

Devoir maison n°4

Corrigé

Minimisation d'automate

1 Algorithme de Brzozowski

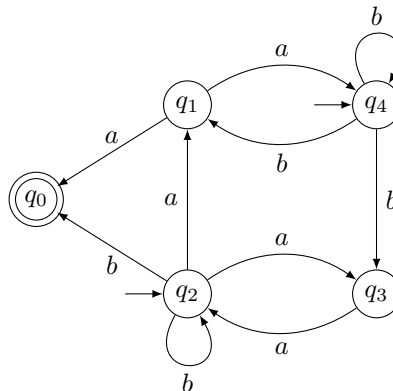
1.1 Langage miroir

Question 1 Montrons que $L(A_0)$ est l'ensemble des mots non vides dont le plus long suffixe de la forme a^k est de taille paire, c'est-à-dire l'interprétation de l'expression régulière $(\Sigma^*b \mid aa)(aa)^*$.

- si $u = \varepsilon$, alors $\delta^*(q_0, u) = q_0 \notin F$;
- si $|u| = 1$, alors $u = a$ ou $u = b$. On a $\delta^*(q_0, a) = q_1 \notin F$ et $\delta^*(q_0, b) = q_2 \in F$;
- si $|u| = n \geq 2$, posons $u = a_1 \dots a_n$. L'automate étant standard et complet, on remarque que pour $v \neq \varepsilon$, $\delta^*(q_0, v) \in \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Distinguons selon les cas :
 - * si $a_n = b$, en remarquant que $\delta(q_1, b) = \delta(q_3, b) = \delta(q_4, b) = q_4 \in F$ et $\delta(q_2, b) = q_2 \in F$, on en déduit que $\delta^*(q_0, u) \in F$;
 - * sinon, $u = va^k$, avec v terminant par b ou $v = \varepsilon$. En remarquant que , distinguons :
 - si k est pair, en remarquant que $\delta^*(q_0, aa) = \delta^*(q_2, aa) = \delta^*(q_4, aa) = q_2$, on en déduit par une récurrence rapide que $\delta^*(q_0, u) = q_2 \in F$;
 - si k est impair, comme $\delta^*(q_0, v) \in \{q_0, q_2, q_4\}$ (par le raisonnement précédent), on a $\delta^*(q_0, va) \in \{q_1, q_3\}$. En remarquant que $\delta^*(q_1, aa) = \delta^*(q_3, aa) = q_3$, on en déduit que $\delta^*(q_0, u) = q_3$ sinon. Dans les deux cas, l'état est non final.

Les mots acceptés par l'automate sont bien ceux de la forme voulue.

Question 2 On inverse les transitions et les états initiaux et finaux. On obtient :



Question 3 Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automate fini déterministe reconnaissant L . On pose $\bar{A} = (Q, \Sigma, \Delta, F, \{q_0\})$ (on inverse les états initiaux et finaux) où Δ est définie par :

$$\forall p, q \in Q^2, \forall a \in \Sigma, \quad p = \delta(q, a) \Leftrightarrow q \in \Delta(p, a)$$

Alors $L(\overline{A}) = \overline{L(A)}$. En effet, soit $u \in \Sigma^*$, $u = a_1 \dots a_n$. Alors :

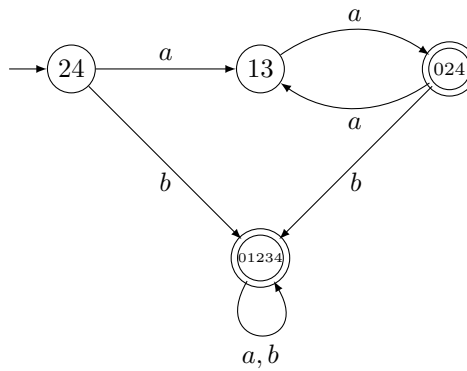
$$\begin{aligned}
 u \in \overline{L(A)} &\Leftrightarrow \bar{u} \in L(A) \\
 &\Leftrightarrow \text{il existe une suite de transitions dans } A : q_0 \xrightarrow{a_n} q_1 \xrightarrow{a_{n-1}} \dots \xrightarrow{a_1} q_n \in F \\
 &\Leftrightarrow \text{il existe une suite de transitions dans } \overline{A} : q_n \in F \xrightarrow{a_1} q_{n-1} \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_0 \\
 &\Leftrightarrow u \in L(\overline{A})
 \end{aligned}$$

1.2 Détermination

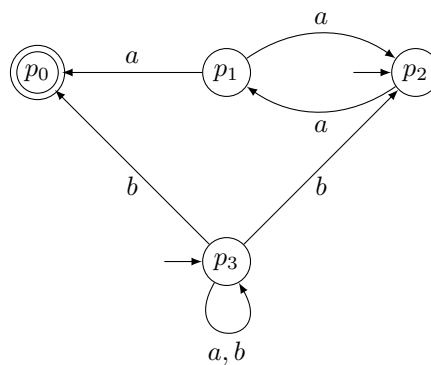
Question 4 On obtient, en indiquant uniquement les indices des états dans une partie :

	a	b
$\rightarrow 24$	13	01234
13	024	—
01234 \rightarrow	01234	01234
024 \rightarrow	13	01234

L'automate A_1 est donc :



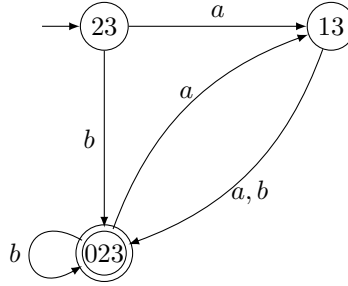
Question 5 On obtient, en renommant les états :



Question 6 On obtient :

	a	b
$\rightarrow 23$	13	023
13	023	023
023 \rightarrow	13	023

L'automate A_2 est donc :



1.3 Algorithme de Brzozowski

Question 7 Pour un automate non déterministe C , on a, par principe de l'algorithme des parties, $L(C) = L(\det(C))$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
 L(B) &= L(\det(\det(\overline{\overline{A}}))) \\
 &= \overline{L(\det(\overline{\overline{A}}))} \\
 &= \overline{L(\det(\overline{A}))} \\
 &= \overline{\overline{L(\overline{A})}} \\
 &= \overline{\overline{L(A)}} \\
 &= L(A)
 \end{aligned}$$

On commence par remarquer qu'avec les hypothèses, on peut écrire $F = \{f\}$.

Question 8 Par principe de l'algorithme des parties, on a $q \in \delta^*(I, u)$ si et seulement si $q \in \Delta^*(I, u)$. Or, comme on a supposé que tous les états de A sont accessibles, cela est équivalent avec le fait que tous les états de \overline{A} sont co-accessibles. On en déduit qu'il existe $v \in \Sigma^*$ tel que $f \in \Delta^*(q, v)$. Cela implique que $f \in \Delta^*(I, uv)$, soit que $uv \in L(\overline{A})$. On a bien $u^{-1}L(\overline{A}) \neq \emptyset$.

Question 9 On a $u^{-1}L(\overline{A}) = v^{-1}L(\overline{A})$ si et seulement si pour $w \in \Sigma^*$, $uw \in L(\overline{A}) \Leftrightarrow vw \in L(\overline{A})$.

Dès lors, soit $q \in \delta^*(I, u)$ et $w \in u^{-1}L(\overline{A})$, tel que $f \in \Delta^*(q, w)$ (comme à la question précédente), alors en notant δ_A la fonction de transition de A , on a $q = \delta_A(f, \overline{w})$. Comme $vw \in L(\overline{A})$ (car $uw \in L(\overline{A})$), alors $\overline{wv} \in L(A)$, on en déduit que $\delta_A^*(q, \overline{v}) \in I$ (les états initiaux de \overline{A} sont les états finaux de A). Cela est bien équivalent avec le fait que $q \in \Delta^*(I, v) = \delta^*(I, v)$.

