Analiza III R

Wykładowca:
dr hab. Katarzyna Grabowska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

1 Geometria różniczkowa **4**

Powtórka z Analizy II 4

Objętość kuli B_n 4

Pole powierzchni sfery n-wymiarowej 7

Strumień pola przez ramkę 8

Lemat Poincare 10

Forma pierwotna do 1-formy na $\mathbb{R}^2$ 11

Dowód Lematu Poincare 14

Szukanie potencjału wektorowego 17

Wstęp do twierdzenia Stokesa 18

Twierdzenie Stokesa 19

Rozmaitość z brzegiem 19

Gładki rozkład jedności 21

Dowód twierdzenia Stokesa 22

Klasyczne wersje twierdzenia Stokesa 23

2 Analiza zespolona **27**

Różniczkowanie w sensie zespolonym 27

Przekształcenia $\mathbb{C}$-liniowe 27

Różniczkowanie 28

Symbole $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 31

Funkcje holomorficzne 31

Własności funkcji holomorficznych 36

Dalsze wnioski o funkcjach holomorficznych 38

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Powtórka z Analizy II

16 paź 2020

Objętość kuli B_n

Obszar całkowania dany jest przez:

$$B_n = \left\{ \left(x^1, \ldots, x^n\right) : \sum_{n=1}^{n} (x^i)^2 \leq 1 \right\}$$

Objętość będzie dana przez całkę Riemanna z 1:

$$\int_{B_n} 1 \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n$$

Jak mamy współrzędne w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to mamy związane z nimi wektory **bazy standardowej** w przestrzeni stycznej: $\mathbb{R}^n\left(x^1, \ldots, x^n\right) \rightsquigarrow (\partial_1, \ldots, \partial_n)$.
Jak całkujemy to jest potrzebna jakaś miara objętości, np. iloczyn skalarny i w bazie st. jest on przyjemną macierzą diagonalną:

$$\left(\partial_i \mid \partial_j\right)_{\mathrm{st}} = [g]_{\mathrm{st}} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$$

Do całkowania jest nam potrzebna również kanoniczna forma objętości $\Omega_n = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ i wtedy przechodzimy z całki Riemanna do obiektu z geometrii różniczkowej:

$$\int_{B_n} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_{(B_n, \imath_+)} \Omega_n$$

Musimy najpierw zamienić zmienne na takie współrzędne wielo-sferyczne. Działają bardzo podobnie jak zwykłe biegunowe i sferyczne. A oto algorytm ich tworzenia.

Bierzemy najpierw st: $\left(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\right)$ i ruszając tylko ostatnie dwie zmienne przekształcamy je na biegunowe sf1: $\left(x^1, \ldots, x^{n-2}, r^{n-1}, \phi^{n-1}\right)$ takie, że:

$$\begin{cases} x^{n-1} = r^{n-1} \cos \phi^{n-1} \\ x^n = r^{n-1} \sin \phi^{n-1} \end{cases}$$

Teraz trzeba napisać macierz zamiany zmiennych czyli macierz identyczności z bazy sf1 do st. Wspomnienia z algebry:

Twierdzenie 1 (Zmiana formy dwuliniowej przy zmianie bazy)**.**

$$[g]^{\mathrm{sf1}}_{\mathrm{sf1}} = \left([\mathrm{id}]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{sf}}\right)^{\top} \quad [g]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}} \quad [\mathrm{id}]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{sf}}$$

$$\begin{array}{c}\text{iloczyn skalarny}\\ \text{w nowej bazie}\end{array} = \begin{array}{c}\text{macierz zamiany}\\ \text{zmiennych}\top\end{array} \cdot \begin{array}{c}\text{iloczyn skalarny}\\ \text{w starej bazie}\end{array} \cdot \begin{array}{c}\text{macierz zamiany}\\ \text{zmiennych}\end{array}$$

Dygresja. Można by tensorowo? Przy przejściu ze współrzędnych $\left(x^1, \dots, x^n\right)$ do $\left(x'^1, \dots, x'^n\right)$ mamy:

$$g'_{\nu'_1\nu'_2} = \sum_{\nu_1,\nu_2} g_{\nu_1\nu_2} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\nu'_2}}$$

Wracając do wcześniejszego liczenia, w układzie biegunowym mamy:

$$\begin{aligned}\partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y\\ &= \cos\phi \cdot \partial_x + \sin\phi \cdot \partial_y\\ \partial_\phi &= -r\sin\phi \cdot \partial_x + r\cos\phi \cdot \partial_y\end{aligned}$$

Wówczas w bazie standardowej,

$$[\partial_r]^{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{bmatrix}, \quad [\partial_\phi]^{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix}-r\sin\phi\\ r\cos\phi\end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z bazy do bazy składa się z wektorów nowej bazy zapisanej w starej bazie, czyli w naszym przypadku:

$$[\mathrm{id}]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{sf1}} = \mathrm{diag}(1, \dots, 1) \oplus \begin{bmatrix}\cos\phi^{n-1} & -r^{n-1}\sin\phi^{n-1}\\ \sin\phi^{n-1} & r^{n-1}\cos\phi^{n-1}\end{bmatrix} = M_1$$

Teraz robimy drugą zamianę bazy. Startujemy z sf1. Bierzemy dwie ostatnie współrzędne metryczne x^{n-2}, r^{n-1} i będą nowe współrzędne sf2: $\left(x^1, \dots, r^{n-2}, \phi^{n-2}, \phi^{n-1}\right)$ takie, że:

$$\begin{cases}x^{n-2} = r^{n-2}\cos\phi^{n-2}\\ r^{n-1} = r^{n-2}\sin\phi^{n-2}\end{cases}$$

przy czym $r^{n-2} \in (0, \infty)$, natomiast w odróżnieniu od $\phi^{n-1} \in (0, 2\pi)$, mamy $\phi^{n-2} \in (0, \pi)$. A jest tak dlatego, że $r^{n-1} > 0$, zatem większe argumenty sinusa by nam to psuły. W przejściu sf1 $\to$ sf2 zostaje taka sama ostatnia zmienna ϕ^{n-1} zatem

$$[\mathrm{id}]^{\mathrm{sf1}}_{\mathrm{sf2}} = \underbrace{\mathrm{diag}(1, \dots, 1)}_{(n-3)\times(n-3)} \oplus \begin{bmatrix}\cos\phi^{n-2} & -r^{n-2}\sin\phi^{n-2}\\ \sin\phi^{n-2} & r^{n-2}\cos\phi^{n-2}\end{bmatrix} \oplus \mathrm{diag}(1) = M_2$$

Możemy tak zamieniać dalej. Wtedy,

$$\begin{aligned}[g]^{\mathrm{sf2}}_{\mathrm{sf2}} &= M_2^\top [g]^{\mathrm{sf1}}_{\mathrm{sf1}} M_2\\ &= M_2^\top M_1^\top [g]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}} M_1 M_2\\ &= M_2^\top M_1^\top M_1 M_2\\ &= M_2^\top \left[\mathrm{diag}\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n-2} \oplus \mathrm{diag}\Big(1, \left(r^{n-1}\right)^2\Big)\right] M_2\end{aligned}$$

Zauważmy, że to pojedyncze przekształcenie de facto działa nam za każdym razem na jakieś dwa elementy z macierzy klatkowej.

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{diag}\Big(1, \dots, 1, \big(r^{n-2}\big)^2, \big(r^{n-1}\big)^2\Big) \\
&= \operatorname{diag}\Big(1, \dots, 1, \big(r^{n-2}\big)^2, \big(r^{n-2} \sin \phi^{n-2}\big)^2\Big)
\end{aligned}
$$

Widzimy już co się będzie działo jak będziemy dalej przesuwali sf2 do sf($n-1$): $\big(r, \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{n-1}\big)$, gdzie

$$
\begin{cases} x_1 = r \cos \phi^1 \\ r^2 = r \sin \phi^1 \end{cases}
$$

Wówczas,

$$
\begin{aligned}
[g]^{\mathrm{sf}(n-1)}_{\mathrm{sf}(n-1)} &= \begin{bmatrix} \cos \phi^1 & \sin \phi^1 \\ -r \sin \phi^1 & r \cos \phi^1 \end{bmatrix} \operatorname{diag}\Big(1, 1, \big(r^2\big)^2, \dots, \big(r^{n-1}\big)^2\Big) \begin{bmatrix} \cos \phi^1 & -r \sin \phi^1 \\ \sin \phi^1 & r \cos \phi^1 \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{diag}\Big(1, r^2, \big(r \sin \phi^1\big)^2, \big(r \sin \phi^1 \sin \phi^2\big)^2, \dots \big(r \sin \phi^1 \sin \phi^2 \cdots \sin \phi^{n-2}\big)^2\Big)
\end{aligned}
$$

Teraz bardzo łatwo policzymy wyznacznik macierzy diagonalnej:

$$
\sqrt{\det g} = r^{n-1} \big(\sin \phi^1\big)^{n-2} \cdots \big(\sin \phi^{n-2}\big)
$$

Przypomnijmy sobie pewną całkę:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^n \phi \, \mathrm{d}\phi &= -\sin^{n-1} \phi \cos \phi \Big|_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \cos^2 \phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \, \mathrm{d}\phi - (n-1) \int_0^\pi \sin^n \phi \, \mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

Dostajemy wzór rekurencyjny:

$$
(*) = \int_0^\pi \sin^n \phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \phi \, \mathrm{d}\phi
$$

Teraz rozważamy względem parzystości:

1. $n = 2k$

$$
\begin{aligned}
(*) &= \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} \int_0^\pi \sin^{2k-4} \phi \, \mathrm{d}\phi = \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 3}{2k(2k-2) \cdots 4} \int_0^\pi \sin^2 \phi \, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \pi
\end{aligned}
$$

2. $n = 2k+1$

$$
(*) = \frac{2k!!}{(2k+1)!!} \int_0^\pi \sin \phi \, \mathrm{d}\phi = 2 \cdot \frac{2k!!}{(2k+1)!!}
$$

Teraz możemy policzyć objętość kuli n-wymiarowej.

$$\Omega_n = r^{n-1}\big(\sin\phi^1\big)^{n-2}\cdots\big(\sin\phi^{n-2}\big)\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\phi^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\phi^{n-1}$$

W kategoriach całki Riemanna mamy zamianę zmiennych postaci:

$$\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n = \det(M_nM_{n-1}\cdots M_2M_1)\,\mathrm{d}r\cdots\mathrm{d}\phi^{n-1}$$

Nie robiliśmy tego w taki sposób, bo bezpośrednie mnożenie tych macierzy zamiany zmiennych jest bardzo kłopotliwe. Z formami różniczkowymi i iloczynem skalarnym wyszło prościej.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{2k} &= \int_0^R r^{2k-1}\,\mathrm{d}r\int_0^\pi\big(\sin\phi^1\big)^{2k-2}\,\mathrm{d}\phi^1\cdots\int_0^\pi\sin\phi^{2k-2}\,\mathrm{d}\phi^{2k-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi^{2k-1}\\
&= \frac{1}{2k}R^{2k}\cdot 2\pi\cdot\left(\begin{matrix}\text{te wszystkie współczynniki}\\ \text{co się poskracają}\end{matrix}\right) = R^{2k}\frac{1}{2k}\frac{1}{(2k-2)!!}\pi^k2^k\\
&= \frac{\pi^k}{k!}R^{2k}
\end{aligned}$$

To samo powtarzamy dla przypadku nieparzystego.

$$\mathrm{Vol}_{2k+1} = \frac{\pi^k2^{k+1}}{(2k+1)!!}R^{2k+1}$$

Pole powierzchni sfery n-wymiarowej

Wygodniej będzie liczyć pole $(n-1)$-wymiarowej sfery zanurzonej w $\mathbb{R}^n$.
Przepis na formę objętości:

1. Zanurzenie $\mathrm{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$
2. Metryka w $\mathbb{R}^n$
3. Obcięcie formy do S^{n-1}
4. Produkcja formy objętości i całkowanie.

