Exercice 1

1. On a la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\vdash \neg$}
\UnaryInfC{$\vdash \varphi, \neg\varphi$}
\RightLabel{$\vdash \vee$}
\UnaryInfC{$\vdash \varphi \vee \neg\varphi$}
\end{prooftree}
$$

2. On a la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\neg \vdash$}
\UnaryInfC{$\varphi, \neg\varphi \vdash$}
\RightLabel{$\wedge \vdash$}
\UnaryInfC{$\varphi \wedge \neg\varphi \vdash$}
\end{prooftree}
$$

3. On a la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\neg \vdash$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi, \varphi, \psi \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \psi$}
\RightLabel{$\neg \vdash$}
\UnaryInfC{$\neg\psi, \varphi, \psi \vdash$}
\RightLabel{$\vee \vdash$}
\BinaryInfC{$\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi, \psi \vdash$}
\RightLabel{$\wedge \vdash$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \vdash$}
\RightLabel{$\vdash \neg$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$}
\end{prooftree}
$$

4. On a la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \psi$}
\RightLabel{$\vdash \wedge$}
\BinaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$}
\RightLabel{$\vdash \neg \times 2$}
\UnaryInfC{$\vdash \varphi \wedge \psi, \neg\varphi, \neg\psi$}
\RightLabel{$\vdash \vee$}
\UnaryInfC{$\vdash \varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi$}
\RightLabel{$\neg \vdash$}
\UnaryInfC{$\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$}
\end{prooftree}
$$

5. On a la preuve :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \psi, \varphi$}
\RightLabel{$\vdash \rightarrow$}
\UnaryInfC{$\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\rightarrow \vdash$}
\BinaryInfC{$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \vdash \varphi$}
\RightLabel{$\vdash \rightarrow$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$}
\end{prooftree}
$$

Exercice 2

Exercice 3

4. On suit l'algorithme. On pense à faire des copies des tableaux si on compte les modifier, pour éviter les liaisons de données. On corrige l'énoncé si `gamma` et `delta` sont vides, on vérifie s'il existe une variable qui apparaît des deux côtés, en utilisant les tableaux `gamma_var` et `delta_var`. Pour traiter Δ, on agit de la manière suivante :
   - si on voit un $\top$, on peut utiliser $\vdash \top$ pour conclure ;
   - si on voit $\bot$, on le supprime par affaiblissement ;
   - si on voit une variable x_i, on distingue : si elle apparaît dans `gamma_var`, on conclut par

axiome ; sinon, on la supprime de la liste et on la met dans le tableau `delta_var` ;
- si on voit une formule avec un connecteur, on applique la règle correspondante.

Exercice 4

On fait le travail pour certaines règles, le reste est similaire.

- Pour la règle $(\bot \vdash)$: $\mathcal{M}(\Gamma, \bot) = \mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}(\bot) = \emptyset \subseteq \mathcal{M}(\Delta)$, donc $\Gamma, \bot \vDash \Delta$;
- pour la règle (ax), $\mathcal{M}(\Gamma, \varphi) = \mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}(\varphi) \subseteq \mathcal{M}(\varphi) \subseteq \mathcal{M}(\Delta) \cup \mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\Delta, \varphi)$, donc $\Gamma, \varphi \vDash \Delta, \varphi$;
- pour la règle $\vee \vdash$, supposons que $\Gamma, \varphi \vDash \Delta$ et $\Gamma, \psi \vDash \Delta$. Alors :

$$\mathcal{M}(\Gamma, \varphi \vee \psi) = (\mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}(\varphi)) \cup (\mathcal{M}(\Gamma) \cap \mathcal{M}(\psi)) \subseteq \mathcal{M}(\Delta) \cup \mathcal{M}(\Delta) = \mathcal{M}(\Delta)$$

  L'inclusion est par hypothèse d'induction. On conclut que $\Gamma, \varphi \vee \psi \vDash \Delta$;
- pour la règle $\vdash \vee$, supposons que $\Gamma \vDash \Delta, \varphi, \psi$. Alors $\mathcal{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\Delta, \varphi, \psi) = \mathcal{M}(\Delta, \varphi, \vee\psi)$. On a donc $\Gamma \vDash \Delta, \varphi \vee \psi$.

Exercice 5

1. Les exemples suivants conviennent pour montrer la non-inversibilité :

$$\dfrac{\vdash \bot}{\vdash \bot \vee \top}\ \vee_i \qquad\qquad \dfrac{\vdash \top \wedge \bot}{\vdash \top}\ \wedge_e$$

$$\dfrac{\vdash \bot \vee \bot \quad \bot \vdash \top \quad \bot \vdash \top}{\vdash \top}\ \vee_e \qquad\qquad \dfrac{\vdash \bot \quad \vdash \bot \rightarrow \top}{\vdash \top}\ \rightarrow_e$$

2. À nouveau, on fait le travail pour certaines règles. Le reste est similaire.
   - règle $\wedge \vdash$. Supposons $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vDash \Delta$. Alors $\mathcal{M}(\Gamma, \varphi, \psi) = \mathcal{M}(\Gamma, \varphi \wedge \psi) \subseteq \mathcal{M}(\Delta)$, donc $\Gamma, \varphi, \psi \vDash \Delta$;
   - règle $\vdash \wedge$. Supposons $\Gamma \vDash \Delta, \varphi \wedge \psi$. Alors $\mathcal{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\Delta) \cup (\mathcal{M}(\varphi) \cap \mathcal{M}(\psi)) = (\mathcal{M}(\Delta) \cup \mathcal{M}(\varphi)) \cap (\mathcal{M}(\Delta) \cup \mathcal{M}(\psi)) = \mathcal{M}(\Delta, \varphi) \cap \mathcal{M}(\Delta, \psi)$. On en déduit $\mathcal{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\Delta, \varphi)$ d'une part et $\mathcal{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\Delta, \psi)$ d'autre part.
3. (a) Si aucune règle ne peut être appliquée, alors aucune formule avec un connecteur logique ne se trouve dans Γ ou dans Δ. De même, $\bot$ n'apparait pas dans Γ et $\top$ n'apparait pas dans Δ. On en déduit les deux premières inclusions. La dernière égalité découle du fait que la règle d'axiome ne peut pas être appliquée.

   (b) On pose $\mu = \mathbb{1}_\Gamma$. Alors par définition, $\mu \in \mathcal{M}(\Gamma)$, car Γ ne contient que des variables et $\top$. Mais comme $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ et que Δ ne contient que des variables et $\bot$, alors $\mu \notin \mathcal{M}(\Delta)$. On en déduit que $\Gamma \nvDash \Delta$.
4. Supposons que $\Gamma \vdash \Delta$ est un séquent valide. Alors en appliquant l'algorithme suivant :
   - tant que c'est possible, s'il y a une formule avec un connecteur dans Γ ou Δ, appliquer la règle correspondante.

   On obtient des feuilles d'un arbre de preuve qui sont également valides (par inversibilité des règles). Ainsi, comme ces preuves sont valides et ne contiennent pas de connecteurs, on peut appliquer la règle d'axiome. Cela montre que $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable.