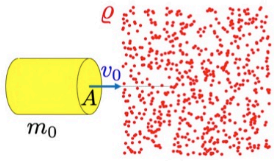
Zadanie 4

Poruszający się w przestrzeni kosmicznej obiekt w kształcie walca o przekroju poprzecznym A i masie m_0 wlatuje z prędkością o wartości v_0 skierowaną wzdłuż osi walca w chmurę pyłu międzygwiezdnego o gęstości ϱ. Cząsteczki pyłu zderzające się z przodem obiektu przyklejają się do niego, zwiększając jego masę. Znajdź zależność prędkości obiektu od jego masy $v(m)$ oraz od czasu $v(t)$.



SZYMON CEDROWSKI

Dysponujemy równaniem ruchu dla układów otwartych poddanych sile F.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}\frac{dm}{dt} + \vec{F}$$

$m, \vec{v}$ – parametry walca

$\vec{w}$ – pr. wzgl. „gazów wylotowych”

w tym przypadku się przyklejają...

$$\frac{dm}{dt} > 0, \quad \vec{w} = -\vec{v}$$

$\vec{F}$ – opór w środku o gęstości ϱ.

$$d\vec{p} = -v\varrho A\vec{v}\,dt \Rightarrow \vec{F} = -v\varrho A\vec{v}$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt} - v^2\varrho A$$

Pęd układu cylinder-gaz jest stały

$$\Rightarrow \underset{0?}{m\frac{dv}{dt}} = -m_0v_0$$

$$\Downarrow$$

$$-m_0v_0 + v\frac{dm}{dt} + A\varrho v^2 = 0$$

$$mv = m_0v_0 \Rightarrow \boxed{v(m) = \frac{m_0}{m}v_0}$$

$$\frac{dm}{dv} = -\frac{m_0v_0}{v^2} = \frac{dm}{dt}\cdot\frac{dt}{dv} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\frac{dv}{dt}\frac{m_0v_0}{v^2}$$

$$\Rightarrow -m_0v_0 - \frac{dv}{dt}\frac{m_0v_0}{v} + A\varrho v^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} - \underbrace{\frac{A\varrho}{m_0v_0}}_{B}v^3 + v = 0$$

$$\left\| \begin{matrix} s = Bv^2 - 1 \\ ds = 2Bv \end{matrix} \right\|$$

$$\Rightarrow \int dt = \int\frac{dv}{Bv^3 - v} = -\int\frac{dv}{v} + \int\frac{Bv\,dv}{Bv^2-1} = -\log v + \frac{1}{2}\int\frac{ds}{s}$$

$$\Rightarrow -\log v + \frac{1}{2}\log(Bv^2-1) = t + C$$

$$\Rightarrow -\log\frac{v}{\sqrt{Bv^2-1}} = t + C, \quad v(0) = v_0$$

$$\Rightarrow C = -\log\frac{v_0}{\sqrt{Bv_0^2-1}} \Rightarrow -\log\frac{v/v_0}{\sqrt{\frac{Bv^2-1}{Bv_0^2-1}}} = t$$

$$\frac{v^2/v_0^2}{Bv^2-1}(Bv_0^2-1) = e^{-2t} \Rightarrow \frac{v^2}{Bv^2-1} = \frac{v_0^2e^{-2t}}{Bv_0^2-1}$$

$$\Rightarrow B - \frac{1}{v^2} = (B - 1/v_0^2)e^{2t} \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{1}{B - (B - 1/v_0^2)e^{2t}}}$$