ANALIZA

MATEMATYCZNA II

„Liczby zespolone, chińskie twierdzenie o resztach. Tutaj uczymy się rzeczy, które nie przydadzą się wam na maturze. One nigdy wam się nie przydadzą.”

Wykładowca:
Olga Ziemiańska

Skryba:
Szymon Cedrowski

Drogi czytelniku,

Niniejszy skrypt traktuj jako uzupełnienie własnych notatek z analizy i zbiorek dodatkowych zadanek, nie jako podręcznik. Skryba pisał „pod siebie" tak, aby lepiej mu się uczyło. Skrypt był tworzony podczas zajęć i w większości przypadków treść nie była później modyfikowana. Autor nie bierze żadnej odpowiedzialności za niewątpliwie występujące błędy, mogące nieumyślnie wprowadzić czytelnika w błąd. Ponadto, okres pisania tego skryptu zbiegł się z okresem intensywnej nauki LaTeXa, nie ciężko więc zauważyć ewoluujący styl tekstu. Prośby o ujednolicenie formatowania nie będą jakkolwiek uwzględniane :-)

Wszystkie inne uwagi, korekty jawnych błędów można kierować na maila: `szymek.ced@gmail.com`

Spis treści

Rozdział 1

Wielomiany

Definicja 1 (Wielomian)**.**

$$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}\ ,\boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$$

Definicja 2 (Stopień wielomianu)**.**

$$\mathbf{deg}\, \boldsymbol{f = n}$$

Twierdzenie 1. $f(x) = a_n x^n + ... + a_0,\ \exists_{M>0}\ |x| > M \implies |a_n x^n| > |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0|$

Dowód.

$$M = 2 + \frac{|a_0| + ... + |a_{n-1}|}{|a_n|} \implies M > 1 \implies 1 < |x| < |x^2| < ... < |x^n|$$

$$\begin{aligned}|a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0| &\leqslant |a_{n-1}x^{n-1}| + ... + |a_0| < |a_{n-1}||x|^{n-1} + ... + |a_0||x|^{n-1} \\ &= |x|^{n-1}(|a_{n-1}| + ... + |a_0|) < |x|^n|a_n| = |a_n x^n|\end{aligned}$$

■

Twierdzenie 2. f nieparzystego stopnia $\wedge\ a_i \in \mathbb{R} \implies$ co najmniej 1 pierwiastek $\in \mathbb{R}$

Dowód. Weźmy $a_n > 0$. Wówczas mamy $x > M\ \wedge\ a_n > 0 \implies a_n x^n > 0$. Z Tw.1.1. $f(x) > 0$. Natomiast dla $x < -M\ \wedge\ a_n > 0 \implies a_n x^n < 0 \implies f(x) < 0$. Ciągłość wielomianu musi być zachowana na przedziale $x \in \langle -M, M \rangle$, zatem istnieje co najmniej 1 pierwiastek rzeczywisty. Analogicznie dla $a_n < 0$. ■

Twierdzenie 3. $f(x) = a_n x^n + ... + a_0\ \wedge\ f(x) = 0,\ \forall_{x\in\mathbb{R}} \implies a_n = ... = a_0 = 0$

Dowód. Z Twierdzenia 2 i jego dowodu $\implies a_n = 0$. Indukcją otrzymamy $a_i = 0$. ■

Twierdzenie 4. $a_n x^n + ... + a_0 = b_m x^m + ... + b_0,\ \forall_{x\in\mathbb{R}} \implies n = m\ \wedge\ a_i = b_i$

Dowód. Załóżmy, że $n > m$. Wówczas $a_n x^n + ... + (a_m - b_m)x^m + ... + (a_0 - b_0) = 0$. Z Tw.1.3. $a_n = 0, ..., a_{m+1} = 0, a_m = b_m, ..., a_0 = b_0$. ■

$$\deg f = n\ \wedge\ \deg g = m \quad (\deg(0) = -\infty)$$

Twierdzenie 5. Stopnie następujących wielomianów:

$$\deg(f+g) = \begin{cases} \max(n,m), & m \neq n \\ \leqslant m, & m = n \end{cases}$$

$$\deg(fg) = m + n$$

$$\deg(f \circ g) = mn$$

Dowód. Pozostawiam czytelnikowi :') ■

1.1 Dzielenie wielomianów

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + ... + b_0$$

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$
$$\deg r(x) < \deg g(x)$$

Cały czas będziemy dzielili pisemnie, biorąc jednomiany $q_i(x)$ tak, żeby skasował się pierwszy wyraz. Algorytm powtarzamy.

$$q_i(x) = \frac{a_i}{b_j} x^{i-j}$$

$$q(x) = \sum q_i(x)$$

Definicja 3.

$$g(x) | f(x) \iff r(x) = 0$$

Twierdzenie 6.

$$f(x) = (x-a)q(x) + r(x) \implies r(x) = f(a)$$

Dowód. $\deg r(x) < 1$, bo $\deg g(x) = 1$. Wstawiamy $x = a$ do $f(x)$ i dostajemy $f(a) = 0 + r(x)$. ■

Wniosek 1 (Twierdzenie Bezout)**.** $f(a) = 0 \iff (x-a)|f(x)$

1. *Znajdź* $NWD(x^4 + x^2 + x - 1, x^3 + 1)$

   $x^4 + x^2 + x - 1 = (x^3+1)q(x) + r(x)$
   $(x^3+1) = r(x)q_1(x) + r_1(x)$ ...

   $\implies x^4 + x^2 + x - 1 = (x^3+1)x + (x^2-1)$
   $(x^3+1) = (x^2-1)x + (x+1)$
   $(x^2-1) = (x+1)(x-1) + 0$
   $\implies NWD = x+1$

   Odwrócony algorytm Euklidesa:
   $x + 1 = (x^3+1) - (x^2-1)x = (x^3+1) - (f(x) - x(x^3+1))x = f(x)(-x) + g(x)(x^2+1)$ ▶

2. $n \in \mathbb{N} \implies (x-1)^2 \mid nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$

   Przede wszystkim przekształćmy trochę ten wielomian:

   $f(x) = n(x^{n+2} - 1) - x(n+2)(x^n - 1) = n(x-1)(x^{n+1} + x^n + x^{n-1} + ... + 1) - x(n+2)(x-1)(x^{n-1} + ... + 1) = (x-1)[n(x^{n+1} + x^n + x^{n-1} + ... + 1) - x(n+2)(x^{n-1} + ... + 1)] = (x-1)f_1(x)$

   $\implies (x-1) \mid f(x)$
   Teraz pokażę, że pozostałość po dzieleniu tego wielomianu $f_1(x)$ także dzieli się przez $(x-1)$. Korzystając z pewnego często używanego twierdzenia o dzieleniu przez taki prosty wielomian stopnia 1,
   $f_1(x) = (x-1)g(x) + f_1(1)$
   Zatem należy tylko pokazać, że $f_1(1) = 0$. Sprawdźmy to!
   $f_1(1) = n(1^{n+1} + 1^n + 1^{n-1} + ... + 1) - (n+2)(1^{n-1} + ... + 1) = n(n+2) - n(n+2) = 0$ ▶

1.2 Pierwiastki wielokrotne

Definicja 4 (Krotność pierwiastka)**.** a - pierwiastek $f(x)$. m - krotność pierwiastka:

$$(x-a)^m | f(x) \ \wedge \ (x-a)^{m+1} \nmid f(x)$$

Twierdzenie 7. $f(x) = a_n x^n + ... + a_0$ ma $n+1$ pierwiastków $\implies f(x) = 0$.

Dowód. Indukcja:
$n = 1$: $f(x) = ax + b$. Istnieją $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \implies f(x) = 0$
Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$. Wtedy $r_1, r_2, ..., r_{n+1}$ - pierwiastki $f(x)$. Wówczas $f(x) = (x - r_{n+1})q(x)$, $q(x)$ ma n pierwiastków, $\deg q(x) = n-1$. Z założenia indukcyjnego $q = 0$. ■

Wniosek 2. Wielomian może mieć maksymalnie $\deg f$ pierwiastków, licząc z krotnościami.

1.3 Schemat Hornera

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_0$$

Dzielimy przez $(x-a)$ i szukamy współczynników $g(x)$ z $f(x) = (x-a)g(x) + f(a)$.

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = (x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0) + f(a)$

$x^n : a_n = b_{n-1}$	$b_{n-1} = a_n$
$x^{n-1} : a_{n-1} = -ab_{n-1} + b_{n-2}$ ...	$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1}$ ...
$\boldsymbol{x^i : a_i = -ab_i + b_{i-1}}$	$\boldsymbol{b_i = ab_{i+1} + a_{i+1}}$
$x^0 : a_0 = f(a) - ab_0$	$f(a) = a_0 + ab_0$

1. *f ma współczynniki, $a, b \in \mathbb{Z}$. T: $(a-b)|f(a) - f(b)$*

   $f(x) = (x-b)q(x) + f(b), x = a$
   $f(a) - f(b) = (a-b)q(a)$; $q(a)$ jest całkowite?
   Niech $q(x) = b_n x^n + ... + b_0$.
   Ze schematu Hornera $b_i = a_{i+1} + bb_{i+1} \implies q(x)$ ma współczynniki całkowite. ▶

   Alternatywnie: $f(a) - f(b) = a_n a^n + ... + a_0 - (a_n b^n + ... + a_0) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + ... + a_1(a-b) = (a-b)(a_n R_n + a_{n-1}R_{n-1} + ... + a_1)$ oraz $a_i, R_i \in \mathbb{Z}$. ▶

2.

$w(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ *T:* $\exists_{\alpha,p,q\in\mathbb{R}}\ w(x-\alpha) = x^3 + px + q.$

$f(x-\alpha) = (x-\alpha)^3 + b(x-\alpha)^2 + c(x-\alpha) + d = x^3 - 3\alpha x^2 + bx^2 + ...$
$\implies 3\alpha = b \implies \alpha = \frac{b}{3}$ ▶

3. $f(1) = -1, f(2) = 2, f(3) = 11$ *Wyznacz resztę z dzielenia f przez* $(x-1)(x-2)(x-3)$.

   $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)q(x) + r(x)$
   $\implies r(x) = ax^2 + bx + c$
   Przy podstawieniu $f(1), f(2), f(3)$ zeruje się pierwszy człon wielomianu i zostaje $r(x)$.

   $$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+2b+c=2 \\ 9a+3b+c=11 \blacktriangleright \end{cases}$$

4. *T:* $\lfloor x \rfloor$, $|x|$, $\sqrt[3]{x}$ *nie są wielomianami.*
   - $\lfloor x \rfloor$ nie może być wielomianem, gdyż nie jest funkcją ciągłą.
   - $|x| = \sqrt{x^2}$ musiałby być wielomianem stopnia 1 x lub $-x$. Biorąc $f(x) = x$ otrzymamy sprzeczność dla $x < 0$. Analogicznie dla $f(x) = -x$.
   - $\sqrt[3]{x} = a_nx^n + ... + a_0$ Mamy równanie wielomianowe, więc stopnie muszą być równe. $\implies 1 = 3n$, co daje sprzeczność, gdyż n nie jest naturalne. ▶

5. *Znajdź wszystkie wielomiany $w(x)$,* $\forall_x\ xw(x-1) = (x+1)w(x)$.

6. *T:* $w(x) = a_nx^n + ... + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z}\ \wedge\ 2|w(5)\ \wedge\ 5|w(2) \implies 10|w(7)$

   Dowodziliśmy twierdzenie, że jeśli wielomian ma współczynniki całkowite oraz $a, b \in \mathbb{Z} \implies (a-b) \mid f(a) - f(b)$.

   $2|w(7) - w(5) \implies w(7) \equiv w(5) \equiv 0 \mod 2$
   $5|w(7) - w(2) \implies w(7) \equiv w(2) \equiv 0 \mod 5$
   $\implies w(7) \equiv 0 \mod 10$ ▶

7. $w(x) = a_0 + ... + a_nx^n$

1.4 Parzystość wielomianów

Twierdzenie 8. $w(x) = -w(-x) \iff a_k = 0$ dla $2 \mid k$

Dowód. $\implies$:
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = -(a_0 - a_1x + a_2x^2 - ... \pm a_nx^n) = -a_0 + a_1x - a_2x^2 + ... \pm a_nx^n$
$\implies 2(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... + a_kx^k) = 0$
$a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... = 0$
$\implies a_k = 0$

$\Leftarrow$:
$w(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + ...$
$w(-x) = -a_1x - a_3x^3 - a_5x^5 - ... = -w(x)$ ■

Twierdzenie 9. $w(x) = w(-x) \iff a_k = 0$ dla $2 \nmid k$

Dowód. $\implies$:
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a_0 - a_1x + a_2x^2 - ... \pm a_nx^n$
$\implies 2(a_1x + a_3x^3 + ...) = 0$
$\implies a_k = 0$

$\Leftarrow$:
$w(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ...$
$w(-x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + ... = w(x)$ ■

1.5 Wzory Viete'a dla wielomianów

$$f(x) = a_nx^n + ... + a_0$$

Niech $x_1, ..., x_n$ - pierwiastki f.

Twierdzenie 10.
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Dowód. $a_nx^n + ... + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$
$x^{n-1} : a_{n-1} = a_n(-x_1 - x_2 - ... - x_n) = -a_n \sum x_i$ ■

Twierdzenie 11.
$$\sum_{i<j} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

Dowód. $x^{n-2} : a_{n-2} = a_n(x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n) = a_n \sum_{i<j} x_ix_j$ ■

Twierdzenie 12.
$$\prod x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Dowód. $f(x) = a_n(x - x_1)...(x - x_n) = a_n(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2)...(x - x_n) = ... = a_n(x^n \pm ... + (-1)^n x_1x_2...x_n)$
$x^0 : a_0 = a_n(-1)^n \prod x_i$ ■

1. *f ściśle rosnąca $\iff$ $p \geq 0$ ($f(x) = x^3 + px + q$).*

   $\Leftarrow$ Innymi słowy $x > y \implies f(x) > f(y)$
   $x^3 + px + q > y^3 + py + q$
   $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + p) > 0$
   $(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 + p > 0$

   $\implies$ Innymi słowy $p < 0,\ a = -p > 0 \implies (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 < a$
   Bierzemy $y = 0,\ x = \frac{\sqrt{a}}{7}$, czyli f nie jest ściśle rosnąca. ▶

2. *Wzory Cardano. $w(x) = x^3 + 3ax - 2b, a > 0$ T: $w(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty równy $\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 + a^3}}$.*

   Pierwiastek musi być jeden, bo f ściśle rosnąca i w dodatku poprzednie twierdzenia o M. Sprawdzamy: $f(x) = b + \sqrt{b^2 + a^3} + b - \sqrt{b^2 + a^3} + 3a(\sqrt[3]{b + \sqrt{b^2 + a^3}} + \sqrt[3]{b - \sqrt{b^2 + a^3}}) - 2b + R_1 = ... = 0$
   ▶

3. *$a, b \in \mathbb{R}\ \wedge\ f(a) = a^3 - 3a^2 + 5a - 17 = 0\ \wedge\ f(b) = b^3 - 3b^2 + 5b + 11 = 0$ Oblicz $a + b$. Hint! Sprowadź do postaci* (1).

