Grawitacja, orbity kołowe

Szymon Cedrowski

Lekcja 2

1 Siła grawitacji

Definicja 1 (Siła grawitacji)**.** Oddziaływanie grawitacyjne między dwiema punktowymi masami możemy opisywać za pomocą siły wyrażonej w następujący sposób:

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = m_2\mathbf{g}_{21}$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym od ciała 1 do ciała 2. Zgodnie z wcześniej wprowadzoną pisownią, moglibyśmy napisać $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{21}$.

Wniosek 1. Wartość siły grawitacji to moduł wektora siły, a zatem

$$F_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Definicja 2 (Energia potencjalna grawitacyjna)**.** Definiujemy ją jako pracę potrzebną do przeniesienia punktu materialnego z nieskończoności do położenia r. Szkolna definicja pracy to $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, o ile siła jest stała. Jeśli tak nie jest (jak w przypadku pola grawitacyjnego), wówczas musimy już całkować. Można się wtedy przekonać, że energia wyraża się wzorem:

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

Można zauważyć, że wzór na energię pola grawitacyjnego różni się od szkolnego mgh. Wyprowadźmy więc to szkolne przybliżenie, którego się używa przy powierzchni Ziemi.

Tym razem przez energię potencjalną rozumiemy pracę, którą należy wykonać aby przenieść coś z wysokości r na wysokość $r + h$. Z wyżej zapisanej definicji wynika, że

$W(r \to r+h) = E(r+h) - E(r)$.

$$\begin{aligned} W(r \to r+h) &= \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r+h} \\ &= GmM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h}\right) \\ &= GmM\frac{h}{r(r+h)} \\ &\overset{h \ll r}{\approx} GmM\frac{h}{r^2} = mgh \end{aligned}$$

Twierdzenie 1 (Twierdzenia Newtona o powłoce)**.** Weźmy sferyczną powłokę o pewnej masie. Wówczas:

1. Na punkt materialny znajdujący się wewnątrz powłoki nie działa żadna siła grawitacyjna, niezależnie od położenia w tej powłoce.
2. Na punkt materialny znajdujący się na zewnątrz powłoki działa taka sama siła, jak od punktu materialnego znajdującego się w centrum sfery i o jej całkowitej masie.

Wniosek 2. Sferycznie symetryczne ciała oddziałują grawitacyjnie z innymi ciałami jak punkty materialne. Bardziej ściśle – pole grawitacyjne pochodzące od sferycznie symetrycznego ciała jest takie samo jak pole pochodzące od punktu materialnego o tej samej masie.

2 Ruch po orbicie kołowej

Jak przekonaliśmy się poprzednio, ruch po okręgu może być przedstawiony w ogólności jako ruch pod wpływem siły dośrodkowej. O ile ruch ten jest spowodowany oddziaływaniem grawitacyjnym, możemy zapisać równość tych dwóch sił.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathrm{d}} = -\mu\omega^2\mathbf{r_{21}} &= -\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r}_{21} = \mathbf{F}_{21} \\ \omega^2 &= \frac{G(m+M)}{r^3} \\ \frac{4\pi^2}{P^2} &= \frac{G(M+m)}{r^3} \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy zależność łączącą okres orbitalny z promieniem orbity kołowej. Zapamiętajmy to równanie... w ogólnym rozwiązaniu problemu dwóch ciał przybierze bowiem postać III prawa Keplera ;-)