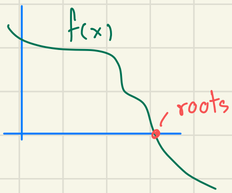
Roots of Equations

สมการที่มีปัญหา ค่า $y = f(x) = 0$

ex. system
$$\underbrace{\frac{x^2 + 3x + 5}{x - 2} = 0}_{\text{root of equations}}$$

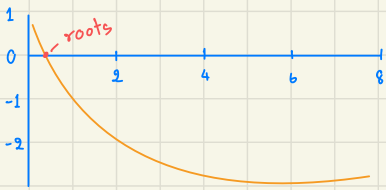


หาค่า x อะไรที่ทำให้ $y = f(x) = 0$

มี 6 วิธี

Graphical Method

Sequencial Search (Data Structure)



$$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$$

x	0		1	2	3	....	8
f(x)	1	0	-0.2212	-1	-1.4724		-1.821

Ⓘ
```
for (i = 0 ; i ≤ 8 ; i++) {
    หา range ของคำตอบ
    [x, y]
}
```

↓ ส่ง x, y

Ⅱ
```
for (i = x ; i < y ; i = i + 0.00001) {
    วนหาคำตอบแบบละเอียด
}
```

i = i + 0.001
```
for (i = 0 ; i ≤ 8 ; i++) {
    y = e^i/4 (2 - i) - 1 ;
    if (y == 0) {
        print(i);
    }
}
```

$y > -0.001$ && $y < 0.001$

-0.001   0   0.001

|error| ที่เราเลือกจะยอมรับ

y ไม่มีทางเป็น 0 เป๊ะๆ

Sequential Search

5	9	13	20	100
1	2	3	4	

find 20 ; t = 4

Binary Search (ข้อมูลต้องเรียง)

index	1	2	3	4	5
	L				R
	5	9	13	20	100

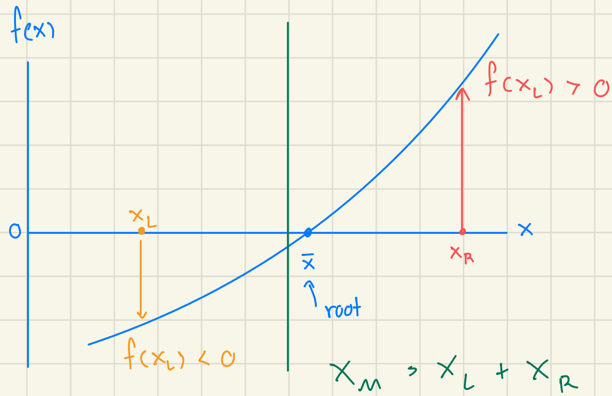
$$M^1 = \frac{L + R}{2} = 3$$

$$M^1 = L$$

$$M^2 = \frac{M^1 + R}{2} = 4$$

find 20 ; T = 2

Bisection Method (Binary Search) DS



$$x_M = \frac{x_L + x_R}{2}$$

1. define index L & R
2. find $M' = \frac{L+R}{2}$, $L/R = M'$

ค่าที่ index M

if (key > $\boxed{x[M]}$) {
    L = M // Left delete
} else {
    R = M // Right delete
}

Given $y = f(x)$

x_L x_R

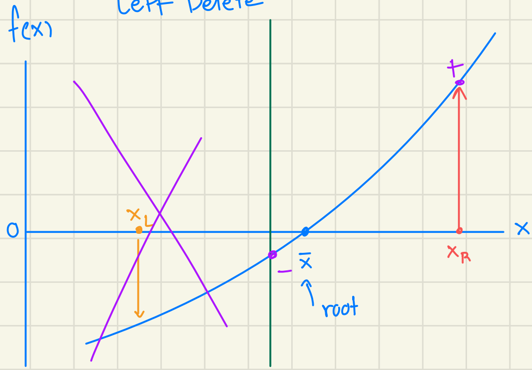
$f(x_L)$ $f(x_R)$

* ค่า f(x) เริ่มจากน้อยไปมาก
or มากไปน้อย

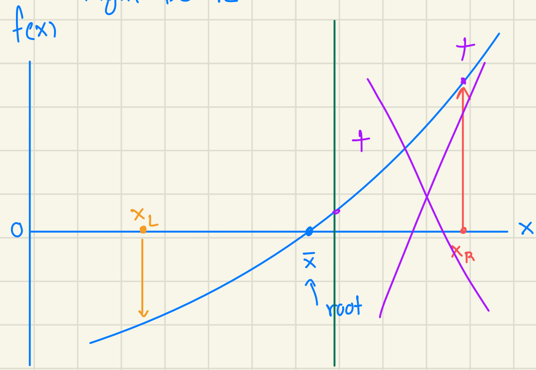
} $f(x_L)$ และ $f(x_R)$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกันเสมอ

