Analiza III R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Wykład 7: Ćwiczenia 7

05 lis 2020

Zadanie 5/S3 pomocnicze $\mathrm{d}\overset{k}{\omega} = 0$ na O, który jest ściągalny to istnieje $\overset{k-1}{\eta}$: $\mathrm{d}\eta = \omega$. Wykazać, że jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ jest zamknięta oraz $\int_{S^1} \omega = 0$ to ω jest zupełna.

Chcemy wskazać funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$: $\mathrm{d}f = \omega$. Trzeba ją skonstruować, inaczej nie da rady. Nasz obszar nie jest ściągalny, więc lemat Poincare też nie pomoże. Przykładowo, wyrzucenie całej półosi z układu współrzędnych daje już retrakcję.

Niech $O_+ = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_2}$ oraz $O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_2}$. Każdy z tych zbiorów jest ściągalny, zatem ω ma potencjał na każdym z tych obszarów (oczywiście nie musi być to ten sam potencjał). Z Lematu Poincare, istnieją $f_\pm$ takie, że:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_+ &= \omega\,\big|_{O_+} \\ \mathrm{d}f_- &= \omega\,\big|_{O_-} \\ \mathrm{d}(f_+ - f_-) &= (\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega)\,\big|_{O_+ \cap O_-} = 0 \end{aligned}$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{e_2}$. Istnieją stałe c_+ i c_- takie, że

$$f_+ - f_- = \begin{cases} c_+ & x > 0 \\ c_- & x < 0 \end{cases}$$

Pytanie brzmi czy $c_+ = c_-$? Jeśli tak, to $f_+ = f_- + c$. Czyli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ określona wzorem f_- na O_- oraz $f_+ - c$ na O_+ spełnia $\mathrm{d}f = \omega$. Użyjmy warunku z całką po okręgu.

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S^1} \omega &= \int_{\text{góra}} \omega + \int_{\text{dół}} \omega \\ &= \int_{\text{góra}} \mathrm{d}f_- + \int_{\text{dół}} \mathrm{d}f_+ \end{aligned}$$

Całka z pochodnej to różnica wartości na brzegu, zatem

$$= f_-(-1,0) - f_-(1,0) + f_+(1,0) - f_+(-1,0) = 0$$

Stąd,

$$f_+(1,0) - f_-(1,0) = f_+(-1,0) - f_-(-1,0)$$

Stąd wynika, że $c_+ = c_-$ i to kończy nasz dowód.

Lemat do zadania 5 (dla chętnych do domu).
Wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})$ jest zamknięta oraz $\displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2=1 \\ z=0}} \theta = 0$, to θ jest zupełna.

Zadanie 5/S3 Mamy $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\mathrm{d}\omega = 0$, $\int_{S^2} \omega = 0$. Pokazać, że ω jest zupełna.

Wskazówka,

$$
\begin{aligned}
O_+ &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_z} \\
O_- &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_z}
\end{aligned}
$$

mają retrakcję. Należy skorzystać z lematu Poincare i znaleźć potencjały na O_+ i O_-. Niech $\theta_\pm \in \Omega^1(O_\pm)\colon\ \mathrm{d}\theta_\pm = \omega\big|_{O_\pm}$. Zauważmy, że

$$
\mathrm{d}(\theta_+ - \theta_-)\Big|_{O_+ \cap O_-} = 0
$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z}$. Czy $\int_{S^1} \theta_+ - \theta_- = 0$?

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{S^2} \omega &= \int_{S^2_+} \omega + \int_{S^2_-} \omega \\
&= \int_{S^2_+} \mathrm{d}\theta_- + \int_{S^2_-} \mathrm{d}\theta_+
\end{aligned}
$$

Ze Stokesa,

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(S^1,+)} \theta_- + \int_{(S^1,-)} \theta_+ \\
&= \int_{(S^1,+)} (\theta_- - \theta_+)
\end{aligned}
$$

Istnieje $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})\colon \theta_+ - \theta_- = \mathrm{d}f$. Czy istnieją funkcje $f_+ \in C^\infty(O_+)$ i $f_- \in C^\infty(O_-)$ takie, że $f = f_+ - f_-$ na $O_+ \cap O_-$. Jeśli tak, to $(\theta_+ - \theta_-) = \mathrm{d}f = \mathrm{d}f_+ - \mathrm{d}f_-$. Stąd, $\theta_+ - \mathrm{d}f_+ = \theta_- - \mathrm{d}f_-$. Stąd istniałaby $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ dana wzorem:

$$
\begin{aligned}
\eta\big|_{O_+} &= \theta_+ - \mathrm{d}f_+ \\
\eta\big|_{O_-} &= \theta_- - \mathrm{d}f_-
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\mathrm{d}\eta = \omega
$$

Dlaczego takie f_+ i f_- istnieją? Dobre pytanie! Może kiedyś dokończymy ten dowód :)

Rozdział 1

Analiza zespolona

Zadanie 1a/S4 Znaleźć funkcję holomorficzną taką, że $\mathrm{Re}(f(z)) = e^x \cos y$, $f(0) = 1$.

Warunki Cauchy'ego-Riemanna dla $f(z) = u(z) + iv(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Wynik mógłby pojawić się przez rozwiązywanie tego układu równań. Ale można też zgadnąć: $f(z) = e^z$. Ale rozwiążmy to analitycznie.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= e^x \cos y \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\
v &= \int e^x \cos y \, \mathrm{d}y = e^x \sin y + C(x) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y \\
C'(x) &= 0 \\
f(0) &= 1 \implies C = 0
\end{aligned}$$

Stąd,

$$f(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z$$

Zadanie 1c/S4 $\mathrm{Im}(f(z)) = 3x + 2xy$, $f(-i) = 2$.

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= 3iz, \quad \mathrm{Im}(f_1(z)) = 3x \\
f_2(z) &= z^2, \quad \mathrm{Im}(f_2(z)) = 2xy \\
f &= f_1 + f_2 + C = 3iz + z^2 + C \\
f(-i) &= 3i(-i) + i^2 + C = 2 \\
C &= 0
\end{aligned}$$

Zadanie 1b/S4 $\mathrm{Re}(f(z)) = \sin x / (\cos x + \cosh y)$, $f(0) = 0$.

Atakujemy R.C.R.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
v &= \int \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C(y) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\cos x}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sin^2 x}{(\cos x + cshy)^2} \\
&= \frac{1 + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cosh y}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
&= \frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y + \cos x \cosh y}{\left(\cos x + \cosh y\right)^2} + C'(y) \\
C &= \text{const.} \\
f(z) &= \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y} + i\frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C \\
&= \frac{\sin x + i \sinh y}{\cos x + \cosh y} + C = \frac{\sin x + \sin(iy)}{\cos x + \cos(iy)} + C
\end{aligned}
$$

$C = 0$,

$$
= \frac{2 \sin \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}}{2 \cos \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}} = \tan \frac{z}{2}
$$

Wykład 8: Ćwiczenia 8

09 lis 2020

Zadanie 2/S4 Znaleźć homografię odwzorowującą $\Omega_1 = K(0,2) \setminus \overline{K}(1,1)$ na $\Omega_2 = \left\{\omega \in \mathbb{C} \colon 0 < \mathrm{Re}(\omega) < 1\right\}$.

Wstęp teoretyczny Odwzorowanie afiniczne $\alpha z + \beta$ jest wyznaczone przez wartości w dwóch punktach płaszczyzny zespolonej. Jak podamy 2 punkty, to istnieje dokładnie jedno tego typu odwzorowanie, które te dwa punkty w inne dwa punkty przerzuca.

$$
\exists!\, \alpha z + \beta \colon \alpha z_1 + \beta = w_1,\ \alpha z_2 + \beta = w_2
$$

Definicja 1 (Sfera Riemanna)**.**

$$
\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}
$$

Homografię $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ możemy zapiać jako:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & z \neq -\dfrac{d}{c} \cup \{\infty\} \\ \infty & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c} & z = +\infty \end{cases}$$

$$h(\infty) = \infty \iff c = 0,\, a \neq 0$$

Wówczas h jest afiniczne. Niech $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$.

