

Automatic project

State estimation for the stabilization of a Furuta pendulum

Valentin BOUSSOT

Under the supervision of prof M. Stanislav ARANOVSKIY

March 24, 2021

Introduction

When you want to control a physical system, we generally implement control laws based on the mathematical model of the system. These methods generally requires having complete knowledge of the state of the system at all times. However, these states are not always measured by a sensor, these sensors are sometimes too expensive, bulky, difficult to produce or cause reliability problems.

In this context, it is necessary to reconstruct the states not measured in real time from the input and output variables of the system. It is customary to implement these estimators on a calculator, then we can talk of software sensor. There are many algorithms to make this estimate, but we can group them into two main approaches. Estimation based without a model, this is a classic point of view in signal processing, i.e. an online estimation and estimation with model in which the dynamics of the system is included. In the latter case we use the term observer. There are also other reasons why rebuilding the state of the system is necessary such as process monitoring, or process identification.

This project is interested in a class of nonlinear and underactuated mechanical system that we want to stabilize at an unstable equilibrium point. The system variables are made up of positions and speeds but only the positions are measured. The project thus poses the problem of the control of these types of mechanical system and also poses the problem of the reconstruction of states.

The example of this type of mechanical system used in this project is the Furuta pendulum, this is a problem that was originally designed for application in nonlinear systems control courses and was developed by Katsuhisa Furuta in 1992 at the Tokyo Institute of Technology. Furuta's pendulum is essentially an inverted pendulum with a first rigid arm rotating with a motor on the horizontal plane and a second rigid arm, the pendulum attaching to the first arm, which is not actuated. The objective is to control the motor so that the pendulum stabilizes in the high vertical position. The experimentation will be made on the mockup [QUBE – Servo 2](#) of the society Quanser. Figure 1

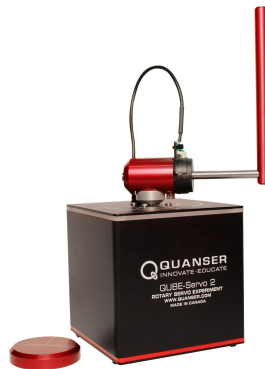


Figure 1: Quanser Qube servo 2, Furuta pendulum

Contents

1	Problematic	3
2	Methodology	3
3	Pendulum modeling	4
3.1	Nonlinear differential equations	5
3.2	Pendulum state model	5
3.3	Singularity analysis	6
3.4	Linearized model	6
3.4.1	Equilibrium points	6
3.4.2	Linearization at equilibrium	6
3.4.3	Stability of the equilibrium point	6
4	Control synthesis	7
4.1	Swing-up controler	7
4.2	LQR controler	8
4.3	Simulation	8
5	Dérivation numérique (Model free)	9
5.1	Problématique	9
5.2	Méthode linéaire	10
5.2.1	Filtre passe bas	10
5.3	Observateurs	10
5.4	Observateur par placement de pôle	11
5.4.1	Observateur de Luenberger	11
5.4.2	Observateur à grand gain	11
5.5	Algorithme de différenciation à grand gain (HGD)	11
5.6	Méthodes non linéaires	12
5.6.1	Commande par mode glissant	12
5.6.2	Observateur Super Twisting	13
6	Observateur d'état (Model based)	13
6.1	Méthodes non linéaires	13
6.1.1	Observateur à grand gain	13
6.1.2	Homogeneous finite time observer	14
7	Conclusion	15
8	Appendix	17

1 Problematic

The mathematical modeling of the evolution of the Furuta pendulum leads to define a minimum set of 4 variables to describe its evolution, consisting of the angular position of the two arms noted θ_1 for the horizontal arm, θ_2 for the pendulum, and respectively their angular velocities noted $\dot{\theta}_1$ and $\dot{\theta}_2$. The project is based on a mockup comprising only two angular position sensors, these sensors are rotary encoders (discrete measurement) with a resolution limited to 2048 number per resolution, we therefore have no angular velocity measurement of the arms. Control of the horizontal arm is provided by a DC motor, voltage controlled. The objective is to stabilize the pendulum in the high position.

The purpose of the project is not to implement the best controller to carry out this task, the main objective is the study of software sensors for this type of dynamic system. The developed controller will have to report on the quality of the estimate of the states.

Among the many solutions that exist in the literature, a suboptimal command will be implemented but supposes to have complete knowledge of the state at every moment, its command will be based on two controllers, a Swing up controller that allows to swing the pendulum and bring it around the high position, and a quadratic linear regulator (LQR) based on linearization around the unstable equilibrium point and whose role is to maintain this position.

From the point of view of the estimation without a model, the problem that this type of mechanical system poses is the estimation of the derivatives of measured signals. Problem solved by synthesis of differentiation algorithms. The measured signals are quantified here but in a more general case a measured signal is inevitably noisy. The presence of these noises or discontinuity is the main source of difficulties, otherwise the problem is trivial. To solve the problem we will implement a number of linear and non-linear software sensors present in the literature from both approaches. All these methods implemented in this work are mentioned in the table 1 :

Differentiator (Model free)	Observer (With model)
Euler	High gain [5]
FIR low pass filter	Homogeneous [1] [7]
High gain [3] [2] [5]	
Super Twisting [3] [6]	

Table 1: All software sensors compared in this project

The expected effects of an incorrect estimate of the states on our controller are to make it unable to stabilize the pendulum or to make it less robust to external disturbances and finally to have a noisy control that makes the pendulum oscillate and will require a large effort to the actuator causing a non-optimal consumption.

2 Methodology

All the experiments were carried out on Simulink so we will have access to the true state of the system, a virtual simulation faithful to the QUBE – Servo 2 model is also developed to have a graphical rendering and that will allow to check more simply the credibility of the modeling and the behavior of the stabilization with different reconstructions of states.

The project is structured around 5 step :

1. Take note of the mathematical model of the furuta pendulum and study it.
2. Linearized the model around its equilibrium point in order to prepare the synthesis of the controllers.
3. Implement the Swing up and LQR controllers and check the stabilization with the real states of the system.
4. Implement the software sensors 1 on a canonical signal for the differentiator and on the signals from the simulation of step 3 for the observers
5. Check the behavior of the simulation with the estimated states of each estimator.

3 Pendulum modeling

The system is underactuated and extremely nonlinear due to the gravitational forces and the coupling arising from the Coriolis and centripetal forces. This article [8] gives the objective of given the correct mathematical modeling of the pendulum of furuta. The modeling is based on Lagrangian formulation and only viscous damping is considered all other forms of damping have been neglected, a simplification of the moment of inertia is also used so that we have a credible model with reasonable complexity.

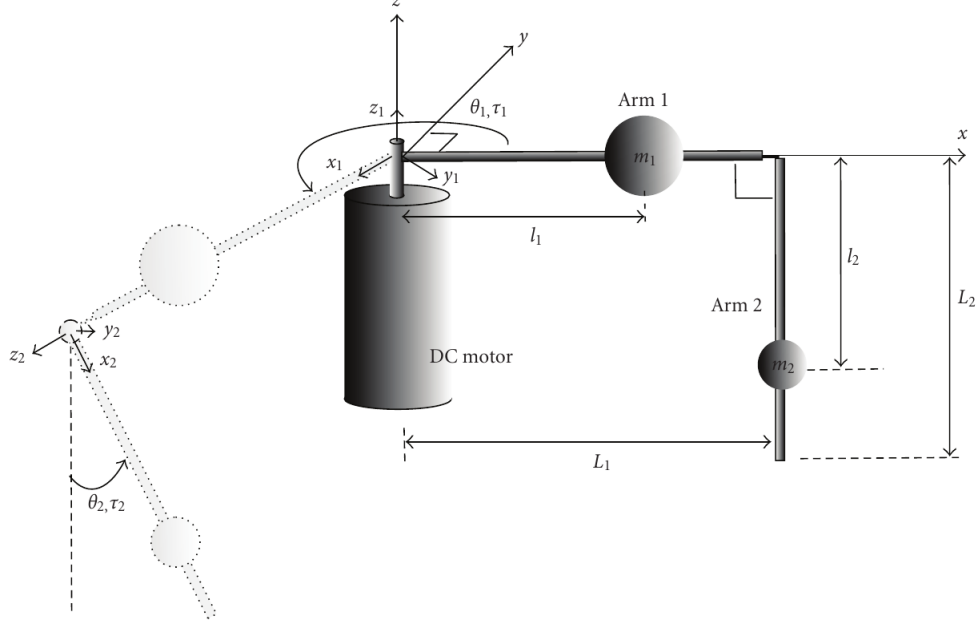


Figure 2: Schematic of the single rotary inverted pendulum system, (Source [8])

Here is a table giving the description and the corresponding value associate with the symbols of the figure 2 provided by Quanser.

