Pochodne

Szymon Cedrowski

Lekcja 0

1 Jak rozumieć pochodną?

Pochodna to kolejna operacja matematyczna – znasz już takie jak dodawanie, odejmowanie, pierwiastkowanie itd. To jest po prostu kolejna. Operacja ta działa na funkcje. Odpowiada na następujące pytanie:

Jak szybko zmienia się dana funkcja? Szybko rośnie? – pochodna będzie duża (i dodatnia); szybko maleje? – pochodna będzie duża na minusie; zmienia się wolno? – pochodna będzie mała co do modułu... nie zmienia się wcale? – zerowa pochodna

A jak można określić tempo zmian? **Porównując przyrost wartości funkcji na danym przedziale argumentów.** Zmiany te chcemy badać możliwie jak najdokładniej; jeśli funkcja szybko oscyluje a my bierzemy duży przedział argumentów, obejmujący np. kilka takich oscylacji, to tracimy informacje o lokalnych zmianach w przebiegu tej funkcji!

Żądamy zatem, aby porównywać bardzo bardzo (nieskończenie) małe przyrosty. Innymi słowy, definiujemy pochodną jako:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

gdzie Δx jest bardzo małe – dążące do zera. Formalnie definicję tą zapiszemy używając granic:

Definicja 1 (Pochodna)**.**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Oznacza to tyle, że zbliżając się coraz bardziej do 0 z wartością Δx zbliżamy się do dokładnej wartości pochodnej funkcji. W granicy otrzymujemy dokładnie pochodną.

Istnieje logiczniejsze oznaczenie pochodnej – w **notacji Leibniza**:

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Mówi to mniej więcej tyle (zgodnie z definicją), że pochodna to infinitezymalny (nieskończenie mały) przyrost funkcji podzielony przez infinitezymalny przyrost odpowiadających argumentów. Możemy też to traktować jako operator – tak samo jak piszesz symbol $\sqrt{()}$ chcąc powiedzieć, że wyciągasz pierwiastek, tak możesz napisać $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}()$ mówiąc, że chcesz wyciągać pochodną względem x, z tego co stoi po prawej stronie.

Wniosek 1. Chyba nikomu nie przyszłoby do głowy, żeby skracać jakieś fragmenty symbolu pierwiastka choćby z cyframi... Nie powinno też w takim razie przejść przez myśl, żeby skrócić ze sobą te literki d. Traktujemy je dokładnie tak samo – jak symbol! Operator to taka maszynka, do której wrzucasz funkcję i dostajesz inną funkcję.

2 Odniesienie do fizyki

Pochodne i rachunek różniczkowy są nierozerwalnie związane z fizyką. Powstały właśnie po to, aby sprostać jej potrzebom.

Definicja 2. Mówiąc, że coś **różniczkujesz** po prostu mówisz, że wyciągasz z tego czegoś pochodną.

Z pochodnymi mamy do czynienia tak naprawdę od pierwszych lekcji fizyki w szkole! Co to jest prędkość? Z definicji – zmiana drogi w czasie. Wiemy i rozumiemy, że aby otrzymać prędkość w konkretnej chwili musimy wziąć pod uwagę jedynie zmianę drogi w krótkim czasie, bliskim tej szukanej chwili. Inaczej otrzymamy raczej prędkość średnią na danym przedziale czasu, czyż nie?
Czym więc się różni prędkość w danej chwili od pochodnej położenia po czasie? – niczym!

$$v_x(t) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{Leibniz} \equiv \underbrace{x'(t)}_{Lagrange} \equiv \underbrace{\dot{x}}_{Newton}$$

To ostatnie oznaczenie jest zarezerwowane dla pochodnych względem czasu.

A czym jest przyspieszenie? Zmianą prędkości w czasie, a więc po prostu pochodną prędkości po czasie. Skoro prędkość jest już sama w sobie pochodną drogi po czasie to wynika stąd, że przyspieszenie jest drugą pochodną (pochodną z pochodnej) drogi po czasie!