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Wówczas $h(z_1) = 0$, $h(z_2) = \infty$, $h(z_3) = 1$. Od tej pory zakładamy, że homografia nie jest odwzorowaniem stałym, tj. $ad - bc \neq 0$. Homografie składamy zgodnie z regułą mnożenia macierzy. W szczególności homografie tworzą grupę przekształceń.

Twierdzenie 1. Jeśli $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, to istnieje dokładnie jedna homografia $h \colon h(z_i) = w_i$.

Dowód. Niech $\left[h_1(z_1), h_1(z_2), h_1(z_3)\right] = [0, \infty, 1]$. Wówczas $\left[h_2^{-1}(w_1), h_2^{-1}(w_2), h_2^{-1}(w_3)\right] = [0, \infty, 1]$. W związku z tym, $h_2 \circ h_1$ jest okej. Co z jednoznacznością?

Przypuśćmy, że $h, \tilde{h}$ są okej. Jeśli $z_3 = w_3 = \infty$, to $h, \tilde{h}$ jest afiniczne, a zatem $h = \tilde{h}$. Niech $g, \tilde{g}$ to będą homografie takie, że $(0, 1, \infty) \overset{g}{\mapsto} (z_1, z_2, z_3)$ oraz $(w_1, w_2, w_3) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} (0, 1, \infty)$. Zauważmy, że $\tilde{g}hg$ oraz $\tilde{g}\tilde{h}g$ są identycznościowe. Zatem,

$$h = \tilde{h} = \tilde{g}^{-1} \circ g$$

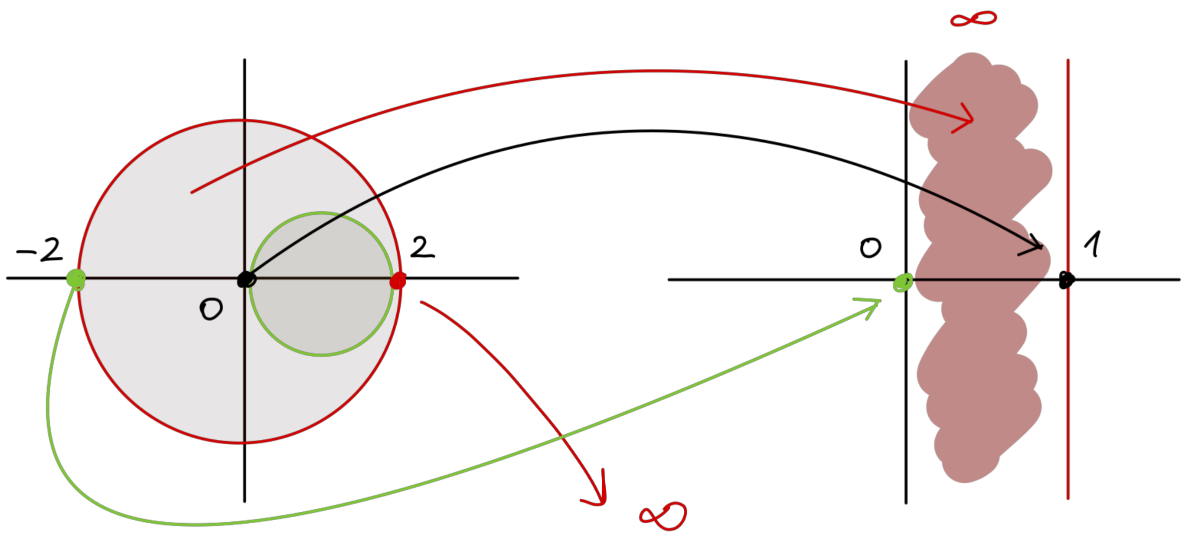
■

Teraz trzeba popatrzyć na to w świetle naszego zadania. Istnieje dokładnie jedna homografia, która:

$$h(2) = +\infty, \quad h(0) = 1, \quad h(-2) = 0$$
$$h(z) = -\frac{z+2}{z-2}$$

Można łatwo sprawdzić (czy raczej się upewnić), że wszystkie punkty przenoszą się odpowiednio. Skorzystaliśmy jedynie z faktu, że te obszary są topologicznie sensowne, zatem brzegi przechodzą na brzegi, wnętrza na wnętrza. Przy homomorfizmie, odwzorowanie obszaru spójnego jest spójne. Skorzystaliśmy też z tego, że homografie przerzucają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

Uwaga! Odwzorowanie homograficzne, które przerzuca dane 3 punkty na dane 3 punkty jest jedno, ale całe obszary na inne obszary; może być wiele – wystarczy wybrać z tych obszarów jakieś inne punkty.



Rysunek 1.1: Homografia przerzucająca rozważane obszary.

Zadanie 3/S4 $f(z) = u(z) + iv(z) \to f(\rho, \phi) = R(\rho, \phi)e^{i\Phi(\rho,\phi)}$. Wyprowadzić warunki C-R dla R, Φ.

Ustalmy ρ_0, ϕ_0. $z_0 = \rho_0 e^{i\phi_0}$ oraz $z_{\Delta\rho} = (\rho_0 + \Delta\rho)e^{i\phi_0}$, $z_{\Delta\phi} = \rho_0 e^{i(\phi_0+\Delta\phi)}$. Jak z dowolnych dwóch kierunków zbiegając do z_0 dostaniemy to samo, to mamy funkcję holomorficzną.

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{f(z_{\Delta\rho}) - f(z_0)}{z_{\Delta\rho} - z_0} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(z_{\Delta\phi}) - f(z_0)}{z_{\Delta\phi} - z_0}$$

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{f(z_{\Delta\rho}) - f(z_0)}{z_{\Delta\rho} - z_0} = \frac{R(\rho_0 + \Delta\rho, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0 + \Delta\rho, \phi_0)\big) - R(\rho_0, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0)\big)}{\Delta\rho e^{i\phi_0}}$$

$$= e^{-i\phi_0}\left[\frac{\partial R}{\partial \rho} e^{i\Phi(\rho_0,\phi_0)} + Re^{i\Phi} i \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right]$$

Tak samo druga granica,

$$\lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(z_{\Delta\phi}) - f(z_0)}{z_{\Delta\phi} - z_0} \underset{\substack{\text{analogiczne}\\\text{wyrażenie}}}{=}$$

$$= \frac{1}{i\rho_0 e^{i\phi_0}} \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{1}{\Delta\phi}\Big[R(\rho_0, \phi_0 + \Delta\phi)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0 + \Delta\phi)\big)$$

$$-R(\rho_0, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0)\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{i\rho_0} e^{i\phi_0}\left(\frac{\partial R}{\partial \phi} e^{i\Phi} + Re^{i\Phi} i \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)$$

Stąd otrzymujemy równania C-R:

$$\frac{1}{i\rho_0}\left(\frac{\partial R}{\partial \phi} + Ri\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial R}{\partial \rho} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone, dostając piękne równania C-R we współrzędnych „biegunowo-biegunowych":

$$\begin{aligned}\frac{R}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} &= \frac{\partial R}{\partial\rho}\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\phi} &= R\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\end{aligned}$$

Zadanie 5a/S4 Obliczyć całkę $\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$ korzystając ze wzoru Cauchy'ego.

Niech $D = K(0,1)$, $f(z) = e^z$. Wówczas,

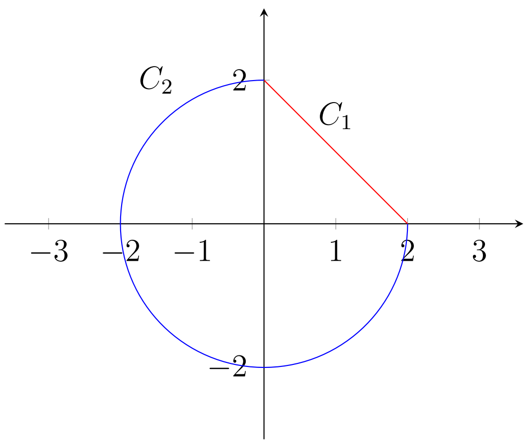
$$2\pi i = 2\pi i f(0) = \oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$$

Wykład 9: Ćwiczenia 9

16 lis 2020

Zadanie 4/S4 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$. Obliczyć $\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ i $\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, jeśli C_1 to odcinek łączący $z_0 = 2$ i $z_1 = 2i$; ,$C_2\colon \phi \mapsto 2e^{i\phi}$, $\phi \in \left[\pi/2, 2\pi\right]$.

