Analiza III R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Wykład 7: Ćwiczenia 7

05 lis 2020

Zadanie 5/S3 pomocnicze $\mathrm{d}\overset{k}{\omega} = 0$ na O, który jest ściągalny to istnieje $\overset{k-1}{\eta}$: $\mathrm{d}\eta = \omega$. Wykazać, że jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ jest zamknięta oraz $\int_{S^1} \omega = 0$ to ω jest zupełna.

Chcemy wskazać funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$: $\mathrm{d}f = \omega$. Trzeba ją skonstruować, inaczej nie da rady. Nasz obszar nie jest ściągalny, więc lemat Poincare też nie pomoże. Przykładowo, wyrzucenie całej półosi z układu współrzędnych daje już retrakcję.

Niech $O_+ = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_2}$ oraz $O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_2}$. Każdy z tych zbiorów jest ściągalny, zatem ω ma potencjał na każdym z tych obszarów (oczywiście nie musi być to ten sam potencjał). Z Lematu Poincare, istnieją $f_\pm$ takie, że:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_+ &= \omega\,\big|_{O_+} \\
\mathrm{d}f_- &= \omega\,\big|_{O_-} \\
\mathrm{d}(f_+ - f_-) &= (\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega)\,\big|_{O_+\cap O_-} = 0
\end{aligned}$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{e_2}$. Istnieją stałe c_+ i c_- takie, że

$$f_+ - f_- = \begin{cases} c_+ & x > 0 \\ c_- & x < 0 \end{cases}$$

Pytanie brzmi czy $c_+ = c_-$? Jeśli tak, to $f_+ = f_- + c$. Czyli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ określona wzorem f_- na O_- oraz $f_+ - c$ na O_+ spełnia $\mathrm{d}f = \omega$. Użyjmy warunku z całką po okręgu.

$$\begin{aligned}
0 = \int_{S^1} \omega &= \int_{\text{góra}} \omega + \int_{\text{dół}} \omega \\
&= \int_{\text{góra}} \mathrm{d}f_- + \int_{\text{dół}} \mathrm{d}f_+
\end{aligned}$$

Całka z pochodnej to różnica wartości na brzegu, zatem

$$= f_-(-1,0) - f_-(1,0) + f_+(1,0) - f_+(-1,0) = 0$$

Stąd,

$$f_+(1,0) - f_-(1,0) = f_+(-1,0) - f_-(-1,0)$$

Stąd wynika, że $c_+ = c_-$ i to kończy nasz dowód.

Lemat do zadania 5 (dla chętnych do domu).
Wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})$ jest zamknięta oraz $\displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2=1\\ z=0}} \theta = 0$, to θ jest zupełna.

Zadanie 5/S3 Mamy $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\mathrm{d}\omega = 0$, $\int_{S^2} \omega = 0$. Pokazać, że ω jest zupełna.

Wskazówka,

$$O_+ = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_z}$$
$$O_- = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_z}$$

mają retrakcję. Należy skorzystać z lematu Poincare i znaleźć potencjały na O_+ i O_-. Niech $\theta_\pm \in \Omega^1(O_\pm)$: $\mathrm{d}\theta_\pm = \omega\big|_{O_\pm}$. Zauważmy, że

$$\mathrm{d}(\theta_+ - \theta_-)\Big|_{O_+ \cap O_-} = 0$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z}$. Czy $\int_{S^1} \theta_+ - \theta_- = 0$?