I function เพิ่ม

Left Delete



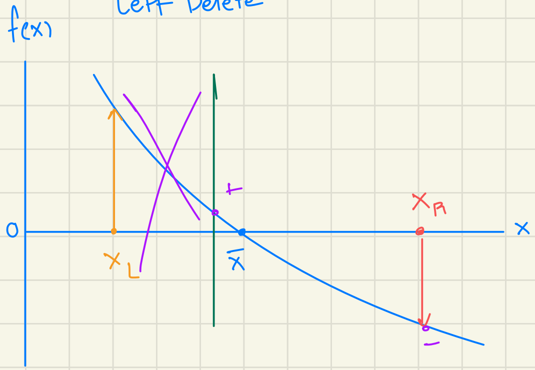
Right Delete



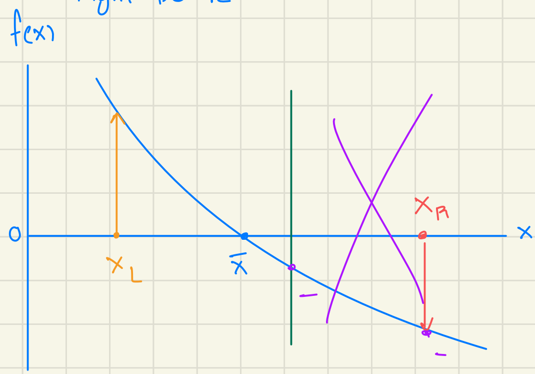

```
if (f(x_M) < 0) {
    x_L = x_M  // ตัดซ้าย
} else {
    x_R = x_M  // ตัดขวา
}
```

II function ลด

Left Delete



Right Delete




```
if (f(xm) > 0) {
    xL = xm    // ตัดซ้าย
else {
    xR = xm    // ตัดขวา
}
```

III

```
if (f(xm) · f(xR) < 0) {
    xL = xm    // ตัดซ้าย
} else    // f(xm) · f(xR) < 0
    xR = xm    // ตัดขวา
}
```

รวม I + II

ขั้นตอนการทำ Bisection

Step 1 ; find $x_m = \frac{x_L + x_R}{2}$

Step 2 ; $f(x_m) \cdot f(x_R) > 0$; $x_R = x_m$

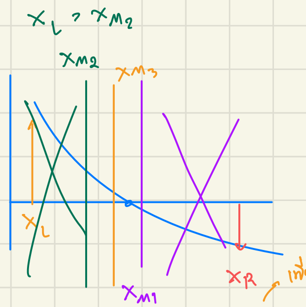
$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0$; $x_L = x_m$

(หยุด loop)

Step 3 ; −0.001 ——— $f(x_m) \approx 0$ ——— 0.001

3.1 : $|f(x_m)| < \varepsilon \rightarrow (f(x_m) > -0.001 \ \&\& \ f(x_m) < 0.001)$

3.2



$x_R = x_{m1}$

เทียบ x_m^{new}

$\left| \frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}} \right| \times 100\% < \varepsilon_s$

