

ANALIZA

MATEMATYCZNA III

„Teraz na ucieczkę już za późno...”
– Regina Lewkowicz

„To Wam się przyda na pierwszym i drugim roku studiów. Teraz utrzymujemy taką narrację optymistyczną. Nie pesymistyczną. To Wam się przyda!”

Wykładowca:
Olga Ziemiańska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

1	Granice II	4
1.1	Powtórka granic	4
1.2	Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa	5
1.3	Twierdzenie Toeplitza	9
1.4	Twierdzenie Stolza	12
1.5	Punkty skupienia, granica górna i dolna	13

Rozdział 1

Granice II

1.1 Powtórka granic

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)}$$

Zauważmy, że $(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$,

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2^2 - 2 + 1} \frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} = \frac{2}{3}$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(2k+1) - (2k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{(n+1)^{\frac{k-1}{k}} + (n+1)^{\frac{k-2}{k}}n + \dots + n^{\frac{k-1}{k}}} = 0$$

4. $|a_n| \rightarrow 1, a_n \neq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + a_n^2 + \dots + a_n^k - k}{a_n - 1}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n - 1) + (a_n^2 - 1) + \dots + (a_n^k - 1)}{a_n - 1}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (a_n + 1) + \dots + (a_n^{k-1} + \dots + 1) \right] = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}{(n+1)!}$

Zauważmy, że $k \cdot k! = (k+1)! - k!$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (k+1)! - k!$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} = 1$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k})$$

Taktyka jest taka, żeby użyć wzoru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ i łańcuchowo to wszystko pozwijać. Przyjmując, że $x \neq 1$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)}{(1-x)} (1+x) (1+x^2) \dots (1+x^{2^n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^n})}{(1-x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \end{aligned}$$

Teraz trzeba się pobawić przypadkami dla różnych wartości x :

$$|x| < 1 \implies \lim a_n = \frac{1}{1-x}$$

$$x = -1 \xrightarrow{\text{baz.}} \lim a_n = 0$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{baz.}} \lim a_n = +\infty$$

$$x > 1 \implies \lim a_n = +\infty$$

$$x < -1 \implies \lim a_n = -\infty$$

$$7. a_1 = b > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right), \quad \text{T: } \lim a_n = \sqrt{a}$$

Z nierówności między średnimi mamy:

$$\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \geq \sqrt{a}$$

zatem widzimy, że ciąg jest ograniczony od dołu przez \sqrt{a} . Trzeba jeszcze pokazać, że jest monotonicznie malejący, tj. $a_n \geq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 2a_n &\geq a_n + \frac{a}{a_n} \\ a_n^2 &\geq a \implies a_n \geq \sqrt{a} \end{aligned}$$

co jest oczywiście spełnione. W związku z powyższym granica istnieje. Typując kandydatów na granicę otrzymamy $\pm\sqrt{a}$, a zatem $\lim a_n = \sqrt{a}$.

1.2 Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Definicja 1 (Ciąg zbieżny). Ciąg jest zbieżny, jeżeli ma skończoną granicę. Inaczej, jest rozbieżny do $\pm\infty$.

1. Ciąg (a_n) nie ma elementu największego \implies można z niego wyjąć podciąg rosnący.

Konstrukcja:

$$a_{n_1} = a_1$$

Szukamy a_{n_2} , dla którego $n_2 > n_1$ oraz $a_{n_2} > a_{n_1}$. Takie a_{n_2} istnieje, bo inaczej a_{n_1} byłby największym wyrazem (a_n) .

$$\begin{aligned} a_{n_1} &< a_{n_2} < \dots < a_{n_k} \\ n_1 &< n_2 < \dots < n_k \end{aligned}$$

Szukamy $a_{n_{k+1}}$ zgodnego z wcześniejszymi założeniami konstrukcji. Takie $a_{n_{k+1}}$ istnieje, bo w przeciwnym przypadku $\max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_k}\}$ byłoby największym elementem ciągu. To kończy krok indukcyjny konstrukcji podciągu rosnącego (a_{n_k}) .

Lemat 1 (Lemat Sierpińskiego). Z każdego ciągu można wyjąć podciąg monotoniczny.

Dowód. 1. Każdy podciąg ciągu (a_n) ma wyraz największy.