To zadanie nikomu się nie podoba, nikt go niestety nie lubi. Nawet odpowiedź jest głupia, więc tylko zagaimy co należy zrobić.



Rysunek 1.2

Osobliwości f są w $z_1 = 0$ oraz $z_2 = -1$.

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\frac{1}{2+t(2i-2)} - \frac{1}{3+t(2i-2)}\right](2i-2)\,\mathrm{d}t$$

Użyjemy logarytmu, w ustalonej gałęzi: $\log z = \log|z| + i\arg z$, gdzie $\arg z \in (-\pi, \pi)$.

$$\begin{aligned}
&= \log\big[2 + t(2i-2)\big]\Big|_0^1 - \log\big[3 + t(2i-2)\big]\Big|_0^1 \\
&= \log(2i) - \log(2) - \log(1+2i) + \log(3) \\
&= \log\sqrt{5} + i\arg\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}i}\right)
\end{aligned}$$

No i teraz spróbujmy drugą całkę obliczyć.

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\pi/2}^{2\pi} 2e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi\left(\frac{1}{2e^{i\phi}} - \frac{1}{2e^{i\phi}+1}\right) \\
&= i\frac{3}{2}\pi - \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{2e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi}{2e^{i\phi}+1}
\end{aligned}$$

To można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej (bo jest to wymierna funkcja od funkcji trygonometrycznych). Znajdźmy jakiś związek między tymi całkami.

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1\cup C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \oint_{C_1\cup C_2} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z$$

Na mocy wzoru Cauchy'ego,

$$= 2\pi i(1-1) = 0$$

Można też od razu z całkowania przez residua. Tak czy inaczej,

$$\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Zadanie 6/S4 Wykazać, że forma $\omega = \dfrac{\mathrm{d}z}{z-a}$ określona na $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ jest zamknięta ale nie zupełna. Zbadać zamkniętość i zupełność form $\mathrm{Re}(\omega)$ i $\mathrm{Im}(\omega)$.

Zauważmy, że wystarczy rozważyć $a = 0$, a potem przesuwać tę całą zabawę.

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z = 0$$

Stąd forma ω jest zamknięta. Ponadto, ze wzoru Cauchy'ego

$$\int_{C(0,1)} \omega = 2\pi i \neq 0$$

Forma zamknięta, której całka po okręgu (brzegu) nie daje 0, nie jest zupełna. To rezultat z twierdzenia Stokesa w banalnej formie.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{z} &= \frac{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y}{x+iy} = \frac{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}(x-iy) \\
&= \underbrace{\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}}_{\mathrm{Re}(\omega)} + i\underbrace{\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}}_{\mathrm{Im}(\omega)} \\
&= \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right] + i\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

Stąd widzimy, że $\mathrm{Re}(\omega)$ i $\mathrm{Im}(\omega)$ są zamknięte, natomiast $\mathrm{Re}(\omega)$ jest zupełna, a $\mathrm{Im}(\omega)$ nie.

Zadanie 5/S4 Korzystając ze wzoru Cauchy'ego obliczyć (a) $\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$, (b) $\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$, (c) $\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$.

(a)

$$\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

(b)

$$\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \oint \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\frac{1}{2i}\,\mathrm{d}z$$

Teraz w obu całkach mamy tylko pojedyncze bieguny, zatem używamy Cauchy'ego. $f(z)$ jest stałe i takie samo w obu przypadkach, zatem całki się znoszą.

$$= 0$$

(c)

$$\oint_{C(0,2)} \frac{1}{z}\frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \oint \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)}\right)$$
$$= 2\pi i\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Zadanie 1/S5 Znaleźć punkty osobliwe dla podanych funkcji i określić ich rodzaj. (a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2-(\pi/2)^2}$, (b) $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$.

(a) Punktami podejrzanymi są $z_1 = \pi/2$ oraz $z_2 = -\pi/2$. Jeśli daje się przedłużyć funkcję do funkcji holomorficznej w punkcie podejrzanym, to jest to osobliwość pozorna. Należy policzyć granicę.

$$\lim_{z\to\pm\pi/2} \frac{\cos z}{z^2-(\pi/2)^2} \overset{H}{=} \lim_{z\to\pm\pi/2} \frac{-\sin z}{2z}$$
$$= \frac{-(\pm 1)}{2 \pm \pi/2} = -\frac{1}{\pi}$$

Są to więc osobliwości pozorne.

(b) Punkt podejrzany to taki, że $e^z - 1 = 0$, czyli $z \in \{2k\pi i\colon k \in \mathbb{Z}\}$. Dla $k = 0$, $f(z) \xrightarrow{z\to 0} 1$, zatem tam jest osobliwość pozorna.
Dla $k \neq 0$,

$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z-2k\pi i}{e^z-1}\cdot z = 2k\pi i$$

Jest to więc biegun rzędu 1. Innymi słowy, wyłuskaliśmy tę najmniejszą potęgę $z - 2k\pi i$, która nam daje skończoną granicę.

Wykład 10: Ćwiczenia 10

19 lis 2020

Zadanie 2/S5 Znaleźć bieguny i ich rzędy i obliczyć residua. (a) $f(z) = \frac{z^n e^{1/z}}{z+1}$, (b) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$, (c) $f(z) = \frac{1}{z^5 - z^7}$.

Definicja 2 (Residuum w nieskończoności)**.**

$$\operatorname{Res}_\infty f = -\operatorname{Res}_0 \left(f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\right)$$

Wniosek 1. Niech z_0 będzie biegunem rzędu k.

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}(z-z_0)^k f(z)$$

(a)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Dla $z_0 = 0$,

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,\mathrm{d}z$$

Rozwińmy funkcję w $z_0 = 0$. Jest to osobliwość istotna dla $n \in \mathbb{Z}$.

$$f(z) = z^n \frac{1}{1+z} e^{\frac{1}{z}} = z^n \sum_{l=0}^{\infty} z^l (-1)^l \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k k!}$$

$$f(z) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!} z^{l+n-k}$$

$$a_{-1} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!}, \quad l+n-k=-1$$

Teraz trzeba rozważyć przypadki. $l = k-n-1$, $l \geq 0$, $k \geq n+1$. W domu co, jeśli $n \geq 0, n < 0$.

$$a_{-1} = \sum_{k\geq n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k!} = (-1)^{n-1}\left[e^{-1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right]$$

Przypadek $z = -1$. $f(z)$ ma biegun regularny w $z = -1$.

$$\mathrm{Res}_{-1} \frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{z+1} = (-1)^n e^{1/-1} = (-1)^n e^{-1}$$

Jeszcze residuum w nieskończoności.

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z^n} e^z}{\frac{1}{z} + 1} = \frac{e^z z^{-n+1}}{1+z}$$

$$\mathrm{Res}_\infty f = \mathrm{Res}_0 \frac{-e^z z^{-n+1}}{(1+z)z^2} = \mathrm{Res}_0 \frac{-e^z}{z^{n+1}(1+z)}$$

Dla $-n-1 \geq 0$ jest to pozorna osobliwość. A poza tym przypadkiem, to mamy biegun rzędu $n+1$.

$$\frac{e^z}{(1+z)} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (-1)^l z^l z^{-n-1}$$

$k + l - n - 1 = -1$, skąd $k + l = n$.

$$\sum_{\substack{k+l=n \\ k,l \geq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!}$$

To ostatnie można sobie obliczyć jakoś.

(c)

$$\frac{1}{z^5 - z^7} = \frac{1}{z^5(1-z^2)}$$

Osobliwości mamy w $0, +1, -1$ i być może w ∞. W 0 jest biegun rzędu 5, w $+1, -1$ rzędu 1.

$$\mathrm{Res}_1 f = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^5(1-z^2)}(z-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{1}{z^5(1-z)(1+z)}(z+1) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}_0 f = \frac{1}{4!} \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4} z^5 \frac{1}{z^5(1-z^2)} = \frac{1}{4!} \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4} \frac{1}{1-z^2}$$

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots$$

Ta procedura odczytuje 4 współczynnik w szeregu Taylora w zerze, zatem

$$\mathrm{Res}_0 f = 1$$

Zadanie 4/S5 Wyrazić w postaci całek konturowych współczynnik a_n szeregu Laurent funkcji $\cot(z)$ w pierścieniu $\pi < |z| < 2\pi$. Obliczyć a_1.

$$\cot(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Niech $\gamma = C(0, 3/2\pi)$.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \cot(z)\,\mathrm{d}z$$

Zauważmy, że:

$$\oint_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Można więc prosto całkować cały szereg wyraz po wyrazie (szereg niemal jednostajnie zbieżny).

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\cot(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\cos z}{z^2 \sin z}\,\mathrm{d}z$$

Możemy zastosować rachunek residuów. 0 jest biegunem rzędu 3, $\pi, -\pi$ rzędu 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\pi f &= \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{z^2 \sin z}(z-\pi) = \frac{1}{\pi^2} \\
\mathrm{Res}_{-\pi} f &= \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{z^2 \sin z}(z+\pi) = \frac{1}{\pi^2} \\
\mathrm{Res}_0 f &= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{\cos z}{z^2 \sin z} z^3\right) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{1}{\sin^2 z} z + \cot z\right) \\
&= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z} + 2z\frac{\cos z}{\sin^3 z}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin^2 z + 2z \sin z \cos z}{\sin^4 z} \overset{\text{Taylor}}{=} -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Teraz mamy współczynnik,

$$a_1 = \sum \mathrm{Res}_i = \frac{1}{\pi^2} \cdot 2 - \frac{1}{3}$$

Zadanie 5/S4 Całkujemy funkcje wymierne. Wykazać, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\pi.$

Rozważamy funkcję zespoloną:

$$f(z) = \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Bierzemy obszar, który zawiera osobliwości, czyli taki półokrąg górny.

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi f\left(Re^{i\phi}\right) Re^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi$$

Wkład radialny. Już to bezpośrednie szacowanie całki pomijamy.

$$\int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\phi}+3}{(R^2e^{2i\phi}+1)(R^2e^{2i\phi}+4)}\cdot Re^{i\phi}i\,\mathrm{d}\phi = \int_0^\pi \frac{\mathcal{O}(R^3)}{\mathcal{O}(R^4)} \to 0$$

Stąd,

$$\begin{aligned}
2\pi i(\mathrm{Res}_i\, f + \mathrm{Res}_{2i}\, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{Res}_i\, f &= \lim_{z\to i} \frac{z^2+3}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{3i} \\
\mathrm{Res}_{2i}\, f &= \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{12i} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi i\left(\frac{1}{3i}+\frac{1}{12i}\right) = \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}$$

Wykład 11: Ćwiczenia 11

23 lis 2020

Zadanie 3/S5 Rozwinąć w szereg Laurent $f(z) = 1/(1+z^2)^2$ w $\mathcal{R}(1+i, 1, \sqrt{5})$.

Dobrze jest zacząć od rozkładu na ułamki proste.

$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{A}{z+i} + \frac{B}{(z+i)^2} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{(z-i)^2} \\
&= \frac{i}{4}\frac{1}{z+i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+i)^2} - \frac{i}{4}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2}
\end{aligned}$$

Każdy z tych składników rozkłada się osobno w szereg.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z+i-(1+i)+(1+i)} = \frac{1}{z-(1+i)+1+2i} \\
&= \frac{1}{1+2i}\frac{1}{1+\frac{z-(1+i)}{1+2i}}
\end{aligned}$$

Trzeba sprawdzić moduł. Przy naszych założeniach,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{z-(1+i)}{1+2i}\right| < 1 \\
&= \frac{1}{1+2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{z-(1+i)}{1+2i}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}(z-1-i)^n
\end{aligned}$$

Drugi wyraz jest mniej więcej pochodną pierwszego, więc rozwija się prosto, poprzez różniczkowanie wyrazu po wyrazie. Odpuścimy to sobie.

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-1-i+1} = \frac{1}{z-(1+i)+1}$$

Niby jest ładnie, ale zauważmy, że

$$1 < \left|z - (1+i)\right| < \sqrt{5}$$

czego nie można użyć w szeregu.

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \frac{1}{1 + \frac{1}{z-(1+i)}}$$

To już może grać rolę wyrazu w szeregu geometrycznym.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[z - (1+i)\right]^{-n-1}$$

I tak dalej w tym duchu można kontynuować zabawę.

Zadanie 5/S5 cd

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

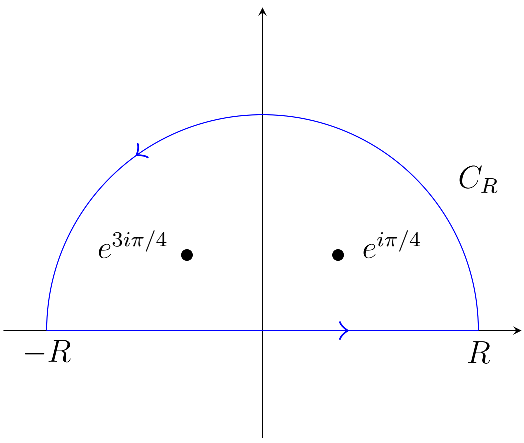
Będziemy korzystali z lematu Jordana. Funkcja podcałkowa jest parzysta.

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Bierzemy więc funkcję zespoloną:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \frac{z^3 e^{iz}}{1+z^4}$$

którą całkujemy po górnym półokręgu o promieniu R. Lemat Jordana tutaj pracuje, gdyż $g(z) = z^3/(1+z^4) \xrightarrow{z\to\infty} 0$. W związku z tym, całka po górnym łuku zanika w $R \to \infty$. W naszym obszarze mamy 2 residua.



Rysunek 1.3: Kontur półkole.

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{2i}\frac{x^3e^{ix}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x+\underbrace{\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z}_{\substack{R\to\infty\\ \to 0}}=2\pi i[\operatorname{Res}_{e^{i\pi/4}}f+\operatorname{Res}_{e^{3i\pi/4}}f]$$

W $z_0=e^{i\pi/4}$, jak i w $e^{3i\pi/4}$ jest biegun rzędu 1, zatem:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{e^{i\pi/4}}f&=\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{1}{2i}\frac{z^3e^{iz}}{1+z^4}\left(z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\overset{H}{=}\frac{1}{2i}\frac{e^{\frac{3}{4}i\pi}e^{ie^{i\pi/4}}}{4e^{\frac{3}{4}i\pi}}\\&=\frac{1}{8i}e^{i\sqrt{2}/2}e^{-\sqrt{2}/2}\\ \operatorname{Res}_{e^{3i\pi/4}}f&=\lim_{z\to e^{3i\pi/4}}\frac{1}{2i}\frac{z^3e^{iz}}{1+z^4}\left(z-e^{\frac{3}{4}i\pi}\right)\\&\overset{H}{=}\frac{1}{8i}e^{ie^{i3\pi/4}}=\frac{1}{8i}e^{-i\sqrt{2}/2}e^{-\sqrt{2}/2}\end{aligned}$$

To teraz można podjąć się policzenia sumy tych potworności.

