

Fortgeschrittenenpraktikum

V51 - Operationsverstärker

Leander Flottau	Jannis Vornholt
leander.flottau@udo.edu	jannis.vornholt@udo.edu

January 11, 2024

TU Dortmund University – Department of Physics

Contents

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Schaltungen mit Operationsverstärkern	3
2.1.1	Invertierender Linearverstärker	3
2.1.2	Umkehrintegrator	4
2.1.3	Invertierender Differentiator	5
2.1.4	Schmitt-Trigger	6
2.1.5	Signalgenerator	7
2.1.6	Signalgenerator mit variierenden Amplituden	7
3	Durchführung	8
4	Auswertung	9
4.1	Fehlerrechnung	9
4.2	Invertierender Verstärker	9
4.3	Integrator	12
4.4	Differentiator	13
4.5	Schmitt Trigger	13
4.6	Generator	15
4.7	Gedämpfte Schwingung	15
5	Diskussion	19

1 Ziel

Bei diesem Versuch werden die Eigenschaften von Operationsverstärkern untersucht. Dafür werden Operationsverstärker in verschiedene Schaltungen eingebaut und ihre Funktionsweise getestet.

2 Theorie

Operationsverstärker sind Differenzverstärker, d.h. die Ausgangsspannung U_A ist proportional zu der Differenz der beiden Eingangsspannungen U_P , U_N

$$U_A = V \cdot (U_P - U_N).$$

Somit ist die Ausgangsspannung in der Phase der am nicht-invertierenden Eingang (+) anliegenden Spannung U_P und gegenphasig zur am invertierenden Eingang (-) anliegenden Spannung U_N . Das proportionale Verhalten der Ausgangsspannung gegenüber der Differenz der beiden Eingangsspannungen, besteht nur im Bereich

$$-U_S < U_A < U_S,$$

wobei U_S die angelegte Betriebsspannung ist. Außerhalb dieses Bereiches entspricht die Ausgangsspannung $\pm U_S$.

Der ideale Operationsverstärker hat eine Leerlaufverstärkung von $V \rightarrow \infty$. Zudem sind die Eingangswiderstände r_p und r_n ebenfalls unendlich groß und der Ausgangswiderstand $r_a = 0\Omega$. Es werden Signale jeglicher Frequenz übertragen.

Diese Bedingungen lassen sich bei einem realen Operationsverstärker nicht umsetzen. Dies führt zu einer Leerlaufverstärkung von $V \propto 10^4 - 10^6$ und einer Übertragungsbandbreite von 10 Hz bis 10 kHz. Zusätzlich entsteht eine geringe Gleichtaktverstärkung, so wie eine Offsetspannung, wenn beide Eingangsspannungen 0 V betragen. Diese Offsetspannung ist als

$$U_0 = U_P - U_N$$

definiert, wobei die Eingangsspannungen so gewählt sind, dass $U_A = 0$.

2.1 Schaltungen mit Operationsverstärkern

2.1.1 Invertierender Linearverstärker

In Abbildung 1 ist ein invertierter Linearverstärker gezeigt. Bei diesem wird die Ausgangsspannung über den Widerstand R_2 in den invertierenden Eingang des Operationsverstärkers gegeben. Dadurch kommt es bei einer Zunahme der Ausgangsspannung zu einer Abnahme der Eingangsspannung. Diese Gegenkopplung wirkt einer Ausgangsspannung im gesättigten Bereich entgegen.

Aus der Proportionalität der Ausgangsspannung zur Eingangsspannung ergibt sich

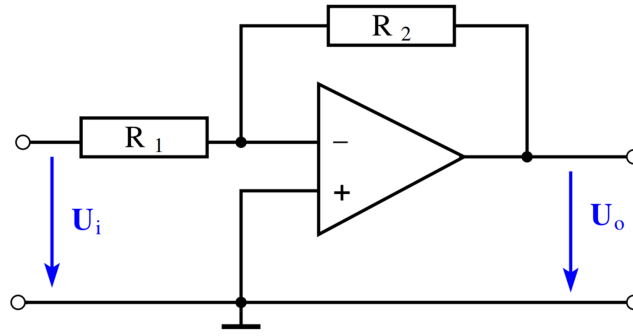


Figure 1: Schematische Darstellung eines invertierenden Verstärkers [Anleitung].

$$U_N = -\frac{U_A}{V}. \quad (1)$$

Mit der Annahme $I_N = 0$, folgt aus der Knotenregel für den Knoten vor dem invertierenden Eingang

$$\frac{U_N - U_1}{U_A - U_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_N}. \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung von Formel (1) und (2), so wie der Näherung $V \gg 1$ ergibt sich

$$\frac{1}{V'} = \frac{1}{V} + \frac{R_1}{R_N}. \quad (3)$$

Gut zu sehen ist, dass die Verstärkung bei $\frac{R_N}{R_1} \ll V$ nahezu nur noch von dem Verhältnis der Widerstände abhängt. Diese Gegenkopplung verringert damit die starken schwankungen von V und erhöht so die Stabilität des Verstärkers.

2.1.2 Umkehrintegrator

Tauscht man den Widerstand in der Rückkopplung des invertierenden Linearverstärker durch einen Kondensator, so erhält man einen Umkehrintegrator. Dieser ist in Abbildung 2 dargestellt.

