# Równowaga wirialna
# Układy N-ciałowe statystycznie

Szymon Cedrowski

Lekcja 8

## 1 Long story short

Na początku jest sobie gaz – wodór i hel. Obłoki gazowe są tak naprawdę ciągle zaburzane przez różne czynniki zewnętrzne takie jak fale uderzeniowe z supernowych czy wędrujące zaburzenia potencjałów (fale gęstości w galaktykach). Lokalne zagęszczenia materii molekularnej mogą inicjować globalne niestabilności grawitacyjne, wiodące ku gwałtownemu zagęszczaniu materii. Inne zaburzenia jednorodnej struktury gazu mogą okazać się stabilne (regulowane przez fale dźwiękowe w gazie). Wszystko zależy od parametrów fizycznych obłoku. Zagadnieniem stabilności grawitacyjnej zajmuje się hydrodynamika. Nie dysponujecie jednak dostatecznie zaawansowanym aparatem matematycznym, więc odpuścimy sobie szczegółowe omawianie procesów gwiazdotwórczych.

Przyjmijmy, że gwiazdy już powstały i uformowały się w dużą gromadę kulistą o jednorodnej strukturze, tj. uśredniając masy gwiazd zawarte w jednakowych obszarach otrzymamy taką samą gęstość. Gromady kuliste zawierają przeciętnie setki tysięcy gwiazd. W podejściu statystycznym do takich dużych układów, gromadę traktujemy dwojako: jako zbiór mas punktowych podlegających pewnej statystyce uśrednionej po czasie lub jako kulę o pewnej stałej gęstości i całkowitej masie równej sumie mas wszystkich gwiazd – rozmywamy masy punktowe do rozkładów gęstości na odpowiednich skalach odległości. Upraszczamy sobie jeszcze rozważania, poprzez założenie że każda z $N$ gwiazd ma identyczną masę.

Oczywiście to, co opisałem powyżej to jedynie prosty model. W rzeczywistości, rozkład gwiazd w gromadach nie jest jednorodny, a gwiazdy mają różne masy – najwięcej jest gwiazd przeciętnych, o masach porównywalnych z masą Słońca.

## 2 Twierdzenie o wiriale

W tej sekcji wyprowadzimy sobie pewne prawo statystyczne, które ma wielkie zastosowanie w opisie dużych (podlegających statystyce) stabilnych układów samograwitujących. Jak już się przekonaliśmy, analitycznie umiemy opisywać tylko wzajemny ruch dwóch mas w polu grawitacyjnym. W ogólności, przypadki $N > 2$ nie mają analitycznych rozwiązań, a ścisły, numeryczny opis takich układów jest bardzo skomplikowany. Można jednak zastanawiać się nad wartościami średnimi wielu parametrów, dzięki którym układ pozostaje stabilny w dużych przedziałach czasowych.

## 2.1 Tło matematyczne

Silnie zaleca się zapoznać i poćwiczyć podstawowe zagadnienia rachunku różniczkowego! Odsyłam do pierwszego skryptu z tego kółka (Pochodne) oraz do innych stron, na których poćwiczycie całkowanie. `https://www.matemaks.pl/calki.html`
Aby rozwiać wątpliwości, przez „podstawy" rozumiem nie tylko wiedzę typu, że prędkość to pochodna położenia, czy pole pod wykresem to całka oznaczona. Dobrze jest też umieć naprawdę policzyć jakąś pochodną czy całkę, używając reguł różniczkowania, czy całkowania przez podstawienie i części...

## 2.2 Wyprowadzenie

Zakładając, że opanowaliście podstawy poprzedniego podpunktu... Wprowadźmy pewne specyficzne oznaczenie: $\langle x_i \rangle$ będzie oznaczało wartość parametru $x$ dotyczącego ciała o numerze $i$, uśrednioną po czasie. Analogicznie, $\langle x \rangle$ będzie oznaczało średnią wartość parametru $x$ dla całej populacji, tj. $\langle x \rangle = 1/N \sum \langle x_i \rangle$ oraz $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{1/N \sum \langle x_i^2 \rangle}$. Pierwszą zależność nazywamy średnią arytmetyczną, a drugą – średnią kwadratową. Przeprowadzimy dość sprytny dowód. Rozważmy poniższą pochodną:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t)^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(2x(t)x'(t)\big) \\ &= 2\big[x'(t)x'(t) + x(t)x''(t)\big] = 2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2x\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Jeśli $x$ potraktujemy jako położenie na osi układu współrzędnych, a $t$ będzie czasem, zauważamy iż $x'(t)$ oznacza prędkość liniową wzdłuż osi $x$, natomiast $x''(t)$ oznacza przyspieszenie wzdłuż tej osi. Przypadkowo, otrzymaliśmy dość istotne parametry fizyczne; pociągnijmy to dalej. Gromada kulista jest tworem trójwymiarowym. Niech więc jej środek $O$ pokrywa się z początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych $(x, y, z)$. W ramach przypomnienia, wersorem nazywamy wektor jednostkowy (o długości 1) wskazujący nam kierunek wzrostu wartości na osi danego układu współrzędnych i oznaczamy go przez „czapeczkę": $\hat{x}$. Każdy wektor w układzie współrzędnych możemy skonstruować jako kombinację liniową wersorów:

