Analiza III R CW

Wykładowca:
dr hab. Paweł Kasprzak

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Ćwiczenia 1

15 paź 2020 do powtórki: Twierdzenie o funkcj uwikłanej i badanie powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 1. Atlas – zbiór map $M \to \mathbb{R}^n$ (lokalnych układów współrzędnych), gdzie M jest rozmaitością

$$\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

Do badania czy rozmaitość można pokryć układem współrzędnych służy twierdzenie o funkcji uwikłanej.
Mapa rzutuje w dół $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, parametryzacja w górę $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Zadanie 1/S1 Rozważmy funkcję $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots x_{n+1}^2 - 1$. Wówczas sfera $\mathbb{S}^n$ to $f^{-1}(0)$. Rozważmy funkcję $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 1$ i niech $f^{-1}(0) \stackrel{\text{def}}{=} M \subset \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć system parametryzujący ten zbiór.

Dowód. Równanie domniemanej powierzchni możemy zapisać w postaci $2y^2 - 1 = \rho^2$, gdzie $\rho^2 = x^2 + z^2$ jest kwadratem współrzędnej „radialnej” w płaszczyźnie xz. Widzimy, że $y(\rho)$ opisuje hiperbolę.

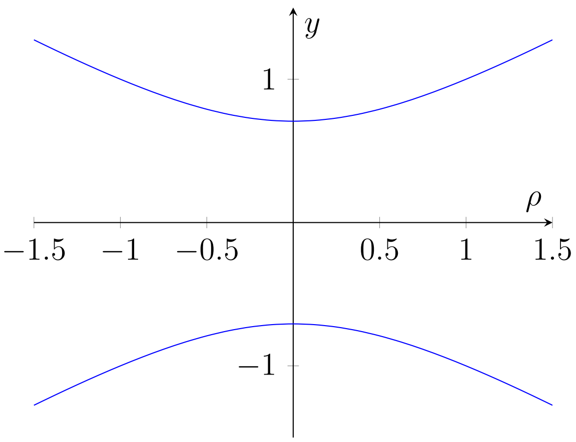
Ten zbiór M to hiperboloida dwupowłokowa. Czy ten zbiór tworzy powierzchnię?

$$f'(x, y, z) = [2x, -4y, 2z]$$

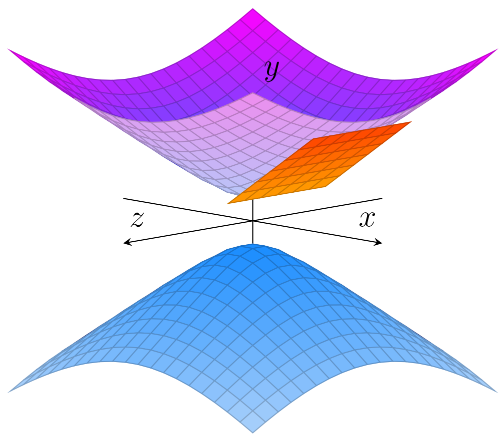
$f' = 0 \implies \operatorname{rk} f' = 0$ lub $f' \neq 0 \implies \operatorname{rk} f' = 1$. W naszym przypadku $f' \neq 0$, zatem M jest powierzchnią 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$. Będziemy zastanawiać się nad $\mathrm{T}_P M$ i nad afiniczną płaszczyzną styczną. Przestrzeń styczna w punkcie $p_0 = [x_0, y_0, z_0]$ to podprzestrzeń wektorowa. Afiniczna płaszczyzna styczna to trochę coś innego.

Zaproponujmy parametryzację górnego płata tej powierzchni $M_+ = \{p \in M \colon y > 0\}$. Będziemy parametryzować płaszczyzną xz.

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + s^2 + t^2} \\ t \end{bmatrix} \in M_+$$



Rysunek 1.1: Wykres $y(\rho)$, czyli przekrój hiperboloidy dwupowłokowej.



Rysunek 1.2: Powierzchnia M z afiniczną płaszczyzną styczną w punkcie $p = \left(3, \sqrt{5}, 0\right)$.

Przestrzeń styczna do p_0 to jądro tej pochodnej.

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{p_0}M_+ = \mathrm{T}_{p_0}M &= \ker[2x_0, -4y_0, 2z_0] \\ &= \left\{ \left[v_x, v_y, v_z\right] : x_0v_x - 2y_0v_y + z_0v_z = 0 \right\}\end{aligned}$$

Afiniczna płaszczyzna styczna polega na tym, że bierzemy tą wyżej opisaną przestrzeń i dodajemy punkt zaczepienia. Są to punkty postaci $\left\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0}M\right\}$. Weźmy wektor $\left[w_x, w_y, w_z\right] = \mathbf{w} = p_0 + \mathbf{v}$. Stąd,

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x - x_0 \\ w_y - y_0 \\ w_z - z_0 \end{bmatrix}$$

Wstawiając to do równania na jądro,

$$\begin{aligned}\left\{p_0 + \mathbf{v} \colon \mathbf{v} \in \mathrm{T}_{p_0}M\right\} &= \left\{ \left[w_x, w_y, w_z\right] : x_0w_x - 2y_0w_y + z_0w_z - \left(x_0^2 - 2y_0^2 + z_0^2\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left[w_x, w_y, w_z\right] : Aw_x + Bw_y + Cw_z + D = 0 \right\}\end{aligned}$$

■

Wstęp do form liniowych 1-formy na przestrzeni V: $V^* = \bigwedge^1 V^*$
Przykład 2-formy antysymetrycznej na przestrzeni V: oznaczenie $\bigwedge^2 V^*$: $\omega\colon V \times V \to \mathbb{R}$ oraz antysymetryczne $\omega(v, w) = \omega(w, v)$.

Ogólniej (jakiś tam funktor w kategorii czegoś tam xD): $\bigwedge^k V^*$: odwzorowania k–liniowe, antysymetryczne.

$$\omega^k \wedge \alpha^l \in \bigwedge^{k+l} V^*, \quad \text{2-liniowe, łączne}$$
$$\omega^k \wedge \alpha^l = (-1)^{kl}\alpha^l \wedge \omega^k$$
$$\dim \bigwedge^k V^* = \binom{n}{k}, \quad n = \dim V$$

Niech $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – baza V. Wówczas baza dualna to $\left\{e^1, \ldots, e^n\right\}$.
Baza $\bigwedge^2 V^*$: $\left\{e^i \wedge e^j : 1 \leq i < j \leq n\right\}$. Stąd potem kombinatoryczny wzór na wymiar (dbamy o uporządkowane iloczyny).

Zadanie 2/S1 Niech $\beta \in \bigwedge^{k+1} V^*$ i $0 \neq \omega \in \bigwedge^1 V^*$ takie, że $\beta \wedge \omega = 0$. Wykazać, że istnieje k-forma α taka, że $\beta = \alpha \wedge \omega$.

Można zrobić tak, żeby baza V^* była $\left\{\omega, e^2, \ldots, e^n\right\}$. Zatem,

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$
$$\beta \wedge e^1 = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}} \left(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}\right) \wedge e^1 = 0$$

tam gdzie $e^{i_1} = e^1$ i tak iloczyn zewnętrzny się zeruje. Stąd, jeśli $e^{i_1} > 1$, to odpowiednie $\beta_{xyz} = 0$. Stąd,

$$\beta = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^1 \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$
$$\beta = \alpha \wedge \omega = (-1)^k \omega \wedge \alpha = (-1)^k e^1 \wedge \alpha$$

Zatem α istnieje i ma postać:

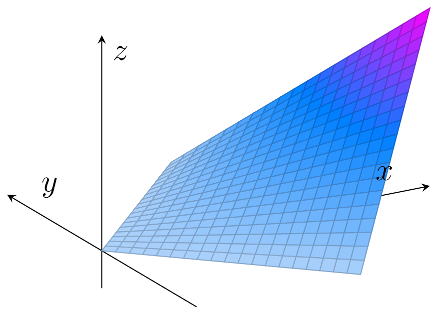
$$(-1)^k \alpha = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_{k+1} \leq n} \beta_{1 i_2 \ldots i_{k+1}} e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_{k+1}}$$

Jednakże α nie jest jednoznaczne, bo mamy wciąż swobodę wziąć $\alpha' = \alpha + t\omega$ i to też działa. Czy jest więcej stopni swobody?

