

Podstawy mechaniki

Wykładowca:

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Pomiar prędkości światła	8
Dylatacja, kontrakcja, składanie prędkości	9
Ruch drgający	24
Własności funkcji sin	25
Oddziaływania	27
Siła odśrodkowa i Coriolisa	29
Siły pływowe	30
Grawitacja	31
Ruch w dowolnym polu sił centralnych	32
Geodezyjne	34
Wysmołkowa inżynierska karta wzorów	36

Wykład 1

20 paź 2020 Co to czas? Dokładnie nie wiemy ale możemy mierzyć. Bierzemy zjawisko, które jest periodyczne i mierzymy okresy. Możemy wziąć inne wahadła, zjawiska periodyczne. Jeśli wszystko się zgadza to mówimy, że przyjmijmy jednostkę czasu względem pewnego zjawiska periodycznego.

Odległość. Musimy mieć miarę, która nas nie okłamuje. Przyjmując to, pytamy co to jest siła?

Newton zdefiniował to jako:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Dla grawitacji Newton stwierdził, że:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

To jest genialna sprawa, że mamy tę zależność od r i da się liczyć jakieś zależności położeń. To przez to uznawano siłę jako coś pozornie podstawowego. A wcale tak nie jest! De facto siłę znam jak zmierzę masę i przyspieszenie.

Co z pierwszą zasadą?

Definicja 1 (I zasada mechaniki). Zakładamy, że oddziaływanie jest na tyle małe, że można je pominąć. Wówczas istnieje układ odniesienia, w którym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ nazywamy układem inercjalnym.

Definicja 2 (II zasada mechaniki). Jedynie definicja oddziaływania. Bo skoro nie ma oddziaływania dla $\vec{a} = 0$ to będzie jakieś dla $\vec{a} \neq 0$.

Grecy wprowadzili pojęcie abstrakcji. Da się wyabstrahować dane twierdzenie od obserwacji. Da się te rzeczy oddzielić. Otóż procesu abstrakcji w innych cywilizacjach nie było, wszystko było dziełem obserwacji! Dlatego to na zachodzie powstała nauka, dzięki myśli greckiej.

Fizyka istnieje w zasadzie dzięki wyabstrahowanym prawom.

Jak opisywać zjawiska aby uniezależnić się od punktu przestrzeni z którego patrzę. Punkt w przestrzeni nie jest jednoznaczny. Punkt w czasoprzestrzeni natomiast jest. Powiedzenie, że punkty w czasoprzestrzeni są blisko siebie jest czymś obiektywnym. Taki punkt nazwiemy zdarzeniem.

Ograniczmy się do dwóch wymiarów (t, x) . Pytamy jak wygląda obraz ruchu ciała w układzie inercjalnym, na który nie działają siły. W określonych jednostkach czasu pokonuje taką samą odległość, zatem linie świata są liniami prostymi.

W cyklotronie wytworzona jest grupa jonów, która wysłana jest tunelem do Paryża. $d = 1200$ km. Prędkość światła 300 km/ms. My wysyłamy cząstki o prędkości $0.8c$.

One będą leciały do Paryża 5 ms. Linia świata tych cząstek jest linią prostą. Ile czasu ktoś będący cząstką zmierzy?

Puśćmy tam nie jony, a jądro promieniotwórcze o okresie rozpadu 1 ms. Puściliśmy 1024 jądra. Po 1 ms zostanie 512 jąder itd. Patrząc ile takich jąder jest w Paryżu gdy tam docierają możemy stwierdzić ile czasu upłynęło dla tych jąder. Gdyby świat był Newtonowski, to zostałyby 32 jądra. Wcale tak nie jest.

Wykład 2

Wszystkie ciała opisujemy w jednym (moim) układzie (x, t) . Mamy też obserwatora, który się względem mnie porusza. Co zobaczy obserwator? Powiedzmy na początek, że osie x i x' są skierowane przeciwnie. 21 paź 2020

Rozważmy dowolną transformatę liniową długości. Przyjmujemy tu jednorodność!

$$x = vt - a(v)x'$$

Dla Galileusza byłoby $a = 1$. Obserwator w układzie primowanym musi napisać identyczne równanie. Gdyby tak nie było, tamten obserwator byłby jakimś wyróżnionym układem. Zgodnie z zasadą Galileusza nie ma wyróżnionych układów inercjalnych, zatem w każdą stronę $a(v)$ musi być to samo.

$$x' = vt' - ax$$

Zmieńmy $x' \rightarrow x''$

$$\begin{aligned} x &= vt + ax'' \\ -x'' &= ct' - ax \end{aligned}$$

Podmieńmy x'' na x'

$$\begin{aligned} x &= vt + ax' \\ x' &= -vt' + ax \end{aligned}$$

Dodając stronami,

$$(1 - a)(x + x') = v(t - t')$$

Wyliczmy zmienne nieprimowane względem primowanych i wstawmy do transformacji.

$$x = \frac{x' + vt'}{a(v)}, \quad t = \frac{t'}{a(v)} + \frac{1 - a(v)^2}{a(v)v}x'$$

Rozważmy drugi, pośredni układ poruszający się z prędkością v' . Względem (x', t') . Względem nas to ruch z prędkością v'' .

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a(v)} \frac{x'' + v't''}{a(v')} + \frac{v}{a(v)} \left(\frac{t''}{a(v')} + \frac{1 - a^2(v')}{a(v')v'}x'' \right) \\ &= \frac{x'' + x''t''}{a(v'')} \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki przy t'' :

$$\frac{v''}{a(v'')} = \frac{v' + v}{a(v)a(v')}$$

Porównanie współczynników przy x'' :

$$\frac{1}{a(v'')} = \frac{1}{a(v)a(v')} \left(1 + \left(1 - a^2(v') \right) \frac{v}{v'} \right)$$

Wstawiamy drugie w pierwsze,

$$\begin{aligned} \frac{v''}{a(v)a(v')} \left(1 + \left(1 - a^2(v') \right) \frac{v}{v'} \right) &= \frac{v' + v}{a(v)a(v')} \\ v'' &= \frac{v + v'}{1 + \left(1 - a^2(v') \right) \frac{v}{v'}} \stackrel{!}{=} \frac{v' + v}{1 + \left(1 - a^2(v) \right) \frac{v'}{v}} \end{aligned}$$

Bo to musi być symetryczne bez względu na kogo. Stąd,

$$\begin{aligned} \left(1 - a^2(v') \right) \frac{v}{v'} &= \left(1 - a^2(v) \right) \frac{v'}{v} \\ \frac{1 - a^2(v)}{v^2} &= \frac{1 - a^2(v')}{v'^2} \end{aligned}$$

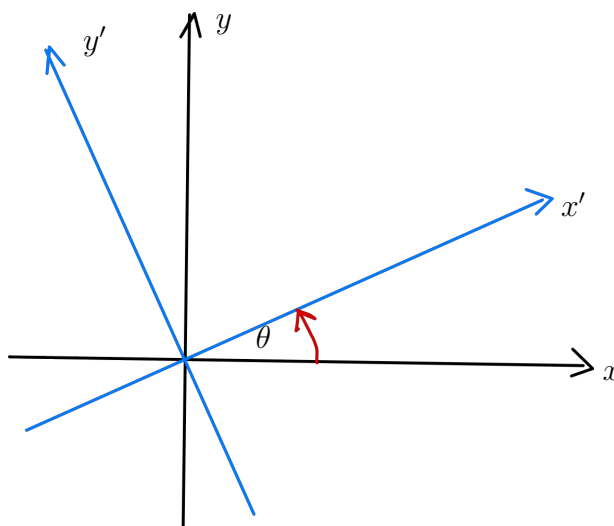
Wynika stąd, że lewa i prawa strona musi być jakąś stałą!

$$\begin{aligned} a(v) &= \sqrt{1 - Bv^2} \\ v'' &= \frac{v + v'}{1 + Bvv'} \end{aligned}$$

W skrócie, wykonaliśmy transformację 2 razy i zarządzaliśmy, aby złożona transformacja miała postać transformacji wyjściowej (założyliśmy, że to jest reprezentacja grupy).

$B < 0$ odpowiada rotacji na płaszczyźnie.

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + \tan \theta y'}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \cos \theta x' + \sin \theta y' \\ v'' &= \frac{\tan \theta + \tan \theta'}{1 - \tan \theta \tan \theta'} = \tan(\theta + \theta') \end{aligned}$$



Rysunek 1: rotacja

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - Bv^2}}$$

$$t = \frac{t' + Bvx'}{\sqrt{1 - Bv^2}}$$

$B < 0$ odpowiadałoby ciągłej możliwości odwrócenia płaszczyzny a zatem odwrócenia czasu. Pytanie czy fizycznie zachodzi tylko $B > 0$?

Transformacja jest osobliwa dla $B = 1/v^2$. Będziemy więc mieć tam jakąś stałą przyrody. Jeśli $B > 0$ to zdefiniujemy $B = 1/c^2$.