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S^2} \omega &= \int_{S^2_+} \omega + \int_{S^2_-} \omega \\ &= \int_{S^2_+} \mathrm{d}\theta_- + \int_{S^2_-} \mathrm{d}\theta_+ \end{aligned}$$

Ze Stokesa,

$$\begin{aligned} &= \int_{(S^1,+)} \theta_- + \int_{(S^1,-)} \theta_+ \\ &= \int_{(S^1,+)} (\theta_- - \theta_+) \end{aligned}$$

Istnieje $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})$: $\theta_+ - \theta_- = \mathrm{d}f$. Czy istnieją funkcje $f_+ \in C^\infty(O_+)$ i $f_- \in C^\infty(O_-)$ takie, że $f = f_+ - f_-$ na $O_+ \cap O_-$. Jeśli tak, to $(\theta_+ - \theta_-) = \mathrm{d}f = \mathrm{d}f_+ - \mathrm{d}f_-$. Stąd, $\theta_+ - \mathrm{d}f_+ = \theta_- - \mathrm{d}f_-$. Stąd istniałaby $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ dana wzorem:

$$\eta\Big|_{O_+} = \theta_+ - \mathrm{d}f_+$$
$$\eta\Big|_{O_-} = \theta_- - \mathrm{d}f_-$$

oraz

$$\mathrm{d}\eta = \omega$$

Dlaczego takie f_+ i f_- istnieją? Dobre pytanie! Może kiedyś dokończymy ten dowód :)

Rozdział 1

Analiza zespolona

Zadanie 1a/S4 Znaleźć funkcję holomorficzną taką, że $\mathrm{Re}(f(z)) = e^x \cos y$, $f(0) = 1$.

Warunki Cauchy'ego-Riemanna dla $f(z) = u(z) + iv(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Wynik mógłby pojawić się przez rozwiązywanie tego układu równań. Ale można też zgadnąć: $f(z) = e^z$. Ale rozwiążmy to analitycznie.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= e^x \cos y \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\
v &= \int e^x \cos y \, \mathrm{d}y = e^x \sin y + C(x) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y \\
C'(x) &= 0 \\
f(0) &= 1 \implies C = 0
\end{aligned}$$

Stąd,

$$f(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z$$

Zadanie 1c/S4 $\mathrm{Im}(f(z)) = 3x + 2xy$, $f(-i) = 2$.

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= 3iz, \quad \mathrm{Im}(f_1(z)) = 3x \\
f_2(z) &= z^2, \quad \mathrm{Im}(f_2(z)) = 2xy \\
f &= f_1 + f_2 + C = 3iz + z^2 + C \\
f(-i) &= 3i(-i) + i^2 + C = 2 \\
C &= 0
\end{aligned}$$

Zadanie 1b/S4 $\mathrm{Re}(f(z)) = \sin x / (\cos x + \cosh y)$, $f(0) = 0$.

Atakujemy R.C.R.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
v &= \int \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C(y) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\cos x}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sin^2 x}{(\cos x + cshy)^2} \\
&= \frac{1 + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cosh y}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
&= \frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} + C'(y) \\
C &= \text{const.} \\
f(z) &= \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y} + i\frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C \\
&= \frac{\sin x + i \sinh y}{\cos x + \cosh y} + C = \frac{\sin x + \sin(iy)}{\cos x + \cos(iy)} + C
\end{aligned}$$

$C = 0$,

$$= \frac{2 \sin \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}}{2 \cos \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}} = \tan \frac{z}{2}$$

Wykład 8: Ćwiczenia 8

09 lis 2020

Zadanie 2/S4 Znaleźć homografię odwzorowującą $\Omega_1 = K(0,2) \setminus \overline{K}(1,1)$ na $\Omega_2 = \left\{\omega \in \mathbb{C} \colon 0 < \mathrm{Re}(\omega) < 1\right\}$.

Wstęp teoretyczny Odwzorowanie afiniczne $\alpha z + \beta$ jest wyznaczone przez wartości w dwóch punktach płaszczyzny zespolonej. Jak podamy 2 punkty, to istnieje dokładnie jedno tego typu odwzorowanie, które te dwa punkty w inne dwa punkty przerzuca.

$$\exists!\, \alpha z + \beta \colon \alpha z_1 + \beta = w_1,\ \alpha z_2 + \beta = w_2$$

Definicja 1 (Sfera Riemanna)**.**

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Homografię $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ możemy zapiać jako:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & z \neq -\dfrac{d}{c} \cup \{\infty\} \\ \infty & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c} & z = +\infty \end{cases}$$
$$h(\infty) = \infty \iff c = 0,\, a \neq 0$$

Wówczas h jest afiniczne. Niech $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$.