Obcięcie oznacza ustalenie $r=R$. Wtedy przestajemy formę obliczać na wektorze $\mathrm{d}r$ i wymiar macierzy spada.

$$g_{|\mathrm{S}^{n-1}} = \mathrm{diag}\Big(R^2, \big(R\sin\phi^1\big)^2,\ldots,\big(R\sin\phi^1\cdots\sin\phi^{n-2}\big)^2\Big)$$

Pole powierzchni sfery to będzie całka z obciętej formy objętości:

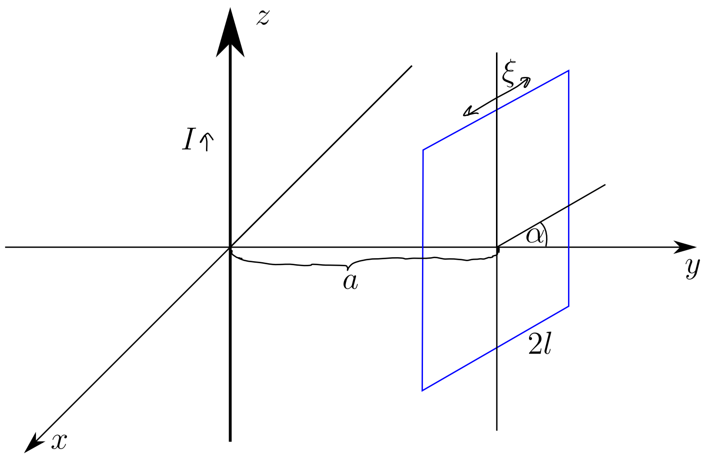
$$S = \int_{(\mathrm{S}^{n-1},\imath_+)}\Omega = \int_{(\mathrm{S}^{n-1},\imath_+)}\sqrt{\det g_{|\mathrm{S}^{n-1}}}\,\mathrm{d}\phi^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\phi^{n-1}$$

Rachunkowo to ta sama całka co poprzednio z pominięciem całki po r, wobec tego

$$= \begin{cases}\dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}R^{2k-1}, & n=2k\\[2ex] \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}R^{2k}, & n=2k+1\end{cases}$$

Przy czym pamiętamy, że n to wymiar przestrzeni, w której zanurzamy.

Strumień pola przez ramkę



Rysunek 1.1: ramka

Potencjał wektorowy $\vec{A}$ pola $\vec{B}$:

$$\vec{A}(x, y, z) = -K \log \sqrt{x^2 + y^2} \, \frac{\partial}{\partial z}$$
$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Strumień pola przez powierzchnię liczymy definiując pole normalne $\vec{n}$, wyznaczamy element powierzchni $\mathrm{d}\sigma$ i całkujemy po powierzchni Σ.

$$\int_\Sigma \left(\vec{n} \mid \vec{x}\right) \mathrm{d}\sigma$$

Wprowadźmy w otoczeniu Σ układ współrzędnych taki jaki byłby wygodny $\left(x^1, \ldots, x^n\right)$: $\Sigma = \left\{x^1 = 0\right\}$, $\|\partial_{x^1}\| = 1$, $\left(\partial_{x^1} \mid \partial_{x^i}\right) = 0$. Czyli $\vec{n} = \partial_{x^1}$. Wówczas rachunki są prostsze, bo metryka wygląda:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \implies \mathrm{d}\sigma = \sqrt{\det g} \, \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n$$

Weźmy nasze pole $\vec{x} = x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2 + \cdots + x^n \partial_n$. Z założenia mamy, że $\left(\vec{n} \mid \vec{x}\right) = x^1$, zatem:

$$\int_\Sigma \left(\vec{n} \mid x\right) \mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma x^1 \sqrt{\det g} \, \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n$$

Używając geometrii różniczkowej można prościej. Mamy powierzchnię zanurzoną $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ i formę objętości $\Omega = \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$.
Popatrzmy na pole wektorowe x zwężone z Ω (tensorowo $\Omega_{[a_1 \cdots a_n]} x^{a_1}$):

$$x \lrcorner \Omega = \sqrt{\det g}\big(x^1\, \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n - x^2\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n + \cdots \pm x^n\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1}\big)$$

Zauważmy, że na powierzchni Σ z wyżej wybranymi współrzędnymi $x^1 = 0$, zatem przy obcięciu formy Ω do powierzchni zerują się wszystkie wedge, które zawierają $\mathrm{d}x^1$.

$$x \lrcorner \Omega_{|\Sigma} = \sqrt{\det g} x^1\, \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

Licząc całkę z tej zwężonej formy,

$$\begin{aligned}\int_{(\Sigma,+)} x \lrcorner \Omega &= \int_{(\Sigma,+)} \sqrt{\det g} x^1\, \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \int_{\Sigma} x^1 \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n\end{aligned}$$

Wyrażenie po lewej stronie jest obiektem czysto geometrycznym i nie zależy od współrzędnych. Możemy więc olać tę metodę ze szczególnym układem i liczyć ten obiekt po lewej.

Wracając do naszego zadania. Mamy liczyć strumień pola $B = \operatorname{rot} A$ czyli chcemy całkować $B \lrcorner \Omega = \mathrm{d}G(A)$ (z definicji rotacji A), gdzie $G\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ jest iloczynem skalarnym. Użyjemy współrzędnych walcowych.

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = r\, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z$$

Liczymy $G(A)$ gdzie A było dane w wyżej.

$$\begin{aligned} G(A) &= -K \log r\, \mathrm{d}z \quad (\text{tensorowo } g_{ab}A^a = A_b) \\ \mathrm{d}G(A) &= -K\frac{1}{r}\, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}z = K\frac{1}{r}\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}r \end{aligned}$$

Musimy wprowadzić parametryzację ramki.

$$\begin{cases} y = a + \xi\cos\alpha \\ x = -\xi\sin\alpha \\ z = z \end{cases}, \quad \xi \in [-l, l],\ z \in [-l, l]$$

Formę zdefiniowaną na całym $\mathbb{R}^3$ musimy obciąć do samej ramki.

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ 2r\, \mathrm{d}r &= 2x\, \mathrm{d}x + 2y\, \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}r &= \frac{x}{r}\, \mathrm{d}x + \frac{y}{r}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{r}\Big(\xi\sin\alpha\big(\mathrm{d}\xi\big)\sin\alpha + (a + \xi\cos\alpha)\, \mathrm{d}\xi\cos\alpha\Big) \\ &= \frac{1}{r}(a\cos\alpha + \xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Teraz możemy liczyć dalej.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}G(A) &= K\frac{1}{r}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}G(A)_{|\Sigma} &= K\frac{1}{r}\,\mathrm{d}z \wedge \left(\frac{1}{r}(a\cos\alpha + \xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \\
&= \frac{1}{r^2}K(a\cos\alpha + \xi)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\xi \\
r^2 &= \xi^2 + a^2 + 2a\xi\cos\alpha
\end{aligned}$$

Liczymy ostatecznie całkę.

$$\begin{aligned}
\int_{(\Sigma,+)} \mathrm{d}G(A) &= \int_\Sigma -\frac{1}{r^2}K(a\cos\alpha + \xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\mathrm{d}z\int_{-l}^{l}\mathrm{d}\xi\,K\frac{2a\cos\alpha + 2\xi}{a^2 + 2a\xi\cos\alpha + \xi^2}
\end{aligned}$$

Licznik jest pochodną mianownika po ξ. Funkcja nie zależy też od z.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}2lK\ln\!\left(a^2 + 2al\cos\alpha + l^2\right)\Big|_{-l}^{l} \\
&= -Kl\ln\left(\frac{a^2 + 2al\cos\alpha + l^2}{a^2 - 2a\xi\cos\alpha + l^2}\right) \\
&= Kl\ln\left(\frac{a^2 + l^2 - 2al\cos\alpha}{a^2 + l^2 + 2al\cos\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Policzyliśmy strumień pola B bez liczenia pola B. Ale teraz to pole też możemy prosto wyliczyć bo znamy jego ogólną postać ze wzoru ze zwężeniem.

$$B = \frac{K}{r^2}\partial_\phi = \frac{K}{r}\vec{e}_\phi$$

Wykład 2: Lemat Poincare

19 paź 2020 Niech $\alpha \in \Omega^k(M)$. Jeśli $\mathrm{d}\alpha = 0$ to forma jest zamknięta. Jeśli $\alpha = \mathrm{d}\beta$ to forma jest zupełna. Poza tym $\mathrm{d}^2 = 0$. Stąd **każda forma zupełna jest zamknięta**.
Zadamy pytanie czy jest implikacja w drugą stronę oraz jak szukać formy pierwotnej.

Przykład zastosowania B, A oraz $B = \operatorname{rot} A$, czyli $B \lrcorner \Omega = \mathrm{d}G(A)$. Zatem szukanie formy pierwotnej sprowadza się do szukania potencjału wektorowego pola. Pole, które może mieć potencjał wektorowy to $\mathrm{d}(B \lrcorner \Omega) = \operatorname{div}(B) = 0$, czyli pole, które ma zerową dywergencję. $\operatorname{div} B$ jest formą zamkniętą i ma swój potencjał wektorowy, czyli jest formą zupełną.

$E = \operatorname{grad}\phi$, czyli $G(E) = \mathrm{d}\phi$. Forma, która jest różniczką (forma zupełna) ma z kolei zerową rotację. $\operatorname{rot} E \lrcorner \Omega = \mathrm{d}G(E) = \mathrm{d}^2\phi = 0$.

Przykład motywacyjny

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}, \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\
\mathrm{d}\alpha &= \mathrm{d}\left(\frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\right) - \mathrm{d}\left(\frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x - \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[y^2-x^2-y^2+x^2\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Forma α jest formą zamkniętą. Czy α jest formą zupełną? Jaka to funkcja?...

Forma pierwotna do 1-formy na $\mathbb{R}^2$

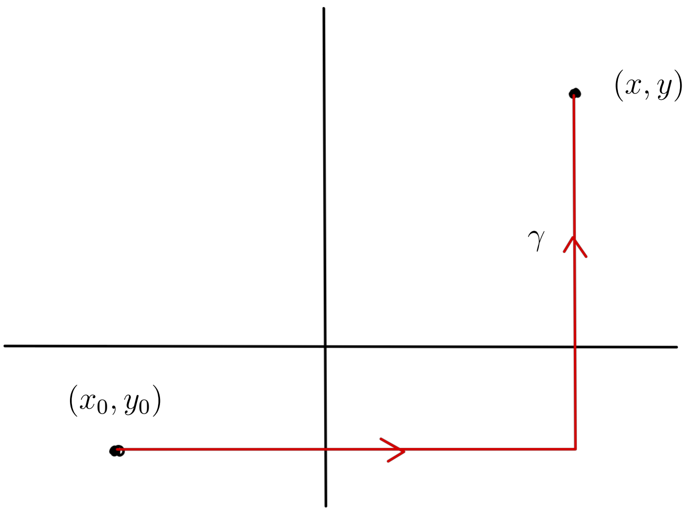
Najpierw najprostszy przypadek. Weźmy 1-formę $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{d}\beta = 0$. $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}
\beta &= f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y \\
\mathrm{d}\beta &= f_y(x,y)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + g_x(x,y)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= (g_x - f_x)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Stąd jest warunek na zerowanie się formy:

$$g_x = f_y$$

Weźmy $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{d}h = \beta$. Proponujemy to jako funkcję pierwotną dla formy β.



