

Постановка задачи

$$\begin{cases} \nabla(D\nabla u) = f, & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = [0, 1]^2$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Задача решается методом конечных элементов на треугольной сетке

Численная схема

Умножим дифференциальное уравнение на некоторую функцию $v(x)$, равную нулю на границе области, и проинтегрируем его на всей области, применим интегрирование по частям и получим

$$\int D\nabla u * \nabla v \, dx = \int f * v \, dx$$

Возьмем N базисных функций v_i , разложим по ним $u(x)$, проведем, показанные выше действия при $v = v_i$ $i = 1..N$

Получим СЛАУ, решение которой даст коэффициенты разложения u по базисным функциям

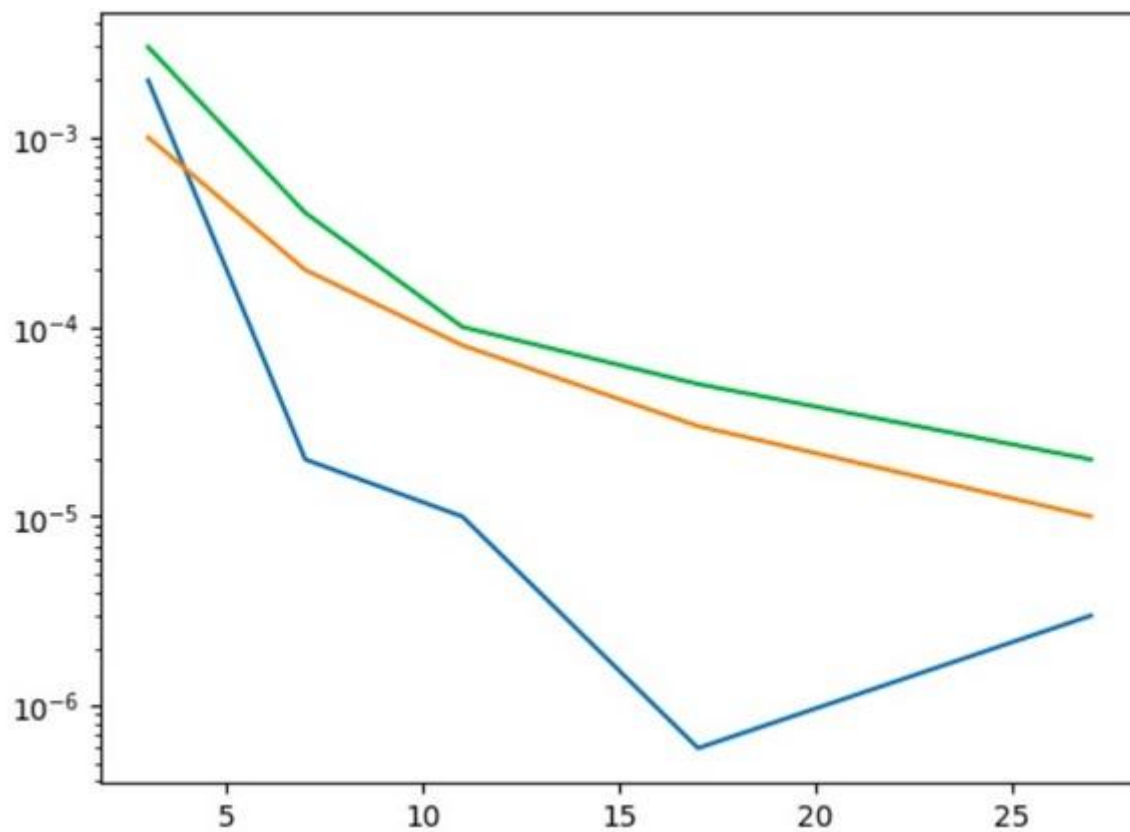
Классически область разбивается на некие треугольники, после чего на каждом узле берется непрерывная базисная функция, линейно убывающая на соседних треугольниках и равная нулю на всех прочих.

Численный эксперимент

Эксперимент проводился для задач, для которых известно точное решение

1) $f(x, y) = -\sin(x),$	$g(x, y) = \sin(x),$	$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2) $f(x, y) = -2\sin(x)\sin(y),$	$g(x, y) = \sin(x)\sin(y),$	$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3) $f(x, y) = -2\cos(x)\sin(y),$	$g(x, y) = \cos(x)\sin(y),$	$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

результат: 1 2 3



По оси OX величина обратная к шагу сетки

По оси OY с норма погрешности