Wykład 2: Ćwiczenia 2

19 paź 2020

Zadanie 4/S1 Mamy $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ i parametryzację powierzchni zanurzonej $[0,1] \times [0,1] \ni (u,v) \overset{\phi}{\mapsto} (u+v, u-v, uv) \in \mathbb{R}^3$. To jest tylko jeden płat, nie ma posklejanych parametryzacji. Mamy policzyć całkę po powierzchni z ω (orientacja do wyboru).



Rysunek 1.3: Powierzchnia M.

Jedyna głębsza rzecz w tym zadaniu to orientacja. Parametryzacja może być zgodna lub przeciwna z orientacją M.
Krok 1: cofnąć formę ω do $[0,1]\times[0,1]$. Innymi słowy obliczamy $\phi^*(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z)$. Ta procedura ma tę własność, że:

$$\phi^*\,\mathrm{d} = \mathrm{d}\phi^*$$
$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$$

Stąd,

$$\phi^*\omega = \phi^*x\,\mathrm{d}\phi^*y \wedge \mathrm{d}\phi^*z + \phi^*y\,\mathrm{d}\phi^*x \wedge \mathrm{d}\phi^*z$$

Myśląc w przyziemny sposób, po prostu trzeba podstawić te wszystkie zmienne i ich różniczki. A tak mniej przyziemnie, to $\phi^*f = f \circ \phi$.

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{d}\phi^*(xy) \wedge \mathrm{d}\phi^*z \\
&= \mathrm{d}(u+v)(u-v) \wedge \mathrm{d}(uv) \\
&= (2u\,\mathrm{d}u - 2v\,\mathrm{d}v) \wedge (u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u) \\
&= 2\big(u^2 + v^2\big)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Teraz liczymy całkę z cofniętej formy.

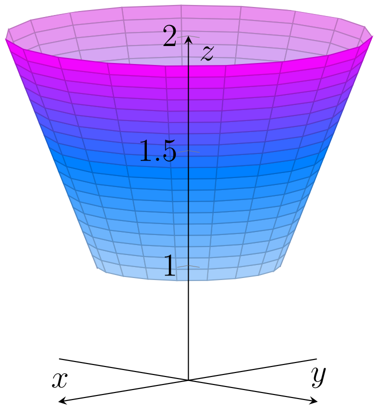
$$\int_{(M,\imath)} \omega = \pm \int_{[0,1]\times[0,1]} 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$+$, gdy ϕ zgodna z orientacją M; $-$, gdy ϕ nie jest zgodna. Przyjmijmy, że parametryzacja ϕ jest niezgodna z orientacją M.

$$\begin{aligned}
&= -\int_{[0,1]\times[0,1]} 2\big(u^2+v^2\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= -4\int_{[0,1]\times[0,1]} u^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

To ostatnie przejście z symetrii, bo każda całka da taki sam wkład.

Zadanie 5/S1 Mamy $\omega = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{1}{y}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Całkujemy to po powierzchni stożka. $M = \left\{(x, y, z) \colon 1 \leq z \leq 2,\, 2z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$. M zorientowane jest na zewnątrz.



Rysunek 1.4: Powierzchnia M

Uwaga, ta forma jest osobliwa na stożku, ponieważ x i y może się na nim zerować. Nie powinno się takich form całkować po powierzchniach, na których dają osobliwości! Z założenia jest to **nielegalne**! Ale przekonamy się, że po cofnięciu tej formy do stożka osobliwości jakoś znikają magicznie. Powinniśmy to cofnąć omijając osobliwości i popatrzeć czy osobliwość znika (czy była pozorna).

Przyjmujemy parametryzację, w której jak się okaże, nie będzie osobliwości (zatem de facto w każdej innej też jej nie było):

$$\phi(\rho, \phi) = \begin{bmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ \rho/2 \end{bmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi],\, \rho \in [2, 4]$$

Co z orientacją? Jak sobie kręcę prawą ręką $e_\rho \to e_\phi$ to dostaję wektor przeciwny do orientacji M. Innymi słowy, reper $\left(n, e_\rho, e_\phi\right)$ nie jest zgodny z kanoniczną orientacją $\mathbb{R}^3$. Cofamy formę.

$$\phi^*\omega = \frac{1}{\rho\cos\phi}\,\mathrm{d}\rho\sin\phi \wedge \mathrm{d}\frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho\sin\phi}\,\mathrm{d}\frac{\rho}{2} \wedge \mathrm{d}\rho\cos\phi + \frac{2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\cos\phi \wedge \mathrm{d}\rho\sin\phi$$

Póki co osobliwości dalej są...

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi + \frac{2}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho - 2\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho = -\,\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

Osobliwości się skasowały. Coś się ciekawego dzieje na poziomie geometrycznym. Teraz kontrolując znak obliczamy całkę. Reper $\left(n, e_\phi, e_\rho\right)$ jest zgodny, więc „$-$” zostaje.

$$\int_{(M,\imath)} \omega = -\int_{\substack{\phi\in[0,2\pi] \\ \rho\in[2,4]}} \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = -4\pi$$

Zadanie 1/S2 Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\phi\colon \mathbb{R}^4_+ \to \mathbb{R}^3_+$, $\phi(p,q,r,s) = (pq, qr, rs)$ oraz $\omega = x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

ω – 2-forma na $\mathbb{R}^3_+$, $\quad \phi^*\omega$ – 2-forma na $\mathbb{R}^4_+$
Można to przepisać tak:

$$\begin{aligned}\omega &= (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\ &= xyz\left(\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \wedge \frac{\mathrm{d}z}{z} + xyz\frac{\mathrm{d}x}{x} \wedge \frac{\mathrm{d}y}{y}\end{aligned}$$

Ten trick działa w kontekście, że można dzielić przez x, y, z, zatem one się nie mogą zerować.

$$= xyz\big[(\mathrm{d}\log y - \mathrm{d}\log x) \wedge \mathrm{d}\log z + \mathrm{d}\log x \wedge \mathrm{d}\log y\big]$$

Chcemy jeszcze, żeby pojawił się wspólny czynnik.

$$= xyz\big[(\mathrm{d}\log y - \mathrm{d}\log x) \wedge \mathrm{d}\log z + (\mathrm{d}\log x - \mathrm{d}\log y) \wedge \mathrm{d}\log y\big]$$

To działa, ponieważ po zwegowaniu to co dodaliśmy, zeruje się.

$$\begin{aligned}&= xyz\,\mathrm{d}(\log y - \log x) \wedge \mathrm{d}(\log z - \log y)\\ &= xyz\,\mathrm{d}\log\left(\frac{y}{x}\right) \wedge \mathrm{d}\log\left(\frac{z}{y}\right)\end{aligned}$$

Teraz możemy cofnąć formę.

$$\phi^*\omega = pq^2r^2s\,\mathrm{d}\log\frac{r}{s} \wedge \mathrm{d}\log\frac{s}{q}$$

Niepokojące jest to, że przekształcenie ϕ nie ma osobliwości, wyjściowa forma też nie ma, a my zrobiliśmy tak, że w zasadzie poza naszą dziedziną są osobliwości. Trochę sztucznie, ale działa.

$$\begin{aligned}&= pq^2r^2s\left(\frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{\mathrm{d}p}{p}\right) \wedge \left(\frac{\mathrm{d}s}{s} - \frac{\mathrm{d}q}{q}\right)\\ &= pq^2r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}s - q^2r^2\,\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}s - pqrs\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}q + qr^2s\,\mathrm{d}\end{aligned}$$

Nie ma osobliwości na całym $\mathbb{R}^4$.