Question 10 Soit $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$ un automate fini déterministe complet reconnaissant $L(\overline{A})$.

Supposons par l'absurde que $|Q_B| < |X|$. Notons, pour $x \in X$, $u_x \in \Sigma^*$ un mot tel que $\delta^*(I, u_x) = x$ (existe car tous les états de $\det(\overline{A})$ sont accessibles).

Par le principe des tiroirs, B étant complet, il existe $x, y \in X^2$, $x \neq y$ tels que $\delta_B^*(q_B, u_x) = \delta_B^*(q_B, u_y) = q$. Dès lors, pour $w \in \Sigma^*$, $u_x w \in L(B) \Leftrightarrow u_y w \in L(B)$ (car $\delta_B^*(q_B, u_x w) \in F_B \Leftrightarrow \delta_B^*(q, w) \in F_B \Leftrightarrow \delta_B^*(q_B, u_y w) \in F_B$), donc $u_x^{-1}L(\overline{A}) = u_y^{-1}L(\overline{A})$.

Par la question précédente, on en déduit que $x = \delta^*(I, u_x) = \delta^*(I, u_y) = y$, ce qui est absurde, car $x \neq y$. On en déduit que $|Q_B| \geq |X|$.

Question 11 Soit A un automate fini déterministe. L'automate $\det(\overline{A})$ est un automate fini déterministe dont tous les états sont accessibles. Par les questions précédentes, on en déduit que tous les automates finis déterministes complets reconnaissant $L(\det(\overline{A})) = L(A)$ possèdent au moins autant d'états que $\det(\det(\overline{A}))$. L'algorithme de Brzozowski permet donc bien de construire un automate B reconnaissant $L(A)$ avec un nombre minimal d'états.

Par ailleurs, B est bien complet. En effet, s'il ne l'était pas, il posséderait un blocage, ce qui signifie que l'état \emptyset est accessible et aurait dû être rajouté à l'automate.

Question 12 Soit A un automate déterministe à n états. La construction de \overline{A} se fait en complexité $\mathcal{O}(n + \text{nombre de transitions}) = \mathcal{O}(n + n|\Sigma|) = \mathcal{O}(n)$ pour un alphabet de taille fixe. C'est la complexité du calcul d'un graphe transposé, en nombre d'arêtes + nombre de sommets.

La déterminisation de \overline{A} se fait en complexité $\mathcal{O}(2^n \times n)$ (pour chaque partie, on doit calculer l'image par la fonction de transition non déterministe). L'automate ainsi obtenu possède au plus 2^n états.

Le calcul de $\overline{\det(\overline{A})}$ se fait en temps $\mathcal{O}(2^n)$ de manière similaire à \overline{A} (l'automate a au plus 2^n états et $|\Sigma|2^n$ transitions).

La déterminisation de $\overline{\det(\overline{A})}$ se fait en complexité $\mathcal{O}(2^{2^n})$ en première approche, mais on sait que l'automate obtenu est minimal. Il possède donc moins de n états (qui était le nombre d'états de A). On obtient alors une complexité en $\mathcal{O}(n \times 2^n)$ (n parties dont on doit calculer les images, avec de l'ordre d'au plus 2^n transitions sortantes par état).

La complexité totale est donc en $\mathcal{O}(n2^n)$. Ce n'est pas utilisable dès lors que l'automate possède plus que ~ 30 états.

2 Algorithme de Hopcroft

2.1 Équivalence de Nerode

Question 13 La paire $\{q_1, q_4\}$ est séparée par le mot vide (car q_1 n'est pas final mais q_4 l'est). La paire $\{q_0, q_1\}$ est séparée par a . La paire $\{q_2, q_4\}$ est une paire équivalente : soit $u \in \Sigma^*$, on distingue :

- si $u = \varepsilon$, alors $\delta^*(q_2, u) = q_2$ et $\delta^*(q_4, u) = q_4$ qui sont tous les deux finaux ;
- si u termine par b ou par aa , alors $\delta^*(q_2, u)$ et $\delta^*(q_4, u)$ valent q_2 ou q_4 qui sont tous les deux finaux ;
- si u termine par a mais pas par aa , alors $\delta^*(q_2, u)$ et $\delta^*(q_4, u)$ valent q_1 ou q_3 qui sont tous les deux non finaux.