or

$x_m^{new} - x_m^{old}$

$x_{m2} - x_{m1} = 50$

$x_{m3} - x_{m2} = 25$

⋮

ยิ่งตัดไปเรื่อยๆ จะเข้าใกล้ 0

Find root of $\frac{2}{8}$ $\quad f(x) = 8x - 2 = 0$ $\quad \approx 0.25$

Given $x_L = -10$ $\quad x_R = 100$

Initial

$f(x_L) = -82$, $f(x_R) = 798$

$x_m = (-10 + 100)/2 = 45$

$f(x_m) = 358$

$f(x_m) \cdot f(x_R) > 0 \quad \therefore \; x_R = x_m = 45$

Iteration 1 : $x_L = -10$, $x_R = 45$

$x_m = (-10 + 45)/2 = 17.5$

$f(x_m) = 138$

$f(x_R) = 358$

$f(x_m) \cdot f(x_R) > 0 \quad \therefore \; x_R = x_m = 17.5$

$$\varepsilon = \left| \frac{17.5 - 45}{17.5} \right| \cdot 100\% = 157.1429\%$$

Iteration 2 : $x_L = -10$, $x_R = 17.5$

$x_m = \underline{(-10 + 17.5)}/2 = 3.75$

$f(x_m) = 28$

$f(x_R) = 138$

$f(x_m) \cdot f(x_R) > 0 \quad \therefore \; x_R = x_m = 3.75$

$$\varepsilon = \left| \frac{3.75 - 17.5}{3.75} \right| \cdot 100\% = 366.67\%$$

Iteration 3 : $x_L = -10$, $x_R = 3.75$

$x_m = (-10 + 3.75)/2 = -3.125$

$f(x_m) = -27$

$f(x_R) = 28$

$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0 \quad \therefore \; x_L = x_m = -3.125$

$$\varepsilon = \left| \frac{-3.125 - 3.75}{-3.125} \right| \cdot 100\% = 220\%$$

Iteration 4 : $x_L = -3.125$, $x_R = 3.75$

$x_m = (-3.125 + 3.75)/2 = 0.3125$

$f(x_m) = 0.5$

$f(x_R) = 28$

$f(x_m) \cdot f(x_R) > 0 \quad \therefore \; x_R = x_m = 0.3125$

$$\varepsilon = \left| \frac{0.3125 - 3.125}{0.3125} \right| \cdot 100\% = 900\%$$

Iteration 5 : $x_L = -3.125$, $x_R = 0.3125$

$x_m = (-3.125 + 0.3125)/2 = -1.40625$

$f(x_m) = -27$

$f(x_R) = 0.5$

$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0 \quad \therefore \; x_L = x_m = -1.04625$

Iteration 6 : $x_L = -1.40625$, $x_R = 0.3125$

$x_m = (-1.40625 + 0.3125)/2 = -0.546875$

$f(x_m) = -6.375$

$f(x_R) = 0.5$

$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0 \quad \therefore \; x_L = x_m = -0.546875$

Iteration 7 : $x_L = -0.546875$, $x_R = 0.3125$

$x_m = (-0.546875 + 0.3125)/2 = -0.118125$

$f(x_m) = -2.945$

$f(x_R) = 0.5$

$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0 \quad . \; x_L = x_m = -0.118125$

Iteration 8 : $x_L = -0.118125$ $x_R = 0.3125$

$x_m = (-0.540875 + 0.3125)/2 = 0.0971875$

$f(x_m) = -1..2225$

$f(x_R) = 0.5$

$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0 \quad \therefore x_L = x_m = 0.0971875$

Iteration 9 : $x_L = 0.0971875$ $x_R = 0.3125$

$x_m = (-0.540875 + 0.3125)/2 = 0.02048$

$f(x_m) = -0.30125$

$f(x_R) = 0.5$

$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0 \quad \therefore x_L = x_m = 0.02048$

Iteration 10 : $x_L = 0.02048$ $x_R = 0.3125$

$x_m = (0.02048 + 0.3125)/2 = 0.16649$

$f(x_m) = -0.66808$

$f(x_R) = 0.5$

$f(x_m) \cdot f(x_R) < 0 \quad \therefore x_L = x_m = 0.16649$

False-Position Method

เหมือน Bisection แต่เปลี่ยน x_m เป็น $x_1 = \dfrac{f(x_R) \cdot x_L - f(x_L) \cdot x_R}{x_R - x_L}$

What is Iteration ?