Rysunek 1.2: Ścieżka całkowania.

$$h(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Funkcje podcałkowe są gładkie, zatem są ciągłe i możemy używać twierdzeń dla całek z parametrem.

$$\mathrm{d}h = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} g(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$$

Przy różniczkowaniu funkcji podcałkowych dużo się upraszcza, zatem:

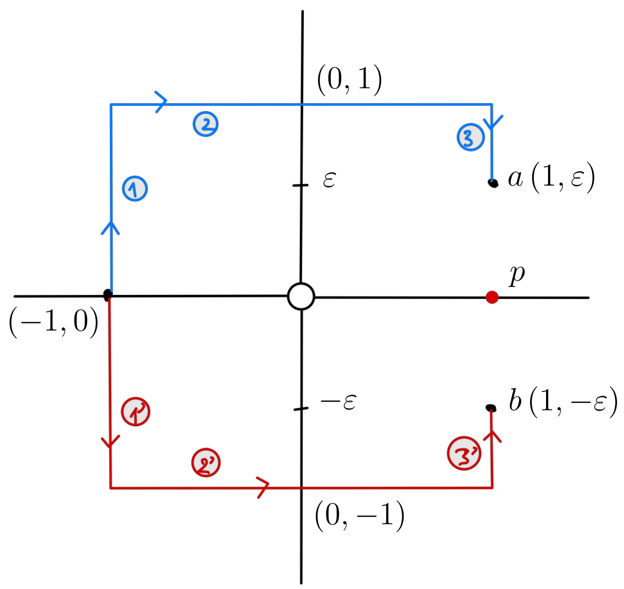
$$= \left[f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} g_x(x,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x + \left[g(x,y)\right]\mathrm{d}y$$

Warunek z góry możemy daje nam $g_x = f_y$.

$$\begin{aligned} &= \left[f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} f_t(x,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left[f(x,y_0) + f(x,y) - f(x,y_0)\right]\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = \beta \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że h jest funkcją pierwotną dla formy β. Przepis na tę formę obejmował całkowanie formy po pewnej arbitralnie ustalonej drodze. Cały rachunek zależał od tego gdzie się postawi (x_0, y_0). To wskazuje na fakt, że funkcja pierwotna nie jest jednoznacznie wyznaczona. Ustalanie początkowego punktu powoduje zmianę funkcji pierwotnej o stałą.

Teraz pora na jakiś przykład nie istnienia formy pierwotnej.



Rysunek 1.3: Dwie równoważne drogi całkowania.

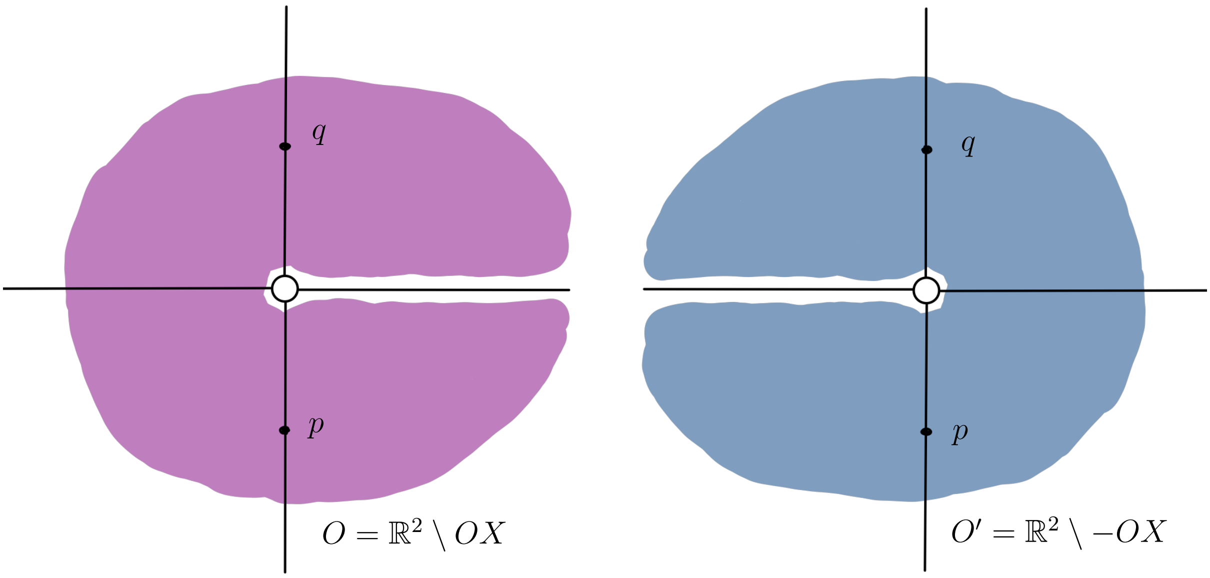
Weźmy formę $\alpha = \frac{y}{r^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{r^2}\,\mathrm{d}y$. Naturalnie ta forma jest zdefiniowana na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Liczymy pomocnicze całki.

$$\int \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C$$
$$\int \frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

$$\begin{aligned}
h(a) &= \underbrace{-\arctan\left(\frac{y}{-1}\right)\Big|_0^1}_{1} + \underbrace{\arctan\left(\frac{x}{1}\right)\Big|_{-1}^1}_{2} \underbrace{-\arctan\left(\frac{y}{1}\right)\Big|_1^{\varepsilon}}_{3} \\
&= -\arctan(-y)\Big|_0^1 + \arctan(x)\Big|_{-1}^1 - \arctan(y)\Big|_1^{\varepsilon} \\
&= \pi - \arctan\varepsilon \\
h(b) &= \underbrace{-\arctan(-y)\Big|_0^{-1}}_{1'} + \underbrace{\arctan(-x)\Big|_{-1}^1}_{2'} \underbrace{-\arctan(y)\Big|_{-1}^{\varepsilon}}_{3'} \\
&= -\pi + \arctan\varepsilon
\end{aligned}$$

Teraz dążymy do punktu p, zatem $a, b \xrightarrow{\varepsilon\to 0} p$. Otrzymujemy $h(a) \to \pi$ oraz $h(b) \to -\pi$. Dostajemy różne wyniki, zatem nasz przepis zawiódł. Okazuje się, że niezależnie od wybranego przepisu będzie źle.

Wprowadźmy sobie dwa biegunowe układy współrzędnych na tym obszarze.



Rysunek 1.4: Dwa biegunowe układy współrzędnych.

$$O\colon \begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}, \ \phi \in (0, 2\pi), \quad O'\colon \begin{cases} x = r'\cos\phi' \\ y = r'\sin\phi' \end{cases}, \ \phi' \in (-\pi, \pi)$$

Zauważmy, że nasza forma wyraża się w tych współrzędnych jako: $\alpha = -\,\mathrm{d}\phi = -\,\mathrm{d}\phi'$. Stąd,

$$h_0(r,\phi) = -\phi, \quad h_1\big(r',\phi'\big) = -\phi'$$

Gdyby istniała funkcja f której szukamy, dobrze określona na całym $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ to te funkcje h musiałyby się różnić od f o stałą: $f = h_0 + \phi_0 = h_1 + \phi_1$. Policzmy sobie $f(p)$ i $f(q)$.

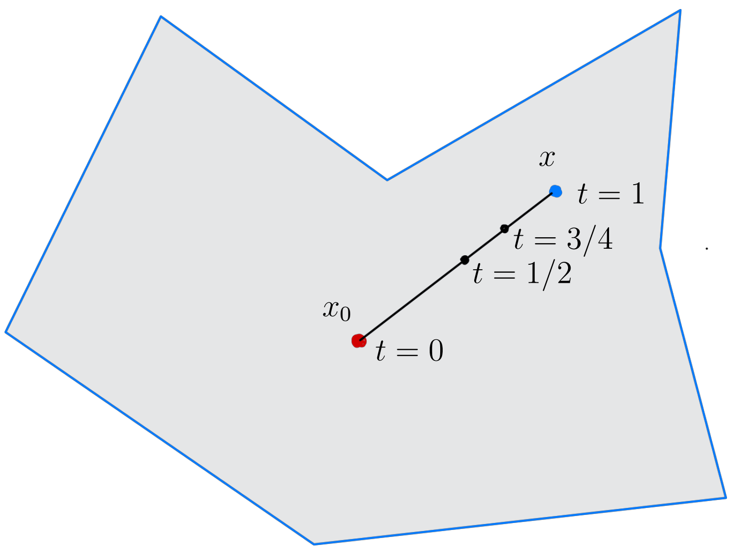
$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{3\pi}{2} + \phi_0 = -\frac{\pi}{2} + \phi_1 \\ \phi_1 &= \phi_0 + 2\pi \\ f(q) &= \frac{\pi}{2} + \phi_0 = \frac{\pi}{2} + \phi_1 \\ \phi_0 &= \phi_1 \end{aligned}$$

To jest sprzeczność. Nie da się więc dobrać takich stałych, aby dostać funkcję określoną na całym $\mathbb{R}^2$ (dla tej formy). Czyli dla formy α nie istnieje funkcja pierwotna. Widzimy więc, że nie zawsze da się znaleźć formę pierwotną. Muszą być jakieś nietrywialne założenia. Póki co widzimy, że jeśli 1-forma jest określona na całym $\mathbb{R}^2$ to da się znaleźć funkcję pierwotną, ale jeśli mamy wyjęty punkt $(0,0)$ to nie musi się dać.

Wykład 3: Dowód Lematu Poincare

23 paź 2020

Definicja 1 (Obszar gwiaździsty)**.** Obszar nazywamy gwiaździstym względem punktu x_0, jeśli wraz z każdym punktem x zawiera cały odcinek łączący x i x_0.



Rysunek 1.5: Obszar gwiaździsty.

Twierdzenie 2 (Lemat Poincare)**.** Każda forma zamknięta α: $\mathrm{d}\alpha = 0$ na obszarze gwiaździstym w $\mathbb{R}^n$ jest zupełna, czyli $\alpha = \mathrm{d}\beta$.
Wystarczy, żeby zbiór był gwiaździsty względem dowolnego punktu.
Dla dowolnych powierzchni zbiór musi być ściągalny.

Dowód. Dowód jest konstruktywny, czyli zapewnia nam metodę szukania takich form pierwotnych. Niech O – obszar gwiaździsty w $\mathbb{R}^n$ względem 0, otwarty. Definiujemy odwzorowanie F :

$$[0,1] \times O \ni (t,x) \overset{F}{\mapsto} tx \in O$$

Przykładowo, $F(1\cdot,) = \mathrm{id}_O$, $F(0,\cdot) = 0$. Generalnie, F nosi nazwę odwzorowania ściągającego. Potrzebujemy jeszcze odwzorowania na przestrzeni form różniczkowych.

$$\Omega^{k+1}\big([0,1] \times O\big) \xrightarrow{K} \Omega^k(O)$$

Jest to liniowe odwzorowanie ze względu na mnożenie przez liczby (nie przez funkcje). Możemy oddzielnie zdefiniować 2 typy form, które mogą się pojawić.

$$a(t,x)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$
$$b(t,x)\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_{k+1}}$$

Dla tego drugiego rodzaju form odwzorowanie znika:

$$K\Big(b(t,x)\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_{k+1}}\Big) = 0$$

Dla pierwszego rodzaju,

$$K\Big(a(t,x)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\Big) = \left(\int_0^1 a(t,x)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

Będziemy chcieli udowodnić, że $\mathrm{d}K(F^*\alpha) + K(\mathrm{d}F^*\alpha) = \alpha$. Teraz po prostu sprawdzamy rachunkowo ten wzór. $\alpha = \alpha\big(x^1, \cdots, x^n\big)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \in \Omega^k(O)$.