Durch die Knotenregel und der Näherung $I_N = 0$, ergibt sich für den Knoten vor dem invertierenden Eingang

$$I_1 + I_C = 0. \quad (4)$$

Weiterhin gilt

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \quad (5)$$

so wie

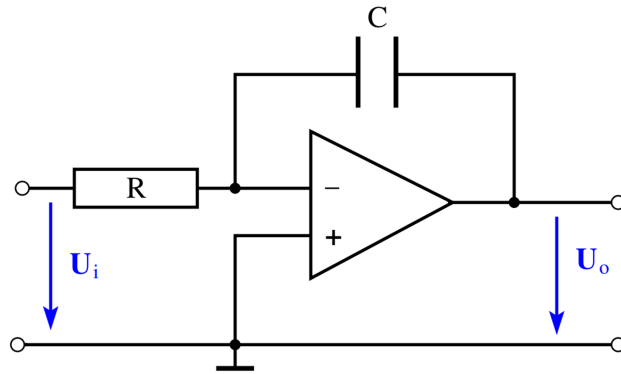


Figure 2: Schematische Darstellung eines Umkehrintegrators [**Anleitung**].

$$\int I_C dt = C U_A. \quad (6)$$

Daraus berechnet sich die Ausgangsspannung zu

$$U_A = -\frac{1}{RC} \int U_1 dt. \quad (7)$$

Für eine sinusförmige Eingangsspannung $U_1 = U_0 \sin(\omega t)$ folgt nun

$$U_A = -\frac{U_0}{RC\omega} \cos(\omega t). \quad (8)$$

2.1.3 Invertierender Differentiator

Werden nun der Widerstand und der Kondensator des Umkehrintegrators vertauscht, so entsteht der invertierende Differentiator, abgebildet in Abbildung 3.

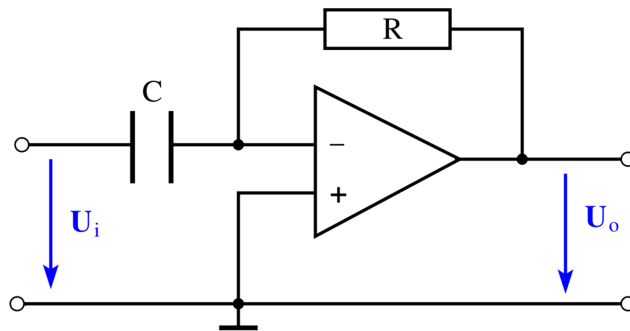


Figure 3: Schematische Darstellung eines invertierten Differentiators [**Anleitung**].

Für den Knoten vor dem invertierenden Eingang ergibt sich dann

$$I_1 + I_A = 0,$$

mit den Strömen

$$I_1 = \dot{Q} = C \cdot \dot{U}_1$$

$$I_A = \frac{U_A}{I_A}.$$

Damit hängt die Ausgangsspannung von der zeitlichen Ableitung der Eingangsspannung ab

$$U_A = -RC \cdot \dot{U}_1.$$

Für eine Eingangsspannung $U_1 = U_0 \sin(\omega t)$ ergibt sich dann die Ausgangsspannung

$$U_A = -RCU_0\omega \cdot \cos(\omega t), \quad (9)$$

welche proportional zur Frequenz ist.

2.1.4 Schmitt-Trigger

Bei dem Schmitt-Trigger, gezeigt in Abbildung 4, wird das Ausgangssignal über einen Widerstand in den nicht invertierenden Eingang des Operationsverstärkers gegeben. Dadurch wird das Eingangssignal verstärkt, wodurch der Schmitt-Trigger einem Schalter ähnelt. Übersteigt die Spannungsdifferenz an den Eingängen einen bestimmten Schwellenwert, so springt die Ausgangsspannung schlagartig auf $\pm U_S$. Daraus ergibt sich die rechteckige Ausgangsspannung. Die Schwellenwerte sind gegeben durch $-\frac{R_1}{R_P}U_S$ und $\frac{R_1}{R_P}U_S$.

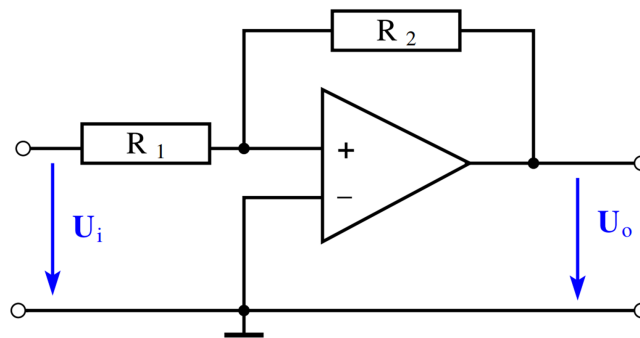


Figure 4: Schematische Darstellung eines Schmitt-Triggers [Anleitung].

