ANALIZA MATEMATYCZNA III

„Teraz na ucieczkę już za późno. . . ”
– Regina Lewkowicz

Wykładowca:
Olga Ziemiańska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Granice II

1.1 Powtórka granic

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\big(k^2+k+1\big)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

Zauważmy, że $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2^2-2+1} \frac{2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{k-1}{k}} + (n+1)^{\frac{k-2}{k}} n + \cdots + n^{\frac{k-1}{k}}} = 0$$

4. $|a_n| \to 1,\ a_n \neq 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + a_n^2 + \cdots + a_n^k - k}{a_n - 1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim \frac{(a_n-1) + \big(a_n^2-1\big) + \cdots + \big(a_n^k-1\big)}{a_n-1} \\
&= \lim \left[1 + (a_n+1) + \cdots + \left(a_n^{k-1} + \cdots + 1\right)\right] = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!}{(n+1)!}$

Zauważmy, że $k\cdot k! = (k+1)! - k!$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1
\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)$

   Taktyka jest taka, żeby użyć wzoru $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ i łańcuchowo to wszystko pozwijać. Przyjmując, że $x \neq 1$:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x)}{(1-x)}(1+x)\left(1+x^2\right)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right)}{(1-x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

   Teraz trzeba się pobawić przypadkami dla różnych wartości x:

$$\begin{aligned} |x| < 1 &\implies \lim a_n = \frac{1}{1-x} \\ x = -1 &\overset{\text{baz.}}{\implies} \lim a_n = 0 \\ x = 1 &\overset{\text{baz.}}{\implies} \lim a_n = +\infty \\ x > 1 &\implies \lim a_n = +\infty \\ x < -1 &\implies \lim a_n = -\infty \end{aligned}$$

7. $a_1 = b > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, T: $\lim a_n = \sqrt{a}$

   Z nierówności między średnimi mamy:

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a}$$

   zatem widzimy, że ciąg jest ograniczony od dołu przez $\sqrt{a}$. Trzeba jeszcze pokazać, że jest monotonicznie malejący, tj. $a_n \geq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} 2a_n &\geq a_n + \frac{a}{a_n} \\ a_n^2 \geq a &\implies a_n \geq \sqrt{a} \end{aligned}$$

   co jest oczywiście spełnione. W związku z powyższym granica istnieje. Typując kandydatów na granicę otrzymamy $\pm\sqrt{a}$, a zatem $\lim a_n = \sqrt{a}$.

1.2 Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa

Definicja 1 (Ciąg zbieżny)**.** Ciąg jest zbieżny, jeżeli ma skończoną granicę. Inaczej, jest rozbieżny do $\pm\infty$.

1. Ciąg (a_n) nie ma elementu największego $\implies$ można z niego wyjąć podciąg rosnący.

   Konstrukcja:

$$a_{n_1} = a_1$$

   Szukamy a_{n_2}, dla którego $n_2 > n_1$ oraz $a_{n_2} > a_{n_1}$. Takie a_{n_2} istnieje, bo inaczej a_{n_1} byłby największym wyrazem (a_n).

$$\begin{aligned} a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots < a_{n_k} \\ n_1 < n_2 < \ldots < n_k \end{aligned}$$

   Szukamy $a_{n_{k+1}}$ zgodnego z wcześniejszymi założeniami konstrukcji. Takie $a_{n_{k+1}}$ istnieje, bo w przeciwnym przypadku $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_k}\}$ byłoby największym elementem ciągu. To kończy krok indukcyjny konstrukcji podciągu rosnącego $\left(a_{n_k}\right)$.

Lemat 1 (Lemat Sierpińskiego)**.** Z każdego ciągu można wyjąć podciąg monotoniczny.

Dowód. 1. Każdy podciąg ciągu (a_n) ma wyraz największy.

Skonstruujemy podciąg monotoniczny nierosnący. Konstrukcja: a_{n_1} – największy element ciągu (o najmniejszym indeksie).