Zaczniemy od pullbacku formy α.

$$F^*\alpha = \alpha\big(tx^1, \cdots, tx^n\big)\,\mathrm{d}tx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathrm{d}tx^{i_k}}_{t\mathrm{d}x^{i_k} + x^{i_k}\mathrm{d}t}$$

Mamy iloczyn zewnętrzny, zatem pojawiają się wyrazy albo z 1 $\mathrm{d}t$ albo t w ogóle się nie pojawia.

$$= \underbrace{\alpha(tx)t^k\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}}_{\text{nie daje wkładu do } K} + \sum_{m=1}^{k} t^{k-1}x^{i_m}(-1)^{m-1}\alpha(tx)\,\mathrm{d}t \wedge \underbrace{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}}_{\text{bez } i_m}$$

Teraz liczymy następną rzecz:

$$K(F^*\alpha) = \sum_{m=1}^{k}(-1)^{m-1}\left(\int_0^1 x^{i_m}\alpha(tx)t^{k-1}\,\mathrm{d}t\right) \underbrace{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}}_{\text{bez } i_m}$$

Teraz różniczkujemy po x:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}K(F^*\alpha) &= \sum_{n=1}^{k} \underbrace{(-1)^{m-1}}_{\text{znika}} \left(\int_0^1 \alpha(tx) t^{k-1}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_m} \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^j \wedge \underbrace{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}}_{\text{bez } i_m} \\
&= k \left(\int_0^1 \alpha(tx) t^{k-1}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} + \binom{\text{druga}}{\text{część}}
\end{aligned}$$

Teraz liczymy różniczkę $\mathrm{d}F^*\alpha = F^*\,\mathrm{d}\alpha$.

$$\begin{aligned}
F^*\,\mathrm{d}\alpha &= F^* \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \right) \\
&= t^{k+1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}(tx)\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} + t^k \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}(tx) x^j\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&\quad + t^k \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}(tx) x^{i_m} (-1)^m\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \underbrace{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{ik}}_{\text{bez } i_m}
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik nie daje wkładu do K.

$$\begin{aligned}
K(\mathrm{d}F^*\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 x^j t^k \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} (-1)^m x^{i_m} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^j \wedge \underbrace{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{ik}}_{\text{bez } i_m}
\end{aligned}$$

Tak! Jakby jeszcze nie było tego widać, policzyliśmy oba składniki dowodzonej tożsamości. Teraz trzeba je dodać. Te części zawierające podwójne sumy są jednakowe z dokładnością do znaku. W związku z tym, te części mają znak przeciwny. Po dodaniu się zerują. Zostaje wówczas:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}K(F^*\alpha) + K(\mathrm{d}F^*\alpha) &= k \left(\int_0^1 \alpha(tx) t^{k-1}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 x^j t^k \frac{\partial\alpha}{\partial x^j}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&= \left\{ \int_0^1 \left[k t^{k-1} \alpha(tx) + t^k \sum_{j=1}^{n} x^j \frac{\partial\alpha}{\partial x^j} \right] \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&= \left\{ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big(t^k \alpha(tx) \Big)\,\mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&= t^k \alpha(tx) \Big|_0^1 \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\
&= \alpha(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} - 0 = \alpha
\end{aligned}$$

Dowiedliśmy tego wzoru. Sprawdźmy co, jeśli $\mathrm{d}\alpha = 0$. Wówczas,

$$K(\mathrm{d}F^*\alpha) = K(F^*\,\mathrm{d}\alpha) = 0$$

W związku z tym,

$$\alpha = \mathrm{d}K(F^*\alpha)$$

Otrzymaliśmy więc wzór na formę pierwotną β.

Wniosek 1.

$$\beta = K(F^*\alpha)$$

$\blacksquare$

Najlepszą metodą liczenia formy pierwotnej jest jej zgadnięcie. Metoda liczenia z lematu jest ciężka. Policzymy to sobie.

Szukanie potencjału wektorowego

Znaleźć potencjał wektorowy dla pola:

$$B(x,y,z) = (x+y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+z)\frac{\partial}{\partial y} + (y-z)\frac{\partial}{\partial z}$$

Mówimy, że B ma potencjał wektorowy jeśli $B = \operatorname{rot} A$. Wiemy, że $\operatorname{rot} A \lrcorner \Omega = \mathrm{d}G(A)$. B może więc mieć potencjał wektorowy, gdy $\mathrm{d}(B\lrcorner\Omega) = 0$, czyli $(\operatorname{div} B)\Omega = 0$. Policzmy więc dywergencję naszego pola.

$$\operatorname{div} B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 1 + 0 - 1 = 0$$

Pole jest określone na całym $\mathbb{R}^3$, możemy więc skorzystać z lematu Poincare. W naszym przypadku pole przerobimy na formę zwężając je z formą objętości na $\mathbb{R}^3$.

$$\omega = B\lrcorner\Omega = (x+y)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (x+z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (y-z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Szukamy formy pierwotnej do powyższej formy. Forma pierwotna powinna być postaci $K(F^*\omega)$.

$$\begin{aligned}
F\colon [0,1] \times \mathbb{R}^3 &\ni (t,x,y,z) \mapsto (tx,ty,tz) \in \mathbb{R}^3 \\
F^*\omega &= (tx+ty)\,\mathrm{d}(ty) \wedge \mathrm{d}(tz) + (tx+tz)\,\mathrm{d}(tz) \wedge \mathrm{d}(tx) + (ty-tz)\,\mathrm{d}(tx) \wedge \mathrm{d}(ty) \\
&= t^2(x+y)y\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z - t^2(x+y)z\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y + t^3(x+y)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&\quad + t^2(x+z)z\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x - t^2(x+z)x\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z + t^3(x+z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + t^2(y-z)x\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y - t^2(y-z)y\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x + t^3(y-z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Wyrażenia bez $\mathrm{d}t$ nie dają wkładu do K. Porządkujemy to, co ma $\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
&= t^2\big(xy + y^2 - x^2 - xz\big)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z + t^2(-xz - yz + xy - xz)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \\
&\quad + t^2\big(xz + z^2 - y^2 + yz\big)\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)
\end{aligned}$$

Liczymy całkę pomocniczą: $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$.

$$K(F^*\omega) = \frac{1}{3}\big(xz + z^2 - y^2 + yz\big)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}(xy - 2xz - yz)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{3}\big(xy + y^2 - x^2 - xz\big)\,\mathrm{d}z$$

Teraz należałoby sprawdzić, że to jest dobra forma pierwotna, bo lemat Poincare jest błędogenny. Załóżmy, że to sprawdziliśmy i się zgadza.
Pytano o potencjał wektorowy, więc musimy przejść do postaci wektorowej.

$$A = G^{-1}(\alpha)$$

Na szczęście we współrzędnych kartezjańskich iloczyn G i G^{-1} są takie same, zatem:

$$A = \frac{1}{3}\big(xz + z^2 - y^2 + yz\big)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}(xy - 2xz - yz)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{3}\big(xy + y^2 - x^2 - xz\big)\frac{\partial}{\partial z}$$

Definicja 2 (Ściąganie do punktu a)**.** Uwaga! Jeśli nie ściągamy do punktu 0, tylko $a \in \mathbb{R}^n$, to odwzorowanie ściągające definiujemy następująco:

$$[0,1] \times O \ni (t,x) \overset{F}{\mapsto} a + t(x-a) \in O$$

Wstęp do twierdzenia Stokesa

Zacznijmy od rachunku motywacyjnego. Jesteśmy na $\mathbb{R}^2$. Biorę jakąkolwiek 1-formę.

$$\alpha = f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}\alpha = \big[g_x(x,y) - f_y(x,y)\big]\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

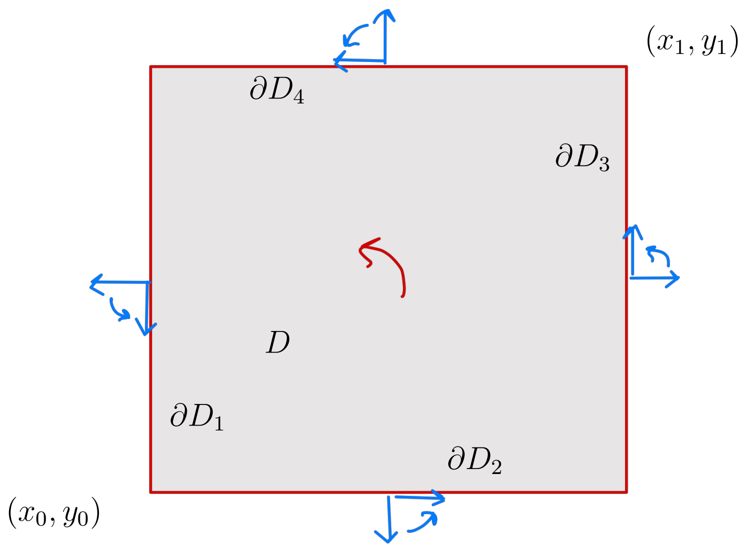
Będziemy liczyli całkę z tej formy po prostokącie.

$$\begin{aligned}
\int_{(D,+)} \mathrm{d}\alpha &= \int_{(D,+)} \big[g_x - g_y\big]\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \int_D \big(g_x - f_y\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_D g_x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \int_D f_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}y \int_{x_0}^{x_1} g_x(x,y)\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x \int_{y_0}^{y_1} f_y\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}y\,\big[g(x_1,y) - g(x_0,y)\big] - \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}x\,\big[f(x,y_1) - f(x,y_0)\big] \\
&= \int_{y_0}^{y_1} g(x_1,y)\,\mathrm{d}y + \int_{y_1}^{y_0} g(x_0,y)\,\mathrm{d}y + \int_{x_1}^{x_0} f(x_1,y)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} f(x,y_0)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Jak się spojrzy to widać, że odpowiednie całki odpowiadają całkowaniu po brzegach naszego prostokąta.

$$= \int_{(\partial D_3,\partial+)} \alpha + \int_{(\partial D_1,\partial+)} \alpha + \int_{(\partial D_4,\partial+)} \alpha + \int_{(\partial D_2,\partial+)} \alpha$$

Orientację dobieramy tak, że pierwszy wektor rysuję na zewnątrz obszaru, dobieram drugi tak by orientacja była taka sama jak wyjściowa, wtedy drugi wektor wskazuje kierunek całkowania.