   Przesuwamy funkcje o 1. Wówczas:
   $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 2a - 16 = (a - 1)^3 + 2(a - 1) - 14,\ \wedge x = a - 1$
   $x^3 + 2x - 14 = 0$
   $y^3 + 2y + 14 = 0$

$x^3 + y^3 + 2(x + y) = 0$
$(x + y)(2 + x^2 - xy + y^2) = 0$ Drugie się nie wyzeruje,
$\implies x + y = 0 \implies a + b = 2$ ▶

4. *Wyznacz resztę z dzielenia $f(x) = x^{2018} - 2017x^{1009} + x^2 - 5x + 2018$ przez $x^2 - 1$. Hint! Odradzam dzielenie.*

$f(x) = (x^2 - 1)q(x) + r(x)$
$r(x) = ax + b$ Patrzymy co się zeruje w $f(x)$.
$f(1) = r(1) = a + b \wedge f(-1) = r(-1) = b - a$
$f(1) = 1 - 2017 + 1 - 5 + 2018 = -2 \wedge f(-1) = 1 + 2017 + 1 + 5 + 2018 = 4042$
I rozwiązujemy układ równań... ▶

5. *$w(x)$ ma współczynniki wymierne. T: $(x - \sqrt{2})|w(x) \implies (x^2 - 2)|w(x)$*

$w(\sqrt{2}) = 0$ Rozkład wielomianu: $w(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})... = (x^2 - 2)... \implies$
T $\iff$: $w(-\sqrt{2}) = 0$
$w(\sqrt{2}) = \sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i}2^i + \sqrt{2}\sum a_{2i+1}2^i = 0$
$\implies \sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i}2^i = 0 \wedge \sqrt{2}\sum a_{2i+1}2^i = 0$
$\implies w(-\sqrt{2}) = \sum_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i}2^i - \sqrt{2}\sum a_{2i+1}2^i = 0$ ▶

6. *Niech x_1, x_2, x_3 oznaczają pierwiastki $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$. Obliczyć $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$*

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-6)^2 - 2 \cdot 9 = 18$

$x_1^3 + 6x_1^2 + 9x_1 + 4 = 0$
$x_2^3 + 6x_2^2 + 9x_2 + 4 = 0$
$x_3^3 + 6x_3^2 + 9x_3 + 4 = 0$ Po dodaniu:
$x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 = -6 \cdot 18 - 9(-b) - 3 \cdot 4$ ▶

7. *Wykaż, że $x^3 + ax^2 - b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni.*

$f(0) = -b < 0$ Z ciągłości i twierdzenia o M $f(x)$ przetnie oś $x+$.
Wielomian trzeciego stopnia ma albo 3, albo 1 pierwiastek rzeczywisty (licząc z krotnościami). Zakładając, że są 3:
$\implies x_1x_2x_3 = b > 0 \wedge x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$
$\implies$ Pierwiastków dodatnich jest 1 lub 3, ale gdyby były 3 to sprzeczność z drugim równaniem. ▶

8. *x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami $x^3 + 6x + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są $x_1x_2, x_2x_3.x_1x_3$.*

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ to te nowe pierwiastki $F(x)$.
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 11 = -B$, nie dzielimy przez A, bo bierzemy wielomian unormowany.
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (x_1x_2x_3)^2 = 36 = -D$
$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = (x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = -36 = C$
$\implies F(x) = x^3 - 11x^2 - 36x - 36$ ▶

9.
$$\begin{cases} u + v + w = 2 \\ u^2 + v^2 + w^2 = 14 \\ u^3 + v^3 + w^3 = 20 \end{cases}$$

Szukamy unormowanego wielomianu o pierwiastkach u, v, w.
$F(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + D$
$B = -2$
$C = \frac{2^2 - 14}{2} = -5$

$$\begin{cases} u^2 - 2u^3 - 5u + D = 0 \\ v^2 - 2v^3 - 5v + D = 0 \\ w^2 - 2w^3 - 5w + D = 0 \end{cases}$$

$D = 6$
$\implies F(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \implies x_0 = 1$
$\implies F(x) = (x-1)(x^2 - x - 6) = (x-1)(x+2)(x-3)$
$\implies \{u, v, w\} = \{1, -2, 3\}$ ▶

10. *$f(x) = a_n x^n + ... + a_0 \ \wedge \ |a_i| = 1 \ \wedge \ n$ pierwiastków $\mathbb{R}$; Znaleźć wszystkie takie wielomiany.*

$x_1^2 + ... + x_n^2 = (x_1 + ... + x_n)^2 - 2(x_1 x_2 + ...) = 1 - 2(\pm 1) = \{-1, 3\}$
$\implies x_1^2 + ... + x_n^2 = 3$
$x_1^2 + ... + x_n^2 \geq n \sqrt[n]{x_1^2 ... x_n^2} = n$
$\implies \deg f \leq 3$ (Załóżmy, że f jest unormowany)

STOPNIA 1:
$\{x - 1, x + 2\}$
STOPNIA 2:
$\{x^2 + x - 1, x^2 - x - 1\}$
STOPNIA 3:
Mamy równość w nierówności Cauchy'ego $\implies x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$
$(x \pm 1)(x \pm 1)(x \pm 1)$
$\implies (x+1)^3 =$ NIE
$(x+1)^2(x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$
$(x+1)(x-1)^2 = ...$
$(x-1)^3 =$ NIE ▶

1.6 Pierwiastki wymierne

Niech $w(x)$ ma współczynniki całkowite.

Twierdzenie 13 (I Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych)**.** $(p, q) = 1 \ \wedge \ \frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wymiernym $w(x) \implies p|a_0 \ \wedge \ q|a_n$.

Dowód. $0 = w(\frac{p}{q}) = a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + ... + a_0$
$\implies 0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_0 q^n \implies q | a_n p^n \implies q | a_n$
analogicznie $p | a_0$ ■

1. *Znajdź pierwiastki wymierne* $15x^4 - 19^3 + 16x^2 - x - 3$.

   Kandydaci to $\frac{p}{q}$.
   $p = \{\pm 1, \pm 3\}$
   $q = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$
   $\implies \frac{p}{q} = \{\text{kombinacje}\}$ - możliwe pierwiastki ▶

2. $p, q, r \in \mathbb{Q} \ \wedge \ p + q + r, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}, pqr \in \mathbb{Z}$. *T:* $p, q, r \in \mathbb{Z}$

   Niech $f(x) = (x - p)(x - q)(x - r)$
   $f(x) = x^3 + Bx + Cx + D$, Czy $B, C, D \in \mathbb{Z}$?
   $B \in \mathbb{Z}$ bo $B = -p - q - r$
   $D \in \mathbb{Z}$ bo $D = -pqr$
   $C \in \mathbb{Z}$ bo $C = pq + qr + rp = pqr(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r})$
   $\implies p$ - wymierny pierwiastek $\implies p \in \mathbb{Z}$ ▶

Wniosek 3. Wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest całkowity.

1. *f ma współczynniki całkowite, $f(a) = f(b) = f(c) = 1$ dla $a, b, c \in \mathbb{Z}$ parami różnych. T: f nie ma pierwiastków całkowitych.*

   Niech x będzie pierwiastkiem całkowitym.
   $(a - x)|1$ bo $f(x) = 0$
   $(b - x)|1$
   $(c - x)|1$
   $\implies$ Któreś dwa z a, b, c muszą być równe, więc sprzeczność. ▶

2. *Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych. T: nie ma pierwiastków całkowitych.*

   $f(a); f(a + 1)$ nieparzyste
   $a - x|f(a)$
   $a + 1 - x|f(a + 1)$
   Ale $a - x$ i $a + 1 - x$ są kolejne, więc jedna z nich jest parzysta i dzieli nieparzysty wielomian $\implies$ sprzeczność. ▶

Twierdzenie 14 (II Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych)**.** $(p, q) = 1 \ \wedge\ \frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem $w(x) \ \wedge\ b \in \mathbb{Z}$. T: $w(b) \neq 0 \implies p - bq|w(b)$

Dowód. $w(x) = (x - b)v(x) + w(b)$
$v(x)$ ma współczynniki całkowite (co wynika ze schematu Hornera).
Resztę pozostawiam czytelnikowi :) ■

1. *Dla jakich $a, b \in \mathbb{R}$ liczba 1 jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $3x^4 - 6x^3 + ax^2 + 4x + b$*

   $f(1) = 0 \implies -b = a + 1$
   $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + ax^2 + 6x - (a + 1) = (x - 1)(3x^3 - 3x^2 + (a + 3)x + (a + 1))$
   $0 = g(1) = 2a + 4 \implies a = -2, b = 1$ ▶

1.7 Rozkładalność nad ciałem $\mathbb{Z}$

Definicja 5. $f(x) \in \mathbb{K}[x] \iff$ współczynniki $f(x) \in \mathbb{K}$; $\mathbb{K}$ - ciało $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$

Definicja 6 (Rozkładalność)**.** Mówimy, że $f(x)$ jest rozkładalny nad $\mathbb{K}$

$$\iff \exists_{g(x),h(x)\in\mathbb{K}[x]}\ f(x) = g(x)h(x) \ \wedge\ \deg g, \deg h \geq 1$$

Twierdzenie 15 (Kryterium Eisensteina)**.** $f(x) = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$
Niech p - liczba pierwsza $p \nmid a_n,\ p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0,\ p^2 \nmid a_0$. Wówczas $f(x)$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Dowód. $f(x) = g(x)h(x)$
$g(x) = b_m x^m + ... + b_0 \in \mathbb{Z}[x]$
$h(x) = c_l x^l + ... + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$
$l + m = n,\ l, m \geq 1$

$\implies a_0 = b_0 c_0 \implies p \mid b_0, p \nmid c_0$
$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \implies p \mid b_1$
$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \implies p \mid b_2$
$\vdots$
$a_n \neq a_m = b_m c_0 + b_{m-1} c_1 + ... \implies p \mid b_m$
Ale $a_n = b_m c_1 \implies$ sprzeczność, bo p nie może dzielić a_n ■

Twierdzenie 16. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ jest rozkładalny nad $\mathbb{Z}$ $\iff$ $f(x-a)$ dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$ jest rozkładalny nad $\mathbb{Z}$

Dowód. $\implies$:
$f(x) = g(x)h(x)$ nad $\mathbb{Z}$
$f(x-a) = g(x-a)h(x-a)$
$g(x-a) = b_m(x-a)^m + ... + b_0 \implies \deg g = const.$
Współczynniki też zostaną $\mathbb{Z}$ z dwumianu Newtona.
$\Leftarrow$:
$f(x-a) \rightsquigarrow f(x-a+a) = f(x)$ ■

1. *p - pierwsza; $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ jest nierozkładalne nad $\mathbb{Z}$*

   $f(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$
   $f(x+1) = \frac{(x+1)^p-1}{x} = \frac{x^p+\binom{p}{1}x^{p-1}+...+\binom{p}{p-1}x}{x} = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + ... + \binom{p}{p-1}$
   A z pierwszej klasy wiemy, że $p \mid \binom{p}{p-1}, \binom{p}{p-2}, ..., \binom{p}{1}$
   $a_0 = \binom{p}{p-1} = p \implies p^2 \nmid a_0$
   $\implies$ (z kryterium Eisensteina) $f(x)$ nierozkładalne nad $\mathbb{Z}$ ▶

2. *T: $f(x) = x^{101} + 101x^{100} + 102$ nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$*

   Zauważmy, że 101 jest liczbą pierwszą, więc dobrze byłoby ją wykorzystać jako kryterium do Eisensteina. Nie da się go użyć wprost, więc rozważę wielomian $f(x-1)$, bo nie zmienia to kwestii rozkładalności $f(x)$ nad $\mathbb{Z}$.

   $f(x-1) = (x-1)^{101}+101(x-1)^{100}+102 = x^{101}-\binom{101}{1}x^{100}+...-1+101(x^{100}-\binom{101}{1}x^{99}+...+1)+102$
   oczywiście $101 \mid \binom{101}{1}, ..., \binom{101}{100}$
   $\implies 101 \nmid a_{101}, 101 \mid a_{100}, ..., a_1$
   $a_0 = -1 + 101 + 102 = 202 \implies 101 \mid a_0 \ \wedge \ 101^2 \nmid a_0$
   Stąd, na podstawie kryterium Eisensteina wnioskujemy, że $f(x-1)$, a co za tym idzie $f(x)$ są nierozkładalne w $\mathbb{Z}[x]$ ▶.

3. *Jakie są pierwiastki wielomianu $h(x) = x^p - 1$*

   Z 1 klasy płynie wniosek, że to się rozkłada nad $\mathbb{C}$ na p wielomianów stopnia 1.
   $x^p - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)...(x-\varepsilon_{p-1})$
   $x^{p-1} + ... + 1 = (x-\varepsilon_1)(x-\epsilon_2)...(x-\varepsilon_{p-1})$ ▶

4. *$f(x) = g(x)h(x)$, $f, g, h \in \mathbb{Z}[x]$. p - liczba pierwsza dzieli wszystkie współczynniki $f(x)$. Wówczas p dzieli wszystkie współczynniki $g(x)$ lub $h(x)$*

   $f(x) = a_nx^n + ... + a_0$
   $g(x) = b_mx^m + ... + b_0$
   $h(x) = c_lx^l + ... + c_0$
   $m + l = n, \ m, l \geq 1$

   Zakładamy, że $p \mid b_0, b_1, ..., b_{i-1} \ p \nmid p_i$
   $a_i = c_0b_i + c_1b_{i-1} + ... \implies p \mid c_0$
   $a_{i+1} = c_0b_{i+1} + c_1b_i + c_2b_{i-1} + ... \implies p \mid c_1$
   $a_{i+k} = ... + c_kb_i + ... =$ mniejsze indeksy c $+c_kb_i+$ mniejsze indeksy $b \implies p \mid c_k$
   $\implies p \mid$ wszystkie współczynniki $h(x)$ ▶

1.8 Rozkładalność nad ciałami $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$

Twierdzenie 17 (Lemat Gaussa)**.** $f \in \mathbb{Z}[x]$ jest rozkładalne nad $\mathbb{Q} \implies$ jest rozkładalne nad $\mathbb{Z}$. (w drugą stronę to oczywiście oczywiste)

Dowód. $f \in \mathbb{Z}[x],\ g, h \in \mathbb{Q}[x],\ f = gh$

$ag(x) \in \mathbb{Z}[x],\ bh(x) \in \mathbb{Z}[x]$ - zawsze wykonalne
$f_1(x) = abf(x)$
$g_1(x) = ag(x)$
$h_1(x) = bh(x)$

$f_1(x) = g_1(x)h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$
p - pierwsza taka, że $p \mid ab \implies p \mid$ wszystkie współczynniki $f_1(x) \implies (3)\ p \mid$ wszystkie współczynniki g_1 lub h_1
$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{p} \in \mathbb{Z}[x]$
$g_2(x) = \frac{g_1(x)}{p} \in \mathbb{Z}[z]$
$\implies f_2(x) = \frac{ab}{p}f(x) = g_2(x)h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$
... w skończonej ilości kroków $f(x) = g_k(x)h_l(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ■

Twierdzenie 18 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** $f(x) \in \mathbb{C}[x] \implies f(x)$ ma $\deg f$ pierwiastków

Wniosek 4. $f(x) \in \mathbb{R}[x] \implies f(x)$ ma $\deg f$ pierwiastków zespolonych

1.9 Pierwiastki sprzężone

Twierdzenie 19. $f \in \mathbb{R}[x], z \in \mathbb{C}, f(z) = 0 \implies f(\overline{z}) = 0$

Dowód. $f(x) = a_n x^n + ... + a_0$
$f(z) = 0 = a_n z^n + ... + a_0$ - sprzęgamy równanie stronami
$\overline{f(z)} = \overline{0} = \overline{a_n z^n + ... + a_0}$
$0 = \overline{a_n}(\overline{z})^n + ... + \overline{a_0}$
$\implies 0 = a_n(\overline{z})^n + ... + a_0 = f(\overline{z})$

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)...$
$f(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})... \ \wedge\ z \notin \mathbb{R}$
$(x - z)(x - \overline{z}) \in \mathbb{R}$

$f(x) \in \mathbb{R}[x] \implies f(x) = (x - ..)(x - ..)...(x^2 + ..)(x^2 + ..),\ \Delta < 0$ ■

1. *Dla jakich* $n \in \mathbb{N}$ $x^2 + x + 1$ *dzieli* $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$

   $x^2 + x + 1 = (x - \varepsilon)(x - \overline{\varepsilon})$
   $x^2 + x + 1 = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
   $f(\varepsilon) = 0 \iff f(\overline{\varepsilon}) = 0$ ... dla jakich $n \in \mathbb{N}$ $f(\varepsilon) = 0$?

   1. $n = 3k \implies f(\varepsilon) = 3$
   2. $n = 3k + 1 \implies f(\varepsilon) = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$
   3. $n = 3k + 2 \implies F(\varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 + 1 = 0$

   Wniosek: $3 \nmid n$ jest rozwiązaniem ►

2. *Rozwiąż układ równań w zespo:*

$$\begin{cases} u+v+w=0 \\ u^2+v^2+w^2=0 \\ u^3+v^3+w^3=24 \end{cases}$$

Szukamy unormowanego wielomianu o pierwiastkach u, v, w.
$F(t) = t^3 - 8 = 0$
$t^3 = 8$
$\implies \{u, v, w\} = \{2, 2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2\}$ ▶

3. *Mamy klasycznie nazwane pierwiastki z 1. Obliczyć:* $(\varepsilon_0 + i)(\varepsilon_1 + i)...(\varepsilon_{n-1} + i)$

Pierwiastki z 1 są miejscami zerowymi wielomianu $f(x) = x^n - 1$, zatem
$f(x) = (x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_1)...(x - \varepsilon_{n-1}) = x^n - 1.$
$\implies f(-i) = \prod(-i - \varepsilon_k) = (-1)^n \prod(i + \varepsilon_k) = (-i)^n - 1$
$\implies \prod(i + \varepsilon_k) = \frac{(-i)^n - 1}{(-1)^n} = \big((-i)^n - 1\big)(-1)^n$ ▶

4. $f \in \mathbb{C}[x]$ *Czy* $\exists f(x) = \overline{x} \in \mathbb{C}[x]$ *?*

Załóżmy, że istnieje taki wielomian $f(x) = \overline{x}$. Wtedy dla $x \in \mathbb{R}$ wielomian $g(x) = f(x) - x = 0$ i ma nieskończenie wiele miejsc zerowych. Wobec tego $g(x)$ także w $\mathbb{C}$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych $\implies f(x) = x = \overline{x}$ co daje sprzeczność ▶

5. $f \in \mathbb{R}[x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $xf(x-1) = (x+1)f(x)$ *#szereg formalny*

$f(0) = 0$
$f(1) = 0$ bo $1f(0) = 2f(1)$
$f(2) = 0$ bo $2f(1) = 3f(2)$ ...indukcyjnie
$f(n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\implies$ mamy za dużo pierwiastków $\implies f(x) = 0$ ▶

6. $f \in \mathbb{R}[x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $xf(x-1) = (x-4)f(x+1)$

