Analiza III R

Wykładowca:

Skryba:
Szymon Cedrowski

Spis treści

Rozdział 1

Geometria różniczkowa

Wykład 1: Powtórka z Analizy II

16 paź 2020

Objętość kuli B_n

Obszar całkowania dany jest przez:

$$B_n = \left\{ \big(x^1, \dots, x^n\big) : \sum_{n=1}^{n} (x^i)^2 \leq 1 \right\}$$

Objętość będzie dana przez całkę Riemanna z 1:

$$\int_{B_n} 1 \, \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n$$

Jak mamy współrzędne w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to mamy związane z nimi wektory **bazy standardowej** w przestrzeni stycznej: $\mathbb{R}^n\big(x^1, \dots, x^n\big) \rightsquigarrow (\partial_1, \dots, \partial_n)$.
Jak całkujemy to jest potrzeba jakaś miara objętości, np. iloczyn skalarny i w bazie st. jest on przyjemną macierzą diagonalną:

$$\big(\partial_i \mid \partial_j\big)_{\mathrm{st}} = [g]_{\mathrm{st}} = \mathrm{diag}\,(1, 1, \dots, 1)$$

Do całkowania jest nam potrzebna kanoniczna forma objętości $\Omega_n = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ i wtedy przechodzimy z całki Riemanna do obiektu z geometrii różniczkowej:

$$\int_{B_n} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n = \int_{(B_n, \imath_+)} \Omega_n$$

Musimy najpierw zamienić zmienne na takie współrzędne wielo-sferyczne. Działają bardzo podobnie jak zwykłe biegunowe i sferyczne. A oto algorytm ich tworzenia.

Bierzemy najpierw st: $\big(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\big)$ i ruszając tylko ostatnie dwie zmienne przekształcamy je na biegunowe sf1: $\big(x^1, \dots, x^{n-2}, r^{n-1}, \phi^{n-1}\big)$ takie, że:

$$\begin{cases} x^{n-1} = r^{n-1} \cos \phi^{n-1} \\ x^n = r^{n-1} \sin \phi^{n-1} \end{cases}$$

Teraz trzeba napisać macierz zamiany zmiennych czyli macierz identyczności z bazy sf1 do st. Wspomnienia z algebry:

Twierdzenie 1 (Zmiana formy dwuliniowej przy zmianie bazy)**.**

$$[g]^{\mathrm{sf1}}_{\mathrm{sf1}} = \left([\mathrm{id}]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{sf}}\right)^{\top} [g]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}} [\mathrm{id}]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{sf}}$$

$$\substack{\text{iloczyn skalarny} \\ \text{w nowej bazie}} = \substack{\text{macierz zamiany} \\ \text{bazy } \top} \cdot \substack{\text{iloczyn skalarny} \\ \text{w starej bazie}} \cdot \substack{\text{macierz zamiany} \\ \text{zmiennych}}$$

Dygresja. Czy nie prościej byłoby tensorowo? Przy przejściu ze współrzędnych $\left(x^1, \dots, x^n\right)$ do $\left(x'^1, \dots, x'^n\right)$ mamy:

$$g'_{\nu_1'\nu_2'} = \sum_{\nu_1,\nu_2} g_{\nu_1\nu_2} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1'}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\nu_2'}}$$

Wracając do wcześniejszego liczenia, w układzie biegunowym mamy:

$$\begin{aligned}
\partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y \\
&= \cos\phi \cdot \partial_x + \sin\phi \cdot \partial_y \\
\partial_\phi &= -r\sin\phi \cdot \partial_x + r\cos\phi \cdot \partial_y
\end{aligned}$$

Wówczas w bazie standardowej,

$$[\partial_r]^{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}, \quad [\partial_\phi]^{\mathrm{st}} = \begin{bmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z bazy do bazy składa się z wektorów nowej bazy zapisanej w starej bazie, czyli w naszym przypadku na S^{n-1}:

$$[\mathrm{id}]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{sf1}} = \operatorname{diag}(1, \dots, 1) \oplus \begin{bmatrix} \cos\phi^{n-1} & -r^{n-1}\sin\phi^{n-1} \\ \sin\phi^{n-1} & r^{n-1}\cos\phi^{n-1} \end{bmatrix} = M_1$$

