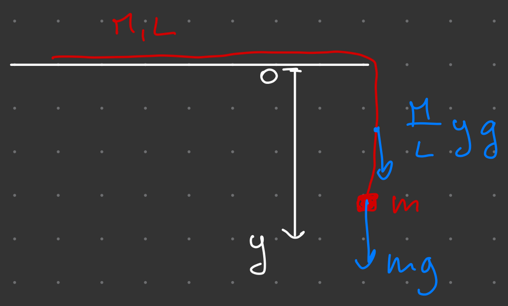
Zadanie 2
Wiotka lina o długości L i masie M leży na stole i sięga kantu. W pewnej chwili do końca liny doczepiono masę m i całość zaczęła się zsuwać. Znajdź ruch końca liny, pomijając tarcie.

SZYMON CEDROWSKI



Badamy ruch w osi y.

$$\frac{dp_y}{dt} = g\left(m+\frac{M}{L}y\right)$$

Ruch natomiast odbywa cały układ, zatem

$$p_y = (M+m)\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow (M+m)\frac{d^2y}{dt^2} = g\left(m+y\frac{M}{L}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \underbrace{\frac{Mg}{L(M+m)}}_{k^2}\ y - \frac{mg}{M+m} = 0 \quad (k>0)$$

$$\ddot{y} - k^2 y = mg/(M+m)$$

RORJ: $\ddot{y} - k^2 y = 0$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - k^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm k$$

$$\Rightarrow y(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt}$$

RSRN: $\ddot{y} - k^2 y = mg/(M+m)$

zgadujemy, że $y_s(t) = -\frac{m}{M}L$; działa, bo $\ddot{y}_s = 0$ $\Leftarrow$ $k^2 y = \frac{mg}{M+m}$

Rozwiązanie pełne:

$$y(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt} - \frac{m}{M}L$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{m}{M}L = A+B \qquad \Rightarrow A = \frac{mL}{2M} = B$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow kA = kB \Rightarrow A = B$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{mL}{M}\,\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2} - \frac{mL}{M}$$

$$= \frac{mL}{M}\left[\cosh(kt) - 1\right]$$

$$= \frac{mL}{M}\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{Mg}{L(M+m)}}\,t\right) - 1\right]$$