Skonstruujemy podciąg monotoniczny nierosnący. Konstrukcja: a_{n_1} – największy element ciągu (o najmniejszym indeksie).

$$\begin{aligned} a_{n_1} &\geq a_{n_2} \geq \dots \geq a_{n_k} \\ n_1 &< n_2 < \dots < n_k \end{aligned}$$

a_{n_1} wybraliśmy jako $\sup\{a_1, a_2, \dots\}$. Niech więc a_{n_2} będzie $\sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\}$ – ma to zawsze sens, zgodnie z założeniem o największym elemencie oraz dzięki temu, że $n_2 \geq n_1 + 1$. W ogólności, konstrukcję pociągamy dalej biorąc $a_{n_{k+1}} = \sup\{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \dots\}$.

2. Istnieje podciąg, który nie ma największego wyrazu.

Wybieramy podciąg rosnący z powyższego zadanka. Podciąg podciągu jest podciągiem wyjściowego ciągu zatem znaleźliśmy, co chcieliśmy. ■

Twierdzenie 1 (Bolzano-Weierstrass). Z każdego ciągu ograniczonego można wyjąć podciąg zbieżny. Jeśli ciąg jest ograniczony to granica jest skończona.

Dowód. Na mocy lematu Sierpińskiego, możemy wyjąć podciąg monotoniczny.

Ciąg monotoniczny ma granicę. A ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę skończoną. ■

Twierdzenie 2. Ciąg ma granicę \iff każdy jego podciąg ma granicę.

Dowód. No ciąg jest swoim własnym podciągiem. Dowód oczywisty, przez poprawność. ■

Twierdzenie 3. (a_n) nie ma granicy \implies ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Dowód. Zaprzeczamy warunkowi na istnienie granicy. Mamy (a_n) taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$. Ale $\lim a_n$ nie istnieje.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |a_n - g| < \varepsilon$$

Zaprzeczenie:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N |a_n - g| \geq \varepsilon \quad (\text{W})$$

Czyli wystarczy pokazać, że to g nie jest granicą całego ciągu. Szukamy podciągu ciągu (a_n) na zewnątrz przedziału $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Z zaprzeczonego warunku (W) wynika istnienie podciągu, którego wyrazy leżą na zewnątrz przedziału, czyli albo po lewej albo po prawej mamy niekończenie wiele wyrazów. Załóżmy, że:

$$\exists (a_{n_l})_{l \in \mathbb{N}} \text{ t.ż. } a_{n_l} \geq g + \varepsilon$$

Teraz wybieramy podciąg zbieżny z (a_{n_l}) . Ale jego granica $\geq g + \varepsilon$. ■

Wniosek 1. $a_n \geq 0, a_n \rightarrow g, k \in \mathbb{N} \implies \sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{g}$

Dowód. Załóżmy, że to nie prawda. Znajdzie się wówczas podciąg $\sqrt[k]{a_{n_l}} \rightarrow a \neq \sqrt[k]{g}$, dla $l \in \mathbb{N}$. Wiemy to z Twierdzenia 3.

Korzystając z tw. o granicy iloczynu dostajemy

$$a_{n_l} = (\sqrt[k]{a_{n_l}})^k \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a^k \neq g$$

$$\text{Ale } a_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} g$$

Sprzeczność. ■

Twierdzenie 4 (Warunek Cauchy'ego). (a_n) jest zbieżny (ma skończoną granicę) \iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, m > N |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Dowód. „ \implies ”:

$$a_n \rightarrow g$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon/2} \forall n > N_{\varepsilon/2} |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jeśli $m, k > N_{\varepsilon/2}$ to $a_m, a_k \in (g - \varepsilon/2, g + \varepsilon/2) \implies |a_n - a_k| < \varepsilon$

„ \impliedby ”:

Pokazać, że (a_n) jest ograniczony.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall k, m > N |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Weźmy $\varepsilon = 1$. Istnieje N_1 takie, że

$$\forall k, m \geq N_1 |a_k - a_m| < 1$$

czyli $|a_k - a_{N_1+1}| < 1$.

$$1 > |a_k - a_{N_1}| \geq |a_k| - |a_{N_1+1}|$$

$$\text{czyli } |a_k| < |a_{N_1+1}| + 1 \text{ dla każdego } k > N_1$$

zatem ciąg jest ograniczony.

