Fotometria I

Szymon Cedrowski

Lekcja 5

1 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Definicja 1 (Ciało doskonale czarne)**.** Ciało doskonale czarne – wyidealizowany obiekt fizyczny, pochłaniający całe padające nań promieniowanie elektromagnetyczne, niezależnie od temperatury, kąta czy innych czynników.

Będąc bardziej specyficznym, ciało doskonale czarne ma zdolność absorpcyjną wynoszącą 1. Model ten jest dobrym przybliżeniem choćby gwiazd. Jeśli taki obiekt jest w równowadze termodynamicznej, tj. w danej jednostce czasu przyjmuje tyle samo energii ile jej oddaje (np. poprzez promieniowanie), to mówimy o promieniowaniu ciała doskonale czarnego.

Max Planck w 1900 roku podał poprawny wzór na zależność natężenia tegoż promieniowania w funkcji długości fali/częstotliwości i temperatury ciała. Mniej więcej to wydarzenie (wraz z wyjaśnieniem pochodzenia wzoru) uznaje się za narodziny mechaniki kwantowej. Tego prawa nie da się bowiem wyprowadzić z fizyki klasycznej, co sprawiało zresztą duże problemy ówczesnym teoretykom – doświadczenia nie zgadzały się z teorią klasyczną dla pewnych obszarów widm.

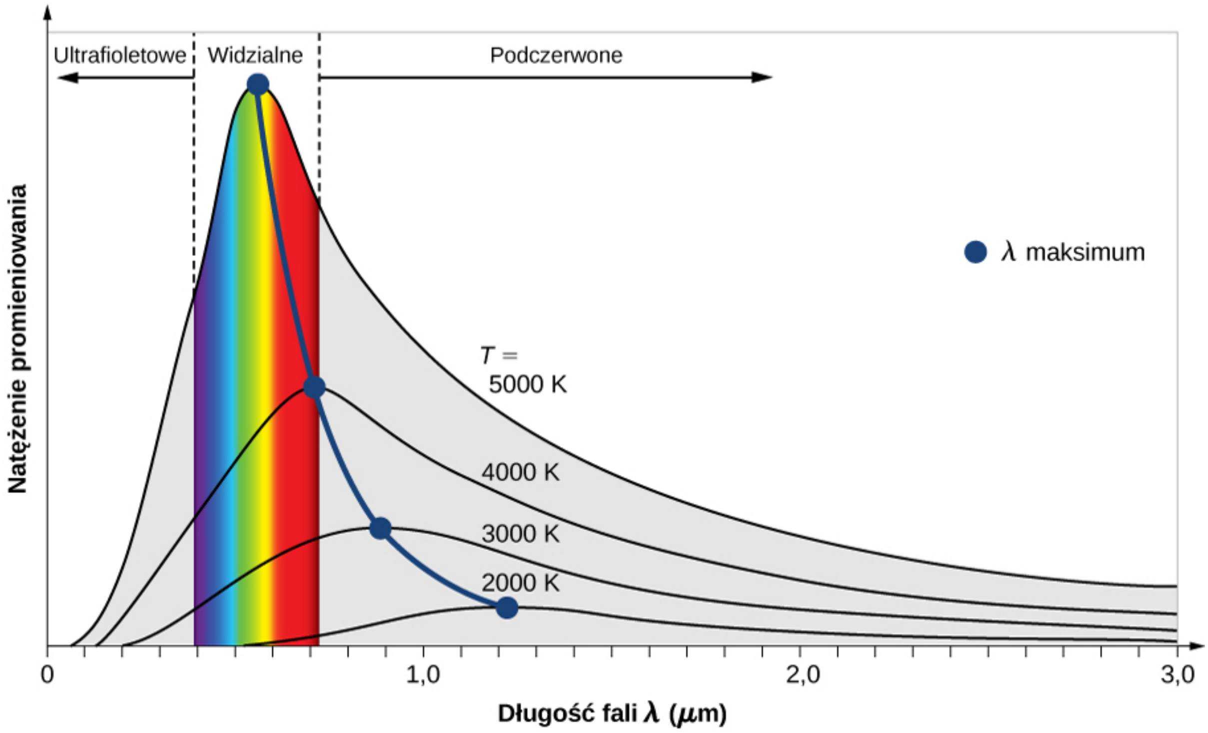
Twierdzenie 1 (Prawo Plancka)**.** Widmo promieniowania ciała doskonale czarnego, w zależności od częstotliwości emitowanej fali elektromagnetycznej wyraża się wzorem:

