Taller Primer Corte - Gramáticas y Lenguajes Formales

Nombre: Juan Alejandro Salgado Arcila
Código: 1136999026

1 Alfabetos, Palabras, Lenguajes y Cerradura de Kleene

1.1 Conceptos Básicos

Dado el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

a) Escribe 5 ejemplos de **palabras** que pertenecen a Σ^*.

b) ¿Cuál es la longitud de la palabra '1101'? Se denota como $|1101|$.

c) Escribe todas las palabras en Σ^* con longitud igual a 3.

d) Describe en palabras el lenguaje $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ es par}\}$.

a) - 0
- 1
- ε
- 00
- 01

b) $|1101| = 4$

c) $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

d) Todas las cadenas binarias cuya longitud sea un número par.

1.2 Cerradura de Kleene

Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

a) Describe el lenguaje representado por la expresión a^*.

b) Describe el lenguaje representado por la expresión $(ab)^*$.

c) ¿La palabra 'ababa' pertenece al lenguaje $(ab)^*$? Justifica tu respuesta.

a) $a^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

b) $(ab)^* = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \ldots\}$

c) No, pues si descomponemos la cadena obtenemos:

$$ababa = ab \cdot ab \cdot a = (ab)^2 \cdot \underline{a}$$

$$a \notin (ab)^* \therefore ababa \notin (ab)^*$$

1.3 Cerradura Positiva vs. Cerradura de Kleene

Dado el alfabeto $\Sigma = \{x, y\}$.

a) Describe la diferencia fundamental entre la Cerradura de Kleene (Σ^*) y la Cerradura Positiva (Σ^+).

b) Escribe tres palabras que pertenezcan a Σ^+ pero no a un lenguaje definido como $(xy)^+$.

a) Σ^* contiene la palabra vacía (ε), mientras que Σ^+ no.

$$\Sigma^* = \{\varepsilon\} \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$$

$$\Sigma^+ = \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$$

b)
- x
- y
- yx

1.4 Conmutatividad en la Concatenación de Lenguajes

Dados los lenguajes $L_1 = \{a, ab\}$ y $L_2 = \{b, ba\}$ sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

a) Calcula el lenguaje resultante de la concatenación L_1L_2.

b) Calcula el lenguaje resultante de la concatenación L_2L_1.

c) ¿Es la operación de concatenación de lenguajes conmutativa? Justifica basándote en los resultados anteriores.

a) $L_1 L_2 = \{ab, aba, abb, abba\}$

b) $L_2 L_1 = \{ba, bab, baa, baab\}$

c) $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$

El orden de los lenguajes a concatenar puede alterar el resultado. Por lo tanto, no es conmutativa.

2 Operaciones entre Lenguajes y Expresiones Regulares

2.1 Operaciones entre Lenguajes

Dados los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\Sigma = \{x, y\}$:

- $L_1 = \{x, xy, yx\}$
- $L_2 = \{\epsilon, y, yy\}$ (donde ϵ es la palabra vacía)

Calcula los siguientes lenguajes:

a) **Unión:** $L_1 \cup L_2$

b) **Concatenación:** $L_1 L_2$

a) $L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, x, y, xy, yx, yy\}$

b) $L_1 L_2 = \{x, xy, xyy, xyyy, yx, yxy, yxyy\}$

2.2 Creación de Expresiones Regulares

Escribe una **expresión regular** para cada uno de los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$:

a) Todas las palabras que comienzan con 'a'.

b) Todas las palabras que terminan con 'bb'.

c) Todas las palabras que contienen la subcadena 'aba'.

d) Todas las palabras que tienen una longitud de al menos 1.

a) $a(a|b)^*$

b) $(a|b)^* b^2$

c) $(a|b)^* aba (a|b)^*$

d) $L = \{\omega \in \Sigma^* \mid |\omega| \geq 1\}$

2.3 Expresiones Regulares para Patrones Complejos

Escribe una expresión regular para cada uno de los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{0, 1\}$:

a) Todas las palabras que no contienen la subcadena '11'.

b) Todas las palabras que tienen un número impar de '0's.

a) $0^* (1 | \varepsilon) (0^+ (1 | \varepsilon))^*$

b) $1^* 0 (1^* | 01^*0)^*$

2.4 Interpretación de Expresiones Regulares

Para la expresión regular '$(a|b)c\,(d^*)$' sobre $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

a) Describe en lenguaje natural el tipo de palabras que acepta.

b) Proporciona tres ejemplos de palabras que pertenecen a este lenguaje.

c) Proporciona tres ejemplos de palabras que **no** pertenecen a este lenguaje.

a) Una 'a' o una 'b', inmediatamente seguida de una 'c' y cero o más 'd's.

b)
- ac
- bc
- acd

c)
- ε
- a
- b

3 Autómatas Finitos (AF)

3.1 Autómatas Finitos Deterministas (AFD)

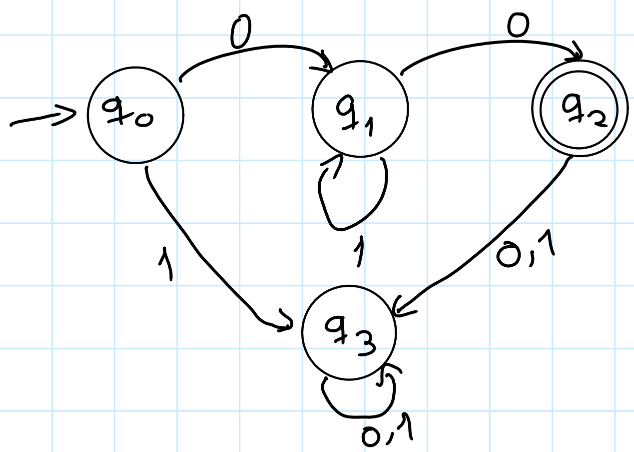
3.1.1. Construcción de AFD

Para los siguientes lenguajes, construye su respectivo AFD (diagrama y 5-tupla).

a) El lenguaje '01*0' sobre $\Sigma = \{0, 1\}$.

b) Palabras que representan números binarios pares sobre $\Sigma = \{0, 1\}$.

a)

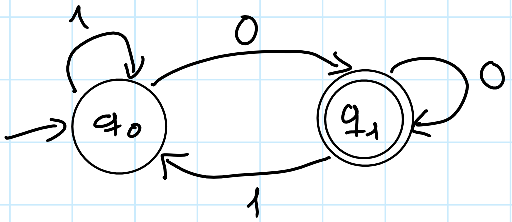


Ej:
00 ✓ ✓
0010 ✗ ✓
1010 ✗ ✓
01110 ✓ ✓
0101 ✗ ✓

5-tupla $A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta = \left\{ \begin{array}{ll} (q_0, 0) = q_1 & (q_2, 0) = q_3 \\ (q_0, 1) = q_3 & (q_2, 1) = q_3 \\ (q_1, 0) = q_2 & (q_3, 0) = q_3 \\ (q_1, 1) = q_1 & (q_3, 1) = q_3 \end{array} \right\}$
- $q_0 = \{q_0\}$
- $F = \{q_2\}$

b) Binarios pares → Siempre terminan en '0'.



Ej:

0	$= 0_{10}$	✓	✓
101	$= 5_{10}$	✗	✓
001	$= 1_{10}$	✗	✓
11	$= 3_{10}$	✗	✓
1000	$= 8_{10}$	✓	✓

5-tupla $A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

- $Q = \{q_0, q_1\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\delta = \left\{ \begin{matrix} (q_0, 0) = q_1 & (q_1, 0) = q_1 \\ (q_0, 1) = q_0 & (q_1, 1) = q_0 \end{matrix} \right\}$
- $q_0 = \{q_0\}$
- $F = \{q_1\}$

3.1.2. Minimización de un AFD

Minimiza el AFD definido por

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, q_0 inicial, $F = \{q_2, q_3, q_4\}$.