Description	Symbole	Value	Unit
DC Motor			
Terminal resistance	R_m	8.4	Ω
Torque constant	k_t	0.042	Nm/A
Motor back-emf constant	k_m	0.042	$V/(rad/s)$
Rotary arm			
Mass	m_1	0.095	kg
Length	L_1	0.085	m
Viscous damping	b_1	1.10^{-3}	Nms/rad
Pendulum arm			
Mass	m_2	0.024	kg
Length	L_2	0.129	m
Viscous damping	b_2	0	Nms/rad

Only the lengths are provided by Quanser for the arm and the pendulum, the moment of inertia will be approximate considering a full cylinder of very large length compared to the diameter.

Implie J_1 and J_2 respectively the moment of inertia of the rotary arm and the pendulum can be approximated by $J_1 = \frac{m_1 * L_1^2}{12}$ and $J_2 = \frac{m_2 * L_2^2}{12}$ and $l_1 = \frac{L_1}{2}$ $l_2 = \frac{L_2}{2}$

The rotation of the rotational arm is limited to 180 degrees and the effect of the wire in the mockup Figure 1 on its movement is modeled as a spring and add to the model through the constant c_r , $c_r = 10^{-4}$. Also the damping coefficients b_1 and b_2 are fixed at $b_1 = 0.001$, $b_2 = 0$

3.1 Nonlinear differential equations

The paper leads to the two nonlinear differential equations :

$$\ddot{\theta}_1(J_1 + m_2L_1^2 + (J_2 + \frac{1}{4}m_2L_2^2)\sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2(\frac{1}{2}m_2L_1L_2\cos(\theta_2)) - \frac{1}{2}m_2L_1L_2\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(J_2 + \frac{1}{4}m_2L_2^2)\sin(2\theta_2) + b_1\dot{\theta}_1) = \tau_1 \quad (1)$$

$$\ddot{\theta}_1(\frac{1}{2}m_2L_1L_2\cos(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2(J_2 + \frac{1}{4}m_2L_2^2) - \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(J_2 + \frac{1}{4}m_2L_2^2)\sin(2\theta_2) + b_2\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}gm_2L_2\sin(\theta_2) = 0 \quad (2)$$

The torque of the DC Motor can be controlled by the control signal u with this expression, the inductance of the motor windings has been neglected.

$$\tau_1 = \frac{k_t(u - k_m\dot{\theta}_1)}{R_m} \quad (3)$$

To simplify the model, we define the following variables :

$$p_1 = J_1 + m_2L_1^2, p_2 = J_2 + \frac{1}{4}m_2L_2^2, p_3 = \frac{1}{2}m_2L_1L_2, p_4 = \frac{1}{2}gm_2L_2, p_5 = \frac{k_t}{R_m}, p_6 = \frac{k_t k_m}{R_m}$$

And by rearrangement of terms to express accelerations $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$. In red the nonlinear expression of the model.

$$\begin{aligned} ((p_2^2 + p_3^2)\sin^2(\theta_2) + p_1p_2 - p_3^2)\ddot{\theta}_1 = \\ -c_r p_2 \dot{\theta}_1 - (p_2p_6 + b_1p_2)\dot{\theta}_1 + b_2p_3\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2 - p_2^2\sin(2\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ - p_2p_3\sin(\theta_2)(1 - \sin^2(\theta_2))\dot{\theta}_1^2 + p_2p_3\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}p_3p_4\sin(2\theta_2) \\ + p_2p_5u \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} ((p_2^2 + p_3^2)\sin^2(\theta_2) + p_1p_2 - p_3^2)\ddot{\theta}_2 = \\ +c_r p_3\cos(\theta_2)\dot{\theta}_1 + (b_1p_3 + p_3p_6)\cos(\theta_2)\dot{\theta}_1 - b_2(p_1 + p_2\sin^2(\theta_2))\dot{\theta}_2 + 2p_2p_3\sin(\theta_2)(1 - \sin^2(\theta_2))\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ + p_2(p_2\cos(\theta_2)\sin^3(\theta_2) + \frac{1}{2}p_1\sin(2\theta_2))\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}p_3^2\sin(2\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - p_4\sin(\theta_2)(p_1 + p_2\sin(\theta_2)) \\ - p_3p_5\cos(\theta_2)u \end{aligned} \quad (5)$$

The dynamics of the system are linear with respect to the signal control u

3.2 Pendulum state model

$x = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]$ the state vector $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ the non-linear system.

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x) + g_3(x)u \\ \dot{x}_4 = f_4(x) + g_4(x)u \end{cases} \quad (6)$$

With :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{\begin{bmatrix} -c_r p_2 \\ -p_2p_6 - b_1p_2 \\ b_2p_3\cos(\theta_2) \\ -p_2^2\sin(2\theta_2) \\ -p_2p_3\sin(\theta_2)(1 - \sin^2(\theta_2)) \\ p_2p_3\sin(\theta_2) \\ \frac{1}{2}p_3p_4\sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(p_2^2 + p_3^2)\sin^2(\theta_2) + p_1p_2 - p_3^2} \\ g_3(x) &= \frac{p_2p_5}{(p_2^2 + p_3^2)\sin^2(\theta_2) + p_1p_2 - p_3^2} \\ f_4(x) &= \frac{\begin{bmatrix} c_r p_3\cos(\theta_2) \\ (b_1p_3 + p_3p_6)\cos(\theta_2) \\ -b_2(p_1 + p_2\sin^2(\theta_2)) \\ 2p_2p_3\sin(\theta_2)(1 - \sin^2(\theta_2)) \\ p_2(p_2\cos(\theta_2)\sin^3(\theta_2) + \frac{1}{2}p_1\sin(2\theta_2)) \\ -\frac{1}{2}p_3^2\sin(2\theta_2) \\ -p_4\sin(\theta_2)(p_1 + p_2\sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(p_2^2 + p_3^2)\sin^2(\theta_2) + p_1p_2 - p_3^2} \\ g_4(x) &= \frac{-p_3p_5\cos(\theta_2)}{(p_2^2 + p_3^2)\sin^2(\theta_2) + p_1p_2 - p_3^2} \end{aligned}$$

3.3 Singularity analysis

The state model has a denominator depending on the state θ_2 it may be possible to have a singularity in the model, and therefore the system can tend towards infinity in a finite time, which we are going to verify.

$$(p_2^2 + p_3^2) \sin^2(\theta_2) + p_1 p_2 - p_3^2 = 0 \iff \sin^2(\theta_2) = \frac{-p_1 p_2 + p_3^2}{p_2^2 + p_3^2}$$

but $-p_1 p_2 + p_3^2 = -J_1 J_2 - \frac{m_2 L_2^2}{4} - j_2 m_2 L_1^2 < 0$ the physical constants are strictly positive, we can not have singularity point in the model. so $\lim_{x \rightarrow k} |f(x)| \leq \infty, |k| \leq \infty$

3.4 Linearized model

The linearization of the model will be useful for the synthesis of the linear control law LQR which ensures the stability of the pendulum when it is in the high vertical position. i.e $x = [0, \pi, 0, 0]$. It is also useful for determining the local stability of a point of equilibrium.

3.4.1 Equilibrium points

x_{eq} is an equilibrium point if $\dot{x} = f(x_{eq}) = [0, 0, 0, 0]^T$ and $u = 0$

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = \frac{-c_r p_2 \theta_1 + \frac{1}{2} p_3 p_4 \sin(2\theta_2)}{(p_2^2 + p_3^2) \sin^2(\theta_2) + p_1 p_2 - p_3^2} \\ \dot{x}_4 = \frac{c_r p_3 \cos(\theta_2) \theta_1 - p_2 p_4 \sin^3(\theta_2) - p_1 p_4 \sin(\theta_2)}{(p_2^2 + p_3^2) \sin^2(\theta_2) + p_1 p_2 - p_3^2} = \frac{c_r p_3 \cos(\theta_2) \theta_1 - p_4 \sin(\theta_2) (p_2 \sin^2(\theta_2) + p_1)}{(p_2^2 + p_3^2) \sin^2(\theta_2) + p_1 p_2 - p_3^2} \end{cases}$$

If we solve the nonlinear equation system we see that $\sin(x)$ must be at zero and it is the modeling of the wire with a spring that set θ_1 at zero. \Rightarrow

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = 0 \text{ for } \theta_1 = 0 \text{ and } \theta_2 = \frac{k\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \dot{x}_4 = 0 \text{ for } \theta_1 = 0 \text{ and } \theta_2 = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Therefore the equilibrium points of the system are $\frac{k\pi}{2} \cap k\pi \Rightarrow x_{eq} = [0, k\pi, 0, 0]^T \quad k \in \mathbb{Z}$
But physically there are two equilibrium points $x_{eq}^1 = [0, 0, 0, 0]^T, x_{eq}^2 = [0, \pi, 0, 0]^T$

3.4.2 Linearization at equilibrium

The objective is to stabilize the pendulum at the vertical position, it is an equilibrium point of the system, a linear LTI model can be constructed by an approximation based on first order Taylor expansion.

$$\dot{X} = AX + Bu \text{ with } X = x - x_{eq}^2 \tag{7}$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-c_r p_2}{(p_1 p_2 - p_3^2)} & \frac{p_3 p_4}{(p_1 p_2 - p_3^2)} & \frac{-p_2 p_6 - b_1 p_2}{(p_1 p_2 - p_3^2)} & \frac{-b_2 p_3}{(p_1 p_2 - p_3^2)} \\ \frac{-c_r p_3}{p_1 p_2 - p_3^2} & \frac{p_1 p_4}{p_1 p_2 - p_3^2} & \frac{-b_1 p_3 - p_3 p_6}{p_1 p_2 - p_3^2} & \frac{-b_2 p_1}{p_1 p_2 - p_3^2} \end{bmatrix} \quad B = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{p_2 p_5}{p_1 p_2 - p_3^2} \\ \frac{p_3 p_5}{p_1 p_2 - p_3^2} \end{bmatrix}$$

3.4.3 Stability of the equilibrium point

The numerical values of the linearized model at the equilibrium point x_{eq}^2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.9946 & 149.2751 & -12.0341 & 0 \\ -0.9830 & 261.6091 & -11.8941 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda = [-21.2656 \quad -0.0840 \quad -4.5733 \quad 13.8888]$$

There are two positives eigenvalues from Lyapunov's indirect method we can conclude that the origin is unstable. The type of equilibrium point x_{eq}^2 can be specified by a geometric argument focusing only on the trajectories of the pendulum $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ with initial conditions close to the unstable equilibrium point x_{eq}^1 .