Wniosek 1. Rozwinięcie w zerze.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

<Doświadczenie Fizeau>

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \xrightarrow{v'=c} \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c$$

Stąd,

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Będziemy przyjmowali $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Mimo względności położenia i czasu istnieją niezmienniki. Spróbujemy je teraz wyprowadzić.

$$\begin{aligned} x + ct &= \gamma \left(x' + vt'ct' + \frac{vx'}{c} \right) = \gamma \left(x' \left(1 + \frac{v}{c} \right) + ct' \left(1 + \frac{v}{c} \right) \right) \\ &= (x' + ct') \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \\ x - ct &= (x' - ct') \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \end{aligned}$$

Mnożymy jedno przez drugie.

$$(x + ct)(x - ct) = (x' + ct')(x' - ct')$$

Wniosek 2. Niezmiennik transformacji Lorentza.

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$$

Tak samo dla zwykłych obrotów mielibyśmy $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.

Wykład 3

27 paź 2020

Pomiar prędkości światła

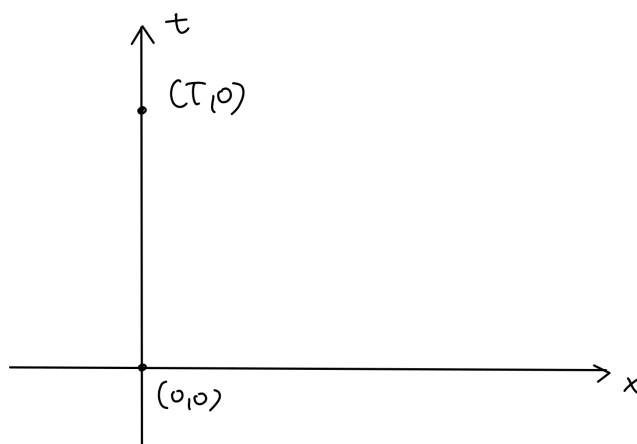
1629 – Isaac Beeckman – błysk działa odbity w oddalonym lustrze (nie dało to dobrego rezultatu)

1638 – Galileusz – czas przelotu światła latarni

1676 – Roemer – pierwsza udana obserwacja; księżyc Jowisza

1849 – Fizeau

1862 – Foucault



Rysunek 2: dylatacja

Dylatacja, kontrakcja, składanie prędkości

Zakładamy, że $(0, 0)$ odpowiada $(0, 0)$ w układzie primowanym.

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Stąd,

$$\begin{aligned}(0, 0) &\rightarrow (0, 0) \\ (T, 0) &\rightarrow (\gamma T, -\gamma cT)\end{aligned}$$

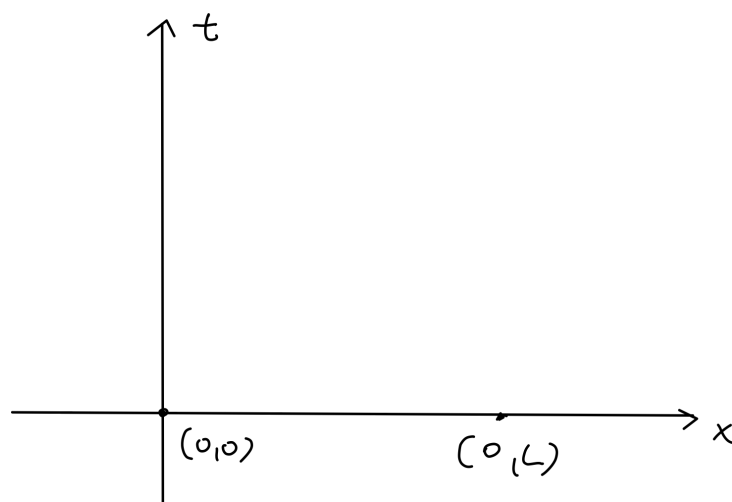
W naszym nieruchomym układzie upłynie T czasu, natomiast w układzie primowanym upłynie zdecydowanie więcej czasu. Czyli jeśli taki mion jest układem nieprimowanym (układ w którym mion spoczywa), to jemu upłynęło dużo mniej czasu niż upłynęło obserwatorom na Ziemi.

Teraz kontrakcja długości:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma L \\ t' &= \gamma v L / c^2\end{aligned}$$

Chcemy wrócić do obserwatora, który mierzy liniijkę również w czasie $t' = 0$. Pytamy jakie było jego x'' , gdy jego $t'' = 0$.

$$\begin{aligned}x'' &= \gamma L - vt' = \gamma L - \gamma \frac{v^2 L}{c^2} \\ &= L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\end{aligned}$$



Rysunek 3: kontrakcja

Jeszcze składanie prędkości. Wysyłamy coś pod kątem θ .

$$\Delta x = V \cos \theta \Delta t$$

$$\Delta y = V \sin \theta \Delta t$$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{v V \cos \theta}{c^2} \right)$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) = \gamma \Delta t (V \cos \theta - v)$$

$$\Delta y' = \Delta y = V \sin \theta \Delta t$$

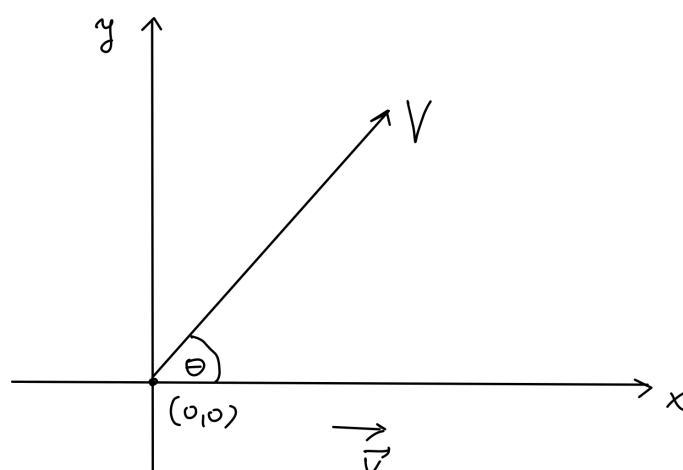
$$\tan \theta' = \frac{V \sin \theta}{\gamma (V \cos \theta - v)}$$

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{V \cos \theta - v}{1 - \frac{V v \cos \theta}{c^2}}$$

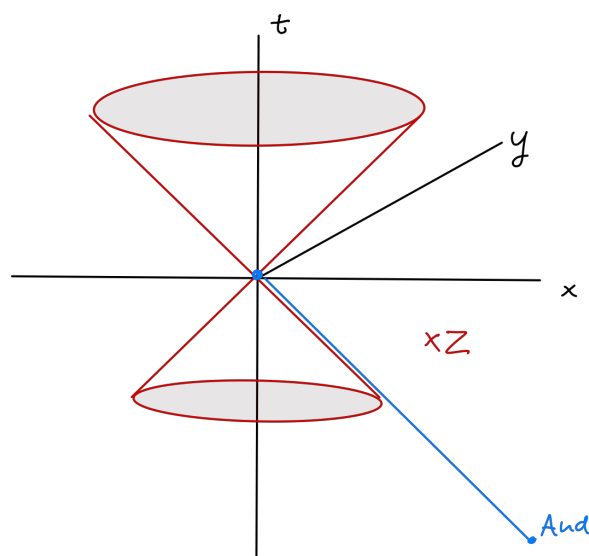
$$v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{V \sin \theta}{\gamma \left(1 - \frac{v V \cos \theta}{c^2} \right)}$$

Jeżeli $V = c$, to

$$\tan \theta' = \frac{c \sin \theta}{\gamma (c \cos \theta - v)}$$



Rysunek 4: predkosci



Rysunek 5: sotzki

Jeśli ktoś teraz wysyła sygnał z galaktyki Andromedy, to ja się o nim dowiem gdy stożek światła tego sygnału przetnie mnie.

Jest jeszcze inny niezmiennik. Jeśli ja stwierdzę, że w moim stożku przyszłości $\Delta t > 0$, dla każdego też będzie $\Delta t' > 0$.

Nie da się odwrócić $\Delta t' = -\Delta t$, bo musiałby przejść w sposób ciągły przez $t = 0$, a wówczas pierwszy niezmiennik by się zmienił z dodatniego na ujemny, a startowaliśmy z dodatniego.

Przyczynowość jest podstawą fizyki, nielokalność to już inna sprawa.