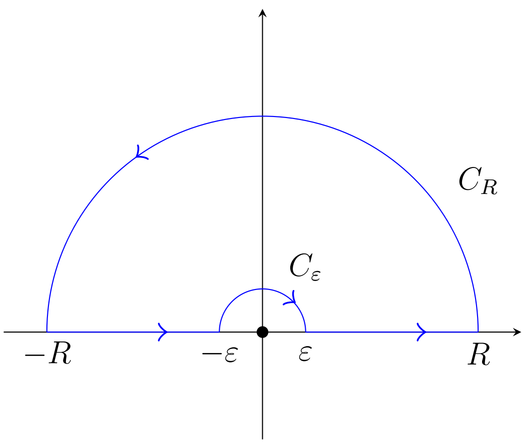
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}e^{-\sqrt{2}/2}\left(e^{-i\sqrt{2}/2}+e^{i\sqrt{2}/2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}/2}$$

Na podstawie rozważań na początku, jest to oczywiście szukana całka.

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2}=\frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2}{-4}=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}$$

Weźmy funkcję $f(z)=\dfrac{e^{2iz}-1}{-4z^2}$ i scałkujmy po konturze „Słoń”, tak aby obskoczyć osobliwość w 0.



Rysunek 1.4: Kontur słoń. $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon,\frown} f(z)\,\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{C_R,\frown} f(z)\,\mathrm{d}z}_{\to 0}$$

Ostatnia całka zanika z lematu Jordana.

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{R\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Teraz pozostaje kosmetyka.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2iz}-1}{-4z^2}\,\mathrm{d}z$$

Wniosek 2. Jeśli $g(z)$ jest ciągła wokół z_0,

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\varepsilon\to 0} i(\beta-\alpha)g(z_0)$$

Stąd,

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2iz}-1}{-4z^2}\,\mathrm{d}z = i\pi \lim_{z\to 0}\frac{e^{2iz}-1}{-4z} = \frac{\pi}{2}$$

Zadanie 7a/S5 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$, dla $a \in (-\pi, \pi)$.

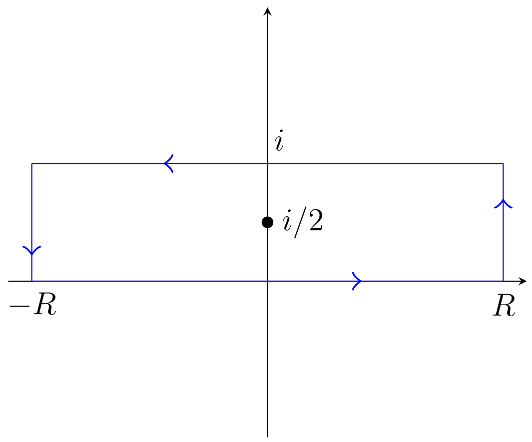
Naturalnie,

$$\cosh(az) = \frac{e^{az}+e^{-az}}{2}$$
$$f(z) = \frac{e^{az}}{\cosh(\pi z)}$$

Wybór konturu być może narzuca się trochę zauważając, że

$$\cosh \pi(x+i) = -\cosh \pi x$$

Scałkujmy ją po ciekawym konturze. $\cosh(\pi z)$ ma biegun w $z_0 = i/2$. Podążymy prostokątnym konturem.



Rysunek 1.5: Kontur prostokąt. $R \to \infty$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+i)}}{\cosh \pi(x+i)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{e^{a(R+it)}}{\cosh \pi(R+it)} i\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{0} \frac{e^{a(-R+it)}}{\cosh \pi(-R+it)} i\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{i/2} \frac{e^{az}}{\cosh \pi z}$$

Zauważmy, że pierwsze człony dzięki parzystości funkcji podcałkowej są w oczywisty sposób związane z wyjściową całką, natomiast pozostałe dwa wyrazy zdają się zanikać. Postulujemy więc, że:

$$L \xrightarrow{R\to\infty} 2I\Big(1+e^{ia}\Big)$$
$$P = 2\pi i \lim_{z\to i/2} \frac{e^{az}\big(z-i/2\big)}{\cosh \pi z} \overset{H}{=} 2\pi i \frac{e^{ia/2}}{\pi \sinh \frac{\pi i}{2}} = 2e^{ia/2}$$

Stąd wyliczamy wartość całki,

$$2I\Big(1+e^{ia}\Big) = 2e^{ia/2}$$
$$I = \frac{e^{ia/2}}{1+e^{ia}} = \frac{e^{ia/2}/2}{e^{ia/2}\big(e^{ia/2}+e^{-ia/2}\big)/2}$$
$$= \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$$

Trzeba jeszcze pokazać, że te pozostałe dwie całki zanikają.

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{a(R+it)}}{\cosh \pi(R+it)}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 \frac{e^{aR}\,\mathrm{d}t}{\left|\frac{e^{\pi(R+it)}+e^{-\pi(R+it)}}{2}\right|} \le \int_0^1 \frac{e^{aR}\,\mathrm{d}t}{\frac{e^{\pi R}-1}{2}}$$
$$= \frac{2e^{aR}}{e^{\pi R}-1}\cdot 1 \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Zbiega jeśli $|a| < \pi$, tak więc tutaj wykorzystaliśmy to założenie.

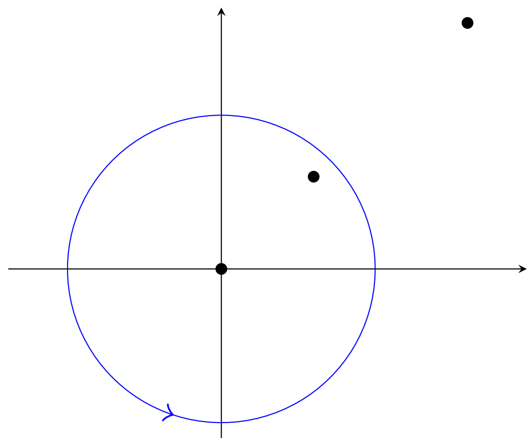
Wykład 12: Ćwiczenia 12

26 lis 2020

Zadanie 6a/S5 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{1-2p\cos\phi+p^2}, |p| \neq 1$

Zamieniamy taką całkę na całkę konturową.

$$z = e^{i\phi}, \quad \mathrm{d}z = ie^{i\phi}\,\mathrm{d}\phi = iz\,\mathrm{d}\phi$$
$$\cos z = \frac{z+1/z}{2}$$
$$I = \oint_{|z|=1} \left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{2iz}\left(1-2p\frac{z+1/z}{2}+p^2\right)^{-1}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)\,\mathrm{d}z}{z(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}$$



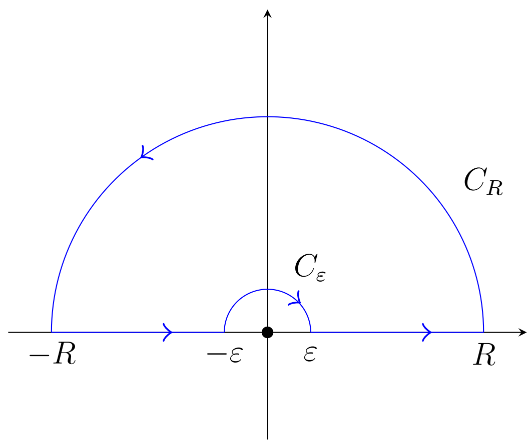
Rysunek 1.6

Rachunki dalej robimy dla $|p| < 1$. Wówczas są dwie odobliwości $z = 0$, $z = p$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{-p2i}\left[\operatorname{Res}_0 f + \operatorname{Res}_p f\right] = \frac{2\pi i}{-p2i}\left[zf(z)\Big|_{z=0} + (z-p)f(z)\Big|_{z=p}\right] \\ &= -\frac{\pi}{p}\left[1 + \frac{p^2+1}{p\left(p-\frac{1}{p}\right)}\right] \end{aligned}$$

Zadanie 3/S6 Całki po konturze typu DS. Całkujemy funkcję $f(z) = (\log z)^2(z^2 + a^2)^{-1}$, gdzie $a > 0$.

Logarytm zespolony: $\arg z \in (-\pi, \pi)$, $\log z = \log|z| + i \arg z$.