Zadanie 2/S2 Mamy 2-formę w $\mathbb{R}^4$: $\omega = f(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)$. Znaleźć warunki na f tak, żeby ω była zamknięta, tj. $d\omega = 0$. Znaleźć formę pierwotną $\theta\colon\ \mathrm{d}\theta = \omega$.

Najpierw bez żadnego wyrafinowania:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)\\ &\quad + \underbrace{f\,\mathrm{d}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)}_{=0}\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t\right) \wedge (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x)\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t)\\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t) = 0\end{aligned}$$

W związku z tym, dostajemy układ równań cząstkowych:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Wprowadźmy nowe współrzędne.

$$\begin{aligned} \alpha &= x + z, & \beta &= x - z \\ \gamma &= y + t, & \delta &= y - t \end{aligned}$$

Liczymy partiale:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_\alpha + \partial_\beta, & \partial_y &= \partial_\gamma + \partial_\delta \\ \partial_z &= \partial_\alpha - \partial_\beta, & \partial_t &= \partial_\gamma - \partial_\delta \end{aligned}$$

Stąd,

$$2\partial_\alpha f = 0, \quad 2\partial_\gamma f = 0$$

Czyli f jest stała względem α, γ. W związku z tym,

$$f(x, y, z, t) = h(\beta, \delta) = h(x - z, y - t)$$

ω ma postać:

$$\begin{aligned} \omega &= h(x - z, y - t)(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x) \\ &= h(x - z, y - t)\big(\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}(x - z)\,\mathrm{d}t\big) \\ &= h(x - z, y - t)\,\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}(y - t) \end{aligned}$$

Po zapisaniu w takiej postaci widać, że $\mathrm{d}\omega = 0$, bo w zmiennych β, δ to jest 2-forma. Po różniczkowaniu nie dałoby się utworzyć 3-formy z dwóch zmiennych.

Wykład 3: Ćwiczenia 3

22 paź 2020

Zadanie 2/S2 bis

$$\begin{aligned} \omega &= f\big((\mathrm{d}x - \mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}y + (\mathrm{d}z - \mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}t\big) \\ &= f\big(\mathrm{d}(x - z) \wedge \mathrm{d}(y - t)\big) \end{aligned}$$

Chcemy pokazać, że to jest pewne cofnięcie 2-formy z pewnych współrzędnych.

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ x - z \\ y + t \\ y - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\phi^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \frac{\gamma + \delta}{2} \\ \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \frac{\gamma - \delta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Chcemy teraz cofnąć formę do $\phi^{-1*}\omega$.

$$\begin{aligned}
\phi^{-1*}\omega &= f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2}\right) \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta \\
&= g(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta \\
\mathrm{d}\omega = 0 \iff 0 &= \phi^{-1*}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\,\phi^{-1*}\omega = \mathrm{d}(g\,\mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta) \\
&= \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta \\
&= \frac{\partial g}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta + \frac{\partial g}{\partial \gamma}\,\mathrm{d}\gamma \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\delta
\end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0 &= \frac{\partial g}{\partial \gamma} \\
g(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = g(0,\beta,0,\delta) &\overset{\text{def}}{=} h(x-z, y-t).
\end{aligned}$$

Szukanie form pierwotnych ω – zamknięta k-forma: $\mathrm{d}\omega = 0$. Znaleźć $\overset{k-1}{\eta}$: $\mathrm{d}\overset{k-1}{\eta} = \omega$. Lemat Poincare z praktycznego punktu widzenia jest mało użyteczny. Czasem jak obszar nie jest gwiaździsty, to ω też może mieć formę pierwotną.

Zadanie 3a/S2 $\overset{1}{\omega} \in \Omega^1(O)$, $O = \big\{(x,y)\colon y > 0\big\}$, $\omega = \dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{2x^2 - xy + y^2}$. Znaleźć formę pierwotną $\overset{0}{\eta} \in C^\infty(O)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{y}{y^2 - xy + 2x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2 - xy + 2x^2}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania jest

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Ponieważ,

$$\mathrm{d}\omega = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{2x^2 - xy + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2x^2 - xy + y^2}\right)\right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$

Zróżniczkujmy iloraz $\mathrm{d}\big(x/y\big)$ (uwaga: $y > 0$).

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{\mathrm{d}x}{y} - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{y^2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) \\
\omega &= \frac{y^2\,\mathrm{d}(x/y)}{2x^2 - xy + y^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 1} \\
\phi\colon O \ni (x,y) &\mapsto \frac{x}{y} = t \in \mathbb{R} \\
\rho(t) &= \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 - t + 1} \in \Omega^1(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Żeby z ρ dostać ω trzeba cofnąć przez ϕ.

$$\begin{aligned}\omega &= \phi^*\rho\\ \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\phi^*\rho = \phi^*\,\mathrm{d}\rho = 0\end{aligned}$$

Zeruje się, bo 2-fomy na $\mathbb{R}^1$ się zerują. Szukamy teraz $f(t)\colon\ \mathrm{d}f = \mathrm{d}t\,/\big(2t^2 - t + 1\big)$.

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{1}{2t^2-t+1} = \frac{1}{2\big(t^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\big)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\big(t-\frac{1}{4}\big)^2-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\big(t-\frac{1}{4}\big)^2+\frac{7}{16}} = \frac{8}{7}\frac{1}{\frac{16}{7}\big(t-\frac{1}{4}\big)^2+1} = \frac{8}{7}\frac{1}{\Big(\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\Big)^2+1}\\ f(t) &= \frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C\\ \overset{0}{\eta} &= \phi^* f = \frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\frac{\frac{4x}{y}-1}{\sqrt{7}} + C\end{aligned}$$

Zadanie 3a/b Jak w zadaniu poprzednim, dla
$\omega = \dfrac{\big(x^2+y^2\big)\,\mathrm{d}z - z(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \in \Omega^1(O)$, $O = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(0,0,0)\big\}$.

W istocie ta forma zależy od 2 a nie 3 współrzędnych jak się dobrze przyjrzeć. Zauważmy, że $\mathrm{d}\big(x^2+y^2\big) = 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y$. Weźmy współrzędne cylindryczne z tym, że aby móc różniczkować, muszę wziąć $\phi \in (0, 2\pi)$, czyli wyrzucić dodatnią oś OX (chcemy mieć zbiór otwarty, żebyśmy mogli z obu stron różniczkować). Zatem, $O' = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(t>0,0,0)\big\}$.

Wyrazimy $\omega\big|_{O'}$ wyrazimy we współrzędnych (ρ, ϕ, z). Zobaczymy, że to się nam naturalnie przedłuży na O.

$$\omega\big|_{O'} = \frac{\rho^2\,\mathrm{d}z - \frac{z}{2}\,\mathrm{d}\rho^2}{\big(\rho^2+z^2\big)^{3/2}}$$

Niech $\rho^2 = s,\ s > 0$.

$$= \frac{s\,\mathrm{d}z - \frac{z}{2}\,\mathrm{d}s}{\big(s+z^2\big)^{3/2}}$$

Sprawdzić, że $\mathrm{d}\omega = 0$. Szukamy $f(s,z)\colon\ \mathrm{d}f = \omega\big|_{O'}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= -\frac{z}{2}\frac{1}{\big(s+z^2\big)^{3/2}}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{s}{\big(s+z^2\big)^{3/2}}\end{aligned}$$

Całkowanie ze względu na s,

$$\begin{aligned} f &= \frac{z}{(s+z^2)^{1/2}} + C(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{(s+z^2)^{1/2}} - \frac{z}{2}\frac{2z}{(s+z^2)^{3/2}} + C'(z) \\ &= \frac{s+z^2-z^2}{(s+z^2)^{3/2}} + C'(z) = \frac{s}{(s+z)^{3/2}} + C'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} + C'(z) \end{aligned}$$

Stąd,

$$C'(z) = 0 \implies f(s,z) = \frac{z}{(s+z^2)^{1/2}} + D$$

Definiujemy więc ostateczną formę:

$$\eta = \frac{z}{(z^2+y^2+z^2)^{1/2}}: \qquad \mathrm{d}\eta\,\big|_{O'} = \omega\,\big|_{O'}$$

Ponieważ O' jest gęsty w O (ta prosta OX ma wnętrze miary 0, a na brzegu funkcje gładkie się zgadzają), to $\mathrm{d}\eta = \omega$.