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots \geq a_{n_k}$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$$

a_{n_1} wybraliśmy jako $\sup\{a_1, a_2, \ldots\}$. Niech więc a_{n_2} będzie $\sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots\}$ – ma to zawsze sens, zgodnie z założeniem o największym elemencie oraz dzięki temu, że $n_2 \geq n_1 + 1$. W ogólności, konstrukcję pociągniemy dalej biorąc $a_{n_{k+1}} = \sup\big\{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \ldots\big\}$.

2. Istnieje podciąg, który nie ma największego wyrazu.

Wybieramy podciąg rosnący z powyższego zadanka. Podciąg podciągu jest podciągiem wyjściowego ciągu zatem znaleźliśmy, co chcieliśmy.

■

Twierdzenie 1 (Bolzano-Weierstrass)**.** Z każdego ciągu ograniczonego można wyjąć podciąg zbieżny. Jeśli ciąg jest ograniczony to granica jest skończona.

Dowód. Na mocy lematu Sierpińskiego, możemy wyjąć podciąg monotoniczny.
Ciąg monotoniczny ma granicę. A ciąg monotoniczny i ograniczony ma granicę skończoną. ■

Twierdzenie 2. Ciąg ma granicę $\iff$ każdy jego podciąg ma granicę.

Dowód. No ciąg jest swoim własnym podciągiem. Dowód oczywisty, przez poprawność. ■

Twierdzenie 3. (a_n) nie ma granicy $\implies$ ma dwa podciągi zbieżne do różnych granic.

Dowód. Zaprzeczamy warunkowi na istnienie granicy. Mamy $\big(a_{n_k}\big)$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = g$. Ale $\lim a_n$ nie istnieje.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\, |a_n - g| < \varepsilon$$

Zaprzeczenie:

$$\exists_{\varepsilon>0}\forall_N\exists_{n>N}\, |a_n - g| \geq \varepsilon \tag{W}$$

Czyli wystarczy pokazać, że to g nie jest granicą całego ciągu. Szukamy podciągu ciągu (a_n) na zewnątrz przedziału $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$. Z zaprzeczonego warunku (W) wynika istnienie podciągu, którego wyrazy leżą na zewnątrz przedziału, czyli albo po lewej albo po prawej mamy niekończenie wiele wyrazów. Załóżmy, że:

$$\exists_{\left(a_{n_l}\right)_{l\in\mathbb{N}}} \text{ t.że } a_{n_l} \geq g + \varepsilon$$

Teraz wybieramy podciąg zbieżny z $\big(a_{n_l}\big)$. Ale jego granica $\geq g + \varepsilon$. ■

Wniosek 1. $a_n \geq 0$, $a_n \to g$, $k \in \mathbb{N} \implies \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{g}$

Dowód. Załóżmy, że to nie prawda. Znajdzie się wówczas podciąg $\sqrt[k]{a_{n_l}} \to a \neq \sqrt[k]{g}$, dla $l \in \mathbb{N}$. Wiemy to z Twierdzenia 3.
Korzystając z tw. o granicy iloczynu dostajemy

$$a_{n_l} = \left(\sqrt[k]{a_{n_l}}\right)^k \xrightarrow{l\to\infty} a^k \neq g$$
$$\text{Ale } a_{n_l} \xrightarrow{l\to\infty} g$$

Sprzeczność. ∎

Twierdzenie 4 (Warunek Cauchy'ego)**.** (a_n) jest zbieżny (ma skończoną granicę) $\iff$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{k,m>N}\, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Dowód. „ $\Longrightarrow$ ”:

$$a_n \to g$$
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_{\varepsilon/2}}\forall_{n>N_{\varepsilon/2}}\, |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jeśli $m, k > N_{\varepsilon/2}$ to $a_m, a_k \in \big(g - \varepsilon/2, g + \varepsilon/2\big) \implies |a_n - a_k| < \varepsilon$

„ $\Longleftarrow$ ”:
Pokazać, że (a_n) jest ograniczony.