$$\vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

gdzie wektor $\vec{OP}$ wskazuje nam na jedną z gwiazd, o współrzędnych położenia $(x, y, z)$. Przyjmujemy, że długość wektora $\vec{OP}$ dla każdego $P$ będziemy oznaczali przez $r$, tj. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Powróćmy do rozważania równania (1). Dodajmy stronami analogiczne równości dla dwóch pozostałych kierunków przestrzennych.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big(x^2 + y^2 + z^2\big) = 2\Big(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\Big) + 2\big(xa_x + ya_y + za_z\big)$$

Jest to opis kinematyki jednej z gwiazd naszej gromady (póki co omijamy indeksowania). Przemnożymy równanie obustronnie przez $0.5m$.

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r^2 = mv^2 + \big(xF_x + yF_y + zF_z\big)$$

Po prawej stronie złożyliśmy składowe prędkości w prędkość całkowitą, oraz wyrazy $ma_i$ reprezentują składowe siły działającej na obiekt. W nawiasie rozpoznajemy także algebraiczny zapis iloczynu skalarnego! Jak ktoś nie wie, to odsyłam do definicji: `https://pl.wikipedia.org/wiki/Iloczyn_skalarny`

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(mr^2\right) = mv^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$$

Po lewej stronie widzimy definicję momentu bezwładności $I$ dla masy punktowej w odległości $r$ od osi odniesienia. Wyraz $mv^2$ to dwukrotność energii kinetycznej $T$ jednej rozważanej gwiazdy. Przepiszmy równanie indeksując parametry literą $i$ oznaczającą numer gwiazdy.

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}I_i = 2T_i + \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i$$

Dodajmy stronami analogiczne równania dla każdej z $N$ gwiazd w gromadzie.

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = 2T + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i$$

Iloczyn skalarny wektora wodzącego z siłą kojarzy nam się z pracą pola, a zatem z jego energią potencjalną. Ostatnim krokiem jest rozwinięcie i uproszczenie tej sumy. Przyjmiemy (podobnie jak w problemie dwóch ciał) konwencję, że $\mathbf{F}_{ij}$ oznacza siłę działającą na ciało $i$ i pochodzącą od ciała $j$. Podobnie, $\mathbf{r}_{ij}$ to wektor wskazujący ciało $i$ względem ciała $j$. Jak dobrze pamiętamy,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\mathrm{d}U_{ij}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$$

gdzie $U_{ij} = U_{ji}$ oznacza energię potencjalną. Zapiszmy siłę działającą na ciało:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_i = \sum_{j\neq i}\mathbf{F}_{ij} &= \sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{F}_{ij} + \sum_{j=i+1}^{N}\mathbf{F}_{ij} \\
\sum\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i &= \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{r}_i\cdot\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{F}_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{r}_i\cdot\sum_{j=i+1}^{N}\mathbf{F}_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_{ij} \\
&= \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_{ij}
\end{aligned}$$

Użyjmy jeszcze III zasady Newtona, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Widzimy, że wyrazy z lewej strony parują się z tymi z prawej.

$$\sum\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{F}_{ij}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right) = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{F}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij}$$

Teraz możemy przystąpić do wyrażania sumy poprzez energię potencjalną układu.

$$\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\mathbf{F}_{ij}\mathbf{r}_{ij} = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} -\frac{\mathrm{d}U_{ij}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}_{ij}\cdot\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$$
$$= \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} -\frac{\mathrm{d}U_{ij}}{\mathrm{d}r}r_{ij}$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze pojawia się energia wiązania między każdą z dwóch gwiazd (i to bez powtórzeń).

