Analiza I R CW

Wykładowca:

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Wykład 1: Ćwiczenia 1 – Podstawy logiki i elementy teorii mnogości

15 paź 2020

Polecana literatura

1. Tomasz Radożycki – Rozwiązujemy zadania z analizy matematycznej cz. I (BUW elektorniczny)

Zadania

1. Dowód niewymierności $\sqrt{2}$. Nie wprost:

   Dowód.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \wedge (p, q) = 1 \\
2q^2 &= p^2 \\
\implies p^2 &= 2k \implies p = 2m \\
\implies 4m^2 &= 2q^2 \implies q = 2l
\end{aligned}
$$

   To daje sprzeczność bo wyszło nam, że $(p, q) \neq 1$. ∎

2. Struktura logiczna dowodu nie wprost.

   Dowód. x – stwierdzenie, że $\sqrt{2}$ jest niewymierne. Uzyskaliśmy $\sim x \implies F$, gdzie F jest zdaniem jawnie fałszywym. Zdanie z tą implikacją jako całość jest prawdziwe.

$$
\begin{aligned}
\sim \left[\sim (\sim x \implies F)\right] &\iff \sim (\sim x \wedge \sim F) \\
&\iff x \vee F
\end{aligned}
$$

   Dostaliśmy alternatywę, że x lub F jest prawdziwe. F jest jawnie nieprawdziwe, zatem x jest prawdziwe. ∎

3. $A \cup \big(B \setminus C\big) = \big[(A \cup B) \setminus C\big] \cup (A \cap C)$

   Dowód.

$$
\begin{aligned}
\Big[\big(A \setminus C\big) \cup \big(B \setminus C\big)\Big] \cup (A \cap C) &= \big(A \cap C'\big) \cup \big(B \cap C'\big) \cup (A \cap C) \\
&= \Big[A \cap \big(C \cup C'\big)\Big] \cup \big(B \cap C'\big) \\
&= A \cup \big(B \setminus C\big)
\end{aligned}
$$

   ∎

4. $A \setminus \Big[B \setminus \big(C \setminus D\big)\Big] = \big(A \setminus B\big) \cup \big[(A \cap C) \setminus D\big]$

Dowód.

$$\begin{aligned} A \setminus \Big[B \setminus \big(C \setminus D\big)\Big] &= A \cap \Big[B \cap \big(C \cap D'\big)'\Big]' \\ &= \big(A \cap B'\big) \cup \big(A \cap C \cap D'\big) \\ &= \big(A \setminus B\big) \cup \big[(A \cap C) \setminus D\big] \end{aligned}$$

■

5. $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \leq k(x_1 - x_2)\big\}$

Dowód. Tego potworka oznaczamy jako A.

$$(x_1, x_2) \in A \iff \exists_{k\in\mathbb{Z}}\, x_1^2 + x_2^2 \leq k(x_1 - x_2)$$

Hipoteza jest taka, że dla każdego (x_1, x_2) mogę znaleźć takie k, poza punktami gdzie $x_1 = x_2$. Lewa strona jest zawsze dodatnia. Prawa strona może być a) dodatnia, b) ujemna, c) 0.

Dla a) możemy znaleźć k dowolnie duże. Dla b) można wziąć k na tyle ujemne, żeby nierówność zachodziła. Dla $x_1 = x_2$ prawa strona jest równa 0, co nie może zajść poza $(0, 0)$.

Stąd widać już, że $A = \Big(\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x_1, x_2) \colon x_1 = x_2\big\}\Big) \cup \big\{(0, 0)\big\}$. ■

6. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n; \quad K_n = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 - 3nx_1 + 4nx_2 \leq 25\big\}$

Dowód.

$$\begin{aligned} (*) = x_1^2 + x_2^2 - 3nx_1 + 4nx_2 - 25 &= \left(x_1 - \frac{3n}{2}\right)^2 + (x_2 + 2n)^2 - 25 - \frac{9n^2}{4} - 4n^2 \\ &= \left(x_1 - \frac{3n}{2}\right)^2 + (x_2 + 2n)^2 - 25\left(1 + \frac{n^2}{4}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Widać, że to są różne koła. Środki tych kół leżą na prostej $(x_0, y_0) = \left(\frac{3n}{2}, -2n\right)$. Prosta ta w postaci funkcyjnej wyraża się jako $y_0(x_0) = -4/3x_0$. Możemy wyznaczyć współczynnik kierunkowy rodziny prostych prostopadłych tj. tych, które zawierają wzajemnie równoległe średnice kolejnych kół K_n. Proste te są zbiorem postaci:

$$\mathcal{P} = \left\{(x_1, x_2) \colon x_2 = \frac{3}{4}x_1 + b,\, b \in \mathbb{R}\right\}$$

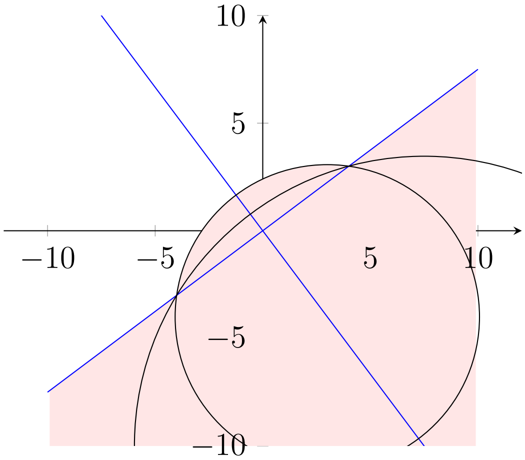
Sprawdźmy czy mamy szczęście i czy jedna z tych prostych nie jest przypadkiem osią potęgową wszystkich okręgów O_n powstałych poprzez zostawienie brzegu K_n.

Wiadomo bowiem, że tylko proste z tej rodziny mogą być kandydatami na oś potęgową!

Patrząc na pierwotną postać $(*)$ widzimy, że prosta $x_2 = 3x_1/4$ zapewni nam niezależność równania (nierówności również) od parametru n. Oznacza to, że pewne dwa punkty leżące na tej prostej są punktami stałymi okręgów O_n. Stąd wniosek, że $x_2 = 3x_1/4$ jest osią potęgową $\mathrm{op}(O_1, O_2, \ldots)$. Rozwiązując równanie okręgu sprawdzamy, że punktami tymi są: $(4, 3)$, $(-4, -3)$.

W granicy $n \to \infty$ okrąg O_n pokrywa się z $\mathrm{op}(O_1, O_2, \ldots)$. Zatem nasz zbiór A to wszystko co leży pod osią (wraz z nią) oraz taki grzyb pozostały po najbardziej wypukłym okręgu O_1.

$$A = \left\{(x_1, x_2) \colon x_1 \leq \frac{4}{3}x_2\right\} \cup \underbrace{\left\{(x_1, x_2) \colon x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 \leq 25\right\}}_{K_1}$$



Rysunek 1: Zbiór A

■