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_N\forall_{k,m>N}\, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

Weźmy $\varepsilon = 1$. Istnieje N_1 takie, że

$$\forall_{k,m\geq N_1}\, |a_k - a_m| < 1$$

czyli $|a_k - a_{N_1+1}| < 1$.

$$1 > |a_k - a_{N_1}| \geq |a_k| - |a_{N_1+1}|$$
$$\text{czyli } |a_k| < |a_{N_1+1}| + 1 \text{ dla każdego } k > N_1$$

zatem ciąg jest ograniczony.
Teraz chcemy pokazać, że istnieje podciąg zbieżny $\big(a_{n_j}\big) \to g$ (z Twierdzenia B-W). Chcemy pokazać, że $a_n \to g$. Weźmy $\varepsilon > 0$.

$$\exists_N\forall_{k,m,j>N}\, |a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oraz } \left|a_{n_j} - g\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Zależy nam na poszacowaniu $|a_k - g|$:

$$\begin{aligned}|a_k - g| &= |a_k - a_m + a_m - g| \\ &\overset{m=n_j}{\leq} |a_k - a_m| + \left|a_{n_j} - g\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

czyli $a_n \to g$. ∎

1. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$
   Udowodnić, że jest zbieżny z kryterium Cauchy'ego.

$$\begin{aligned}|a_k - a_m| &\underset{k>m}{=} \left|(-1)^m\frac{1}{m+1} + (-1)^{m+1}\frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right| \\ &= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \cdots + (-1)^{k-m+1}\frac{1}{k} \overset{?}{<} \frac{1}{m+1}\end{aligned}$$

bo to długie jest dodatnie. Teraz trzeba pokazać tę nierówność.

$$-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{m+3}<0$$

i podobnie wszystkie pary, zatem po skasowaniu $1/(m+1)$ zostanie coś ujemnego. W związku z tym nasza nierówność działa. Stąd już widzimy, że $1/(m+1)$ może przyjmować dowolnie małe wartości dla $m > N$.

2. Pokazać, że $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego.

   Pamiętamy (W). Weźmy $\varepsilon = 1/2$:

$$a_m - a_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \overset{?}{>} \frac{1}{2}$$
$$\forall_N \exists_{2(N+1),N+1>N} \left|a_{2(N+1)} - a_{N+1}\right| > \frac{1}{2}$$

   (a_n) ma granicę, ale nie jest zbieżny $\implies$ $\lim a_n = \pm\infty$, bo nie spełnia warunku Cauchy'ego. $\implies \lim a_n = +\infty$

Twierdzenie 5 (Warunek Leibniza zbieżności szeregów)**.**

$$a_k \text{ – nierosnący}, \ a_k \to 0 \implies b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \text{ jest zbieżny}$$

Dowód. Chcemy pokazać, że b_n spełnia warunek Cauchy'ego.
Uwaga: $\forall_n\, a_n \geq 0$
Załóżmy, że $\exists_{n_0}$ takie, że $a_{n_0} < 0$. Wtedy:

$$a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots \leq a_{n_0} < 0$$
$$\implies \lim a_n \leq a_{n_0}$$

co daje nam sprzeczność. Teraz chcemy poszacować ten moduł z Cauchy'ego:

$$|b_k - b_m| \overset{k\geq m}{=} \left|(-1)^{m+2}a_{m+1}+\cdots+(-1)^{k+1}a_k\right| \overset{?}{\leq} a_{n+1}$$
$$a_{m+1} - a_{m+2} \geq 0$$
$$a_{m+3} - a_{m+4} \geq 0 \ldots$$

Konstrukcja taka, jak w poprzednich dowodach. Działa. ∎

1. (a_n) – ciąg, $\lambda \in (0,1)$, $\forall_n\, |a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda|a_{n+1} - a_n|$
   T: (a_n) jest zbieżny

$$\begin{aligned}
|a_{n+2} - a_{n+1}| &\leq \lambda^2|a_n - a_{n-1}| \leq \ldots \leq \lambda^n|a_2 - a_1| \\
|a_k - a_m| &= |a_k - a_{k-1} + \cdots - a_m| \\
&\overset{N.\triangle}{\leq} |a_k - a_{k-1}| + |a_{k-1} - a_{k-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\
&\leq \lambda^{k-2}|a_2 - a_1| + \cdots + \lambda^{m-1}|a_2 - a_1| \\
&= |a_2 - a_1|\lambda^{m-1}\left(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{k-m-1}\right) \\
&= |a_2 - a_1|\lambda^{m-1}\frac{1-\lambda^{k-m}}{1-\lambda} \\
&\leq |a_2 - a_1|\frac{\lambda^{m-1}}{1-\lambda} \to 0
\end{aligned}$$

2. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n}{1 + a_n}$ – udowodnić zbieżność, obliczyć granicę.

$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left| \frac{1}{1 + a_{n+1}} - \frac{1}{1 + a_n} \right| \overset{a_i \geq 1}{=} \frac{|a_{n+1} - a_n|}{(1 + a_{n+1})(1 + a_n)} \\ &\leq \frac{1}{4} |a_{n+1} - a_n| \end{aligned}$$

Otrzymana nierówność jest warunkiem zbieżności z poprzedniego zadania. Teraz przechodzimy z $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} g &= \frac{2 + g}{1 + g} \\ g + g^2 &= 2 + g \\ \implies g &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Twierdzenie 6. $x \in \mathbb{R} \implies$ możemy tak wybrać ciąg (α_n) gdzie $\alpha_n = \pm 1$, że

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}$$

Dowód. Dla chętnych ;-) ■

1.3 Twierdzenie Toeplitza

Twierdzenie 7 (Toeplitza o regularnym przekształceniu ciągu)**.** Niech

$$\left\{ c_{n,k} \colon 1 \leq k \leq n, m \geq 1 \right\}$$

będzie układem liczb rzeczywistych spełniającym następujące warunki:

$$\text{Przy ustalonych } k \in \mathbb{N},\ c_{n,k} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \tag{2}$$

$$\exists_{c > 0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \left| c_{n,k} \right| \leq c \tag{3}$$

Jeśli $c_{n,k} \geq 0$ to (3) jest spełnione, bo ciąg zbieżny jest ograniczony.

Wówczas $\lim a_n = a \implies \lim b_n = a$, gdzie $b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k$.

Dowód. Soon. ■

Można bardzo prosto zapamiętać te warunki, rysując tablicę z wyrazami ciągu:

$$\begin{array}{cccccc} c_{1,1} & & & & & \\ c_{2,1} & c_{2,2} & & & & \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_{n,1} & c_{n,2} & c_{n,3} & \cdots & c_{n,n} & \substack{\Sigma \to 1 \\ \Sigma || \leq c} \\ & & & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \end{array}$$

Widzimy pewne podobieństwo do twierdzenia z tablicą z pierwszej klasy.

1. $\lim a_n = a \implies \lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$

   Wystarczy sprawdzić warunki (1), (2). Działa.

2. $\lim a_n = a \implies \lim \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$

   Rozszerzając twierdzenie można zauważyć, że jeżeli (2) $\to A$, to teza zamienia się na $\lim b_n = aA$. Tutaj nasze $A = 1/2$, więc chcemy dobrać takie $\left(c_{n,k}\right)$, żeby te sumy były zbieżne do $1/2$.

$$c_{n,k} = \frac{n-k+1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{k}{n^2} \right) = 1 + \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2n^2} \tag{2}$$

$$\to 1/2$$

   Zatem granica sumy to $a/2$.

3. $a_n \to a \implies \lim \left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right) =?$

$$c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-k}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \to 2 \tag{2}$$

$$\implies \lim b_n = 2a$$

4. $\lim a_n = a$. Obliczyć $\lim \left(\frac{a_n}{1 \cdot 2} + \frac{a_{n-1}}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{a_1}{n(n+1)} \right)$

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)}$$

$$\lim b_n = a$$

5. Obliczyć $\lim \left(\frac{a_n}{1} - \frac{a_{n-1}}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_1}{2^{n-1}} \right)$

$$c_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n-k}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} = \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| c_{n,k} \right| = \tag{3}$$