δ(q0, a) = q1
δ(q0, b) = q3

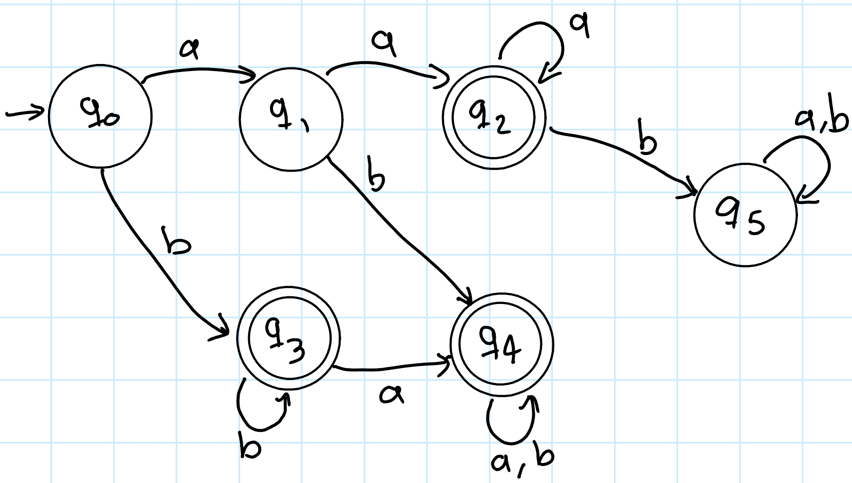
δ(q1, a) = q2
δ(q1, b) = q4

δ(q2, a) = q2
δ(q2, b) = q5

δ(q3, a) = q4
δ(q3, b) = q3

δ(q4, a) = q4
δ(q4, b) = q4

δ(q5, a) = q5
δ(q5, b) = q5



0

✓ 1

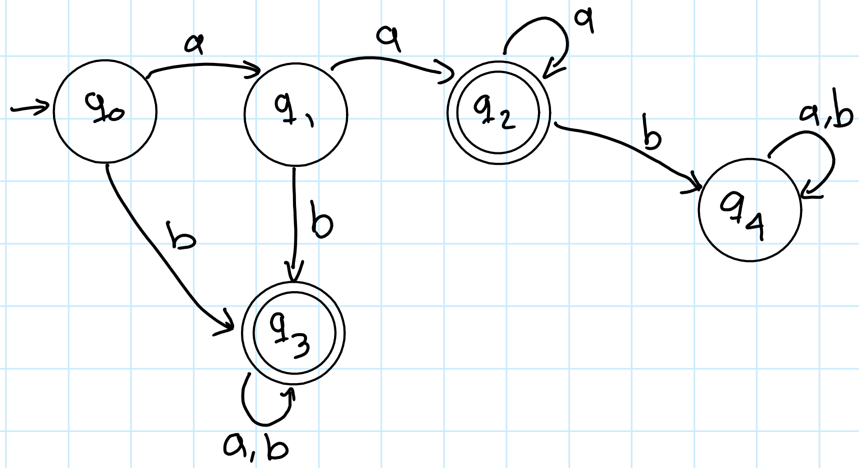
Una vez realizado el algoritmo de minimización, se concluye

✓ 1					
✓	✓ 2				
✓	✓	✓ 3			
✓	✓	✓	4		
✓	✓	✓	✓	✓ 5	

de minimización, se concluye

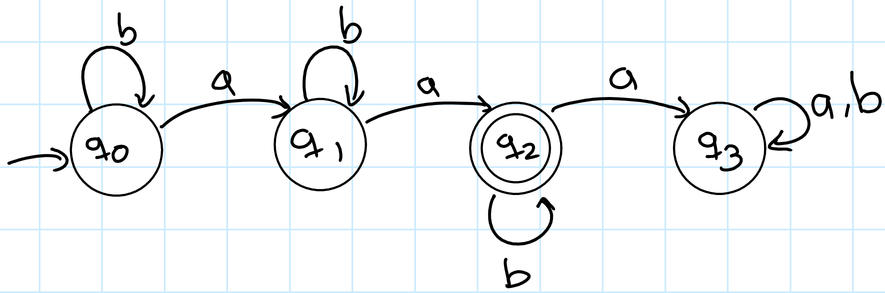
$q_3 \simeq q_4$

AFD Mínimo



3.1.3. Construcción de AFD con Restricciones Aritméticas

Construye un AFD (diagrama y 5-tupla) que acepte el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que contienen exactamente dos 'a's.