Zadanie 3b/S2 $\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$, $\omega \in \Omega^2(O)$, $O = \big\{(x,y,z)\colon x^2+y^2 > 0\big\}$. Szukamy $\eta \in \Omega^1(O)\colon\ \mathrm{d}\eta = \omega$.

Znowu trzeba tu zauważyć współrzędne cylindryczne, so sugestywnie pojawia się w definicji zbioru O.

$$\begin{aligned} &x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Spójrzmy na współrzędne cylindryczne.

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= \rho\cos\phi\,\mathrm{d}(\rho\sin\phi) - \rho\sin\phi\,\mathrm{d}(\rho\cos\phi) \\ &= \ldots = \rho^2\,\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Podobnie,

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi$$

Forma we współrzędnych (ρ, ϕ, z):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-\rho^2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\phi + z\rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z\rho\,\mathrm{d}\rho - \rho^2\,\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \wedge \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Sprowadziliśmy to do problemu znalezienia formy pierwotnej do 1-formy.
Szukamy $f(\rho, z)\colon \eta = f\,\mathrm{d}\phi$ spełnia $\mathrm{d}\eta = \omega$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{z\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} \xrightarrow{\text{całka po } \rho} f = -z\frac{1}{\left(z^2+\rho^2\right)^{1/2}} + C(z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{z}{\left(z^2+\rho^2\right)^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}\right)2z - \frac{1}{\left(z^2+\rho^2\right)^{1/2}} + C'(z) \\
&= \frac{z^2-z^2-\rho^2}{\left(z^2+\rho^2\right)^{3/2}} + C'(z) \\
&= \frac{-\rho^2}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} + C'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} + C'(z) \\
f(\rho, z) &= -\frac{z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}} + D
\end{aligned}$$

Mamy więc formę pierwotną $\eta\colon\ \mathrm{d}\eta = \omega$

$$\eta = -\frac{z}{\left(z^2+x^2+y^2\right)^{1/2}} \cdot \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2\right)} \in \Omega^1(O)$$

Wykład 4: Ćwiczenia 4

26 paź 2020

Zadanie 0 $\omega = \frac{1}{xy^2z}(zt\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + tx\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + xy\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t + yz\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x)$ określona na $O = \mathbb{R}^4_+$. Znaleźć formę pierwotną.

$$\omega = \frac{t}{xy^2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \frac{t}{y^2z}\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{1}{yz}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t + \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x$$

Szukamy 1-formy $\theta \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^4_+\right)$ takiej, że $\mathrm{d}\theta = \omega$. Chcemy zapiać ω w postaci $\omega = \beta\wedge\alpha$, gdzie α jest zamknięta. Wówczas $\theta = f\alpha$, gdzie $\mathrm{d}f = \beta$. $(\omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}f\wedge\alpha\ )$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}x}{x}\wedge\frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y + \frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y\wedge\frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{\mathrm{d}z}{z}\wedge\frac{\mathrm{d}t}{y} + \frac{\mathrm{d}t}{y}\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Te wszystkie 1-formy ułamkowe z jednakowymi zmiennymi są zamknięte.

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\mathrm{d}t}{y} - \frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\wedge\frac{\mathrm{d}x}{x} + \left(\frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}t}{y}\right)\wedge\frac{\mathrm{d}z}{z} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}t}{y} - \frac{t}{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\wedge\left(\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}z}{z}\right)
\end{aligned}$$

Można zapisać to w taki sposób, by otrzymać dwie możliwe formy pierwotne.

$$= \mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)\wedge\mathrm{d}\log\left(\frac{x}{z}\right)$$

Mamy dwa rozwiązania:

$$\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\,\mathrm{d}\log\left(\frac{x}{z}\right)\right) = \omega$$

$$\theta = \frac{t}{y}\,\mathrm{d}\log\left(\frac{x}{z}\right)$$

Albo,

$$\mathrm{d}\left(-\log\left(\frac{x}{z}\right)\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)\right) = \omega$$

$$\theta' = -\log\left(\frac{x}{z}\right)\mathrm{d}\left(\frac{t}{y}\right)$$

Wniosek 1. Jakie inne θ można wskazać? Funkcja pierwotna zawsze jest wyznaczana z dokładnością do stałej. Natomiast swoboda znalezienia formy pierwotnej jest dużo większa. Niech $\omega \in \Omega^k(O)\colon \mathrm{d}\omega = 0$. Szukamy $\theta \in \Omega^{k-1}(O)\colon \mathrm{d}\theta = \omega$. Niech $\eta \in \Omega^{k-2}(O)$ i rozważmy $\theta + \mathrm{d}\eta = \theta_\eta$. Wówczas $\mathrm{d}\theta_\eta = \mathrm{d}(\theta + \mathrm{d}\eta) = \mathrm{d}\theta = \omega$. Wszystkie tego typu θ_η są dobrymi formami pierwotnymi.

Regułki jak działać ze zwężeniem:

$$\partial_t \lrcorner\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$
$$\partial_t \lrcorner\, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}x$$

Zadanie 1 Niech $O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z > 0\}$. Oblicz formę pierwotną do $\omega = \frac{1}{z^3}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$. Użyj kontrakcji punktowej $\phi\colon [0,1] \times O \to O$ dla $\phi(t, x, y, z) = (tx, ty, 1 - t + tz)$.

$$\begin{aligned}\phi^*\omega = \big[&tx\,\mathrm{d}(ty) \wedge \mathrm{d}(1 - t + tz) + ty\,\mathrm{d}(1 - t + tz) \wedge \mathrm{d}(tx) \\ &+ (1 - t + tz)\,\mathrm{d}(tx) \wedge \mathrm{d}(ty)\big]\frac{1}{(1 - t + tz)^3}\end{aligned}$$

Zaraz będziemy zwężać, więc w tym wyrażeniu, które nam powstanie zostawiamy tylko wyrazy zawierające $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^i$.

$$\begin{aligned}\partial_t \lrcorner \phi^*\omega = \partial_t \lrcorner \bigg[&\frac{1}{(1 - t + tz)^3}\big(t^2xy\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}z + t^2x(z-1)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t\big) + ty\big((z-1)t\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x + tx\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t\big) \\ &+ \big(1 + t(z-1)\big)(xt\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y + ty\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t) + \cdots\bigg] \\ = {}& \frac{1}{\big(1 + t(z-1)\big)^3}\big[t^2xy\,\mathrm{d}z - t^2x(z-1)\,\mathrm{d}y + t^2y(z-1)\,\mathrm{d}x - t^2yx\,\mathrm{d}z \\ &+ \big(1 - t(z-1)\big)tx\,\mathrm{d}y - \big(1 + t(z-1)\big)t\,\mathrm{d}x\big]\end{aligned}$$

Jak obliczymy z tego całkę po t od 0 do 1 to mamy formę pierwotną. Wszędzie (prawie) pojawia się nam poniższa całka.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\big(1+(z-2)t\big)^3} &= -\frac{1}{2(z-1)}\frac{t^2}{\big(1+(z-1)t\big)^2}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\big(1+(z-1)t\big)^2} \\ &= -\frac{1}{2\big(1+(z-1)\big)^2(z-1)} - \dots\end{aligned}$$

No w każdym razie się dużo naliczymy xD „Ale ja mogę podać wynik tej procedurki”. Policzmy to jeszcze raz, tylko sprytnie:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{z^3}\big((x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\wedge \mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\big) \\ &= \frac{1}{z^3}\big(\rho^2\,\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}z + z\rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\big) \\ &= \frac{(-1)}{z^3}\rho^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\phi + \frac{\rho}{z^2}\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi \\ &= \left(\frac{\rho}{z^2}\,\mathrm{d}\rho - \frac{\rho^2}{z^3}\,\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Łatwo znaleźć funkcję zależną od ρ, z, której pochodną jest wyrażenie w nawiasie.

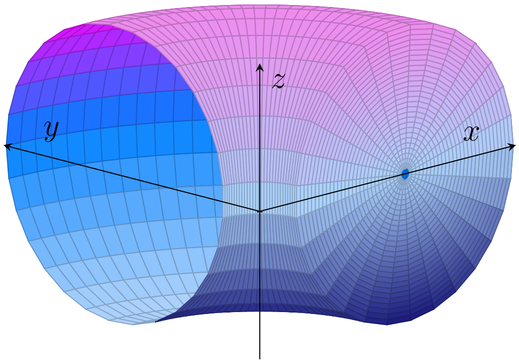
$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2}\right)\wedge\mathrm{d}\phi$$

Teraz możemy wyliczyć formę pierwotną θ. Jeśli $\omega = \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\phi$, to $\theta = f\,\mathrm{d}\phi$.

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2}\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z^2}\frac{1}{\rho^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{z^2}\end{aligned}$$

Zadanie 2b Oblicz całkę $\displaystyle\int_{(\Sigma,\imath)} \omega$ z 2-formy $\omega = z^2\left(\dfrac{\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{\sqrt{(y-4)^2+z^2}} + \dfrac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-4)^2+z^2}}\right)$ po powierzchni $\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \left(\sqrt{x^2+y^2}-4\right)^2 + z^2 = 9 \,\wedge\, x,y\geq 0\right\}$ zorientowanej na zewnątrz.
Zauważmy, że $\mathrm{d}\omega = 0$.

$$\mathrm{d}\omega_1 = \frac{2z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{\sqrt{(y-4)^2+z^2}} + \frac{z^2\big(-\frac{1}{2}\big)2z\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z}{\left(\sqrt{(y-4)^2+z^2}\right)^3} = 0$$



Rysunek 1.5: Powierzchnia Σ, czyli ćwiartka torusa. Dodatkowo, powierzchnia boczna D_1.

Tak samo zachodzi dla drugiej (antysymetrycznej) części formy ω. Całkować będziemy po ćwiartce torusa. Zauważmy, że dane Σ wraz z D_1 i D_2 stanowią brzeg „wypełnionego" torusa T. Z twierdzenia Stokesa (orientacje zostawiając w kwestii czytelnika),

$$
\begin{aligned}
0 = \int_T \mathrm{d}\omega &= \int_\Sigma \omega + \int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega \\
\int_\Sigma \omega &= -\left(\int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega\right) \\
D_1 &= \left\{y = 0,\ (x-4)^2 + z^2 \le 9\right\} \\
D_2 &= \left\{x = 0,\ (y-4)^2 + z^2 \le 9\right\}
\end{aligned}
$$

Całkując po D_1 pierwszy składnik formy zawierający $\mathrm{d}y$ oczywiście można pominąć, gdyż się zeruje ($y = 0$).

$$
\begin{aligned}
\int_{(D_1,\imath)} \omega = \int_{D_1} \frac{-z^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z}{\sqrt{(x-4)^2 + z^2}} &= \left| \begin{matrix} x - 4 = \rho\cos\phi \\ z = \rho\sin\phi \\ \rho \in [0,3],\ \phi \in [0, 2\pi] \end{matrix} \right| = -\int_{D_1} \frac{\rho^2 \sin^2\phi \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi}{\rho} \\
&= -\frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \,\mathrm{d}\phi = -\frac{9}{2}\pi
\end{aligned}
$$

Podobnie liczymy drugą całkę, teraz biorąc tylko pierwszy składnik formy ω.

$$
\begin{aligned}
\int_{(D_2,\imath)} \omega &= -\int_{D_2} \frac{z^2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y}{\sqrt{(y-4)^2 + z^2}} = \frac{9}{2}\pi \\
\int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega &= 0 = \int_\Sigma \omega
\end{aligned}
$$

Czy można to było przewidzieć? Sama 2-forma ω jest antysymetryczna ze względu zamianę x, y, natomiast obszar Σ jest symetryczny ze względu na zamianę x, y. Zatem $\displaystyle\int_\Sigma \omega = 0$.

Wykład 5: Ćwiczenia 5

29 paź 2020

Zadanie 1b $\omega = \frac{1}{z^3}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$. Dana jest retrakcja punktowa $\phi(t, x, y, z) = (tx, ty, z^t)$. $z > 0$. Policzyć formę pierwotną.

Ostatnio sprawdziliśmy, że ta sama ω jest zamknięta. Szukamy więc η: $\mathrm{d}\eta = \omega$. Z Lematu Poincare dostajemy wzór na θ, który zależy od ϕ.

$$\eta = \int_0^1 \mathrm{d}t\,\partial_t \lrcorner \phi^* \omega$$

Policzymy cofnięcie.

$$\phi^*\omega = \frac{1}{z^{3t}}\left[tx\,\mathrm{d}(ty) \wedge \mathrm{d}z^t + yt\,\mathrm{d}(z^t) \wedge \mathrm{d}(xt) + z^t\,\mathrm{d}(xt) \wedge \mathrm{d}(yt)\right]$$

Pamiętajmy, że $\mathrm{d}z^t = tz^{t-1}\,\mathrm{d}z + \log z z^t\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned} &= z^{-2t}t(t\log z - 1)\,\mathrm{d}t \wedge (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) + z^{-2t}t^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &\quad + z^{-2t-1}t^3(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Być może przyda się, że $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \rho^2\,\mathrm{d}\phi$.

$$\partial_t \lrcorner \phi^*\omega = z^{-2t}t(t\log z - 1)(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{d}t\, z^{-2t}t(t\log z - 1) &= \left|u = t\log z\right| = \frac{1}{(\log z)^2}\int_0^{\log z} u(u-1)e^{-2u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(\log z)^2}u^2 e^{-2u}\Big|_0^{\log 2} = -\frac{1}{2}z^{-2} \end{aligned}$$

Czyli,

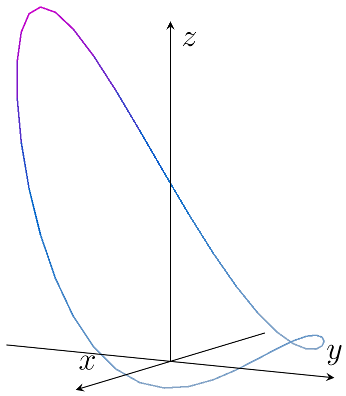
$$\eta = -\frac{1}{2}z^{-2}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$

Zadanie 2a Oblicz całkę $\int_{(\Gamma,\imath)} \omega$ z 1-formy $\omega(x, y, z) = \left(z^2 - y^2\right)\mathrm{d}x - 2xy^2\,\mathrm{d}y + e^{\sqrt{z}}\cos z\,\mathrm{d}z$ po krzywej $\Gamma = \left\{\left(\cos t, \sin t, 8 - \cos^2 t - \sin t\right) : t \in [0, 2\pi)\right\}$ zorientowanej zegarowo.