Wykład 4

28 paź 2020

$$x + ct = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{2/1}}{c}}{1 - \frac{v_{2/1}}{c}}} (x' + ct') = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{2/1}}{c}}{1 - \frac{v_{2/1}}{c}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{3/2}}{c}}{1 - \frac{v_{3/2}}{c}}} (x'' + ct'')$$

Można od razu z 1 do 3:

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{3/1}}{c}}{1 - \frac{v_{3/1}}{c}}} (x'' + ct'')$$

Czy odtworzymy z tego zasadę składania prędkości? $v_{2/1} = v$, $v' = v_{3/2}$, $v'' = v_{3/1}$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \frac{1 + \frac{v'}{c}}{1 - \frac{v'}{c}} &= \frac{1 + \frac{v''}{c}}{1 - \frac{v''}{c}} \\ \implies v'' &= \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \end{aligned}$$

Grupa: Jeśli mamy przekształcenie elementu przestrzeni w inny element tej samej przestrzeni, musimy być pewni, że jeśli wykonamy 2 razy przekształcenie to istnieje bezpośrednie przejście od elementu 1 do 3. Istnieje również element odwrotny. Istnieje jeszcze jedność, czyli element, który zostawia wszystkie elementy takie same.

Weźmy sobie raketę. Chcemy nią podróżować w maksymalnie wygodny sposób, czyli aby przyspieszenie w układzie rakiety było równe $a = g \approx 10 \text{ m/s}^2 \approx 1 \text{ c/rok}$. Poza tym, $1 \text{ rok} = \pi \cdot 10^7 \text{ s}$.

$$\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} = \left(\frac{1 + \frac{\Delta v}{c}}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right)^n = \left(\frac{1 + \frac{a\tau}{nc}}{1 - \frac{a\tau}{nc}} \right)^n$$

Te Δv są przyrostami w układzie kowędrującym. Znak równości jest de facto dla $n \rightarrow \infty$. Teraz pojedziemy trochę ostrzej.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} &= \frac{e^{\frac{a\tau}{c}}}{e^{-\frac{a\tau}{c}}} = e^{\frac{2a\tau}{c}} \\ \frac{v}{c} &= \tanh \frac{a\tau}{c} \end{aligned}$$

Niech człowiek w rakiecie przyspiesza w swoim układzie przez 3 lata, potem hamuje przez 3 lata. Potem wraca przez następne 6 lat. Jaką odległość pokonał i ile lat upłynęło na

Ziemi?

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \cosh a\tau \implies t = \frac{c}{a} \sinh \frac{a\tau}{c}$$

$$a\tau/c = 3$$

$$e^{\frac{a\tau}{c}} \approx 20$$

$$\frac{v}{c} \sim 1 - 2e^{\frac{-2a\tau}{c}} = 1 - \frac{2}{400} \sim 0.995$$

$$t = 1 \text{ rok} \cdot \frac{e^3}{2} = 10 \text{ lat}$$

Cała podróż według obserwatora na Ziemi będzie trwała 40 lat, podczas gdy bliźniakowi w rakiecie mija 12 lat.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x'^\nu$$

$$x' = \Lambda x$$

$$x'_1 - x'_2 = \Lambda x_1 - \Lambda x_2 = \Lambda(x_1 - x_2)$$

$$\sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

Wprowadźmy nowy wektor używając niezmiennika wyżej.

$$\left(\frac{c\Delta t}{\sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}}}, \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}}} \right) = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Sprawdźmy, że jest to rzeczywiście 4-wektor.

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$u'^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v+V)^2}{\left(1 + \frac{vV}{c^2}\right)^2 c^2}}} = \frac{1 + \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{Vv}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u'^0 = \gamma u^0 + \gamma V u^1$$

$$u'^1 = \gamma u^1 + \gamma V u^0$$

Sklejamy kulki.

$$v_1 = \frac{V + w}{1 + \frac{Vw}{c^2}}$$

$$v_2 = \frac{V - w}{1 - \frac{Vw}{c^2}}$$

Całość powinna być współzmiennicza – opisywana przez czterowektor.

$$\begin{aligned}u^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ \frac{w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \\u^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ -\frac{w}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \\u^{(1)} + u^{(2)} &= \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pomnóżmy to przez masę.

$$\begin{aligned}mu^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ \frac{mw}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \\mu^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ -\frac{mw}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \\mu^{(1)} + \mu^{(2)} &= \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

To jest prawidłowy 4-wektor dla stojącej cząstki. Jeśli wprowadzę m_3 ,

$$mu^{(1)} + mu^{(2)} = m_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Będziemy więc analizować 4-pędy cząstek.

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

W równaniach Newtona jest jedynie zasada zachowania energii mechanicznej. Tutaj jednak obecność zerowej składowej jest de facto równoważna zasadzie zachowania energii.

Zajmijmy się zerową składową otrzymanego czterowektora.

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(1-x)^a = 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{\frac{v}{c} \rightarrow 0} mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

Przy takim przykładowym zderzeniu, energia może się przekształcić w masę! Musi istnieć ogromna energia (mc^2) związana z ciałem, żeby minimalny obrót dawał niezerowy wkład do energii kinetycznej.

Wykład 5

Jeśli mamy czterowektor, to każdy obserwator uzna, go za ten sam wektor.

03 lis 2020

$$A^\mu = B^\mu$$

$$\Lambda A = \Lambda B$$

$$A' = B'$$

Mamy niezmiennik.

$$\sigma = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\Lambda\left(\frac{A^\mu}{\sigma}\right) = \frac{\Lambda A^\mu}{\sigma} = \frac{A'^\mu}{\sigma}$$

Dzieląc czterowektor przez niezmiennik wciąż uzyskujemy czterowektor.

Rozważmy czterowektor pędu i zderzenie cząstek. Prędkości cząstki oznaczamy przez w i $-w$.

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ \frac{mw}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ \frac{-mw}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stąd wniosek, że powinienem odejść od zasady zachowania masy. Musimy zinterpretować tę pierwszą składową. Po zderzeniu ciało stoi, zatem wprowadźmy oznaczenie

$$m_3 = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

Rozwińmy:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v/c \rightarrow 0} m \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right)$$

Einstein zatem wstecz poprawił tak, żeby drugi wyraz w rozwinięciu był klasyczną energią kinetyczną.

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \xrightarrow{v/c \rightarrow 0} mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Mówienie o masie relatywistycznej to kompletny absurd. Jest tylko energia spoczynkowa i energia relatywistyczna. m jest niezmiennikiem (jak zobaczyliśmy), c^2 dopisujemy po to by otrzymać eregię kinetyczną w rozwinięciu.

$$\begin{aligned} E_k &= E - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \\ &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Jeśli $v \rightarrow c$, to mianownik zbliża się do 0 i cała energia eksploduje. Przyspieszanie ciała kosztuje zatem coraz więcej energii.

Spalmy 1 kg węgla. $1 \text{ kg} \sim 10\,000 \text{ kcal} \sim 40\,000 \text{ kJ} \sim 4 \cdot 10^7 \text{ J}$. Jak to się ma do energii spoczynkowej? $\frac{E_w}{mc^2} \sim 4 \cdot 10^{-10}$.

Weźmy samochód o $m = 10^3 \text{ kg}$. $E_0 = mc^2 \sim 10^{20} \text{ J}$. Moc wszystkich polskich elektrowni to $30\,000 \text{ MW} = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{J}}{\text{s}}$. Wszystkie polskie elektrownie zaczynają przyspieszać ten samochód. Ile trzeba przyspieszać, żeby samochód miał relatywistyczną energię?

$$\frac{10^{20}}{3 \cdot 10^{10}} = 3 \cdot 10^9 \text{ s} = 100 \text{ lat}$$

Zróbmy to co zrobił Einstein.

Wyobraźmy sobie foton, który nadlatuje z energią E i pędem $p = E/c$. Masa M pochłania foton i uzyskujemy masę M' z prędkością v .

W układzie laboratorium pęd na początku to E/c , a później $M'v + \mathcal{O}(v^2/c^2)$.

$$\frac{E}{c} = M'v + \mathcal{O}(v^2/c^2)$$

Rozważmy efekt Dopplera w układzie poruszającym się w układzie z prędkością v (do pierwszego rzędu).

$$\frac{E}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \right) - Mv = 0 + \mathcal{O}(v^2/c^2)$$

Odejmujemy te równania od siebie.

$$\begin{aligned} \frac{Ev^2}{c^2} + Mv &= M'v + \mathcal{O}(v^2/c^2) \\ M + \frac{E}{c^2} &= M' \end{aligned}$$

To powinno być prawdą nawet w granicy $v \rightarrow 0$.

$$Mc^2 + E = M'c^2$$

Tak wyprowadził, że mc^2 musi być związane ze stojącą cząstką.

Dlaczego Irene Curie nie dostała Nobla z fizyki a tylko z chemii?