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Wówczas $h(z_1) = 0$, $h(z_2) = \infty$, $h(z_3) = 1$. Od tej pory zakładamy, że homografia nie jest odwzorowaniem stałym, tj. $ad - bc \neq 0$. Homografie składamy zgodnie z regułą mnożenia macierzy. W szczególności homografie tworzą grupę przekształceń.

Twierdzenie 1. Jeśli $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, to istnieje dokładnie jedna homografia $h\colon h(z_i) = w_i$.

Dowód. Niech $\big[h_1(z_1), h_1(z_2), h_1(z_3)\big] = [0, \infty, 1]$. Wówczas $\big[h_2^{-1}(w_1), h_2^{-1}(w_2), h_2^{-1}(w_3)\big] = [0, \infty, 1]$. W związku z tym, $h_2 \circ h_1$ jest okej. Co z jednoznacznością?

Przypuśćmy, że $h, \tilde{h}$ są okej. Jeśli $z_3 = w_3 = \infty$, to $h, \tilde{h}$ jest afiniczne, a zatem $h = \tilde{h}$. Niech $g, \tilde{g}$ to będą homografie takie, że $(0, 1, \infty) \overset{g}{\mapsto} (z_1, z_2, z_3)$ oraz $(w_1, w_2, w_3) \overset{\tilde{g}}{\mapsto} (0, 1, \infty)$. Zauważmy, że $\tilde{g}hg$ oraz $\tilde{g}\tilde{h}g$ są identycznościowe. Zatem,

$$h = \tilde{h} = \tilde{g}^{-1} \circ g$$

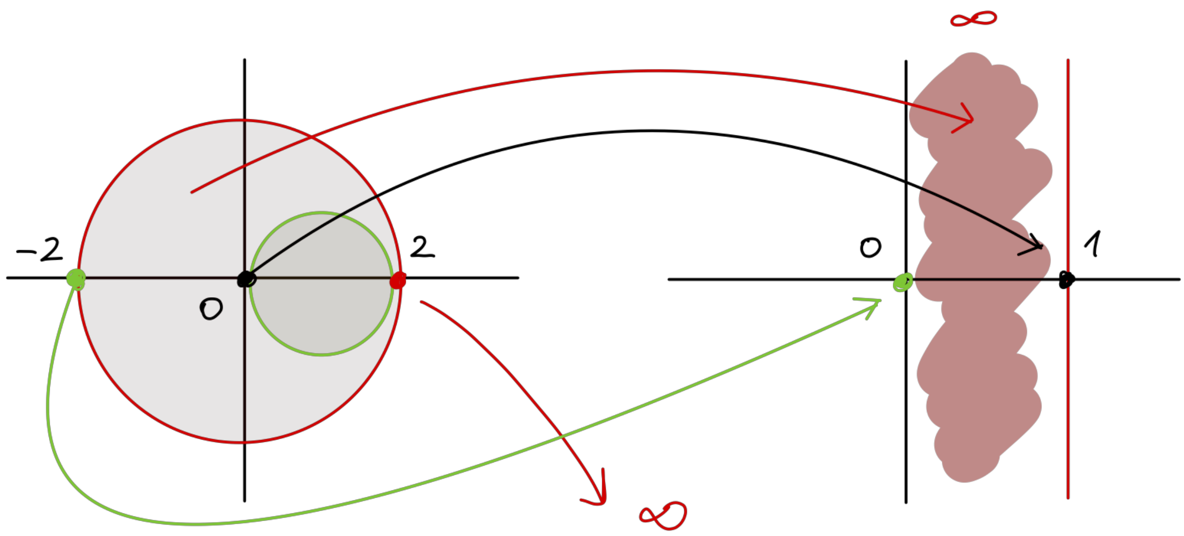
■

Teraz trzeba popatrzyć na to w świetle naszego zadania. Istnieje dokładnie jedna homografia, która:

$$h(2) = +\infty, \quad h(0) = 1, \quad h(-2) = 0$$
$$h(z) = -\frac{z+2}{z-2}$$

Można łatwo sprawdzić (czy raczej się upewnić), że wszystkie punkty przenoszą się odpowiednio. Skorzystaliśmy jedynie z faktu, że te obszary są topologicznie sensowne, zatem brzegi przechodzą na brzegi, wnętrza na wnętrza. Przy homomorfizmie, odwzorowanie obszaru spójnego jest spójne. Skorzystaliśmy też z tego, że homografie przerzucają okręgi uogólnione na okręgi uogólnione.

Uwaga! Odwzorowanie homograficzne, które przerzuca dane 3 punkty na dane 3 punkty jest jedno, ale całe obszary na inne obszary; może być wiele – wystarczy wybrać z tych obszarów jakieś inne punkty.



Rysunek 1.1: Homografia przerzucająca rozważane obszary.

Zadanie 3/S4 $f(z) = u(z) + iv(z) \to f(\rho, \phi) = R(\rho, \phi)e^{i\Phi(\rho,\phi)}$. Wyprowadzić warunki C-R dla R, Φ.

Ustalmy ρ_0, ϕ_0. $z_0 = \rho_0 e^{i\phi_0}$ oraz $z_{\Delta\rho} = (\rho_0 + \Delta\rho)e^{i\phi_0}$, $z_{\Delta\phi} = \rho_0 e^{i(\phi_0+\Delta\phi)}$. Jak z dowolnych dwóch kierunków zbiegając do z_0 dostaniemy to samo, to mamy funkcję holomorficzną.

$$\lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{f(z_{\Delta\rho}) - f(z_0)}{z_{\Delta\rho} - z_0} = \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(z_{\Delta\phi}) - f(z_0)}{z_{\Delta\phi} - z_0}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{f(z_{\Delta\rho}) - f(z_0)}{z_{\Delta\rho} - z_0} &= \frac{R(\rho_0 + \Delta\rho, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0 + \Delta\rho, \phi_0)\big) - R(\rho_0, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0)\big)}{\Delta\rho e^{i\phi_0}} \\ &= e^{-i\phi_0}\left[\frac{\partial R}{\partial\rho}e^{i\Phi(\rho_0,\phi_0)} + Re^{i\Phi}i\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right]\end{aligned}$$

Tak samo druga granica,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{f(z_{\Delta\phi}) - f(z_0)}{z_{\Delta\phi} - z_0} &\underset{\text{wyrażenie}}{\overset{\text{analogiczne}}{=}} \\ &= \frac{1}{i\rho_0 e^{i\phi_0}} \lim_{\Delta\phi\to 0} \frac{1}{\Delta\phi}\Big[R(\rho_0, \phi_0 + \Delta\phi)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0 + \Delta\phi)\big) \\ &\quad - R(\rho_0, \phi_0)\exp\big(i\Phi(\rho_0, \phi_0)\big)\Big] \\ &= \frac{1}{i\rho_0}e^{i\phi_0}\left(\frac{\partial R}{\partial\phi}e^{i\Phi} + Re^{i\Phi}i\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równania C-R:

$$\frac{1}{i\rho_0}\left(\frac{\partial R}{\partial\phi} + Ri\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right) = \frac{\partial R}{\partial\rho} + iR\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone, dostając piękne równania C-R we współrzędnych „biegunowo-biegunowych”:

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = \frac{\partial R}{\partial \rho}$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \phi} = R\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}$$

Zadanie 5a/S4 Obliczyć całkę $\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$ korzystając ze wzoru Cauchy'ego.