$0f(0) = -4f(1) \implies f(1) = 0$
$4f(3) = 0 \implies f(3) = 0$
$\implies f(x) = (x-1)(x-3)g(x)$ to wstawiamy do pierwotnego równania wielomianowego
$x(x-2)(x-4)g(x-1) = (x-4)x(x-2)g(x+1)$
$g(x-1) = g(x+1)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\implies ... = g(-1) = g(1) = g(3) = g(5) = ...$
Jeśli mamy taką samą wartość w nieskończenie wielu punktach to $g(x) = a$
$\implies f(x) = a(x-1)(x-3)$
$ax(x-2)(x-4) = (x-4)ax(x-2) \implies a \in \mathbb{R}$ może być dowolne ▶

7. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f = n+1$, $f(k) = \frac{k}{k+1}$, $k = 1, ..., n$; *Ile wynosi* $f(n+1)$ *?*

$(k+1)f(k) = k \implies y(x) = (x+1)f(x) - x$ przy czym $\deg y = n$
Łatwo sprawdzić, że dla każdego k, $y(k) = 0$
$\implies y(x) = (x+1)f(x) - x = a(x-1)(x-2)...(x-n)$
$x = -1 \implies 1 = a(-2)(-3)(-4)...(-1-n) = a(-1)^n(n+1)!$
$\implies a = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ Teraz można już wszystko popodstawiać:

$$f(n+1) = \frac{\frac{(-1)^n}{(n+1)!}n(n-1)...1 + n + 1}{n+2} = \frac{\frac{(-1)^n}{n+1} + n + 1}{n+2} \;\blacktriangleright$$

8. $z_1 + ... + z_5 = x_1^2 + ... + x_5^2 = 0$, $|x_i| = 0$*; T:* $z_1, ..., z_5$ *są pierwiastkami* $z^5 - a = 0$, $a \in \mathbb{C}$

To je pała na Viety:
$(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_5) = z^5 + bz^4 + cz^3 + dz^2 + ez - a$
Trzeba pokazać, że $b, c, d, e = 0$

$-b = \sum z_i = 0$ z założenia
$c = \sum z_i z_j = \frac{(\sum z_k)^2 - \sum z_k^2}{2} = 0$
$-d = \sum x_i x_j x_k = \prod z_l \sum \frac{1}{x_m x_n} = \prod z_l \sum \frac{\overline{z_m z_n}}{|z_m|^2 |z_n|^2} = \frac{1}{|z|^4} \prod z_l \sum \overline{z_m z_n} = 0$
$e = \sum x_i x_j x_k x_l = \prod z_m \sum \frac{1}{z_n} = \frac{1}{|z|^2} \prod z_m \sum \overline{z_n} = 0$

$\implies$ z_i są pierwiastkami wielomianu postaci $z^5 - a = 0$, więc wszystkie są pierwiastkami jednej liczby ▶

Twierdzenie 20 (Szybkie uogólnienie PD)**.** p - liczba pierwsza $\implies$ $f(x) = x^p + px^{p-1} + p + 1$ nierozkładalny nad $Z[x]$

1.10 Sprawdzian próbny i ćwiczonka

1. $2x^3 - 5x^2 - x + 1$ *rozłożyć nad* $\mathbb{Z}$*, nad* $\mathbb{R}$

   $\frac{p}{q} \wedge (p, q) = 1 \implies p \mid 1 \wedge q \mid 2$
   $\implies \frac{p}{q} \in \{1, -1, 1/2, -1/2\}$ Teraz sprawdzamy, co pasuje i pasuje -1/2.
   $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)w(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 6x + 2)$ i to jest rozkład nad $\mathbb{Q}$ ale można przerobić:
   $... = (2x + 1)(x^2 - 3x + 1)$
   Dalej się nie da bo pierwiastki są niecałkowite $\implies$ jest to rozkład nad $\mathbb{Z}$. Ale rozkład nad $\mathbb{R}$:
   $... = (2x + 1)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ ▶

2. *Rozwiązać równanie* $x^4 + x^3 + 3x^2 - 8x + 14 = 0$ *wiedząc, iż* $1 + i$ *jest pierwiastkiem.*

   $(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2$ i dzielenie wielomianu początkowego:
   $x^4 + x^3 + 3x^2 - 8x + 14 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 3x + 7)$
   Stąd kolejne dwa pierwiastki to: $\frac{-3\pm\sqrt{-19}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{19}i}{2}$ ▶

3. *Rozwiąż w* $\mathbb{C}$

   $$\begin{cases} u + v + w = 1 \\ uvw = 1 \\ |u| = |v| = |w| = 1 \end{cases}$$

   $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
   $a = -1, c = -1$
   $uvw\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) = uv + vw + wv = b = uvw(\overline{u + v + w}) = 1$
   $\implies f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
   $\implies \{u, v, w\} = \{1, i, -i\}$ ▶

4. *Dla jakich* $p, q \in \mathbb{R}$ $(x + 3)^2 \mid x^4 + px^2 + q$

   $f(-3) = 0 \implies f(3) = 0$ więc mamy już 3 pierwiastki (liczymy z krotnościami)
   Zatem hipotetyczny piąty pierwiastek $-x_0 \in \{x_0, 3, -3\}$
   1) $-x_0 = x_0 \implies x_0 = 0 \implies q = 0 \implies f(x) = x^4 + px^2 \implies$ 0 jest podwójnym pierwiastkiem, a tak nie może być.
   2) $x_0 = -3 \implies f(x) = (x + 3)^3(x - 3)$ ale też sprzeczność.
   3) $f(x) = (x + 3)^2(x - 3)^2 = x^4 - 18x^2 + 81$ i to jest już to, co się zgadza. ▶

5. *Udowodnij, że liczba zespolona o module 1 jest pierwiastkiem* $x^n + z + 1 \iff n = 3m + 2$

   $\Leftarrow$:
   $n = 3m + 2$ znamy równanie $z^2 + z + 1 = 0$, gdzie pierwiastkami są $\varepsilon, \overline{\varepsilon}$
   $\varepsilon^{3m+2} + \varepsilon + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$

$\Longrightarrow$:
$\exists_{w\in\mathbb{C}}\ |w| = 1:\ w^n + w + 1 = 0$ zatem po sprzężeniu:
$w^{-n} + w^{-1} + 1 = 0$
$1 + w^{n-1} + w^n = 0 \implies w = w^{n-1} \implies w^2 = w^n$ Robimy podmiankę:
$\implies w^2+2+1 = 0 \implies \varepsilon^2 = \varepsilon^n \implies n \equiv 2 \mod 3$ (bo pierwotność pierwiastka musi się zgadzać)
▶

6. $f(x) = a_n x^n + ... + a_0$ *natomiast* $g(x) = a_n + ... + a_0 x^n$*;* $x_i \neq 0 \implies g\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$

   $x_i^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x_i} + ... + a_0\left(\frac{1}{x_i}\right)^n\right) = a_n x_i^n + ... + a_0 = f(x_i) = 0 \implies g\left(\frac{1}{x_i}\right) = 0$ ▶
   Natomiast jeśli $x_i = 0 \implies a_0 = 0 \implies \deg g(x) \leq n-1$

7. $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ *parami różne;* $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n) - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ *T: f nierozkładalny nad* $\mathbb{Z}$

   Załóżmy, że $f(x) = h(x)g(x),\ h, g \in \mathbb{Z}[x]$
   $h(a_i)g(a_i) = f(a_i) = -1 \implies h(a_i) + g(a_i) = 0$, bo rozkład -1 jest tak a nie inny, a te wielomiany muszą być całkowite.
   Zatem wielomian $w(x) = h(x) + g(x)$ ma co najmniej n pierwiastków. Ale $\deg w_x \leq n-1 \implies w(x) = 0 \implies f(x) = -g(x)g(x) \implies 1x^n + ... = -1x^n + ...$ zatem mamy sprzeczność, a wielomian $f(x)$ jest nierozkładalny. ▶

8. $a, b \in \mathbb{C} \ \wedge\ a, b \neq 0$*;* $az^3 + bz^2 + \overline{b}z + \overline{a} = 0$ *T: ten wielomian ma pierwiastki o module 1*
   Hint! $f(z) = 0 \implies f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = 0$

   Sprawdzamy hinta i najwyraźniej działa :) (przemnożyć $\overline{z}^3$, sprzęgnąć i podziwiać)
   $\implies$ mamy pierwiastki $z, \frac{1}{\overline{z}}, w$; zatem $\frac{1}{\overline{w}} \in \{w, z, \frac{1}{\overline{z}}\}$
   1) $\implies |w| = 1$
   2) $\implies z = w \implies zz\frac{1}{\overline{z}} = -\frac{\overline{a}}{a} \implies |a| = 1$
   3) $\implies$ z Viety $|z| = 1$ ▶

Rozdział 2

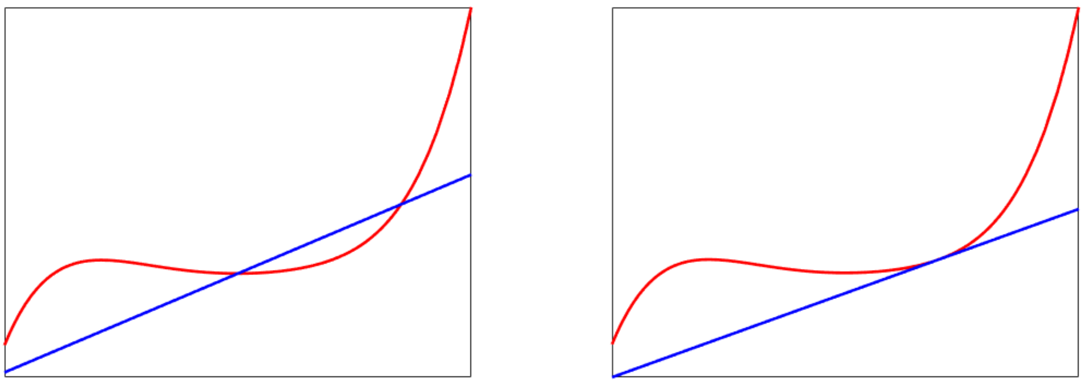
Pochodne (na szybko dla fizyków)

2.1 Iloraz różnicowy

$$y \to x \implies \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \to f'(x)$$

$f'(x) > 0$ - funkcja rośnie ($\tan\alpha > 0$)
$f'(x) < 0$ - funkcja maleje ($\tan\alpha < 0$)

$\implies$ Geometrycznie, iloraz różnicowy to tangens siecznej stworzonej z punktów $(x, f(x))$ oraz $(y, f(y))$. W granicy otrzymamy prostą styczną $\implies f'(x) = \tan\alpha$



2.2 Równanie stycznej

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2.2.1 Przybliżenie wielomianowe funkcji różniczkowalnej

Im bliżej x_0 jesteśmy, tym lepsze przybliżenie.

$$h \approx 0 \implies f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

I to jest jeden z sensów ich istnienia - przybliżamy funkcje za pomocą wielomianów! Im więcej pochodnych mamy tym lepsze przybliżenie ...Wolfram tak robi :)

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

2.3 Własności pochodnych

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

2.4 Pochodne elementarne

Przetransformujmy iloraz różnicowy:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x)$$

Aby nie kaleczyć mej duszy...

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1. $\boldsymbol{f(x) = c \qquad f'(x) = 0}$
2. $\boldsymbol{f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}}$

   $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h-x)(...)}{h} = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... + x^{n-1} \implies nx^{n-1}$ ▶
3. $\boldsymbol{f(x) = \sum a_i x^i \qquad f'(x) = \sum i a_i x^{i-1}}$
4. $\boldsymbol{f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x}$

   $\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h}$... oraz z rachunku pól $\sin t < t < \tan t$
   $t \approx 0 \implies \frac{\sin t}{t} \approx 1$
   $\implies ... \implies \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \implies \cos x$ ▶
5. $\boldsymbol{f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x}$

   $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \implies \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x$ ▶
6. $\boldsymbol{f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}$

   $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' =$ podstawianie do wzokrów wyżej $= \frac{1}{\cos^2 x}$ ▶

2.4.1 $f(x) = |x|$

$$x_0 > 0 \implies \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} \approx 1$$

Styczną jest prosta $y = x$

$$x_0 < 0 \implies \frac{|x_0 + h| - |x_0|}{h} \approx -1$$

Znów styczną jest prosta z wykresu funkcji!

$$x_0 = 0 \implies \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$\implies$ pochodna nieokreślona $\implies$ pochodna w $(0, 0)$ nie istnieje!

2.5 Pochodne wyższych rzędów

2.5.1 Wyższe pochodne wielomianów

$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$
$(x^n)''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
$(x^n)^{(n-1)} = n!x$
$(x^n)^{(n)} = n!$
Aplikując do wielomianu...

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

$f(0) = a_0$
$f'(0) = a_1$
$f''(0) = 2a_2$ itd.

$$f^{(n-k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(n-i)!}{(k-i)!} a_{n-i} x^{k-i}$$

Twierdzenie 21. Dowieść, że wielomian przedstawia się w postaci:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Dowód. Wystarczy sprawdzić czy dla pewnego argumentu, w każdej pochodnej, aż do n-tej lewa strona zgadza się z prawą. Generalnie to dobrze policzyć takie coś:

$$y = x - a,\ \frac{d}{dx}y(x)^n = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}y^n\frac{d}{dx}(x-c) = n(x-c)^{n-1}$$

$f(c) = f(c)$
$f'(c) = 0 + f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(c-c) + ... = f'(c)$
$f''(c) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(c-c) + ... = f''(c)$ i tak dalej...
$f^{(n-1)}(c) = f^{(n-1)}(c) + \frac{f^{(n)}(c)}{1!}(c-c)$
$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$ ∎

Twierdzenie 22. f, g są wielomianami, $\deg f = \deg g,\ f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0),\ k = 0, \ldots, n \implies f = g$

Dowód. Przez poprawność. ∎

Twierdzenie 23. f, g są wielomianami, $\deg f = \deg g,\ f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c),\ k = 0, \ldots, n \implies f = g$

Dowód. Przez poprawność i indukcję od $k = n$ do 0. ∎

Twierdzenie 24. c jest pierwiastkiem k-krotnym $\iff f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)} \neq 0$

1. *T:* $(x-1)^3 \mid (n-1)x^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x - (n-1)$

   $f(1) = 0$
   $f'(x) = (n-1)(n+1)x^n - (n+1)nx^{n-1} + (n+1) \mid_{x=1} = 0$
   $f''(x) = (n+1)n(n-1)n^{n-1} - (n+1)n(n-1)x^{n-2} \mid_{x=1} = 0$ ▶

2. $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ *nie ma pierwiastków wielokrotnych.*

   $f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
   $f^{(k)}(x) = 1 + ... + \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$
   Jeśli byłby jakiś pierwiastek wielokrotny to trzeba znaleźć jakieś c z twierdzenia 2.3.
   $f(c) = f'(c) = 0 \implies c = 0$ i mamy sprzeczność bo $f(0) = 1$ ▶

Rozdział 3

Wielomiany extended edition

3.1 Wielomiany zwrotne

Definicja 7. Wielomian nazywamy zwrotnym jeśli $a_n = a_0,\ a_{n-1} = a_1, \dots,\ a_{n-i} = a_i$

Twierdzenie 25. Jeśli $2 \nmid \deg f$ wielomianu zwrotnego $\implies$ -1 jest jego pierwiastkiem oraz $\frac{f(x)}{x+1}$ jest wielomianem zwrotnym.

Dowód. Niech $\deg f = 2n+1$. Wówczas:
$f(-1) = a_{2n+1}(-1)^{2n+1} + a_{2n}(-1)^{2n} + ... + a_{2n}(-1)^1 + a_{2n+1}(-1)^0 = 0$, gdyż parzyste potęgi zjedzą się z nieparzystymi przy tych samych współczynnikach.
Teraz użyję czegoś, co myślałem, że nigdy nie użyję - schematu Hornera :)
$f(x) = (x+1)g(x)$
Ze schematu $b_i = a_{i+1} - b_{i+1}$
$\implies b_{2n} = a_{2n+1}$
$\implies b_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1}$
$\implies b_i = \sum(-1)^{k+1}a_{i+k}$
I teraz porównujemy wszystkie te indeksy, które mają być równe.
$b_{2n} = b_0 \iff a_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_{2n+1}$ i widać, że te wyrazy, które się mają skasować, skasują się.
$b_{2n-1} = b_1 \iff a_{2n} - a_{2n+1} = a_2 - a_3 + ... - a_{2n+1}$ i znów... analogicznie pokazujemy równość pozostałych współczynników $\implies g(x)$ jest zwrotny. ■

Wniosek 5. Jeśli $\deg f = 2n$ to dzielimy go przez x^n i podstawiamy $t = x + \frac{1}{x}$. Wówczas znajdziemy jego pierwiastki :)

1. $\frac{x^5+3x^3+3x^2+1}{x+1} = x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 1$

   Robimy magię z Wniosku 5:
   $\implies x^2 - x + 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \implies t^2 - t + 2 \implies t_1, t_2$
   $\implies t_1 = x + \frac{1}{x} \ \wedge\ t_2 = x + \frac{1}{x}$
   a z tego dostajemy już 4 pierwiastki ▶

2. $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2$ jest zwrotny i szukamy pierwiastków.