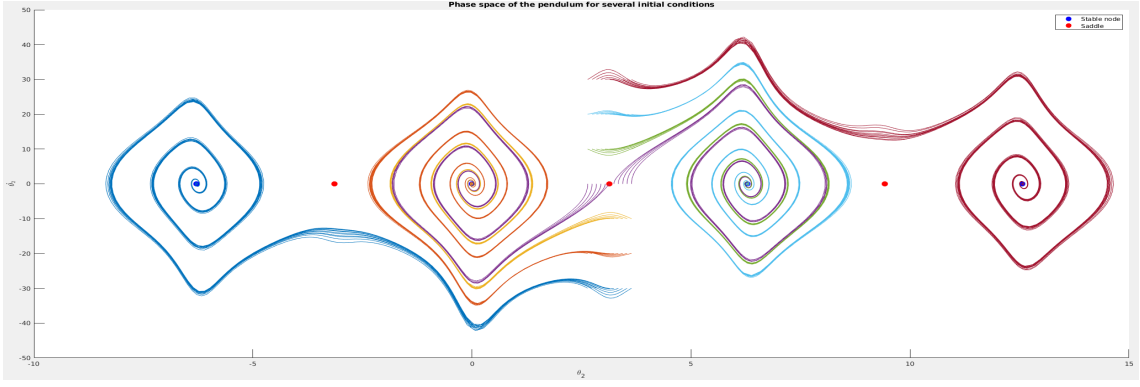


Figure 3: Phase space of the pendulum for several initial condition

We can see that the unstable points of equilibrium $x_{eq} = [0, 2k\pi + 1, 0, 0]$ are saddle points, and trajectories are attracted by stable nodes $x_{eq} = [0, 2k\pi, 0, 0]$ (Attractor). It can also be noted that the system is not very sensitive to initial conditions.

A priori the behavior of the pendulum modeling corresponds to reality, the low position is asymptotically stable, due to the dissipative system, damped by the friction forces of the pivot and we have the expected symmetry. We can conclude that the system is stable and will always end up in a stable equilibrium. (Lyapunov stability)

4 Control synthesis

4.1 Swing-up controler

The role of this first controller is to bring the pendulum from the stable equilibrium position (the low position of the pendulum) to a position close to the unstable equilibrium, under this condition the approximation made by the linear model will become credible and the LQR controller will then be able to take over and make stable the high position of the pendulum.

The common approach is based on system energy.

$$E = \frac{gm_2L_2(1 - \cos(\theta_2))}{2} + \frac{J_2}{2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{J_1 + m_2L_2^2 + J_2\sin^2(\theta_2)}{2}\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2L_1L_2\cos(\theta_2)}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \quad (8)$$

At equilibrium points the kinetic energy of the system is zero and the potential energy $E_{p2} = \frac{gm_2L_2(1 - \cos(\theta_2))}{2}$ is zero at stable equilibrium points and maximal at unstable equilibrium points, i.e $E_{p2}^* = gm_2L_2$

The idea is to design a controller that allows to inject energy to the system in order to reach the maximum potential energy (C1) while having a minimum of kinetic energy at this point (C2).

The system is underactuated, finding an optimal solution to this problem is difficult, the simplest and best known solution is to simplify the model by considering it as a simple inverted pendulum.

The model of the inverted pendulum, the friction force of the pivot point is neglected :

$$J_2\ddot{\theta}_2 + m_2gL_2\sin(\theta_2) - m_2L_2\cos(\theta_2)t \text{ with } t = K\tau_1 \quad (9)$$

Pivot point acceleration is proportional to τ_1 (3) with a coefficient that will be considered unknown. $\tau_1 = \frac{k_t u}{R_m}$ the induced torque is also neglected. The energy of the system is then : $E_p = \frac{gm_2L_2(1 - \cos(\theta_2))}{2} + \frac{J_2}{2}\dot{\theta}_2^2$

To get (C1) we must keep $\dot{E} > 0$, $\dot{E} = J_2\dot{\theta}_2\ddot{\theta}_2 + m_2gL_2\sin(\theta_2) = m_2L_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_2)k\frac{k_t u}{R_m}$

$\dot{E} > 0 \Rightarrow \text{sign}(u) = \text{sign}(\dot{\theta}_2\cos(\theta_2))$, $m_2L_2 > 0$ from there we could synthesize a Bang-Bang controler but would not respect the condition (C2), the article [9] gives a solution to this problem by applying Fradkov's speed-gradient method.

$$u = \frac{R_m}{K_t}k(E_p - E_{p2}^*)\text{sign}(\dot{\theta}_2\cos(\theta_2)) \quad (10)$$

The closer the pendulum is to the unstable equilibrium, the lower the control signal, which should ensure a low kinetic energy close to the unstable equilibrium and ensures continuous control. By correctly choosing the parameter k this controller makes it possible to achieve these objectives quickly. The article [4] sets out some counterparty. It is also impossible to fix a constraint on the horizontal arm which does not take into account the effect of the wire.

4.2 LQR controler

The purpose of this controller is to stabilize the unstable origin of the linearized system previously developed 3.4. Control is based on a state feedback strategy, i.e $u = KX$ with $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$. This assumes that the system is controllable, i.e it is possible to build a command u that allows the system to evolve from any initial state to any desired state in finite time.

One of the ways to check this property is the Kalman criterion, which consists in verifying that the controllability matrix has full row rank : $C = [B, ABA^2B, A^3B]$, $\text{rank}(C) = 4$ which is indeed the case on our linear system. This also assumes that the state at each instant is known, this condition will be dealt with in the following sections.

The dynamic of system in closed-loop : $\dot{X} = (A - BK)X$
By correctly adjusting the gain matrix K we can make the eigenvalues of the matrix $A - BK$ with negative real part and therefore makes the origin stable (Pole placement). We know that the greater the coefficient of the gain matrix, the more the dynamic of the closed loop system is fast and robust to disturbance but requires greater effort from the DC motor and propagates the noise of the states more.

The linear quadratic control allows precisely to make this compromise, it chose the coefficient of the matrix of gain by solving this problem of optimization:

$$\min_K \frac{1}{2} \int_0^\infty X^T Q X + r u^2 \quad \text{The stability of the system is ensure if } \forall Q \succ 0, r > 0 \quad (11)$$

$K = \frac{1}{r} B^T P$ and matrix P is solution of Riccati equation: $A^T P + P A - P B \frac{1}{r} B^T P + Q = 0$
By adjusting the weight matrices Q and r we can optimally arbitrate the compromise.

The change of the swing up controller to LQR is the moment when pendulum is close to the unstable equilibrium point, the decision boundary is set with a hyper parameter α who will be adjusted in simulation $\theta_2 = \alpha$.

4.3 Simulation

P	Value	Comment
X_0	$[0, 0.1, 0, 0]^T$	Initial state
T_e	10^{-3} s	Sampling time
α	0.34 rad	Decision boundary
k	$0.7 \frac{m^2 \cdot Kg}{s^2 \cdot j}$	Swing up controller coefficient
Q	I_4	State weighting matrix
r	10	Energy weighting
K	$[-0.336918.9001 - 0.72291.4953]$	LQR gain
$\tau_{\theta_2,1}$	0.2 N.m	External disturbance t =4s
$\tau_{\theta_2,2}$	0.3 N.m	External disturbance t =6.5s
τ	0.02 s	Delay in command

Table 2: Simulation parameter (Simulink, ode45)

The simulation is performed with the real simulated state, initially the pendulum is close to the stable equilibrium, the swing up lasts 2 seconds and the stabilization is efficient in 4 seconds, a disturbance on the pendulum is carried out at 4 seconds, demonstrating a certain tolerance to external disturbance. A second more important disturbance which loses the stability of the pendulum, and illustrates the importance of the condition (C2).