**Twierdzenie 1** („Surowe” twierdzenie o wiriale)**.** W zamkniętym układzie $N$ ciał znajdujących się w polu siły potencjalnej zachodzi związek:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = 2T - \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\mathrm{d}U_{ij}}{\mathrm{d}r}r_{ij}$$

Teraz możemy obliczyć tę sumę dla potencjału danego wzorem: $U_{ij}(r_{ij}) = \alpha r_{ij}^n$, w szczególności dla $n = -1$ mamy energię pola grawitacyjnego.

$$\frac{\mathrm{d}U_{ij}}{\mathrm{d}r}r_{ij} = r_{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\alpha r_{ij}^n = r_{ij}\alpha n r_{ij}^{n-1}$$
$$= \alpha n r_{ij}^n = n\cdot U_{ij}$$

Wstawiając do twierdzenia o wiriale:

$$\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\mathrm{d}U_{ij}}{\mathrm{d}r}r_{ij} = n\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}U_{ij} = n\cdot U$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = 2T - nU$$

Finalnie, stosujemy procedurę uśredniania po czasie.

$$\frac{1}{2}\left\langle\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}\right\rangle = 2\langle T\rangle - n\langle U\rangle$$

Naszym kluczowym założeniem była stabilność struktury gromady gwiazd (stały kształt, rozmiary itp.). Jasno widzimy, że średni moment bezwładności dla takich stabilnych układów statystycznych jest stały. Stąd wynika, że lewa strona się zeruje. Stąd ostateczna forma twierdzenia o wiriale.

**Twierdzenie 2** (Twierdzenie o równowadze wirialnej)**.** Dla układów mas punktowych znajdujących się w równowadze (niezmienny kształt, rozkład gęstości), związanych siłami potencjalnymi o energiach postaci $U(r) = \alpha r^n$ zachodzi związek między średnią energią kinetyczną układu a średnią energią potencjalną.

$$2\langle T\rangle = n\langle U\rangle$$

Dla układów samograwitujących zachodzi:

$$2\langle T\rangle = -\langle U\rangle$$

# 3 Parametry gromady kulistej

Teraz policzymy sobie kilka faktów dotyczących gromad kulistych. Najpierw wyraźmy wzorem średnią energię kinetyczną gromady.

$$\begin{aligned}\langle T\rangle &= \sum \frac{1}{2} m \big\langle v_i^2 \big\rangle = \frac{m}{2} \sum \big\langle v_i^2 \big\rangle \\ &= \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{N} \sum \big\langle v_i^2 \big\rangle = \frac{M}{2} \big\langle v^2 \big\rangle\end{aligned}$$

Łącząc to z twierdzeniem o wiriale będziemy mogli otrzymać średnią prędkość kwadratową gwiazd w gromadzie. Policzymy energię całkowitą grawitacyjną wiążącą sferyczne jednorodne ciało o masie $M$ (wzór, który wyprowadzimy przydaje się nawet na OA).

Energia grawitacyjna (co do modułu) zgodnie z przyjętymi definicjami jest także pracą potrzebną do oddalenia dwóch ciał do nieskończoności. W takim razie, całkowitą energię kuli policzymy dzieląc kulę na infinitezymalnie małe powłoki i dodając przyczynki pracy potrzebnej do oddalenia ich do nieskończoności. Zgodnie z twierdzeniami Newtona o powłokach, siła działająca na powłokę efektywnie pochodzi tylko masy zgromadzonej pod nią. Kula ma stałą gęstość $\rho$. Aby policzyć masę powłoki, musimy znać bardzo mały przyczynek objętości $\mathrm{d}V$ dla sfery. Możemy to policzyć amatorsko w następujący sposób.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= \frac{4}{3}\pi\big(r + \mathrm{d}r\big)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\Big(\big(r + \mathrm{d}r\big)^2 + 2r^2 + r\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{4}{3}\pi\Big(r^2\,\mathrm{d}r + \big(\mathrm{d}r\big)^2 + 2r\big(\mathrm{d}r\big)^2 + 2r^2\,\mathrm{d}r + r\big(\mathrm{d}r\big)^2\Big)\end{aligned}$$

Wyższe potęgi form różniczkowych zanikają, jako pomijalnie małe.

$$\approx \frac{4}{3}\pi\big(3r^2\,\mathrm{d}r\big) = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$$

Teraz możemy policzyć energię potencjalną.

$$
\begin{aligned}
\langle U\rangle &= -\int_0^R \frac{G\big(\rho\,\mathrm{d}V\big)m(r)}{r} \\
&= -G\rho^2\int_0^R \frac{4\pi r^2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{r}\,\mathrm{d}r = -\frac{16G\pi^2\rho^2}{3}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{16}{15}G\pi^2\rho^2R^5 = -\frac{3GM^2}{5R}
\end{aligned}
$$

Teraz używamy twierdzenia o wiriale.

$$
\begin{aligned}
2\langle T\rangle &= -\langle U\rangle \\
M\big\langle v^2\big\rangle &= \frac{3GM^2}{5R} \\
\sqrt{\langle v^2\rangle} &= \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Otrzymana zależność jest średnią prędkością kwadratową. Należy pamiętać, że nie jest to średnia arytmetyczna prędkości, jednak w fizyce statystycznej średnia kwadratowa ma nawet większe znaczenie (gdyż jak widać, wiąże się ściśle z energią).