   $\implies \frac{2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2}{x+1} = 2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2$
   $\implies 2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$
   $\implies 2t^2 + 3t - 20 \implies t_1 = -4,\ t_2 = 2.5$
   $x + \frac{1}{x} = -4 \implies x^2 + 1 + 4x = 0 \implies x_1 = -2 - \sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3} - 2$
   $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \implies x^2 + 1 - \frac{5}{2}x = 0 \implies x_1 = 2,\ x_2 = 0.5$
   $\implies \{2, \frac{1}{2}, -2 \pm \sqrt{3}, -1\}$ ▶

Twierdzenie 26. a jest pierwiastkiem wielomianu zwrotnego $\implies \frac{1}{a}$ jest także pierwiastkiem.

Dowód. Dowód był przemycony w którymś zadaniu z Wielomianów 1. ■

Twierdzenie 27. f – zwrotny $\iff \forall_{x\neq 0}\ x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

Dowód. $a_n x^n + ... + a_0 = x^n\left(a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + ... + a_0\right) = a_n + a_{n-1}x + ... + a_0 x^n$
$\implies$ kolejne współczynniki są równe tak jak w definicji wielomianu zwrotnego. ■

3.2 Wielomiany symetryczne

Definicja 8 (Wielomian wielu zmiennych)**.**

$$f(x,y) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_{m,n} x^m y^n$$

Definicja 9 (Wielomian symetryczny)**.**

$$f(x,y) = f(y,x)$$

f jest symetryczny jeśli jest równy dla dowolnej permutacji zmiennych.

Na przykład $f(x,y,z) = x + y + z^3$ ale $f(z,y,x) = z + y + x^3 \implies f$ nie jest symetryczny.

3.2.1 Wielomiany symetryczne podstawowe

Definicja 10.

$$\sum x_i = s_1$$

$$\sum x_i x_j = s_2...$$

$$\prod x_i = s_n$$

Twierdzenie 28. Każdy wielomian symetryczny można uzyskać z wielomianów symetrycznych podstawowych poprzez operacje elementarne.

1. *Wyrazić wielomiany poprzez wielomiany symetryczne podstawowe:*
   - $x^3 + y^3 + z^3$
     Robimy wielomian, którego pierwiastkami są x, y, z.
     $f(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - s_1 t^2 + s_2 t - s_3 \ \wedge\ f(x) = f(y) = f(z) = 0$
     $f(x) = x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3$
     $f(y) = y^3 - s_1 y^2 + s_2 y - s_3$
     $f(z) = z^3 - s_1 z^2 + s_2 z - s_3$
     $\implies x^3 + y^3 + z^3 = s_1(x^2+y^2+z^2) - s_2 s_1 + 3s_3 = s_1(s_1^2 - 2s_2) - s_1 s_2 + 3s_3$ ▶
   - $x^5+y^5 = (x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4) = R_1\big((R_1^2-2R_2)^2 - 2R_2^2 + 2R_2^2 - R_2(R_1^2-2R_2)\big)$ ▶
2. $x + y + z = 0 \implies x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \ \wedge\ 2(x^4+y^4+z^4) = (x^2+y^2+z^2)^2$

   Z poprzedniego mamy wzór na to z wielomianami podstawowymi, gdzie $s_1 = 0 \implies x^3+y^3+z^3 = 3s_2 = 3xyz$

Teraz można pomnożyć $tf(t)$ i zsumować $\implies x^4+y^4+z^4 = s_3(x+y+z) - s_2(x^2+y^2+z^2) = -s_2(s_1^2-2s_2) = 2s_2^2$
Ale $s_2^2 = (xy+yz+zx)^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$
$\implies x^4+y^4+z^4 = \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2}$ ▶

3. $x^4+y^4+z^4$ *wyrazić poprzez wielomiany symetryczne podstawowe.*

$s_1 = x+y+z, \quad s_2 = xy+yz+zx, \quad s_3 = xyz$
Możemy stworzyć funkcję $f(t) = t(t-x)(t-y)(t-z) \implies$
$x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x = 0$
$y^4 - s_1y^3 + s_2y^2 - s_3y = 0$
$z^4 - s_1z^3 + s_2z^2 - s_3z = 0$

Sumujemy stronami i otrzymujemy:
$x^4+y^4+z^4 = s_3(x+y+z) - s_2(x^2+y^2+z^2) + s_1(x^3+y^3+z^3) = s_3s_1 - s_2(s_1^2-2s_2) + s_1(x^3+y^3+z^3)$

Ostatni niezmieniony wyraz możemy zrobić analogicznie poprzez sumowanie trzech wielomianów, ale na szczęście już na lekcji to policzyliśmy.

$\implies x^4+y^4+z^4 = s_3s_1 - s_2(s_1^2-2s_2) + s_1[s_1(s_1^2-2s_2) - s_1s_2 + 3s_3]$
Może nawet da się to jakoś ładniej zapisać, ale po co się w to bawić... ▶

3.3 Nierówności wielomianowe i układy równań wielomianowych

1. *Znaleźć znak $f(x)$ w zależności od x*

   - $f(x) = (x+1)(x-2)(x-5)$
   - $f(x) = (x+2)(x^2-2)(x^2+2)(x^2-4) = (x+2)^2(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$

2. *Rozwiąż nierówności*

   - $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 > 0$
     $f(x) = (x-1)(\text{ujemna } \Delta)$
     $\implies x > 1$
   - $(x^2-1)(x^4-1)(x^3+1) \geq 0$
     $f(x) = (x^2-1)^2(x^2+1)(x^3+1)$
     $\implies x \in \langle -1, \infty \rangle$
   - $x^4 + x^2 \geq 2x$
     $x(x-1)(x^3+x+2) \geq 0$
     $\implies x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$
   - $(x^2-9)^2 \geq (x+3)^2(2x^2-7x+3)$
     $x = -3 \implies ' =' $
     $x \neq -3 \implies (x-3)^2 - (3x^2-7x+3) \geq 0$
     $-x^2 + x + 6 \geq 0$
     $\implies x \in \langle -2, 3\rangle \cup \{-3\}$

3. *Wykaż, że $\forall x \in \mathbb{R}$ zachodzi*

   - $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9 > 0$
     $(x^2-x)^2 + (x-3)^2 \geq 0 \implies > 0$
   - $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \geq 0$
     $(x^2-x)^2 + (x-1)^2 \geq 0$

4. *Rozwiąż układ*

$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases}$$

Mnożymy stronami i mamy nową zmienną $t = xy$.
$\implies 18t = 144 \implies t = 8$

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 32 \\ \frac{y^3}{x} = 2 \end{cases} \implies (x, y) = (4, 2), (-4, -2) \blacktriangleright$$

5. $\begin{cases} x^2 = 3x + 4y \\ y^2 = 4x + 3y \end{cases}$

$x^2 - y^2 = -x + y$
1. $x = y = \{7, 0\}$
2. $x + y = -1 \implies$ sprzeczność $\blacktriangleright$

Rozdział 4

Funkcje wymierne

Definicja 11. Funkcję wymierną definiujemy jako

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

gdzie $g(x)$ i $h(x)$ są funkcjami wielomianowymi.

Wniosek 6. Dziedzina funkcji wymiernej to

$$D(f) = D(g) \setminus X, \quad X = \{x : h(x) = 0\}$$

4.1 Rozkład na ułamki proste

Definicja 12. Dzielenie funkcji wymiernych definiuje się następująco

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

$$\deg r < \deg g$$

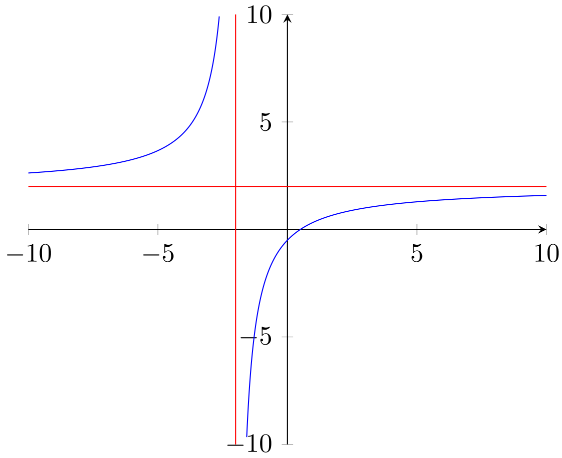
Twierdzenie 29. Resztę możemy rozłożyć na ułamki proste:

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{r(x)}{(x-Q_1)^{n_1}(x-Q_2)^{n_2}...(x^2+...)^{m_1}...} =$$

$$= \frac{A_1^1}{(x-Q_1)^1} + ... + \frac{A_{n_1}^1}{(x-Q_1)^{n_1}} + f(A_{n_k}^k, Q_k) + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+...)^1} + ... + f(B_{m_k}^k, C_{m_k}^k) + ...$$

Wniosek 7. Pojawiające się stałe znajdujemy z układów równań, wynikających z porównania współczynników przy potęgach uzyskanego wielomianu.

4.2 Funkcje homograficzne



Rysunek 4.1: $y(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$ z asymptotami dla $x = -2$ i $y = 2$.

Definicja 13. Funkcją homograficzną jest funkcja postaci

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \ \wedge \ ad - bc \neq 0$$

czyli taka funkcyjka z ilorazu wielomianów stopnia 1.

Wniosek 8. Na macierzach ten warunek wygląda tak. Nwm, może przedstawienie w takiej formie przyda się do metody Cramera?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Twierdzenie 30. Każda funkcja homograficzna jest taką śmieszną funkcją hiperboliczną.

Dowód.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{-\det(A)}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = A + \frac{B}{x+C}$$

Widać, że jeśli wyznacznik wynosi 0, to jest funkcja stała. ∎

Twierdzenie 31. Asymptoty pionowe i poziome, wynikające z poprzedniego twierdzenia.

$$x = \frac{-d}{c} = -C$$

$$y = \frac{a}{c} = A$$

4.2.1 Pochodna homografii

Wniosek 9.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{\det(A)}{(cx+d)^2}$$

Homografia jest rosnąca na przedziałach dla $\det(A) > 0$ i malejąca dla $\det(A) < 0$.

4.3 Jakaś pała

4.3.1 Układy wielomianów symetrycznych

1. $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$

   Klasycznie przedstawiamy przez wielomiany symetryczne podstawowe.
   $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-b=7 \end{cases}$
   $\implies a=(3,-4) \implies b=(2,9)$ i już stąd układziki równań symetrycznych podstawowych to prosta sprawa. ►

2. $\begin{cases} (x^2+x+1)(y^2+y+1)=3 \\ (1-x)(1-y)=6 \end{cases}$

   $\begin{cases} b^2+ab+a^2-b+a=2 \\ b-a=5 \end{cases}$
   A stąd już zwykły układ z równaniem kwadratowym, a później układ z symetrycznymi podstawowymi. ►

3. $\begin{cases} (x^2+y^2)(x-y)=13 \\ xy(x-y)=6 \end{cases}$

   To nie jest symetryczne, ale jesteśmy sprytni ludzie $\implies z=-y$.
   $\begin{cases} (x^2+z^2)(x+z)=13 \\ xz(x+z)=-6 \end{cases}$
   $\begin{cases} (a^2-2b)a=13 \\ ab=-6 \end{cases}$ ►

4.3.2 Jakiś moduł

1. *Rozwiązać w rzeczywistych* $|x^4-4|-x^2-2=|x^4-x^2-6|$

   Najpierw przypatrzmy się temu co pod modułami.
   $x^4-4=(x^2+2)(x^2-2) \implies$ pierwiastki rzeczywiste $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$
   $x^4-x^2-6=(x^2+2)(x^2-3) \implies$ pierwiastki rzeczywiste $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$
   Zatem mamy 5 przedziałów do zbadania.

   $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$
   $\implies x^4-x^2-6=x^4-x^2-6$
   Mamy tożsamość $\implies$ rozwiązaniem jest $x<-\sqrt{3}$

   $x\in\langle-\sqrt{3},-\sqrt{2})$
   $\implies x^4-6-x^2=6+x^2-x^4$
   $\implies x^4-x^2-6=0$
   Mamy jedno rozwiązanie pasujące do przedziału $\implies x=-\sqrt{3}$

   $x\in\langle-\sqrt{2},\sqrt{2})$
   $\implies 2-x^4-x^2=6+x^2-x^4$
   $\implies x^2=-4$ i nie mamy pierwiastków rzeczywistych.

   $x\in\langle\sqrt{2},\sqrt{3})$
   $\implies x^4-6-x^2=6+x^2-x^4$
   $\implies x^4-x^2-6=0$
   Jedno rozwiązanie na danym przedziale $\implies x=\sqrt{3}$

   $x\in\langle\sqrt{3},\infty)$
   Tak jak na pierwszym przedziale, tyle że teraz rozwiązaniem jest przedział $x\geq\sqrt{3}$

   Finalnie rozwiązaniami rzeczywistymi są $x\leq-\sqrt{3}$ oraz $x\geq\sqrt{3}$ ►

2. *Rozwiązać w rzeczywistych* $|x^4 - 3x^2 - 4| = |x^4 - 1| - 3|x^2 + 1|$

   $x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2)$
   $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
   oraz $x^2 + 1$ zawsze jest dodatnie!

   $x \in (-\infty, -2)$
   $x^4 - 3x^2 - 4 = x^4 - 1 - 3x^2 - 3$
   Tożsamość $\implies x < -2$

   $x \in \langle -2, -1)$
   $4 + 3x^2 - x^4 = x^4 - 1 - 3x^2 - 3$
   W tym przedziale jest jeden pierwiastek $\implies x = -2$

   $x \in \langle -1, 1)$
   $4 + 3x^2 - x^4 = 1 - x^4 - 3x^2 - 3$
   $\implies x^2 = -\frac{4}{3}$
   Brak rozwiązań rzeczywistych.

   $x \in \langle 1, 2)$
   Analogicznie do tego, co już było mamy brak pierwiastków na przedziale.

   $x \in \langle 2, \infty)$
   Analogicznie... mamy tożsamość $\implies x \geq 2$

   Podsumowując, rozwiązaniami tego nieprzyjemnego równania są $x \leq -2$ oraz $x \geq 2$ ▶

4.3.3 Funkcja wymierna

1. *Znaleźć parametr p taki, że dla $f(x) = \frac{px}{x^2+p^2+1}$, $f_{max} = \frac{1}{4}$.*

   Można to jakoś pochodnymi pałować, ale bez nich też się da!
   $\frac{px}{x^2+p^2+1} \leq \frac{1}{4} \implies$ nierówność kwadratowa
   $x^2 - 4px + p^2 + 1 \geq 0$
   Jeśli taka funkcja jest zawsze dodatnia to $\Delta < 0$, natomiast szukane maksimum jest dla $\Delta = 0$.
   $\implies \Delta = 16p^2 - 4(p^2 + 1) = 12p^2 - 4 = 0$
   $\implies p = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ▶

   A dla pochodnych to znajdujemy ekstremum dla $x = \pm\sqrt{p^2 + 1}$ i dalej to oczywiste $f(\pm\sqrt{p^2 + 1}) = \frac{1}{4}$.

4.3.4 Wymierności

1. $a, b, \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. *Pokaż, że* $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

   $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \in \mathbb{Q}$
   $\implies \sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$
   $\implies 2\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ ▶

2. $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab} \in \mathbb{Q} \;\wedge\; a, b > 0 \;\wedge\; a, b \in \mathbb{Q}$. *Pokaż, że* $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

   $(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1) = (a - 1)(b - 1)$
   $\implies (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1) \in \mathbb{Q}$
   $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1) = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$
   $\implies \sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ ▶

3. *W każdym przedziale (a, b) znajduje się liczba wymierna.*

   $\iff$ Istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $b - a > \frac{1}{n}$

Definicja podłogi: $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

$\lfloor na \rfloor \le na < \lfloor na \rfloor + 1 \quad / : n$
$\implies T_{\iff} : a < \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} < b$
$b > a + \frac{1}{n} > \frac{\lfloor na \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$
$\implies$ Pasuje nam $\frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}$, bo jest wymierna i w przedziale ►

4. *Udowodnić, że w każdym przedziale znajduje się liczba niewymierna. Hint!* $q \in \mathbb{Q}, r \notin \mathbb{Q} \implies q + r \notin \mathbb{Q}$

Rozdział 5

Ciągi

Definicja 14 (Ciąg).