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

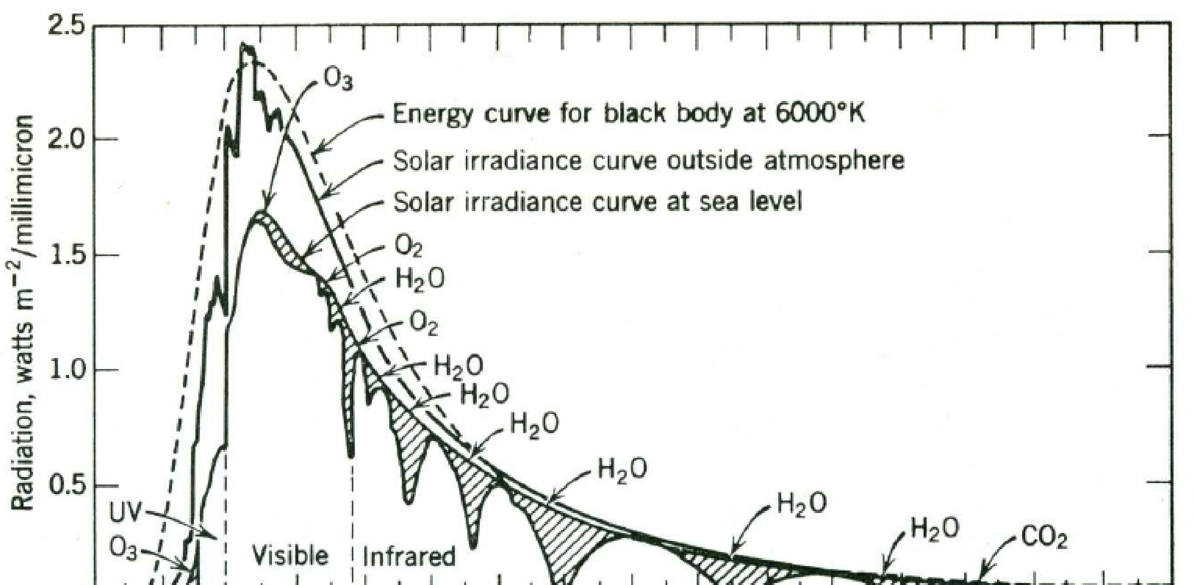
gdzie ν oznacza częstotliwość [Hz], c, h, k to kolejno prędkość światła w próżni, stała Plancka i stała Boltzmanna; oraz T oznacza temperaturę równowagową ciała.
exp to tzw. funkcja eksponencjalna: $\exp(x) = e^x$, gdzie $e = 2.718\ldots$ jest liczbą Eulera.

Równie dobrze, pamiętając, że $c = \lambda\nu$ można sobie zapisać wzór na natężenie promieniowania ciała doskonale czarnego w zależności od długości fali.

Prawo Plancka mówi nam jak silnie nagrzane ciało (np. gwiazda) emituje promieniowanie w danym zakresie widma. O barwie ciała mówi nam maksimum tego promieniowania – dociera do nas bowiem najwięcej światła o danej długości fali (danym kolorze).



Rysunek 1: Prawo Plancka i prawo Wiena



Rysunek 2: Widma Słońca z kosmosu i z powierzchni Ziemi, porównane z Prawem Plancka dla ciała doskonale czarnego o temperaturze 6000 K. Można zauważyć piki i doliny w widmach. To wynika z budowy gwiazdy i atmosfery ziemskiej. Fotony o specyficznych energiach są szczególnie chętnie pochłaniane i emitowane przez pewne pierwiastki.

Policzmy zatem tę długość fali o maksymalnym natężeniu dla danej temperatury ($\lambda_{\max}$).