Niech $D = K(0,1)$, $f(z) = e^z$. Wówczas,

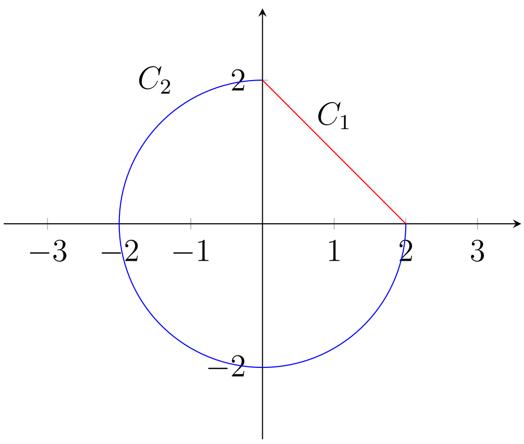
$$2\pi i = 2\pi i f(0) = \oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$$

Wykład 9: Ćwiczenia 9

16 lis 2020

Zadanie 4/S4 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$. Obliczyć $\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ i $\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$, jeśli C_1 to odcinek łączący $z_0 = 2$ i $z_1 = 2i$; ,$C_2 \colon \phi \mapsto 2e^{i\phi}$, $\phi \in \left[\pi/2, 2\pi\right]$.

To zadanie nikomu się nie podoba, nikt go niestety nie lubi. Nawet odpowiedź jest głupia, więc tylko zagaimy co należy zrobić.



Rysunek 1.2

Osobliwości f są w $z_1 = 0$ oraz $z_2 = -1$.

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$
$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\frac{1}{2+t(2i-2)} - \frac{1}{3+t(2i-2)}\right](2i-2)\,\mathrm{d}t$$

Użyjemy logarytmu, w ustalonej gałęzi: $\log z = \log|z| + i\arg z$, gdzie $\arg z \in (-\pi, \pi)$.

$$\begin{aligned}
&= \log\big[2 + t(2i-2)\big]\Big|_0^1 - \log\big[3 + t(2i-2)\big]\Big|_0^1 \\
&= \log(2i) - \log(2) - \log(1+2i) + \log(3) \\
&= \log\sqrt{5} + i\arg\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}i}\right)
\end{aligned}$$

No i teraz spróbujmy drugą całkę obliczyć.

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\pi/2}^{2\pi} 2e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi\left(\frac{1}{2e^{i\phi}} - \frac{1}{2e^{i\phi}+1}\right) \\
&= i\frac{3}{2}\pi - \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{2e^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi}{2e^{i\phi}+1}
\end{aligned}$$

To można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej (bo jest to wymierna funkcja od funkcji trygonometrycznych). Znajdźmy jakiś związek między tymi całkami.

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1\cup C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \oint_{C_1\cup C_2} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z$$

Na mocy wzoru Cauchy'ego,

$$= 2\pi i(1-1) = 0$$

Można też od razu z całkowania przez residua. Tak czy inaczej,

$$\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Zadanie 6/S4 Wykazać, że forma $\omega = \dfrac{\mathrm{d}z}{z-a}$ określona na $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ jest zamknięta ale nie zupełna. Zbadać zamkniętość i zupełność form $\mathrm{Re}(\omega)$ i $\mathrm{Im}(\omega)$.

Zauważmy, że wystarczy rozważyć $a = 0$, a potem przesuwać tę całą zabawę.

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z = 0$$

Stąd forma ω jest zamknięta. Ponadto, ze wzoru Cauchy'ego

$$\int_{C(0,1)} \omega = 2\pi i \neq 0$$

Forma zamknięta, której całka po okręgu (brzegu) nie daje 0, nie jest zupełna. To rezultat z twierdzenia Stokesa w banalnej formie.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{z} &= \frac{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y}{x+iy} = \frac{\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}(x-iy) \\
&= \underbrace{\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}}_{\mathrm{Re}(\omega)} + i\underbrace{\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}}_{\mathrm{Im}(\omega)} \\
&= \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right] + i\,\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

Stąd widzimy, że $\mathrm{Re}(\omega)$ i $\mathrm{Im}(\omega)$ są zamknięte, natomiast $\mathrm{Re}(\omega)$ jest zupełna, a $\mathrm{Im}(\omega)$ nie.