2.1.5 Signalgenerator

Die Kombination aus Schmitt-Trigger und Integrator ist in Abbildung 5 dargestellt und entspricht einem Signalgenerator, welcher spontan anfängt zu schwingen. Die Rechtecksspannung am Ausgang des Schmitt-Triggers wird durch den Integrator integriert, was zu einer Dreiecksspannung am Ausgang des Integrators führt. Diese Dreiecksspannung wird wiederum als Eingangsspannung für den Schmitt-Trigger genutzt. Die Frequenz des schwingenden Systems ergibt sich zu $\nu_{\text{Dreieck}} = \frac{R_2}{4CR_1R_3}$ und die Amplitude entspricht $A = U_{\text{max}} \frac{R_q}{R_2}$.

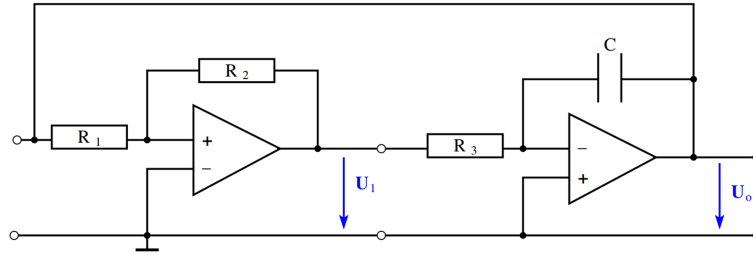


Figure 5: Schematische Darstellung eines Signalgenerators [Anleitung].

2.1.6 Signalgenerator mit variierenden Amplituden

Durch den in Abbildung 6 gezeigten Aufbau kann durch eine am Eingang anliegende Rechtecksspannung, eine gedämpfte Schwingung erzeugt werden. Diese gedämpfte Schwingung hat die Periodendauer

$$T = 2\pi RC \quad (10)$$

und eine Zerfallszeit von

$$\tau = \frac{20RC}{|\rho|}. \quad (11)$$

Dabei gilt für die Konstante ρ die Bedingung $-1 \leq \rho \leq 1$.

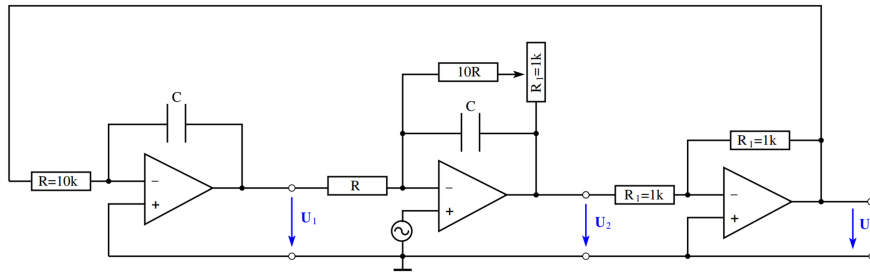


Figure 6: Schematische Darstellung eines Signalgenerators mit variierender Amplitude [Anleitung].

3 Durchführung

Die in Kapitel 2 dargestellten Schaltungen, werden nach Vorbild ihrer jeweiligen Abbildung aufgebaut und getestet.

- Bei dem invertierenden Linearverstärker wird eine Sinusspannung eingegeben und anschließend für verschiedene Frequenzen die Amplitude, so wie die Phasendifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung gemessen. Dies wird für drei verschiedene Verhältnisse zwischen R_1 und R_2 durchgeführt.
- Beim Integrator, so wie Differentiator werden ebenfalls die Amplituden der Ausgangsspannung bei verschiedenen Frequenzen einer eingehenden Sinusspannung untersucht. Zusätzlich werden über einen Signalgenerator Dreiecks- und Rechtecksspannungen als Eingangsspannung genutzt und das Verhalten der Ausgangsspannung mit Hilfe eines Oszilloskopes untersucht.
- Beim Schmitt-Trigger wird der Schwellenwert gesucht. Dafür wird die Eingangsspannung so lange erhöht, bis die Ausgangsspannung ihr Vorzeichen wechselt. Zudem wird der Schwellenwert mit Hilfe einer Dreiecksspannung ermittelt. Dafür wird eine Dreiecksspannung als Eingangsspannung angelegt, die deutlich größer als der Schwellenwert ist. Durch ein Oszilloskop kann dann der Schwellenwert abgelesen werden.
- Beim Signalgenerator werden sowohl die Ausgangsspannung des Schmitt-Triggers, so wie die des Integrators, auf einem Oszilloskop abgebildet und verglichen.
- Bei der gedämpften harmonischen Schwingung werden die Eingangs- und Ausgangsspannung auf dem Oszilloskop dargestellt und untersucht.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Für die Fehlerrechnung wird die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2} \quad (12)$$

für fehlerbehaftete Werte x, y, \dots, z mit den Unsicherheiten $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta z$ sowie der Fehler des Mittelwertes \bar{x} :

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (13)$$

verwendet.

4.2 Invertierender Verstärker

Für den invertierenden Verstärker wurden die Amplitude und die Phasenverschiebung Φ der Amplitude der Ausgangsspannung U_A in Abhängigkeit von der Frequenz f gemessen. Eine solche Messung wurde mit drei verschiedenen Konfigurationen von Widerständen ausgeführt.

Mittels der Eingangsamplitude des Signalgenerators wurde für alle Messungen aus den gemessenen Amplituden jeweils die Verstärkung G bestimmt und anschließend in einem doppellogarithmischen Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Frequenz abgebildet.

