Постановка задачи

$$\begin{cases} \nabla(-D\nabla u) = f,\ x\ \in \Omega \\ \quad u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega\ =\ [0, 1]^2$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

Задача решается методом конечных разностей с шагом h_x по x и с шагом h_y по y

Численная схема

Умножим дифференциальное уравнение на некоторую функцию v(x), равную нулю на границе области, и проинтегрируем его на всей области, применим интегрирование по частям и получим

$$\int D\nabla u * \nabla \mathrm{v}\ \mathrm{dx} =\ \int f * v\ dx$$

Возьмем N базисных функций v_i, разложим по ним u(x), проведем, показанные выше действия при v = v_i i = 1..N

Получим СЛАУ, решение которой даст коэффициенты разложения u по базисным функциям

Классически область разбивается на некие треугольники, после чего на каждом узле берется непрерывная базисная функция, линейно убывающая на соседних треугольниках и равная нулю на всех прочих.

Численный эксперимент

Эксперимент проводился для задач, для которых известно точное решение

1) f(x, y) = -sin(x), g(x ,y) = sin(x), $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2) f(x, y) = -2sin(x)sin(y), g(x ,y) = sin(x)sin(y), $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3) f(x, y) = -2cos(x)sin(y), g(x ,y) = cos(x)sin(y), $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

результат: 1 2 3