Teraz robimy drugą zamianę bazy. Startujemy z sf1. Bierzemy dwie ostatnie współrzędne metryczne x^{n-2}, r^{n-1} i będą nowe współrzędne sf2: $\left(x^1, \dots, r^{n-2}, \phi^{n-2}, \phi^{n-1}\right)$ takie, że:

$$\begin{cases} x^{n-2} = r^{n-2}\cos\phi^{n-2} \\ r^{n-1} = r^{n-2}\sin\phi^{n-2} \end{cases}$$

przy czym $r^{n-2} \in (0, \infty)$, natomiast w odróżnieniu od $\phi^{n-1} \in (0, 2\pi)$, mamy $\phi^{n-2} \in (0, \pi)$. A jest tak dlatego, że $r^{n-1} > 0$, zatem większe argumenty sinusa by nam to psuły. W przejściu sf1 $\to$ sf2 zostaje taka sama ostatnia zmienna ϕ^{n-1} zatem

$$[\mathrm{id}]^{\mathrm{sf1}}_{\mathrm{sf2}} = \underbrace{\operatorname{diag}(1, \dots, 1)}_{(n-3)\times(n-3)} \oplus \begin{bmatrix} \cos\phi^{n-2} & -r^{n-2}\sin\phi^{n-2} \\ \sin\phi^{n-2} & r^{n-2}\cos\phi^{n-2} \end{bmatrix} \oplus \operatorname{diag}(1) = M_2$$

Możemy tak zamieniać dalej. Wtedy,

$$\begin{aligned}
[g]^{\mathrm{sf2}}_{\mathrm{sf2}} &= M_2^\top [g]^{\mathrm{sf1}}_{\mathrm{sf1}} M_2 \\
&= M_2^\top M_1^\top [g]^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}} M_1 M_2 \\
&= M_2^\top M_1^\top M_1 M_2 \\
&= M_2^\top \left[\operatorname{diag}\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n-2} \oplus \operatorname{diag}\left(1, \left(r^{n-1}\right)^2\right) \right] M_2
\end{aligned}$$

Zauważmy, że to pojedyncze przekształcenie de facto działa nam za każdym razem na dwa przedostatnie elementy diagonali.

$$\begin{aligned}&= \operatorname{diag}\Big(1, \dots, 1, \big(r^{n-2}\big)^2, \big(r^{n-1}\big)^2\Big)\\ &= \operatorname{diag}\Big(1, \dots, 1, \big(r^{n-2}\big)^2, \big(r^{n-2}\sin\phi^{n-2}\big)^2\Big)\end{aligned}$$

Widzimy już co się będzie działo jak będziemy dalej przesuwali sf2 do sf$(n-1)$: $\big(r, \phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{n-1}\big)$, gdzie

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\phi^1 \\ r^2 = r\sin\phi^1 \end{cases}$$

Wówczas,

$$\begin{aligned}[g]^{\mathrm{sf}(n-1)}_{\mathrm{sf}(n-1)} &= \begin{bmatrix}\cos\phi^1 & \sin\phi^1\\ -r\sin\phi^1 & r\cos\phi^1\end{bmatrix}\operatorname{diag}\Big(1, 1, \big(r^2\big)^2, \dots, \big(r^{n-1}\big)^2\Big)\begin{bmatrix}\cos\phi^1 & -r\sin\phi^1\\ \sin\phi^1 & r\cos\phi^1\end{bmatrix}\\ &= \operatorname{diag}\Big(1, r^2, \big(r\sin\phi^1\big)^2, \big(r\sin\phi^1\sin\phi^2\big)^2, \dots \big(r\sin\phi^1\sin\phi^2\cdots\sin\phi^{n-2}\big)^2\Big)\end{aligned}$$

Teraz bardzo łatwo policzymy wyznacznik macierzy diagonalnej:

$$\sqrt{\det g} = r^{n-1}\big(\sin\phi^1\big)^{n-2}\cdots\big(\sin\phi^{n-2}\big)$$

Przypomnijmy sobie pewną całkę:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^n\phi\,\mathrm{d}\phi &= -\sin^{n-1}\phi\cos\phi\Big|_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}\phi\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi\\ &= (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}\phi\,\mathrm{d}\phi - (n-1)\int_0^\pi \sin^n\phi\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Dostajemy wzór rekurencyjny:

$$(*) = \int_0^\pi \sin^n\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{n-1}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2}\phi\,\mathrm{d}\phi$$

Teraz rozważamy względem parzystości:

1. $n = 2k$

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}\int_0^\pi \sin^{2k-4}\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}{2k(2k-2)\cdots 4}\int_0^\pi \sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi\\ &= \frac{(2k-1)!!}{2k!!}\pi\end{aligned}$$