รอบที่ 1 : $i = 1 \quad sum_2 = \overset{0}{\cancel{sum_1}} + 1$

รอบที่ 2 : $i = 2 \quad sum_3 = sum_2 + 2$

รอบที่ 3 : $i = 3 \quad sum_4 = sum_3 + 3$

รอบที่ 4 : $i = 4 \quad sum_5 = sum_4 + 4$

รอบที่ 5 : $i = 5 \quad sum_6 = sum_5 + 5$

Plus Itelation

$1+2+3+4+5 = 15$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = 15 \qquad O(1)$$

Programming

```
sum = 0                 O(5)
for (i = 1; i <= 5; i++){
    sum = sum + i  (com)
}
print(sum)
```

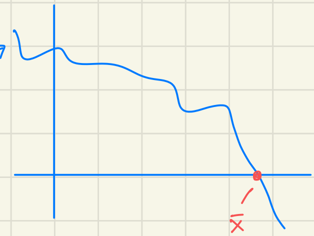
Iteration

$*\ sum_{i+1} = sum_i + i$ (math)

One - Point Iteration

บาง f(x) หาคำตอบไม่ได้
(บาง f(x) มีหลายคำตอบ)

(only one initial value needed)
given x_1



Ex. $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$

(I) rewrite as $x = 2 - e^{x/4}$

$$\downarrow$$

(II) $x_{i+1} = 2 - e^{x_i/4}$

(III) Initial $x_1 = 1 \qquad \varepsilon = 0.000001$ or $\varepsilon_s = 0.0001$

(error) (% error)

รอบ 1 ; $i = 1 \quad x_2 = 2 - e^{x_1/4} = 0.7159$ ← yes ans.

(IV) error $= |x_2 - x_1| = 0.2841 < \varepsilon$?

no

รอบ 2 ; $i = 2 \quad x_3 = 2 - e^{x_2/4} = 0.8040$

error $= |x_3 - x_2| = 0.0881$

Step I : จัดรูปสมการให้ x อยู่ด้านซ้าย ที่เหลือขวา

ex. $3x^2 + x + 5 = 0$

$x = -3x^2 - 5$

Step II : ให้ x ด้านซ้ายห้อย i+1 x ด้านขวาห้อย i

ex. $x_{i+1} = -3x_i^2 - 5$

Step III : กำหนด Initial ของ x_1 (sum = 0)

ex. $x_1 = 1$

รอบที่ 1 ; $i = 1 \quad x_{1+1} = -3x_1^2 - 5 = -8$

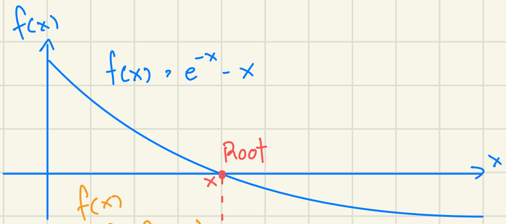
รอบที่ 2 ; $i = 2 \quad x_{2+1} = -3x_2^2 - 5 = -197$

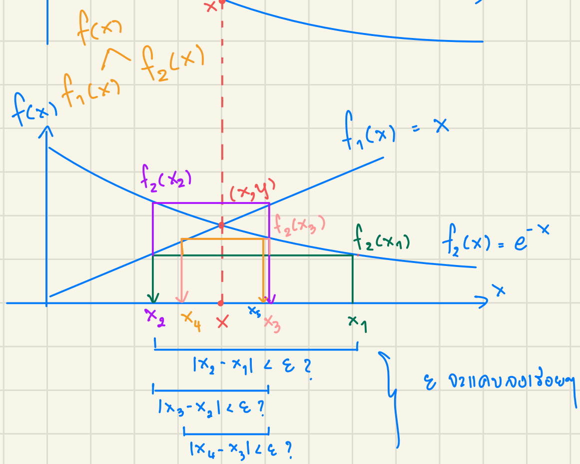
$\vdots$

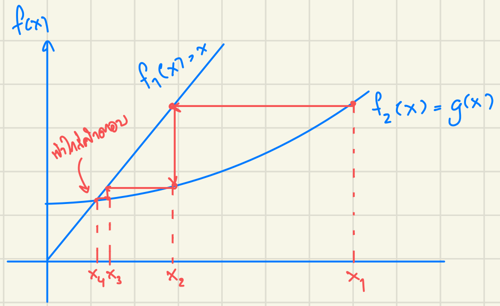
Step IV : หา error ว่าควรหยุดหรือไปต่อ

$$\left| \frac{x_{ใหม่} - x_{เก่า}}{x_{ใหม่}} \right| \times 100 < \varepsilon_s \rightarrow \text{\% error}$$

$$| x_{ใหม่} - x_{เก่า} | < \varepsilon \rightarrow \text{error}$$







Convergence ✓

Prove

$$f(x) = e^{-x} - x = 0$$

$$x = e^{-x}$$

$f_1(x)$ $\quad$ $f_2(x)$

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

Initial $x_1 = 1$

รอบ 1 ; $x_2 = e^{-x_1}$

รอบ 2 ; $x_3 = e^{-x_2}$

รอบ 3 ; $x_4 = e^{-x_3}$

⋮

What is Taylor Series?