On en déduit qu'aucun mot ne sépare $\{q_2, q_4\}$.

Question 14 $\bigcup_q a^{-1}q$ représente l'ensemble des états qui ont une transition sortante étiquetée par a , c'est-à-dire Q tout entier (car A est complet). L'automate étant déterministe, pour $q \neq q'$, $a^{-1}q \cap a^{-1}q' = \emptyset$ (une transition étiquetée par a depuis un état ne peut pas mener vers deux états distincts). On en déduit l'égalité voulue.

Question 15 La file contient initialement $(\{q_0, q_2\}, \{q_0, q_4\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2, q_3\}, \{q_3, q_4\})$. Le déroulement de l'algorithme est le suivant :

- on défile $\{q_0, q_2\}$ et $\{q_0, q_4\}$ sans rien enfile, car q_0 n'a pas d'antécédent ;
- on défile $\{q_1, q_2\}$, on enfile $\{q_0, q_1\}$ et $\{q_0, q_3\}$ en regardant les antécédents par a ;
- on défile $\{q_1, q_4\}$ sans rien enfile, car q_1 n'a pas d'antécédent par b et q_4 n'a pas d'antécédent par a ;
- on défile le reste de la file sans rien enfile, soit car on ne trouve pas d'antécédents, soit car on retombe sur des paires déjà dans D .

On obtient le tableau suivant (on met une croix pour les paires dans D) :

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_1	X		X	
q_2	X	X		X
q_3	X		X	
q_4	X	X		X

Question 16 Il s'agit d'une double implication :

\Rightarrow Soit p, q deux états séparables. Alors, il existe $u \in \Sigma^*$ tel que $\delta^*(p, u) \in F$ et $\delta^*(q, u) \notin F$. Or, $\delta^*(p, u)$ et $\delta^*(q, u)$ sont distinguables par l'algorithme, d'après l'initialisation. Si on pose $u = a_1 a_2 \dots a_n$, $u_i = a_1 \dots a_i$, $p_i = \delta^*(p, u_i)$ et $q_i = \delta^*(q, u_i)$, alors par une récurrence décroissante simple, on montre que p_i et q_i sont dans D de par l'implémentation de l'algorithme.

\Leftarrow Soit $\{p, q\} \in D$. Alors par construction, il existe une suite de lettres a_1, a_2, \dots, a_n et deux suites d'états $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ telles que $p_1 = p$ et pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $p_{i+1} = \delta(p_i, a_i)$ (de même pour (q_i)). De plus, p_i et q_i sont dans D . De par l'initialisation, on peut de plus choisir $p_n \in F$ et $q_n \notin F$, ce qui montre que p et q sont séparables.

Question 17 On remarque qu'une paire $\{p, q\}$ ne passe qu'au plus une fois par la file. La création de D est en $O(|Q|^2)$ si on utilise une matrice de booléens. On utilise les structures suivantes :

- Φ est une file, toutes les opérations peuvent s'implémenter en temps constant ;
- D est une matrice de booléens. Sa création est en temps $\mathcal{O}(|Q|^2)$, mais les opérations d'ajouts et de tests d'appartenance sont en $\mathcal{O}(1)$;
- le calcul des $a^{-1}q$ peut se faire en calculant « l'automate transposé » : c'est un calcul de graphe transposé, qui peut se faire en temps $\mathcal{O}(|Q||\Sigma|)$ (nombre de sommets + nombre d'arêtes).

On en déduit que seule la taille de toutes les boucles **Pour** compte. Or en utilisant la question 2, on a :

$$\sum_{\{p, q\} \in \mathcal{P}_2(Q)} \sum_{a \in \Sigma} |a^{-1}p| |a^{-1}q| \leq \sum_p \sum_a |a^{-1}p| \sum_q |a^{-1}q| = |\Sigma| |Q|^2$$

La complexité totale est en $\mathcal{O}(|\Sigma||Q|^2)$. Elle est atteinte lorsque toutes les paires sont séparables.

2.2 Automate minimal

Question 18 On a, par définition :

$$\begin{aligned} L(A) = L(B) &\Leftrightarrow \forall u \in \Sigma^*, (\delta_A^*(q_A, u) \in F_A \Leftrightarrow \delta_B^*(q_B, u) \in F_B) \\ &\Leftrightarrow \forall u \in \Sigma^*, (\delta^*(q_A, u) \in F_A \cup F_B \Leftrightarrow \delta^*(q_B, u) \in F_A \cup F_B) \\ &\Leftrightarrow q_A, q_B \text{ sont équivalents} \end{aligned}$$

Question 19 On a, pour tout $q, q' \in Q_i$ et $a \in \Sigma$, $\delta(q, a)$ et $\delta(q', a)$ sont équivalents. En effet, si ce n'était pas le cas, alors $\{q, q'\}$ serait séparable, ce qui est absurde. On en déduit que le calcul de $\delta_B(Q_i, a)$ ne dépend pas du choix du représentant.

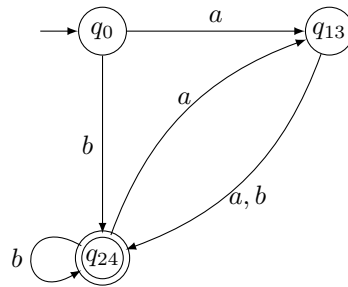
Question 20 Soient q, q' deux états non co-accessibles de A . Alors $\forall u \in \Sigma^*$, $\delta^*(q, u) \notin F$ et $\delta^*(q', u) \notin F$. On en déduit que q et q' sont équivalents. Pour conclure, il suffit de remarquer que Q_i co-accessible \Leftrightarrow tous les états de Q_i sont co-accessibles.

Question 21 On remarque que $\delta_B(\bar{q}, a) = \overline{\delta(q, a)}$. Par une récurrence rapide, on montre que pour tout $u \in \Sigma^*$, $\delta_B^*(\bar{q}_0, u) = \overline{\delta^*(q_0, u)}$. On en déduit :

$$u \in L(A) \Leftrightarrow \delta^*(q_0, u) \in F \Leftrightarrow \overline{\delta^*(q_0, u)} \notin F \Leftrightarrow \delta_B^*(\bar{q}_0, u) \notin F \Leftrightarrow u \in L(B)$$

Question 22 Soit C un tel automate tel que $|Q_C| < |Q_B|$. En considérant l'automate formé de la superposition des deux, alors q_C et q_0 sont équivalents (question 6). De plus, deux états distincts Q_i et Q_j de Q_B sont toujours séparables. La relation d'équivalence étant transitive, par le principe des tiroirs, il existe un état $Q_i \in Q_B$ équivalent à aucun état de Q_C . Comme Q_i est accessible (par hypothèse de construction), $\exists u \in \Sigma^*, \delta_B^*(Q_0, u) = Q_i$. Dès lors, Q_i et $\delta_C^*(q_C, u)$ sont séparables, donc Q_0 et q_C également. On conclut par l'absurde.

Question 23 L'algorithme de séparation a permis de trouver que q_1 et q_3 sont équivalents, ainsi que q_2 et q_4 . L'automate minimal est donc :



On retrouve bien l'automate minimal trouvé à la partie précédente.

Question 24 En appliquant l'algorithme de séparation, on obtient que les paires $\{q_2, q_4\}$ et $\{q_3, q_5\}$ sont équivalentes. On en déduit l'automate :

