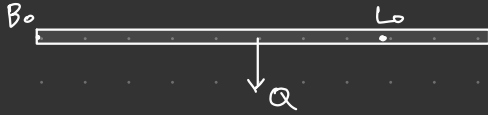


Zadanie 1

Bolek i Lolek niosą drabinę o długości L i ciężarze Q . Bolek podtrzymuje drabinę na jej końcu, a Lolek w odległości $1/4 L$ od drugiego końca drabiny. Jaki ciężar przypada na Bolka, a jaki na Lolka?



Drabina jest w równowadze
 $\Rightarrow \vec{M} = 0$
 $\Rightarrow M_{L0} = 0 : \frac{1}{4} L Q = \frac{3}{4} L Q_B$

$$\vec{M}_{B0} = 0 : \frac{1}{2} L Q = \frac{3}{2} L Q_L \Rightarrow Q_L = \frac{2}{3} Q \quad \Rightarrow Q_B = \frac{1}{3} Q$$

\Rightarrow Na Lolka przypada $\frac{2}{3} Q$, na Bolka $\frac{1}{3} Q //$

Zadanie 2

Na spokojnym jeziorze pływa jacht $L = 5$ m i masie $M = 500$ kg. Jacht spoczywa względem brzegu. Na środku jachtu znajduje się chłopiec o masie $m = 50$ kg. O ile przesunie się jacht względem początkowego położenia na jeziorze, jeśli chłopiec przemieści na jego dziób, a opory ruchu jachtu w wodzie można pominąć.

Środek masy zachowany, bo brak oporów.



$$x \cdot M = \left(\frac{L}{2} - x\right) m$$

$$2xM = mL - 2xm$$

$$2x(M+m) = mL$$

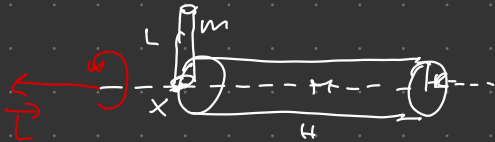
$$\Rightarrow x = \frac{m}{M+m} \cdot \frac{L}{2} = \frac{50}{550} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{22} \text{ m}$$

\hookrightarrow przesunięcie względem środka masy

\hookrightarrow dlatego punkt ten nie zmienia //

Zadanie 3

Ile obrotów ogonem musi wykonać kot (względem podłoża), aby, spadając swobodnie, odwrócić tułów o 180 stopni? Przyjmijmy dla uproszczenia, że tułów kota można traktować jako wałek o wysokości H , promieniu R i masie M , a jego ogon jako sztywny cienki pręt o długości $L = 3R$ i masie $m = 1/20 M$. Przyjmijmy, że ten pręt (ogon) zaczepiony jest na osi wałka, prostopadle do niej i może swobodnie obracać się prostopadle do tej osi.



$$I_y = \frac{mL^2}{12} + m \frac{L^2}{4}$$

$$\vec{L} = \text{const.} = 0 \quad (= I \omega)$$

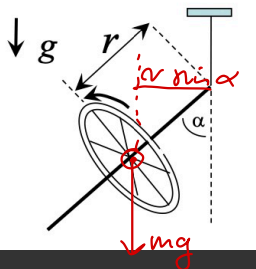
$$\frac{mL^2}{3} \omega_{og} = \frac{1}{2} M R^2 \omega_0$$

$$\frac{\omega_{og}}{\omega_0} = \frac{3}{2} 20 \cdot \frac{1}{9} = 3,33$$

\Rightarrow Ogon obróci się $\frac{5}{3}$ razy.

Zadanie 4

Koło rowerowe o masie M zostało umocowane w połowie sztywnego pręta o długości $2r$. Po ustawieniu osi koła pod kątem α do pionu, rozpędzono koło do dużej prędkości kątowej, a koniec pręta zawieszono na wiotkim sznurku (rys.). Układ zaczął wykonywać precesję z częstością Ω (wokół osi pionowej przechodzącej przez punkt zawieszenia). Wyznacz wartość momentu pędu L koła. W rozwiązaniu pomin opory ruchu. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi g , a masa pręta jest pomijalnie mała (pręt jest nieważki).



$$\Omega = \frac{M g r \sin \alpha}{L}$$

$$\Rightarrow L = \frac{M g r \sin \alpha}{\Omega}$$

Zadanie 5

Dwa wózki o masie m i $2m$ ustawiono na torze powietrznym i połączono sprężyną o współczynniku sprężystości k . Z jaką prędkością będzie przemieszczał się środek masy układu wózków, jeśli w chwili początkowej wózek o masie m spoczywał, a wózkowi o masie $2m$ nadano prędkość V_0 ? Jaka była częstość oscylacji położenia wózków względem środka masy układu? Opory ruchu można pominąć.



Potężymy na ruch układu.

