Analiza III R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

1 Geometria różniczkowa **4**
Ćwiczenia 1 4
Ćwiczenia 2 6

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020 do powtórki: Twierdzenie o funkcj uwikłanej i badanie powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 1. Atlas – zbiór map $M \to \mathbb{R}^n$ (lokalnych układów współrzędnych), gdzie M jest rozmaitością

$$\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

Do badania czy rozmaitość można pokryć układem współrzędnych służy twierdzenie o funkcji uwikłanej.
Mapa rzutuje w dół $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, parametryzacja w górę $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Zadanie 1/S1 Rozważmy funkcję $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 - 1$. Wówczas sfera $\mathbb{S}^n$ to $f^{-1}(0)$. Rozważmy funkcję $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 1$ i niech $f^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} M \subset \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć system parametryzujący ten zbiór.

Dowód. Równanie domniemanej powierzchni możemy zapisać w postaci $2y^2 - 1 = \rho^2$, gdzie $\rho^2 = x^2 + z^2$ jest kwadratem współrzędnej „radialnej" w płaszczyźnie xz. Widzimy, że $y(\rho)$ opisuje hiperbolę.

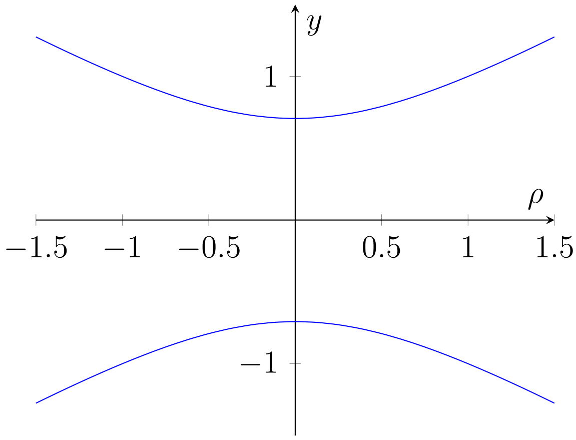
Ten zbiór M to hiperboloida dwupowłokowa. Czy ten zbiór tworzy powierzchnię?

$$f'(x, y, z) = [2x, -4y, 2z]$$

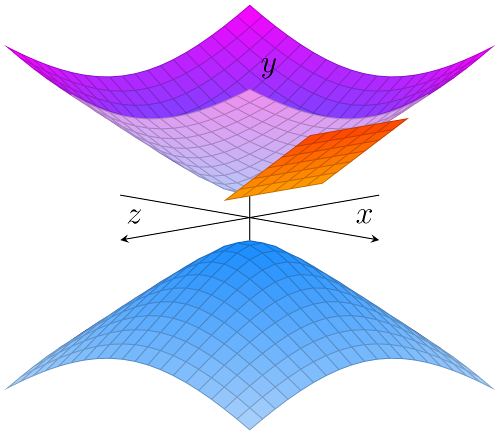
$f' = 0 \implies \operatorname{rk} f' = 0$ lub $f' \neq 0 \implies \operatorname{rk} f' = 1$. W naszym przypadku $f' \neq 0$, zatem M jest powierzchnią 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$. Będziemy zastanawiać się nad $\mathrm{T}_P M$ i nad afiniczną płaszczyzną styczną. Przestrzeń styczna w punkcie $p_0 = [x_0, y_0, z_0]$ to podprzestrzeń wektorowa. Afiniczna płaszczyzna styczna to trochę coś innego.

Zaproponujmy parametryzację górnego płata tej powierzchni $M_+ = \{p \in M \colon y > 0\}$. Będziemy parametryzować płaszczyzną xz.

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + s^2 + t^2} \\ t \end{bmatrix} \in M_+$$



Rysunek 1.1: Wykres $y(\rho)$, czyli przekrój hiperboloidy dwupowłokowej.



Rysunek 1.2: Powierzchnia M z afiniczną płaszczyzną styczną w punkcie $p = \left(3, \sqrt{5}, 0\right)$.