Rysunek 1.6: prostokat

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Stokesa)**.** Niech M będzie zwartą zorientowaną powierzchnią z brzegiem wymiaru n i niech ω będzie $(n-1)$-formą na M. Wówczas,

$$\int_{(M,\imath)} \mathrm{d}\omega = \int_{(\partial M, \partial\imath)} \omega$$

Wykład 4: Twierdzenie Stokesa

26 paź 2020

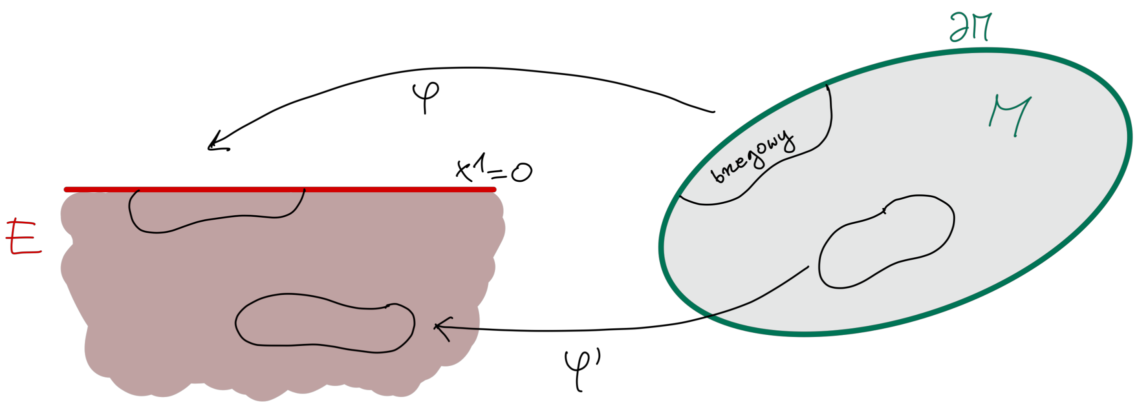
Rozmaitość z brzegiem

Wzorcową rozmaitość z brzegiem nazwalibyśmy podzbiór $E \subset \mathbb{R}^n$: $E = \left\{(x^1, \ldots, x^n) \colon x^1 \leq 0\right\}$, gdzie zbiory otwarte w E to zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ przecięte z E. Brzeg takiej rozmaitości określilibyśmy jako $\partial E = \left\{x^1 = 0\right\}$. Możemy mieć dwa typy zbiorów otwartych:

- $O \cap E = O$ (zwykły)
- $U \cap E \neq U$ (zawiera kawałek brzegu)

Dwa typy zbiorów otwartych odpowiadają dwóm typom układów współrzędnych – brzegowy lub wewnętrzny.

Definicja 3 (Gładka rozmaitość z brzegiem)**.** M jest gładką rozmaitością z brzegiem, jeśli dla każdego $q \in M$ istnieją zbiory otwarte $V \subset M$ i $U \subset E$ oraz homeomorfizm $\phi \colon V \to U$ taki, że jeśli $V \cap V' \neq \varnothing$, odwzorowanie $\phi' \circ \phi^{-1}$ jest gładkie tam, gdzie określone.



Rysunek 1.7: Rozmaitość z brzegiem.

Wniosek 2. ∂M jest gładką rozmaitością bez brzegu.

Dowód. Jeśli $(V_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ jest atlasem na M, to możemy wybrać tylko te układy brzegowe i zdefiniować otwarte pokrycie brzegu: $(\tilde{V_\beta}, \phi_\beta)_{\beta\in B}$ gdzie $\tilde{V_\beta} = V_\beta \cap \partial M$, $B = \{\alpha \in A\colon V_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing\}$ jest atlasem ∂M. Dostajemy zwyczajną rozmaitość z wymiarem o 1 mniejszym. ∎

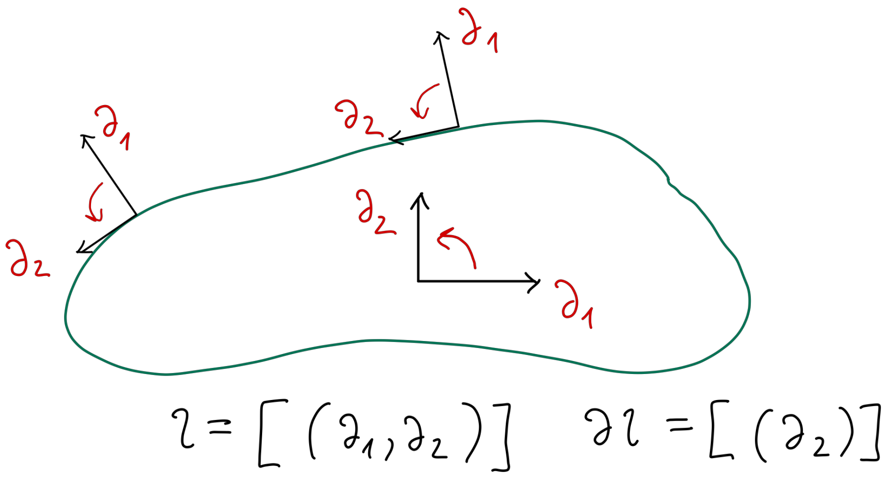
Twierdzenie 4. M jest orientowalna, czyli można wybrać na niej atlas zgodny – takie pokrycie dziedzinami układów współrzędnych, że macierze przejścia między poszczeglnymi bazami mają dodatni wyznacznik. Wówczas ∂M też jest orientowalna.

Dowód. Bierzemy dowolne dwa układy brzegowe, o pewnym przecięciu. Obcinamy je do samego brzegu i patrzymy czy wyznacznik macierzy przejścia między nimi jest dodatni. Macierz przejścia to obcięta macierz przejścia między całymi układami na M o cały pierwszy rząd i kolumnę ($x^1 = 0 = y^1$). Skoro cała wyjściowa macierz ma dodatni wyznacznik i a_{11} jest dodatnie, to cała obcięta podmacierz też ma dodatni wyznacznik. ∎

Skoro ∂M też jest orientowalna, to opisujemy orientację indukowaną jako tą, ktora powstaje poprzez usunięcie pierwszych współrzędnych x^1, y^1.

Definicja 4 (Orientacja indukowana)**.** Posługując się klasami równoważności,

$$\imath = \left[(\partial_{x^1}, \partial_{x^2}, \ldots, \partial_{x^n})\right]$$
$$\partial\imath = \left[(\partial_{x^2}, \ldots, \partial_{x^n})\right]$$



Rysunek 1.8: Orientacja 1-wymiarowego brzegu.

Gładki rozkład jedności

Definicja 5. Gładkim rozkładem jedności na M związanym z atlasem $(O_i, \phi_i)_{i\in I}$ nazywamy układ gładkich funkcji $(\alpha_i)_{i\in I}$ o własnościach:

1. $\operatorname{supp} \alpha_i \subset O_i$
2. każdy punkt $q \in M$ ma otoczenie U takie, że $U \cap \operatorname{supp} \alpha_i \neq \varnothing$ jedynie dla skończonej liczby indeksów i.
3. $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\forall p \in M \ \sum_{i\in I} \alpha_i(p) = 1$

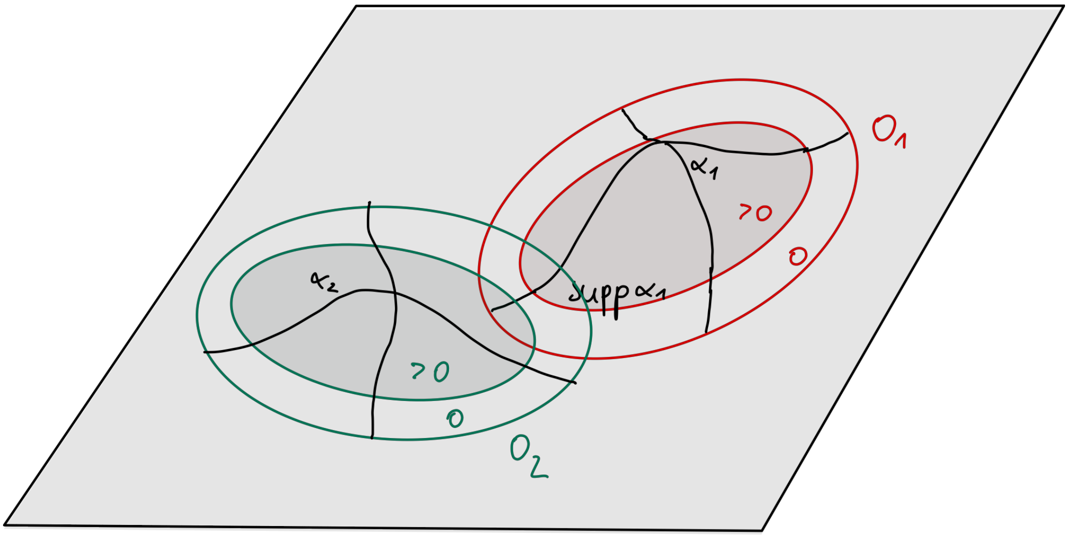
Definicja 6 (Rozmaitość parazwarta)**.** Dla każdego pokrycia otwartego istnieje drobniejsze od niego pokrycie lokalnie skończone – każdy punkt rozmaitości ma otoczenie otwarte, które ma niepusty przekrój jedynie ze skończoną liczbą elementów tego pokrycia.

Twierdzenie 5 (bez dowodu)**.** Na rozmaitości parazwartej istnieje gładki rozkład jedności.

Gładki rozkład jedności może się nam przydać do całkowania po dużych obszarach.
Co jeśli obszar całkowania D nie mieści się całkowicie w jednym układzie współrzędnych?

$$\int_{(D,\imath)} \omega = \int_{(D,\imath)} \omega \sum_{j\in J} \alpha_j = \sum_{j\in J} \int_{(O_j \cap D, \imath)} \alpha_j \omega$$

gdzie $O_j \cap D \neq \varnothing$ jedynie dla skończonej liczby indeksów, bo D jest zwarty.



Rysunek 1.9: Gładki rozkład jedności.

Ciekawostka Do konstrukcji gładkich rozkładów jedności używa się funkcji gładkich o zwartym nośniku, takich jak:

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\right), & x \in (1,2) \\ 0, & x \notin (1,2) \end{cases}$$

Dowód twierdzenia Stokesa

Niech M będzie zwartą rozmaitością z brzegiem. $(O_i, \phi_i)_{i \in I}$ jest skończonym atlasem zgodnym, z orientacją. Mamy też odpowiedni rozkład jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$.

Dowód.

