Funkcje

Szymon Cedrowski

Lekcja -1

1 Zbiory i funkcje

Definicja 1 (Zbiór)**.** Pojęcie zbioru traktujemy aksjomatycznie. Jest to pierwotny koncept stojący u podstaw matematyki. Zbiór traktujemy jako nieuporządkowaną kolekcję elementów. Jeśli zbiór A zawiera elementy: $\circ, \triangle, \star$ to zapiszemy go jako $A = \{\circ, \triangle, \star\}$. Kolejność zapisu nie ma znaczenia, przykładowo: $\{\circ, \star, \triangle\} = \{\star, \circ, \triangle\}$.

Przykłady Zbiorów liczbowych używacie od początku waszej edukacji. Na początku w szkole uczyli was jak liczyć, czyli zbioru **liczb naturalnych** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Potem poznaliście **liczby całkowite** $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Potem wam mówili o całej osi liczbowej, czyli o **liczbach rzeczywistych** $\mathbb{R}$. Przy omawianiu ułamków poznaliście **liczby wymierne** $\mathbb{Q} = \left\{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$ (liczby, które da się przedstawić w postaci ułamka).

Definicja 2 (Arytmetyka zbiorów)**.** Rozwinięcie arytmetyki granic zostawię waszym nauczycielom matematyki, natomiast tutaj przypomnę tylko notację. Przy bardziej skomplikowanych operacjach przydatne są diagramy Venna.

- suma zbiorów: $A \cup B$
- różnica zbiorów: $A \setminus B$
- część wspólna zbiorów: $A \cap B$
- iloczyn kartezjański: $A \times B$, w szczególności $A^n = A \underbrace{\times \cdots \times}_{n-1 \text{ razy}} A$

Definicja 3 (Funkcja)**.** Dla danych zbiorów X, Y funkcją nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X dokładnie jednego elementu zbioru Y. X nazywamy **dziedziną**, natomiast Y **przeciwdziedziną** funkcji. Elementy zbioru X są **argumentami**. Zbiór wartości funkcji nazywamy jej **obrazem** i zawiera się on w przeciwdziedzinie. Zapis formalny wygląda następująco:

$$f\colon X \to Y$$

Jeśli $x \in X$, a $y \in Y$ jest odpowiadającym obrazem elementu x, to funkcje wyrażane za pomocą wzoru możemy określić poprzez zapis:

$$f(x) = y$$

My będziemy się najczęściej zajmowali funkcjami typu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definicja 4 (Złożenie funkcji)**.** Złożenie funkcji $f\colon X \to Y$ z funkcją $g\colon Y \to Z$ nazywamy przekształcenie $g \circ f\colon X \to Z$ takie, że $g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

Przykład $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$. Wówczas $g\big(f(x)\big) = 2f(x) + 1 = 2x^2 + 1$

Definicja 5 (Funkcja różnowartościowa)**.** Funkcja różnowartościowa (**injekcja**) to taka, w której każdy element dziedziny przekształca się w inny element przeciwdziedziny (żadne 2 elementy X nie wskazują na ten sam element Y).

Definicja 6 (Funkcja „na”)**.** Funkcja „na” (**surjekcja**) to taka, której obraz jest przeciwdziedziną $f(X) = Y$ (wszystkie elementy Y są użyte).

Definicja 7 (Funkcja wzajemnie jednoznaczna)**.** Funkcja wzajemnie jednoznaczna (**bijekcja**) to taka, która jest różnowartościowa i „na” (injekcja i surjekcja).

Definicja 8 (Funkcja odwrotna)**.** Funkcja odwrotna f^{-1} to taka, która elementy przeciwdziedziny funkcji f przeprowadza na elementy jej dziedziny. Zachodzą więc związki:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{oraz} \quad f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

Innymi słowy,

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X$$

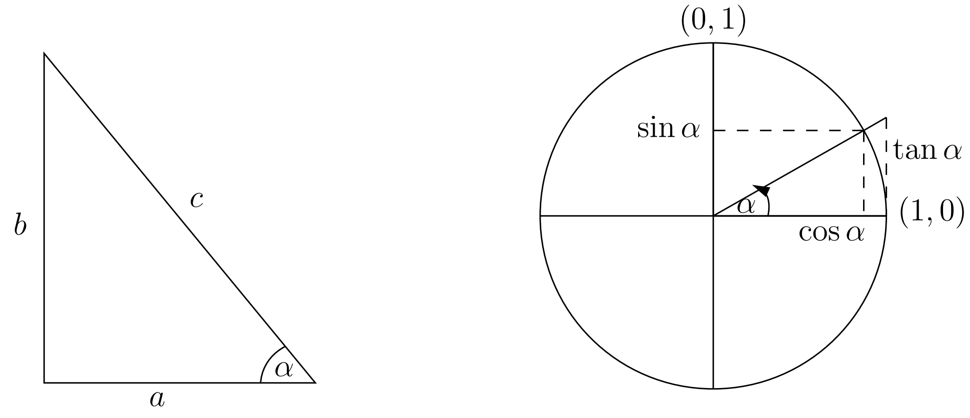
Uwaga! Z powyższej definicji płynie wniosek, że **tylko bijekcje są funkcjami odwracalnymi** (posiadają funkcje odwrotne). Gdyby bowiem f nie była różnowartościowa, to funkcja doń odwrotna dla pewnego argumentu w Y wskazywałaby na dwa różne elementy X, zatem nie byłaby funkcją. Podobnie, gdyby f nie była „na”, to istniałyby elementy Y, które nie wskazywałyby na żaden element X.

