Podstawy mechaniki CW

Wykładowca:

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Elementarz matematyczny

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020

Zadanie 2 Dany jest wektor $\vec{A}$ w układzie określonym przez wersory e_i, $i \subset \{1,2,3\}$. $\vec{A}$ ma postać $\vec{A} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$.

Dowód.
- długość wektora $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \vec{A} \cdot \vec{A} = 9 + 16 + 25 = 50 \\ A &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Wersor w kierunku $\vec{A}$:

$$\vec{t} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(3,4,5)}{5\sqrt{2}}$$

- Długość rzutu $\vec{A}$ na płaszczyznę xy:
  Nazwijmy ten rzut przez A_{xy}.

$$\begin{aligned} \vec{A}_{xy} &= \left(\vec{A} \cdot e_x, \vec{A} \cdot e_y, 0\right) = (3,4,0) \\ \vec{A}_{xy} &= 5 \end{aligned}$$

- Wektor prostopadły do $\vec{A}_{xy}$ i leżący na tej płaszczyźnie :

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{A}_{xy} &= 0 \\ 3x + 4y &= 0 \\ \vec{B} &= \left(x, -\frac{4}{3}x, 0\right), \quad \text{dla dowolnego } x \neq 0 \end{aligned}$$

∎

Zadanie 3 Wektor $\vec{A}$ rozłożyć na składową prostopadłą $\vec{A}_\perp$ i równoległą $\vec{A}_\parallel$ do wektora $\vec{t}$. Znaleźć składowe tych wektorów dla $\vec{A} = (5, 3, -4)$ oraz $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Dowód. W naszym przypadku $\vec{t}$ jest wersorem, zatem:

$$\begin{aligned}
A_\parallel &= \vec{A} \cdot \vec{t} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \\
\vec{A}_\parallel &= (4, 4, 0) \\
\vec{A}_\perp &= \vec{A} - \vec{A}_\parallel = (1, -1, -4)
\end{aligned}$$

Możemy sprawdzić, że

$$\vec{A}_\perp \cdot \vec{A}_\parallel = 0$$

■

Zadanie 4 Liczymy $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ dla $\vec{A} = (1, 2, 3)$, $\vec{B} = (4, 0, 0)$.

Dowód.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 12, -8)$$

Sprawdzamy czy $\vec{C}$ jest prostopadły do $\vec{A}$, $\vec{B}$.

$$\begin{aligned}
\vec{C} \cdot \vec{A} &= 24 - 24 = 0 \\
\vec{C} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}$$

■

Dygresja Symbol (tensor) Levi-Civity:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_i \times \hat{e}_j &= \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \\
\varepsilon_{ijk} &= \begin{cases} 0 & \text{dowolne 2 indeksy takie same} \\ 1 & \text{permutacja parzysta} \\ -1 & \text{permutacja nieparzysta} \end{cases}
\end{aligned}$$

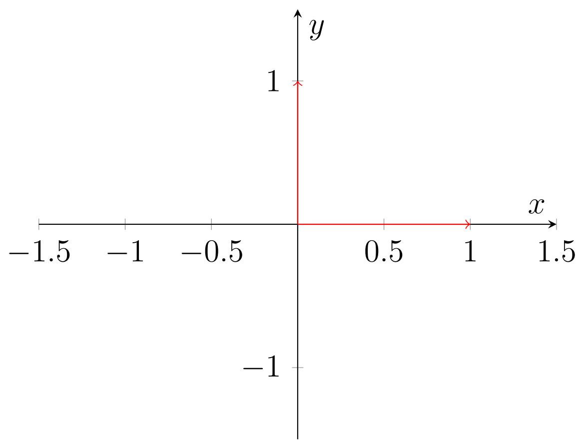
Oczywiście jest to antysymetryczny tensor typu $(0, 3)$.

Wykład 2: Ćwiczenia 2

22 paź 2020

Zadanie 7 Oblicz iloczyn macierzy $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ oraz wektora $\vec{r} = (1, 0)$: $\vec{r}' = \mathbf{R}\vec{r}$, a następnie narysuj wektory $\vec{r}$ i $\vec{r}'$ dla $\phi = \pi/2$.

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.1

Zadanie 8 Policzyć pochodne funkcji jednej zmiennej:

1.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4x^7 + 3x^5 - 2x^4 + 7x - 2}{3x^4} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}x^3 + x - \frac{2}{3} + \frac{7}{3}x^{-3} - \frac{2}{3}x^{-4}\right) \\ &= 4x^2 + 1 - 7x^{-4} + \frac{8}{3}x^{-5} \end{aligned}$$

2. $\mathrm{d}/\mathrm{d}x\, f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) &= \frac{1}{\tan'\big(\arctan(x)\big)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2\big(\arctan(x)\big)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Zadanie 9 $\vec{A} = \dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Widzimy, że $\left\|\vec{A}\right\| = 1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\dot{x}r - r^{-1}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})x}{r^2} \\
&= \frac{\dot{x}y^2 + \dot{x}z^2 - xy\dot{y} - xz\dot{z}}{r^3}
\end{aligned}
$$

Można sprawdzić, że $\vec{A}(t) \cdot \vec{A}'(t) = 0$. Można to wszystko zrobić ogólniej i prościej.

Twierdzenie 1. Weźmy $A(\vec{\alpha})$ o stałej długości $\left|\vec{A}\right| = B$. Wówczas zachodzi:

$$
\begin{aligned}
A(\vec{\alpha}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \\
\iff \vec{A}(\alpha) \perp \vec{A}'(\alpha)
\end{aligned}
$$

Dowód.

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(\alpha) \cdot \vec{A}(\alpha) &= B^2 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\vec{A}(\alpha) \cdot \vec{A}(\alpha)\right] &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\alpha} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{A} &= 0
\end{aligned}
$$

■