

Analiza III R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

1	Geometria różniczkowa	4
	Ćwiczenia 1	4

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020 do powtórki: Twierdzenie o funkcji uwikłanej i badanie powierzchni zanurzonej w \mathbb{R}^n .

Definicja 1. Atlas – zbiór map $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (lokalnych układów współrzędnych), gdzie M jest rozmaitością

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

Do badania czy rozmaitość można pokryć układem współrzędnych służy twierdzenie o funkcji uwikłanej.

Mapa rzutuje w dół $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, parametryzacja w górę $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Zadanie 1 Rozważmy funkcję $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1$. Wówczas sfera \mathbb{S}^n to $f^{-1}(0)$. Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 1$ i niech $f^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} M \subset \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć system parametryzujący ten zbiór.

Dowód. Równanie domniemanej powierzchni możemy zapisać w postaci $2y^2 - 1 = \rho^2$, gdzie $\rho^2 = x^2 + z^2$ jest kwadratem współrzędnej „radialnej” w płaszczyźnie xz . Widzimy, że $y(\rho)$ opisuje hiperbolę.

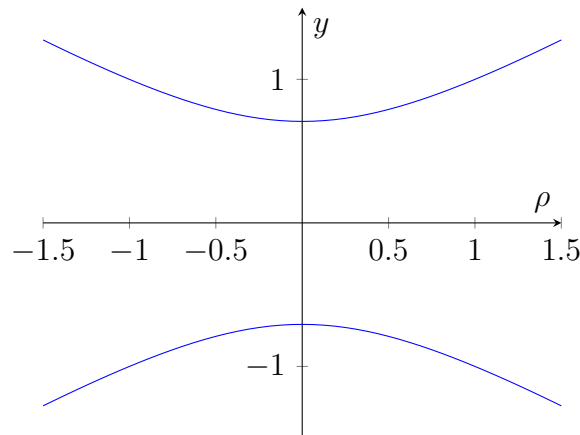
Ten zbiór M to hiperboloida dwupowłokowa. Czy ten zbiór tworzy powierzchnię?

$$f'(x, y, z) = [2x, -4y, 2z]$$

$f' = 0 \implies \text{rk } f' = 0$ lub $f' \neq 0 \implies \text{rk } f' = 1$. W naszym przypadku $f' \neq 0$, zatem M jest powierzchnią 2-wymiarową w \mathbb{R}^3 . Będziemy zastanawiać się nad $T_P M$ i nad afiniczną płaszczyzną styczną. Przestrzeń styczna w punkcie $p_0 = [x_0, y_0, z_0]$ to podprzestrzeń wektorowa. Afiniczna płaszczyzna styczna to trochę coś innego.

Zaproponujmy parametryzację górnego płata tej powierzchni $M_+ = \{p \in M : y > 0\}$. Będziemy parametryzować płaszczyzną xz .

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + s^2 + t^2} \\ t \end{bmatrix} \in M_+$$

Rysunek 1.1: Wykres $y(\rho)$, czyli przekrój hiperboloidy dwupowłokowej.

Przestrzeń styczna do p_0 to jądro tej pochodnej.

$$\begin{aligned} T_{p_0}M_+ &= T_{p_0}M = \ker[2x_0, -4y_0, 2z_0] \\ &= \left\{ [v_x, v_y, v_z] : x_0v_x - 2y_0v_y + z_0v_z = 0 \right\} \end{aligned}$$

Afiniczna płaszczyzna styczna polega na tym, że bierzemy tą wyżej opisaną przestrzeń i dodajemy punkt zaczepienia. Są to punkty postaci $\{p_0 + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in T_{p_0}M\}$. Weźmy wektor $[w_x, w_y, w_z] = \mathbf{w} = p_0 + \mathbf{v}$. Stąd,

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x - x_0 \\ w_y - y_0 \\ w_z - z_0 \end{bmatrix}$$

Wstawiając to do równania na jądro,

$$\begin{aligned} \{p_0 + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in T_{p_0}M\} &= \left\{ [w_x, w_y, w_z] : x_0w_x - 2y_0w_y + z_0w_z - (x_0^2 - 2y_0^2 + z_0^2) = 0 \right\} \\ &= \left\{ [w_x, w_y, w_z] : Aw_x + Bw_y + Cw_z + D = 0 \right\} \end{aligned}$$

■

Wstęp do form liniowych 1-formy na przestrzeni V : $V^* = \bigwedge^1 V^*$

Przykład 2-formy antysymetrycznej na przestrzeni V : oznaczenie $\bigwedge^2 V^* : \omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ oraz antysymetryczne $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$.

Ogólniej (jakiś tam funktor w kategorii czegoś tam xD): $\bigwedge^k V^*$: odwzorowania k -liniowe, antysymetryczne.

$$\begin{aligned} \omega^k \wedge \alpha^l &\in \bigwedge^{k+l} V^*, \quad \text{2-liniowe, łączne} \\ \omega^k \wedge \alpha^l &= (-1)^{kl} \alpha^l \wedge \omega^k \\ \dim \bigwedge^k V^* &= \binom{n}{k}, \quad n = \dim V \end{aligned}$$

Niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ – baza V . Wówczas baza dualna to $\{e^1, \dots, e^n\}$.

Baza $\bigwedge^2 V^*$: $\{e^i \wedge e^j : 1 \leq i < j \leq n\}$. Stąd potem kombinatoryczny wzór na wymiar (dbamy o uporządkowane iloczyny).

Zadanie 2 Niech $\beta \in \bigwedge^{k+1} V^*$ i $0 \neq \omega \in \bigwedge^1 V^*$ takie, że $\beta \wedge \omega = 0$. Wykazać, że istnieje k -forma α taka, że $\beta = \alpha \wedge \omega$.

Można zrobić tak, żeby baza V^* była $\{\omega, e^2, \dots, e^n\}$. Zatem,

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_{k+1}} \\ \beta \wedge e^1 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} (e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_{k+1}}) \wedge e^1 = 0\end{aligned}$$

tam gdzie $e^{i_1} = e^1$ i tak iloczyn zewnętrzny się zeruje. Stąd, jeśli $e^{i_1} > 1$, to odpowiednie $\beta_{xyz} = 0$. Stąd,

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \dots i_{k+1}} e^1 \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_{k+1}} \\ \beta &= \alpha \wedge \omega = (-1)^k \omega \wedge \alpha = (-1)^k e^1 \wedge \alpha\end{aligned}$$

Zatem α istnieje i ma postać:

$$(-1)^k \alpha = \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \dots i_{k+1}} e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_{k+1}}$$

Jednakże α nie jest jednoznaczne, bo mamy wciąż swobodę wziąć $\alpha' = \alpha + t\omega$ i to też działa. Czy jest więcej stopni swobody?