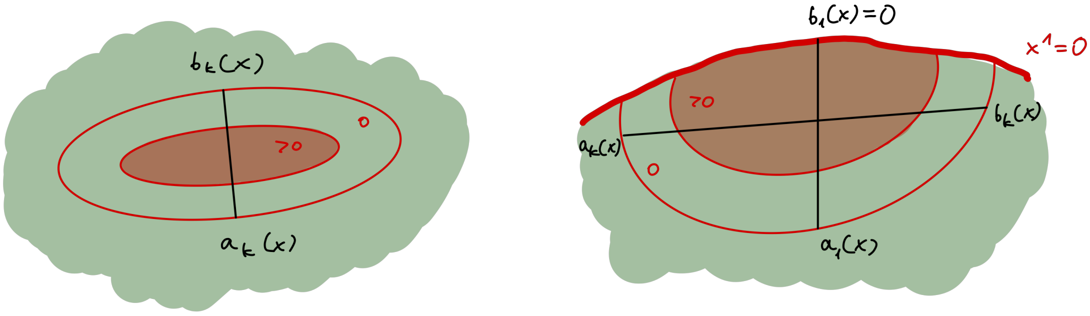
$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(1 \cdot \omega) = \mathrm{d}\left(\omega \sum \alpha_i\right) = \sum_i \mathrm{d}(\alpha_i \omega)$$

$$\int_{(M,\imath)} \mathrm{d}\omega = \sum \int_{(O_i,\imath)} \mathrm{d}(\alpha_i \omega)$$

Różniczkowane formy można zapisać w odpowiednich układach współrzędnych. $\alpha_i \omega = f_k^i(x)\, \mathrm{d}x_i^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_i^n$, gdzie indeks k oznacza, że nie ma $\mathrm{d}x_i^k$. Dla każdego i liczymy osobno.

$$\begin{aligned}\int_{(\phi_i(O_i),\imath)} \mathrm{d}\left(f_k^i(x)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\right) &= \int_{(\phi_i(O_i),\imath)} \sum_k (-1)^{k-1} \frac{\partial f_k^i}{\partial x^k} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \sum_k (-1)^{k-1} \int_{\phi_i(O_i)} \frac{\partial f_k^i}{\partial x^k} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n \\ &= \sum_k (-1)^{k-1} \int_{D_k} \underbrace{\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n}_{\text{bez } x^k} \int_{a_k(x^2,\ldots)}^{b_k(x^2,\ldots)} \frac{\partial f_k^i}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k = (*)\end{aligned}$$

Jeśli układ współrzędnych jest wewnętrzny, to $f_k^i = 0$ poza zwartym zbiorem, czyli na granicach całkowania. Tak samo wygląda sytuacja, gdy układ jest brzegowy, ale całkujemy po zmiennej innej niż x^1. Wkład niezerowy dostajemy więc tylko dla układu brzegowego i $k = 1$.



Rysunek 1.10: Możliwe obszary i granice całkowania.

Zobaczmy co się dzieje dla $k = 1$. Wówczas całkować kończymy na brzegu, zatem $b_k(x) = b_1(x) = 0$.

$$\int_{D_1} \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n \int_{a_1(x)}^{b_1(x)} \frac{\partial f_1^i}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 = \int_{D_1} \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n\, f_1^i(0, x^2, \ldots, x^n)$$

$$\int_{(M,\imath)} \mathrm{d}\omega = \sum_i (*) = \sum_i \int_{\phi_i(O_i)\cap\left\{x^1=0\right\}} f_1^i(0, x^2, \ldots, x^n)\,\mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n$$

Rozkład jedności obcięty do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu.

$$= \sum_i \int_{(O_i\cap\partial M,\partial\imath)} (\alpha_i\omega)(0,\ldots)$$
$$= \int_{(\partial M,\partial\imath)} \omega$$

∎

Klasyczne wersje twierdzenia Stokesa

Definicja 7 (Klasyczne operatory)**.** Niech $\Omega = \sqrt{\det G}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$ będzie formą objętości.

Gradient $\mathrm{grad}(f)$:

$$\mathrm{grad}(f) = G^{-1} \circ \mathrm{d}f$$

Dywergencja $\mathrm{div}(X)$:

$$\mathrm{div}(X)\Omega = \mathrm{d}(X \lrcorner \Omega)$$

Rotacja $\mathrm{rot}(A)$:

$$\mathrm{rot}(A) \lrcorner \Omega = \mathrm{d}(G \circ A)$$

Laplasjan Δf:

$$(\Delta f)\Omega = \mathrm{d}\big[(G^{-1} \circ \mathrm{d}f) \lrcorner \Omega\big]$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego-Greena

$$\int_D \mathrm{div}\, X\, \mathrm{d}\vartheta = \int_{\partial D} (\vec{n} \mid X)\, \mathrm{d}\sigma$$

gdzie $\dim D = 3$.

Dowód. Przetłumaczamy pojawiające się wyrażenia na język form różniczkowych.
$\mathrm{d}\vartheta$ – element objętości, czyli forma objętości Ω,
$\mathrm{d}\sigma$ – element powierzchni, czyli forma objętości na powierzchni związana z $g\big|_{\partial D}$ i orientacją indukowaną – Σ. Wzór przyjmuje postać:

$$\int_{(D,\imath)} (\mathrm{div}\, X)\Omega = \int_{(\partial D, \partial\imath)} (\vec{n} \mid X)\Sigma$$

$$\int_{(D,\imath)} (\mathrm{div}\, X)\Omega = \int_{(D,\imath)} \mathrm{d}(X \lrcorner \Omega) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{(\partial D, \partial\imath)} X \lrcorner \Omega$$

Formy objętości definiujemy we współrzędnych. Wybierzmy współrzędne takie, że w dziedzinie O układu mamy:

$$O \cap \partial D = \big\{x^1 = 0\big\}, \quad \vec{n} = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \mid \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$$

dla $i > 1$. Jeśli nie uda się to na całym D, to korzystamy wówczas z rozkładu jedności.

$$\Omega = \sqrt{\det G}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

$$\Sigma = \sqrt{\det G\,\big|_{\partial D}}\,\mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

Oba wyznaczniki są jednak równe.

$$X \lrcorner \Omega = \sqrt{\det G}\big(X^1\,\mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n - X^2\,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n + \cdots\big)$$

Wszystkie człony z $\mathrm{d}x^1$ są zerowe, bo obcięliśmy do $x^1 = 0$.

$$\begin{aligned}\int_{(\partial D,\partial\imath)} X \lrcorner \Omega &= \int_{(\partial D,\partial\imath)} X^1\sqrt{\det G}\,\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n\\ &= \int_{(\partial D,\partial\imath)} (\vec{n}\mid X)\Sigma = \int_{\partial D}(\vec{n}\mid X)\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

■

Klasyczne twierdzenie Stokesa

$$\int_S (\vec{n}\mid \operatorname{rot} X)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial S}(\vec{t}\mid X)\,\mathrm{d}l$$

gdzie $\dim S = 2$, $\vec{n}$ jest wektorem normalnym do powierzchni, $\vec{t}$ wektorem stycznym do krzywej będącej brzegiem powierzchni, a $\mathrm{d}l$ elementem długości tej krzywej.

Dowód. Dowodząc poprzedniego twierdzenia udało nam się ustalić, że:

$$\int_S (\vec{n}\mid A)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{(S,\imath)} A\lrcorner\Omega$$

Weźmy więc $A = \operatorname{rot} X$.

$$\begin{aligned}\int_S (\vec{n}\mid \operatorname{rot} X)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{(S,\imath)} \operatorname{rot} X\lrcorner\Omega = \int_{(S,\imath)} \mathrm{d}(G\circ X)\\ &\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{(\partial S,\partial\imath)} G\circ X\end{aligned}$$

Weźmy dowolny układ współrzędnych i rozpiszmy: $G\circ X = g_{ij}X^i\,\mathrm{d}x^j$. Wybierzmy również parametryzację brzegu, zgodną z orientacją: $I\ni r\mapsto \big(x^1(r), x^2(r), x^3(r)\big)\in\partial S$.

$$\int_{(\partial S,\partial\imath)} G\circ X = \int_I g_{ij}(r)X^i(r)\dot{x}^j\,\mathrm{d}r$$

Policzmy jednostkowy wektor styczny $\vec{t}$ i inne pojawiające się wyrażenia:

$$\begin{aligned}\partial_r &= \dot{x}^1\partial_1 + \dot{x}^2\partial_2 + \dot{x}^3\partial_3 = \|\partial_r\|\vec{t}\\ g_{ij}X^i\dot{x}^j &= (X\mid\partial_r) = (X\mid\vec{t})\|\partial_r\|\\ \mathrm{d}l &= \|\partial_r\|\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Stąd,

$$\int_{(\partial S,\partial\imath)} G\circ X = \int_I (\vec{t}\mid X)\|\partial_r\|\,\mathrm{d}r = \int_{\partial S}(\vec{t}\mid X)\,\mathrm{d}l$$

■

Wzory Greena

$$\int_D (\operatorname{grad} f \mid \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}\vartheta = -\int_D f\Delta h\, \mathrm{d}\vartheta + \int_{\partial D} f(\vec{n} \mid \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}\sigma$$
$$\int_D (f\Delta h - h\Delta f)\, \mathrm{d}\vartheta = \int_{\partial D} \big[f(\vec{n} \mid \operatorname{grad} h) - h(\vec{n} \mid \operatorname{grad} f)\big]\, \mathrm{d}\sigma$$

Dowód. Wzór drugi jest trywialnym następstwem pierwszego, skupimy się więc na udowodnieniu pierwszego z nich.

$$\int_{\partial D} f(\vec{n} \mid \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial D} (\vec{n} \mid f \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}\sigma$$

Z twierdzenia, Ostrogradskiego-Greena,

$$= \int_D \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}\vartheta$$

Przyjrzyjmy się tej dywergencji,

$$\operatorname{div}(fX)\Omega = \mathrm{d}\big[(fX)\lrcorner\Omega\big] = \mathrm{d}\big[f(X\lrcorner\Omega)\big] = \mathrm{d}f \wedge (X\lrcorner\Omega) + f\,\mathrm{d}(X\lrcorner\Omega)$$

Przyjrzyjmy się pewnemu wyrażeniu, które się zaraz przyda:

$$0 = X\lrcorner(\mathrm{d}f \wedge \Omega) = \langle \mathrm{d}f\,, X\rangle\Omega - \mathrm{d}f \wedge (X\lrcorner\Omega)$$

Stąd, w wyżej rozważanej dywergencji rozpoznajemy,

$$\operatorname{div}(fX)\Omega = \langle \mathrm{d}f\,, X\rangle\Omega + f \operatorname{div}(X)\Omega$$

Teraz można przekształcić całkę.

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}\vartheta &= \int_D \langle \mathrm{d}f\,, \operatorname{grad} h\rangle\, \mathrm{d}\vartheta + \int_D f \operatorname{div} \operatorname{grad} h\, \mathrm{d}\vartheta \\ &= \int_D (\operatorname{grad} f \mid \operatorname{grad} h)\, \mathrm{d}\vartheta + \int_D f\Delta h\, \mathrm{d}\vartheta\end{aligned}$$

■

Rozdział 2

Analiza zespolona

Wykład 5: Różniczkowanie w sensie zespolonym

30 paź 2020

Przekształcenia $\mathbb{C}$-liniowe

$\mathbb{C}$ można traktować jak dwuwymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ lub jednowymiarową przestrzeń wektorową nad $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ jako zbiór to jest $\mathbb{R}^2$, zatem:

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

Jak różniczkować funkcje $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ doskonale wiemy.

$$f(x+\delta x, y+\delta y) = f(x,y) + f'(x,y)\begin{bmatrix}\delta x \\ \delta y\end{bmatrix} + R(\ldots)$$

Ta pochodna to jest odwzorowanie $L\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\big)$, czyli macierz 2×2. Ale można też na to spojrzeć w ujęciu 1-wymiarowej przestrzeni nad $\mathbb{C}$. Odwzorowania liniowe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polegają na mnożeniu przez liczbę zespoloną: $z \mapsto wz$. Każde odwzorowanie $\mathbb{C}$-liniowe jest $\mathbb{R}$-liniowe. Niech $w = a + ib$, $z = x + iy$.

$$x + iy \mapsto (a+ib)(x+iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Spróbujmy to zapisać jako mnożenie macierzy.

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{bmatrix}$$

Czyli odwzorowania $\mathbb{C}$-liniowe to są szczególne odwzorowania $\mathbb{R}$-liniowe zapisane takimi macierzami.

$$\psi\colon \mathbb{C} \to L\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\big) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
$$a + ib \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie to ma szczególne własności:

$$\det\big(\psi(a+ib)\big) = |a+ib|^2$$
$$\psi(a+ib) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Innymi słowy, jest to skalowanie + obrót, tzn. złożenie jednokładności z obrotem.