Rysunek 1.7: Kontur słoń. $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

Szacowanie $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ oraz $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ zrobimy na końcu.

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} f \\ = 2\pi i \frac{\left(\log(ia)\right)^2}{(ia+ia)} = \frac{2\pi i}{2ia}\left(\log a + \frac{i\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(\log(a)^2 - \frac{\pi}{4} + i\pi\log a\right)$$

Teraz liczymy limity lewej strony.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} LHS &= \int_{-\infty}^{0} \frac{(\log(-t)+i\pi)^2}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{(\log t)^2}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{(\log t + i\pi)^2}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{(\log t)^2}{t^2+a^2} \\
&= 2\int_0^\infty \frac{\log^2 t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{\pi^2}{t^2+a^2} + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \\
\frac{\pi^2}{a}\log a &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\log t}{t^2+a^2}
\end{aligned}$$

Drugą całkę liczymy z rachunku residuuów, po zwykłym górnym półkoręgu z osoliwością w ia.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\pi^2\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^2\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} f \\
&= \pi i \frac{\pi^2}{2ia} = \frac{\pi^3}{2a}
\end{aligned}$$

Finalnie,

$$\begin{aligned}
2\int_0^\infty \frac{\log^2(t)}{t^2+a^2} - \frac{\pi^3}{2a} &= -\frac{\pi^3}{4a} + \frac{\pi}{a}\log^2(a) \\
\int_0^\infty \frac{\log^2(t)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{\pi^3}{8a} + \frac{\pi}{2a}\log^2(a)
\end{aligned}$$

Na koniec zapowiedziane szacowania.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{\log(R+i\phi)}{R^2e^{2i\phi}+a^2} Re^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi\right| \\
&\leq \frac{4R\log^2 R}{R^2-a^2}\cdot\pi \xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Komenatrz: de facto powinniśmy całkować trochę powyżej ujemnej osi x, a dopiero potem przejść granicznie do tej osi.

Zadanie 4/S6 Całka po dziurce od klucza. Całkujemy $f(z) = \exp(a\log z)/(z^2+1)^2$ dla $-1 < a < 3$. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi(1-a)}{4\cos\frac{\pi a}{2}}$.

Tym razem mamy inne cięcie logarytmu, gdzie wycianamy $\mathbb{R}_+$. Wówczas, $z^a = e^{a\log z}$, gdzie $\log z = \log|z| + i\arg z$, dla $\arg z \in (0, 2\pi)$.
Tym razem bieguny mamy w i oraz $-i$.

$$\oint_\Gamma \frac{z^a\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i[\operatorname{Res}_i f + \operatorname{Res}_{-i} f]$$

gdzie są to bieguny rzędu 2.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_i f &= \frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-i)^n f(z)\bigg|_{z=i,n=2} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^a}{(z+i)^2}\bigg|_{z=e^{i\pi/2}} = \frac{az^{a-1}}{(z+i)^2} - \frac{2z^a}{(z+i)^3}\bigg|_{z=i} \\
&= \frac{ae^{i\pi/2(a-1)}}{(2i)^2} - 2\frac{e^{i\pi/2a}}{(2i)^3} = \frac{e^{i\pi a/2}}{(2i)^2}\left(-ia - \frac{2}{2i}\right) = \frac{e^{ia\frac{\pi}{2}}}{4}i(a-1) \\
&= \frac{i}{4}e^{ia\frac{\pi}{2}}(a-1) \\
\operatorname{Res}_{-i} f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^a}{(z-i)^2}\bigg|_{z=-i} = \left[\frac{az^{a-1}}{(z-i)^2} - 2\frac{z^a}{(z-i)^3}\right]\bigg|_{z=-i=e^{i3\pi/2}}
\end{aligned}
$$

Uwaga, żeby nie wziąć fazy $-i\pi/2$, tylko taką zgodną z logarytmem tj. $3\pi i/2$.

$$=$$

Teraz analiza konturów.

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{(xe^{2\pi i})^a}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= (1-e^{2\pi ia})\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x}_{I} = 2\pi i \sum \operatorname{Res}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= -\frac{\pi}{2}(a-1)\frac{e^{i\frac{\pi}{2}a} - e^{\frac{3}{2}i\pi a}}{1-e^{2\pi ia}} \\
&= -\frac{\pi}{2}(a-1)e^{i\pi a}\frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2}a} - e^{i\frac{\pi}{2}a}\right)}{e^{i\pi a}\left(e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}\right)} \\
&= -\frac{\pi}{2}(a-1)\frac{\sin\frac{\pi}{2}a}{\sin\pi a} = \frac{\pi}{4}(1-a)\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}a}
\end{aligned}
$$

Wynik jest dobry, zostało szacowoanie całek po okręgach.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_0^{2\pi} \frac{\left|\varepsilon^a e^{2i\phi a}\right|\left|\varepsilon e^{i\phi} i\right|\mathrm{d}\phi}{\left|\varepsilon^2 e^{i\phi} + a^2\right|^2} \\
&\le \frac{\varepsilon^{a+1}}{(a^2-\varepsilon^2)^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \xrightarrow[a>-1]{\varepsilon\to 0} 0 \\
\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &\le \int_0^{2\pi} \frac{R^{a+1}\,\mathrm{d}\phi}{\left|R^2 e^{2i\phi} + a^2\right|^2} \\
&\le \int_0^{2\pi} \frac{R^{a+1}}{(R^2-a^2)^2}\,\mathrm{d}\phi = 2\pi\frac{R^{a+1}}{R^2-\alpha^2} \xrightarrow[a<3]{R\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

Zadanie 5/S6 Całka po kości: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3} (1-x)\,\mathrm{d}x$$

Natomiast jest tam wieloznaczność, gdyż

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^{1/3} = e^{\frac{1}{3}\log\frac{z}{1-z}}$$
$$\log u = \log|u| + i\arg u, \qquad u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$$
$$\frac{z}{1-z}\big([0,1)\big) = [0,\infty)$$

W funkcji wykładniczej ważna jest faza. W zależności od tego czy będziemy podchodzili do wyciętego odcinka od dołu czy od góry, mamy różne fazy.

$$\frac{t+i\varepsilon}{1-t-i\varepsilon} = \frac{t(1-t)-\varepsilon^2+i\varepsilon}{(1-t)^2+\varepsilon^2}$$

Faza tego wyrażenia jest bliska 0. Podobny rachunek pozacuje, że faza $(t-i\varepsilon)/(1-t+i\varepsilon)$ jestr bliska 2π.

Wykład 13

03 gru 2020

Wykład 14: Ćwiczenia 14

03 gru 2020

Zadanie 3/S7 Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna funkcja f holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus \{2, i\}$ o biegunie 1. rzędu w $z = i$ i biegunie 2. rzędu w $z = 2$ i taka, że $\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) = 1$ oraz $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi$ dla $\gamma = \big\{(1+i)t \colon t \in \mathbb{R}\big\}$.