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + A \sin \omega t \quad (\text{bo } x(0) = x_0)$$

$$\text{gdzie } \omega^2 = \frac{k}{\mu} = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$$

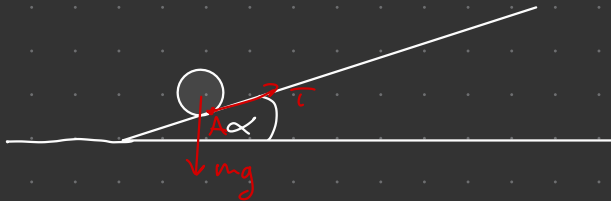
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{k \frac{3m}{2m^2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{k}{m}}$$

Nie ma tarcia $\Rightarrow p = \text{const.}$

$$p(0) = 2m v_0 = p_{SM} = 3m v_{SM} \Rightarrow v_{SM} = \frac{2}{3} v_0$$

Zadanie 6

Kulka o masie m i promieniu R , pchnięta z pewną prędkością początkową V_0 , wtacza się bez poślizgu po równi pochyłej nachylonej pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. Przyjmując, że kulka porusza się wzdłuż kierunku największego nachylenia równi do poziomu, wyznacz wartość siły tarcia działającej na kulkę. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Względem p.-A kulka wykonuje czysty obrót, bo ruch bez poślizgu

$$\Rightarrow M_A = mgr \sin \alpha \cdot R$$

$$I \varepsilon = \left(\frac{2}{5} m R^2 + m R^2 \right) \frac{a}{R} = \frac{7}{5} m R a$$

$$= R mgr \sin \alpha \Rightarrow a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

$$\text{Siły w on' ruchu: } -ma = T - mgr \sin \alpha$$

$$\Rightarrow T = mgr \sin \alpha - mg \frac{5}{7} \sin \alpha = \frac{2}{7} mgr \sin \alpha$$

Zadanie 7

Cienki, sztywny pręt o długości l zawieszono w odległości $\frac{1}{4}$ od jego końca. Wyznacz częstość drgań pręta po wychyleniu go z położenia równowagi? Przyspieszenie ziemskie wynosi g .



Wohadło fizyczne, $I_0 = \frac{m l^2}{12} + m \left(\frac{l}{4} \right)^2 = \frac{7}{48} m l^2$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{mgr \frac{l}{4}}{\frac{7}{48} m l^2} = \frac{g}{l} \frac{48}{28} = \frac{12}{7} \frac{g}{l}$$

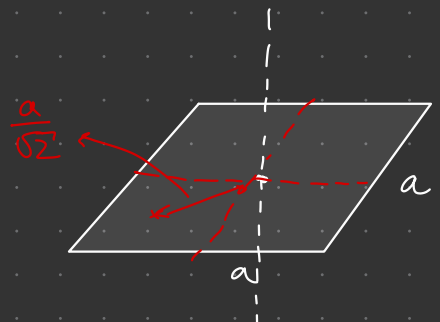
$$\Rightarrow \omega = 2 \sqrt{\frac{3}{7} \frac{g}{l}} //$$

Zadanie 8

Korzystając z metody skalowania (bez wykorzystania całkowania), wyznacz moment bezwładności kwadratowej płytki o boku a , względem osi prostopadłej do powierzchni przechodzącej przez środek masy. Masa płytki wynosi m .

Moment ten musi mieć postać:

$$I = \alpha m a^2$$



Przebieg pływca ma 2 przytępcze i lewygi numer "de momentów rozp. on".

$$I = 4 \left[\alpha \frac{m}{4} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{m}{4} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{\alpha}{4} m a^2 + \frac{1}{2} m a^2 = \alpha m a^2$$

$$\Rightarrow \frac{3\alpha}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow I = \frac{2}{3} m a^2 //$$

Zadanie 9

Wąż napędowy o kołowym przekroju poprzecznym i promieniu r zastąpiono rurą o promieniu wewnętrznym równym $1/2 r$ i promieniu zewnętrznym R . Jaki musi być promień zewnętrzny R rury, aby nowy wąż miał tę samą wytrzymałość na skręcanie? Jaka będzie jego masa?

2 wykładu: moment geom. takiej pustej rury:

$$J_r = \frac{\pi}{2} \left(R^4 - \frac{r^4}{16} \right) \quad \text{a moment solidnej: } J_0 = \frac{\pi r^4}{2}$$

Też sama wytrzymałość \Rightarrow ten sam moment:

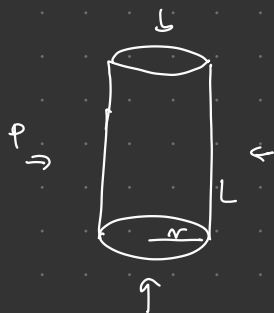
$$\frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2} \left(R^4 - \frac{r^4}{16} \right) \Rightarrow R^4 = \frac{17}{16} r^4 \Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt[4]{17} r$$

Masa jest prop. do pola przekroju.

$$\frac{m}{m_0} = \frac{S}{S_0} = \frac{R^2 - r^2}{r^2} = \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{17}}{4} - 1 \approx 0,03$$

Zadanie 10

W ciekowej komorze ciśnieniowej umieszczono walec o promieniu r i długości L . Wyznacz zmianę objętości walca po wytworzeniu w komorze ciśnienia o wartości p , jeśli wiadomo, że wykonano go z materiału o module Younga E i współczynniku Poissona μ .



wypokroś jest róbkiem o wyniku:

$$\left(1 - \frac{p}{E} \right) \text{ a rozciągana o } \left(1 + \frac{\mu p}{E} \right)^2$$

Tak samo z promieniem walca.

$$\Rightarrow L' = L \left(1 - \frac{p}{E} \right) \left(1 + \frac{\mu p}{E} \right)^2$$

$$r' = r \left(1 - \frac{p}{E} \right) \left(1 + \frac{\mu p}{E} \right)^2$$

$$V' = \pi r'^2 (1 - \frac{p}{E})^2 \left(1 + \frac{\mu p}{E} \right)^4 L \left(1 - \frac{p}{E} \right) \left(1 + \frac{\mu p}{E} \right)^2$$

$$= V \left(1 - \frac{p}{E} \right)^3 \left(1 + \frac{\mu p}{E} \right)^6 \Rightarrow \text{nie wykładnie} \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{3(2\mu - 1)}{E} p$$