Mamy foton z pędem p , który uderza w cząstkę o masie m . m nabywa pędu P , a do tyłu jest emitowany inny foton z pędem p' .

$$\begin{aligned} p &= P - p' \\ cp + mc^2 &= cp' + \sqrt{m^2c^4 + c^2P^2} \\ [c(p - p') + mc^2]^2 &= m^2c^4 + c^2P^2 = m^2c^4 + c^2(p + p')^2 \\ c^2(p^2 - 2pp' + p'^2) + 2mc^3(p - p') + m^2c^4 &= m^2c^4 + c^2p^2 + 2c^2pp' + p'^2 \\ \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} &= \frac{2}{mc} \end{aligned}$$

Chedwick (czy jakoś tak) powiedział, że energia kinetyczna to jest $T = c(p - p')$.

$$\begin{aligned} p' &= \frac{2p + mc}{pmc} \\ T &= cp - \frac{pmc^2}{2m + mc} = \frac{2cp^2}{2p + mc} \end{aligned}$$

$p \ll mc$.

$$\sim \frac{2p^2}{m}$$

Gdyby to, co wyleciało było fotonem to by mogło nadać bardzo małą energię kinetyczną cząstce. Taki proton nawet nie opuściłby parafiny.

$$p \sim \sqrt{\frac{mT}{2}} \sim 30 \text{ MeV}$$

Wiadomo już było, że nie ma takich reakcji jądrowych, które dawałyby takie energie fotonów. Gdyby zrobili to obliczenie to odkryliby neutron i dostaliby nagrodę Nobla z fizyki. Tak, nagrodę za to dostał Chedwick.

Wykład 6

do przerwy...

04 lis 2020

Wyobraźmy sobie, że mamy raketę która wyrzuca z siebie gazy z prędkością w . Nie patrzemy w ogóle na żadne siły, tylko zasada zachowania pędu:

$$-dm = \text{porcja gazu}$$

Opisujemy ruch rakiety w układzie laboratorium,

$$\begin{aligned}(m + dm)(v + dv) - mv &= dm(v - w) \\ mv + dm v + m dv + dm dv - mv &= dm v - dm w \\ m dv &= -dm w \\ \frac{dm}{m} &= -\frac{dv}{w}\end{aligned}$$

Teraz rozpatrzmy to samo w układzie rakiety. Rakieta stoi i nabywa pewnej prędkości. Prędkość gazów to w w drugą stronę:

$$\begin{aligned}m dv &= -dm w \\ v &= -w \ln m + C\end{aligned}$$

Rakiet astartuje z masą M :

$$0 = -w \ln M + C$$

Równanie Ciołkowskiego.

$$v = w \ln \frac{M}{m}$$

Trzeba więc zapewnić możliwie największą prędkość gazów wylotowych. Jak masa rakiety maleje, to jej wszybkłość szybkość rośnie. Natomiasat później już ten efekt przestaje działać, bo logarytm się wypłaszcza. Stąd idea odrzucania kolejnych stopni rakiet.

Rozważmy liniowy wyrzut gazów:

$$\begin{aligned}m &= M - \alpha t \\ v(t) &= w \ln \frac{M}{M - \alpha t} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\alpha w}{M - \alpha t}\end{aligned}$$

Rakieta zacznie lecieć do góry, kiedy $v'(t) > g$:

$$\frac{\alpha w}{M - \alpha t} > g$$

Rozważmy cylinder przemieszczający się w rzadkim ośrodku. Z jaką prędkością cząsteczka ośrodka się odbija od frontu? Względem nieruchomego układu będzie $2v$. Pęd, który takie cząsteczki nabędą (przy założeniu, że oddziałują one niezależnie, a nie są jakąś falą):

$$\begin{aligned}Sv dt \rho_0 \cdot 2v &= dp \\ \frac{dp}{dt} &= -2\rho_0 S v^2 \\ M \frac{dv}{dt} &= \frac{dp}{dt}\end{aligned}$$

Z zasady zachowania pędu wyznaczyliśmy de facto siłę. Ta siła to tylko nazwa na masę razy przyspieszenie. II zasada dynamiki jest tylko definicją, poza niektórymi przypadkami szczególnymi.

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dv} &= -\frac{M}{2\rho_0 S v^2} \\ dt &= -\frac{M dv}{2\rho_0 S v^2} \\ t &= \frac{M}{2\rho_0 S v} + C\end{aligned}$$

Po warunku początkowym,

$$\begin{aligned}t &= \frac{M}{2\rho_0 S} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) \\ v(t) &= \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{2\rho_0 S t}{M}} \\ \int_0^t v(t) dt &= x(t) = \frac{M}{2\rho_0 S} \ln \left(1 + \frac{2\rho_0 S t v_0}{M} \right)\end{aligned}$$

Wykład 7

Teraz rozważymy rakietę relatywistyczną używając zasadę zachowania energii-pędu. Jesteśmy w układzie laboratorium. Rakietę porusza się w danym momencie z prędkością v . W swoim układzie wyrzuca gazy z prędkością w . u to prędkość gazów w naszym układzie.

10 lis 2020

$$\begin{aligned}d \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) &= \frac{\Delta mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ u &= \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}}\end{aligned}$$

Teraz jeszcze energia,

$$d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -\frac{\Delta mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

To równanie wstawiamy do pierwszego.

$$\begin{aligned}d \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) &= -u d \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \\ \gamma dm + m dv + \frac{mv^2 dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)c^2} &= \frac{v - w}{1 - \frac{vw}{c^2}} \left(dm + \frac{mv dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)c^2} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dm}{m} &= -\frac{dv}{w\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \\ \ln m + C &= \frac{c}{2w} \ln\left(1 - \frac{v}{c}\right) - \frac{c}{2w} \left(1 + \frac{v}{c}\right) \\ \frac{M}{m} &= \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{c/2w}\end{aligned}$$

Jeśli $v/c \rightarrow 0$, to

$$\begin{aligned}\frac{M}{m} &= \exp(v/w) \\ v &= w \ln \frac{M}{m}\end{aligned}$$

Spytajmy co się dzieje, jak rakieta wyrzuca fotony (jakiś silnik jonowy).

$$\begin{aligned}\frac{M}{m} &= \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right)^{1/2} \\ v &= c \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\end{aligned}$$

Założmy, że pozbyliśmy się już połowy naszej masy.

$$v = \frac{3}{5}c$$

Jak zrobić taki silnik? Można wziąć zbiorniki z protonami i pozytonami :)

Wykorzystamy zasadę zachowania pędu w trochę innej sytuacji. Wyprowadzimy równanie gazu doskonałego tylko z zasad pierwszych.

Zastanówmy się nad pojedynczą cząsteczką: $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Zakładamy, że po zderzeniu z tłokiem (w osi z) nastąpi zderzenie sprężyste, czyli $\vec{v}' = (v_x, v_y, -v_z)$. Cząsteczki ze sobą z założenia nie oddziałują. Pęd przekazany dla tłoka to:

$$\Delta p_z = 2mv_z$$

Za jakiś czas znowu uderzy w tłok. Jaki czas minie?

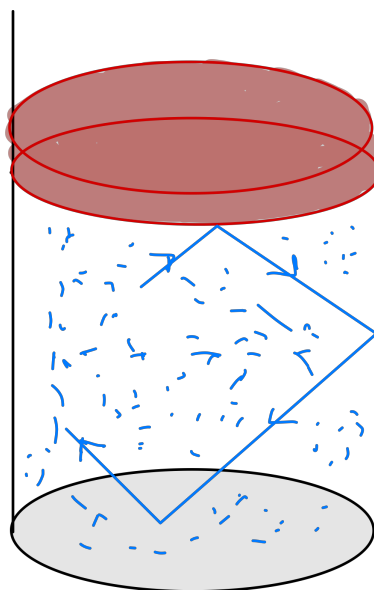
$$\Delta t = \frac{2L}{v_z}$$

Jaki jest przekaz pędu do i -tej cząsteczki na jednostkę czasu?

$$\frac{\Delta p_{zi}}{\Delta t} = \frac{m_i v_{zi}^2}{L}$$

Sumujemy po wszystkich cząsteczkach,

$$\frac{\Delta p_z}{\Delta t} = \sum_i \frac{m_i v_{zi}^2}{L}$$



Rysunek 6: dzban

Tłok będzie w równowadze, gdy to będzie równe Mg , czyli przekazowi pędu od pola grawitacyjnego. Ponadto z symetrii chcielibyśmy, by

$$\begin{aligned}\sum \frac{m_i v_{ix}^2}{2} &= \sum \frac{m_i v_{iy}^2}{2} = \sum \frac{m_i v_{iz}^2}{2} \\ \sum \frac{m_i v_i^2}{2} &\approx 3 \sum \frac{m_i v_{iz}^2}{2} \\ \frac{\Delta p_z}{\Delta t} &= \frac{2}{3L} \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{2E_k}{3L}\end{aligned}$$

Siła działająca na tłok,

$$F = \frac{2E}{3L}$$

Siła ta jest dla nas niezbyt interesująca, interesuje nas bardziej coś niezależnego od rozmiarów, tj. ciśnienie.

$$p = \frac{2E}{3LS} = \frac{2E}{3V}$$

Zasada ekwipartycji energii mówi, że na każdy stopień swobody przypada energia termiczna $1/2kT$. U nas $E_T = 3/2kT$.

$$\begin{aligned}p &= \frac{2}{3V} N \frac{3}{2} kT \\ pV &= NkT\end{aligned}$$

To oczywiście nie sprawdza się nawet dla jednoatomowych gazów. Jak zwiększamy gęstość to musimy uwzględnić poprawki.

$$\frac{pV}{NkT} = 1 + a_1(T)\rho + a_2(T)\rho^2 + \dots$$

W praktyce te poprawki się mierzy, bo niesłychanie trudno obliczyć je dla konkretnego gazu.