Teraz chcemy pokazać, że istnieje podciąg zbieżny $(a_{n_j}) \rightarrow g$ (z Twierdzenia B-W). Chcemy pokazać, że $a_n \rightarrow g$. Weźmy $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \forall k, m, j > N |a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oraz } |a_{n_j} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zależy nam na poszacowaniu $|a_k - g|$:

$$|a_k - g| = |a_k - a_m + a_m - g|$$

$$\stackrel{m=n_j}{\leq} |a_k - a_m| + |a_{n_j} - g|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

czyli $a_n \rightarrow g$. ■

$$1. \ a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

Udowodnić, że jest zbieżny z kryterium Cauchy'ego.

$$|a_k - a_m| \stackrel{k>m}{=} \left| (-1)^m \frac{1}{m+1} + (-1)^{m+1} \frac{1}{m+2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right|$$

$$= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \dots + (-1)^{k-m+1} \frac{1}{k} \stackrel{?}{<} \frac{1}{m+1}$$

bo to długie jest dodatnie. Teraz trzeba pokazać tę nierówność.

$$-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{m+3} < 0$$

i podobnie wszystkie pary, zatem po skasowaniu $1/(m+1)$ zostanie coś ujemnego. W związku z tym nasza nierówność działa. Stąd już widzimy, że $1/(m+1)$ może przyjmować dowolnie małe wartości dla $m > N$.

2. Pokazać, że $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego.

Pamiętamy (W). Weźmy $\varepsilon = 1/2$:

$$a_m - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \stackrel{?}{>} \frac{1}{2}$$

$$\forall_N \exists_{2(N+1), N+1 > N} \left| a_{2(N+1)} - a_{N+1} \right| > \frac{1}{2}$$

(a_n) ma granicę, ale nie jest zbieżny $\implies \lim a_n = \pm\infty$, bo nie spełnia warunku Cauchy'ego.
 $\implies \lim a_n = +\infty$

Twierdzenie 5 (Warunek Leibniza zbieżności szeregów).

$$a_k - \text{nierosnący}, a_k \rightarrow 0 \implies b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \text{ jest zbieżny}$$

Dowód. Chcemy pokazać, że b_n spełnia warunek Cauchy'ego.

Uwaga: $\forall_n a_n \geq 0$

Założmy, że \exists_{n_0} takie, że $a_{n_0} < 0$. Wtedy:

$$a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots \leq a_{n_0} < 0$$

$$\implies \lim a_n \leq a_{n_0}$$

co daje nam sprzeczność. Teraz chcemy poszacować ten moduł z Cauchy'ego:

$$|b_k - b_m| \stackrel{k \geq m}{=} \left| (-1)^{m+2} a_{m+1} + \dots + (-1)^{k+1} a_k \right| \stackrel{?}{\leq} a_{n+1}$$

$$a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0$$

$$a_{m+3} - a_{m+4} \geq 0 \dots$$

Konstrukcja taka, jak w poprzednich dowodach. Działa. ■

1. (a_n) – ciąg, $\lambda \in (0, 1)$, $\forall_n |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n+1} - a_n|$
 T: (a_n) jest zbieżny

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda^2 |a_n - a_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^n |a_2 - a_1|$$

$$|a_k - a_m| = |a_k - a_{k-1} + \dots - a_m|$$

$$\stackrel{N.\Delta}{\leq} |a_k - a_{k-1}| + |a_{k-1} - a_{k-2}| + \dots + |a_{m+1} - a_m|$$

$$\leq \lambda^{k-2} |a_2 - a_1| + \dots + \lambda^{m-1} |a_2 - a_1|$$

$$= |a_2 - a_1| \lambda^{m-1} (1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-m-1})$$

$$= |a_2 - a_1| \lambda^{m-1} \frac{1 - \lambda^{k-m}}{1 - \lambda}$$

$$\leq |a_2 - a_1| \frac{\lambda^{m-1}}{1 - \lambda} \rightarrow 0$$

2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$ – udowodnić zbieżność, obliczyć granicę.