Result of the simulation in appendix 8

5 Dérivation numérique (Model free)

Nous commençons l'étude de la reconstruction d'état par l'approche sans modèle, il s'agit pour ce type de système mécanique d'une estimation en ligne de dérivé, c'est un problème majeur de l'automatique qui a une grande importance dans la commande de ces systèmes non linéaires.

5.1 Problématique

Soit $f(t)$ une fonction continue du temps sa dérivée s'exprime alors par

$$f'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau} \quad (12)$$

Sur les calculateurs la dérivé est généralement approximer par la différence d'ordre 1 en arrière

$$f'(nT_e) \approx \frac{f(nT_e) - f((n-1)T_e)}{T_e} \text{ avec } T_e \text{ la periode d'échantillonnage} \quad (13)$$

Comme tout système mécanique l'évolution des positions est une fonction continue mais sa mesure est inévitablement bruitée. L'algorithme 13 est une première méthode de dérivation élémentaire elle approche de la dérivée exacte mais souffre d'une grande sensibilité au bruit de mesure.

En effet notons θ la fonction d'évolution temporelle d'une position angulaire d'un bras et $\theta_m = \lfloor \frac{2048}{2\pi} \theta \rfloor \frac{2\pi}{2048}$ sa mesure quantifiée par les capteurs rotatifs. On peut voir le bruit de quantification comme un bruit déterministe additif : $\theta_m = \theta - \eta$ avec $0 < \eta < \frac{2\pi}{2048}$

Avec l'algorithme 13 l'approximation devient : $\hat{\theta}_m = \hat{\theta} + \frac{\eta(t-T_e) - \eta(t)}{T_e}$ l'erreur d'approximation est bornée par $|\hat{\theta}_m - \hat{\theta}| < \frac{2\pi}{2048T_e}$ on en déduit que le bruit est d'autant plus grand que la fréquence d'échantillonnage est grande.

Pour illustrer ce fait nous allons tenter de dériver un signal et mettre en place un protocole expérimental pour évaluer les différents algorithmes de dérivation.

$$y = 5 \sin(\phi(t)t), \dot{y} = 5(\phi(t)t)' \cos(\phi(t)t), \phi(t) = 2\pi(0.1 + \frac{0.09}{2}t), y_m = \lfloor \frac{2048}{2\pi} y \rfloor \frac{2\pi}{2048} \quad \forall t \in [0, 10] \quad (14)$$

Paramètre	Valeur	Commentaire
T_e	10^{-3} s	Temps d'échantillonnage
T	10 s	Temps de simulation
RMS	$\sqrt{\sum_{n=0}^{\frac{T}{T_e}} (\dot{y}(nT_e) - \hat{\dot{y}}_m(nT_e))^2}$	Erreur moyenne quadratique
E_{max}	$\max \dot{y}(nT_e) - \hat{\dot{y}}_m(nT_e) $	Erreur absolue maximale

Table 3: Protocole et critère d'évaluation

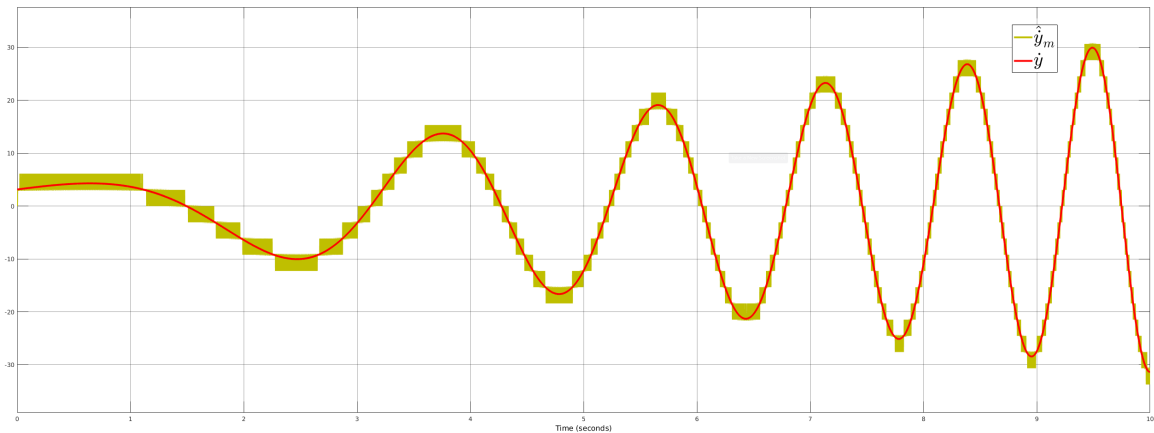


Figure 4: \dot{y} et $\hat{\dot{y}}_m$ (13) $RMS = 1.801$ $E_{max} = 3.142$

Dans l'algorithme 13 aucune stratégie n'est mise en place pour discriminer l'information utile du bruit ce qui explique l'approximation inexploitable de la dérivée. Pour résoudre ce problème de dérivation numérique nous allons étudier et implémenter par la suite des méthodes linéaire et non linéaire tirées de la littérature.

5.2 Méthode linéaire

5.2.1 Filtre passe bas

Nous venons de voir qu'une estimation précise de la dérivée d'un signal mesuré nécessite l'élimination du bruit. L'évolution des positions est un signal basse fréquence par rapport au bruit de quantification. La première idée est de faire un filtrage causal passe-bas avant la différenciation.

Filtre FIR passe-bas du deuxième ordre : $G(s) = \frac{s}{(1+\tau s)^2}$

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad \dot{z}_2 = -\frac{1}{\tau^2}z_1 - \frac{2}{\tau}z_2 + \frac{1}{\tau^2}y_m \quad \hat{y}_m = z_2 \quad (15)$$

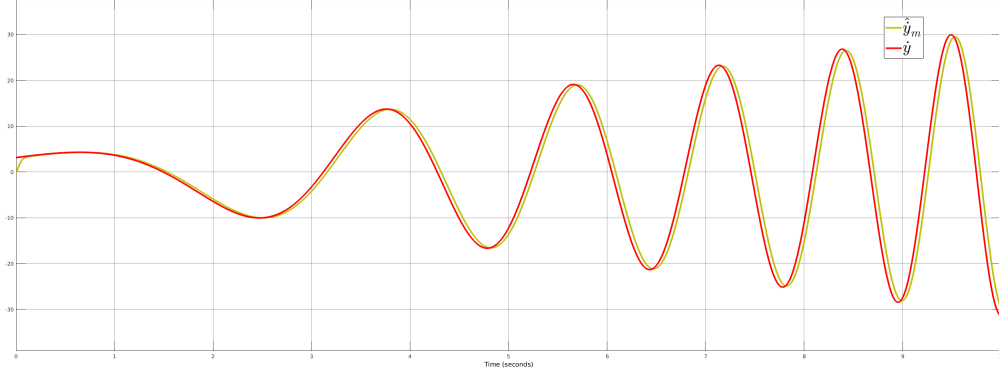


Figure 5: \dot{y} et \hat{y}_m (15) $\tau = 0.02$ RMS = 1.9446, $E_{max} = 7.452$

Cette solution améliore grandement la qualité de la dérivation mais introduit un déphasage inévitable. Cela nécessite la connaissance de la bande passante du signal, il faut également espérer que le spectre du signal utile soit bien disjoint de celui du bruit à chaque instant afin d'adopter une fréquence de coupure qui filtre le bruit sans trop déformer le signal utile. Un filtre adaptatif peut être également envisagé en fonction de la dynamique du signal. Cette solution est quand même couramment utilisée dans le problème du contrôle de Furuta, on retrouve également de manière équivalente un filtrage par moyenne glissante $G(z) = \sum_{i=0}^{N-1} z^i$.

5.3 Observateurs

Nous allons introduire les observateurs bien qu'il soit associé aux approches basées modèle, les algorithmes de dérivation on de particulier qu'ils peuvent être vus comme un problème d'observation avec un modèle particulier, d'où la redondance des termes dans le tableau 1.

Le schéma fonctionnel d'un observateur d'état complet est présenté par la figure 6

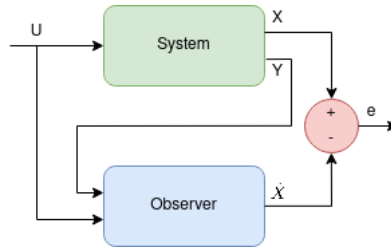


Figure 6: Schéma fonctionnel d'un observateur d'état complet

Avec \mathbf{u} et \mathbf{Y} l'entrée et la sortie mesurée du système physique \mathbf{X} est le vecteur d'état, $\hat{\mathbf{X}}$ est l'état estimé et \mathbf{e} est l'erreur d'estimation.

La construction d'un observateur émet l'hypothèse qu'il est possible d'estimer l'état du système à partir uniquement des sorties, c'est la notion d'observabilité. La synthèse d'un observateur est basé sur l'optimisation de l'erreur d'estimation, le critère d'optimalité dépend de l'approche considérée et des hypothèses qui peuvent être formulées sur la dynamique du système et du bruit qui l'affecte.

