Постановка задачи

$$\begin{cases} \nabla(-D\nabla u) = f, \; x \in \Omega \\ u(x) = g(x), \; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = [0, 1]^2$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

Задача решается методом конечных разностей с шагом h_x по x и с шагом h_y по y

Численная схема

Приблизим численно частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}u(x_i, y_j) \sim \frac{u[i+1,j]-2u[i,j]+ u[i-1,j]}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}u(x_i, y_j) \sim \frac{u[i+1,j+1]-u[i+1,j-1]-u[i-1,j+1]+ u[i-1,j-1]}{4h_x h_y}$$

После подстановки приближений в дифференциальное уравнение получим СЛАУ, решив которую, получим наше приближение.

Численный эксперимент

Эксперимент проводился для задач, для которых известно точное решение

1) f(x, y) = 0, g(x ,y) = x*y, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2) f(x, y) = 2, g(x ,y) = x*x, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3) f(x, y) = 1, g(x ,y) = x*y, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

результат: В первых двух случаях погрешность не обнаружена, в третьем она по абсолютному значению не превышает 0.01