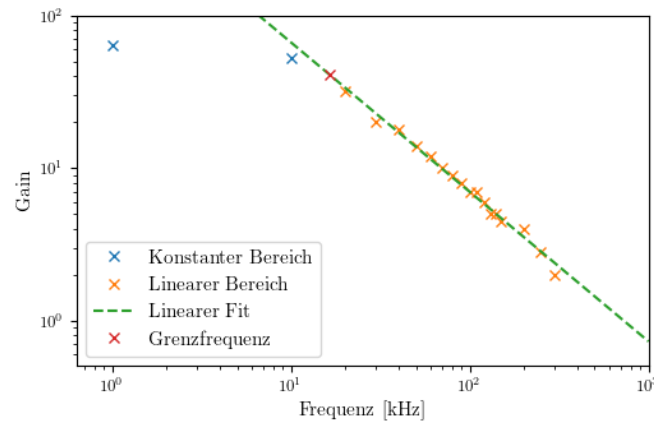


Figure 7: Verstärkung in Abhängigkeit von der Frequenz in doppellogarithmischer Darstellung für einen invertierenden Verstärker mit Widerständen $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 68 \text{ k}\Omega$

Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 7, 8, 9 dargestellt. Die Phasenverschiebungen der drei Messreihen finden sich in Abbildung 10. Im Bereich des linearen Zusammenhangs

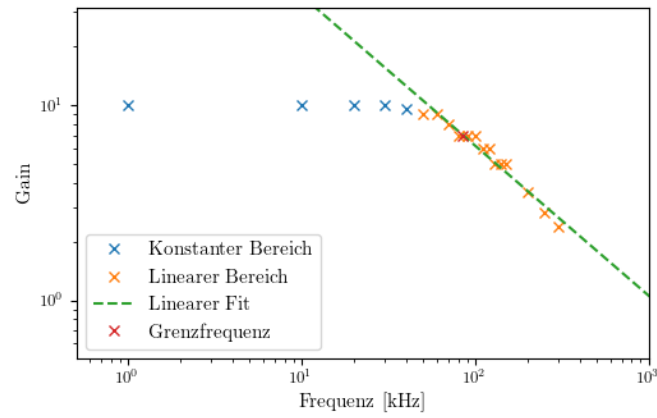


Figure 8: Verstärkung in Abhängigkeit von der Frequenz in doppellogarithmischer Darstellung für einen invertierenden Verstärker mit Widerständen $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$

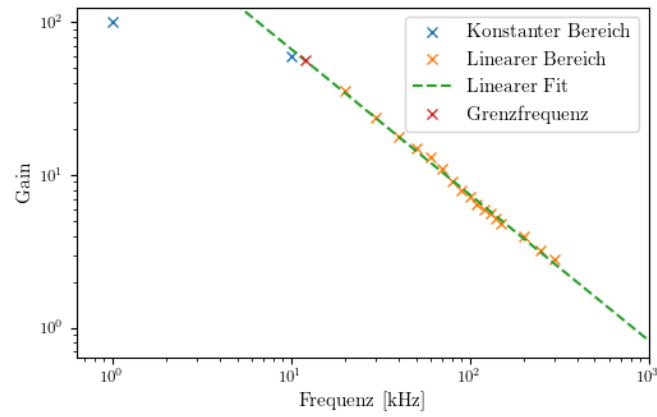


Figure 9: Verstärkung in Abhängigkeit von der Frequenz in doppellogarithmischer Darstellung für einen invertierenden Verstärker mit Widerständen $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$