Różniczkowanie

Z punktu widzenia rzeczywistego, możemy zapisać:

$$f\big(x+\delta x + i(y+\delta y)\big) = f(x+iy) + f'(x+iy)\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} + R(x+iy, \delta x + i\delta y)$$
$$f'(x+iy) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Definicja 8 (Różniczkowalność w sensie rzeczywistym)**.** f jest różniczkowalna w punkcie $z = x+iy$ (w sensie rzeczywistym) jeśli istnieje $f'(z)$, czyli odwzorowanie $\mathbb{R}$-liniowe $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że reszta spełnia:

$$\frac{\big|R(x+iy, \delta x + i\delta y)\big|}{|\delta x + i\delta y|} \xrightarrow{\delta x + i\delta y \to 0} 0$$

Definicja 9 (Różniczkowalność w sensie zespolonym)**.** f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w $z = x+iy$ jeśli jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym i $f'(z)$ jest odwzorowaniem $\mathbb{C}$-liniowym.

Oznacza to, że:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Te dwie równości nazywamy warunkami Cauchy'ego-Riemanna. Wówczas,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} f'(z) = a + ib &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \cdots \end{aligned}$$

Przykład $f\colon z \mapsto z^2$

$$
\begin{aligned}
(x+iy)^2 &= \underbrace{\left(x^2-y^2\right)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{2xy}_{v(x,y)} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \\
f'(z) &= \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} \\
f'(z) &= 2x + i2y = 2z
\end{aligned}
$$

Czyli de facto,

$$(z^2)' = 2z$$

Czy działa stary wzór na pochodną z granicą ilorazu różnicowego? Na $\mathbb{R}^2$ iloraz różnicowy niezbyt da się zapisać, ale na $\mathbb{C}$ już tak. Pytamy czy:

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$$

Okazuje się, że rzeczywiście ten wzór działa.

Twierdzenie 6. f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w punkcie z $\iff$ istnieje granica ilorazu różnicowego. Wówczas granica ta jest pochodną $f'(z)$.

Dowód. Najpierw w prawo.

$$
\begin{aligned}
f(z+\delta z) &= f(z) + f'(z)\delta z + R(z,\delta z) \\
f(z+\delta z) - f(z) &= f'(z)\delta z + R(z,\delta z) \\
\frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} &= f'(z) + \frac{R(z,\delta z)}{\delta z}
\end{aligned}
$$

Teraz chcemy przejść do granicy przy $\delta z \to 0$. Wiadomo, że wartość bezwzględna tej reszty rzeczywiście dąży do 0.

$$\left|\frac{R(z,\delta z)}{\delta z}\right| \xrightarrow{\delta z \to 0} 0$$

Jednakże jeśli moduł liczby zespolonej dąży do zera to również sama liczba zespolona dąży do zera. Stąd,

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} = f'(z)$$

Teraz dowodzimy w drugą stronę. Załóżmy, że:

$$w = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$$

$$
\begin{aligned}
\forall_{\varepsilon > 0}\, \exists_{\Delta > 0}\colon |\delta z| < \Delta \implies \left| w - \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z} \right| &< \varepsilon \\
\left| \frac{1}{\delta z}\left(w\delta z - f(z+\delta z) + f(z) \right) \right| &< \varepsilon \\
\left| \underbrace{f(z+\delta z) - f(z) - w\delta z}_{R(z,\delta z)} \right| &< \varepsilon \delta z
\end{aligned}
$$

Wynika stąd, że $R(z, \delta z) \in K(0, \varepsilon\delta z)$, czyli $\frac{R(z,\delta z)}{\delta z} \in K(0, \varepsilon)$. Oznacza to, że w granicy:

$$\left|\frac{R(z, \delta z)}{\delta z}\right| < \varepsilon$$

Jest to tożsame z warunkiem zanikania reszty, zatem funkcja jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym oraz $f'(z) = w$. Ponieważ ta pochodna jest mnożeniem przez liczbę zespoloną to widzimy, że spełniony jest warunek różniczkowalności w sensie zespolonym. ■

Przykłady

$$z \mapsto z^3$$

$$\frac{(z + \delta z)^3 - z^3}{\delta z} = \frac{3z^2\delta z + 3z(\delta z)^2 + (\delta z)^3}{\delta z} = 3z^2 + 3z\delta z + (\delta z)^2$$

$$\to 3z^2$$

Wszystko przebiega tak samo jak było w $\mathbb{R}$. Sprawdźmy teraz funkcję „specyficznie" zespoloną.

$$z \mapsto \overline{z}$$

$$\frac{\overline{z + \delta z} - \overline{z}}{\delta z} = \frac{\overline{z} + \overline{\delta z} - \overline{z}}{\delta z} = \frac{\overline{\delta z}}{\delta z}$$

I teraz tutaj może być różnie. Jeśli $\delta z = \delta x$, czyli jeśli zmierzamy wzdłuż osi rzeczywistej, to zmierzamy do 1. Jeśli natomiast $\delta z = i\delta y$, to

$$\frac{\overline{\delta z}}{\delta z} = \frac{-i\delta y}{i\delta y} = -1$$

Stąd wniosek, że ta pochodna nie istnieje. W sensie zespolonym funkcja ta nie jest różniczkowalna, natomiast w sensie rzeczywistym jest.

Definicja 10 (Funkcja holomorficzna)**.** Funkcję różniczkowalną w sensie zespolonym w każdym punkcie obszaru otwartego Ω nazywamy holomorficzną na Ω. Zbiór funkcji holomorficznych oznaczamy przez $\mathcal{A}(\Omega)$.

Wniosek 3. Obowiązują „zwykłe" prawa różniczkowania, znane z $\mathbb{R}$.

Wniosek 4. $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ jest bijekcją, to $f^{-1} \in \mathcal{A}\big(f(\Omega)\big)$.
Z twierdzenia o lokalnej odwracalności dla reprezentacji $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f^{-1} jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym oraz $(f^{-1})'(w) = 1/f'(z)$, $w = f(z)$. Trzeba jeszcze wtedy sprawdzić, że macierz $1/f'(z)$ również odpowiada mnożeniu przez liczbę zespoloną.

Symbole $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Będziemy myśleć o $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. W tym $\mathbb{R}^2$ mamy kanoniczny układ współrzędnych (x, y). W każdym punkcie $z = (x, y) = x + iy$ możemy rozważyć przestrzeń styczną $\mathrm{T}_z\mathbb{R}^2 = \mathrm{T}_z\mathbb{C} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$. Jest to rzeczywista przestrzeń wektorowa.

Druga interpretacja – wektory styczne to pewne operatory różniczkowania działające na funkcje $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Czy da się je rozszerzyć na funkcje o wartościach zespolonych? Musi zachodzić podstawowy warunek:

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

Weźmy $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $g(z) = U(x, y) + iV(x, y)$. Zdefiniujmy sobie:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Zaczynamy sprawdzanie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(fg) &= \frac{\partial}{\partial x}\big[(u + iv)(U + iV)\big] = \frac{\partial}{\partial x}\big[uU - vV + i(uV + vU)\big] \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}U + u\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}V - v\frac{\partial V}{\partial x} + i\left[\frac{\partial u}{\partial x}V + u\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}U + v\frac{\partial U}{\partial x}\right] \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)U + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(iV) + (u + iv)\frac{\partial U}{\partial x} + (u + iv)\frac{\partial V}{\partial x}i \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(U + iV) + (u + iv)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}
\end{aligned}$$

Udało nam się więc rozszerzyć $\partial/\partial x$ na funkcje o wartościach w $\mathbb{C}$.

$\mathrm{T}_z\mathbb{C} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ zawiera różniczkowania funkcji $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ różniczkowalnych w sensie rzeczywistym. Teraz rozważamy kompleksyfikację $(\mathrm{T}_z\mathbb{C})^{\mathbb{C}} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{C}}$ – współczynniki mogą być zespolone. W szczególności mogę użyć innej bazy:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

Wykład 6: Funkcje holomorficzne

02 lis 2020

Definicja 11 (Kompleksyfikacja)**.** Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ wymiaru $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. W iloczynie kartezjańskim $V \times V$ wprowadzamy mnożenie przez liczbę zespoloną:

$$(x + iy)(v, w) = (xv - yw, yv + xw)$$
$$V^{\mathbb{C}} = (V \times V, \mathbb{C}, \circ, +)$$

$$(\mathrm{T}_z\mathbb{C})^{\mathbb{C}} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

Weźmy $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $f = u + iv$. Liczymy,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0} + i\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{0} = 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2i\frac{\partial u}{\partial y} \\
&= 2f'(z)
\end{aligned}$$

Stąd wynika pomysł, by wprowadzić oznaczenie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Wówczas, $\partial f/\partial z = f'(z)$ oraz $\partial f/\partial \overline{z} = 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&\qquad = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\right)\right)
\end{aligned}$$

Pochodne mieszane się zerują, zatem

$$= \frac{1}{4}\Delta$$

Stąd,

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$$

Część rzeczywista i urojona laplasjanu funkcji holomorficzcznych znika i takie funkcje u, v na $\mathbb{R}^2$ nazywamy harmonicznymi.

Jak będzie wyglądała baza dualna? Niech $a, c \in \mathbb{C}$. Nakładamy warunki, by:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y\,, \partial_z \rangle = \frac{1}{2}(a - ib) \\
0 &= \langle a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y\,, \partial_{\overline{z}} \rangle = \frac{1}{2}(a + ib)
\end{aligned}$$

Po rozwiązaniu, $a = 1$, $b = i$ a zatem:

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$$

Analogicznie,

$$\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$$

Taka jest baza przestrzeni dualnej. Możemy więc myśleć o formach o wartościach zespolonych, całkować je po krzywych. Możemy też różniczkować zewnętrznie. Rozważmy to.

Weźmy $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ różniczkowalną w sensie rzeczywistym.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \mathrm{d}\big(u(x,y) + iv(x,y)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + i\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x + i\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Podmieniamy $\mathrm{d}x\,, \mathrm{d}y$ na bazy dualne.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right]\mathrm{d}\overline{z} \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z}\right]\mathrm{d}z + \left[\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}\right]\mathrm{d}\overline{z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}\end{aligned}$$

Widzimy, że algebraicznie to wszystko się nam pięknie zbiera do czegoś co intuicyjnie ma dla nas sens. Co jeśli f byłaby holomorficzna? Wówczas $\partial f/\partial\overline{z} = 0$, zatem

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

Wiemy już, że możemy różniczkować formy. Zastanówmy się, czy możemy je całkować.

Przykład Weźmy formę/funkcję $f(z) = z^2\,\mathrm{d}z$. Mamy krzywą γ, będącą ćwiartką okręgu jednostkowego $r(t) = e^{it}$, $t \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z &= \int_0^{\pi/2} (e^{it})^2\,\mathrm{d}(e^{it}) = \int_0^{\pi/2} e^{2it} i e^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{\pi/2} e^{3it}\,\mathrm{d}t \\ &= i\int_0^{\pi/2} \big(\cos(3t) + i\sin(3t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= i\left[\frac{1}{3}\sin(3t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}i\cos(3t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = -\frac{1}{3}i - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Teraz policzymy różniczkę szczególnej formy – takiej, której współczynnikiem jest funkcja holomorficzna.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(z)\,\mathrm{d}z &= \mathrm{d}\Big[\big(u(x,y) + iv(x,y)\big)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)\Big] \\
&= \mathrm{d}[u\,\mathrm{d}x + iu\,\mathrm{d}y + iv\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y] \\
&= -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Teraz patrzę, że mam funkcję holomorficzną, czyli:

$$= 0$$

Stąd prosty wniosek.