2. $n = 2k+1$

$$(*) = \frac{2k!!}{(2k+1)!!}\int_0^\pi \sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 2\cdot\frac{2k!!}{(2k+1)!!}$$

Teraz możemy policzyć objętość kuli n-wymiarowej.

$$\Omega_n = r^{n-1}\big(\sin\phi^1\big)^{n-2}\cdots\big(\sin\phi^{n-2}\big)\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\phi^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\phi^{n-1}$$

W kategoriach całki Riemanna mamy zamianę zmiennych postaci:

$$\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n = \det(M_nM_{n-1}\cdots M_2M_1)\,\mathrm{d}r\cdots\mathrm{d}\phi^{n-1}$$

Nie robiliśmy tego w taki sposób, bo bezpośrednie mnożenie tych macierzy zamiany zmiennych jest bardzo kłopotliwe. Z formami różniczkowymi i iloczynem skalarnym wyszło prościej.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_{2k} &= \int_0^R r^{2k-1}\,\mathrm{d}r\int_0^\pi\big(\sin\phi^1\big)^{2k-2}\,\mathrm{d}\phi^1\cdots\int_0^\pi\sin\phi^{2k-2}\,\mathrm{d}\phi^{2k-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi^{2k-1}\\
&= \frac{1}{2k}R^{2k}\cdot 2\pi\cdot\left(\substack{\text{te wszystkie współczynniki}\\ \text{co się poskracają}}\right) = R^{2k}\frac{1}{2k}\frac{1}{(2k-2)!!}\pi^k2^k\\
&= \frac{\pi^k}{k!}R^{2k}
\end{aligned}$$

To samo powtarzamy dla przypadku nieparzystego.

$$\mathrm{Vol}_{2k+1} = \frac{\pi^k2^{k+1}}{(2k+1)!!}R^{2k+1}$$

Pole powierzchni sfery n-wymiarowej

Wygodniej będzie liczyć pole $(n-1)$-wymiarowej sfery zanurzonej w $\mathbb{R}^n$.
Przepis na formę objętości:

1. Zanurzenie $\mathrm{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$
2. Metryka w $\mathbb{R}^n$
3. Obcięcie formy do S^{n-1}
4. Produkcja formy objętości i całkowanie.

Obcięcie oznacza ustalenie $r=R$. Wtedy przestajemy formę obliczać na wektorze $\mathrm{d}r$ i wymiar macierzy spada.

$$g_{|\mathrm{S}^{n-1}} = \mathrm{diag}\Big(R^2, \big(R\sin\phi^1\big)^2,\ldots,\big(R\sin\phi^1\cdots\sin\phi^{n-1}\big)^2\Big)$$

Pole powierzchni sfery to będzie całka z obciętej formy objętości:

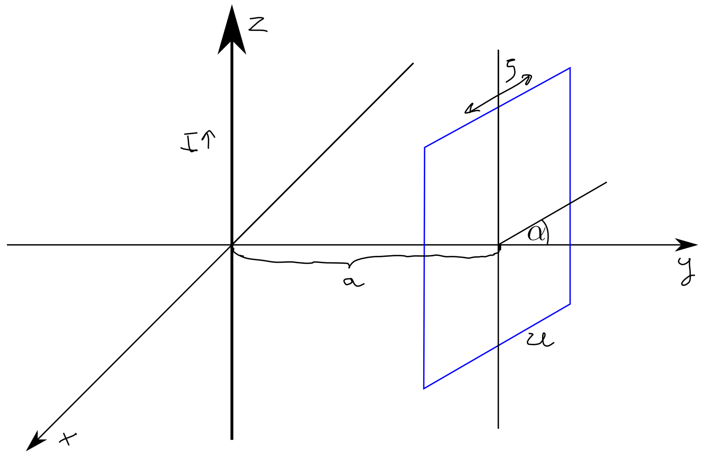
$$S = \int_{(\mathrm{S}^{n-1},\imath_+)}\Omega = \int_{(\mathrm{S}^{n-1},\imath_+)}\sqrt{\det g_{|\mathrm{S}^{n-1}}}\,\mathrm{d}\phi^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\phi^{n-1}$$

Rachunkowo to ta sama całka co poprzednio z pominięciem całki po r, wobec tego

$$= \begin{cases}\dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}R^{2k-1}, & n=2k\\[2mm] \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}R^{2k}, & n=2k+1\end{cases}$$

Przy czym pamiętamy, że n to wymiar przestrzeni, w której zanurzamy.