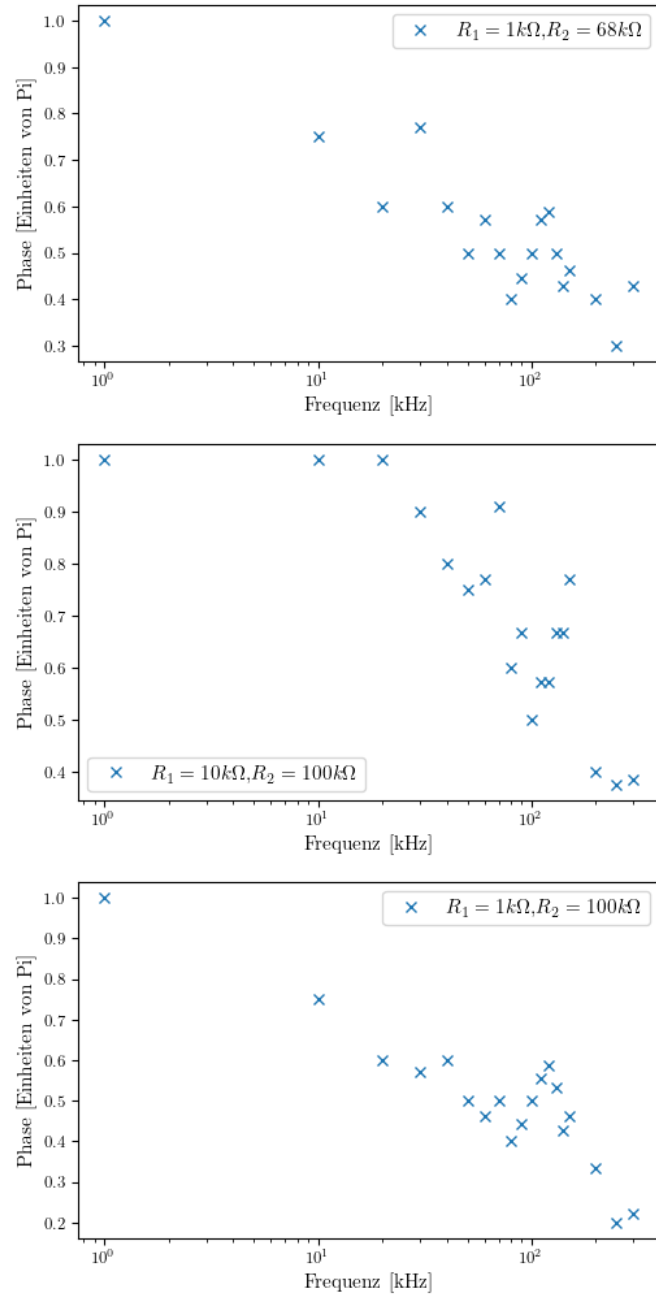


Figure 10: Phasenverschiebung in Einheiten von π abhängig von der Frequenz in halblogarithmischer Darstellung für einen invertierenden Verstärker für alle die drei vorgenommenen Messreihen

zwischen beiden Größen kann ein Fit der Form:

$$\log(G) = m \log(f) + b \quad (14)$$

welche im nicht logarithmischen Raum einer Funktion der Form:

$$G(f) = Bf^m \quad (15)$$

entspricht. Für die drei Messreihen lauten die Fitfunktionen:

$$G_1(f) = (634,79 \pm 76,14)f^{-0,98 \pm 0,26} \quad (16)$$

$$G_2(f) = (157,25 \pm 36,32)f^{-0,71 \pm 0,05} \quad (17)$$

$$G_3(f) = (605,03 \pm 63,597)f^{-0,95 \pm 0,02} \quad (18)$$

Die annähernd konstante Verstärkung im niederfrequenten Bereich G_c kann durch den Mittelwert der entsprechenden Messpunkte ermittelt werden. Mithilfe dieses Wertes sowie der gefitteten Funktionen im linearen Bereich kann die Grenzfrequenz f_g bestimmt werden. Diese ist definiert als die Frequenz, bei der die konstante Verstärkung sich um 3 dB bzw. den Faktor $1/\sqrt{2}$ verringert hat. Die Grenzfrequenz kann gemäß der gefitteten Funktion durch die Formel

$$f_g = \left(\frac{V_c}{B\sqrt{2}} \right)^m \quad (19)$$

Die Widerstände der Messreihen sowie die berechneten Verstärkungen und Grenzfrequenzen lauten:

Messung 1:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 68 \text{ k}\Omega \quad G_c = 58 \pm 6 \quad f_g = (16.4 \pm 2.3) \text{ kHz}$$

Messung 2:

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 100 \text{ k}\Omega \quad G_c = 9,9 \pm 0,1 \quad f_g = (85 \pm 33) \text{ kHz}$$

Messung 3:

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 100 \text{ k}\Omega \quad G_c = 80 \pm 20 \quad f_g = (12.0 \pm 3.5) \text{ kHz}$$

4.3 Integrator

Für den Integrator wurden ein Widerstand von $R = 10 \text{ k}\Omega$ und ein Kondensator mit der Kapazität von $C = 100 \text{ nF}$ verwendet.

Abbildung 11 zeigt die Amplitude der Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz. Zusätzlich ist eine Fitfunktion:

$$U_{int}(f) = (57,52 \pm 5,7)f^{-0,89 \pm 0,19} \quad (20)$$

angelegt. Ein solcher Verlauf entspricht der Erwartung für den Verstärkungsverlauf eines Integrators. Die Bilder in Abbildung 12 zeigen das Ausgangssignal des Integrators für verschiedene Eingangsspannungen. Wie zu erwarten ergibt sich aus einem Sinussignal nach Integration ein Kosinussignal, aus einer Rechteckspannung eine Dreiecksspannung und aus einer Dreiecksspannung ein parabolischer Verlauf.

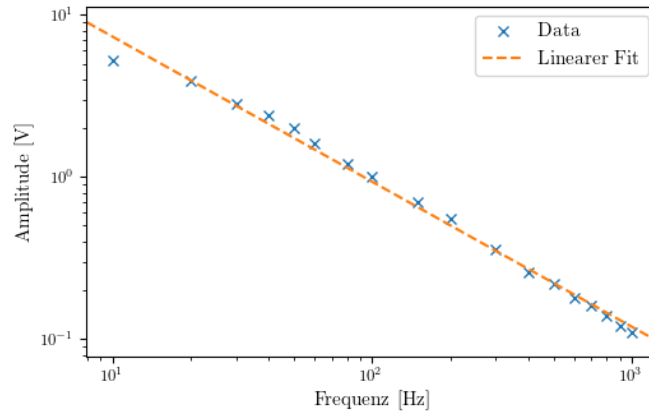


Figure 11: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz in doppellogarithmischer Darstellung für einen Integrator mit Widerstand $R = 10 \text{ k}\Omega$ und Kapazität $C = 100 \text{ nF}$