Chcemy znaleźć maksimum funkcji $I(\nu)$. Policzymy jej pochodną i przyrównamy do zera:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\nu} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\frac{A\nu^3}{\exp(B\nu)-1} \\ &= \frac{3A\nu^2\big(\exp(B\nu)-1\big) - AB\nu^3\exp(B\nu)}{\big(\exp(B\nu)-1\big)^2} = 0\end{aligned}$$

Mianownik nie może być ujemny ani zerowy (oznaczałoby to, że $T \to +\infty$), zatem warunek zerowania się pochodnej jest równoważny:

$$\begin{aligned}3A\nu^2\big(\exp(B\nu)-1\big) &= AB\nu^3\exp(B\nu) \\ 3\exp(B\nu)-3 &= B\nu\exp(B\nu) \\ \exp(B\nu) &= \frac{3}{3-B\nu}\end{aligned}$$

Równanie to można rozwiązać numerycznie, dostając pewne rozwiązanie $B\nu_{\max} = \alpha$. Indeks max odpowiada maksymalnemu promieniowaniu.

$$\begin{aligned}\nu_{\max} &= \frac{\alpha}{B} = \frac{\alpha k}{h}T \\ \lambda_{\max} &= \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{ch}{\alpha k}\frac{1}{T}\end{aligned}$$

Twierdzenie 2 (Prawo Wiena)**.** Maksimum promieniowania ciała doskonale czarnego o temperaturze T przypada na długość fali daną wzorem

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}$$

gdzie b nazywamy stałą Wiena.

Wniosek 1. Znając widmo (a nawet samą barwę) gwiazdy jesteśmy w stanie wyznaczyć jej temperaturę powierzchniową.

Wniosek 2. Z prawa Wiena wnioskujemy, że im gwiazda gorętsza, tym bardziej jest niebieska. Najchłodniejsze gwiazdy są natomiast brunatno czerwone.

2 Prawo Stefana-Boltzmanna

Wiemy już, że ciało doskonale czarne promieniuje. Pojawia się więc pytanie, jaką całkowitą energię niesie ze sobą taki pakiet fal o różnych natężeniach. Zastanówmy się głębiej nad jednostką natężenia promieniowania z prawa Plancka.

Okazuje się, że $\big[I(\nu)\big] = \mathrm{Wm^{-2}sr^{-1}Hz^{-1}}$. Innymi słowy, jest to moc przypadająca na jednostkę częstotliwości, emitowana z jednostkowej powierzchni, na jednostkowy kąt bryłowy. Jak to sobie wyobrazić?

Rozpatrzmy bardzo małą, lokalnie płaską powierzchnię $\mathrm{d}S$. Powierzchnia ta emituje promieniowanie zgodnie z prawem Plancka. Oczywiście fotony lecą sobie w każdą ze stron, jednak istnieje wyróżniony kierunek, w którym leci ich najwięcej – jest to oczywiście kierunek prostopadły do powierzchni $\mathrm{d}S$. Weźmy sobie kąt zenitalny θ (kąt od osi prostopadłej w kierunku płaszczyzny naszej powierzchni). Jak się spodziewamy, dla $\theta = \pi/2$ promieniowanie od powierzchni jest zerowe (fotony nie wylatują z krawędzi cieniutkiej powierzchni). Generalnie można pokazać, że emitowane natężenie maleje wraz z kątem zenitalnym jak $\cos\theta$. Jak już ustaliliśmy, taka płaska powierzchnia $\mathrm{d}S$ emituje (rozprasza) energię na pewien kąt bryłowy, a dokładniej na powierzchnię jednostkowej półsfery.

Zauważmy, że wartość $I(\nu)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}\nu\cos\theta\,\mathrm{d}\Omega$ wyraża moc wydzieloną przez powierzchnię $\mathrm{d}S$ na obszar kąta bryłowego $\mathrm{d}\Omega$ o osi biegnącej wzdłuż kąta θ; przez fale z zakresu $\big(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu\big)$. W związku z tym, całkując zależność $I(\nu)\,\mathrm{d}\nu\cos\theta\,\mathrm{d}\Omega$ po wszystkich częstotliwościach i kącie bryłowym obejmującym półsferę otrzymamy całkowitą moc wydzielaną z takiej płaskiej powierzchni.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} &= \int_0^\infty I(\nu)\,\mathrm{d}\nu \int_A \cos\theta\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \int_0^\infty I(\nu)\,\mathrm{d}\nu \int_A \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\infty I(\nu)\,\mathrm{d}\nu \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi\int_0^\infty I(\nu)\,\mathrm{d}\nu \\
&= \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\,\mathrm{d}\nu
\end{aligned}
$$