5-tupla $A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$

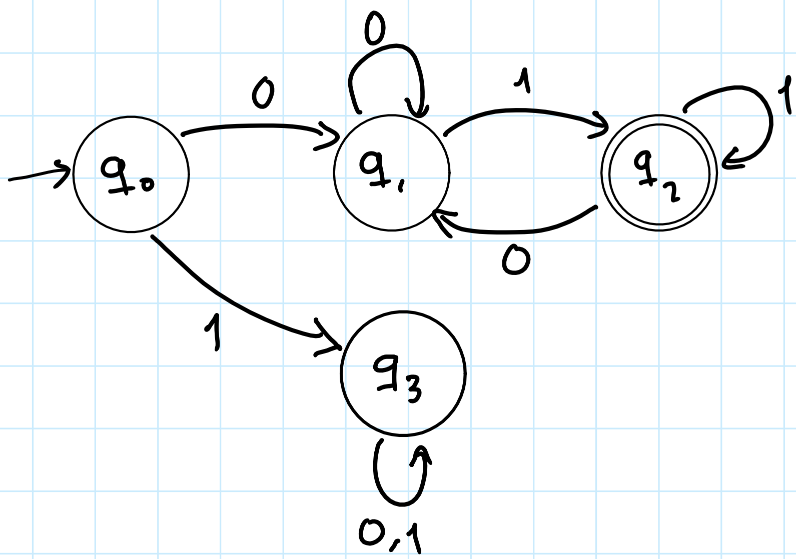
- $\delta = \left\{ \begin{array}{ll} (q_0, a) = q_1 & (q_2, a) = q_3 \\ (q_0, b) = q_0 & (q_2, b) = q_2 \\ (q_1, a) = q_2 & (q_3, a) = q_3 \\ (q_1, b) = q_1 & (q_3, b) = q_3 \end{array} \right\}$

- $q_0 = \{q_0\}$

- $F = \{q_2\}$

3.1.4. Construcción de AFD para un Lenguaje Específico

Construye un AFD (diagrama y 5-tupla) para el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que comienzan con '0' y terminan con '1'.



5-tupla $A = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

- $\Sigma = \{0, 1\}$

- $\delta = \left\{ \begin{array}{ll} (q_0, 0) = q_1 & (q_2, 0) = q_1 \\ (q_0, 1) = q_3 & (q_2, 1) = q_2 \\ (q_1, 0) = q_1 & (q_3, 0) = q_3 \\ (q_1, 1) = q_2 & (q_3, 1) = q_3 \end{array} \right\}$

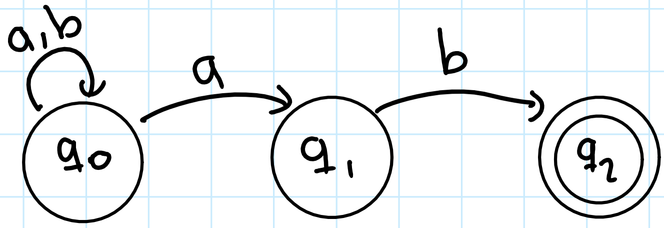
$$(q_1, 0) = q_1 \qquad (q_3, 0) = q_3$$
$$(q_1, 1) = q_2 \qquad (q_3, 1) = q_3$$

- $q_0 = \{q_0\}$
- $F = \{q_2\}$

3.2 Autómatas Finitos No Deterministas (AFND)

3.2.1. Construcción de AFND

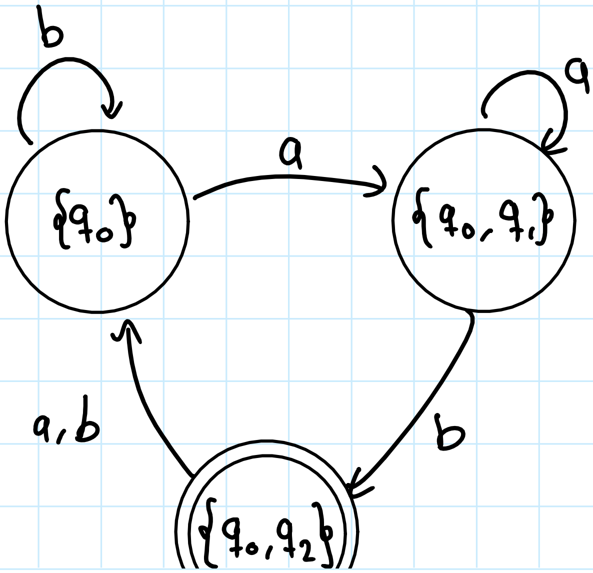
Construye un AFND para la expresión regular '$(a|b) * ab$'.

