# ? МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕНЯ

## ?.1 Змістовна постановка задачі

## ?.2 Математична постановка задачі

Класична постановка задачі маршрутизації транспортних засобів (VRP) наведена у [загальна частина диплому]. Наведемо основні відмінності задачі маршрутизації транспортних засобів з урахуванням вантажомісткості та штрафів у разі невиконання замовлення (Capacitated VRP with Fine – CVRPF) від VRP.

Автопарк складається із обмеженої кількості транспортних засобів, вантажомісткість яких . Із кожним споживачем пов’язане замовлення . Замовлення усіх споживачів мають бути виконані, і жодний транспортний засіб не може перевезти продукції більш ніж одиниць.

Мінімальна кількість транспортних засобів, необхідних для виконання усіх замовлень, дорівнює:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (?.1) |

Але часто буває так, що компанія молодіє меншою кількістю транспортних засобів . Тоді необхідно відмовитись від частини замовлень, таким чином щоб сумарні затрати на перевезення та затрати, пов’язані із виплатою штрафів були мінімально можливими.

Із кожним споживачем пов’язаний штраф , який зобов’язана виконати логістична компанія у разі невиконання замовлення цього споживача.

Наведемо формулювання задач CVRPF як задачі цілочисельного лінійного програмування. Використаємо наступну нотацію:

* – бінарна змінна, що приймає значення 1, якщо маршрут -ого транспортного засобу включає безпосередній переїзд із міста у місто , і значення 0 у іншому випадку;
* – бінарна змінна, що приймає значення 1, якщо замовлення -го споживача виконане -им транспортного засобу, і значення 0 у іншому випадку.
* – бінарна змінна, що приймає значення 1, якщо -ому споживачу за данного розв’язку необхідно виплатити штраф, і значення 0 у іншому випадку.

Цільова функція – мінімізація сумарних затрат на перевезення продукції вартості та затрат, пов’язаних із виплатою штрафів:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (?.2) |

Обмеження:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (?.3) |
|  | (?.4) |
|  | (?.5) |
|  | (?.6) |
|  | (?.7) |
|  | (?.8) |
|  | (?.9) |
|  | (?.10) |
|  | (?.11) |

Обмеження (?.3) гарантують, що кожний споживач буде відвіданий не більше одного разу (або відвіданий один раз одним транспортним засобом, або не відвіданий зовсім). Обмеження (?.4) забезпечують виїзд транспортного засобу від кожного відвіданого ним споживача. Обмеження (?.5) гарантують виїзд кожного транспортного засобу із міста-складу, забезпечуючи таким чином використання усіх наявних транспортних засобів. Обмеження (?.6) унеможливлюють утворення у розв’язку маршрутів, які не містять склад. Обмеження (?.7) гарантують, що клієнт обслуговується транспортним засобом , тільки якщо він проїжджає через місто . Обмеження (?.9) унеможливлюють можливість перевезення транспортним засобом продукції обсягом більше ніж їх вантажомісткість.

## ?.4 Опис методів розв’язання

### ?.4.2 Опис 2-етапного алгоритму для розв’язання CVRP

#### ?.4.2.1 Перший етап – кластеризація вершин графу

Постановка задачі кластеризації наведена у п. 3.4.2.1.1 [загальна частина диплому]. Основна проблема кластеризації для CVRP полягає у тому, що оптимальна кількість кластерів не відома, відома лише нижня межа необхідної кількості кластерів (формула (?.1)).

##### **?.4.2.1.1 Nearest-neighbor chain**

Алгоритм ланцюга найближчих сусідів (Nearest-neighbor chain algorithm) полягає у повторюваній побудові ланцюгів найближчих сусідів , де кожний кластер є найближчим сусідом попереднього, до тих пір доки не буде досягнута пара кластерів які є взаємно найближчими сусідами.

Наведемо більш формальний опис даного методу у вигляді покрокового алгоритму.

**Крок 1.** Формується початкова множина активних із активних кластерів, шляхом формування окремого кластеру для кожної точки.

**Крок 2.** Нехай – стекова структура даних, елементи якої є кластерами. Ініціаліазуємо її як порожню структуру.

**Крок 3.** Якщо поточне розбиття на кластери задовольняє умові задачі, завершити роботу алгоритму. Інакше перейти на крок 4.

**Крок 4.** Побудова ланцюга найближчих сусідів

**4.1** Якщо стек порожній, обрати довільний кластер і помістити його у верхівку стеку .

**4.2** Нехай кластер на верхівці стеку . Розрахувати відстані від до усіх інших кластерів. Нехай – найближчий кластер.

**4.3** Якщо не міститься у , помістити його у верхівку стеку та перейти до кроку 4.2.

**4.4** Якщо уже міститься у (він має бути безпосереднім попередником кластеру ), видаляємо кластери та із стеку та із множини активних кластерів, та додаємо об’єднаний кластер до множини активних кластерів.

**4.5** Перейти на крок 3.

Для того, щоб даний алгоритм застосувати як перший етап 2-етапного алгоритму розв’язку CVRP необхідно внести модифікації пов’язані із обмеженнями «місткості» кластеру (оскільки обмеженою є місткість транспортних засобів).

Наведемо модифіковану схему алгоритму призначену для кластеризації вершин CVRP.

**Крок 1.** Нехай – двозв’язаний список. Формуємо цей список шляхом формування окремого кластеру для кожної точки і додаванням її до списку.

**Крок 2.** Нехай – стекова структура даних, елементи якої є кластерами. Ініціаліазуємо її як порожню структуру.

**Крок 3.** Обираємо перший кластер із списку і встановлюємо його як поточний кластер та додаємо до стеку .

**Крок 4.** Побудова ланцюга найближчих сусідів

**4.1** Нехай кластер на верхівці стеку . Розрахувати відстані від до усіх інших кластерів. Нехай – найближчий кластер.

**4.2** Якщо не міститься у , помістити його у верхівку стеку та перейти до кроку 4.1.

**4.3** Якщо уже міститься у (він має бути безпосереднім попередником кластеру ) і можливе об’єднання та (тобто ), видаляємо кластери та із стеку та списку , та додаємо об’єднаний кластер до списку та у верхівку стеку .

**4.5** Якщо поточний кластер А був не останнім у списку обрати наступний за ним кластер, встановити його як поточний, спустошити стек та додати у його верхівку новий поточний кластер і перейти до кроку 4.

**Крок 5.** Якщо на кроці 4 не було здійснено жодного об’єднання кластерів, завершити роботу алгоритму, інакше перейти до кроку 2.

##### **?.4.2.1.2 Бджолиний алгоритм кластеризації**

#### ?.4.2.2 Другий етап – побудова маршрутів відповідно до проведеної кластеризації

Другий етап даного алгоритму розв’язання CVRP є таким самим як і другий етап даного алгоритму для розв’язання VRP і полягає у розв’язанні задачі комівояжера для кожного кластеру (див. п. 3.4.2.1 загальної частини диплому).