Wniosek 2. $e^{\sqrt{z}}\cos z\,\mathrm{d}z$ jest formą zupełną (bo jest zamknięta). Niech jej forma pierwotna to f. Ponadto, Γ jest zamknięta (funkcje okresowe po pełnym okresie więc się zamknie). Stąd, z twierdzenia Stokesa:

$$\int_\Gamma \mathrm{d}f = \int_{\partial\Gamma = \varnothing} f = 0$$
$$\int_\Gamma e^{\sqrt{z}}\cos z\,\mathrm{d}z = 0$$

Takiego samego argumentu można użyć, abyć stwierdzić, że praca siły potencjalnej po zamkniętej krzywej jest zerowa!



Rysunek 1.6: Krzywa Γ.

W sposób trywialny acz formalny wprowadzamy parametryzację, aby cofnąć formę do krzywej.

$$\psi(t) = \big(\cos t, \sin t, 8 - \cos^2 t - \sin t\big) \colon t \in [0, 2\pi)$$

Nasza zadana parametryzacja nie jest zgodna z orientacją Γ, zatem:

$$\int_\Gamma \omega = -\int_0^{2\pi} \psi^*\omega = -\int_0^{2\pi} \Big[\big(8 - \cos^2 t - \sin t\big)^2 - \sin^2 t\Big](-1)\sin t \,\mathrm{d}t \\ - \underbrace{2\cos t \sin^2 t \cos t}_{\sin^2 2t} \mathrm{d}t$$

Obliczamy to, co nietrywialne.

$$\int_0^{2\pi} 2\cos^2 t \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

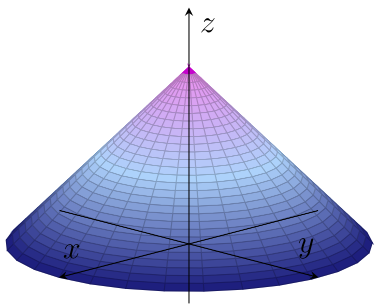
$$\int_0^{2\pi} \big(8 - \cos^2 t - \sin t\big)^2 \sin t \,\mathrm{d}t = \\ = \int_0^{2\pi} (64 + \cos^4 t + \sin^2 t - 16\cos^2 t - 16\sin t + 2\cos^2 t \sin t)\sin t \,\mathrm{d}t = -16\pi$$

Teraz liczymy wyjściową całkę.

$$\int_\Gamma \omega = -15\pi$$

Zadanie 3 Niech $\Sigma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = (1 - z)^2 \wedge 0 \leq z \leq 1\big\}$ o orientacji na zewnątrz. Niech $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ będzie dana wzorem $\omega(x, y, z) = (yz \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z$. Obliczyć całkę z formy po Σ.
Niech Σ będzie powierzchnią boczną „wypełnionego" stożka S ($\partial S = \Sigma \cup \{\text{denko}\}$).

$$\mathrm{d}\omega = (z \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z = (1 - z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$



Rysunek 1.7: Zbiór Σ to powierzchnia boczna stożka.

Najwygodniej działać we współrzędnych walcowych.

$$\begin{aligned}
&= (1-z)\rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}z \\
\int_S \mathrm{d}\omega &= \int_S (1-z)\rho\,\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_{\substack{0\le\rho\le 1-z\\ 0\le z\le 1}} (1-z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}\rho\,\rho(1-z) = 2\pi\int_0^1 \frac{(1-z)^3}{2}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Teraz wiadomo, że wynik musi być taki sam jak całka z ω to brzegu stożka z kanoniczną orientacją. Całka po denku jest zerowa ($z=0$), zatem:

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{4} = \int_{(\partial S,\imath)}\omega = \int_{(\Sigma,\imath)}\omega$$

Zasadniczo właśnie to policzyliśmy używając twierdzenia Stokesa. Możemy jednak sprawdzić licząc to wprost. Parametryzacja powierzchni bocznej:

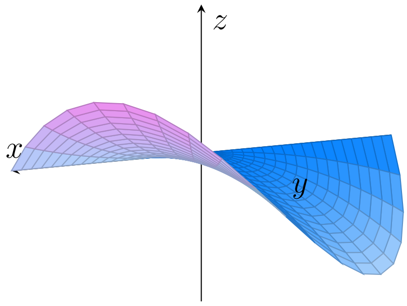
$$\psi(z,\phi) = \big((1-z)\cos\phi,(1-z)\sin\phi,z\big)$$

gdzie $\phi\in[0,2\pi]$, $z\in[0,1]$. Aby powierzchnia miała orientację na zewnątrz, chcemy by pierwszą współrzędną było ϕ, a drugą z.

$$\begin{aligned}
\int_{(\Sigma,\imath)}\omega &= \int_{\substack{\phi\in[0,2\pi]\\ z\in[0,1]}} \Big[(1-z)\sin\phi z\,\mathrm{d}\big[(1-z)\cos\phi\big] + (1-z)\cos\phi\,\mathrm{d}\big[(1-z)\sin\phi\big]\Big]\wedge\mathrm{d}z \\
&= \int_{\substack{\phi\in[0,2\pi]\\ z\in[0,1]}} \big[(1-z)^2 z(-\sin^2\phi) + (1-z)^2\cos^2\phi\ \big]\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\
&= \pi\int_0^1 \mathrm{d}z\,(1-z)^3\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Wyszło to samo!

Zadanie 3(i2) Obliczyć krążenie pola wektorowego V po brzegu powierzchni Σ.
$V(x,y,z) = xz\big((6z-3xy)\partial_x + 2x\partial_y + 3x\partial_z\big)$, $\Sigma = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = xy,\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\big\}$.



Rysunek 1.8: Powierzchnia Σ. $\partial\Sigma$ składa się z prostej $y=0$ i z krzywej ograniczającej tę powierzchnię, dla której $x^2+y^2=1$.

$$\int_{\partial\Sigma} V\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\partial\Sigma} \tilde{V}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

gdzie $\tilde{V}$ jest polem wektorowym na brzegu.

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= xz\big((6z-3z)\partial_x + 2x\partial_y + 3x\partial_z\big)\\
V &\overset{\partial\Sigma}{=} \tilde{V}\\
\int_{\partial\Sigma} \tilde{V}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\partial\Sigma} G(\tilde{V}) &= \int_{\partial\Sigma} xz(3z\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y + 3x\,\mathrm{d}z)\\
&= \int_{\partial\Sigma} \underbrace{\frac{3}{2}\,\mathrm{d}(xz)^2}_{\text{wkład zerowy}} + 2x^2z\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Wkład jest zerowy z tego samego powodu, dla którego wkład był zerowy w zadaniu 2a (całka z formy zupełnej po krzywej zamkniętej).

$$\overset{z=xy}{=} \underbrace{\int_{\substack{y=0\\x^2\le 1}} 2x^3y\,\mathrm{d}y}_{=0} + \int_{\substack{x^2+y^2=1\\y\ge 0}} 2x^3y\,\mathrm{d}y$$

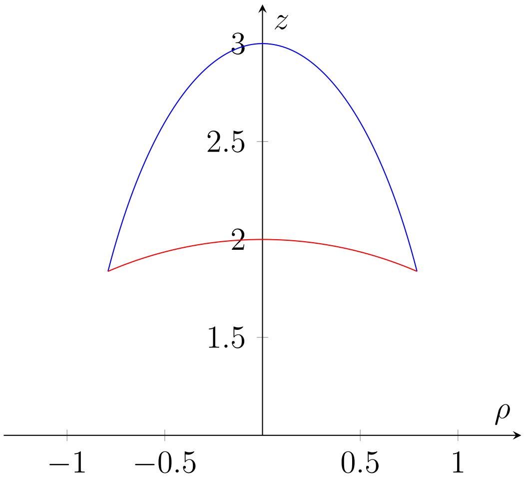
Wprowadzamy parametryzację $\psi\colon (\phi) \mapsto (\cos\phi, \sin\phi)$, $\phi \in [0,\pi]$,

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi 2\cos^3\phi\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi\\
&= -\frac{2}{5}\cos^5\phi\,\Big|_0^\pi = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

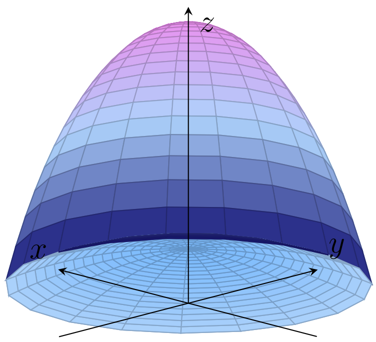
Wykład 6: Ćwiczenia 6

02 lis 2020

Zadanie 4(ii.1)/S3 Oblicz strumień pola wektorowego V przez powierzchnię Σ.
$V = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\left(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z\right)$,
$\Sigma = \left\{\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \wedge x^2+y^2+z^2 \geq b^2 \wedge 0 < a < b < c \wedge z \geq 0\right\}$



Rysunek 1.9: Przekrój osiowy powierzchni Σ dla $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ wraz z S – wycinkiem przekroju sfery o promieniu b.