Przestrzeń styczna do p_0 to jądro tej pochodnej.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_{p_0}M_+ = \mathrm{T}_{p_0}M &= \ker[2x_0, -4y_0, 2z_0] \\
&= \left\{ \left[v_x, v_y, v_z\right] : x_0 v_x - 2y_0 v_y + z_0 v_z = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

Afiniczna płaszczyzna styczna polega na tym, że bierzemy tą wyżej opisaną przestrzeń i dodajemy punkt zaczepienia. Są to punkty postaci $\left\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0}M\right\}$. Weźmy wektor $\left[w_x, w_y, w_z\right] = \mathbf{w} = p_0 + \mathbf{v}$. Stąd,

$$
\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x - x_0 \\ w_y - y_0 \\ w_z - z_0 \end{bmatrix}
$$

Wstawiając to do równania na jądro,

$$
\begin{aligned}
\left\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0}M\right\} &= \left\{ \left[w_x, w_y, w_z\right] : x_0 w_x - 2y_0 w_y + z_0 w_z - \left(x_0^2 - 2y_0^2 + z_0^2\right) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \left[w_x, w_y, w_z\right] : A w_x + B w_y + C w_z + D = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Wstęp do form liniowych 1-formy na przestrzeni V: $V^* = \bigwedge^1 V^*$
Przykład 2-formy antysymetrycznej na przestrzeni V: oznaczenie $\bigwedge^2 V^*$: $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ oraz antysymetryczne $\omega(v, w) = \omega(w, v)$.

Ogólniej (jakiś tam funktor w kategorii czegoś tam xD): $\bigwedge^k V^*$: odwzorowania k–liniowe, antysymetryczne.

$$\omega^k \wedge \alpha^l \in \bigwedge^{k+l} V^*, \quad \text{2-liniowe, łączne}$$
$$\omega^k \wedge \alpha^l = (-1)^{kl} \alpha^l \wedge \omega^k$$
$$\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k}, \quad n = \dim V$$

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – baza V. Wówczas baza dualna to $\left\{e^1, \ldots, e^n\right\}$.
Baza $\bigwedge^2 V^*$: $\left\{e^i \wedge e^j : 1 \leq i < j \leq n\right\}$. Stąd potem kombinatoryczny wzór na wymiar (dbamy o uporządkowane iloczyny).

Zadanie 2/S1 Niech $\beta \in \bigwedge^{k+1} V^*$ i $0 \neq \omega \in \bigwedge^1 V^*$ takie, że $\beta \wedge \omega = 0$. Wykazać, że istnieje k-forma α taka, że $\beta = \alpha \wedge \omega$.

Można zrobić tak, żeby baza V^* była $\left\{\omega, e^2, \ldots, e^n\right\}$. Zatem,

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$
$$\beta \wedge e^1 = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} \left(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}\right) \wedge e^1 = 0$$

tam gdzie $e^{i_1} = e^1$ i tak iloczyn zewnętrzny się zeruje. Stąd, jeśli $e^{i_1} > 1$, to odpowiednie $\beta_{xyz} = 0$. Stąd,

$$\beta = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^1 \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$
$$\beta = \alpha \wedge \omega = (-1)^k \omega \wedge \alpha = (-1)^k e^1 \wedge \alpha$$

Zatem α istnieje i ma postać:

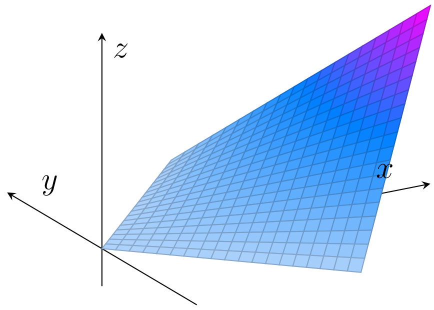
$$(-1)^k \alpha = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$

Jednakże α nie jest jednoznaczne, bo mamy wciąż swobodę wziąć $\alpha' = \alpha + t\omega$ i to też działa. Czy jest więcej stopni swobody?

Wykład 2: Ćwiczenia 2

19 paź 2020

Zadanie 4/S1 Mamy $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ i parametryzację powierzchni zanurzonej $[0,1] \times [0,1] \ni (u,v) \overset{\phi}{\mapsto} (u+v, u-v, uv) \in \mathbb{R}^3$. To jest tylko jeden płat, nie ma posklejanych parametryzacji. Mamy policzyć całkę po powierzchni z ω (orientacja do wyboru).



Rysunek 1.3: Powierzchnia M.