Zadanie 5/S4 Korzystając ze wzoru Cauchy'ego obliczyć (a) $\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$, (b) $\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$, (c) $\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z(z^2-1)}$.

(a)

$$\oint_{C(0,1)} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

(b)

$$\oint_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \oint \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)\frac{1}{2i}\,\mathrm{d}z$$

Teraz w obu całkach mamy tylko pojedyncze bieguny, zatem używamy Cauchy'ego. $f(z)$ jest stałe i takie samo w obu przypadkach, zatem całki się znoszą.

$$= 0$$

(c)

$$\oint_{C(0,2)} \frac{1}{z}\frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \oint \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)}\right)$$
$$= 2\pi i\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Zadanie 1/S5 Znaleźć punkty osobliwe dla podanych funkcji i określić ich rodzaj. (a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2}$, (b) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

(a) Punktami podejrzanymi są $z_1 = \pi/2$ oraz $z_2 = -\pi/2$. Jeśli daje się przedłużyć funkcję do funkcji holomorficznej w punkcie podejrzanym, to jest to osobliwość pozorna. Należy policzyć granicę.

$$\lim_{z\to\pm\pi/2} \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2} \overset{H}{=} \lim_{z\to\pm\pi/2} \frac{-\sin z}{2z}$$
$$= \frac{-(\pm 1)}{2 \pm \pi/2} = -\frac{1}{\pi}$$

Są to więc osobliwości pozorne.

(b) Punkt podejrzany to taki, że $e^z - 1 = 0$, czyli $z \in \{2k\pi i \colon k \in \mathbb{Z}\}$. Dla $k = 0$, $f(z) \xrightarrow{z\to 0} 1$, zatem tam jest osobliwość pozorna.
Dla $k \neq 0$,

$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{e^z - 1} \cdot z = 2k\pi i$$

Jest to więc biegun rzędu 1. Innymi słowy, wyłuskaliśmy tę najmniejszą potęgę $z - 2k\pi i$, która nam daje skończoną granicę.

Wykład 10: Ćwiczenia 10

19 lis 2020

Zadanie 2/S5 Znaleźć bieguny i ich rzędy i obliczyć residua. (a) $f(z) = \dfrac{z^n e^{1/z}}{z+1}$, (b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$, (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^5 - z^7}$.

Definicja 2 (Residuum w nieskończoności)**.**

$$\operatorname{Res}_{\infty} f = -\operatorname{Res}_0 \left(f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} \right)$$

Wniosek 1. Niech z_0 będzie biegunem rzędu k.

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} (z - z_0)^k f(z)$$

(a)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Dla $z_0 = 0$,

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\,\mathrm{d}z$$

Rozwińmy funkcję w $z_0 = 0$. Jest to osobliwość istotna dla $n \in \mathbb{Z}$.

$$f(z) = z^n \frac{1}{1+z} e^{\frac{1}{z}} = z^n \sum_{l=0}^{\infty} z^l (-1)^l \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k k!}$$

$$f(z) = \sum_{k,=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!} z^{l+n-k}$$

$$a_{-1} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!}, \quad l + n - k = -1$$

Teraz trzeba rozważyć przypadki. $l = k - n - 1$, $l \geq 0$, $k \geq n+1$. W domu co, jeśli $n \geq 0, n < 0$.

$$a_{-1} = \sum_{k \geq n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k!} = (-1)^{n-1} \left[e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right]$$

Przypadek $z = -1$. $z^n e^{1/z}$ regularny w $z = -1$.

$$\mathrm{Res}_{-1} \frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{z+1} = (-1)^n e^{1/-1} = (-1)^n e^{-1}$$

Jeszcze residuum w nieskończoności.