Rysunek 1.10: Powierzchnia Σ (elipsoida obrotowa) z dodanym denkiem S.

W celu policzenia strumienia pola chcemy obliczyć $\omega = V \lrcorner \Omega$ i je scałkować. Na poziomie operatywnym, robimy podmiany $\partial_x \to \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\partial_y \to \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, $\partial_z \to \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

Liczymy pochodną zewnętrzną.

$$\mathrm{d}\omega = \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - \frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\left(2x^2+2y^2+2z^2\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0$$

Teraz widzimy, że warto skorzystać z twierdzenia Stokesa. Całkujemy po wydłużonej czapeczce elipsoidy. Możemy to domknąć jeszcze kawałkiem sfery. Wówczas,

$$\int_\Sigma \omega = \int_S \omega$$

przy czym w obu całkach jest przyjęta orientacja na zewnątrz powierzchni całkowania! Nasze pole wektorowe jest równoległe do wektora normalnego do powierzchni sfery, ponadto to pole jest na sferze stałe! W związku z tym nie musimy się nawet dużo naliczyć.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{r^3}\vec{r} \\
V \cdot \vec{n}_S &= \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2} \overset{\text{na } S}{=} \frac{1}{b^2} \\
\int_S \omega &= \frac{1}{b^2} \int_{\substack{\phi\in[0,2\pi] \\ \theta\in[0,\alpha]}} b^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi \cos\theta \Bigg|_0^\alpha = 2\pi(1-\cos\alpha)
\end{aligned}$$

Pozostaje tylko wyznaczyć kąt α, który odpowiada kątowi od osi z do punktu przecięcia elipsy o półosiach a, c z okręgiem o promieniu b. Przecinamy dwie krzywe.

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ \rho^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$$

Z prostej trygonometrii wyjdzie α.

$$\begin{aligned}
z^2\left(a^2-c^2\right) &= c^2\left(a^2-b^2\right) \\
\cos^2\alpha &= \frac{z^2}{b^2} \\
\cos^2\alpha &= \frac{c^2}{b^2}\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}
\end{aligned}$$

Finalnie,

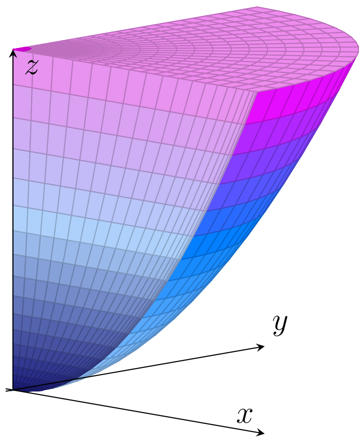
$$\int_\Sigma \omega = \int_S \omega = 2\pi\left[1 - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right]$$

Zadanie 4(ii.2)/S3 $V = xz\partial_x + x^2y\partial_y + y^2z\partial_z$, liczymy strumień po $\partial\Sigma$, gdzie $\Sigma = \left\{0 \le z \le x^2+y^2 \le 1 \wedge x, y \ge 0\right\}$. Orientacja indukowana z $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

Najpierw przeliczamy element strumienia na 2-formę.

$$\begin{aligned}
\omega &= xz \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + y^2z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
\mathrm{d}\omega &= z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&= (x^2+y^2+z) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \neq 0
\end{aligned}$$

Ta forma nie znika, ale pewnie można i tak skorzystać ze Stokesa. Naszą objętością Σ jest paraboloida obrotowa. Brzeg Σ składa się z 4 części.



Rysunek 1.11: $\partial\Sigma$: ściany $x=0$, $y=0$, denko $z=1$ oraz część paraboloidy obrotowej.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma}\omega &= \int_\Sigma \mathrm{d}\omega = \int_\Sigma (x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1(z+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1\mathrm{d}z\left(z\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{3}{8}z^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

Zadanie 4(ii.3)/S3 $V = z\left(e^x\sin y\partial_x + e^x\cos y\partial_y + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_z\right)$, $\Sigma = H_1\cup H_2$, gdzie H_1, H_2 to półsfery zawarte w brzegu $\left\{1\le x^2+y^2+z^2\le 4 \wedge y\ge 0\right\} = \chi$.

$$\omega = z\left(e^x\sin y\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + e^x\cos y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)$$

Po różniczkowaniu pierwsze dwie części się wyzerują. Stąd,

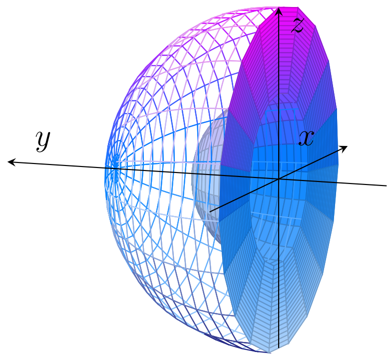
$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

Rozważmy parametryzację współrzędnymi sferycznymi:

$$\psi\colon \begin{bmatrix} r\\ \theta\\ \phi\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\phi\\ r\sin\theta\sin\phi\\ r\cos\theta\end{bmatrix}$$

Na potrzeby parametryzacji naszych sfer będziemy mieli $\theta\in[0,\pi]$ oraz $\phi\in[0,\pi]$. Teraz musimy skontrolować znaki przy orientacjach form objętości. Wiadomo, że:

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi$$



Rysunek 1.12: $\partial\chi = H_1 \cup H_2 \cup R$, gdzie R jest dyskiem $\{1 \leq r \leq 2 \wedge y = 0\}$. H_1 jest zorientowana do wewnątrz (orientacja $-$), H_2 na zewnątrz ($+$), a R w stronę $-\hat{y}$ ($-$).

Z twierdzenia Stokesa,

$$\int_{(H_1 \cup H_2, \partial\imath)} \omega + \int_{(R, \partial\imath)} \omega = \int_{(\chi, \imath)} \mathrm{d}\omega = \int_{(\chi, \imath)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Możemy przyjąć, że orientacja zgodna z (x, y, z) jest orientacją χ. Wówczas orientacją w całce po R jest ta wynikająca z kręcenia wektorami $x \to z$ (dostajemy kierunek $-y$), zatem chcemy mieć wyraz $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

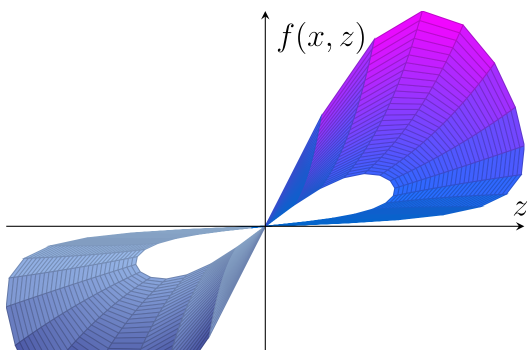
$$\int_{(R,\partial\imath)} \omega = \int_{(R,\partial\imath)} ze^x \cos y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\int_R ze^x \cos y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z$$
$$R = \left\{1 \leq x^2 + z^2 \leq 4 \wedge y = 0\right\}$$

Zauważmy, że obszar R jest symetryczny ze względu na zamianę $z \to -z$, a forma $\omega\big|_R$ antysymetryczna. Stąd,

$$\int_R \omega = 0$$

Zostaliśmy więc z prostą całką:

$$\int_{H_1 \cup H_2} \omega = \int_\chi \frac{r^2 \sin\theta}{r \sin\theta} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = \int_0^\pi \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_1^2 r \, \mathrm{d}r$$
$$= \frac{3}{2}\pi^2$$



Rysunek 1.13: Argument z antysymetrią obrazowo. $f(x, z) = ze^x$

Wykład 7: Ćwiczenia 7

05 lis 2020

Zadanie 5/S3 pomocnicze $\mathrm{d}\overset{k}{\omega} = 0$ na O, który jest ściągalny to istnieje $\overset{k-1}{\eta}\colon\ \mathrm{d}\eta = \omega$. Wykazać, że jeśli $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ jest zamknięta oraz $\int_{S^1} \omega = 0$ to ω jest zupełna.

