

# Podstawy mechaniki CW

Wykładowca:

Skryba:  
Szymon Cedrowski

# Spis treści

1	Elementarz matematyczny	4
	Ćwiczenia 1 . . . . .	4

# Rozdział 1

## Elementarz matematyczny

### Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020

**Zadanie 2** Dany jest wektor  $\vec{A}$  w układzie określonym przez wersory  $e_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .  $\vec{A}$  ma postać  $\vec{A} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ .

*Dowód.* • długość wektora  $\vec{A}$ :

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = 9 + 16 + 25 = 50$$

$$A = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

- Wersor w kierunku  $\vec{A}$ :

$$\vec{t} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(3, 4, 5)}{5\sqrt{2}}$$

- Długość rzutu  $\vec{A}$  na płaszczyznę  $xy$ :  
Nazwijmy ten rzut przez  $A_{xy}$ .

$$\vec{A}_{xy} = (\vec{A} \cdot \vec{e}_x, \vec{A} \cdot \vec{e}_y, 0) = (3, 4, 0)$$

$$A_{xy} = 5$$

- Wektor prostopadły do  $\vec{A}_{xy}$  i leżący na tej płaszczyźnie :

$$\vec{B} \cdot \vec{A}_{xy} = 0$$

$$3x + 4y = 0$$

$$\vec{B} = \left(x, -\frac{3}{4}x, 0\right), \quad \text{dla dowolnego } x \neq 0$$

■

**Zadanie 3** Wektor  $\vec{A}$  rozłożyć na składową prostopadłą  $\vec{A}_\perp$  i równoległą  $\vec{A}_\parallel$  do wektora  $\vec{t}$ . Znaleźć składowe tych wektorów dla  $\vec{A} = (5, 3, -4)$  oraz  $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ .

*Dowód.* W naszym przypadku  $\vec{t}$  jest wersorem, zatem:

$$\begin{aligned} A_\parallel &= \vec{A} \cdot \vec{t} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \\ \vec{A}_\parallel &= (4, 4, 0) \\ \vec{A}_\perp &= \vec{A} - \vec{A}_\parallel = (1, -1, -4) \end{aligned}$$

Możemy sprawdzić, że

$$\vec{A}_\perp \cdot \vec{A}_\parallel = 0$$

■

**Zadanie 4** Liczymy  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  dla  $\vec{A} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{B} = (4, 0, 0)$ .

*Dowód.*

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 12, -8)$$

Sprawdzamy czy  $\vec{C}$  jest prostopadły do  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ .

$$\begin{aligned} \vec{C} \cdot \vec{A} &= 24 - 24 = 0 \\ \vec{C} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

■

**Dygresja** Symbol (tensor) Levi-Civita:

$$\begin{aligned} \hat{e}_i \times \hat{e}_j &= \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \\ \varepsilon_{ijk} &= \begin{cases} 0 & \text{dowolne 2 indeksy takie same} \\ 1 & \text{permutacja parzysta} \\ -1 & \text{permutacja nieparzysta} \end{cases} \end{aligned}$$

Oczywiście jest to antysymetryczny tensor typu  $(0, 3)$ .