

Постановка задачи

$$\begin{cases} \nabla(-D\nabla u) = f, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Omega = [0, 1]^2$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}$$

Задача решается методом конечных разностей с шагом h_x по x и с шагом h_y по y

Численная схема

Умножим дифференциальное уравнение на некоторую функцию $v(x)$, равную нулю на границе области, и проинтегрируем его на всей области, применим интегрирование по частям и получим

$$\int D\nabla u * \nabla v \, dx = \int f * v \, dx$$

Возьмем N базисных функций v_i , разложим по ним $u(x)$, проведем, показанные выше действия при $v = v_i$ $i = 1..N$

Получим СЛАУ, решение которой даст коэффициенты разложения u по базисным функциям

Классически область разбивается на некие треугольники, после чего на каждом узле берется непрерывная базисная функция, линейно убывающая на соседних треугольниках и равная нулю на всех прочих.

Численный эксперимент

Эксперимент проводился для задач, для которых известно точное решение

$$\begin{array}{lll} 1) & f(x, y) = -2 * \sin(\pi x) * \sin(\pi y), & u(x, y) = \sin(\pi x) * \sin(\pi y), & D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2) & f(x, y) = -10 * \sin(\pi x) * \sin(\pi y), & u(x, y) = \sin(5\pi x) * \sin(5\pi y), & D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3) & f(x, y) = -200 * \sin(\pi x) * \sin(\pi y), & u(x, y) = \sin(10\pi x) * \sin(10\pi y), & D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

результат: во всех случаях были получены коэффициенты разложения приближения решения по базисным функциям