$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left| \frac{1}{1+a_{n+1}} - \frac{1}{1+a_n} \right| \stackrel{a_i \geq 1}{=} \frac{|a_{n+1} - a_n|}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \\ &\leq \frac{1}{4} |a_{n+1} - a_n| \end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest warunkiem zbieżności z poprzedniego zadania. Teraz przechodzimy z $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} g &= \frac{2+g}{1+g} \\ g+g^2 &= 2+g \\ \Rightarrow g &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Twierdzenie 6. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ możemy tak wybrać ciąg (α_n) gdzie $\alpha_n = \pm 1$, że

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{k}$$

Dowód. Dla chętnych ;-)

■

1.3 Twierdzenie Toeplitza

Twierdzenie 7 (Toeplitza o regularnym przekształceniu ciągu). Niech

$$\{c_{n,k} : 1 \leq k \leq n, m \geq 1\}$$

będzie układem liczb rzeczywistych spełniającym następujące warunki:

$$\text{Przy ustalonych } k \in \mathbb{N}, c_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n c_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (2)$$

$$\exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq c \quad (3)$$

Jeśli $c_{n,k} \geq 0$ to (3) jest spełnione, bo ciąg zbieżny jest ograniczony.

Wówczas $\lim a_n = a \Rightarrow \lim b_n = a$, gdzie $b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k$.

Można bardzo prosto zapamiętać te warunki, rysując tablicę z wyrazami ciągu:

$$\begin{array}{ccccccc} c_{1,1} & & & & & & \\ c_{2,1} & c_{2,2} & & & & & \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} & \sum_{\Sigma} \rightarrow 1 \\ & & & & & \sum_{\Sigma} || \leq c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \end{array}$$

Widzimy pewne podobieństwo do twierdzenia z tablicą z pierwszej klasy.

Dowód. Załóżmy, że $a_n \rightarrow 0$. Chcemy pokazać, że $b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k \rightarrow 0$, gdzie $c_{n,k}$ jest zdefiniowane wg. (1), (2), (3).

$$a_n \rightarrow 0 \xRightarrow{\text{zbieżny}} \exists_{D>0} \forall_n |a_n| < D$$

Niech $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |b_n| &\leq \underbrace{|c_{n,1}| |a_1| + \cdots + |c_{n,N_1}| |a_{N_1}|}_{< \varepsilon/2?} + \underbrace{|c_{n,N_1+1}| |a_{N_1+1}| + \cdots + |c_{n,n}| |a_n|}_{< \varepsilon/2?} \\ a_n \rightarrow 0 &\implies \exists_{N_1} \forall_{n>N_1} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C} \\ \implies |c_{n,N_1+1}| |a_{N_1+1}| + \cdots + |c_{n,n}| |a_n| &< \frac{\varepsilon}{2C} (|c_{n,N_1+1}| + \cdots + |c_{n,n}|) \stackrel{(3)}{<} \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Niech N_1 będzie ustalone:

$$\begin{aligned} \exists_{N_2} \forall_{n>N_2} |c_{n,1}| + \cdots + |c_{n,N_1}| &< \frac{\varepsilon}{2D} \\ |c_{n,1}| |a_1| + \cdots + |c_{n,N_1}| |a_{N_1}| &< D \frac{\varepsilon}{2D} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Dla $n > \max\{N_1, N_2\}$ $|b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

I tu się kończy dowód dla 0. Teraz dla $a_n \rightarrow a$:

$$\begin{aligned} a'_n &= a_n - a \rightarrow 0 \\ b_n &= \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^n c_{n,k} a'_k}_{\rightarrow 0} + a \underbrace{\sum_{k=1}^n c_{n,k}}_{\rightarrow a} \rightarrow a \end{aligned}$$

■

$$1. \lim a_n = a \implies \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

Wystarczy sprawdzić warunki (1), (2). Działa.

$$2. \lim a_n = a \implies \lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$$

Rozszerzając twierdzenie można zauważyć, że jeżeli (2) $\rightarrow A$, to teza zamienia się na $\lim b_n = aA$. Tutaj nasze $A = 1/2$, więc chcemy dobrać takie $(c_{n,k})$, żeby te sumy były zbieżne do $1/2$.

$$c_{n,k} = \frac{n-k+1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_{n,k} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{k}{n^2} \right) = 1 + \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &\rightarrow 1/2 \end{aligned} \quad (2)$$