Jedyna głębsza rzecz w tym zadaniu to orientacja. Parametryzacja może być zgodna lub przeciwna z orientacją M.
Krok 1: cofnąć formę ω do $[0,1]\times[0,1]$. Innymi słowy obliczamy $\phi^*(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z)$. Ta procedura ma tę własność, że:

$$\phi^*\,\mathrm{d} = \mathrm{d}\phi^*$$
$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$$

Stąd,

$$\phi^*\omega = \phi^*x\,\mathrm{d}\phi^*y \wedge \mathrm{d}\phi^*z + \phi^*y\,\mathrm{d}\phi^*x \wedge \mathrm{d}\phi^*z$$

Myśląc w przyziemny sposób, po prostu trzeba podstawić te wszystkie zmienne i ich różniczki. A tak mniej przyziemnie, to $\phi^*f = f \circ \phi$.

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{d}\phi^*(xy) \wedge \mathrm{d}\phi^*z \\
&= \mathrm{d}(u+v)(u-v) \wedge \mathrm{d}(uv) \\
&= (2u\,\mathrm{d}u - 2v\,\mathrm{d}v) \wedge (u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u) \\
&= 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Teraz liczymy całkę z cofniętej formy.

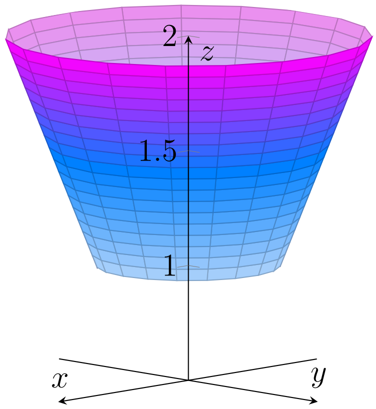
$$\int_{(M,\imath)} \omega = \pm \int_{[0,1]\times[0,1]} 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$+$, gdy ϕ zgodna z orientacją M; $-$, gdy ϕ nie jest zgodna. Przyjmijmy, że parametryzacja ϕ jest niezgodna z orientacją M.

$$\begin{aligned}
&= -\int_{[0,1]\times[0,1]} 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -4\int_{[0,1]\times[0,1]} u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

To ostatnie przejście z symetrii, bo każda całka da taki sam wkład.

Zadanie 5/S1 Mamy $\omega = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Całkujemy to po powierzchni stożka. $M = \left\{(x, y, z)\colon 1 \le z \le 2,\, 2z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$. M zorientowane jest na zewnątrz.



Rysunek 1.4: Powierzchnia M

Uwaga, ta forma jest osobliwa na stożku, ponieważ x i y może się na nim zerować. Nie powinno się takich form całkować po powierzchniach, na których dają osobliwości! Z założenia jest to **nielegalne**! Ale przekonamy się, że po cofnięciu tej formy do stożka osobliwości jakoś znikają magicznie. Powinniśmy to cofnąć omijając osobliwości i popatrzeć czy osobliwość znika (czy była pozorna).

Przyjmujemy parametryzację, w której jak się okaże, nie będzie osobliwości (zatem de facto w każdej innej też jej nie było):

$$\phi(\rho, \phi) = \begin{bmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ \rho/2 \end{bmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi],\ \rho \in [2, 4]$$

Co z orientacją? Jak sobie kręcę prawą ręką $e_\rho \to e_\phi$ to dostaję wektor przeciwny do orientacji M. Innymi słowy, reper $\left(n, e_\rho, e_\phi\right)$ nie jest zgodny z kanoniczną orientacją $\mathbb{R}^3$. Cofamy formę.

$$\phi^*\omega = \frac{1}{\rho\cos\phi}\,\mathrm{d}\rho\sin\phi \wedge \mathrm{d}\frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho\sin\phi}\,\mathrm{d}\frac{\rho}{2} \wedge \mathrm{d}\rho\cos\phi + \frac{2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\cos\phi \wedge \mathrm{d}\rho\sin\phi$$

Póki co osobliwości dalej są...