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$$

$$f(n) \text{ oznaczamy } (a_n)_{n\geq 1}^{n}$$

Definicja 15 (Ciąg skończony).

$$f : \{k, k+1, ..., k+r\} \mapsto \mathbb{C}$$

1. *Znajdź wzór ($a_m = f(m)$) ciągu 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,...*

   Niech $n \in \mathbb{N}$. Ilość występowania kolejnych n wzrasta jak kolejne liczby naturalne. Liczba n pojawia się więc w ciągu po raz pierwszy na pozycji $m = \frac{n(n-1)}{2} + 1$.

   $$\implies f\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) = n$$

   Niech $m(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1$. Otrzymujemy równanie na n: $n^2 - n + 2(1 - m) = 0$

   $$n = \frac{1 + \sqrt{8m - 7}}{2}$$

   $$\implies f(m(n)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8m - 7}$$

   dla m wyliczonych w zależności od kolejnych n. Jednakże, aż do pojawienia się następnego n, dla kolejnych naturalnych argumentów m otrzymujemy te same wartości. W związku z tym, dziedzinę funkcji rozszerzymy do $\mathbb{N}$ biorąc podłogę (jako, że f jest rosnąca). Finalnie:

   $$f(m) = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8m - 7} \right\rfloor$$

5.1 Ciąg arytmetyczny

Definicja 16 (Ciąg arytmetyczny (C.A.)).

$$(a_n) : \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_{n+1} - a_n = r$$

Twierdzenie 32. Zauważając, że $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + r\big(1 + 2 + 3 + ... + (n-1)\big) = n\left(a_1 + \frac{r(n-1)}{2}\right) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Twierdzenie 33. Ciąg $(a_n)_1^\infty$ jest ciągiem arytmetycznym $\iff a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\ \forall n \geq 1$

Dowód. $\implies$:
Wychodzi z tego prostego przekształcenia definicji.
$\impliedby$:
To jest średnia arytmetyczna, zatem trafimy w środek - a_n. Zatem, między trzema wyrazami mamy taki sam odstęp r. ■

Twierdzenie 34. $(a_n)_1^\infty$ jest C.A. $\iff \forall n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

Dowód. $\implies$:

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_na_{n-1}} = \frac{r}{a_na_{n-1}}$$

$$\implies r\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1}a_n}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - ... + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{r(n-1)}{a_1a_n}$$

Gdy $r = 0$, to mamy ciąg stały i wtedy po lewej stronie mamy $\frac{n-1}{a_1^2}$, co jest tożsame z prawą stroną.

$\impliedby$:
Niech $r = a_2 - a_1$
Dla $n = 3$:

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} = \frac{2}{a_1a_3}$$

$$\frac{a_3 + a_1}{a_1a_2a_3} = \frac{2}{a_1a_3} \implies a_1 + a_3 = 2a_2 \implies \text{ciąg poszedł dalej.}$$

Teraz można indukcyjnie to pociągnąć.
Zakładamy, że ciąg jest arytmetyczny do $n-$tego miejsca. Pokażemy, że dla $n+1$ też jest.

$$\frac{a_2...a_{n+1} + a_1a_3...a_{n+1} + ...}{a_1...a_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n-1}}$$

■

Twierdzenie 35. (a_n) jest C.A. i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \geq \sqrt[n]{\prod a_i} \geq \sqrt{a_1a_n}$$

Dowód. Zapiszmy zwykłe nierówności między średnimi:

$$\sqrt[n]{\prod a_i} \leq \frac{1}{n}\sum a_i = \frac{1}{n}\frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Podobnie nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną, ale taką podniesioną do kwadratu:

$$\sqrt[n]{\left(\prod a_i\right)^2} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1}a_n} + \frac{1}{a_1a_n}} = \frac{n}{\frac{n-1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_1a_n}} = a_1a_n$$

$$\implies \sqrt[n]{\prod a_i} \geq \sqrt{a_1a_n}$$

■

1. *Mamy C.A.* (a_n). *Czy* $(b_n): \ b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ *jest C.A.?*

   $b_n = (a_n + r)^2 - a_n^2 = 2a_nr + r^2$
   $b_{n-1} = 2a_{n-1}r + r^2$
   $b_n - b_{n-1} = 2r^2$ ▶

2. *(a_n) jest C.A. Czy $c_n = a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+k}$ jest C.A.?*

   $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + ... + a_{n+1+k} - (a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+k}) = a_{n+1+k} - a_n = (k+1)r$ ▶

3. *Znaleźć C.A., którego suma pierwszych n wyrazów wynosi n^2 (dla każdego n).*

   $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2$
   $S_{n+1} = (n+1)^2$
   $\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ ▶

4. *(a_n) C.A. $\forall a_n \in \mathbb{N}$. Pewien wyraz tego ciągu jest kwadratem. Udowodnić, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest kwadratami.*

   $a_n = k^2 = a_1 + (n-1)r$
   $a_{n+m} = a_1 + (n+m-1)r = k^2 + mr$

5. *Czy istnieje C.A., którego pewne 3 wyrazy wynoszą $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$?*

6. *Pierwiastki równania $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ tworzą C.A. dla pewnego a. Znajdź ten ciąg.*

5.2 Ciąg geometryczny

Definicja 17 (Ciąg geometryczny (C.G.)).

$$(a_n): \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; a_{n+1} = a_n q$$
$$\implies a_n = a_1 q^{n-1}$$

1. *$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ C.G.* $\iff a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ *dla* $n > 1$

   $\implies$: $a_{n-1}a_{n+1} = a_1^2 q^{n-2} q^n = a_1^2 q^{2(n-1)} = a_n^2$
   $\Leftarrow$: $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1} \implies \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
   Równość ta jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zatem cały ciąg jest ciągiem geometrycznym. ▶

2. *Czy 10,11,12 mogą być elementami ciągu geometrycznego?*

   $\frac{11}{10} = q^n \wedge \frac{12}{11} = q^m, \; n, m \in \mathbb{N}$
   $\left(\frac{11}{10}\right)^m = \left(\frac{12}{11}\right)^n$
   $11^{n+m} = 10^m 12^n \implies$ mamy sprzeczność z rozkładem ▶

3. $a_{n+m} = \alpha, \; a_{n-m} = \beta, \; n > m$. *Znaleźć* a_n, a_m

   $a_{n+m} = a_1 q^{n+m-1}, \; a_{n-m} = a_1 q^{n-m-1}$
   $a_{n+m} a_{n-m} = a_1^2 q^{2(n-1)} = a_n^2$
   $\implies a_n = \sqrt{\alpha\beta}\, \mathrm{sgn}(a_1)\, \mathrm{sgn}(q)^{n-1}$
   $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{q^{n+m-1}}{q^{n-m-1}} = q^{2m}$

4. *Zapropronuj wzór na n-ty wyraz ciągu*

   (a) $1, 2, 3$: $a_n = n$
   (b) $-1, 2, -3$: $a_n = n(-1)^n$
   (c) $1, 4, 27$: $a_n = n^n$
   (d) $2, 3, 5, 7, 11$: $a_n = p_n$
   (e) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$: $a_n = 3^{3-n}$

5. *Wyznacz najmniejszy wyraz ciągu* (a_n)

   (a) $a_n = n^2 - 5n + 1$

   Weźmy funkcję rzeczywistą $f(x) = x^2 - 5x + 1$. Wartość minimalną otrzymujemy z pierwszej pochodnej:
   $0 = 2x - 5 \implies x = 2.5$
   W związku z tym minimum mamy dla $n = 2$ i $n = 3$.
   $\implies a_2 = a_3 = -5$ ▶

   (b) $a_n = \sqrt[3]{n^4 - 2n^2 + 91}$

   $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 91}$
   $\frac{df}{dx} = \frac{2x-2}{3(x^2-2x+91)^{2/3}} = 0$
   $x = 1 \implies n = 1$ (bo -1 nie jest naturalne)
   $\implies a_1 = \sqrt[3]{90}$ ▶

6. *Udowodnij, że ciąg* $a_n = \frac{n^3+4n^2+n-1}{n^4+n^3+2n^2-2n-1}$ *jest ograniczony od góry.*

   $a_1 = 5$ i istnieje podejrzenie, że to największy wyraz (funkcja zdaje się być malejąca na przedziale liczb naturalnych). Zatem sprawdzimy czy $a_n \leq 5$
   $n^3 + 4n^2 + n - 1 \leq 5n^4 + 5n^3 + 10n^2 - 10n - 5$
   $5n^4 + 4n^3 + 6n^2 - 11n - 4 \geq 0$ co jest prawdą dla $n \geq 1$ ▶

Twierdzenie 36 (Sumy z wyrazami ciągów)**.** Niech $(a_n)_1^n$ będzie ciągiem geometrycznym.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{kn} = \sum_{k=1}^{n} k a_k = a_1 \left(\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2} \right)$$

Dowód.

$$\sum a_k = \sum a_1 q^{k-1} = a_1(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\sum k a_k = \sum k a_1 q^{k-1} = a_1(1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1}) = a_1 \frac{d}{dq}\Big(q + q^2 + q^3 + ... + q^n\Big) =$$

$$= a_1 \frac{d}{dq}\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1\right) = a_1 \frac{d}{dq}\left(\frac{q^{n+1} - q}{q - 1}\right) = a_1\left(\frac{((n+1)q^n - 1)(q-1) - (q^{n+1} - q)}{(q-1)^2}\right) =$$

$$= a_1\left(\frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}\right)$$

■

1. *Oblicz sumę* $\sum_{k=0}^{2019} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor$

   Obliczę ogólniejszą sumę $\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor$. Wyjdźmy od tego, że $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$. Część ułamkową policzymy łatwo z teorii liczb: $2 \equiv -1 \mod 3$

$$2^k \equiv \begin{cases} 1, & 2 \mid k \\ -1, & 2 \nmid k \end{cases} \mod 3 \implies \left\{ \frac{2^k}{3} \right\} = \begin{cases} 1/3, & 2 \mid k \\ 2/3, & 2 \nmid k \end{cases}$$

   $\implies \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} 2^k - \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{3} - \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\Big(2^{n+1} - 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\Big)$

   Teraz łatwo można policzyć dla $n = 2019$:
   $\sum_{k=0}^{2019} \left\lfloor \frac{2^k}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3}\big(2^{2020} - 2 - 1009 - 2020\big) = \frac{1}{3}\big(2^{2020} - 3031\big)$ ▶

5.3 Ciągi rosnące, malejące

Twierdzenie 37. Nierówność Bernouliego

$$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x, \quad \alpha \geq 1$$

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x, \quad 0<\alpha \leq 1$$

dla $x>-1$
Równość zachodzi dla $x=0$ lub $n=1$.

1. $\sqrt[n]{n+1}$ *jest malejący.*

   Chcemy pokazać, że dla $n>1$ zachodzi $\sqrt[n]{n+1} < \sqrt[n-1]{n}$
   $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} < n$
   $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} > \frac{1}{n}$
   $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-1} \geq 1-\frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)n}$
   co jest spełnione z Bernouliego dla $n>1$.

2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *jest rosnący.*

   Pokazujemy, że $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
   $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$
   $\frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n$
   $1-\frac{1}{1+n} < \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$
   Z Bernouliego mamy:
   $\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2+2n+1} > 1-\frac{1}{n+2}$
   $1>0$ ▶

   Można też prościej jeśli akceptujemy Bernouliego dla nienaturalnych.

5.4 Tożsamość Abela

Twierdzenie 38 (Sumowanie przez części)**.** Niech $(x_n)_{n\geq 1}$ i $(y_n)_{n\geq 1}$ będą ciągami liczbowymi i $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$. Wówczas prawdziwa jest tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(y_k - y_{k+1}) + s_n y_n$$

Dowód. Przeprowadzę dowód indukcyjny.

$$\sum_{k=1}^{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(y_k - y_{k+1}) + s_n y_n + x_{n+1}y_{n+1} - s_n y_{n+1} + s_n y_{n+1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} s_k(y_k - y_{k+1}) + y_{n+1}(s_n + x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} s_k(y_k - y_{k+1}) + s_{n+1}y_{n+1}$$

■

1. *Wyprowadź wzór na* $\sum_{k=1}^n k$

$$\sum_1^n k = \sum_1^n 1\cdot k = \sum_1^{n-1} s_k(-1) + s_n n = -\sum_1^{n-1} k + n^2 = -\sum_1^n k + n(n+1) \implies \sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$ ▶

2. *Wzór na* $\sum k(k+1)$

$$\sum k(k+1) = \sum^{n-1} \frac{k(k+1)}{2}(-1) + \frac{n(n+1)}{2}(n+1) = -\sum^{n} \frac{k(k+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\implies \sum k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \ \blacktriangleright$$

3. *Wzór na* $\sum k^2$

$$\sum k^2 = -\sum^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} + n\frac{n(n+1)}{2} \implies 2\sum k^2 = n^2(n+1) - \sum^{n-1} k(k+1) =$$

$$= n^2(n+1) - \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \implies \sum k^2 = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \ \blacktriangleright$$

4. *Wzór na* $\sum kq^k$

$$\begin{aligned}\sum kq^k = 1 + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n &= \frac{\big(q + 2q^2 + \cdots + nq^n\big)(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - nq^{n-1}}{1-q} \\ &= \frac{q\Big(\frac{1-q^n}{1-q}\Big) - nq^{n+1}}{1-q} = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2} \ \blacktriangleright\end{aligned}$$

Rozdział 6

Ciągi rekurencyjne

1. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$; *Znajdź* a_n.

   $a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$
   Teza: $a_n = \frac{1}{n}$
   Wtedy indukcyjnie powinno wychodzić: $a_{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$ ▶

2. $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n^2 + 1}$

   Teza: $a_n = \sqrt{2^n - 1}$
   $a_{n+1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$ ▶

3.

   $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$ *dla* $n \geq 3$. *Pokaż, że:*

   $$f_{n+1}(x) = x^n + \binom{n-1}{1}x^{n-2} + \binom{n-2}{2}x^{n-4} + ... = \sum_{k=0} \binom{n-k}{k}x^{n-2k}$$

   Pokażemy to indukcyjnie:
   Sprawdzając dla $n = 1, 2, 3$ przekonujemy się, że to działa. Załóżmy więc, że teza jest prawdziwa dla każdego $k \in \mathbb{N},\ k > 3$. Pokażemy, że jest prawdziwa dla $k + 1$.

   Z definicji ciągu mamy: $f_{k+1}(x) = xf_k(x) + f_{k-1}(x)$

   $$\sum \binom{k-l}{l}x^{k-2l} = x\sum \binom{k-1-l}{l}x^{k-1-2l} + \sum \binom{k-2-l}{l}x^{k-2-2l} =$$
   $$= \sum \binom{k-1-l}{l}x^{k-2l} + \sum \binom{k-2-l}{l}x^{k-2(l+1)} =$$
   $$= x^k + \sum_{l=1} \left[\binom{k-1-l}{l} + \binom{k-1-l}{l-1}\right]x^{k-2l}$$

   Przekształćmy te symbole Newtona:

   $$\binom{k}{q} + \binom{k}{q-1} = \frac{(k+1)!(k-q+1) + (k+1)!q}{q!(k-q+1)!(k+1)} = \binom{k+1}{q}\left(\frac{k-q+1}{k+1} + \frac{q}{k+1}\right) = \binom{k+1}{q}$$

   $$\Longrightarrow f_{k+1}(x) = x^k + \sum_{l=1} \binom{k-l}{l}x^{k-2l} = \sum_{l=0} \binom{k-l}{l}x^{k-2l}$$

   co kończy dowód indukcyjny. ▶

6.1 Ciąg Fibonacciego

Definicja 18.

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. *Mamy pasek $1 \times n$. Na ile sposobów pokryć paskami $1 \times 1, 1 \times 2$?*

   $a_1 = 1$
   $a_2 = 2$
   $a_3 = 3$
   Teza: $a_n = F_{n+1}$
   Mamy dwa rozłączne przypadki, kładzenia prostokącika lub kwadracika. Dlatego to się ładnie sumuje. ▶

2. *Udowodnić, że $F_n = F_m F_{n-m+1} + F_{m+1} F_{n-m}$ dla $n > m$.*

   Dalej mamy prostokąt $1 \times n - 1$. Trzeba gdzieś w nim postawić kreskę. Mamy wtedy dwie opcje rozłączne. Prostokącik przykrywa kreskę lub nie.
   Kreska będzie stała w miejscu $m - 1$. Wtedy po prawej stronie prostokąta jest $n - m$ miejsc. Gdy prostokącik nie przykrywa kreski mamy lewą stronę równości. Gdy przykrywa to mamy po lewej stronie prostokąta $m - 2$ miejsc do rozdziału z Fibonacciego, a po prawej $n - m - 1$. Stąd prawa strona równości. ▶

3. *Udowodnić, że $F_{n+1} = \sum_{k=0} \binom{n-k}{k}$*

   Kolejne wyrazy możemy traktować jako wartości wielomianów z dowodu wyżej (6.0, ex.3) dla argumentu $x = 1$
   $\implies f_1(1) = 1, \ f_2(1) = 1, \ f_{n+1} = f_n(1) + f_{n-1}(1)$ co jest rekurencyjną definicją ciągu Fibonacciego!
   $\implies F_{n+1} = f_{n+1}(1) = \sum_{k=0} \binom{n-k}{k}$ ▶

4. *F_n, F_{n+1} są względnie pierwsze.*

   $d \mid F_n, F_{n+1} \implies d \mid F_{n-1} \implies ... \implies d \mid F_1 = 1$ ▶

Twierdzenie 39.

$$NWD(F_n, F_m) = F_{NWD(n,m)}$$

Dowód. Zakładamy, że $n > m$.
Teza$_1$: $NWD(F_n, F_m) = NWD(F_{n-m}, F_m) = NWD(F_n, F_{n-m}) = NWD(F_n, F_m, F_{n-m})$
$NWD(F_n, F_m) \mid F_{n-m}$
Z zadania 2 wynika, że $NWD(F_n, F_m) \mid F_{m-1} F_{n-m}$ ale F_m, F_{m-1} są względnie pierwsze.