Ruch adiabatyczny Niesłuchanie powolne ruchy tak, że przechodzimy przez kolejne stany równowagi.

Weźmy poziomy tłok i przesuwamy go minimalnie. Cząsteczka gazu uderzała wcześniej w nieruchomy tłok i się sprężyscie odbijała. Teraz tłok ma prędkość V , zatem $v_z \rightarrow v_z - 2V$.

$$\frac{mv_z^2}{2} \rightarrow \frac{m(v_z - 2V)^2}{2}$$
$$\Delta E = 2mv_z V - 2mV^2$$

Dla $V/v_z \ll 1$ (warunek adiabatyczności) zostaje tylko pierwszy wyraz.

$$dE = -F dt V$$

$$dE = -F dL = -\frac{2E}{3L} dL$$

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2}{3} \frac{dL}{L}$$

$$E = CL^{-2/3}$$

$$Ee = E_0 \left(\frac{L_0}{L} \right)^{2/3}$$

Wstawmy to do równania na siłę.

$$F = \frac{2}{3} \frac{E}{L} \sim CL^{-5/3}$$

$$p = C'V^{-5/3}$$

Chcielibyśmy jeszcze zależność temperaturową.

$$pV \sim T \implies TV^{2/3} = \text{const.}$$

W silnikach Diesela stosuje się takie wysokie stopnie sprężenia, żeby wzrastała mocno temperatura i żeby następował samozapłon paliwa, bez użycia iskier.

Wykład 8

12 lis 2020 Weźmy pojemnik, w którym sobie latają fotony i się odbijają. Dla fotonów założenie o braku oddziaływania jest dobrym założeniem. Znów istotna jest jedynie składowa składowa. Analogicznie,

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum_{v_{zi}} \frac{2h\nu_i \frac{v_{zi}}{c^2}}{\frac{2L}{v_{zi}}} = \sum \frac{h\nu_i}{L} \frac{v_{zi}^2}{c^2}$$
$$\left\langle \frac{v_{zi}^2}{c^2} \right\rangle = \frac{1}{3}$$
$$pV = \frac{1}{3}U$$
$$p = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$$

Jest to ciśnienie gazu fotonowego. Spróbujemy stąd otrzymać prawo Stephana-Boltzmann. Musimy jedynie przyjąć na wiarę, że dla gazu fotonowego ciśnienie zależy tylko od temperatury. Nic natomiast nie zależy od liczby fotonów (na cząstek tak nie jest).

$$\begin{aligned}
 U &= 3pV, \quad p = g(T) \\
 dU &= T dS - p dV \\
 3 dp V + 3p dV, \quad S &= f(T)V \\
 3 dp V + 3p dV &= T f' dT V + T f dV \\
 \implies g &= \frac{T f}{4}, \quad f = \frac{16}{3} \sigma T^3 \\
 g &= \frac{4}{3} \sigma T^4 \\
 \implies U &= 4 \sigma T^4
 \end{aligned}$$

Zasadnicza różnica między fotonami a cząstkami, to

$$\begin{aligned}
 U &= f(T)V \\
 U &= \tilde{f}(T)N
 \end{aligned}$$

Niech $T^2 = 1$, $N^2 = 1$, $T \cdot N = 0$, $B = T \times N$. Definiujemy krzywiznę κ jako:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= \kappa N \\
 \frac{dN}{ds} &= \alpha T + \beta B \\
 T \cdot N &= 0 \\
 \frac{dT}{ds} \cdot N + T \cdot \frac{dN}{ds} &= 0
 \end{aligned}$$

Podstawiam współczynniki κ, α, β i otrzymuję

$$\alpha = -\kappa$$

Stąd,

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$$

gdzie τ to skręcenie.

$$\frac{dB}{ds} = \gamma T + \beta N$$

Przez podobny iloczyn skalarny $T \cdot B = 0$ dostajemy $\gamma = 0$, natomiast z $N \cdot B = 0$ mamy $\beta = -\tau$.

Otrzymane wzory są tzw. wzorami Frenetta:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= \kappa N \\
 \frac{dN}{ds} &= -\kappa T + \tau B \\
 \frac{dB}{ds} &= -\tau N
 \end{aligned}$$

Albo,

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho}, \quad \tau = \frac{1}{R_s}$$

Gdzie ρ to promień krzywizny, a R_s to promień skręcenia.

Teraz weźmy ruch po okręgu, tj. $x = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0\theta)$.

$$\begin{aligned} dx &= (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) d\theta \\ ds &= R d\theta \\ T &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{1}{R} \frac{dT}{d\theta} = \frac{1}{R} (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) = \kappa N \\ \implies N &= (-\cos \theta, -\sin \theta, 0) \end{aligned}$$

Stąd, $\kappa = \frac{1}{R}$.

$$B = (0, 0, 1) \implies \tau = 0$$

Przejdźmy do przykładu, w którym mamy i krzywiznę i skręcenie.

$$\begin{aligned} x &= (R \cos \theta, R \sin \theta, R\theta) \\ dx &= (-R \sin \theta, R \cos \theta, R) d\theta \\ ds &= |dx| = \sqrt{2} R d\theta \end{aligned}$$

Szukamy unormowanego wektora stycznego.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \theta, \cos \theta, 1) \\ \frac{dT}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}R} (-\cos \theta, \sin \theta, 0) = \kappa N \end{aligned}$$

Wektor wyżej jest unormowany, zatem $\kappa = \frac{1}{2R}$.

$$\begin{aligned} B &= T \times N \\ B &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \theta, -\cos \theta, 1) \end{aligned}$$

Można też z trzeciego wzoru Frenetta.

$$\frac{1}{\sqrt{2}R} \frac{dB}{d\theta} = \frac{1}{2R} (\cos \theta, \sin \theta, 0) = -\frac{1}{2R} N \implies \tau = \frac{1}{2R}$$

Wykład 9: Ruch drgający

Weźmy potencjał $U(x)$. Chcemy być w minimum potencjału, które przypada na $x = 0$. 17 lis 2020
Co się musi dziać?

$$U(x) = U_0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}bx^2 + cx^3 + \dots$$

Nie ma wyrazu ax , ponieważ w minimum pochodna musi się zerować. Ale $bx^2 \gg cx^3$. Ponadto, oczywiście

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{dU}{dx}$$

W pierwszym przybliżeniu,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -bx \\ \ddot{x} &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

„Zgadnijmy” rozwiązanie postaci $x = Ae^{i\beta t}$

$$\begin{aligned} -A\beta^2 e^{i\beta t} &= -\omega^2 Ae^{i\beta t} \\ \beta &= \pm\omega \end{aligned}$$

Równanie n -tego stopnia ma n stałych dowolnych. Stąd,

$$\begin{aligned} x &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \\ \sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \\ \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ x &= A' \cos \omega t + B' \sin \omega t \end{aligned}$$

Tak de facto $A = \bar{A}$. Dostajemy funkcje znane ze szkoły jako oscylujące.

Własności funkcji sin

Zachodzi coś niezwykle głębokiego (wyprowadza się z twierdzenia Adamarda):

$$\begin{aligned} \sin \pi x &= \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \\ \ln \sin \pi x &= \ln(\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \\ \frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{zx}{n^2 - x^2} \end{aligned}$$

Jak się rozwinie,

$$-\frac{1}{3}\pi^2 x - \frac{\pi^4 x^3}{45} - \dots = -2 \sum \frac{1}{n^2} x - 2x^3 \sum \frac{1}{n^4} - \dots$$

Zobaczmy co stąd się bierze!

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

i tak dalej...

Rozważmy jeszcze tłumienie.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\beta\dot{x}$$
$$x = Ae^{i\alpha t}$$
$$-A\alpha^2 e^{i\alpha t} = -a\omega^2 e^{i\alpha t} - 2Ai\alpha\beta e^{i\alpha t}$$
$$\alpha^2 - 2i\alpha\beta - \omega^2 = 0$$
$$\alpha = i\beta \pm \sqrt{-\beta^2 + \omega^2}$$

Są dwa mocno różne przypadki.

1. $\omega > \beta$

$$x = Ae^{i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}t - \beta t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}t - \beta t}$$

2. $\omega < \beta$ (bardzo silne tłumienie)

$$x = Ae^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2}t - \beta t} + Be^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}t - \beta t}$$

$$\sqrt{\beta^2 - \omega^2} - \beta = \beta \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}} - \beta \approx \beta \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) - \beta$$
$$\approx -\frac{\omega^2}{2\beta}$$

Najszybsze dochodzenie do równowagi zachodzi dla $\omega = \beta$.