Strumień pola przez ramkę



Rysunek 1.1: ramka

Potencjał wektorowy $\vec{A}$ pola $\vec{B}$:

$$\vec{A}(x,y,z) = -K\log\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\partial}{\partial z}$$
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

Strumień pola przez powierzchnię liczymy definiując pole normalne $\vec{n}$, wyznaczamy element powierzchni $\mathrm{d}\sigma$ i całkujemy po powierzchni Σ.

$$\int_\Sigma (\vec{n}\mid\vec{x})\,\mathrm{d}\sigma$$

Wprowadźmy w otoczeniu Σ układ współrzędnych taki jaki byłby wygodny $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$: $\Sigma=\left\{x^1=0\right\}$, $\|\partial_{x^1}\|=1$, $\left(\partial_{x^1}\mid\partial_{x^i}\right)=0$. Czyli $\vec{n}=\partial_{x^1}$. Wówczas rachunki są prostsze, bo metryka wygląda:

$$g=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & g_{2n} & \cdots & g_{nn}\end{bmatrix} \implies \mathrm{d}\sigma=\sqrt{\det g}\,\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$$

Weźmy nasze pole $\vec{x}=x^1\partial_1+x^2\partial_2+\cdots+x^n\partial_n$. Z założenia mamy, że $\left(\vec{n}\mid\vec{x}\right)=x^1$, zatem:

$$\int_\Sigma (\vec{n}\mid x)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\Sigma x^1\sqrt{\det g}\,\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$$

Używając geometrii różniczkowej można prościej. Mamy powierzchnię zanurzoną $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ i formę objętości $\Omega = \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$.
Popatrzmy na pole wektorowe x zwężone z Ω (tensorowo $\Omega_{[a_1 \cdots a_n]} x^{a_1}$):

$$x \lrcorner \Omega = \sqrt{\det g}\big(x^1\, \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n - x^2\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n + \cdots \pm x^n\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{n-1}\big)$$

Zauważmy, że na powierzchni Σ z wyżej wybranymi współrzędnymi $x^1 = 0$, zatem przy obcięciu formy Ω do powierzchni zerują się wszystkie wedge, które zawierają $\mathrm{d}x^1$.

$$x \lrcorner \Omega_{|\Sigma} = \sqrt{\det g} x^1\, \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

Licząc całkę z tej zwężonej formy,

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma,+)} x \lrcorner \Omega &= \int_{(\Sigma,+)} \sqrt{\det g} x^1\, \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \int_{\Sigma} x^1 \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n \end{aligned}$$

Wyrażenie po lewej stronie jest obiektem czysto geometrycznym i nie zależy od współrzędnych. Możemy więc olać tę metodę ze szczególnym układem i liczyć ten obiekt po lewej.

Wracając do naszego zadania. Mamy liczyć strumień pola $B = \nabla \times A$ czyli chcemy całkować $B \lrcorner \Omega = \mathrm{d}G(A)$ (z definicji rotacji A), gdzie $G\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ jest iloczynem skalarnym. Użyjemy współrzędnych walcowych.

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega = r\, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}z$$

Liczymy $G(A)$ gdzie A było dane w wyżej.

$$\begin{aligned} G(A) &= -K \log r\, \mathrm{d}z \quad \text{(tensorowo } g_{ab}A^a = A_b\text{)} \\ \mathrm{d}G(A) &= -K\frac{1}{r}\, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}z = K\frac{1}{r}\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}r \end{aligned}$$

Musimy wprowadzić parametryzację ramki.

$$\begin{cases} y = a + \xi\cos\alpha \\ x = -\xi\sin\alpha \\ z = z \end{cases}, \quad \xi \in [-l, l],\ z \in [-l, l]$$

Formę zdefiniowaną na całym $\mathbb{R}^3$ musimy obciąć do samej ramki.

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ 2r\, \mathrm{d}r &= 2x\, \mathrm{d}x + 2y\, \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}r &= \frac{x}{r}\, \mathrm{d}x + \frac{y}{r}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{r}\Big(\xi\sin\alpha\big(\mathrm{d}\xi\big)\sin\alpha + (a + \xi\cos\alpha)\, \mathrm{d}\xi\cos\alpha\Big) \\ &= \frac{1}{r}(a\cos\alpha + \xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$