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi + \frac{2}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho - 2\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho = -\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

Osobliwości się skasowały. Coś się ciekawego dzieje na poziomie geometrycznym. Teraz kontrolując znak obliczamy całkę. Reper $\left(n, e_\phi, e_\rho\right)$ jest zgodny, więc „$-$" zostaje.

$$\int_{(M,\imath)} \omega = -\int_{\substack{\phi\in[0,2\pi] \\ \rho\in[2,4]}} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = -4\pi$$

Zadanie 1/S2 Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\phi\colon \mathbb{R}^4_+ \to \mathbb{R}^3_+$, $\phi(p,q,r,s) = (pq, qr, rs)$ oraz $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

ω – 2-forma na $\mathbb{R}^3_+$, $\phi^*\omega$ – 2-forma na $\mathbb{R}^4_+$
Można to przepisać tak:

$$\begin{aligned}
\omega &= (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= xyz\left(\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \wedge \frac{\mathrm{d}z}{z} + xyz\frac{\mathrm{d}x}{x} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y}
\end{aligned}$$

Ten trick działa w kontekście, że można dzielić przez x, y, z, zatem one się nie mogą zerować.

$$= xyz\big[(\mathrm{d}\log y - \mathrm{d}\log x) \wedge \mathrm{d}\log z + \mathrm{d}\log x \wedge \mathrm{d}\log y\big]$$

Chcemy jeszcze, żeby pojawił się wspólny czynnik.

$$= xyz\big[(\mathrm{d}\log y - \mathrm{d}\log x) \wedge \mathrm{d}\log z + (\mathrm{d}\log x - \mathrm{d}\log y) \wedge \mathrm{d}\log y\big]$$

To działa, ponieważ po zwegowaniu to co dodaliśmy, zeruje się.

$$\begin{aligned}
&= xyz\,\mathrm{d}(\log y - \log x) \wedge \mathrm{d}(\log z - \log y) \\
&= xyz\,\mathrm{d}\log\left(\frac{y}{x}\right) \wedge \mathrm{d}\log\left(\frac{z}{y}\right)
\end{aligned}$$

Teraz możemy cofnąć formę.

$$\phi^*\omega = pq^2r^2s\,\mathrm{d}\log\frac{r}{s} \wedge \mathrm{d}\log\frac{s}{q}$$

Niepokojące jest to, że przekształcenie ϕ nie ma osobliwości, wyjściowa forma też nie ma, a my zrobiliśmy tak, że w zasadzie poza naszą dziedziną są osobliwości. Trochę sztucznie, ale działa.

$$\begin{aligned}
&= pq^2r^2s\left(\frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{\mathrm{d}p}{p}\right) \wedge \left(\frac{\mathrm{d}s}{s} - \frac{\mathrm{d}q}{q}\right) \\
&= pq^2r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}s - q^2r^2\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}s - pqrs\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}q + qr^2s\,\mathrm{d}
\end{aligned}$$

Nie ma osobliwości na całym $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 2/S2 Mamy 2-formę w $\mathbb{R}^4$: $\omega = f(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)$. Znaleźć warunki na f tak, żeby ω była zamknięta, tj. $d\omega = 0$. Znaleźć formę pierwotną θ: $\mathrm{d}\theta = \omega$.

Najpierw bez żadnego wyrafinowania:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) \\
&\quad + \underbrace{f\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)}_{=0} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t) = 0
\end{aligned}$$

W związku z tym, dostajemy układ równań cząstkowych:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Wprowadźmy nowe współrzędne.

$$\begin{aligned} \alpha &= x + z, & \beta &= x - z \\ \gamma &= y + t, & \delta &= y - t \end{aligned}$$

Liczymy partiale:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_\alpha + \partial_\beta, & \partial_y &= \partial_\gamma + \partial_\delta \\ \partial_z &= \partial_\alpha - \partial_\beta, & \partial_t &= \partial_\gamma - \partial_\delta \end{aligned}$$

Stąd,

$$2\partial_\alpha f = 0, \quad 2\partial_\gamma f = 0$$

Czyli f jest stała względem α, γ. W związku z tym,

$$f(x, y, z, t) = h(\beta, \delta) = h(x - z, y - t)$$

ω ma postać:

$$\begin{aligned} \omega &= h(x - z, y - t)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) \\ &= h(x - z, y - t)\big(\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}(x - z)\,\mathrm{d}t\big) \\ &= h(x - z, y - t)\,\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}(y - t) \end{aligned}$$

Po zapisaniu w takiej postaci widać, że $\mathrm{d}\omega = 0$, bo w zmiennych β, δ to jest 2-forma. Po różniczkowaniu nie dałoby się utworzyć 3-formy z dwóch zmiennych.