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \equiv x''(t) \equiv \ddot{x}$$

Spójrzmy teraz na drugą zasadę dynamiki Newtona – podstawowe równanie nawet na szkolnej fizyce :-)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Teraz z łatwością dostrzegamy, że chcąc znaleźć funkcję położenia danej cząstki w czasie (jej trajektorię pod wpływem siły $\mathbf{F}$), musimy rozwiązać równanie angażujące pochodne:

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}$$

Definicja 3. Równanie, w którym występują pochodne nazywamy **równaniem różniczkowym**.

3 Pochodne funkcji elementarnych

Podaję je bez dowodów, które raczej na pewno pojawią się na matematyce w 3 klasie...

$$
\begin{aligned}
&f(x) = c && f'(x) = 0 \\
&f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R} && f'(x) = nx^{n-1} \\
&f(x) = \sin x && f'(x) = \cos x \\
&f(x) = \cos x && f'(x) = -\sin x \\
&f(x) = \tan x && f'(x) = 1/\cos^2 x \\
&f(x) = \cot x && f'(x) = -1/\sin^2 x \\
&f(x) = a^x && f'(x) = a^x \ln a \\
&f(x) = \ln x && f'(x) = x^{-1} \\
&f(x) = \exp x && f'(x) = \exp x
\end{aligned}
$$

4 Reguły różniczkowania

Znów bez dowodów, które pojawią się na lekcjach matematyki. Wszystkie te dowody opierają się na intensywnym przekształcaniu definicji pochodnej...

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(cf(x)\big) &= c\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x) \pm g(x)\big) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)g(x)\big) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g(x) + f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

Chain rule, czyli pochodna funkcji złożonej:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}
$$

5 Algorytm liczenia pochodnych

1. Dokładnie przyjrzyj się wyrażeniu, które różniczkujesz i zobacz czy nie możesz uprościć jakiś wyrazów.

2. Zobacz, czy funkcja różniczkowana nie jest tak naprawdę sumą funkcji. Jeśli jest, rozbij to na sumę pochodnych.

3. Jeśli masz jakieś stałe przemnożone przez funkcje, które różniczkujesz, możesz je wyrzucić przed pochodną.

4. Jeśli wyraźnie widzisz, że funkcja pod operatorem jest iloczynem lub ilorazem istotnie różnych funkcji, użyj odpowiednich reguł różniczkowania, żeby rozbić to na prawdopodobnie prostsze pochodne.

5. Jeśli wciąż nie możesz policzyć pochodnych, tj. jeśli pod operatorem nie masz funkcji elementarnych, zastanów się jak zapisać widoczne funkcje w postaci funkcji złożonych i podstaw odpowiednie symbole.
6. Użyj chain rule, wyraź wcześniej podstawione symbole przez pierwotne zmienne (podstawienie wsteczne), policz pochodne używając tablicy pochodnych elementarnych.
7. Smacznego!

Przykład Policzymy pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin x} + 5\tan 2x \cdot \big(3x^2 + 5x + 2\big)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\sin 2x}{\sin x} + 5\tan 2x \cdot \big(3x^2+5x+2\big)\right] &\overset{1*}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2\cos x + 5\tan 2x \cdot \big(3x^2+5x+2\big)\right] \\
&\overset{2}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\cos x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[5\tan 2x \cdot \big(3x^2+5x+2\big)\right] \\
&\overset{3}{=} 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x + 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tan 2x \cdot \big(3x^2+5x+2\big)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{4}{=} -2\sin x + 5\big(3x^2+5x+2\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan 2x + 5\tan 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(3x^2+5x+2\big) \\
&\overset{5}{=} -2\sin x + (30x+10)\tan 2x + \big(15x^2+25x+10\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(g\big(h(x)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

gdzie $h(x) = 2x$, a $g(h) = \tan h$,

$$
\begin{aligned}
&\overset{6}{=} -2\sin x + (30x+10)\tan 2x + \big(15x^2+25x+10\big)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\
&= -2\sin x + (30x+10)\tan 2x + \big(15x^2+25x+10\big)\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2
\end{aligned}
$$

$*$ – użyłem tożsamości trygonometrycznej: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Z czasem każdy nabiera takiej wprawy, że większość tych wszystkich operacji przeprowadza w pamięci. Wystarczy trochę poćwiczyć!