Zatem granica sumy to $a/2$.

$$3. a_n \rightarrow a \implies \lim \left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right) = ?$$

$$c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-k}} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots \rightarrow 2 \\ \implies \lim b_n &= 2a \end{aligned} \quad (2)$$

4. $\lim a_n = a$. Obliczyć $\lim \left(\frac{a_n}{1 \cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{a_1}{n(n+1)} \right)$

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)}$$

$$\lim b_n = a$$

5. Obliczyć $\lim \left(\frac{a_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_1}{2^{n-1}} \right)$

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n-k}} \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n c_{n,k} = -\frac{2}{3} \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right) \rightarrow \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^n 2^{k-n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \lim b_n = 2/3a$$

6. $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow +\infty$

$$\exists_{N_1} \forall_{n > N_1} a_n > 0$$

$$b_n = \underbrace{\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n}}_{\rightarrow 0} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}$$

Założmy, że $\forall_n a_n > 0$. Niech $M > 0$. $\exists_N \forall_{n > N} b_n > M$. Chcemy znaleźć takie N .

$$\exists_{N_1} \forall_{n > N_1} a_n > 2M$$

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{N_1}}{n} + \frac{a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n} > \frac{2M(n - N_1)}{n}$$

Dla jakich n , $\frac{n - N_1}{n} > \frac{1}{2}$. Znaleźliśmy $N = 2N_1$.

7. $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $\lim \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}$

$$c_{n,k} = \frac{b_{n-k+1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\sum c_{n,k} = \frac{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} \rightarrow b \quad (2)$$

8. (a_n) , (b_n) są ciągami takimi, że $b_n > 0$, $\lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = g$

$$\text{T: } \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \rightarrow g$$

$$a'_k = \frac{a_k}{b_k} \rightarrow g, c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n} \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\sum c_{n,k} a'_k = \sum \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n}$$

$$\sum c_{n,k} = 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \lim \sum c_{n,k} a'_k = g$$

9. $b_n > 0$, $\lim(b_1 + \cdots + b_n) = +\infty$, $\lim a_n = a$

$$\text{T: } \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + \cdots + b_n} \rightarrow a$$

$$c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + \cdots + b_n}$$

10. $b_n \rightarrow b$ oraz (a_n) jest taki, że $b_n = 2a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że istnieje $\lim a_n$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(b_n - a_{n-1}) = \frac{b_n}{2} - \frac{b_{n-1}}{4} + \frac{a_{n-2}}{4} \\ &= \frac{b_n}{2^1} - \frac{b_{n-1}}{2^2} + \frac{b_{n-2}}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{b_2}{2^{n-1}} + (-1)^{n+1} \frac{a_1}{2^n} \end{aligned}$$

Jest fajnie, więc korzystamy z Tw. Toeplitza:

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n+1-k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\sum_k c_{n,k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots \rightarrow \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\sum_k |c_{n,k}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \rightarrow 1 \quad (3)$$

1.4 Twierdzenie Stolza

Twierdzenie 8 (Stolza). Niech będą dane ciągi (x_n) , (y_n) takie, że:

$$y_n < y_{n+1}, \quad \lim y_n = +\infty \quad (1)$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = g \quad (2)$$

Wówczas $\lim \frac{x_n}{y_n} = g$.

Dowód.

$$a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

$$b_n = y_{n+1} - y_n$$

Korzystamy z ostatniego zadania. Otrzymujemy wówczas, że

$$g = \lim \frac{x_n - x_1}{y_n - y_1} = \lim \frac{\frac{x_n - x_1}{y_n - y_1}}{1 - \frac{y_1}{y_n}}$$

Używając założenia $y_n \rightarrow +\infty$ widzimy, że $\lim \frac{x_n}{y_n} = g$. ■

$$1. \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ y_n &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 2$$

$$2. \quad \frac{n}{a^{n+1}} \left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n} \right), \quad a > 1$$

$$\begin{aligned} x_n &= a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n} \\ y_n &= \frac{a^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{a^{n+1}}{n+1} / \left(\frac{a^{n+2}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n} \right) = \frac{1}{a-1}$$

$$3. \frac{1}{n^{k+1}} \left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim \Delta &= \lim \frac{(k+n)!}{n!(n^{k+1} - n^k)} = \lim \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{n^k + n^{k-1}(n-1) + \dots + (n-1)^k} \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$4. \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$y_n = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