4.4 Differentiator

Der Differentiator verwendet einen Widerstand von $R = 100 \text{ k}\Omega$ und eine Kapazität von $C = 22 \text{ nF}$. Die Amplitude des Ausgangssignals in Abhängigkeit von der Frequenz findet sich in Abbildung 13. Der zugehörige Fit lautet:

$$U_{diff}(f) = (0,009 \pm 0,000, 5) f^{0,96 \pm 0,01} \quad (21)$$

Wie zu erwarten steigt die Amplitude bzw. die Verstärkung mit steigender Frequenz an, wie sich auch im Fit zeigt. Wie beim Integrator wird auch beim Differentiator durch die Fotos (14) die Reaktion auf die unterschiedlichen Eingangssignale veranschaulicht. Das Ausgangssignal erwartungsgemäß die Ableitung der jeweiligen Eingangsfunktion.

4.5 Schmitt Triger

Für den Schmitt Triger wurden die Widerstände $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ und $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ sowie die Betriebsspannungen $U_{\pm} = \pm 15 \text{ V}$ verwendet. Somit ergeben sich die theoretischen Kippspannungen zu:

$$U_{kipp,\pm} = U_{\pm} \frac{R_1}{R_2} = \pm 1.5 \text{ V} \quad (22)$$

Durch variieren der Amplitude des Eingangssignals konnte der Kippunkt und somit der Betrag der Kippspannung zu $U_{kipp} = 1.465 \text{ V}$ ermittelt werden. Weiterhin wurden durch Anlegen einer Dreiecksspannung an jeweils drei Punkten der Kippunkt der Ausgangsspannung am Oszilloskop beobachtet. Durch Bildung der Mittelwerte führt dies zu den Kippspannungen:

$$U_{kipp,+} = (1.567 \pm 0.060) \text{ V} \quad (23)$$

$$U_{kipp,-} = (1.500 \pm 0.058) \text{ V} \quad (24)$$

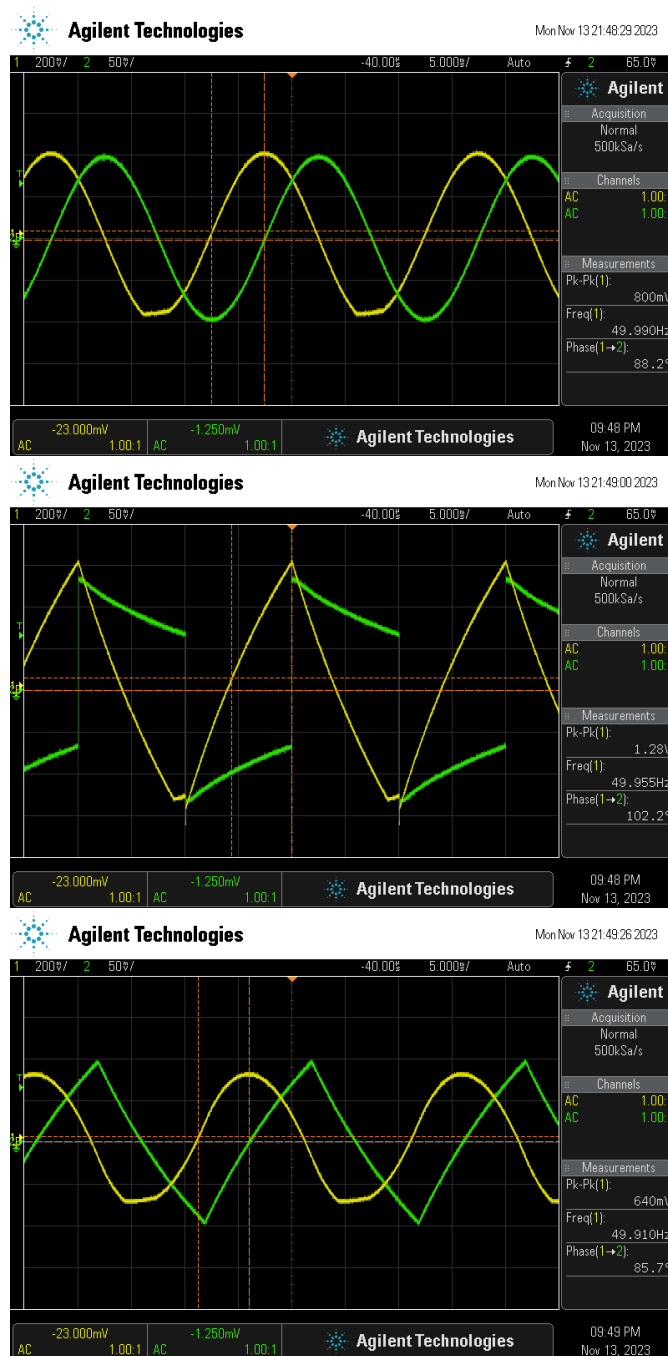


Figure 12: Ausgangssignal eines Integrators (gelb) für eine Sinus-, Rechtecks- und Dreiecksspannung als Eingangssignal (grün)

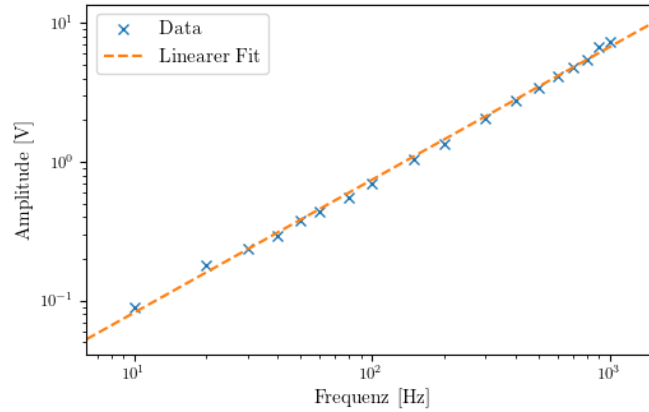


Figure 13: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz in doppellogarithmischer Darstellung für einen Differentiator mit Widerstand $R = 100 \text{ k}\Omega$ und Kapazität $C = 22 \text{ nF}$

4.6 Generator

Für die Konstruktion des Generators wurden die Widerstände $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ und $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ sowie die Kapazität $C = 10^{-6} \text{ F}$ verwendet. Dies liefert eine theoretische Frequenz des Ausgangssignals von:

$$f_a = \frac{R_2}{4CR_1R_3} = 2.5 \text{ kHz} \quad (25)$$

sowie eine Amplitude von

$$U_a = U_{max} \frac{R_1}{R_2} = 1.4 \text{ V} \quad (26)$$

Die experimentellen Werte der generierten Ausgangsspannung $f_{a,exp} = 1.62 \text{ kHz}$, $U_{a,exp} = 2.1 \text{ V}$ lassen sich der Abbildung 15 entnehmen.

4.7 Gedämpfte Schwingung

Für die gedämpfte Schaltung wurde eine Schaltung mit den Kenndaten $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 100 \text{ nF}$ verwendet. Die resultierende gedämpfte Schwingung ist in Abbildung 16 zu sehen. Die theoretische Periodendauer lässt sich damit durch die Formel

$$T_{theo} = 2\pi RC = 628.3 \text{ }\mu\text{s} \quad (27)$$

berechnen. Um die Periodendauer sowie die Abklingzeit τ zu berechnen wird eine der Schwingungen ausgewählt und ein exponentieller Fit an die Maxima angelegt um die Einhüllende zu bestimmen. Das Ergebnis findet sich in Abbildung 17. Die zugehörige Fitfunktion lautet:

$$U_{schwing}(t) = a \exp(-mt) = (0,015 \pm 0,0004) \exp(-(1912,84 \pm 86,98)t) \quad (28)$$



Figure 14: Ausgangssignal eines Differentiators (gelb) für eine Sinus-, Rechtecks- und Dreiecksspannung als Eingangssignal (grün)

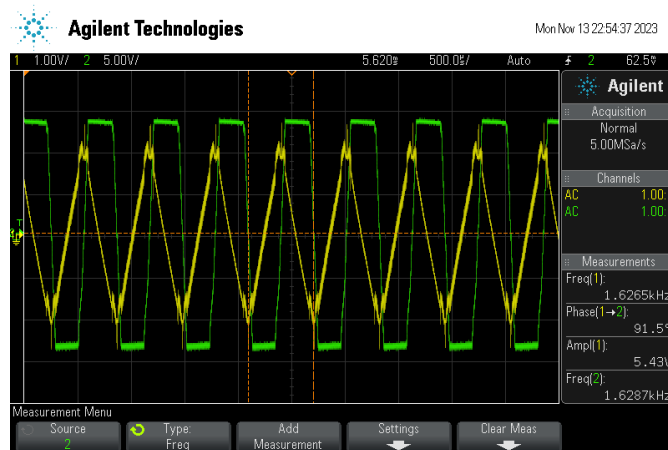


Figure 15: Dreiecksschwingung und Rechteckschwingung des Generators

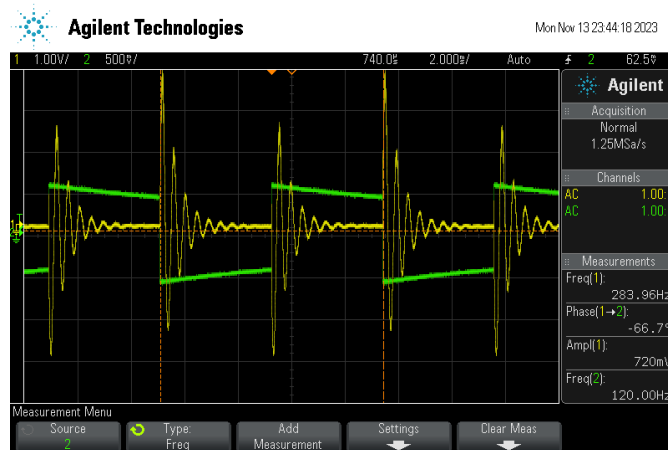


Figure 16: Ausgangssignal eines Integrators (gelb) für eines- Sinus-, Rechteck und Dreiecksspannung als Eingangssignal (grün)