5.4 Observateur par placement de pôle

5.4.1 Observateur de Luenberger

Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU & X \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{R}^m, Y \in \mathbb{R}^p \\ Y = CX \end{cases} \quad (16)$$

Un observateur linéaire classique pour estimer les états cachés du système 16 est l'observateur de Luenberger définie par

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU + L(Y - \hat{Y}) & L = (k_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \\ \hat{Y} = C\hat{X} \\ \dot{e} = (A - LC)e \end{cases} \quad (17)$$

Pour les systèmes linéaires l'observabilité est facile à vérifier, classiquement il suffit de vérifier que la matrice d'observabilité, i.e $M_O = [C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}]^T$ soit de rank plein.

Pour faire converger l'état estimé \hat{X} vers l'état X l'idée est de faire un placement de pôle afin de choisir la matrice de gain L de telle sorte que la matrice $A - LC$ est de Hurwitz, le critère d'optimalité est donc basé sur la convergence asymptotique de l'erreur, i.e $\exists \alpha \geq 0 \quad \exists \beta \geq 0, \|e(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \|e(0)\|$

5.4.2 Observateur à grand gain

L'observateur à grand gain [5] est un observateur par placement de pôle utilisé pour les systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = A\hat{x} + \phi(X, U) & X \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{R}^m, Y \in \mathbb{R}^p \\ Y = CX \end{cases} \quad (18)$$

Avec $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{bmatrix}$ $A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_p \end{bmatrix}$ $C_i = [1 \quad \dots \quad 0]$

Si le modèle peut se décrire ainsi alors le système est uniformément observable i.e observable pour toute entrée et il est possible de construire un observateur dont le gain est indépendant de l'entrée du système observé.

Si $\phi(x, u)$ une fonction globalement Lipschitzienne :

$$\forall M > 0; \exists \gamma > 0; \forall u, \|u\| \leq M; \forall x, x' \in \mathbb{R}^n, \|\phi(u, x) - \phi(u, x')\| \leq \gamma \|x - x'\|$$

alors l'observateur suivant peut être construit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A\hat{X} + \phi(\hat{X}, U) + K(Y - \hat{Y}) & K = \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_p \end{bmatrix} K_i = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_p \\ \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^p \end{bmatrix}^T \quad 0 < \epsilon \ll 1 \\ \hat{Y} = C\hat{X} \\ \dot{e} = (A - KC)e + \phi(X, U) - \phi(\hat{X}, U) \end{cases} \quad (19)$$

Le choix des matrices de gain h_i est choisi de sorte que les matrices $A_i - k_i C_i$ sont de Hurwitz. On voit qu'un placement de pôle classique ne suffit pas à assurer la convergence de l'estimation de l'observateur à cause du terme $\phi(X, U) - \phi(\hat{X}, U)$, mais le fait d'avoir ϵ , permet de multiplier ces pôles par $\frac{1}{\epsilon}$ et sous condition suffisante $0 < \epsilon \ll 1$ l'article montre que cela permet de retirer l'effet du terme sur la dynamique de l'erreur d'estimation et d'avoir une convergence asymptotique.

5.5 Algorithme de différenciation à grand gain (HGD)

L'article [3] [2] montre qu'un observateur à grand gain peut être utilisé pour notre problème de dérivation avec un modèle linéaire SISO ainsi définie :

$$\begin{cases} \dot{X} = A\hat{X} + B[f(x)u + g(x)] & B = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T X \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \\ y = CX \end{cases} \quad (20)$$

C'est un problème d'observation à entrée inconnue, $[f(x)u + g(x)]$ est vu comme une entrée. Ces fonctions doivent être globalement Lipschitzienne.

$$u = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A\hat{X} + K(Y - \hat{Y}) \\ y = C\hat{X} \\ \dot{\hat{y}}_m = [0 \quad 1] \hat{X} \end{cases} \quad (21)$$

Pour notre problème on en déduit les matrices $X = \begin{bmatrix} y_m \\ \dot{y}_m \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = [1 \quad 0]$ $K = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{\epsilon} \\ \frac{\alpha_2}{\epsilon^2} \end{bmatrix}$ $0 < \epsilon \ll 1$ K choisie tel que les valeurs propres de la matrice $(A - KC)$ est à partir réelle négative. Cet algorithme de derivation n'est rien d'autre qu'un observer de Luenberger avec un placement de pole particulier.

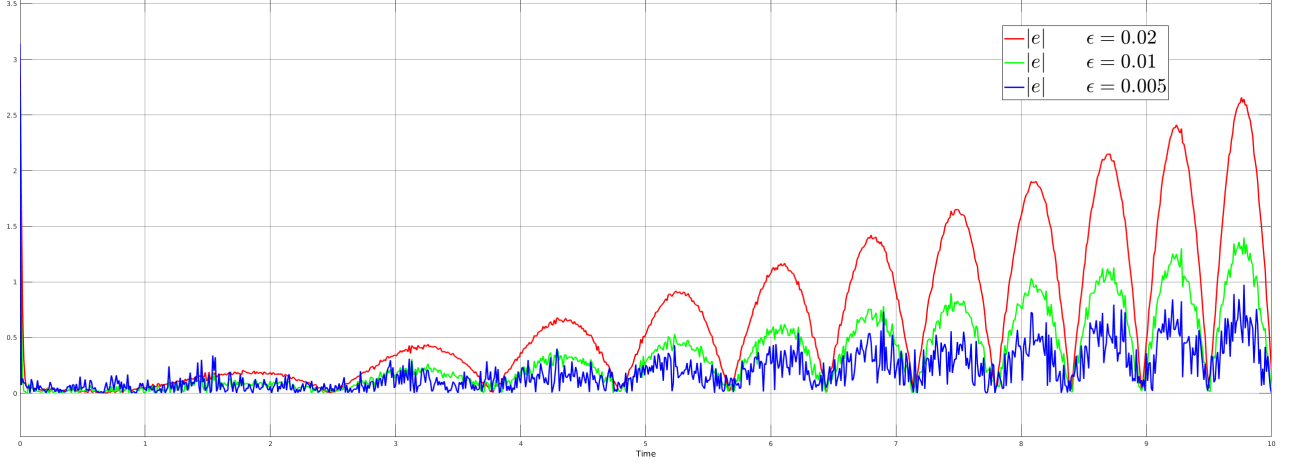


Figure 7: $|e|$ (21) pour 3 choix d'epsilon

L'estimation de la dérivée est donc réalisée par un filtre linéaire d'ordre 2 $\frac{\hat{y}_m}{y_m} = \frac{k_2 s}{\epsilon^2 s^2 + k_1 \epsilon s + k_2}$ si on choisit $k_2 = 1$ c'est un filtre passe bas en série avec un dérivateur, avec $k_1 = 2$ et $\epsilon = 0.02$ on a équivalence avec 15 on a globalement les mêmes contraintes que le filtre avec l'algorithme 15.

5.6 Méthodes non linéaires

Dans le cadre linéaire, la convergence de l'erreur d'estimation est asymptotique l'exploitation de fonctions non linéaires que nous allons introduire par l'approche par mode glissant permet une convergence en temps fini. [6]

5.6.1 Commande par mode glissant

La commande par mode glissant est robuste aux incertitudes paramétriques et aux perturbations extérieures. L'idée de cette technique est de synthétiser une commande afin de contraindre le système à atteindre une surface de l'espace des phases et d'y rester par la suite. Cette surface est appelée surface de glissement, elle est définie par une fonction continue des états tels que $s(x, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$ et divise l'espace des phases en deux régions.

Pour faire cela il faut rendre cette surface attractive, la commande peut être étudiée par la méthode directe de Lyapunov. Pour contrecarrer les perturbations et rendre robuste l'asservissement la commande est discontinue. Quand la surface est atteinte le système est dite en régime glissant et elle souffre alors d'un problème appelé chattering. Etant donné que la commutation est limitée en fréquence et qu'il s'agit d'une commande Bang-Bang, le système traverse sans cesse la surface sans jamais l'atteindre, ce problème peut être atténué par la synthèse de commandes par modes glissants d'ordre supérieur.

On peut appliquer cette technique pour notre problème d'observation en définissant un système particulier et en choisissant la surface de glissement avec l'erreur d'estimation, i.e $s(x, t) = e(t)$. Les critères de convergence peuvent être donnée en définissant comme fonction de Liapounov $V = \frac{1}{2}e^2$ et en vérifiant $\dot{V} = e\dot{e}, \dot{V} < 0$.

5.6.2 Observateur Super Twisting

Les articles [3] [6] propose un algorithme de dérivation basé sur la commande par modes glissants d'ordre 2 en considérant le modèle et les hypothèses définies ici 20.

Soit l'observateur d'ordre 2 défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \lambda |e|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e) \\ \dot{x}_2 = \alpha \text{sign}(e) \\ \hat{y}_m = x_2 \end{cases} \quad \text{with } \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (22)$$

Il nous donne alors les conditions pour rendre la surface attractive afin d'atteindre et de conserver le régime glissant.