1.5 Punkty skupienia, granica górna i dolna

Definicja 2 (Punkt skupienia). $g \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia ciągu (a_n) jeśli istnieje podciąg zbieżny do g . Czyli:

$$\forall \varepsilon \forall k \exists n_k |a_{n_k} - g| < \varepsilon$$

S to zbiór punktów skupienia ciągu. Generalnie, punkt skupienia ciągu to taki punkt, w którego dowolnym otoczeniu znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu.

$$1. \text{ Znaleźć punkty skupienia ciągu } \frac{1}{2} \left(n - 2 - 3 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right) \left(n - 3 - 3 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right)$$

$$(a) \ n = 3k: \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = k-1 \implies a_n = 0$$

$$(b) \ n = 3k+1: \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = k \implies a_n = 1$$

$$(c) \ n = 3k+2: \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = k \implies a_n = 0$$

Zatem $S = \{0, 1\}$

$$2. \frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}$$

$$n \bmod 2 \implies S = \{0, 2\}$$

$$3. \left(\cos \frac{n\pi}{3} \right)^n$$

$$n \bmod 6 \implies S = \{-1, 0, 1\}$$

4. Podciągi $(a_{2k}), (a_{2k+1}), (a_{3k})$ są zbieżne. Udowodnić, że (a_n) jest zbieżny. Czy ze zbieżności dowolnych dwóch z tych podciągów wynika zbieżność?

Oczywiście jeśli dwa z trzech są zbieżne to nie mamy wynikania. Wystarczy choćby

$$(a) \ a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1$$

$$(b) \ a_{6k} = 1, a_{6k+1} = 0, a_{6k+2} = 1, a_{6k+3} = 1, a_{6k+4} = 1, a_{6k+5} = 0$$

$$(c) \quad a_{6k} = 1, a_{6k+1} = 1, a_{6k+2} = 0, a_{6k+3} = 1, a_{6k+4} = 0, a_{6k+5} = 1$$

To teraz zbieżność z trzech ciągów. Przyjmijmy, że $(a_{2n}) \rightarrow g_1, (a_{2k_1}) \rightarrow g_2, (a_{3k}) \rightarrow g_3$.

Łatwo możemy pokazać, że $g_1 = g_2 = g_3 = g$: $(a_{2k+1}), (a_{3k})$ mają wspólny podciąg (a_{6k+3}) , zatem $g_3 = g_2$. Analogicznie $g_3 = g_1$. Skoro do tej samej granicy zbiegają podciągi parzyste i nieparzyste, to zbiega tam cały ciąg.

Definicja 3.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest nieograniczony z góry} \\ -\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z góry i zbiór } S = \emptyset \\ \sup S & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z góry i zbiór } S \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest nieograniczony z dołu} \\ +\infty & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z dołu i zbiór } S = \emptyset \\ \inf S & \text{gdy } (a_n) \text{ jest ograniczony z dołu i zbiór } S \neq \emptyset \end{cases}$$

Czasem stosuje się też notację $\overline{\lim} \equiv \limsup$ oraz $\underline{\lim} \equiv \liminf$.

1. Jeśli $\limsup a_n = -\infty$ to $\lim a_n = -\infty$

Gdyby (a_n) był ograniczony z dołu, to z tw. B-W ma podciąg zbieżny, czyli $S \neq \emptyset \implies (a_n)$ jest nieograniczony z dołu. Jak ciąg nie ma granicy to ma dwie granice. Nie może być to liczba rzeczywista, bo S jest pusty, zatem musi być to $-\infty$.

$$\implies \lim a_n = -\infty$$

2. Znaleźć granicę górną i dolną $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \frac{\sin n\pi}{4}$

$$S = \pm e + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, 0 \right\}$$

$$\implies \liminf a_n = -e - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\implies \limsup a_n = e + 1$$

3. $\left(2 \cos \frac{2n\pi}{3}\right)^n$

$$2 \cos \frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 2 & n = 3k \\ -1 & n = 3l + 1 \end{cases}$$

$$a_{3k} = 2^{3k} \rightarrow +\infty \implies \limsup = +\infty$$

$$a_{3k+1} = (-1)^{3k+1}$$

$$a_{3k-1} = (-1)^{3k-1} \implies S = \{-1, 1\}$$

$$\implies \liminf = -1$$

Twierdzenie 9.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Równość zachodzi \iff ciąg ma granicę.

Dowód. 1. $\limsup = -\infty \implies \lim = -\infty$

Z definicji a_n – ograniczony z góry, $S = \emptyset$, zatem $\liminf = -\infty$.

2. $\limsup = +\infty \implies \liminf \leq \limsup = +\infty$
 Załóżmy, że $\limsup = \liminf = +\infty$. Chcemy pokazać, że $\lim = +\infty$.
 Z definicji dowodzimy analogicznie, jak w pierwszym zadaniu.

3. $\limsup \in \mathbb{R} \implies S \neq \emptyset$

$$\implies \liminf = \begin{cases} -\infty & < \sup S \\ \inf S & \leq \sup S \end{cases}$$

Założmy, że $\limsup = \liminf \in \mathbb{R} \implies \liminf = \inf S \implies \sup S = \inf S$
 Stąd wynika, że $\overline{S} = 1$. Ponadto ciąg jest ograniczony z góry, zatem $S = \{g\}$, $g = \lim a_n$. ■

Wniosek 2. Istnieje podciąg zbieżny do $\limsup a_n$ i tak samo dla $\liminf a_n$.

Dowód. 1. $\limsup = -\infty \implies \lim = -\infty$

2. $\limsup = +\infty \implies$ PRACA DOMOWA, znaleźć podciąg rozbieżny do $+\infty$:)

3. $\limsup = \sup S = g$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall k \exists n_k > k |a_{n_k} - g| < \varepsilon$$

$$g = \sup S \implies \exists s \in S |g - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

s – punkt skupienia ciągu

$$\exists n_k > k |a_{n_k} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_{n_k} - g| \leq |a_{n_k} - s| + |g - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Stąd widzimy, że $g = \max S$, bo $g \in S$. ■

1. $(a_n) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$. Udowodnić, że $S = [0, 1]$.

2. (a_n) : $l = \liminf a_n$, $K = \limsup a_n$ oraz $\lim a_{n+1} - a_n = 0$. Udowodnić, że $S = [l, K]$.

Założmy, że $a \in (l, K)$ nie jest punktem skupienia.

$$\exists \varepsilon > 0 \exists k \forall n_k > k |a_{n_k} - a| > \varepsilon$$

Oznacza to, że na przedziale $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ jest skończona liczba wyrazów ciągu. Możemy ten ε tak poprawić, żeby nie było żadnych wyrazów ciągu.

$$\lim a_{n+1} - a_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

Począwszy od N każdy kolejny wyraz ciągu łąduje po którejś ze stron tej wyrwy przedzielonej przez a . Załóżmy, że:

$$n > N, \quad a_n \in (a + \varepsilon, K]$$

Czyli w przedziale $[l, a - \varepsilon]$ jest skończenie wiele wyrazów ciągu. Sprzeczność, bo l jest punktem skupienia ciągu.

3. $a_n = \sqrt[n]{\binom{kn}{n}}$, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\lim \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \lim \frac{\binom{k(n+1)}{n+1}}{\binom{kn}{n}}$$

O ile istnieje! (Tw. d'Alemberta czy jakiegoś innego Cauchy'ego)

$$\begin{aligned} &= \lim \frac{[k(n+1)]!}{(n+1)![(k-1)(n+1)]!} \frac{n![(k-1)n]!}{(kn)!} \\ &= \lim \frac{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+k)}{(kn+1-n)(kn+2-n)\dots(kn+k-1-n)} \frac{1}{n+1} \\ &= \lim k \left(1 + \frac{n}{kn+1-n}\right) \left(1 + \frac{n}{kn+2-n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{kn+k-1-n}\right) \\ &= k \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

4. $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ (1+a_n)/2 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$ Ile punktów skupienia ma ten ciąg?

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{a_1}{2^{2n-1}} \rightarrow \frac{2}{3} \\ a_{2n+1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{a_1}{2^{2n}} \rightarrow \frac{1}{3} \end{aligned}$$