Nasza funkcja musi mieć postać:

$$f = \frac{az^2+bz+c}{(z-i)(z-2)^2} + h(z)$$

gdzie $h(z)$ jest całkowita. Skoro $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, $h(z)$ znika w ∞. Skoro jest całkowita i znika, to musi być stała z tw. Liouvilla. Szukamy a, b, c.

$$z^2 f(z) \xrightarrow{z\to\infty} 1 \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

gdyż takie a, b wyznaczają oczekiwaną asymptotykę.

$$f(z) = \frac{z+c}{(z-i)(z-2)^2}$$

Musimy jeszcze wykorzystać całkowy warunek. Trzeba scałkować po takiej całej prostej γ. Domkniemy ją półokręgiem zawierającym $z = i$. W granicy w nieskończoności ta całka po łuku zanika, gdyż mianownik jest o dwa rzędy większy od licznika. Stąd,

$$\begin{aligned}
2\pi i \operatorname{Res}_i f &= 2\pi \\
\operatorname{Res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{z+c}{(z-2)^2} = \frac{c+i}{3-2i} \\
c + i &= -i(3-4i) = -3i - 4 \\
c &= -4i - 4
\end{aligned}$$

Zadanie Całkując po kości policzyć $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{2n} \frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}$, $n \geq 1$

Po kości dobrze całkuje się wyrażenia postaci:

$$\int R(x) \sqrt[n]{\frac{ax-b}{cx-d}}\, \mathrm{d}x$$

Musimy trochę przekształcić naszą całkę.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{2n} \frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} &= \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{2n-1} \sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x^2}} = \left| \begin{aligned} t &= x^2 \\ \mathrm{d}t &= 2x\,\mathrm{d}x \end{aligned} \right| \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{n-1} \sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Niech funkcja podcałkowa w dziedzinie zespolonej to f. Wewnątrz kości nie ma żadnych osobliwości, zatem

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_\infty f &= -2\pi i \operatorname{Res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} \\
\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^2} \frac{1}{z^{n-1}} \sqrt[3]{\frac{1/z}{1-1/z}} = \frac{1}{z^{n+1}} \sqrt[3]{\frac{1}{z-1}}
\end{aligned}$$

Jak oblicza się taki pierwiastek?

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{1}{u}} &= e^{\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{u}\right)} = e^{\frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{|u|} + i \arg\frac{1}{u}\right)} \\
&= e^{\frac{1}{3}\left(-\log|u| - i\arg u + 2\pi i\right)} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{3}} e^{-\frac{1}{3}\left(\log|u| + i\arg u\right)} = e^{\frac{2\pi i}{3}} u^{-\frac{1}{3}} \\
\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^{n+1}} e^{\frac{2\pi i}{3}} (z-1)^{-1/3} \\
\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} (z-1)^{-1/3} \Bigg|_{z=0} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right) \cdots \left(-\frac{(3n-2)}{3}\right) (-1)^{n-\frac{1}{3}} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{3}} (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 3n} (-1)^n e^{\frac{i\pi}{3}}
\end{aligned}$$

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -e^{\frac{\pi i}{3}}(-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\dots\cdot 3n}(-1)^n 2\pi i$$
$$= \int_0^1 t^{n-1}\sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t - e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^1 t^{n-1}\sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_0^1 t^{n-1}\sqrt[3]{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t = -2\pi i\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\dots\cdot 3n}$$
$$= \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\dots\cdot 3n}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\dots\cdot 3n}$$

No i ta dwójka się skraca, bo ona pojawiła się przy tych wszystkich podstawieniach. Także udało się!

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{2n}\frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\dots\cdot 3n}$$

Należałoby jeszcze sprawdzić, że całki po małych okręgach znikają gdy $\varepsilon \to 0$.

Zadanie Transformata Fouriera funkcji $\dfrac{1}{\cosh x}$.

Trzeba po prostu obliczyć całkę:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\cosh x}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

Całkujemy po prostokącie, biegunem rzędu 1 jest $z = \frac{i\pi}{2}$, gdyż

$$\lim_{z\to i\frac{\pi}{2}}\frac{z-i\pi/2}{\cosh z} = \frac{1}{\sinh\frac{i\pi}{2}} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{-i\frac{\pi}{2}}} = -i$$

Liczymy po prostokącie o boku $2N$.

$$\oint_{\Gamma_N}\frac{e^{-ikz}}{\cosh z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{i\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ikz}}{\cosh z} = 2\pi i e^{-ik\frac{i\pi}{2}}$$
$$= 2\pi e^{k\frac{\pi}{2}}$$

Sprawdzamy, że całki po $\gamma_1 = \big\{N + i\pi t\colon t\in[0,1]\big\}$ i $\gamma_2 = \big\{-N + i\pi t\colon t\in[0,1]\big\}$ zanikają w ∞.

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{\Gamma_N}\frac{e^{-ikz}}{\cosh z}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh x} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ik(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}$$
$$\cosh(x+i\pi) = \frac{e^{x+i\pi}+e^{-x-i\pi}}{2} = -\cosh x$$
$$\lim_{N\to\infty}\oint_{\Gamma_N}\frac{e^{-ikz}}{\cosh z}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh x}\,\mathrm{d}x + e^{k\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ik\pi}}{\cosh x}\,\mathrm{d}x = 2\pi e^{k\frac{\pi}{2}}$$

Stąd,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi e^{k\frac{\pi}{2}}}{1+e^{k\pi}} = \frac{\pi}{\cosh\frac{k\pi}{2}}$$

Widzimy, że transformata Fouriera z $1/\cosh x$ jest przeskalowaniem tej funkcji. Oszacujmy jeszcze te zanikające całki.

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{e^{ikz}}{\cosh z}\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{e^{ik(N+it\pi)}}{\cosh(N+it\pi)}\right| \mathrm{d}t$$

$$\left|\cosh(N+it\pi)\right| = \left|\frac{e^N e^{it\pi} + e^{-N} e^{it\pi}}{2}\right| \geq \frac{e^N - e^{-N}}{2}$$

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{e^{ikz}}{\cosh z}\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^1 2\frac{e^{-k+\pi}}{e^N - e^{-N}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Zadanie 5 Udowodnij tożsamość $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \tanh \frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$

Wniosek 3. Niech f meromorficzna na $\mathbb{C}$ taka, że $zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$ i mająca skończoną liczbę punktów osobliwych $\{a_1, \ldots, a_l\} \cap \mathbb{R} = \varnothing$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} f(n) = -\sum_{i=1}^{l} \mathrm{Res}_{a_i}\, \pi\cot(\pi z) f(z)$$

Dowód. Całkujemy funkcję $f(z)\pi\cot(\pi z)$ po konturze Q_N, gdzie Q_N jest kwadratem o wierzchołkach i.
Zauważmy, że istnieje $M > 0$ takie, że $\sup_{z\in Q_n} \left|\pi\cot(\pi z)\right| < M$ dla wszystkich N.

$$\left|\int_{Q_N} f(z)\pi\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z\right| \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Rzeczywiście, na przykład można to oszacować tak:

$$\left|\int f(z)\pi\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z\right| =$$

gdzie $z = \left(N+\frac{1}{2}\right)\big((-1-i) + t(1-i-(-1-i))\big)$,

$$= \left|\int_0^1 f\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t)\right)\pi\cot\left(\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t)\right)\left(N+\frac{1}{2}\right)2\,\mathrm{d}$$

$$\leq M\int_0^1 \left|f\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t)\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)\right| 2\,\mathrm{d}t \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Teraz, stąd

$$
\begin{aligned}
0 \leftarrow \int_{Q_n} \cdots &= \sum_{z \in Q_N} \operatorname{Res}\big(f(z)\pi\cot(\pi z), z\big) \\
\operatorname{Res}\big(f(z)\pi\cot(\pi z), n\big) &= f(n)\pi\cos(\pi z)\frac{z-n}{\sin(\pi z)} \to f(n) \\
0 &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) + \sum_j \operatorname{Res}_{aj}\big(f(z), \pi\cot(\pi z)\big)
\end{aligned}
$$

Teraz jedziemy z szacowaniem. Czy $\big|\pi\cot(\pi z)\big| < M$ dla $z \in \big[(N+1/2)(-1-i), (N+1/2)(1-i)\big]$.

$$
\begin{aligned}
z &= \left(N+\frac{1}{2}\right)\Big(-1-i+t\big(1-i-(-1-i)\big)\Big), \quad t \in [0,1] \\
&= \left(N+\frac{1}{2}\right)(-1-i+2t) \\
\big|\pi\cot(\pi z)\big| &= \pi\left|\frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)} + e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)}}{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)} + e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)(2t-1-i)}}\right| \\
&\le \frac{2\pi e^{\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\left(N+\frac{1}{2}\right)} - e^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)}} \le \frac{2\pi e^{N+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}e^{N+\frac{1}{2}}} = 4\pi
\end{aligned}
$$

A 4π nie zależy od N. Na tej samej zasadzie można sobie poradzić z drugą krawędzi. ■