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z^n} e^z}{\frac{1}{z}+1} = \frac{e^z z^{-n+1}}{1+z}$$

$$\mathrm{Res}_\infty f = \mathrm{Res}_0 \frac{-e^z z^{-n+1}}{(1+z)z^2} = \mathrm{Res}_0 \frac{-e^z}{z^{n+1}(1+z)}$$

Dla $-n-1 \geq 0$ jest to pozorna osobliwość. A poza tym przypadkiem, to mamy biegun rzędu $n+1$.

$$\frac{e^z}{(1+z)} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{\substack{k=0\\l=0}}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (-1)^l z^l z^{-n-1}$$

$k + l - n - 1 = -1$, skąd $k + l = n$.

$$\sum_{\substack{k+l=n\\k,l\geq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!}$$

To ostatnie można sobie obliczyć jakoś.

(c)

$$\frac{1}{z^5 - z^7} = \frac{1}{z^5(1-z^2)}$$

Osobliwości mamy w $0, +1, -1$ i być może w ∞. W 0 jest biegun rzędu 5, w $+1, -1$ rzędu 1.

$$\mathrm{Res}_1 f = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z^5(1-z^2)}(z-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{1}{z^5(1-z)(1+z)}(z+1) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}_0 f = \frac{1}{4!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4} z^5 \frac{1}{z^5(1-z^2)} = \frac{1}{4!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}z^4} \frac{1}{1-z^2}$$

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots$$

Ta procedura odczytuje 4 współczynnik w szeregu Taylora w zerze, zatem

$$\mathrm{Res}_0 f = 1$$

Zadanie 4/S5 Wyrazić w postaci całek konturowych współczynnik a_n szeregu Laurent funkcji $\cot(z)$ w pierścieniu $\pi < |z| < 2\pi$. Obliczyć a_1.

$$\cot(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Niech $\gamma = C(0, 3/2\pi)$.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \cot(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\oint_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Można więc prosto całkować cały szereg wyraz po wyrazie (szereg niemal jednostajnie zbieżny).

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\cot(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\cos z}{z^2 \sin z}\,\mathrm{d}z$$

Możemy zastosować rachunek residuów. 0 jest biegunem rzędu 3, $\pi, -\pi$ rzędu 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\pi f &= \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{z^2 \sin z}(z-\pi) = \frac{1}{\pi^2} \\
\mathrm{Res}_{-\pi} f &= \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z}{z^2 \sin z}(z+\pi) = \frac{1}{\pi^2} \\
\mathrm{Res}_0 f &= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{\cos z}{z^2 \sin z} z^3\right) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{1}{\sin^2 z} z + \cot z\right) \\
&= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{\sin^2 z} + 2z\frac{\cos z}{\sin^3 z}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin^2 z + 2z \sin z \cos z}{\sin^4 z} \stackrel{\text{Taylor}}{=} -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Teraz mamy współczynnik,

$$a_1 = \sum \mathrm{Res}_i = \frac{1}{\pi^2} \cdot 2 - \frac{1}{3}$$

Zadanie 5/S4 Całkujemy funkcje wymierne. Wykazać, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\pi.$

Rozważamy funkcję zespoloną:

$$f(z) = \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Bierzemy obszar, który zawiera osobliwości, czyli taki półokrąg górny.

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi f\left(Re^{i\phi}\right) Re^{i\phi} i\,\mathrm{d}\phi$$

Wkład radialny. Już to bezpośrednie szacowanie całki pomijamy.

$$\int_0^\pi \frac{R^2e^{2i\phi}+3}{(R^2e^{2i\phi}+1)(R^2e^{2i\phi}+4)}\cdot Re^{i\phi}i\,\mathrm{d}\phi = \int_0^\pi \frac{\mathcal{O}(R^3)}{\mathcal{O}(R^4)} \to 0$$

Stąd,

$$\begin{aligned}
2\pi i(\mathrm{Res}_i\, f + \mathrm{Res}_{2i}\, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x \\
\mathrm{Res}_i\, f &= \lim_{z\to i} \frac{z^2+3}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{3i} \\
\mathrm{Res}_{2i}\, f &= \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{12i} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi i\left(\frac{1}{3i}+\frac{1}{12i}\right) = \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}$$