Co się stanie, kiedy wymuszamy ruch oscylatora periodyczną siłą?

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = h \cos \omega t$$

Niech $x = \tilde{x} + y$, gdzie \tilde{x} oznacza jakieś konkretne zgadnięte rozwiązanie.

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\beta\dot{\tilde{x}} + \omega^2 \tilde{x} = h \cos \omega t$$

Oraz,

$$\ddot{\tilde{x}} + \ddot{y} + 2\beta\dot{\tilde{x}} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 \tilde{x} + \omega^2 y = h \cos \omega t$$

Wówczas,

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

UZUPEŁNIĆ

Wykład 10

DO UZUPEŁNIENIA O CAŁKACH ELIPTYCZNYCH

18 lis 2020

Oddziaływania

Rozważmy tarcie toczone.

$$F = C_t N$$

$$C_T \sim \sqrt{\frac{z}{2R}}$$

Jak oponę w samochodzie napompujemy bardziej, to będzie mniejszy opór ruchu przy tej samej prędkości.

Np dla kół kolejowych,

$$C \sim \frac{1}{\sqrt{RN^{1/4}}}$$

Rozważmy siłę Lorentza.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Wyobraźmy sobie, że rozważamy przyspieszający ładunek z prędkością v . To przyspieszenie a' jest widziane w układzie związanym z v . Ma więc przyrost prędkości $a' dt'$. O ile wzrosła prędkość w labie?

$$dv = \frac{v + a' dt'}{1 + \frac{va' dt'}{c^2}} - v = \frac{v + a' dt' - v \left(1 + \frac{va' dt'}{c^2}\right)}{1 + \frac{va' dt'}{c^2}}$$

$$= \frac{a' dt' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{va' dt'}{c^2}} \approx a' dt' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{dv}{dt} = a' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} = a$$

Ponadto,

$$a' = \frac{eE'}{m}$$

Pytanie czy ładunek e to jest niezmiennik Lorentzowski? Gdyby ładunek zależał od prędkości to byłyby permanentne fluktuacje ładunku w ciele, zatem byśmy wyczuwali zmiany izolowanego ładunku ze względu na wewnętrzne ruchy jonów. Taki empiryczny powód, czemu ładunek jest niezmiennikiem (charakterystyką fizyczną ciała).

$$dv = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{eE'}{m} dt$$

Rozważmy ładunek umieszczony między okładkami kondensatora ruszający się z prędkością v , prostopadle do okładek.

$$E = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

$S' = S$, bo poprzeczne wymiary nie ulegają kontrakcji. Stąd,

$$\begin{aligned} E &= E' \\ \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} &= eE \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) &= eE \end{aligned}$$

Newtonowsko byśmy napisali, że

$$\frac{dp}{dt} = eE$$

Widzimy jednak, że po lewej stronie równania relatywistycznego mamy 4-pęd. Można pokazać, że dla pola magnetycznego byłoby tak samo. Stąd,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Widzimy, że wystarczy używać 4-pędu. Trzeba to docenić, bo dla grawitacji nie ma takiego uogólnienia.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} &= q\vec{p} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d\vec{p}^2}{dt} &= 0 \\ \vec{p}^2 &= \text{const.} \\ E &= \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Składową p_z zaniedbujemy. Zapiszmy pozostałe.

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{eB_0}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} p_y \\ \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{eB_0}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}} p_x \\ \vec{v} &= \frac{E}{p/c^2} \end{aligned}$$

Wykład 11

\vec{B} jest w kierunku z , my się ruszamy się w płaszczyźnie xy .

24 lis 2020

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}}{dt} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ \frac{dp_x}{dt} &= qv_y B = q \frac{p_y}{\sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}} B \\ \frac{\partial p_y}{\partial t} &= -qv_x B = -\frac{qp_x}{\sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}} B\end{aligned}$$

ze zdjęcia...

$$\begin{aligned}p_x &= p \sin \omega t \\ p_y &= p \cos \omega t \\ \omega &= \frac{qB}{\sqrt{m^2 + \frac{p^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

Wykład 12

25 lis 2020

Siła odśrodkowa i Coriolisa

Rozważmy obracającą się płaszczyznę, a na niej wersory obracające się wraz z nią.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$$

Osoba, która nie rusza się na rotującym dysku ma stałe współrzędne x, y .

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_x &= \vec{\omega} \times \vec{e}_x \\ \dot{\vec{e}}_y &= \vec{\omega} \times \vec{e}_y \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{x}(t)\vec{e}_x + x(t)\dot{\vec{e}}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + y(t)\dot{\vec{e}}_y \\ &= \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \dot{x}\dot{\vec{e}}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \dot{y}\dot{\vec{e}}_y + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \dot{x}\vec{\omega} \times \vec{e}_x + \dot{y}\vec{\omega} \times \vec{e}_y + \vec{\omega} \times (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \underbrace{\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y}_{\text{przyspieszenie}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times (\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y)}_{\text{siła Coriolisa}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{siła bezwładności}}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

BAC minus CAB

$$\omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2$$

gdzie $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$, jeśli \vec{r} jest w płaszczyźnie dysku. Jak to przepisać w języku sił, jak by Newton chciał?

$$m\vec{a} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} + m\omega^2\vec{r}$$

gdzie \vec{F} jest prawdziwą inercjalną siłą, natomiast \vec{a} to przyspieszenie względem rotującego dysku (nieinercjalne).

Jak siła Coriolisa działa na globalne ruchy, np. wiatry? Masy powietrza zaczynają układać się w ruch wirowy względem niżu i wyżu. Na półkuli północnej wiry wokół niżu kręczą się antyzegarowo, wokół wyżu zegarowo. Na półkuli południowej odwrotnie. Cyrkulacja ta kończy się na zwrotnikach.

Siły pływowe

Mamy Ziemię, która się obraca. Zaniedbajmy ruch orbitalny Księżyca. Załóżmy, że Ziemia jest wodnistą planetą.

$$\begin{aligned}\frac{GM_K}{(R_{ZK} - r)^2} - \frac{GM_K}{(R_{ZK})^2} &\sim \frac{2GM_K r}{R_{ZK}^3} \\ \frac{GM_K}{(R_{ZK} + r)^2} - \frac{GM_K}{(R_{ZK})^2} &\sim -\frac{2GM_K r}{R_{ZK}^3}\end{aligned}$$

Obie strony odchylają się więc tak samo. Ta obwiednia Ziemi, to jaka jest krzywa?

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{2GM_K r}{R_{ZK}^3 g} R \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \frac{GM_K R^2 \sin 2\theta}{R_{ZK}^3 g} &= \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ r &= R + \frac{GM_K R^2}{2R_{ZK}^3 g} (1 - \cos^2 \theta) \\ &\sim \frac{M_K}{R_{KZ}^3} \sim \rho_K \left(\frac{R_K}{R_{KZ}} \right)\end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że ten iloraz jest taki sam dla Słońca, natomiast $\rho_S < \rho_K$. Stąd wpływ od Księżyca jest większy od Słońca.

W naszym rozważaniu nie uwzględniliśmy, że wody jest skończona ilość, tzn na biegunie jest jeszcze niższy poziom, wobec czego różnice poziomów są jeszcze większe.

Wykład 13

01 gru 2020

Grawitacja

Wprowadźmy moment pędu $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$. Wówczas,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{J}}{dt} &= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{F} &= -\frac{GMm}{r^3} \vec{r}\end{aligned}$$

Dla sił centralnych,

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

Pomyślmy w kierunku drugiego prawa Keplera.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} &= \frac{1}{2} \vec{v} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{v} \times \frac{d\vec{v}_\perp}{dx} \\ &= \frac{d\vec{S}}{dt}\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\vec{r} \times \vec{p}$ wyznacza pewną płaszczyznę. Ta płaszczyzna jest w dodatku stała, ponieważ \vec{J} jest stałe.

$$\frac{1}{2} m \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{J} = \text{const.} = \frac{1}{m} \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Jest to dokładnie drugie prawo Keplera. Widać, że zachodzi to dla wszystkich sił centralnych. Nie tylko dla grawitacji.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Newtona o powłoce). Wyobraźmy pewną sferę o gęstości powierzchniowej ρ , o promieniu R . Jak działa sfera na mnie, w odległości d ?

$$g = \frac{GM}{d^2}, \quad \rho = \frac{M}{4\pi R^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{F}{m} &= \int_0^\pi \frac{G\rho \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \, d\theta}{d^2 + R^2 - 2Rd \cos \theta} \cos \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{d - R \cos \theta}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta}} \\ \frac{F}{m} &= \int_0^\pi \frac{G\rho \cdot 2\pi R^2 \sin \theta (d - R \cos \theta)}{(d^2 + R^2 - 2dR \cos \theta)^{3/2}} d\theta \\ &= \int_{-1}^{-1} \frac{G\rho \cdot 2\pi R^2 (d - Rx) \, dx}{(d^2 + R^2 - 2dRx)^{3/2}} \\ &= 2\pi G\rho R^2 \frac{xd - R}{d^2 \sqrt{d^2 + R^2 - 2dRx}} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{4\pi G\rho R^2}{d^2} = \frac{GM}{d^2}\end{aligned}$$