$\alpha = \mu_1 C$ $\lambda = \mu_2 \sqrt{\lambda}$ $\mu_2 > 0, \mu_1 > 1$ avec C la constant de Lipschitz, i.e $|\ddot{y}| < C < \infty$

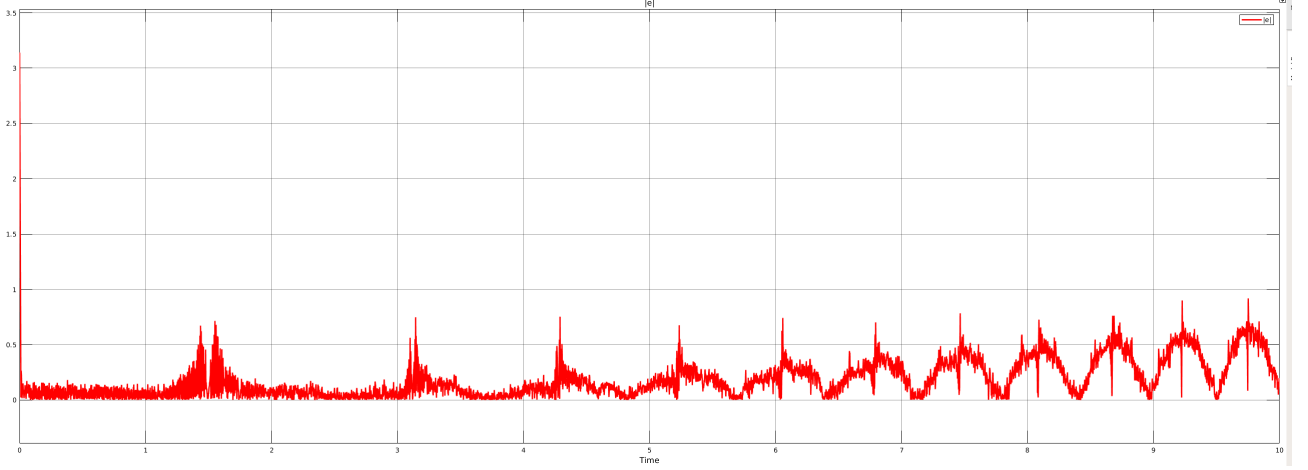


Figure 8: $|e|$ (22) $\mu_1 = 1.1$ $\mu_2 = 0.5$ $C = 200\pi$ RMS = 0.024 $E_{max} = 0.94$

Cet algorithme est efficace dans le cas où le signal est peu bruité, nous avons le même niveau d'erreur que 5.5. Le réglage de cet algorithme est délicat si C est sous-évalué le régime glissant n'est pas conservé, s'il est surévalué la commande en commutation est trop importante et le bruit est amplifié.

6 Observateur d'état (Model based)

Les observateurs d'état incluent la dynamique du système observé, il est donc nécessaire d'en avoir un modèle explicite, ce modèle est inévitablement une simplification du monde réel nous sommes exposés aux incertitudes paramétrique et aux perturbations extérieures. Nous allons inclure le modèle non linéaire définie 6 nous ne pouvons pas utiliser des observateurs linéaires comme Luenberger ou bien le filtre de Kalman ni même leur version à base de trajectoire linéarisée, le système est trop non linéaire pour faire cela. Seuls deux observateurs non linéaires seront implémentés.

Les signaux à estimer proviennent du système simulé en 2 seul l'erreur d'estimation de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont évalués avec les critères 3. Les observateurs sont testés aux perturbations extérieures grâce aux deux perturbations présentes dans la simulation. Pour tester la robustesse des observateurs face aux erreurs de modélisation nous allons simuler le système 2 avec et sans retard de commande.

6.1 Méthodes non linéaires

6.1.1 Observateur à grand gain

Le système du pendule 6 respecte la forme et les conditions pour appliquer l'observateur à grand gain 5.4.2 avec

$$\text{un changement de base } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \phi(X, U) = [0 \quad \dot{x}_3 \quad 0 \quad \dot{x}_4]^T$$

On en déduit cet observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = B(f(\hat{x}) + g(\hat{x})u) + K(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} = B\hat{x} \end{cases} \quad (23)$$

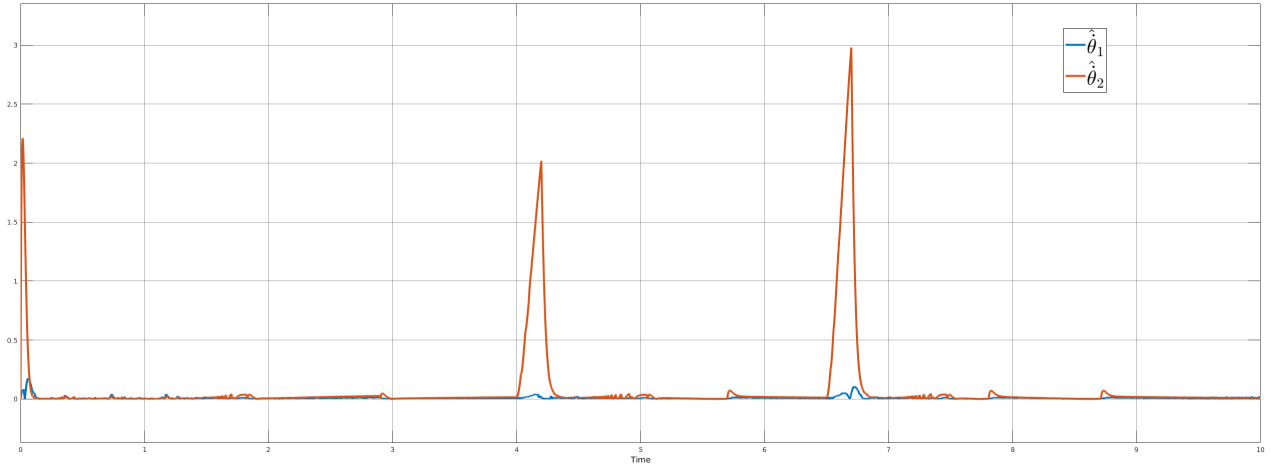


Figure 9: Commande non retardée $|e|$ (5.4.2) $\epsilon = 0.01$ $\text{RMS} = [0.01, 0.33]$ $E_{max} = [0.17, 2.98]$

Il y a un bref régime transitoire qui corrige l'erreur d'initialisation, l'erreur en régime permanent est faible mais l'observateur est très sensible aux perturbations du pendule programmé à 4 secondes et à 6.5 secondes.

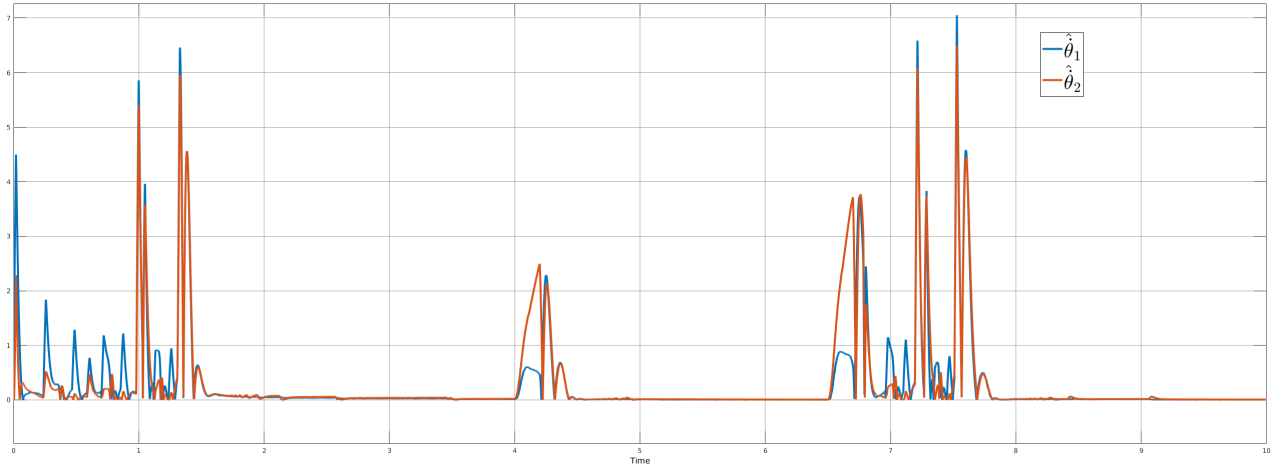


Figure 10: Commande retardée $|e|$ (5.4.2) $\epsilon = 0.01$ $\text{RMS} = [0.8612, 0.8859]$ $E_{max} = [7.05, 6.5]$

Le retard de la commande affecte massivement l'estimation dans le régime Swing Up. L'observateur n'est pas non plus insensible à ces types d'erreurs de modélisation.