$NWD(F_{n-m}, F_m) \mid F_n$ analogicznie
$NWD(F_n, F_{n-m}) \mid F_m$ także
$\implies = NWD(F_n, F_m, F_{n-m})$

Teraz wystarczy przeprowadzić przez to Euklidesa, bo możemy do woli odejmować m:
Pierwsza linijka Euklidesa: $NWD(F_n, F_m) = NWD(F_{n-m}, F_m) = ... = NWD(F_m, F_{r_1}) =$
Kolejne linijki: $= NWD(F_{m-r_1}, F_{r_1}) = NWD(F_{r_1}, F_{r_2}) = ... = NWD(F_{r_k}, F_d) = NWD(F_{2d}, F_d) = NWD(F_d, F_d) = F_d$ ■

1. $a^2 - ab - b^2 = \pm 1;\ a, b \in \mathbb{N}$. *Pokazać, że* $a = F_{n+1}, b = F_n$.

   Działa dla F_1, F_2: $F_2^2 - F_1F_2 - F_1^2 = -1$
   $F_3^2 - F_2F_3 - F_2^2 = 1$ ...
   Hipoteza jest taka, że to ± 1 idzie tak na przemian.

   Udowodnijmy, że $a \geq b$.
   $a(a-b) = b^2 \pm 1 \geq 0 \implies a \geq b$

   Jakie równanie spełniają $a - b, b$?
   $\implies b^2 - b(a-b) - (a-b)^2 = b^2 + ab - a^2 = -(a^2 - ab - b^2)$ zatem to się zamienia ± 1.
   $(a \geq b) \longmapsto (b \geq a - b) \longmapsto (a - b \geq b - (a - b))$ do momentu, gdy pasują nam naturalne. Jest to moment, gdy nierówności zamieniają się na równości.

   $a = b \implies -a^2 = \pm 1 \implies a = b = 1$
   Zatem algorytmem to schodzi do dwóch jedynek. Zatem a, b są względnie pierwsze. A na postawie tego algorytmu widzimy, że to też kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. ►

6.2 Mnożenie macierzy

Definicja 19. Macierze możemy przez siebie mnożyć jeżeli są wymiarów $n \times m$, $m \times p$. Wówczas wynikiem jest macierz $n \times p$ (n wierszy, p kolumn).

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

W ciągu Fibonacciego mamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

Gdy mamy macierz kwadratową to można ją potęgować. Szczególnie ładne są jednostkowe macierze diagonalne.

$$\boldsymbol{A^0} = \boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AI_n} = \boldsymbol{I_nA} = \boldsymbol{A}$$

I w związku z tym jesteśmy w stanie napisać takie coś:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierze diagonalne ładnie się potęgują, więc ten syf z Fibonacciego trzeba zdiagonalizować!

6.3 Diagonalizacja macierzy

Potęgowanie macierzy diagonalnej

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^n \end{bmatrix}$$

Wartości własne i wektory własne

Definicja 20. Wartości własne λ i odpowiadające im wektory własne $\boldsymbol{w}$ (których jest nieskończenie wiele dla danego λ) definiujemy z równości macierzowej:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{w}$$

przy czym wektory własne $\boldsymbol{w}$ nie mogą być zerowe. Wektory własne są odporne na obroty i odbicia z przekształcenia macierzą $\boldsymbol{A}$.

Wartości i przykładowe wektory własne możemy znaleźć rozwiązując powyższe równanie w następujący sposób:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}\lambda)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

Interesują nas rozwiązania dla $\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}\lambda) = 0$, gdyż dla innego wyznacznika istnieje macierz odwrotna $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}\lambda)^{-1}$, skąd otrzymalibyśmy $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$. Zatem:

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}\lambda) = \boldsymbol{0}$$

skąd otrzymujemy wielomian stopnia równego stopniowi macierzy $\boldsymbol{A}$. Następnie szukamy pierwiastków wielomianu, czyli wartości własnych macierzy. Jeśli nie są wielokrotne to mamy farta - można zrobić diagonalizację. Jeśli będą wielokrotne, to poza szczególnymi przypadkami nie da się jej przeprowadzić. Mając wyznaczone wartości własne, wracamy do wyjściowego równania i dostajemy układ równań na wektory własne dla każdego λ.

Twierdzenie 40. Diagonalizacja macierzy $\boldsymbol{A}$ to przedstawienie jej w postaci iloczynu:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}$$

gdzie $\boldsymbol{W}$ jest macierzą, w której kolumnach są wektory własne dla kolejnych wartości własnych, natomiast $\boldsymbol{\Lambda}$ jest macierzą diagonalną z wartości własnych.

Dowód. Pokażemy, że $\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}$ dla zdefiniowanych wyżej macierzy, bo wówczas jest spełniona także powyższa równość.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{w_2} & \dots & \boldsymbol{w_n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w_1} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{w_2} & \dots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{w_n}\end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix}\lambda_1\boldsymbol{w_1} & \lambda_2\boldsymbol{w_2} & \dots & \lambda_n\boldsymbol{w_n}\end{bmatrix} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}$$

■

Diagonalizacja ma extra własności. Łatwo można podnosić $\boldsymbol{A}$ do rzeczywistych potęg, a także robić $\exp(\boldsymbol{A})$, a to się może przydać do równań różniczkowych, gdzie trzeba uzmienniać stałe.

Definicja 21 (Funkcje na macierzach diagonalnych)**.** Funkcje możemy sobie definiować na macierzach diagonalnych jako:

$$f(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} f(a_{11}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(a_{22}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(a_{nn}) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 41.

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}$$
$$\exp(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{W}\exp(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}$$

przy czym n może być nawet nienaturalne.

Dowód. (Dla $n \in \mathbb{N}$)

$$\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}})(\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}})...(\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{I}...\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{I}\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{W}^{-\mathbf{1}}$$

■

6.3.1 Diagonalizacja macierzy na F_n

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chcemy zdiagonalizować $\boldsymbol{A}$ zgodnie z opisanym schematem, bo może dostaniemy coś fajnego.

$$\det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\implies \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \ \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Teraz liczymy wektory własne z definicji:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\lambda_1)w_x + w_y \\ w_x - \lambda_1 w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies w_x = \lambda_1 w_y$$

Bierzemy sobie najprostsze wektory własne.

$$w_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Trzeba jeszcze znaleźć macierz odwrotną do $\boldsymbol{W}$. Można to zrobić lepiej lub gorzej, ja to zrobię gorzej - z definicji, bo inaczej nie umiem :)

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{-1}} = \boldsymbol{I}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a + \lambda_2 c & \lambda_1 b + \lambda_2 d \\ a + c & b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu prostego układu równań dostajemy:

$$\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Teraz można wszystko ze sobą posklejać:

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 \\ \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{bmatrix}$$

Finalnie, po wielu cierpieniach otrzymujemy wzór ogólny na $n-$ty wyraz ciągu Fibonacciego!

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

6.4 Sprowadzenie rekurencji do prostych problemów

1. $a_1,\ a_{n+1} = pa_n + q$

   Chcemy sprowadzić do czegoś, co potrafimy rozwiązać.
   $b_n = a_n - a_{n-1},\ n \geq 2$
   $b_{n+1} = pb_n$ - geometryczny
   $b_{n+1} = p^{n-1}b_2$

   $a_n = b_{n+1} + a_n = b_{n+1} + b_n + a_{n-1} = ... = b_{n+1} + b_n + ... + b_2 + a_1 = b_2\big(p^{n-2} + p^{n-3} + ... + 1\big) + a_1 = b_2\frac{p^{n-1}-1}{p-1} + a_1 = (a_2 - a_1)\frac{p^{n-1}-1}{p-1} + a_1 = a_1p^{n-1} + q\frac{p^{n-1}-1}{p-1}$

   $$\boxed{a_{n+1} = a_1p^n + q\frac{p^n-1}{p-1}\ \blacktriangleright}$$

2. $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ S_n = 4a_n - 3n + 2$. *Znaleźć* a_n.

   $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n - 3$
   $a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n + 1$
   $\implies\ a_{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n a_1 + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3}}\ \blacktriangleright$

3. $a_1 = 1,\ a_n > 0,\ a_n a_{n+1}^2 = 36$

   $a_1 = 1,\ a_2 = 6,\ a_3 = 6^{1/2}$
   Rozważmy więc taką rekurencję: $a_n = 6^{b_n}$
   $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = \frac{1}{2}$
   $b_n + 2b_{n+1} = 2$
   $\implies\ (b_{n+1} - r) = -\frac{1}{2}(b_n - r)$ czy da się znaleźć takie r?
   $2b_{n+1} + b_n = 2r + r = 3r = 2\ \implies\ r = \frac{2}{3}$
   $\left(b_{n+1} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{2}{3}\right)$
   $b_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(b_{n-1} - \frac{2}{3}\right) = ... = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$

   $\implies\ a_{n+1} = 6^{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}\ \blacktriangleright$

6.5 Zmienne współczynniki rekurencji liniowej

1. $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

   Wprowadzamy ciąg $b_n = \frac{a_n}{n!}$
   $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!}$
   Niech $a_1 = 1$
   $b_{n+1} = \sum \frac{1}{(n+1-k)!}\ \blacktriangleright$

2. $na_{n+1} = (n+2)a_n + n$

   $\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n+2}\quad / : (n+1)$
   $b_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$
   $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)} = b_{n-1} + \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}\ \blacktriangleright$

6.5.1 Generalna metoda

$$a_{n+1} = f(n)a_n + g(n)$$

Szukamy takiego $h(n)$, że

$$f(n) = \frac{h(n)}{h(n+1)}$$

$$h(n+1)a_{n+1} = h(n)a_n + g(n)h(n+1)$$

$$b_{n+1} = b_n + H(n)$$

1. $x_1 > 0, \; x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n^2 + \frac{1}{4}$. *Dla jakich* x_1 *ciąg jest a) rosnący, b) malejący?*

   (a) Z definicji wynika $\forall_{n\in\mathbb{N}} \; x_n > 0$
   $3x_n^2 - 4x_n + 1 > 0$
   $(3x_n - 1)(x_n - 1) > 0$
   $\implies x_n \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

   $x_1 > 1 \implies x_2 > x_1 > 1 \implies ... \implies x_n > x_{n-1} > ... > x_2 > x_1 > 1$
   $x_1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \implies x_2 > x_1 > 0$ ►

   (b) $\implies x_n \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$
   Rozwiązanie w pracy domowej. ►

6.6 Równanie charakterystyczne

Wszystko to, co jest poniżej wynika z diagonalizacji macierzy reprezentującej równanie rekurencyjne. Równanie charakterystyczne tworzymy w następujący sposób:

$$a_n \longrightarrow x^n$$

Robiąc diagonalizację dojdziemy do wniosku, że rozwiązaniami jawnymi liniowych równań rekurencyjnych są równania poniższych postaci.

Twierdzenie 42. Dla niepowtarzających się wartości własnych, tj. $x_1 \neq x_2 \neq ... \neq x_n$

$$a_n = \sum A_i x_i^n$$

Dla wielokrotnych wartości własnych, np. dla x_k powtarzającego się m razy:

$$a_n = \sum_{i\neq k} A_i x_i^n + \sum_{i=0}^{m-1} B_i n^i x_k^n$$

1. *Znajdź wzór ogólny* (a_n) *dla* $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \; a_0 = 1, a_1 = 2$

   Równanie charakterystyczne: $x^2 = 3x - 2 \implies x_1 = 1, \; x_2 = 2$
   Pierwiastki różne:
   $a_n = Ax_1^n + Bx_2^n$
   $a_0 = A + B$
   $a_1 = Ax_1 + Bx_2$ ►

2. $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, \; a_0 = 1, a_1 = 4$

   $x^2 = 2x - 2 \implies x_1 = 1 - i, \; x_2 = 1 + i$
   $a_n = A(1-i)^n + B(1+i)^n$

   $1 = A + B$
   $4 = A(1-i) + B(1+i)$

$$\implies a_n = \frac{1-3i}{2}(1+i)^n + \frac{1+3i}{2}(1-i)^n$$

$$a_n = 2^{n/2}\frac{1-3i}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 2^{n/2}\frac{1+3i}{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$
$$a_n = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4} + 3\cdot 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

To się cyklicznie powtarza co $\Delta n = 8$ ▶

3. $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 6$

   $x^2 = 4x - 4 \implies x = 2$
   Mamy pierwiastek podwójny, skąd mamy przepis (z diagonalizacji macierzy):
   $a_n = Ax^n + Bnx^n$

   $1 = A$
   $6 = 2A + 2B \implies B = 2$
   $$\implies a_n = 2^n + 2^{n+1}n = 2^n(1+2n)$$ ▶

4. $a_{n+3} + a_{n+2} = 8a_{n+1} + 12a_n$

   $x^3 + x^2 = 8x + 12 \implies x_1 = 3,\ x_2 = -2,\ x_3 = -2$
   $\implies a_n = A3^n + B(-2)^n + Cn(-2)^n$

   $a_0 = A + B$
   $a_1 = 3A - 2B - 2C$
   $a_2 = 9A + 4B + 8C$ ▶

6.7 Układy rekurencji

1. $u_1 = 3,\ v_1 = 3$
   $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$
   $\implies v_n = \frac{u_{n+1} - 3u_n}{2} \implies v_{n+1} = \frac{u_{n+2} - 3u_{n+1}}{2}$ i pała
   Można też potęgować macierze:
   $$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$$
   Tak czy inaczej dochodzimy do rekurencji tylko jednego ciągu: $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n,\ u_1 = 3,\ u_2 = 11$
   $x^2 = 4x - 1 \implies x = 2 \pm \sqrt{3}$
   $\implies u_n = Ax_1^n + Bx_2^n$ ▶

2. *Wyrazić a_n, b_n przez a_1, b_1*
   $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$
   $\implies b_n = 2a_{n+1} - a_n$
   $8a_{n+2} - 4a_{n+1} = a_n + 6a_{n+1} - 3a_n$
   $4a_{n+2} - 5a_{n+1} + a_n = 0 \implies 4x^2 - 5x + 1 = 0 \implies x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{4}$
   $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$
   Stąd już izi pała. ▶

3. *Udowodnij, że $2^{n-1} \mid \binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 25\binom{n}{5} + ...$*

   Chcemy stworzyć rekurencję dla: $a_n = \sum 5^k\binom{n}{2k+1} = Ax_1^n + Bx_2^n$. Bez żadnego związku z niczym:
   $$(1+\sqrt{5})^n = \sum\binom{n}{k}5^{k/2},\ (1-\sqrt{5})^n = \sum\binom{n}{k}(-1)^k 5^{k/2}$$
   Będzie tak, że $a_n = A(1+\sqrt{5})^n + B(1-\sqrt{5})^n$
   $a_0 = 0,\ a_1 = 1$
   $$\implies a_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n - \frac{1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n$$

$\Longrightarrow$ równanie charakterystyczne: $x^2 = 2x + 4$

$$\Longrightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} + 4a_n$$

I mamy oczywistą indukcję, która nam daje podzielność. ▶

4. $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ *Udowodnij, że* $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

Twierdzenie 43 (Przypomniane Twierdzenie Wilsona)**.**

$$p! \equiv -1 \mod (p+1)$$

dla każdego p pierwszego.

Rozdział 7

Kresy

Definicja 22. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry liczbą $M \iff \forall a \in A \ a \leq M$

Definicja 23. Najmniejsze ograniczenie górne zbioru A nazywamy jego kresem górnym i nazywamy $\sup A$
Jeśli nie ma ograniczenia z góry to $\sup A = +\infty$

Definicja 24. Największe ograniczenie dolne zbioru A nazywamy jego kresem dolnym i nazywamy $\inf A$
Jeśli nie ma ograniczenia z dołu to $\inf A = -\infty$

Definicja 25. Największy element zbioru A jeśli istnieje oznaczamy $\max A$, a najmniejszy $\min A$

$$\sup \mathbb{R} = +\infty, \ \inf \mathbb{R} = -\infty$$
$$\inf \mathbb{N} = 1 = \min \mathbb{N}$$
$$\sup\{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\} = 0$$
$$\max\{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\} = \text{nie ma}$$

Twierdzenie 44. $A \subset \mathbb{R}$. $\sup A \in A \iff$ w A istnieje element maksymalny.

Dowód. $\implies$:
$\max A$ - element należy do A i jest ograniczeniem zbioru. Zatem z definicji, $\sup A = \max A$.
$\Leftarrow$:
Chcemy pokazać, że $\max A$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym.
DO DOMU ■

7.1 Zabawy z ε

Twierdzenie 45. Ograniczenie górne c niepustego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest jego kresem górnym $\iff$ $\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{a \in A} \ a > c - \varepsilon$

Analogiczne twierdzenie dla infimum.

Dowód. $\Longrightarrow$:
$c = \sup A \implies c - \varepsilon < \sup A$. Jeśli nie istnieje $a \in A$ pomiędzy $c - \varepsilon$, $\sup A$ to $c - \varepsilon$ jest ograniczeniem górnym. Sprzeczność, bo $\sup A$ jest najmniejszym ograniczeniem górnym.
$\implies \exists_a \ c - \varepsilon < a \leq \sup A$
$\Leftarrow$:
Chcemy pokazać, że c jest najmniejszym ograniczeniem górnym. Załóżmy, że istnieje mniejsze ograniczenie górne $b < c$.
Przyjmujemy $\varepsilon = c - b > 0 \implies \exists_a \ a > b$. Znaleźliśmy element większy od b, zatem mamy sprzeczność. ■

1. *Znajdź kresy zbioru:* $\left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

   $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0, \ \sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$
   Praca domowa pisemna!

