Grawitacyjny problem dwóch ciał

Szymon Cedrowski

Lekcja 3

1 Wyprowadzenie

Zgodnie z prośbą wyprowadzenia będą formalne, natomiast wnioski zrozumiałe dla wszystkich :-) Używamy oznaczeń przyjętych w poprzednich skryptach.

1.1 Równania ruchu i redukcja do problemu 2D

Żeby uprościć sprawę, przejdźmy do układu jednego z ciał (M) – wówczas druga masa zachowuje się jakby miała masę zredukowaną $\mu = Mm/(M+m)$. Równanie ruchu wygląda następująco:

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}_{21}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMm}{r_{21}^3}\mathbf{r}_{21} \tag{1}$$

Od teraz, upraszczająco będę pisał $\mathbf{r}$, mając na myśli $\mathbf{r}_{21}$. Podstawmy teraz $\gamma = G(M + m)$. Równanie 1 przyjmuje postać:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\gamma}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Chcielibyśmy teraz pokazać, że nasz pozornie trójwymiarowy problem (każde z ciał jest w przestrzeni trójwymiarowej) tak naprawdę dzieje się na pewnej płaszczyźnie. Zrobimy to pokazując, że moment pędu (wektor prostopadły do ruchu) jest stały w czasie.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) &= \mu\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}} + \mu\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} \\ &= 0 + \mu\mathbf{r}\times\frac{-\gamma}{r^3}\mathbf{r} = 0\end{aligned}$$

Wektory $\mathbf{r}$ i $\dot{\mathbf{r}}$ są zawsze na płaszczyźnie prostopadłej do stałego wektora momentu pędu.

Wniosek 1. W grawitacyjnym problemie dwóch ciał ruch odbywa się zawsze w pewnej ustalonej płaszczyźnie.

1.2 Zmiana wektorów bazy i przejście do układu polarnego

Skoro jesteśmy już na płaszczyźnie, to dobierzmy sobie przyjemny układ współrzędnych, który zachowuje nam symetrię względem ciała centralnego. Najlepszym wyborem jest układ polarny (r, ϕ).
Przede wszystkim zauważmy, że wektory bazy układu polarnego i kartezjańskiego są powiązane zależnościami:

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\phi \cdot \hat{x} + \sin\phi \cdot \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi \cdot \hat{x} + \cos\phi \cdot \hat{y} \end{cases}$$

Teraz musimy znaleźć wzór na $\ddot{\mathbf{r}}$ wyrażony przez wektory układu polarnego.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\cos\phi \cdot \hat{x} + r\sin\phi \cdot \hat{y} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\cos\phi \cdot \hat{x} - r\dot{\phi}\sin\phi \cdot \hat{x} + \dot{r}\sin\phi \cdot \hat{y} + r\dot{\phi}\cos\phi \cdot \hat{y} \\ &= \dot{r} \cdot \hat{r} + r\dot{\phi} \cdot \hat{\phi} \end{aligned}$$

Stąd widzimy, że $\dot{\hat{r}} = \dot{\phi} \cdot \hat{\phi}$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \cdot \hat{r} + \dot{r}\dot{\phi} \cdot \hat{\phi} + \dot{r}\dot{\phi} \cdot \hat{\phi} + r\ddot{\phi} \cdot \hat{\phi} + r\dot{\phi} \cdot \dot{\hat{\phi}}$$

Natomiast $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi} \cdot \hat{r}$, więc

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\phi}$$

Finalnie, równanie 1 w układzie polarnym przyjmuje postać:

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \frac{\gamma}{r^2}\hat{r} = 0 \tag{2}$$

Rozkładając wektory na składową radialną i tangencjalną:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \dfrac{\gamma}{r^2} = 0 \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

1.3 Rozwiązanie równania na trajektorię $r(\phi)$

Okazuje się, że nie istnieje jawne rozwiązanie równania ruchu $r(t), \phi(t)$, jednakże da się znaleźć równanie trajektorii $r(\phi)$ i powiązać ją w jakiś sposób z czasem. Generalnie, o trajektorii mówi I prawo Keplera, a o tym powiązaniu mówią kolejne dwa prawa.
Tak czy inaczej, chcemy się pozbyć pochodnych czasowych. Użyjemy do tego chain rule.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} \cdot \dot{\phi} \\ \ddot{r} &= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2} \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} \cdot \ddot{\phi} \end{aligned}$$

Zauważmy też, że drugie równanie z układu wyraża nam stałość momentu pędu, tj. $\frac{L}{\mu} = r^2\dot{\phi}$. Użyjemy tego do eliminacji pozostałych pochodnych czasowych.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2}\dot{\phi}^2 + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\ddot{\phi} - r\dot{\phi}^2 + \frac{\gamma}{r^2} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2}\frac{L^2}{\mu^2 r^4} - \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 \frac{2L^2}{\mu^2 r^5} - \frac{L}{\mu^2 r^3} + \frac{\gamma}{r^2} &= 0 \\
\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - r\right] &= -\gamma
\end{aligned}$$

Teraz czas na słynny trik, czyli podstawienie $\rho = 1/r$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} &= -\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi} \\
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\phi^2} &= \frac{2}{\rho^3}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\phi^2}
\end{aligned}$$