6.1.2 Homogeneous finite time observer

Il faut donc rendre l'observateur moins sensible aux perturbations, pour cela les articles [1] [7] propose un observateur basé sur les techniques à mode glissant. Comme le Super Twisting 5.6.2 l'erreur converge en temps fini, c'est en plus un observateur homogène il est plus nécessaire d'avoir une fonction globalement Lipschitzienne, le réglage est plus simple. Pour les systèmes de la forme 18 uniformément observable l'observateur adapté à notre système 6, i.e $n = 4, m = 1, p = 2$ est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \dot{\theta}_1 + k_1 |e_a|^\alpha \text{sign}(e_a) \\ \hat{\theta}_1 = k_2 |e_a|^{2\alpha-1} \text{sign}(e_a) \end{cases} \quad \text{avec } e_a = \theta_1 - \hat{\theta}_1 \quad (24)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_2 = \dot{\theta}_2 + k_3 * |e_p|^\alpha \text{sign}(e_p) \\ \hat{\theta}_2 = k_4 * |e_p|^{2\alpha-1} \text{sign}(e_p) \end{cases} \quad \text{avec } e_p = \theta_2 - \hat{\theta}_2 \quad (25)$$

Pour maintenir le régime glissant il faut que $A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$ et $A_1 = \begin{bmatrix} -k_3 & 1 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix}$ soit des matrices de Hurwitz et que $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$

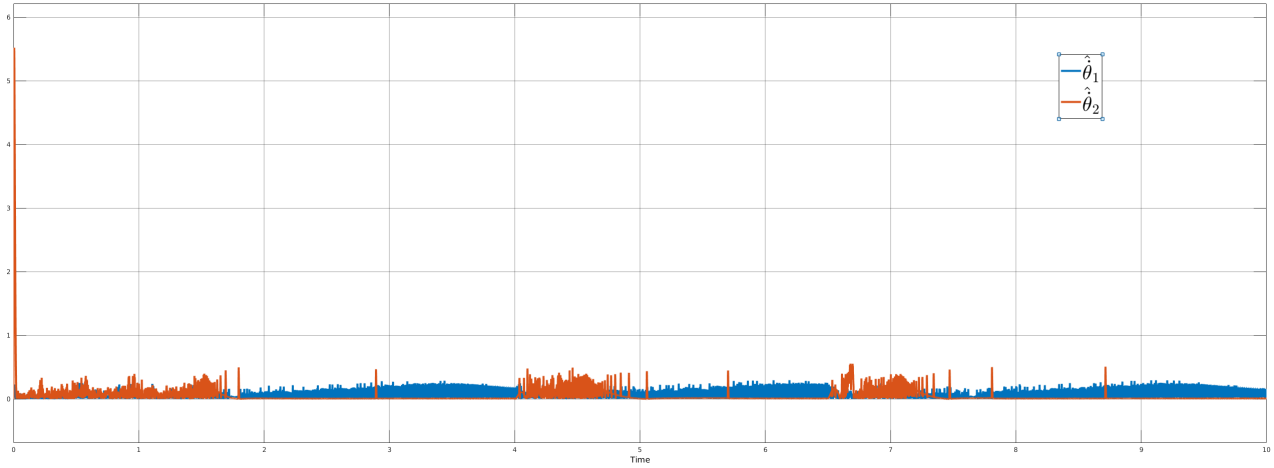


Figure 11: $|e|$ (22) $\epsilon = 0.1$ RMS = [0.099, 0.17] $E_{max} = [0.29, 5.52]$

L'estimation est davantage bruitée en régime permanent que 6.1.1 mais l'effet des perturbations du pendule n'est pas visible.

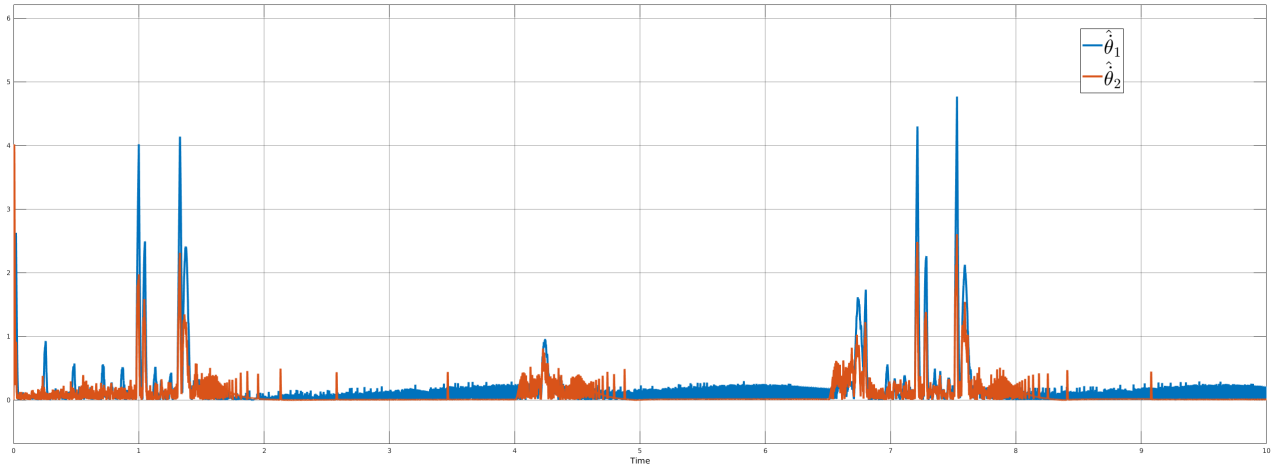


Figure 12: $|e|$ (22) $\epsilon = 0.1$ RMS = [0.444, 0.2696] $E_{max} = [4.76, 4.017]$

Le retard de la commande affecte aussi l'estimation dans le régime Swing Up mais pas autant que 6.1.1.

7 Conclusion

Dans 3 l'étude du pendule de Furuta nous a conduit à définir un modèle uniformément observable de la forme 18 son contrôle a été présenté dans 4 nous avons vu qu'il nécessitait un minimum de deux contrôleurs pour le stabiliser à la position haute. Les contrôleurs et leurs paramètres ont été choisis pour mettre en lumière l'étude des capteurs logiciels. En effet une pondération plus importante sur la commande du LQR aurait amélioré les performances en boucle fermée du système simulé avec les états estimés, réduction de la propagation du bruit des états.

Dans l'étude des capteurs logiciels seules les méthodes présentant une certaine efficacité et respectant les hypothèses du système ont été présentées. Pour ce type de système mécanique, les états non mesurés sont les dérivées successives des états mesurés, autrement dit la mesure est le résultat d'une chaîne d'intégration, nous avons alors vu que la principale difficulté vient du bruit de mesure. L'étude n'a pas la prétention de faire une comparaison générale de ces algorithmes mais plutôt d'une présentation appliquée à notre problème. Dans 5, des algorithmes de dérivation appartenant à l'approche sans modèle ont été présentés, ces algorithmes de dérivation ont été vus comme un problème d'observation avec un choix de modèle particulier, dans le cas linéaire nous avons vu qu'il était nécessaire d'avoir la connaissance de la bande passante du signal utile pour l'optimisation de l'estimation et que le bruit et le signal utile à dériver devaient avoir un spectre à support disjoint.

Par la suite une méthode non linéaire basée sur les techniques de contrôle par mode glissante a été implémentée. Cette méthode s'appuie sur une connaissance a priori du signal à dériver, fonction bornée et lipschitzienne. En somme les hyperparamètres de ces algorithmes de dérivation donnent un compromis entre précisions et sensibilités au bruit.

Dans 6 l'inclusion de la dynamique du système par son modèle dans les observateurs à améliorer grandement l'estimation, il y a une réelle distinction entre le bruit et le signal utile, mais pose le problème de l'incertitude sur le modèle utilisé et le problème des perturbations externe.

Les résultats de la 5^{em} (2) étape sont en annexe 8, les paramètres ont été ajustés en boucle fermée pour avoir un résultat correcte, il est important de noter que pour les observateurs non linéaires nous n'avons pas le principe de séparation, l'étude peut-être complexe un ajustement expérimental est une solution convenable.

En résumé, si le modèle est inconnu ou trop incertain un simple filtrage du signal à dériver est une bonne alternative au prix d'un déphasage plus ou moins conséquent. Dans le cas d'un modèle crédible les observateurs sont la meilleure solution pour éliminer le bruit de mesure. Dans le cas d'un système physique perturbé, les techniques de sliding mode sont envisageables.

References

- [1] Stanislav Aranovskiy, Igor Ryadchikov, Evgeny Nikulchev, Jian Wang, and Dmitry Sokolov. Bias propagation and estimation in homogeneous differentiators for a class of mechanical systems. *IEEE Access*, 8:19450–19459, 2020.
- [2] Ahmed M. Dabroom and Hassan K. Khalil. Discrete-time implementation of high-gain observers for numerical differentiation. *International Journal of Control*, 72:1523–1537, 1999.
- [3] Scorletti G. Smaoui M. Dridi, M. and D. Tournier. From theoretical differentiation methods to low-cost digital implementation. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 2010.
- [4] F. Gordillo, J.A. Acosta, and J. Aracil. A new swing-up law for the furuta pendulum. *International Journal of Control*, 76(8):836–844, 2003.
- [5] Hassan Hammouri, Guy Bornard, and Krishna Busawon. High gain observer for structured multi-output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55:987–992, 2010.
- [6] Arie Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998.
- [7] W. Perruquetti and T. Floquet. Homogeneous finite time observer for nonlinear systems with linearizable error dynamics. *46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [8] Benjamin Seth and Zebb Cazzolato Prime. On the dynamics of the furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, 2011:1–8, 2011.
- [9] K.J Åström and K Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2):287–295, 2000.