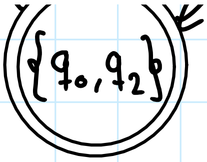


3.2.2. Conversión de AFND a AFD

Convierte el AFND del ejercicio anterior en un AFD equivalente.

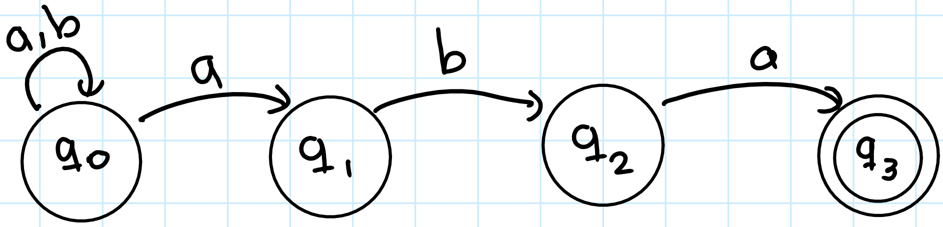
δ	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$



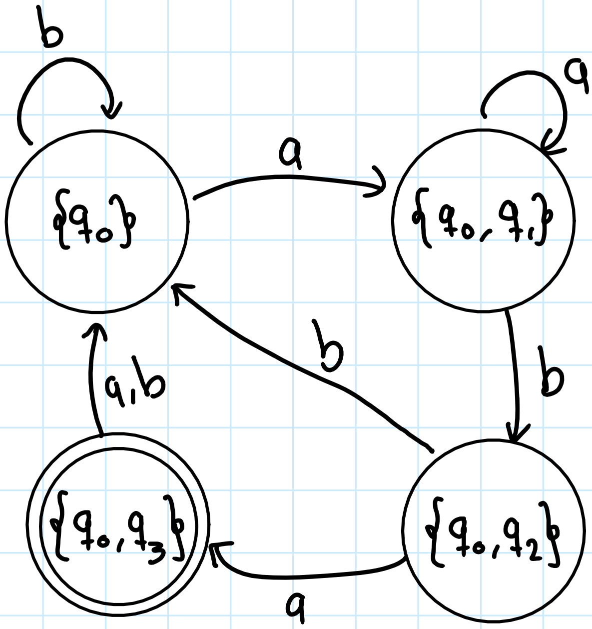


3.2.3. Construcción de AFND a AFD

Construye un AFND (diagrama y tabla de transición) que reconozca el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que terminan con la subcadena 'aba'. luego convierte el AFND a un AFD equivalente.



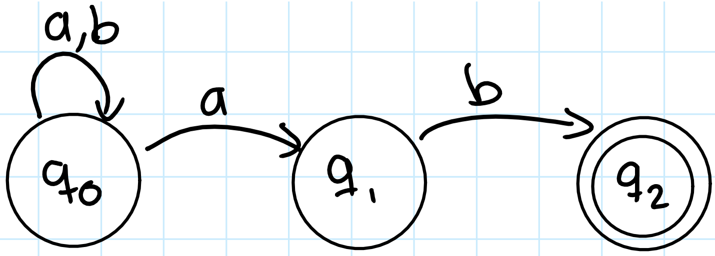
δ	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$



3.2.4. Conversión de AFND a AFD

Convierte el siguiente AFND en un AFD equivalente utilizando el algoritmo de construcción de subconjuntos. Muestra la tabla de transiciones del nuevo AFD y su diagrama de estados.

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- q_0 es el estado inicial
- $F = \{q_2\}$
- **Función de transición** δ:
  - $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$
  - $\delta(q_0, b) = \{q_0\}$
  - $\delta(q_1, b) = \{q_2\}$



δ	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$