# ? МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕНЯ

## ?.1 Змістовна постановка задачі

## ?.2 Математична постановка задачі

Класична постановка задачі маршрутизації транспортних засобів (VRP) наведена у [загальна частина диплому]. Наведемо основні відмінності CVRP від VRP.

Автопарк складається із необмеженої кількості транспортних засобів, вантажомісткість яких . Із кожним споживачем пов’язане замовлення . Замовлення усіх споживачів мають бути виконані, і жодний транспортний засіб не може перевезти продукції більш ніж одиниць. Зрозуміло, що мінімальна кількість транспортних засобів, необхідних для виконання усіх замовлень, дорівнює:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (?.1) |

У класичні постановці CVRP замовлення одного клієнта не перевищує вантажомісткість транспортних засобів, тобто. Задачу, у якій замовлення може перевищувати вантажомісткість транспортних засобів будемо називати розширеною CVRP та позначати CVRP+. У випадку CVRP+ кожний споживач має бути відвіданий мінімально можливу кількість разів. Тобто:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (?.2) |

де – мінімальна кількість транспортних засобів необхідних для виконання замовлення споживача .

Наведемо загальне формулювання задач CVRP/CVRP+ як задачі змішаного цілочисельного лінійного програмування. Використаємо наступну нотацію:

* – бінарна змінна, що приймає значення 1, якщо маршрут -ого транспортного засобу включає безпосередній переїзд із міста у місто , і значення 0 у іншому випадку;
* – кількість продукції доставленої -ому споживачу -им транспортним засобом; для CVRP ця змінна може приймати лише два значення – , якщо -ий транспортний засіб виконав замовлення споживача із міста , у іншому випадку , у випадку CVRP – .

Цільова функція – мінімізація сумарної вартості (довжини) складеного маршруту:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (?.3) |

Обмеження:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (?.4) |
|  | (?.5) |
|  | (?.6) |
|  | (?.7) |
|  | (?.8) |
|  | (?.9) |
|  | (?.10) |
|  | (?.11) |
|  | (?.12) |

Обмеження (?.4) гарантують, що кожний споживач буде відвіданий лише мінімально можливою кількістю транспортних засобів. Обмеження (?.5) забезпечують виїзд транспортного засобу від кожного відвіданого ним споживача. Обмеження (?.6) гарантують виїзд кожного транспортного засобу із міста-складу, забезпечуючи таким чином використання усіх наявних транспортних засобів. Обмеження (?.7) унеможливлюють утворення у розв’язку маршрутів, які не містять склад. Обмеження (?.8) гарантують, що клієнт обслуговується транспортним засобом , тільки якщо він проїжджає через місто . Виконання усіх замовлень у повному обсязі забезпечується обмеженнями (?.9). Обмеження (?.10) унеможливлюють можливість перевезення транспортним засобом продукції обсягом більше ніж їх вантажомісткість.

Доведено, що якщо задача (?.3)-(?.12) має допустимі розв’язки, тоді існує повністю цілочисельний оптимальний розв’язок, тобто оптимальний розв’язок у якому .

## ?.4 Опис методів розв’язання

### ?.4.2 Опис 2-етапного алгоритму для розв’язання CVRP

#### ?.4.2.1 Перший етап – кластеризація вершин графу

Постановка задачі кластеризації наведена у п. 3.4.2.1.1 [загальна частина диплому]. Основна проблема кластеризації для CVRP полягає у тому, що оптимальна кількість кластерів не відома, відома лише нижня межа необхідної кількості кластерів (формула (?.1)).

##### **?.4.2.1.1 Nearest-neighbor chain**

Алгоритм ланцюга найближчих сусідів (Nearest-neighbor chain algorithm) полягає у повторюваній побудові ланцюгів найближчих сусідів , де кожний кластер є найближчим сусідом попереднього, до тих пір доки не буде досягнута пара кластерів які є взаємно найближчими сусідами.

Наведемо більш формальний опис даного методу у вигляді покрокового алгоритму.

**Крок 1.** Формується початкова множина активних із активних кластерів, шляхом формування окремого кластеру для кожної точки.

**Крок 2.** Нехай – стекова структура даних, елементи якої є кластерами. Ініціаліазуємо її як порожню структуру.

**Крок 3.** Якщо поточне розбиття на кластери задовольняє умові задачі, завершити роботу алгоритму. Інакше перейти на крок 4.

**Крок 4.** Побудова ланцюга найближчих сусідів

**4.1** Якщо стек порожній, обрати довільний кластер і помістити його у верхівку стеку .

**4.2** Нехай кластер на верхівці стеку . Розрахувати відстані від до усіх інших кластерів. Нехай – найближчий кластер.

**4.3** Якщо не міститься у , помістити його у верхівку стеку та перейти до кроку 4.2.

**4.4** Якщо уже міститься у (він має бути безпосереднім попередником кластеру ), видаляємо кластери та із стеку та із множини активних кластерів, та додаємо об’єднаний кластер до множини активних кластерів.

**4.5** Перейти на крок 3.

Для того, щоб даний алгоритм застосувати як перший етап 2-етапного алгоритму розв’язку CVRP необхідно внести модифікації пов’язані із обмеженнями «місткості» кластеру (оскільки обмеженою є місткість транспортних засобів).

Наведемо модифіковану схему алгоритму призначену для кластеризації вершин CVRP.

**Крок 1.** Нехай – двозв’язаний список. Формуємо цей список шляхом формування окремого кластеру для кожної точки і додаванням її до списку.

**Крок 2.** Нехай – стекова структура даних, елементи якої є кластерами. Ініціаліазуємо її як порожню структуру.

**Крок 3.** Обираємо перший кластер із списку і встановлюємо його як поточний кластер та додаємо до стеку .

**Крок 4.** Побудова ланцюга найближчих сусідів

**4.1** Нехай кластер на верхівці стеку . Розрахувати відстані від до усіх інших кластерів. Нехай – найближчий кластер.

**4.2** Якщо не міститься у , помістити його у верхівку стеку та перейти до кроку 4.1.

**4.3** Якщо уже міститься у (він має бути безпосереднім попередником кластеру ) і можливе об’єднання та (тобто ), видаляємо кластери та із стеку та списку , та додаємо об’єднаний кластер до списку та у верхівку стеку .

**4.5** Якщо поточний кластер А був не останнім у списку обрати наступний за ним кластер, встановити його як поточний, спустошити стек та додати у його верхівку новий поточний кластер і перейти до кроку 4.

**Крок 5.** Якщо на кроці 4 не було здійснено жодного об’єднання кластерів, завершити роботу алгоритму, інакше перейти до кроку 2.

##### **?.4.2.1.2 Бджолиний алгоритм кластеризації**

#### ?.4.2.2 Другий етап – побудова маршрутів відповідно до проведеної кластеризації

Другий етап даного алгоритму розв’язання CVRP є таким самим як і другий етап даного алгоритму для розв’язання VRP і полягає у розв’язанні задачі комівояжера для кожного кластеру (див. п. 3.4.2.1 загальної частини диплому).