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

given $f(x)$ เช่น $3x^2+5x+8$

$f(5) = ?$ โดยไม่จำเป็นต้องรู้ค่า $f(x)$

$$f(5) = 3(5)^2 + 5(5) + 8 = 108$$

ใช้ Taylor Series จะได้คำตอบตรงกัน หรือใกล้เคียง

กำหนด (ต้องรู้ $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \dots$) ถึงจะใช้ Taylor ได้

$x_0 = 1$, $f(x_0) = 16$, $f'(x_0) = 11$, $f''(x_0) = 6$, $f'''(x) = 0$

$$f(5) = f(1) + (5-1)(11) + \frac{(5-1)^2}{2!}(6) + \frac{(5-1)^3}{3!}0 + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$= 16 + 4(11) + 8(6) + 0 + 0 + \dots = 108$$

นำ Taylor Series ไป applied กับ

Newton - Raphson

หาค่า $f(3) = ?$ โดยใช้ Taylor Series เมื่อ $x_0 = 1$ และ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$

$f(3) = 97$

$f(x_0) = f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 + 5(1) + 1 = 2 + 3 + 5 + 1 = 11$

$f'(x) = 6x^2 + 6x + 5 \qquad f'(1) = 17$

$f''(x) = 12x + 6 \qquad f''(1) = 18$

$f'''(x) = 12 \qquad f'''(1) = 12$

$f''''(x) = 0 \qquad f''''(1) = 0$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{4!}f''''(x_0)$$

$$= 11 + (3-1)(17) + \frac{(3-1)^2}{2!}(18) + \frac{(3-1)^3}{3!}(12) + 0$$

$$= 11 + 34 + 36 + 16 = 97$$

Newton Raphson

from Taylor Series use only first order approximation $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0$

จาก
$$
\begin{aligned}
f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) &= 0 \\
f'(x_0)(x-x_0) &= -f(x_0) \\
x - x_0 &= \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \\
x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}
\longrightarrow
$$

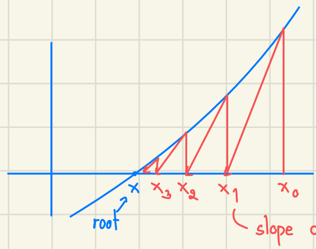
Iteration form
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

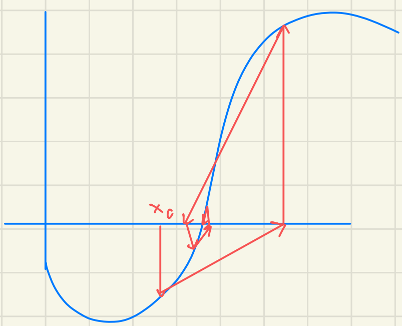
Initial x_0

$i = 1$; $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

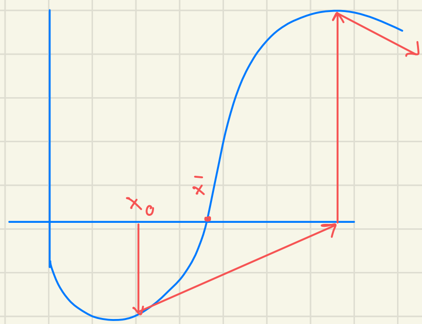
$i = 2$; $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

check $\varepsilon = |x_{i+1} - x_i| < \text{error}$? yes / no





Convergence



Divergence

Depend on initial x_0

example of Newton Raphson

Find root of $f(x) = e^{\frac{x}{4}}(2-x)-1 = 0$ by writing a computer program ($x_0 = 3$, $\varepsilon = 0.001\%$)

$$f'(x) = -e^{-\frac{x}{4}} - \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}(2-x) - 0 = e^{\frac{x}{4}}\left(-\frac{3}{2}+\frac{x}{4}\right)$$

Secant Method

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

จาก $= -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$= -\dfrac{f(x_1)(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}$

จาก $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0-x_1)}{f(x_0)-f(x_1)}$$