2 Funkcje trygonometryczne

Definicja 9 (Na trójkącie prostokątnym)**.** Funkcje trygonometryczne można zdefiniować dla kątów (dziedziny) z zakresu $(0, \pi/2)$ używając stosunków boków trójkąta prostokątnego, rozpiętego przez dany kąt α.

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{b}{c}, & \sin\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\to (0,1) \\
\cos\alpha &= \frac{a}{c}, & \cos\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\to (0,1) \\
\tan\alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, & \tan\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\to (0,+\infty) \\
\cot\alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, & \cot\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\to (0,+\infty)
\end{aligned}
$$

Jednoznaczność zdefiniowania funkcji w ten sposób zapewnia nam fakt, że wybranie kąta α generuje nam za każdym razem taki sam trójkąt, z dokładnością do skali (podobieństwo, cecha kkk). W trójkątach podobnych natomiast stosunki odpowiednich boków są jednakowe.



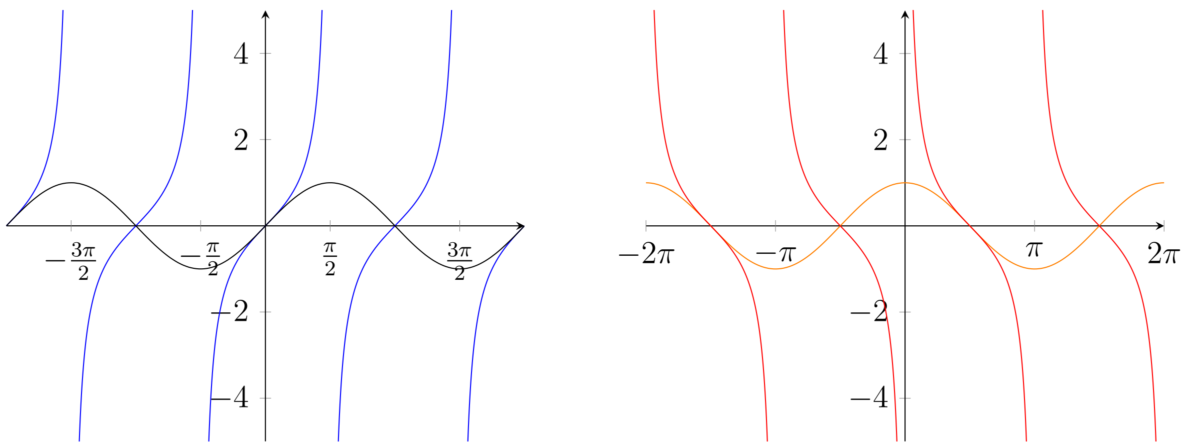
Rysunek 1: Definicje funkcji trygonometrycznych

Definicja 10 (sin, cos na okręgu jednostkowym)**.** Rozszerzenie dziedziny nowo zdefiniowanych funkcji otrzymujemy poprzez użycie okręgu jednostkowego, w którym kąt skierowany od osi x do wybranego promienia wodzącego (antyzegarowo) pełni rolę kąta α. Wówczas wartość $\cos\alpha$ wskazuje nam **rzut punktu przecięcia promienia z okręgiem** na oś x, natomiast $\sin\alpha$ to analogiczny rzut na oś y.
W ten sposób możemy zdefiniować funkcje trygonometryczne dla kątów $\langle 0, 2\pi\rangle$. Jeśli zatoczymy promieniem wodzącym kąt większy niż 2π to naturalnie trafiamy w obszar I ćwiartki, stąd wniosek, że sin i cos są okresowe.

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha), \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin, \cos \colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$$

Definicja 11 (tan, cot)**.** Naturalnie każdą funkcję trygonometryczną i jej odmiany można umieścić na okręgu jednostkowym. W podobny sposób możemy zdefiniować tan pamiętając, że chcemy by $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$. Wówczas z podobieństwa odpowiednich trójkątów (polecam sprawdzić) wynika, że tan ma swoją reprezentację tak jak na Rysunku 1. Stąd widzimy, że tan jest również okresowy, z okresem podstawowym π. Tak samo dla funkcji $\cot\alpha = 1/\tan\alpha$.

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan(\alpha), \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot(\alpha), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\tan \colon \mathbb{R} \setminus \left\{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$\cot \colon \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$



Rysunek 2: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$