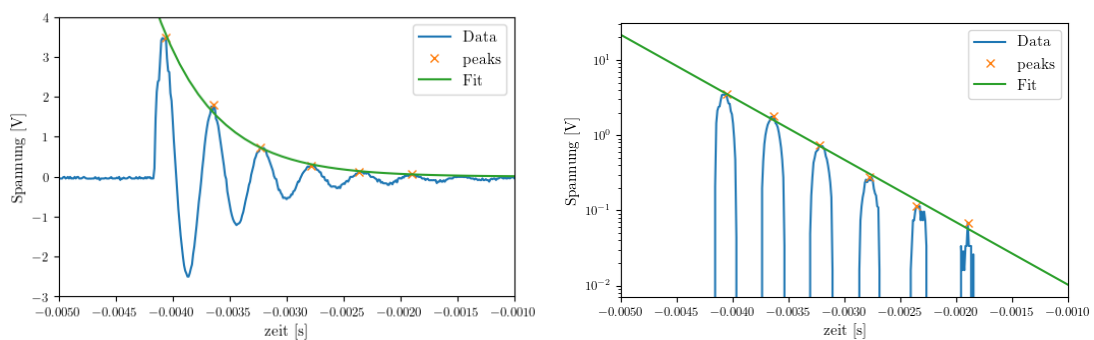


Figure 17: Amplitude in Abhängigkeit von der Zeit für eine gedämpfte Schwingung in linearer und halblogarithmischer Darstellung

woraus die Abklingzeit

$$\tau = 1/m = (523.0 \pm 23.8) \mu\text{s} \quad (29)$$

bestimmt werden kann. Weiterhin kann durch die mittlere Distanz zwischen den Maxima die Periodendauer bestimmt werden:

$$T_{exp} = (432.0 \pm 9.7) \mu\text{s} \quad (30)$$

5 Diskussion

Die Messungen des invertierenden Verstärkers zeigen sehr gut die Frequenzabhängigkeit der Amplitude auf. Durch den gut erkennbaren linearen Verlauf war die Grenzfrequenz ohne Probleme bestimmbar und auch die konstante Verstärkung liegt im aus der Theorie erwarteten Bereich. Abhängig vom Verhältnis der Widerstände ist allerdings der konstante Bereich des Verlaufs nicht in allen Messreihen gleich gut zu erkennen. Dies wird dadurch bestärkt, dass die Messwerte in linearen Abständen gewählt wurden und somit auf einer logarithmischen Skala in den niedrigen Größenordnungen Messwerte fehlen. Weiterhin können Innenwiderstände und andere Störeffekte, die in dem Modell eines idealen Operationsverstärkers nicht berücksichtigt sind, Gründe für Abweichungen sein. Die Frequenzabhängigkeit der Phase lässt zwar qualitativ den Verlauf erkennen, die Messung ist jedoch sehr ungenau und stark gestreut. Dies liegt vermutlich daran, dass die Phasenverschiebung mit bloßem Auge anhand der Verschiebung auf dem Oszilloskop abgelesen wurde, was sehr fehleranfällig ist.

Die Messungen der Integrator und Differentiator Schaltungen konnten erfolgreich den jeweiligen aus der Theorie erwarteten Verlauf der Verstärkung in Abhängigkeit von der Frequenz nachweisen. Durch das Anlegen verschiedener Spannungsformen konnte außerdem die Eigenschaft der Schaltungen, das Eingangssignal zu integrieren bzw. zu differenzieren gezeigt werden.

Für den Schmitt Trigger konnten die beiden Kippunkte mit zwei unterschiedlichen Methoden mit geringen Unsicherheiten zu $U_{kipp,\pm} = 1.465 \text{ V}$, $U_{kipp,+} = (1.567 \pm 0.060) \text{ V}$ und $U_{kipp,-} = (1.500 \pm 0.058) \text{ V}$ bestimmt werden. Dies entspricht geringen Abweichungen von 4,5% und 2,3% vom Theoriewert $U_{kipp,theorie} = \pm 1.5 \text{ V}$.

Im Gegensatz dazu konnten bei den Generator-Schaltungen zwar die erwarteten Schwingungen erzeugt und vermessen werden, die gemessenen Werte $f_{a,exp} = 1.62 \text{ kHz}$ und $U_{a,exp} = 2.1 \text{ V}$ für Frequenz und Amplitude der ungedämpften Schwingung weichen jedoch mit 34,8% und 50% von den Theoriewerten $f_a = 2.5 \text{ kHz}$ und $U_a = 1.4 \text{ V}$ deutlich ab. Auch der experimentelle Wert $T_{exp} = (432.0 \pm 9.7) \mu\text{s}$ für die Periodendauer der gedämpften Schwingung weicht vom theoretischen Wert $628.3 \mu\text{s}$ mit 31,2% deutlich ab. Dies erscheint merkwürdig, da die Ergebnisse qualitativ sehr gut zu den Erwartungen passen und keine der experimentellen Messungen mit großen Unsicherheiten behaftet sind. Dies legt einen systematischen Fehler, beispielsweise in den für die Berechnung der Theoriewerte verwendeten Konstanten nahe.