Chcemy wskazać funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\colon\ \mathrm{d}f = \omega$. Trzeba ją skonstruować, inaczej nie da rady. Nasz obszar nie jest ściągalny, więc lemat Poincare też nie pomoże. Przykładowo, wyrzucenie całej półosi z układu współrzędnych daje już retrakcję.

Niech $O_+ = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_2}$ oraz $O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_2}$. Każdy z tych zbiorów jest ściągalny, zatem ω ma potencjał na każdym z tych obszarów (oczywiście nie musi być to ten sam potencjał). Z Lematu Poincare, istnieją $f_\pm$ takie, że:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_+ &= \omega\,\big|_{O_+} \\ \mathrm{d}f_- &= \omega\,\big|_{O_-} \\ \mathrm{d}(f_+ - f_-) &= (\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\omega)\,\big|_{O_+ \cap O_-} = 0 \end{aligned}$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_{e_2}$. Istnieją stałe c_+ i c_- takie, że

$$f_+ - f_- = \begin{cases} c_+ & x > 0 \\ c_- & x < 0 \end{cases}$$

Pytanie brzmi czy $c_+ = c_-$? Jeśli tak, to $f_+ = f_- + c$. Czyli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ określona wzorem f_- na O_- oraz $f_+ - c$ na O_+ spełnia $\mathrm{d}f = \omega$. Użyjmy warunku z całką po okręgu.

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S^1} \omega &= \int_{\text{góra}} \omega + \int_{\text{dół}} \omega \\ &= \int_{\text{góra}} \mathrm{d}f_- + \int_{\text{dół}} \mathrm{d}f_+ \end{aligned}$$

Całka z pochodnej to różnica wartości na brzegu, zatem

$$= f_-(-1,0) - f_-(1,0) + f_+(1,0) - f_+(-1,0) = 0$$

Stąd,

$$f_+(1,0) - f_-(1,0) = f_+(-1,0) - f_-(-1,0)$$

Stąd wynika, że $c_+ = c_-$ i to kończy nasz dowód.

Lemat do zadania 5 (dla chętnych do domu).
Wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})$ jest zamknięta oraz $\displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2=1 \\ z=0}} \theta = 0$, to θ jest zupełna.

Zadanie 5/S3 Mamy $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\mathrm{d}\omega = 0$, $\int_{S^2} \omega = 0$. Pokazać, że ω jest zupełna.

Wskazówka,

$$
\begin{aligned}
O_+ &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\geq 0\, e_z} \\
O_- &= \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{\leq 0\, e_z}
\end{aligned}
$$

mają retrakcję. Należy skorzystać z lematu Poincare i znaleźć potencjały na O_+ i O_-. Niech $\theta_\pm \in \Omega^1(O_\pm)\colon\ \mathrm{d}\theta_\pm = \omega\big|_{O_\pm}$. Zauważmy, że

$$
\mathrm{d}(\theta_+ - \theta_-)\Big|_{O_+ \cap O_-} = 0
$$

gdzie $O_+ \cap O_- = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z}$. Czy $\int_{S^1} \theta_+ - \theta_- = 0$?

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{S^2} \omega &= \int_{S^2_+} \omega + \int_{S^2_-} \omega \\
&= \int_{S^2_+} \mathrm{d}\theta_- + \int_{S^2_-} \mathrm{d}\theta_+
\end{aligned}
$$

Ze Stokesa,

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(S^1,+)} \theta_- + \int_{(S^1,-)} \theta_+ \\
&= \int_{(S^1,+)} (\theta_- - \theta_+)
\end{aligned}
$$

Istnieje $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_{e_z})\colon \theta_+ - \theta_- = \mathrm{d}f$. Czy istnieją funkcje $f_+ \in C^\infty(O_+)$ i $f_- \in C^\infty(O_-)$ takie, że $f = f_+ - f_-$ na $O_+ \cap O_-$. Jeśli tak, to $(\theta_+ - \theta_-) = \mathrm{d}f = \mathrm{d}f_+ - \mathrm{d}f_-$. Stąd, $\theta_+ - \mathrm{d}f_+ = \theta_- - \mathrm{d}f_-$. Stąd istniałaby $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ dana wzorem:

$$
\begin{aligned}
\eta\big|_{O_+} &= \theta_+ - \mathrm{d}f_+ \\
\eta\big|_{O_-} &= \theta_- - \mathrm{d}f_-
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\mathrm{d}\eta = \omega
$$

Dlaczego takie f_+ i f_- istnieją? Dobre pytanie! Może kiedyś dokończymy ten dowód :)

Rozdział 2

Analiza zespolona

Zadanie 1a/S4 Znaleźć funkcję holomorficzną taką, że $\mathrm{Re}(f(z)) = e^x \cos y$, $f(0) = 1$.

Warunki Cauchy'ego-Riemanna dla $f(z) = u(z) + iv(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Wynik mógłby pojawić się przez rozwiązywanie tego układu równań. Ale można też zgadnąć: $f(z) = e^z$. Ale rozwiążmy to analitycznie.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= e^x \cos y \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\
v &= \int e^x \cos y \, \mathrm{d}y = e^x \sin y + C(x) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y \\
C'(x) &= 0 \\
f(0) &= 1 \implies C = 0
\end{aligned}$$

Stąd,

$$f(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z$$

Zadanie 1c/S4 $\mathrm{Im}(f(z)) = 3x + 2xy$, $f(-i) = 2$.

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= 3iz, \quad \mathrm{Im}(f_1(z)) = 3x \\
f_2(z) &= z^2, \quad \mathrm{Im}(f_2(z)) = 2xy \\
f &= f_1 + f_2 + C = 3iz + z^2 + C \\
f(-i) &= 3i(-i) + i^2 + C = 2 \\
C &= 0
\end{aligned}$$

Zadanie 1b/S4 $\mathrm{Re}(f(z)) = \sin x / (\cos x + \cosh y)$, $f(0) = 0$.

Atakujemy R.C.R.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
v &= \int \frac{\sin x \sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C(y) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\cos x}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sin^2 x}{(\cos x + cshy)^2} \\
&= \frac{1 + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cosh y}{\cos x + \cosh y} + \frac{\sinh y}{(\cos x + \cosh y)^2} \\
&= \frac{\cosh^2 y - \sinh^2 y + \cos x \cosh y}{(\cos x + \cosh y)^2} + C'(y) \\
C &= \text{const.} \\
f(z) &= \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y} + i\frac{\sinh y}{\cos x + \cosh y} + C \\
&= \frac{\sin x + i \sinh y}{\cos x + \cosh y} + C = \frac{\sin x + \sin(iy)}{\cos x + \cos(iy)} + C
\end{aligned}$$

$C = 0$,

$$= \frac{2 \sin \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}}{2 \cos \frac{x+iy}{2} \cos \frac{x-iy}{2}} = \tan \frac{z}{2}$$