W naszym zadanku, $zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} &= -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2+z+1}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2+z+1}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi\cot(\pi z_1)}{z_1-z_2} - \frac{\pi\cot(\pi z_2)}{z_2-z_1} \\
&= -\frac{\pi}{z_1-z_2}\big(\cot(\pi z_1) - \cot(\pi z_2)\big) \\
z_1 - z_2 &= -i\sqrt{3} \\
\cot(\pi z_1) &= \frac{\cos(\pi z_1)}{\sin(\pi z_1)} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{e^{i\pi z_1} + e^{-i\pi z_1}}{e^{i\pi z_1} - e^{-i\pi z_1}} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{e^{i\pi(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-i\pi\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{e^{i\pi\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - e^{-i\pi\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{-ie^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + ie^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}}{ie^{\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} + ie^{\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}}} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\sinh\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}{\cosh\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{3}\tanh\frac{\pi\sqrt{3}}{1}
\end{aligned}
$$

Wykład 15: Ćwiczenia 15

07 gru 2020

Zadanie 6/S7 Wykaż, że wszystkie zera wielomianu $t^5 - t + 16$ leżą w pierścieniu $\mathcal{A}(0,1,2)$, a nadto, że dokładnie dwa z nich mają dodatnią część rzeczywistą.

> **Twierdzenie 2** (Rouche)**.** K – zwarty $\subset \mathbb{C}$ z brzegiem ∂K. Rozważamy $f, g\colon K \supset O \to \mathbb{C}$ i $|g|_{\partial K} < |f|_{\partial K}$.
> Wówczas liczby zer f i $f+g$ we wnętrzu K są równe licząc z krotnościami.

Zera wielomianu $z^5 - z + 15 \in \mathcal{R}(0,1,2)$. Na $C(0,2)$,

$$|-z-16| < |z|^5$$

Z twierdzenia Rouche, liczba pierwiastków wielomianu z^5 w $K(0,2)$ jest równa liczbie pierwiastków wielomianu $z^5 - z + 16$.
Wniosek: wszystkie zera wielomianu $z^5 - z + 16$ są w $K(0,2)$.

Z drugiej strony, na $C(0,1)$ mamy:

$$|-z+16| > 5 > |z|^5 = 1$$

Z twierdzenia Rouche, wielomiany $-z+16$ i $z^5 - z + 16$ mają tyle samo zer w $K(0,1)$. Ale $-z+16$ nie ma tam ani jednego zera, zatem $z^5 - z + 16$ również nie ma tam zer. Stąd wniosek, że $z^5 - z + 16$ ma pierwiastki tylko w $\mathcal{R}(0,1,2)$.

Przez N_2^+ oznaczamy liczbę zer $\operatorname{Re} > 0$. Używamy twierdzenia z wykładu o różnicy liczby zer i biegunów.

$$N_2^+ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{5z^4 - 1}{z^5 - z + 16} \,\mathrm{d}z \overset{?}{=} 2$$

$$\gamma_1 = \left\{ Re^{i\phi} \colon \phi \in \left[-\pi/2, \pi/2\right] \right\}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{5z^4 - 1}{z^5 - z + 16} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(5R^4 e^{4i\phi} - 1) Re^{i\phi} i \,\mathrm{d}\phi}{R^5 e^{5i\phi} - Re^{i\phi} + 16}$$

$$\xrightarrow{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5i \,\mathrm{d}\phi = \frac{5}{2}$$

Teraz jeszcze drugi kontur:

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= \big\{-iRt\colon t \in [-1,1]\big\} \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{5z^4-1}{z^5-z+16}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{(5R^4t^4-1)-iR}{16-iRt(R^4t^4-1)}\,\mathrm{d}t = (*) \\
Rt(R^4t^4-1) &= Rt(Rt-1)(Rt+1)(R^2t^2+1) \\
2\pi i(*) &= \int_{16+iR(R^4-1)}^{16-iR(R^4-1)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \log(1+R(R^4-1)) - \log(16+iR(R^4-1)) \\
&= \log(16+R(R^4-1)) + i\arg(16-iR(R^4-1)) \\
&\quad - \log(16+R(R^4-1)) - i\arg(16+iR(R^4-1)) \\
&\xrightarrow{R\to\infty} -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} = -i\pi
\end{aligned}
$$

Stąd,

$$
N_2^+ = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2
$$

Zadanie Wykazać, że $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$.

Wzór:

$$
\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) = -\sum \operatorname{Res}_{a_i}\big(f(z)\pi\cot(\pi z)\big)
$$

gdzie a_i są osobliwościami f i zakłada się, że $a_i \notin \mathbb{Z}$, $zf(z) \xrightarrow{z\to\infty} 0$.
Niech z ustalone i $z \notin \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
f(\xi) &= \frac{1}{(\xi-z)^2} \\
\xi f(\xi) &\xrightarrow{\xi\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

z jest biegunem rzędu 2.

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(z-n)^2} &= -\operatorname{Res}_z\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{(\zeta-z)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\pi\cot(\pi z))\Big|_{\xi=z} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}
\end{aligned}
$$

Rozumowanie to można przeprowadzić jeszcze w inny sposób.
Szereg funkcyjny $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ (ponieważ można go zapisać w takiej postaci:

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2\big(1-\frac{z}{n}\big)^2}
$$

jeśli $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ jest zwarty,

$$\inf_{z\in K} \left|1 - \frac{z}{n}\right| = \sigma_n \to 1$$

Dla dostatecznie dużych n,

$$\left|1 - \frac{z}{n}\right| \geq \frac{1}{2}$$
$$\left|\frac{1}{n^2}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{n}\right)^2}\right| \leq \frac{4}{n^2}$$

Na mocy kryterium Weierstrassa, nasz szereg jest zbieżny bezwzględnie i niemal jednostajnie. W szczególności, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ jest funkcją holomorficzną.

Bieguny $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ i $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \in \mathbb{Z}$ oraz

$$\lim_{z\to n}\left[\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \frac{1}{(z-n)^2}\right] = \frac{\pi^2}{6}$$

Stąd różnica tych funkcji jest funkcją całkowitą. Jeśli udowodnimy, że funkcja $f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ jest ograniczona to jako całkowita musi być stała. Biorąc granicę $z = it \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ przekonujemy się, że stała jest zerowa.

W pasku $\operatorname{Im} z \leq 1$ i z uwagi na 1-okresowość funkcji $f(z)$ jest ona ograniczona. W pasie $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ badamy ograniczoność dla $0 < \operatorname{Re} z < 1$. $z = x + iy$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n-z|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2 + y^2} \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+y^2} < \infty$$
$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi(x+iy)} - e^{-i\pi(x+iy)}\right)}$$

Korzystając z $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$,

$$\leq \frac{\pi^2}{\frac{1}{2}\sinh^2|y|} \xrightarrow{y\to\infty} 0$$

Funkcje ograniczone muszą być stałe i z asymptotyki $f(z)$ musi być równa 0 (tw. Liouville'a).

Zadanie Funkcje Bessela.

$$e^{\frac{1}{2}z\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\xi^n$$

gdzie $J_n(z)$ nazywamy funkcjami Bessela. Wyprowadzimy wzory całkowe na funkcje Bessela.

$$
\begin{aligned}
J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1} \frac{e^{\frac{1}{2}z\left(\xi-\xi^{-1}\right)}}{\xi^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \left|\xi = e^{i\phi},\ \phi \in [-\pi,\pi]\right| \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}z\left(e^{i\phi}-e^{-i\phi}\right)}}{e^{(n+1)i\phi}} e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\phi - n\phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\sin\phi - n\phi)\,\mathrm{d}\phi}_{\text{parzysta}} + \underbrace{\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(zsin\phi - n\phi)\,\mathrm{d}\phi}_{\text{nieparzysta}} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(z\sin\phi - n\phi)\,\mathrm{d}\phi = J_n(z)
\end{aligned}
$$

Wykład 16: Ćwiczenia 16

10 gru 2020