Zastosujemy podstawienie: $t = h\nu/kT \implies \mathrm{d}t = h/kT\,\mathrm{d}\nu$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty \frac{t^3k^3T^3}{h^3}\frac{kT}{h}\frac{1}{\exp t - 1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\pi k^4}{c^2h^3}T^4\int_0^\infty \frac{t^3}{e^t-1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Całka ta jest natomiast związana z pewną funkcją specjalną zeta Riemanna :)

$$
= \frac{2\pi k^4}{c^2h^3}T^4\cdot 3!\zeta(4) = \frac{2\pi k^4}{c^2h^3}T^4\cdot 6\cdot\frac{\pi^4}{90}
$$

Finalnie,

$$
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4
$$

Wyrażenie po lewej stronie nazywamy strumieniem promieniowania.

Twierdzenie 3 (Prawo Stefana-Boltzmanna)**.** Strumień promieniowania ciała doskonale czarnego Φ $\left[\mathrm{Wm}^{-2}\right]$ jest proporcjonalny do 4 potęgi temperatury tego ciała.

$$\Phi = \sigma T^4$$

Chcąc poznać całkowitą moc emitowaną od ciała musimy przemnożyć strumień przez pole badanego obiektu. No, o ile tak na oko tę całą powierzchnię da się podzielić na lokalnie płaskie przyczynki pola $\mathrm{d}S$, tak jak wynika z wyprowadzenia. Dla jakiś nietypowych geometrii nie wystarczy sobie po prostu przemnożyć przez pole :)

Przykładowo, obliczymy moc promieniowania Słońca:

$$L_\odot = S_\odot \Phi_\odot = 4\pi R_\odot^2 \cdot \sigma T_\odot^4$$

gdzie $R_\odot$ to promień Słońca, a $T_\odot$ to jego temperatura zgodna z prawem Plancka (tzw. temperatura efektywna). Wiemy już z jaką mocą Słońce wysyła promieniowanie w przestrzeń. Wiemy też, że robi to sferycznie symetrycznie (zgodnie ze stosowanym przez nas przybliżeniem). W takim razie policzmy sobie ile z tej energii dociera do Ziemi, znajdującej się w odległości $a_\oplus$.

Całkowita moc promieniowania rozkłada się na sferę o promieniu $a_\oplus$, zatem wypadkowe natężenie promieniowania na promieniu orbity ziemskiej wynosi:

$$I_\oplus = \frac{L_\odot}{4\pi r_\oplus^2} = \sigma T_\odot^4 \left(\frac{R_\odot}{a_\oplus}\right)^2$$

Wartość tę nazywamy często stałą słoneczną s. Zatem jaka moc promieniowania dociera do całej planety? Natężenie wystarczy przemnożyć przez przekrój efektywny (w tym wypadku kuli o promieniu $R_\oplus$), czyli przez powierzchnię prostopadłą do padającego strumienia promieniowania.

$$L_\oplus = \pi R_\oplus^2 I_\oplus$$

Generalnie w taki sposób postępuje się z czysto fizyczną częścią zadań z fotometrii. Analizujemy krok po kroku bieg promieni, liczymy natężenia energii, strumienie. W tym celu używamy głównie praw Wiena i Stefana-Boltzmanna. Jak pewnie zauważyliście, poświęciliśmy tyle czasu na wyprowadzenie ich z prawa Plancka po to, aby tego nieładnego, długiego wzoru nie trzeba było zbytnio używać jeśli analizujemy sytuacje globalne, dotyczące sumarycznego promieniowania.

Oczywiście nie jest to wszystko, co można na ten temat powiedzieć, a jedynie niezbędna podstawa, bez której ciężko mówić o fotometrii. W następnym skrypcie ujrzymy specyficzną aplikację wyprowadzonych praw w astronomicznym aspekcie.