Wniosek 5. Jeśli $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ to $f(z)\,\mathrm{d}z$ jest zamknięta.

Ma to dalekosiężne konsekwencje. Niech $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Bierzemy regularny obszar (nadający się do całkowania – zwarty, z brzegiem kawałkami krzywą gładką) $D \subset \Omega$.

Twierdzenie 7.

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Dowód. Z twierdzenia Stokesa:

$$\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{(D,+)} \mathrm{d}\big(f(z)\,\mathrm{d}z\big) = 0$$

■

Wniosek 6. Niech Ω będzie obszarem jednospójnym. Weźmy $a, z \in \Omega$. $\gamma\colon a \to z$. Wówczas,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

nie zależy od krzywej, tylko od końców krzywej.

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Twierdzenie 8 (Giacinto Morera)**.** Jeśli f jest ciągła na Ω i $\displaystyle\int_a^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ nie zależy od drogi dla dowolnych $a, z \in \Omega$, to

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

jest holomorficzna oraz

$$F'(z) = f(z)$$

Dowód.

$$\begin{aligned} F(z+\delta z) - F(z) &= \int_a^{z+\delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_a^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_z^{z+\delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

Niech $\zeta = z + t\delta z$, $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\zeta &= \delta z\,\mathrm{d}t \\ \frac{F(z+\delta z) - F(z)}{\delta z} &= \frac{1}{\delta z}\int_0^1 f(z+t\delta z)\delta z\,\mathrm{d}t \\ \lim_{\delta z\to 0}\frac{F(z+\delta z) - F(z)}{\delta z} &= \lim_{\delta z\to 0}\int_0^1 f(z+t\delta z)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Jest to całka zwarta z parametrem. Warunek wejścia z granicą pod znak całki jest taki, żeby f była ciągła jako funkcja trzech zmiennych $(t, \delta x, \delta y)$. Funkcja jest holomorficzna, zatem jest ciągła.

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \lim_{\delta z\to 0} f(z+t\delta z)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z) \end{aligned}$$

To kończy dowód. ■

Wniosek 7 (Wzór Cauchy'ego)**.** $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $D \subset \Omega$. $a \in \mathrm{Int}(D)$. Wówczas,

$$2\pi i f(a) = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z-a} &\in \mathcal{A}\big(\Omega \setminus \{a\}\big) \\ 0 &= \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z + \oint_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z \\ \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z &= \oint_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Niech $z = a + re^{i\phi}$. $\mathrm{d}z = rie^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\phi})}{a+re^{i\phi}-a} rie^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi \\ &= i\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\phi})\,\mathrm{d}\phi \overset{\text{def}}{=} F(r) \end{aligned}$$

Ostatnia całka nie zależy od r.

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} F(r) &= \lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\phi})\,\mathrm{d}\phi \\ &= i\int_0^{2\pi} f(a)\,\mathrm{d}\phi = 2\pi i f(a) \end{aligned}$$

To kończy dowód. ■

Znając wartości funkcji na brzegu jestem w stanie wyliczyć wartości funkcji holomorficznej w każdym punkcie wewnątrz obszaru! Funkcje holomorficzne są bardzo „sztywne”. Wynika stąd na przykład, że nie istnieją funkcje holomorficzne o zwartych nośnikach.

Wykład 7: Własności funkcji holomorficznych

06 lis 2020

Zadanie 1 Mamy kontur $C = \{z \in \mathbb{C} \colon |z+i| = 3\}$. $C = \partial K(-i,3)$. Orientację nadajemy dodatnią. Obliczyć całkę $\oint_C \frac{\sin z}{z+i}\,\mathrm{d}z$.

$$\oint_C \frac{\sin z}{z+i}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{\sin z}{z-(-i)} \overset{?}{=} 2\pi i \sin(-i)$$

Można użyć twierdzenia Cauchy'ego, jeśli sin w dziedzinie zespolonej jest holomorficzny. Zapiszmy to w taki sposób,

$$\begin{aligned} \sin(x+iy) &= \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) \\ \sin\alpha &= \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \\ \cos\alpha &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \end{aligned}$$

Zapostulujmy, że te wzory są również spełnione dla $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos(iy) &= \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y \\ \sin(iy) &= \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\sinh y \end{aligned}$$

Stąd,

$$\sin(z) = \underbrace{\sin(x)\cosh(y)}_{u(x,y)} + i\underbrace{\cos(x)\sinh(y)}_{v(x,y)}$$

Sprawdzamy warunki C-R.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y$$

Równania C-R są spełnione, zatem tak zdefiniowana funkcja sin zmiennej zespolonej jest funkcją holomorficzną. Zadanie zatem sprowadza się do policzenia:

$$\sin(-i) = i\sin(i) = -i\sinh(1) = -i\frac{e-e^{-1}}{2}$$
$$\oint_C \frac{\sin z}{z-(-i)} = \pi\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Zadanie 2 Treningowe wstępne zadanie dotyczące funkcji holomorficznych. Mamy daną $v(x,y) = \dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$. Sprawdzić, czy v może być częścią urojoną funkcji holomorficznej? Znaleźć tę funkcję.

To sprawdzenie sprowadza się do sprawdzenia czy $\Delta v = 0$, bo jeśli f jest holomorficzna, to jej części Re oraz Im są harmoniczne. Można sprawdzić, że Laplasjan, rzeczywiście się zeruje. Przejdźmy od razu do szukania funkcji. Trzeba sprawdzić $C-R$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-2(x+1)y}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}\\
u(x,y) &= \int \frac{2(x+1)y}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}\,\mathrm{d}y = (x+1)\int\frac{y\,\mathrm{d}y}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}\\
&= (x+1)\frac{-1}{(x+1)^2+y^2} + g(x)
\end{aligned}$$

Funkcję g można odnaleźć z drugiego zestawu równań $C-R$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= g'(x) - \frac{\left[(x+1)^2+y^2\right] - 2(x+1)(x+1)}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}\\
&= g'(x) - \frac{y^2-(x+1)^2}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}
\end{aligned}$$

Porównuję z drugą pochodną,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(x+1)^2+y^2-2y^2}{[\cdots]^2} = \frac{(x+1)^2-y^2}{[\cdots]^2}$$

Stąd,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 0\\
g(x) &= z_0 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Wobec tego, jak wygląda nasza funkcja f?

$$f(x+iy) = \frac{-(x+1)+iy}{(x+1)^2+y^2} + z_0 = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) \end{array} \right| =$$

Powinno dać się to sprowadzić do postaci funkcji od $z \in \mathbb{C}$. Jeśli się nie uda, to znaczy, że gdzieś popełniliśmy błąd. My bądźmy sprytniejsi. Zauważmy, że mianownik to moduł z przesuniętej o 1.

$$= \frac{-\overline{(z+1)}}{(z+1)\overline{(z+1)}} + z_0 = \frac{-1}{z+1} + z_0$$

Funkcja ta jest nie określona w punkcie $z = -1$.

Dalsze wnioski o funkcjach holomorficznych

Weźmy $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $z \in \Omega$ oraz $\gamma(t) = \zeta(t) + i\eta(t)$, $t \in [a,b]$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f\big(\xi(t)+i\eta(t)\big)}{\xi(t)+i\eta(t)-z} \Big(\dot{\xi}(t) + i\dot{\eta}(t)\Big) \,\mathrm{d}t \stackrel{\text{def}}{=} F(x,y)$$

Różniczkując w tym przypadku mogę wejść z operatorem pod znak całki,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{\big(\gamma(t)-x-iy\big)^2} \dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}t \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{\big(\gamma(t)-x-iy\big)^2} (-1)(-i)\dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}t \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

Ta pochodna jest różniczkowalna w sposób ciągły w sensie rzeczywistym, ponieważ istnieją wszystkie ciągłe pochodne cząstkowe. Chcemy sprawdzić, czy jest to różniczkowalne w sensie zespolonym. Sprowadza się to do policzenia pochodnej uzyskanego f' po $\partial/\partial\overline{z}$. Okazuje się, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = 0$$

zatem f' jest holomorficzna. Zabawę można kontynuować i otrzymać:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Wniosek 8. Każda funkcja holomorficzna jest różniczkowalna w sensie zespolonym nieskończenie wiele razy.

Wniosek 9. $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $K(a,r) \subset \Omega$

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{K(a,r)} f(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\int_{K(a,r)} f(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \left|\begin{matrix} z = a + \rho e^{i\phi} \\ x = \mathrm{Re}(a) + \rho\cos\phi \\ y = \mathrm{Im}(a) + \rho\sin\phi \end{matrix}\right| \\ &= \int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\phi})\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Teraz zauważamy, że drugą część całki iterowanej można policzyć z twierdzenia Cauchy'ego.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial K(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = \left|\begin{matrix} \zeta = a + \rho e^{i\phi} \\ \mathrm{d}\zeta = \rho i e^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi \end{matrix}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho r^{i\phi})\,\mathrm{d}\phi$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int_{K(a,r)} f(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho\, 2\pi f(a) \\ &= \pi f(a) r^2\end{aligned}$$

Nazywamy to (kolejnym) twierdzeniem o wartości średniej. ∎

Wniosek 10 (Nierówność Cauchy'ego)**.** $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $K(a,r) \subset \Omega$

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!}{r^n} \sup_{z=a+re^{i\phi}} \left|f(z)\right|$$

Dowód. Zapisujemy wzór na n-tą pochodną funkcji holomorficznej dla obszaru będącym naszym kołem.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial K(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

Parametryzujemy okrąg jak zwykle,

$$\begin{aligned}&= \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\phi})}{r^{n+1}e^{(i\phi)(n+1)}} r e^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{n!}{2\pi i r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\phi})e^{-ni\phi}\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Dostawiam moduły i kontynuuję rachunki.

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(a)\right| &= \frac{n!}{2\pi r^n}\left|\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\phi})e^{-ni\phi}\,\mathrm{d}\phi\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|f(a+re^{i\phi})\right|\mathrm{d}\phi \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^n}2\pi\sup_{\partial K}\left|f(z)\right|\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 9 (Twierdzenie Liouville'a)**.** Funkcja holomorficzna na całym $\mathbb{C}$ i ograniczona jest stała.

Dowód. Niech $M \in \mathbb{R}$ będzie ograniczeniem funkcji, czyli $\left|f(z)\right| < M$. Weźmy $\zeta \in \mathbb{C}$ i dowolne $r > 0$.

$$\left|f^{(n)}(\zeta)\right| \leftarrow \frac{n!}{r^n}\sup_{z=\zeta+re^{i\phi}}\left|f(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n}M$$

Ponadto $1/r^n$ jest dowolnie małe, zatem

$$\begin{aligned}0 \leq \left|f^{(n)}(\zeta)\right| &< \substack{\text{dowolna liczba}\\\text{dodatnia}} \\ f^{(n)}(\zeta) &= 0\end{aligned}$$

Skoro każda pochodna jest zerowa, to f musi być stała. ■

Twierdzenie 10 (Twierdzenie Gaussa)**.** Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych stopnia > 0 ma przynajmniej jeden pierwiastek.