gdzie J to oczywiście moment geometryczny (całkujemy po polu przekroju zamiast po masie). Im większy moment, tym trudniej belka się zagina. Tyle, że tu jest subtelność bo teraz momentu nie liczymy w symetrii osiowej tylko wzdłuż lokalnej osi zagięcia. Czyli jeśli byśmy mieli prostopadłościan o wysokości h i zagięcie zachodzi wzdłuż osi y, to całkujemy po przekroju w płaszczyźnie yz i rolę próbkujących ramion pełnią ramiona wychodzące od tej osi y. Oznacza to, że przykładowo rozważając przekrój pełnego cylindra, liczylibyśmy:

$$
\begin{aligned}
J &= \int_S h^2 \, \mathrm{d}S = \int_S r^2 \sin^2\phi \, \mathrm{d}S = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \\
&= \pi \int_0^R r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{4}
\end{aligned}
$$

Gdybyśmy liczyli w symetrii osiowej jak w przypadku wahadła, to wyszłoby inaczej:

$$J = \int_S r^2 \, \mathrm{d}S = 2\pi \int_0^R r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{2}$$

Belka podparta z dwóch końców i napinana siłą F w środku znacznie mniej się ugina:

$$S' = \frac{1}{3} \frac{(l/2)^2}{EJ} \frac{F}{2} = \frac{S}{16}$$

Można do problemu podejść też inaczej. Niech R będzie lokalnym promieniem krzywizny. Wówczas,

$$\Delta x = R\phi$$
$$M = EJ \frac{\phi}{\Delta x} = \frac{EJ}{R}$$

Przy wygięciu w jednym kierunku zachodzi związek:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \approx \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

co działa w przybliżeniu małych ugięć.

$$M(x) = EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Stąd, podstawiając zewnętrzne momenty sił, warunki brzegowe (przykładowo zerowe ugięcie i pierwsza pochodna w zerze) dostajemy kształt.