2. *Znajdź kresy zbioru:* $\left\{x^2 - 4x + 8 : \ x \in [-5, 5]\right\}$

   $\inf = f(2), \ \sup = 13$

3. *Znajdź kresy zbioru:* $\left\{\frac{x-1}{x+1} : \ x > -1\right\}$

   $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$
   $\sup\left\{\frac{1}{x+1}\right\} = +\infty$, chcemy pokazać, że $\forall_{M>0}\exists_{a'} \ a' > M$
   $\frac{1}{x+1} > M \iff x < \frac{1}{M} - 1$. Weźmiemy $x = \frac{1}{M+1} - 1$ i wychodzi już nierówność
   $\implies \sup A' = +\infty$

   $\inf A' = 0$
   Szukamy $\frac{1}{x+1} < \varepsilon \implies x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$
   Weźmy $x = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ i wychodzi, że $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$

   Zatem wracając do wyjściowego zbioru dostajemy $\sup A = 1, \ \inf A = -\infty$

4. *Kresy* $B = \left\{\frac{n-k}{n+k} : \ n, k \in \mathbb{N}\right\}$

   $\frac{n-k}{n+k} = 1 - \frac{2k}{n+k}, \ \frac{n-k}{n+k} = -1 + \frac{2n}{n+k}$
   $\forall_{b \in B} \implies -1 < b < 1$
   Chcemy pokazać, że $\sup B = 1, \ \inf B = -1$
   Bierzemy sobie $n = 1$ i $k \implies +\infty, \ \frac{2n}{n+k} = \frac{2}{1+k}$; tego infimum to 0 $\implies \inf B = -1$

   $k = 1, n \implies +\infty$ i analogicznie wychodzi.

5. *Kresy* $C = \{q^n : \ n \in \mathbb{N}\}$

   Dla $q \geq 1$ $\inf C = q, \ \sup C = +\infty$
   Bierzemy dowolne $M > 0$ i pokazujemy, że dowolny element zbioru je przeskoczy.
   $\forall_{M>0}\exists_{n\in\mathbb{N}} \ q^n > M$ co pokażemy z Bernouliego.
   $q^n = (1 + q - 1)^n \geq 1 + n(q - 1) > M$?
   $q > 1 \implies n > \frac{M-1}{q-1}$, więc weźmy sobie $n = \left\lfloor \frac{M-1}{q-1} \right\rfloor + 2$

6. *Kresy* $D = \{A \sin x + B \cos x : \ x \in \mathbb{R}\}$

   Z nierówności Schwarza: $|A||\sin x| + |B||\cos x| \leq \sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$
   Równość zachodzi dla $(|A|, |B|) = \lambda(|\sin x|, |\cos x|)$
   $|\sin x| = \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \ |\cos x| = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
   Chcemy znaleźć $x \in \mathbb{R}$
   $A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2}$ oraz takie x:
   $A \sin x + B \cos x = -\sqrt{A^2 + B^2}$

$x: \ \sin x = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \ \cos x = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ dla maksimum i z minusami dla minimum.
Zatem są to też suprema.

7. *Kresy* $E = \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} : \ x, y \in (0,1), \ x + y = 1 \right\}$

   Podstawmy warunek: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3}{(1+x)(2-x)}, \ x \in (0,1)$
   Szacowanie od dołu ze średniej harmonicznej da nam: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{4}{3} \implies \inf E = \min E = \frac{4}{3}$
   Supremum natomiast jest dla minimum paraboli w mianowniku (pierwiastki -1,2).

8. *Kresy* $F = \left\{ \frac{1-x}{1+x} + \frac{1-y}{1+y} : \ x, y \in (0,1), \ x + y = 1 \right\}$

   $= \frac{1-x}{1+x} + \frac{x}{2-x} = -2 + 2\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}\right)$ i mamy to samo co w E.

9. *Kresy* $G = \left\{ \frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : \ n, m \in \mathbb{N} \right\}$

   Z indukcji widać, że $n^2 < 2^n$. Jeśli $n + m > 4$ to $\frac{(n+m)^2}{2^{nm}}$

Twierdzenie 46.

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Dowód. $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$
$b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$
$\implies a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$
Dodatkowo $\sup A + \sup B$ jest ograniczeniem górnym, zatem: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

■

Rozdział 8

Granice

„Mamy jeszcze 5 minut. . . to zdefiniuję granicę.
Historyczny moment! W końcu jakaś analiza!"

Definicja 26 (Granica ciągu)**.** Liczba g jest granicą ciągu (a_n):

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}|a_n - g| < \varepsilon \iff g = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

Definicja 27 (Granica nieskończona)**.** $+\infty$ jest granicą (a_n):

$$\forall_{M>0}\exists_{n_M}\forall_{n>n_M}\ a_n > M \iff +\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$$

8.1 Zabawy z ε, granice elementarne

Twierdzenie 47 (Granica ciągu geometrycznego)**.**

$$\begin{aligned} q \in (-1,1) &\implies \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \\ q = 1 &\implies \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\ q > 1 &\implies \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \\ q < -1 &\implies \lim_{n\to\infty} q^n \text{ nie istnieje} \end{aligned}$$

Dowód.

1. $|q| < 1$: Niech $M = \frac{1}{|q|} - 1$

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+M)^n} \overset{\text{Bern.}}{\leq} \frac{1}{1+nM} < \frac{1}{nM} < \varepsilon$$

W związku z tym możemy wziąć następujące n_ε:

$$n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon M} \right\rfloor + 1$$

2. $q = 1$: $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ q^n = 1 \implies q^n \to 1$

3. $q > 1$: Niech $N = q - 1$

$$q^n = (1+N)^n \overset{\text{Bern.}}{\geq} 1 + nN > nN > M$$

Zatem wystarczy wziąć następujące n_M:

$$n_M = \left\lfloor \frac{M}{N} \right\rfloor + 1$$

4. $q < -1$: Wystarczy pokazać, że pewne podciągi osiągają różne granice.
   Dla $n \mod 2 = 0$ – $q^n = |q|^n \to +\infty$.
   Dla $n \mod 2 = 1$ – $q^n = -|q|^n \to -\infty$.

■

Twierdzenie 48. $a_n \to a$, $b_n \to b$. Wówczas:

$$a_n + b_n \to a + b$$
$$\lambda a_n \to \lambda a$$
$$|a_n| \to |a|$$
$$a_n b_n \to ab$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}^{(*)}$$

$*$ jeśli $b_n \neq 0$, $b \neq 0$

Dowód. a, b - skończone
T: $a_n \to a,\ b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to a + b$
$\varepsilon > 0$ - chcemy pokazać, że $\exists_{n_\varepsilon}$ takie, że $\forall_{n > n_\varepsilon}$
$\big|a_n + b_n - (a - b)\big| < \varepsilon$
$\big|(a_n - a) + (b_n - b)\big| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
Bierzemy $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\}$
$\frac{\varepsilon}{2} > 0$ zatem $\exists_{n_1}$ takie, że $\forall_{n > n_1}$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
Analogicznie $\forall_{n > n_2}$ $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ ▶

T: $a_n b_n \to ab$
$|a_n b_n - ab| = \big|(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)\big| \leq |a_n - a||b_n - b| + |a||b_n - b| + |b||a_n - a|$ Tutaj dobieramy n_1, n_2, n_3, n_4
Wtedy $n_\varepsilon = \max\{n_i\}$ ■

Twierdzenie 49. a_n - ograniczony, $b_n \to 0$. Wówczas $a_n b_n \to 0$

Dowód. $\varepsilon > 0$
Szukamy n_ε takiego, że $\forall_{n > n_\varepsilon}$ $|a_n b_n - 0| < \varepsilon$
$|a_n||b_n| < \varepsilon$ ■

1. $\lim \frac{(3n+1)^2}{n^2 - 5n + 7}$

$$\lim \frac{(3n+1)^2}{n^2 - 5n + 7} = \lim \frac{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2}{1 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{9}{1} = 9 \ ▶$$

2. $\lim \frac{n+1}{n^2 + 1}$

$$\lim \frac{n+1}{n^2+1} = \lim \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 0 \cdot \frac{1}{1} = 0 \ ▶$$

3. $\lim \frac{5^n - 4^n}{5^n + 4^n}$

$$\lim \frac{5^n - 4^n}{5^n + 4^n} = \lim \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n} = 1 \ ▶$$

Wniosek 10. $a_n \leq b_n \implies a \leq b$
Natomiast dla ostrej nierówności dalej mamy $\leq$ w granicy.

Twierdzenie 50. $a_n \to g,\ a_n \geq 0\ (g \geq 0)$ Niech $k \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$a_n^{1/k} \to g^{1/k}$$

Jeśli $a_n \to +\infty,\ a_n \geq 0$ to

$$a_n^{1/k} \to +\infty$$

Dowód. $M > 0$
Szukamy n_M takie, że $\forall_{n>n_M}\ a_n^{\frac{1}{k}} > M$
$a_n > M^k$, ale $\lim a_n = +\infty$ zatem istnieje n_1 takie, że$\forall_{n>n_1}\ a_n > M^k$ ▶

$a_n \to g$ - skończone $a_n, g \geq 0$
$\varepsilon > 0\ \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{g}\right| < \varepsilon$
$\left|(g + a_n - g)^{1/k} - g^{1/k}\right| = g^{1/k}\left|\left(1 + \frac{a_n - g}{g}\right)^{1/k} - 1\right| \leq g^{1/k}\left|\frac{1}{kg}(a_n - g)\right| = \frac{g^{1/k}}{kg}|a_n - g|$
a to jest stała · coś dowolnie małe ■

1. $\lim \dfrac{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}{n-3}$

$$\lim \frac{\left(\sqrt{n}+1\right)^2}{n-3} = \lim \frac{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{n\left(1-\frac{3}{n}\right)} = 1 \ ▶$$

8.2 Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie 51 (Twierdzenie o trzech ciągach)**.** $a_n \leq b_n \leq c_n$

$$a_n \to g,\ c_n \to g \implies b_n \to g$$

Szczególne przypadki:

- $b_n \leq c_n,\ b_n \to +\infty \implies c_n \to +\infty$
- $a_n \leq b_n,\ b_n \to -\infty \implies a_n \to -\infty$

Dowód. $\varepsilon > 0$
Szukamy n_ε takiego, że $\forall_{n>n_\varepsilon}\ |b_n - g| < \varepsilon$
$b_n \in \langle a_n, c_n\rangle \Rightarrow t \in \langle 0, 1\rangle$
$b_n = ta_n + (1-t)c_n$
$g = tg + (1-t)g$
$|b_n - g| = \left|t(a_n - g) + (1-t)(c_n - g)\right| \leq t|a_n - g| + (1-t)|c_n - g|$ ■

1. $a \geq 1$ *Pokazać, że* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

$$\frac{a + (n-1)}{n} \geq \sqrt[n]{a} \geq 1$$

   Z twierdzenia o trzech ciągach wszystko dąży do 1. ▶

2. $a > 0$ *Pokazać, że* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

   Jeśli $a \geq 1$ to twierdzenie o kanapce. Natomiast, jeśli $0 < a < 1$ to $\frac{1}{a} > 1$

$$\frac{n}{\frac{1}{a} + \frac{n-1}{1}} \leq \sqrt[n]{a} \leq 1$$

   Widać, że lewe zbiega do 1, więc wszystko działa. ▶

3. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < \frac{n + 2\sqrt{n} - 2}{n}$$

4. $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

$$3\sqrt[n]{2} > \sqrt[n]{2^n + 3^n} > \sqrt[n]{3^n}$$

$a_n, c_n \to 3$, więc $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$ ▶

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

$$0 \leftarrow \frac{1}{n} \geq \frac{\sin n}{n} \geq -\frac{1}{n} \to 0$$

Zatem $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Definicja 28 (Podciąg ciągu (a_n))**.** Jest to ciąg $b_n = a_{n_m}$. Bierzemy część ale nie nieskończenie wiele wyrazów ciągu(a_n).

Twierdzenie 52. Jeśli a_n jest zbieżny to każdy jego podciąg też jest zbieżny do tej samej granicy.

1. $\lim \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

$$\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \to \frac{1}{2}$$

2. $\lim \sqrt[n]{5n^3 + 8n + 3}$

$$\sqrt[n]{n^3}\sqrt[n]{5 + \frac{8}{n^2} + \frac{3}{n^3}} \to 1^3 \cdot 1 = 1$$

Twierdzenie 53 (O granicy ciągu monotonicznego)**.**

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots$$

$$\lim a_n = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$$

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots$$

$$\lim a_n = \inf\{a_1, a_2, \ldots\}$$

Nieskończoności też są okej.

1. *Udowodnić, że* $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ *ma skończoną granicę.*

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + \frac{1}{2^2},\ a_3 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\ \ldots$$

Wystarczy wykazać, że ten ciąg ma ograniczenie górne (bo jest monotoniczny).

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n}$$

W związku z tym $a_n < 2$. ▶

2. *Obliczanie pierwiastka kwadratowego:*

   $a, b > 0$

   $$a_1 = b,\ a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2}$$

   Jeśli granica istnieje to:

   $$g = \frac{g + \frac{a}{g}}{2} \implies g = \pm\sqrt{a}, \pm\infty$$

   Zauważamy, że $a_n > 0$. Chcemy pokazać, że ciąg ma granicę. Pokażemy, że od pewnego momentu jest monotoniczny i ograniczony.

   $$\frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a}$$

   T': $a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq \sqrt{a}$

   $$a_n \geq \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2} \Rightarrow 2a_n \geq a_n + \frac{a}{a_n}$$

   $$a_n^2 > a \Rightarrow a_n \geq \sqrt{a},\ n \geq 2$$

   a to zostało już pokazane, zatem ciąg jest monotonicznie malejący i jego granicą jest infimum $\sqrt{a}$. ▶

3. *Pokazać przez rekurencję, że* $\lim \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 1$

   Ten ciąg jest monotoniczny i ograniczony z dołu, zatem lim istnieje. Trzeba teraz ułożyć równanie. Niech $b_n = \sqrt[2n]{a}$. Wówczas $b_n = a_{2n}$. Jest to podciąg a_n, zatem $\lim a_n = \lim b_n = g$.

   $$a_n = (b_n)^2 \Rightarrow g = g^2 \Rightarrow g = 0, 1, +\infty$$

   Ciąg jest malejący, więc nie może być $+\infty$. 1 natomiast jest ograniczeniem dolnym. W związku z tym $g = 1$. ▶

4. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

   $$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\frac{2}{n}\ldots\frac{n}{n} < \frac{1}{n} \ ▶$$

5. $q \in \mathbb{R},\ \lim \frac{q^n}{n!} = 0$

   $$\frac{|q|^n}{n!} = \frac{|q|^m}{m!}\frac{|q|}{m+1}\ldots\frac{|q|}{n}$$

   Szukamy $m \in \mathbb{N}$ t. że $\frac{|q|}{m+1} < \frac{1}{2}$.

   $$0 < \left|\frac{q^n}{n!}\right| < \frac{|q^m|}{m!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \to 0 \ ▶$$

Twierdzenie 54. $k \in \mathbb{N},\ q > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$$

Funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż potęgowa.

Dowód. Trzeba wziąć odpowiednio duże n.
$q = 1 + r,\ r > 0,\ n > k + 1$

$$q^n = 1 + \ldots + \binom{n}{k+1} r^{k+1} > \binom{n}{k+1} r^{k+1}$$

$$0 < \frac{n^k}{q^n} < \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} r^{k+1}} = \frac{n^k (k+1)!}{r^{k+1} n(n-1)\ldots(n-k-1)}$$

W mianowniku jest większa potęga n, zatem całość zbiega do 0. ■

Twierdzenie 55.

$$a_n \to a,\ b_n \to +\infty$$

1. $a > 1 \implies a_n^{b_n} \to +\infty$
2. $1 > a > 0 \implies a_n^{b_n} \to 0$

$$a_n \to a,\ b_n \to -\infty$$

1. $a > 1 \implies a_n^{b_n} \to 0$
2. $1 > a > 0 \implies a_n^{b_n} \to +\infty$

1. *Udowodnij z trzech ciągów, że* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+3]{n-1} = 1$

   Od pewnego momentu, dla dostatecznie dużych n:

$$1 < \sqrt[n+3]{n-1} < \sqrt[n+3]{n+3} \to 1$$

2. $a_n \to 1,\ b_n \to +\infty \implies a_n^{b_n}$ *nie ma granicy.*

$$a_n = 2^{\frac{(-1)^n}{n}}$$

   Parzyste – $\sqrt[n]{2} \to 1$
   Nieparzyste – $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \to 1$
   $\implies a_n \to 1$

$$b_n = n^2 \implies a_n^{b_n} = 2^{(-1)^k n}$$

   Parzyste $\to +\infty$
   Nieparzyste $\to 0$

3. $\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

   Ciąg jest rosnący z Bernoulliego. Trzeba jeszcze pokazać, że jest ograniczony.
   Interesuje nas funkcja wykładnicza e^x. Weźmy sobie ustalone $x \in \mathbb{R}$

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

   Dość odległy cel jest taki by pokazać, że $a_n \to e^x$.
   Chcemy pokazać, że ten ciąg jest zbieżny (rosnący od pewnego momentu, ograniczony). Wtedy wiemy, że pewna funkcja $\exp(x) = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ma sens.