8 Appendix

Simulation 2 with the real states.

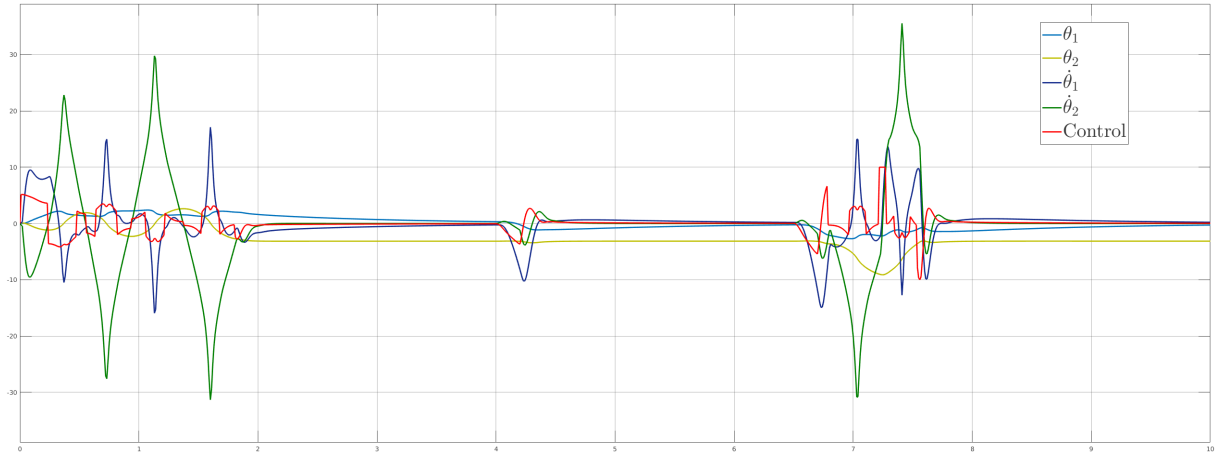


Figure 13: Evolution of system states and the control $u(t)$

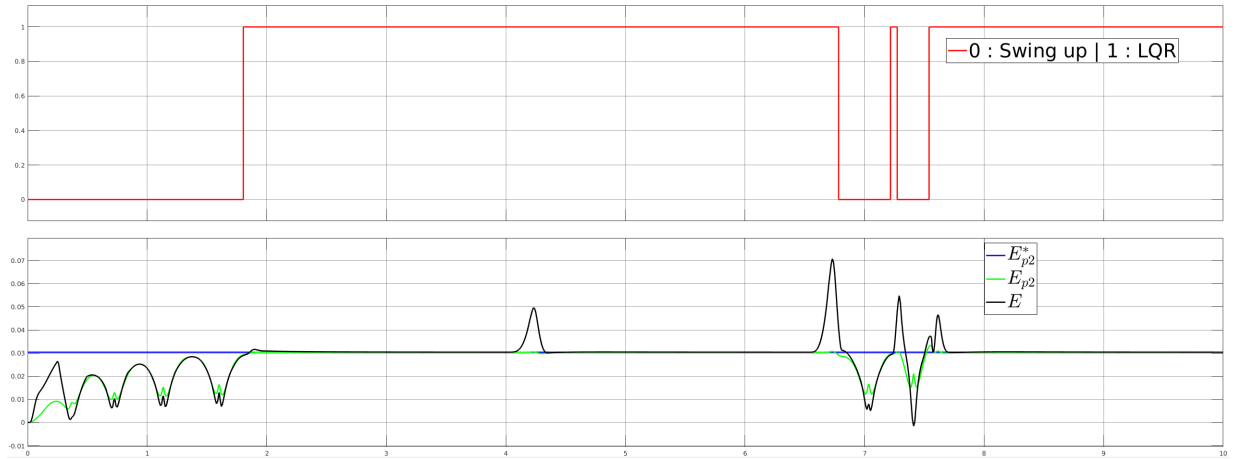


Figure 14: System energy evolution

A 3D rendering was developed to reflect the efficiency of the controllers and estimation using the Matlab VR tool.

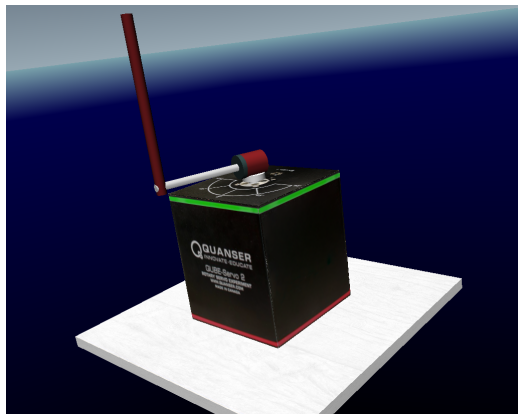


Figure 15: Simulation of the Furuta pendulum

Simulation 2 with the states estimated by the different methods.

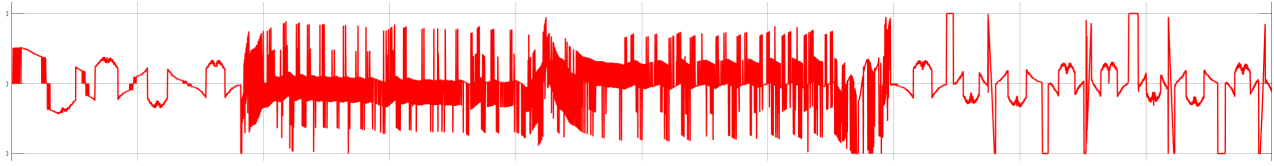


Figure 16: Euler method $u(t)$ Simulation of the Furuta pendulum

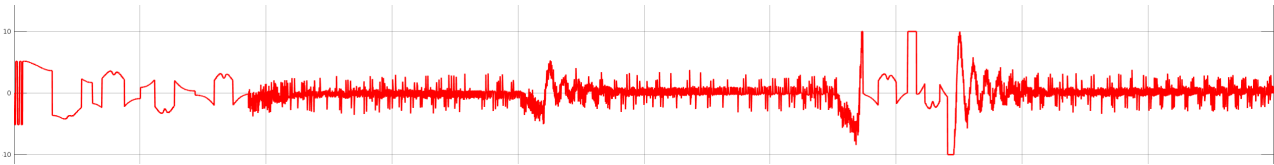


Figure 17: Low pass filter $u(t)$ Simulation of the Furuta pendulum

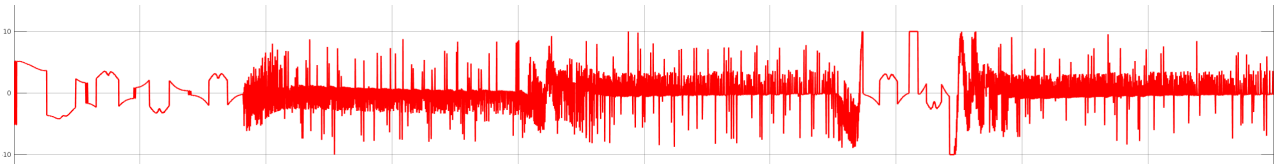


Figure 18: High gain differentiator $u(t)$ Simulation of the Furuta pendulum

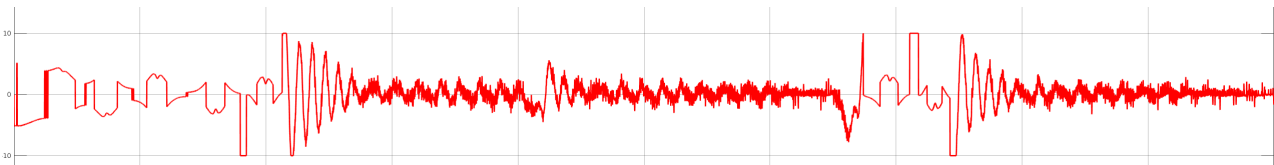


Figure 19: Super Twisting differentiator $u(t)$ Simulation of the Furuta pendulum



Figure 20: High gain observer $u(t)$ Simulation of the Furuta pendulum

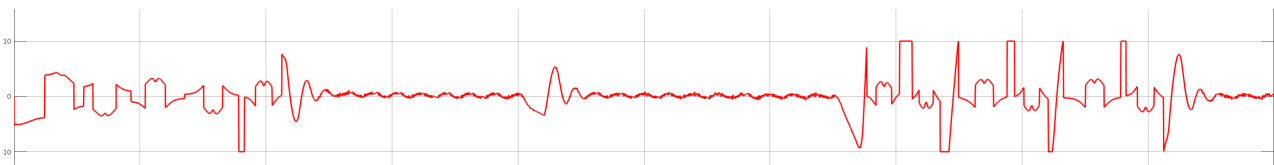


Figure 21: Homogeneous observer $u(t)$ Simulation of the Furuta pendulum