Teraz pomyślmy nad I prawem Keplera bez rachunku różniczkowego. Niech $\vec{r} = r\vec{n}$, gdzie $n^2 = 1$.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{n} + r\dot{\vec{n}} \\ \vec{J} &= m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\dot{r}\vec{n} + r\dot{\vec{n}}) \\ &= mr^2\vec{n} \times \dot{\vec{n}} \\ \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{F}) &= \dot{\vec{v}} \times \vec{F} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} \times (mr^2\vec{n} \times \dot{\vec{n}}) \\ &= -GMm\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{n}}) \\ &= -GMm(\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{n}}) - \dot{\vec{n}}) = GMm\dot{\vec{n}} \\ \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{J} - GMm\vec{n}) &= 0\end{aligned}$$

Dostaliśmy stały wektor. Niech,

$$\vec{v} \times \vec{J} - GMm\vec{n} = GMm\vec{\varepsilon}$$

Jest to wektor w zasadzie dowolny poza tym, że jest w płaszczyźnie ruchu.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\begin{aligned}J^2 &= \vec{J} \cdot (m\vec{r} \times \vec{v}) = m\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{J}) \\ &= m\vec{r}GMm(\vec{n} + \vec{\varepsilon}) \\ &= GMm^2(r + r\varepsilon \cos \phi) \\ r &= \frac{J^2}{GMm^2(1 + \varepsilon \cos \phi)} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}\end{aligned}$$

Pytamy jaka to krzywa? Niech $x = r \cos \phi$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x &= p \\ x^2 + y^2 &= p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 \\ \frac{(x + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} &= 1\end{aligned}$$

gdzie $a = p/(1 - \varepsilon^2)$. Widać, że jest to równanie elipsy, której ognisko jest odległe od środka o $a\varepsilon$, a jest jej półosią wielką, a $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$

Jeśli $\varepsilon = 1$, to wracając do wyjściowego równania z potęgami dostajemy $y^2 = p^2 - 2px$, czyli parabolę. Analogicznie dla $\varepsilon > 1$ dostajemy hiperbolę.

Wykład 14: Ruch w dowolnym polu sił centralnych

02 gru 2020

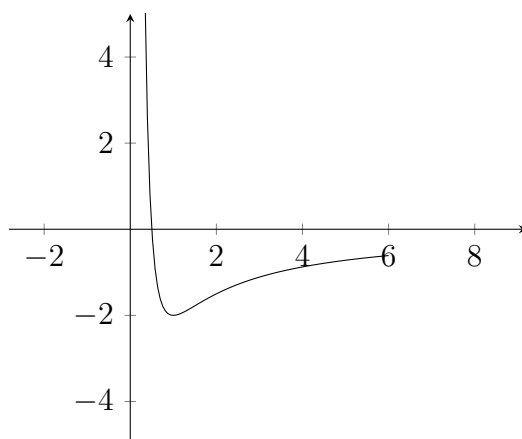
$$\begin{aligned}
\vec{r} &= r\vec{n} \\
\vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{n} + r\dot{\vec{n}} \\
v^2 &= \dot{r}^2 + r^2 \left| \dot{\vec{n}} \right|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \\
T &= \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \\
\vec{J} &= m\vec{r} \times \vec{v} \\
J &= mr^2 \dot{\phi} = \text{const.}
\end{aligned}$$

Poza przypadkiem patologicznym jak puszczaemy czyste na jądro z $\phi = 0$, to zawsze moment pędu musi się zachować. Raz nadany moment pędu się zachowa.

$$\begin{aligned}
U &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
\begin{cases} E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) \\ J = mr^2 \dot{\phi} \end{cases} \\
E &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{J^2}{2mr^2}}_{U_{\text{eff}}} + U(r) \\
E &= U_{\text{eff}}(\dot{r} = 0)
\end{aligned}$$

Często nie będzie nas interesowało jaka jest zależność położenia od czasu, tylko raczej jaka jest trajektoria.

Przykładowo założmy, że rozważamy słynny $U = -\kappa/r$.



Rysunek 7: U_{eff} dla $U = -\kappa/r$.

Przejdźmy do analizy trajektorii.

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = r' \dot{\phi} \\
\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) &= \frac{J^2}{2mr^2} + U(r) =
\end{aligned}$$

Wykład 15

08 gru 2020 UZUPEŁNIĆ POPRAWKI Z STW i OTW

Geodezyjne

Mamy kulkę na paraboloidzie (takiej obróconej).

$$mr^2\dot{\phi} = J$$

Założmy, że nie ma sił tarcia i innych tego typu oporów. Równanie paraboloidy:

$$\begin{aligned} z^2 &= 4r_0(r - r_0) \\ 2z \, dz &= 4r_0 \, dr \\ dz^2 &= \frac{4r_0^2}{z^2} \, dr^2 = \frac{r_0}{r_0 - r} \, dr^2 \end{aligned}$$

Ruch kulki:

$$\begin{aligned} dl^2 &= r^2 \, d\phi^2 + dr^2 + dz^2 \\ &= r^2 \, d\phi^2 + \left(1 + \frac{r_0}{r - r_0}\right) dr^2 \\ &= r^2 \, d\phi^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0}{r}} \end{aligned}$$

Podobnie możemy dla sfery.

$$\begin{aligned} z^2 &= R^2 - r^2 \\ z \, dz &= -r \, dr \\ dl^2 &= r^2 \, d\phi^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \end{aligned}$$

Dla powierzchni obrotowych generalnie możemy napisać:

$$\begin{aligned} dl^2 &= r^2 \, d\phi^2 + g_{rr}(r) \, dr^2, \quad g_{rr} = 1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 \\ v &= \sqrt{r^2\dot{\phi}^2 + g_{rr}\dot{r}^2} \\ v^2 &= r^2\dot{\phi}^2 + g_{rr}r'^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Wykład 16

09 gru 2020

$$\begin{aligned}
I &= \int_A^B dt F(x, \dot{x}) \\
\delta I &= 0 \\
\delta I &= \int_A^B dt \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) \\
&= \int_A^B dt \left(\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right) \\
&= \int_A^B dt \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_A^B
\end{aligned}$$

W punktach krańcowych $\delta x = 0$ oraz chcemy mieć ekstremum ze względu na wszystkie odejścia (dla każdego punktu x).

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$$

Poprzednio mieliśmy dynamikę:

$$\frac{r^2 \phi'}{\sqrt{r^2 \phi'^2 + g_{rr}}} = a$$

Proponujemy minimalizację długości:

$$\begin{aligned}
L &= \int \sqrt{r^2 d\phi^2 + g_{rr} dr^2} \\
&= \int dr \sqrt{r^2 \phi'^2 + g_{rr}(r)} \\
\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dr} \frac{\partial F}{\partial \phi'} &= 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \phi'} &= \frac{r^2 \phi'}{\sqrt{r^2 \phi'^2 + g_{rr}}} = \text{const.}
\end{aligned}$$

Zasada Fermata

$$\begin{aligned}
\int \frac{dl}{\lambda(l)} &= \min. \\
\int n(l) dl &= \min.
\end{aligned}$$

Wyobraźmy sobie ośrodek, w którym współczynnik załamania to $n(z) = \sqrt{n_0^2 - kz}$.

$$\int \sqrt{n_0^2 - kz} \sqrt{dx^2 + dz^2} = \int dz \sqrt{n_0^2 - kz} \sqrt{x'^2 + 1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{x' \sqrt{n_0^2 - kz}}{\sqrt{1 + x'^2}} = \text{const.}$$

$$\frac{\sqrt{n_0^2 - kz}}{\sqrt{z'^2 + 1}} = \text{const.} = n_0$$

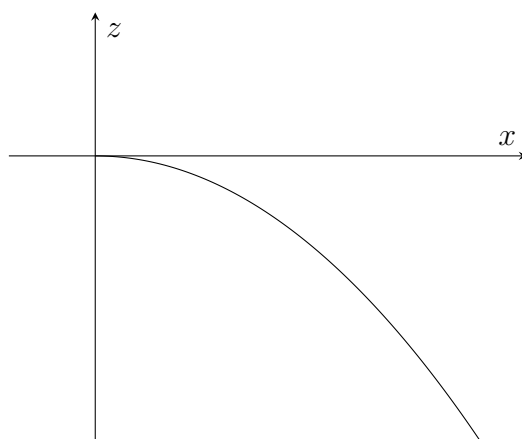
$$n_0^2 - kz = n_0^2 z'^2 + n_0^2$$

$$z'^2 = -\frac{kz}{n_0^2}$$

$$z = -Ax^2$$

$$A = \frac{k}{4n_0^2}$$

$$z = -\frac{k}{4n_0^2} x^2$$



Rysunek 8

Wykład 17: Wysmołkowa inżynierska karta wzorów

16 sty 2021 (Z wykładu 21)