Podstawiając otrzymamy:

$$\frac{L^2\rho^2}{\mu^2}\left[\frac{2}{\rho^3}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\phi^2} - \frac{2}{\rho^3}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 - \frac{1}{\rho}\right] = -\gamma$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\phi^2} + \rho - \frac{\gamma\mu^2}{L^2} = 0 \tag{3}$$

Otrzymaliśmy w końcu równanie różniczkowe liniowe! Teraz to już tylko kosmetyka. Zdefiniujmy sobie $\rho' = \rho - \gamma\mu^2/L^2$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho'}{\mathrm{d}\phi^2} + \rho' = 0$$

Rozwiązaniem będzie naturalnie kombinacja liniowa postaci $\exp(\lambda\phi)$. Równanie charakterystyczne to:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm i$$

W związku z tym, rozwiązaniem jest funkcja:

$$\begin{aligned}
\rho(\phi) &= \frac{\gamma\mu^2}{L^2} + k_1\exp(i\phi) + k_2\exp(-i\phi) \\
&= \frac{\gamma\mu^2}{L^2} + k\cos\phi = \frac{\gamma\mu^2}{L^2}(1 + e\cos\phi)
\end{aligned}$$

Finalnie, trajektoria dana jest poniższym wzorem:

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + e\cos\phi}, \quad p = \frac{L^2}{\gamma\mu^2} \tag{4}$$

przy czym $e \geq 0$ nazywamy mimośrodem, a p parametrem orbitalnym. Otrzymane równanie opisuje przekroje stożka (krzywe stożkowe) względem ich ognisk. Co to oznacza?

2 Prawa Keplera

Wniosek 2 (I prawo Keplera)**.** W problemie dwóch ciał, masy poruszają się po orbitach zamkniętych będących krzywymi stożkowymi, tj. po okręgach, elipsach, parabolach i hiperbolach. Jedno z tych ciał zawsze znajduje się w ognisku stożkowej.

Przyjrzyjmy się teraz polom, które zakreśla ciało przez wektory wodzące w swoim ruchu orbitalnym. Przyjmując, że rozważamy malutkie pole ΔS zakreślone w krótkim przedziale czasowym Δt, możemy zapisać, że

$$\Delta S = \frac{1}{2} r(r + \Delta r)\Delta\phi$$

Prędkość polową zdefiniujmy jako $v_S = \mathrm{d}S/\,\mathrm{d}t$,

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{L}{\mu}$$

a to jest przecież stałe!

Wniosek 3 (II prawo Keplera)**.** Prędkość polowa w ruchu orbitalnym jest stała, w szczególności

$$v_S = \frac{\pi ab}{P}$$

gdzie licznik jest polem elipsy o półosiach a, b, a P jest okresem orbitalnym.

Z rozważań geometrycznych na temat krzywych stożkowych możemy uzależnić parametr orbitalny p od odcinków i stałych takich jak a, b, c, e, charakterystycznych dla stożkowych. W szczególności, dla elipsy $(0 < e < 1)$ mamy $p = a(1 - e^2)$ oraz $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Zapiszmy p poprzez prędkość polową.

$$p = a\big(1 - e^2\big) = \frac{4v_S^2}{G(m + M)} = \frac{4\pi^2 a^4 \big(1 - e^2\big)}{G(m + M)P^2}$$

Teraz już wystarczy poskracać i dostajemy...

Wniosek 4 (III prawo Keplera)**.** Dla orbit zamkniętych w problemie dwóch ciał jest zależność łącząca półoś wielką z okresem obiegu i stałymi fizycznymi układu:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m + M)}{4\pi^2}$$

Być może poczuliście to już przy przedstawionych dowodach, ale warto zauważyć, że mimo nieosiągalności funkcji $r(t), \phi(t)$ jesteśmy w stanie kontrolować zarówno trajektorię jak i zależność położenia od czasu poprzez trzy prawa Keplera. No, do pełni szczęścia dochodzi jeszcze kilka równań, ale to już wyższy poziom.

3 Ciekawostka fizyczno-matematyczna

Jak dotąd, do opisywania zjawisk fizycznych używaliśmy formalizmu Newtona, wzoru $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ i takich tam. Okazuje się, że można z powodzeniem opisywać świat podchodząc do tego energetycznie (nie siłowo) i opierając prawa o zasady wariacyjne (taka funkcyjna, harda optymalizacja). W szczególności, okazuje się na przykład, że możemy użyć formalizmu Lagrange'a, definiując pewną funkcję zwaną Lagrangianem. W naszym prostym przypadku wyglądałaby ona bardzo ładnie:

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} T - V = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{GmM}{r}$$

gdzie T jest energią kinetyczną układu, natomiast V jest jego energią potencjalną. Rachunek wariacyjny natomiast daje nam równanie Eulera-Lagrange'a, które jest odpowiednikiem równania Newtona:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

Przewagą tego podejścia jest uwolnienie się od matematycznych zawiłości różnych układów współrzędnych i wektorów, gdyż równanie E-L działa dla każdego układu krzywoliniowego, w którym współrzędnymi są q_i. Wystarczy tylko potrafić zapisać Lagrangian w docelowym układzie i dostaniemy pełen zestaw równań ruchu w tym samym układzie. Nie będziemy musieli przekształcać żmudnie wektorów bazy itd.

Przekonajcie się, że licząc równanie E-L z napisanego Lagrangianu dla współrzędnych $(q_1, q_2) = (r, \phi)$ dostaniecie od razu układ równań 2.