8.3 Funkcja wykładnicza e^x

Lemat 1. Jeśli $n > -x \neq 0 \implies a_{n+1} > a_n$

Dowód. $n > -x \implies n + 1 > -x$

$$1 + \frac{x}{n} > 0,\ 1 + \frac{x}{n+1} > 0, \ldots$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} > \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{n}{n+x}$$

$$\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1} \geq 1 - (n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)} = \frac{n}{n+x}$$

$$-\frac{x}{(n+x)(n+1)} > -1,\ x<0$$
$$\left|-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right| = \frac{x}{n+x}\frac{1}{n+1} < 1$$

■

Lemat 2.
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ jest ograniczony.}$$

Dowód.
$$x<0 \implies \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < 1$$

dla dostatecznie dużych n ($n > -x$)
$$x = 0 \implies a_n = 1$$

$x > 0$. Jeśli $n > x$ to $\left(1-\frac{x}{n}\right) > 0$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} < \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} = b_n$$

b_n jest malejący, bo $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ jest rosnący dla $x > n$.

$$\implies \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n_0}\right)^{n_0}},\ n_0 > x$$

W związku z tym:
$$\exp(x) = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

jest dobrze określona. ■

Definicja 29 (Liczba Eulera)**.**
$$\exp(1) = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Twierdzenie 56.
$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}$$
$$\implies e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Możemy szukać wtedy dowolnych przybliżeń/szacować ogony:
$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}\right) < ?$$

Dowód. $x > 0,\ n \geq k$
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{x}{n}\right)^j \geq$$
$$\geq 1 + x + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{x^k}{k!} = b_n$$

$$b_n \to 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}$$
$$\implies \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \geq \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \to \exp(x)$$

■

Wniosek 11.
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

Twierdzenie 57.
$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{kk!}$$

Dowód.
$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \ldots + \frac{1}{(k+n)!}\right)$$
$$\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \ldots + \frac{1}{(k+n)!} \leq \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)^2(k+1)!} +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{(k+2)^{n-1}(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!}\frac{1 - \left(\frac{1}{k+2}\right)^n}{1 - \frac{1}{k+2}} < \frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{k+2}} = \frac{k+2}{k!(k+1)^2} < \frac{1}{kk!}$$

■

Wniosek 12. e – niewymierna

Dowód. $a, b \in \mathbb{N}$
$$e = \frac{a}{b} \implies 0 < \frac{a}{b} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{b!}\right) < \frac{1}{bb!}$$
$$0 < a(b-1)! - \left(2b! + \frac{b!}{2!} + \ldots + 1\right) < \frac{1}{b}$$

Sprzeczność! ■

Lemat 3 (O ciągach szybkozbieżnych do zera)**.**
$$\lim na_n = 0 \implies \lim(1 + a_n)^n = 1$$

Dowód. Chcemy użyć twierdzenia o trzech ciągach.
$$(1 + a_n)^n \geq 1 + na_n \to 1$$

Przy założeniach $a_n > -1$, co jest prawdą dla dostatecznie dużych n.
$$(1 + a_n)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{-a_n}{1+a_n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{-a_n}{1+a_n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{-na_n}{1+a_n}} \to 1$$

Zatem mamy ograniczenia z dołu i góry. ■

Twierdzenie 58.
$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exp(x) \geq 1 + x$$

Dowód. Od pewnego momentu (dla dostatecznie dużych n) mamy $\frac{x}{n} > -1$.

$$\exp(x) = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x \implies \exp(x) \geq 1 + x$$

■

Lemat 4.
$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

Dowód. Chcemy pokazać, że:
$$1 = \lim_{n\geq N} \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}$$

$$\lim \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n} = \lim\left(\frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}\right)^n = \lim\left(1 + \frac{\frac{xy}{n^2}}{\frac{n+x+y}{n}}\right)^n = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\frac{xy}{x + y + n}\right)^n$$

Używając lematu o ciągach szybkozbieżnych do zera,

$$\lim \frac{xy}{n + x + y} = 0 \implies \lim\left(1 + \frac{xy}{n(x + y + n)}\right)^n = 1$$

■

Wniosek 13.
$$\forall_{q\in\mathbb{Q}}\ \exp(q) = e^q$$

Dowód. Prosto z Lematu 4 płynie wniosek, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = e^n$$

Ponadto,

$$\exp(-n)\exp(n) = \exp(0) = 1 \implies \exp(-n) = \frac{1}{e^n}$$
$$\implies \forall_{k\in\mathbb{Z}}\ \exp(k) = e^k$$

Niech $k \neq 0$,

$$\exp\left(\frac{m}{k}\right) = \exp\left(\frac{1}{k}\right)^m$$

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\exp\left(\frac{1}{n}\right)\exp\left(\frac{1}{n}\right)\dots}_{n} = e \implies \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$$

Uogólniając identycznie jak w przypadku $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, możemy zapisać, że

$$\exp\left(\frac{1}{k}\right) = e^{\frac{1}{k}} \implies \exp\left(\frac{m}{k}\right) = e^{\frac{m}{k}}$$

■

8.4 Zadansy

1. $\lim\left(\frac{n+3}{2n}\right)^n$

$$0 < \left(\frac{n+3}{2n}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

dla dostatecznie dużego n.

2. $\lim\left(\frac{2n+4}{2n+3}\right)^n$

$$= \lim\left(\frac{2+\frac{4}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)^n = \lim\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1.5}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{e^{1.5}} = \sqrt{e}$$

3. $\lim\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$

$$= \lim\left(\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^{5-2n} = \lim\left(\frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}\right)^{-2}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^5 = \left(\frac{e^4}{e^3}\right)^{-2}\cdot 1^5 = e^{-2}$$

4. $\lim\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$

$(-1)^n$ sugeruje patrzenie na podciągi o indeksach $\mod 2$.

$$\begin{aligned} n = 2k: &\qquad \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \\ n = 2k+1: &\qquad \lim\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{-n} = \left(e^{-1}\right)^{-1} = e \end{aligned}$$

Wszystkie podciągi dążą do e, zatem cały ciąg dąży do e.

5. $\lim\left(n+1-\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{i}\frac{k-1}{k!}\right) = x$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{i}\frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{i}\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{i!} \\ \sum_{i=2}^{n}1-\frac{1}{i!} &= n-1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!} \\ x &= \lim\left(2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}\right) = \lim\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!} = e \end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n!e\pi)$

Najpierw przekształćmy wyraz $n!e$:

$$\begin{aligned} n!e &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{n!}{j!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{n!}{j!} \\ &= \underbrace{K}_{\in\mathbb{Z}} + x_n \end{aligned}$$

Teraz znajdźmy ograniczenia górne i dolne ciągu x_n:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} < x_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \\ &< \sum_{j=n+1}^{\infty} n^{n-j} = \sum_{j=1}^{\infty} n^{-j} = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\right)^j \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1}-1}{\frac{1}{n}-1} - 1\right) = \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

Mając ograniczenia możemy użyć twierdzenia o trzech ciągach:

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow 0 \leftarrow \frac{1}{n+1} < x_n < \frac{1}{n-1} \to 0 \\ &\Longrightarrow x_n \rightsquigarrow 0\end{aligned}$$

Teraz można już policzyć wyjściową granicę:

$$\begin{aligned}\lim \sin(2\pi n!e) &= \lim \sin(2\pi K + 2\pi x_n) \\ &= \lim \sin(2\pi x_n) = 0\end{aligned}$$

7. F_n – *Fibonacci.* $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n}$, $\lim \sqrt[n]{F_n}$

$$F_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n, \quad x_1 > x_2$$

$$\lim \sqrt[n]{F_n} = \lim x_1 \sqrt[n]{\alpha + \beta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} = x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim \frac{\alpha x_1^{n+1} + \beta x_2^{n+1}}{\alpha x_1^n + \beta x_2^n} = \lim x_1 \frac{\alpha + \beta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n+1}}{\alpha + \beta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n} = x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Wniosek 14. Ciąg (a_n) jest określony równaniem rekurencyjnym liniowym o stałych współczynnikach. Równanie charakterystyczne może mieć nawet pierwiastki wielokrotne. Wówczas zachodzi:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

gdzie x_i są pierwiastkami charakterystycznymi rekurencji.

1. $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$

$$\sum \frac{k}{n^2+n} < \sum \frac{k}{n^2+k} < \sum \frac{k}{n^2}$$

$$\begin{aligned}\sum \frac{k}{n^2+n} &= \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \\ \sum \frac{k}{n^2} &= \frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow \lim \sum \frac{k}{n^2+k} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

8.5 Granice średnich

Twierdzenie 59 (Twierdzenie Stolza (bez dowodu))**.** Niech będą dane dwa ciągi $(a_n), (b_n)$, przy czym (a_n) jest rosnący i zbieżny do ∞.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = g \implies \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = g$$

gdzie g jest skończoną lub nieskończoną granicą.

Twierdzenie 60 (Granica średniej arytmetycznej)**.**

$$\lim a_n = g \implies \lim \frac{1}{n} \sum a_i = g$$

Dowód. Z Twierdzenia Stolza:

$$a_n = n, \quad b_n = \sum^n c_i$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{\sum^n c_i - \sum^{n-1} c_i}{1} = \lim_{n\to\infty} c_n = g \\ \implies &\lim_{n\to\infty} \frac{\sum c_i}{n} = g \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 61 (Granica średniej harmonicznej)**.**

$$\lim a_n = g \implies \lim \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} = g$$

Dowód.

$$\lim \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} = \lim \frac{1}{\frac{\sum \frac{1}{a_i}}{n}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = \lim a_n$$

■

Twierdzenie 62 (Granica średniej geometrycznej)**.**

$$\lim a_n = g \implies \lim \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_i} = g, \qquad a_n > 0$$

Dowód.

$$H_n \leq G_n \leq A_n$$

Na podstawie twierdzeń 60, 61: $H_n \to g,\ A_n \to g$.
Zatem z twierdzenia o trzech ciągach $G_n \to g$. ■

Wniosek 15.

$$a_n > 0,\ \lim a_n \neq 0 \implies \lim H_n = \lim G_n = \lim A_n = \lim a_n$$

8.6 Ciekawe twierdzenia

Twierdzenie 63. $a_n > 0$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \ \vee \ \lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \lim a_n = 0$$

Dowód. Dla dostatecznie dużych $n \geq N$ możemy zapisać:

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \qquad q \in (0,1)$$

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq q a_N \\ a_{N+2} &\leq q a_{N+1} \leq q^2 a_N \\ a_n &\leq \ldots \leq q^{n-N} a_N \end{aligned}$$

$$0 < a_n \leq q^{n-N} a_N \to 0$$

Z twierdzenia o trzech ciągach $a_n \to 0$. Dowód dla drugiej alternatywy jest analogiczny, a nawet prostszy. ∎

1. $\lim \frac{2^n n!}{n^n}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$
$$\implies \lim a_n = 0$$

2. $\lim \frac{n^n}{(2n)!}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{2(2n+1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0$$
$$\implies \lim a_n = 0$$

3. $a_1 = 1, \ a_{n+1} = \sin(a_n)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff \sin(a_n) < a_n \\ &\iff a_n \in (0, \pi) \end{aligned}$$

To założenie jest spełnione, zatem ciąg jest monofonicznie malejący i ograniczony.

$$g = \sin g \implies g = 0$$

4. $a_1 = \sqrt{c}, \ a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$

Typujemy kandydatów na granicę:

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{g+c} \\ \Delta &= 1 + 4c \\ g &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}, \ +\infty \end{aligned}$$

Granica z minusem odpada, gdyż może być ujemna, a $a_n > 0$. Teraz pokażemy, że ciąg jest rosnący.

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n &\iff \sqrt{a_n + c} > a_n \\ &\iff a_n \in \left(\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}\right) \end{aligned}$$

Wystarczy pokazać, że $\forall_n\ a_n \in \left(0, \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}\right)$. To już leci indukcyjnie.

$$0 < a_k < \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$
$$0 < \sqrt{0+c} < a_{k+1} < \sqrt{\frac{1+2c+\sqrt{1+4c}}{2}} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{1+4c}\right)^2}{4}} = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

Twierdzenie 64.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g, \qquad a_n > 0$$

Dowód. Niech $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Z twierdzenia o granicy średnich, mamy:

$$\lim c_n = g \implies \lim \sqrt[n]{\prod_{n=1}^{n} c_i} = g$$
$$\lim \sqrt[n]{\prod_{n=1}^{n} c_i} = \lim \sqrt[n]{\prod_{n=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}} = \frac{\lim \sqrt[n]{a_{n+1}}}{\lim \sqrt[n]{a_1}} = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

■

Lemat 5.
$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Dowód.

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{jest ściśle rosnący} \qquad \implies e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$$
$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{malejący?} \qquad \implies e = \inf\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$
$$T': \quad 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n} \quad \text{(Bernoulli)}$$
$$1 > 0$$

■

1. $\lim n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$

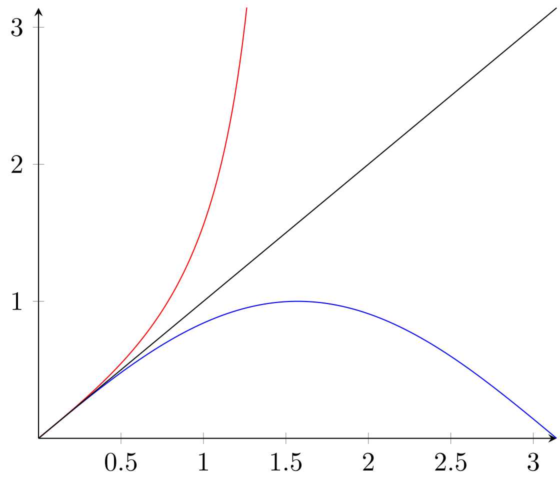
   Korzystamy z Lematu 5:

$$n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right] = 1 < n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) < n\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)-1\right] = \frac{n}{n-1} \to 1$$

   Po prawej stronie wzięliśmy wyraz $n-1$, ponieważ Lemat 5 działa dla każdego n, w szczególności dla takiego. W związku z powyższym, z twierdzenia o trzech ciągach, szukana granica to 1.

2. $x_n \to 0,\ x_n > 0,\ \lim \dfrac{\sin x_n}{x_n}$

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \sin x < x < \tan x$$



Rysunek 8.1: Wykresy funkcji x, $\sin x$, $\tan x$ dla argumentów $x \in \langle 0, \pi\rangle$.

Dla dostatecznie dużych n, możemy użyć tego faktu (który dowodziliśmy w pierwszej klasie):

$$1 > \frac{\sin x_n}{x_n} > \cos x_n \to 1$$

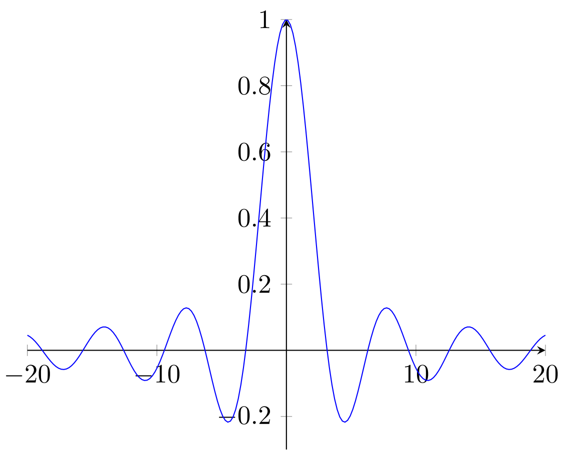
Zatem $\lim \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

3. $x_n \neq 0,\ x_n \to 0,\ \lim \dfrac{\sin x_n}{x_n}$

Jeśli x_n jest dodatni, to wtedy poprzednie zadanie. Jeśli natomiast jest ujemny, to:

$$1 > \frac{\sin(-x_n)}{-x_n} > \cos(-x_n) \to 1$$
$$1 > \frac{-\sin x_n}{-x_n} > \cos x_n$$

Korzystając z parzystości i nieparzystości funkcji, pokazaliśmy, że granica jest ta sama.



Rysunek 8.2: Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{sinc} x$.

Wniosek 16 (Granica sinca)**.**

$$x_n \neq 0,\ x_n \to 0 \implies \lim \frac{\sin x_n}{x_n} \stackrel{\text{def}}{=} \lim \operatorname{sinc} x_n = 1$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(2n!e\pi)$

   Korzystając z wcześniej policzonej wartości $n!e = K + x_n$, gdzie $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, mamy:

$$\begin{aligned}\lim n \sin(2\pi n!e) &= \lim n \sin(2\pi x_n) \\ &= \lim\left[2\pi n x_n \operatorname{sinc}(2\pi x_n)\right] \\ &= \lim 2\pi n x_n \cdot \lim \operatorname{sinc}(2\pi x_n)\end{aligned}$$

   Granica sinca jest już nam znana, natomiast granicę nx_n policzymy od podstaw:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} < x_n < \frac{1}{n-1} \\ 1 \leftarrow \frac{n}{n+1} < nx_n < \frac{n}{n-1} \to 1\end{aligned}$$

   W związku z tym $nx_n \rightsquigarrow 1$ oraz

$$\lim n \sin(2\pi n!e) = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$