Рассмотрим функции $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Обозначение $f(n) = O(g(n))$ означает, что существуют такие $c \in \mathbb{R}$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, что при любом $n > n_0$ выполняется $f(n) \leq c \cdot g(n)$. Обозначение $f(n) = \Omega(g(n))$ означает, что $g(n) = O(f(n))$. Обозначение $f(n) = \Theta(g(n))$ означает, что $f(n) = O(g(n))$, и, при этом, $g(n) = O(f(n))$.

Можно сказать, что $f(n) = O(g(n))$? Если да, то найти такие c и n_0.

1.1.3 $f(n) = n \cdot log_2 n$, $g(n) = n^2$
$n \cdot log_2 n \leq c \cdot n^2$
$log_2 n \leq c \cdot n$
При $c = 1$, $n_0 = 0$ получаем
$log_2 n \leq n$, при $\forall n > n_0$
Ответ: $f(n) = O(g(n))$

1.1.4 $f(n) = n \cdot log_3 n$, $g(n) = 2nlnn$
$n \cdot log_3 n \leq c \cdot 2nlnn$
$log_3 n \leq c \cdot 2lnn$
При $c = \frac{1}{2}$, $n_0 = 1$ получаем
$log_3 n \leq lnn$, при $\forall n > n_0$
Ответ: $f(n) = O(g(n))$

1.1.5 $f(n) = 2^{2n}$, $g(n) = 2^{n^2}$
$2^{2n} \leq c \cdot 2^{n^2}$
$1 \leq c \cdot 2^{n^2 - 2n}$
$1 \leq c \cdot 2^{n(n-2)}$
При $c = \frac{1}{2}$, $n_0 = 2.1$ получаем
$1 \leq 2^{n(n-2)}$, при $\forall n > n_0$
Ответ: $f(n) = O(g(n))$

1.1.6 $f(n) = 2^n$, $g(n) = 3^n$
$2^n \leq c \cdot 3^n$
$2^n \leq c \cdot 3^n$
При $c = 1$, $n_0 = 1$ получаем
$2^n \leq 3^n$, при $\forall n > n_0$
Ответ: $f(n) = O(g(n))$

1.1.7 $f(n) = \sqrt{n}$, $g(n) = 2n + 1$
$\sqrt{n} \leq c \cdot 2n + 1$
$1 \leq c \cdot 2\sqrt{n} + 1$
При $c = 1$, $n_0 = 1$ получаем
$1 \leq 2\sqrt{n} + 1$, при $\forall n > n_0$
Ответ: $f(n) = O(g(n))$

1.1.8 $f(n) = log_2 n$, $g(n) = \sqrt{n}$
$log_2 n \leq c \cdot \sqrt{n}$
$log_2 n \leq c \cdot \sqrt{n}$
При $c = 2$, $n_0 = 0$ получаем
$log_2 n \leq \sqrt{n}$, при $\forall n > n_0$
Ответ: $f(n) = O(g(n))$

а
а

1.1.9 $f(n) = n^{\frac{1}{3}}$, $g(n) = 10n^{\frac{1}{4}}$
$n^{\frac{1}{3}} \leq c \cdot 10n^{\frac{1}{4}}$
$n^{\frac{1}{12}} \leq c \cdot 10$
Невозможно подобрать такое c, чтобы при $\forall n > n_0$ выполнялось $n^{\frac{1}{12}} \leq c \cdot 10$, так как при $n > (c \cdot 10)^{12}$ выполняется $n^{\frac{1}{12}} > c \cdot 10$
Ответ: $f(n) \neq O(g(n))$

1.1.10 $f(n) = \sin n$, $g(n) = \frac{1}{\pi}$
Невозможно подобрать такое c, чтобы при $\forall n > n_0$ выполнялось $\sin n \leq \frac{1}{\pi}$, так как $\sin n$ - периодическая функция, принимающая значения в интерале $[-1, 1]$, при этом $\frac{1}{\pi} \in [-1, 1]$
Ответ: $f(n) \neq O(g(n))$

1.2 Докажите, что для любого полинома $f(n)$ степени k справедливо, что $f(n) = \Theta(n^k)$
Пусть $P(n^k) = a_0 + a_1n^1 + a_2n^2 + ... + a_kn^k$ – полином от n^k. Тогда, так как $\lim_{x \to \infty} \frac{c \cdot n^k}{P(n^k)} = c$, то при $\forall c > 1$ гарантированно найдётся $n_0 \in \mathbb{N}$: $P(n^k) \leq c \cdot n^k$ при $n > n_0$, следовательно $P(n^k) = O(n^k)$.
При $c = 1$ и $n_0 = 1$ выполняется $n^k \leq P(n^k)$, следовательно $n^k = O(P(n^k))$

1.3 Верно ли, что $n! = O(n^n)$? Верно ли обратное?
По формуле Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, то есть $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}$. Таким образом, $n! = O(n^{n+\frac{1}{2}})$

1.4 Покажите, что $O(f(n)) \pm O(f(n)) = O(f(n))$.
$O(f(n)) \leftrightarrow g_i(n) \leq c_i \cdot f(n)$, при условии, что $\exists c \in \mathbb{R}$ и $n > n_0 \in \mathbb{N}$, то есть $O(f(n)) \pm O(f(n)) \leftrightarrow g_1(n) \pm g_2(n) \leq (c_1 \pm c_2) \cdot f(n) = O(f(n))$

1.5 Покажите, что $|O(f(x))|^p = O(|f(x)|^p)$, где $p > 0$.
$|O(f(x))|^p \leftrightarrow |g(n)|^p \leq |c \cdot f(x)|^p$, при условии, что $\exists c \in \mathbb{R}$. $|g(n)|^p \leq |c \cdot f(x)|^p = |c|^p \cdot |f(x)|^p = b \cdot |f(x)|^p$, где $b = |c|^p = const$, слеовательно $g(x) = O(|f(x)|^p) \leftrightarrow |O(f(x))|^p = O(|f(x)|^p)$