Precesja koła Koło obraca się normalnie, wokół osi \hat{x} przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do ramy. Ta oś jest zaczepiona prostopadle do sufitu, środek masy koła oddalony od linki (\hat{z}) na odległość r . Puszczamy koło i działa na nie grawitacja, która daje moment siły skierowany prostopadle do osi obrotu.

$$\vec{M} = -rmg \hat{x} \times \hat{z} = rmg \hat{y}$$

$$\vec{L}_0 = L \hat{x}$$

$$mgr \hat{y} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Zmiana pędu $d\vec{L}$ ma kierunek \hat{y} , prostopadły do kierunku momentu pędu, zatem wektor momentu pędu będzie się obracał, a oś przyczepiona do linki wraz z nim, zatem wektor momentu pędu będzie odbywał ruch po okręgu – moduł momentu pędu będzie zachowany. Możemy wprowadzić układ cylindryczny.

$$\begin{aligned} mgre_\phi &= \frac{d(Le_r)}{dt} = \frac{dL}{dt}e_r + L\dot{\phi}e_\phi \\ L &= \text{const.} \\ mgr &= L\dot{\phi} \\ \dot{\phi} &= \Omega = \frac{mgr}{L} \end{aligned}$$

Ω nazywamy częstością precesji.

Momenta bezwładności Płaska obręcz o promieniu R :

$$I = mR^2$$

Płaski krążek o promieniu R :

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

Jednorodna kula o promieniu R :

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

Sfera o promieniu R :

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

Pręt o długości l , względem osi prostopadłej i przechodzącej przez środek masy:

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

Wahadło fizyczne Niech O będzie punktem zawieszenia, S środkiem masy, I_O momentem bezwładności względem O , $d = |SO|$.

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_O}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}}$$

Jaką długość l (długość zredukowana) musi mieć wahadło matematyczne, żeby mieć taki sam okres jak powyższe wahadło fizyczne?

$$l = \frac{I_O}{md}$$

Okres pozostanie taki sam, jeśli wahadło fizyczne powiesimy w odległości l od punktu O , tj. w punkcie O' , gdzie $|OO'| = l$ dla współliniowych O, S, O' .

Ponadto, jeśli bryłę uderzymy w punkcie O' , to wykona ona czysty obrót wokół punktu O . Jeśli uderzymy gdzie indziej, to dojdzie do tego ruchu postępowy. Czysty ruch postępowy jest przy uderzeniu w środek masy.

(Z wykładu 22)

Wahadło torsyjne Mamy odkształcający się sprężysty drut o promieniu r i krążkową tacekę o promieniu R i momencie I_0 . Na tę tacekę możemy zadziałać stycznym momentem siły \vec{M} . Definiujemy moment kierujący D jako $M = -D\alpha$. Dlaczego taka zależność ma sens to już kwestia właściwości odkształceń ścinających na drucie.

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M = -D\alpha$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

Mierzając okresy wahadeł torsyjnych dostajemy informację o momencie bezwładności zawieszanej bryły i własności sprężyste druta zawarte w D .

Ścinanie Naprężenie styczne:

$$\sigma_t = \frac{dF}{dS}$$

gdzie F to siła działająca stycznie na bryłę, S to efektywna styczna powierzchnia działania F . Formułacja prawa Hooke'a:

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

gdzie γ to kąt odkształcenia (ścinania) a G to moduł sztywności. Z warunków równowagi możemy wyprowadzić wartość momentu ścinającego.

Naprężenie styczne cienkiej rurki o promieniu r i długości l :

$$\sigma_t = \frac{r\phi}{l}G$$

gdzie ϕ to kąt skręcenia względem prostopadłej płaszczyzny. Moment ścinający dla pełnego pręta o promieniu R i długości l :

$$M = \frac{G\phi}{l} \frac{\pi R^4}{2} = D\phi$$

Dla generalnych prętów moment kierujący jest wyrażony przez geometryczny moment bezwładności.

$$D = \frac{G}{l}J, \quad J = \int_S r^2 dS$$

gdzie całka jest po przekroju pręta.

Sprężyna Dla sprężyny o ciasno nawiniętych zwojach o promieniach R_s , liczbie zwojów N długość drutu wynosi $l = 2\pi R_s N$. Promień drutu to r . Moment ścinający równoważy moment $M = R_s F$ siły zewnętrznej wzdłuż osi. Zmiana długości sprężyny przez ścinanie ma zależność: $\phi = \Delta x / R_s$. Stąd,

$$F = \frac{Gr^4}{4R_s^3N} \Delta x$$

Stąd siła równoważąca wewnątrz sprężyny wynosi:

$$F_s = -k\Delta x, \quad k = \frac{Gr^4}{4R_s^3N}$$

Rozciąganie Definiujemy wydłużenie względne jako $\varepsilon = \Delta l/l_0$. Prawo Hooke'a dla niewielkich odkształceń,

$$\sigma_n = \frac{dF_n}{dS}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{E}$$

gdzie tym razem siła jest normalna do powierzchni, a zatem rozciąga bryłę. E nazywamy modułem Younga. Wydłużenie względne i kąt ścinania łączy współczynnik Poissona:

$$\mu = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

Zmiany objętości przy odkształceniach sprężystych Rozciąganie pręta:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sigma_n}{E}(1 - 2\mu)$$

Z doświadczenia podczas rozciągania objętość się zwiększa, zatem

$$\mu \leq \frac{1}{2}$$

Rozważmy sześciąt umieszczony w obszarze stałego ciśnienia. Zapiszemy, że $\delta = -\kappa p = -p/K$, gdzie p to ciśnienie, κ to współczynnik ściśliwości, a K to moduł ściśliwości. Każda z krawędzi ulegnie skróceniu o czynnik $\left(1 - \frac{p}{E}\right)$, jednocześnie w kierunku poprzecznym będzie rozciągana i ulegnie wydłużeniu o czynnik $\left(1 + \frac{\mu p}{E}\right)^2$. Długość krawędzi na końcu:

$$l = l_0 \left(1 - \frac{p}{E}\right) \left(1 + \frac{\mu p}{E}\right)^2$$

$$-\delta = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} p$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Dla izotropowego materiału mamy zależność między modułem sztywności, modułem Younga i współczynnikiem Poissona.

$$E = 2E(1 + \mu)$$

Stąd, $\mu > -1$.

Ugięcie belki Belka ugina się pod wpływem momentu siły zewnętrznej F działającej na końcu belki. Podejść jest kilka. Możemy mierzyć kąt ugięcia ϕ . Niech belka ma długość l . Jeśli element ugiętej belki ma długość Δx , to moment sił sprężystości w belce wyniesie:

$$M = EJ \frac{\phi}{\Delta x}$$

Moment ten będzie równoważony przez moment siły zewnętrznej:

$$M = (l - x)F$$

Ugięcie całkowite możemy mierzyć poprzez odległość w osi z od najwyższego do najmniejszego punktu belki:

$$\Delta S = \phi(l - x)$$

Stąd,

$$S = \frac{1}{3} \frac{F}{EJ} l^3$$

gdzie J to oczywiście moment geometryczny (całkujemy po polu przekroju zamiast po masie). Im większy moment, tym trudniej belka się zagina. Tyle, że tu jest subtelność bo teraz momentu nie liczymy w symetrii osiowej tylko wzdłuż lokalnej osi zagięcia. Czyli jeśli byśmy mieli prostopadłościan o wysokości h i zagięcie zachodzi wzdłuż osi y , to całkujemy po przekroju w płaszczyźnie yz i rolę próbkujących ramion pełnią ramiona wychodzące od tej osi y . Oznacza to, że przykładowo rozważając przekrój pełnego cylindra, liczylibyśmy:

$$\begin{aligned} J &= \int_S h^2 dS = \int_S r^2 \sin^2 \phi dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \phi d\phi dr \\ &= \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4} \end{aligned}$$

Gdybyśmy liczyli w symetrii osiowej jak w przypadku wahadła, to wyszłoby inaczej:

$$J = \int_S r^2 dS = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

Belka podparta z dwóch końców i napinana siłą F w środku znacznie mniej się ugina:

$$S' = \frac{1}{3} \frac{(l/2)^2 F}{EJ} = \frac{S}{16}$$

Można do problemu podejść też inaczej. Niech R będzie lokalnym promieniem krzywizny. Wówczas,

$$\begin{aligned} \Delta x &= R\phi \\ M &= EJ \frac{\phi}{\Delta x} = \frac{EJ}{R} \end{aligned}$$

Przy wygięciu w jednym kierunku zachodzi związek:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \approx \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

co działa w przybliżeniu małych ugięć.

$$M(x) = EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Stąd, podstawiając zewnętrzne momenty sił, warunki brzegowe (przykładowo zerowe ugięcie i pierwsza pochodna w zerze) dostajemy kształt.