แบบฝึกหัด 5 INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION I

1. กำหนดตารางความสัมพันธ์ระหว่างค่า x และ y ได้ดังตาราง

จุดที่	x	y
1	0	9.81
2	20,000	9.7487
3	40,000	9.6879
4	60,000	~~9.6879~~ 9.6287
5	80,000	9.5682

จงหาค่า y เมื่อ x = 4xxxx ด้วยวิธี ดังต่อไปนี้ โดย xxxx คือรหัส นศ 4 ตัวหลัง

1.1 LINEAR INTERPOLATION (2 จุด จุดที่ 1, 5)

1.2 QUADRATIC INTERPOLATION (3 จุด จุดที่ 1, 3, 5)

1.3 POLYNOMIAL INTERPOLATION (5 จุด จุดที่ 1, 2, 3, 4, 5)

2. จงจัดรูปให้ C_2 มีรูปแบบ สมการตามนี้

$$C_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

จงหาค่า y เมื่อ x = 4xxxx ด้วยวิธี ดังต่อไปนี้ โดย xxxx คือรหัส นศ 4 ตัวหลัง

1.1 LINEAR INTERPOLATION (2 จุด จุดที่ 1, 5)

1.2 QUADRATIC INTERPOLATION (3 จุด จุดที่ 1, 3, 5)

1.3 POLYNOMIAL INTERPOLATION (5 จุด จุดที่ 1, 2, 3, 4, 5)

$x = 40439$

1.1 Linear equation : $y = mx + c$

$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$ — ⊛

i	จุด	x_i	$f(x_i)$	c_1
0	x_0 1	0	c_0 9.81	$f[x_1, x_0] = -0.0000030225$ (c_1)
1	x_1 5	80,000	9.5682	

แทน x, c_0, c_1 ใน ⊛

$f(x) = 9.81 + (-0.0000030225 \cdot (40439 - 0)) = 9.687773123$ #

1.2 Quadratic Equation : $y = ax^2 + bx + c$

$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$

i	จุด	x_i	$f(x_i)$	c_1	c_2
0	1	x_0 0	9.81	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$
1	3	x_1 40000	9.6879	$f[x_2, x_1]$	
2	5	x_2 80,000	9.5682		

$c_0 = f(x_0) = 9.81$

$c_1 = f[x_1, x_0] = \dfrac{9.6879 - 9.81}{40000 - 0} = -0.0000030525$

$f[x_2, x_1] = \dfrac{9.5682 - 9.6879}{80000 - 40000} = -0.0000029925$

7.5×10^{-13}

$c_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \dfrac{-0.0000029925 - (-0.0000030525)}{80000 - 0} = 0.00000000000075$

แทน x, c_0, c_1, c_2 ใน ⊛

$f(x) = 9.81 + -0.0000030525\,(40439 - 0) + 0.00000000000075\,(40439 - 0)(40439 - 40000)$

$= 9.686572367$ #

1.2 Polynomial Equation : $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$$f(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1) + C_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + C_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

i	จุด		x_i	$f(x_i)$	C_1	C_2	C_3	C_4
0	1	x_0	0	9.81	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$	$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	2	x_1	20,000	9.7487	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	$f[x_4, x_3, x_2, x_1]$	
2	3	x_2	40000	9.6879	$f[x_3, x_2]$	$f[x_4, x_3, x_2]$		
3	4	x_3	60,000	9.6287	$f[x_4, x_3]$			
4	5	x_4	80,000	9.5682				

$$C_0 = f(x_0) = 9.81$$

$$C_1 = f[x_1, x_0] = -3.065 \times 10^{-6}$$
$$f[x_2, x_1] = -3.04 \times 10^{-6}$$
$$f[x_3, x_2] = -2.96 \times 10^{-6}$$
$$f[x_4\ x_3] = -3.025 \times 10^{-6}$$

$$C_2 = f[x_2, x_1, x_0] = 6.25 \times 10^{-13}$$
$$f[x_3, x_2, x_1] = 2 \times 10^{-12}$$
$$f[x_4, x_3, x_2] = -1.625 \times 10^{-12}$$

$$C_3 = f[x_3, x_2, x_1, x_0] = -1.0413 \times 10^{-17}$$
$$f[x_4, x_3, x_2, x_1] = -6.0416 \times 10^{-17}$$

$$C_4 = f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] = -6.25 \times 10^{-22}$$

แทนค่า $x, C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$ ใน ⊛

$$\begin{aligned} f(x) &= 9.81 + [-3.065 \times 10^{-6}(40439-0)] + [6.25 \times 10^{-13}(40439-0)(40439-20000)] + \\ &\quad [-1.0413 \times 10^{-17}(40439-0)(40439-20000)(40439-40000)] + \\ &\quad [-6.25 \times 10^{-22}(40439-0)(40439-20000)(40439-40000)(40439-60000)] \\ &= 9.686571905 \end{aligned}$$

#

จากสมการ Quadratic Equation $y = ax^2 + bx + c$

สร้าง Newton form : $f(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1)$ — ①

ให้ $x = x_0$; $f(x_0) = C_0 + C_1\cancel{(x_0 - x_0)} + C_2\cancel{(x_0 - x_0)}(x - x_1)$

$$C_0 = f(x_0) \text{ — ②}$$

ให้ $x = x_1$; $f(x_1) = C_0 + C_1(x_1 - x_0) + \cancel{C_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)}$

$$C_1 = \frac{f(x_1) - C_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ — ③}$$

ให้ $x = x_2$; $f(x_2) = C_0 + C_1(x_2 - x_0) + C_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

$$C_2 = \frac{f(x_2) - C_0 - C_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \frac{[f(x_1) - f(x_0)]\cdot(x_2 - x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2) + [-f(x_1) + f(x_1)] - f(x_0) - \frac{[f(x_1) - f(x_0)]\cdot(x_2 - x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1) + [f(x_1) - f(x_0)] - \frac{[f(x_1) - f(x_0)](x_2 - x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1) + [f(x_1) - f(x_0)]\left(1 - \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}\right)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1) + [f(x_1) - f(x_0)]\left(\frac{x_1 - \cancel{x_0} - x_2 + \cancel{x_0}}{x_1 - x_0}\right)}{(x_2 - x_0)(\cancel{x_2} - x_1)} \cdot \frac{\cancel{x_2} - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{[f(x_1) - f(x_0)]\cancel{(x_1 - x_2)}}{(x_1 - x_0)\cancel{(x_2 - x_1)}} \cdot \frac{-1}{-1}}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

#