COMPOSITION D'INFORMATIQUE n°1

Sujet 2 (Corrigé)

⋆ ⋆ ⋆

Problème 1 : théorème de Rice

Question 1 Il s'agit, à peu de choses près, du problème de l'arrêt étudié en classe ! Ce problème est semi-décidable, la fonction suivant le résout partiellement :

```
let appartient <<f>, x> =
    universel <<f>, x>
```

En effet, si l'appel $f(x)$ termine et renvoie `true`, alors la fonction renvoie true, sinon la fonction ne termine pas ou renvoie `false`.

On suppose qu'il existe une fonction `appartient : string -> bool` qui résout ce problème pour toutes les instances. On pose :

```
let paradoxe <f> =
    if appartient <<f>, <f>> then paradoxe <f>
    else true
```

Une telle fonction ne peut pas exister :

– si paradoxe <paradoxe> termine et renvoie `true`, cela signifie que appartient <<paradoxe>, <paradoxe>> renvoie `false`, donc que paradoxe <paradoxe> ne termine pas ou renvoie `false` ;
– si paradoxe <paradoxe> ne termine pas (elle ne peut pas renvoyer `false`), cela signifie que appartient «paradoxe>, <paradoxe» renvoie `true`, donc que paradoxe <paradoxe> termine et renvoie `true`.

Dans les deux cas, c'est une contradiction, donc la fonction `appartient` ne peut pas exister. Le problème est donc indécidable.

Question 2 Supposons que le problème est semi-décidable et soit $\mathcal{A}$ un algorithme qui résout partiellement ce problème. On distingue :

– si $\langle \mathcal{A} \rangle$ est une instance positive de `Diagonal`, alors $\mathcal{A}(\langle \mathcal{A} \rangle)$ termine et renvoie `true`. Mais comme c'est une instance positive, cela veut aussi dire que $\langle \mathcal{A} \rangle \notin L(\mathcal{A})$;
– si $\langle \mathcal{A} \rangle$ est une instance négative de `Diagonal`, alors $\mathcal{A}(\langle \mathcal{A} \rangle)$ ne termine pas ou renvoie `false`. Mais comme c'est une instance négative, cela veut aussi dire que $\langle \mathcal{A} \rangle \in L(\mathcal{A})$.

Dans les deux cas on arrive à une contradiction.

Question 3 Soit $\langle f \rangle \in \Sigma^*$. Alors $\langle f \rangle$ est une instance positive de `Diagonal` si et seulement si $\langle f \rangle \notin L(f)$ si et seulement si $(\langle f \rangle, \langle f \rangle)$ est une instance négative de `Appartient` si et seulement si $(\langle f \rangle, \langle f \rangle)$ est une instance positive de co`Appartient`. Comme la fonction $\langle f \rangle \mapsto (\langle f \rangle, \langle f \rangle)$ est clairement calculable, on en déduit bien la réduction voulue.

On peut en déduire d'une part que co`Appartient` n'est pas semi-décidable (on aurait déjà pu le déduire de la question 1), d'autre part que co`Diagonal` $\leqslant_m$ `Appartient`, donc que co`Diagonal` est semi-décidable.

Question 4 C'est bien une propriété des langages de fonctions, car c'est égal à $\{L(f) \mid \langle f \rangle \notin L(f)\}$ qui est bien une partie de $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Question 5 Comme on cherche à montrer que P est indécidable, on peut soit montrer que P est indécidable, soit que co$P$ est indécidable. L'un de ces deux problèmes n'a pas $\emptyset$ comme instance positive. Par ailleurs, on remarque que si P est une propriété non triviale des langages semi-décidables, alors co$P$ l'est également (les rôles de L_1 et L_2 sont inversés).

Question 6 Distinguons les cas :

- si $(\langle f \rangle, x)$ est une instance positive de `Appartient`, alors `universel <f> x` renvoie `true`, donc pour toute entrée y l'appel $g(y)$ a le même résultat que l'appel $f_L(y)$. On en déduit que $L(g) = L(f_L) = L \in P$, donc $\langle g \rangle$ est une instance positive de P ;
- si $(\langle f \rangle, x)$ est une instance négative de `Appartient`, alors l'appel `universel <f> x` ne termine pas ou renvoie `false`. On en déduit que pour toute entrée y, l'appel $g(y)$ ne renvoie jamais `true`, soit que $L(g) = \emptyset$. Comme on a supposé lors de la question précédente que $\emptyset \notin P$, cela signifie que $\langle g \rangle$ est une instance négative de P.

Par ailleurs, la construction de g est clairement calculable, ce qui montre bien que `Appartient` $\leqslant_m P$.

Question 7 Comme `Appartient` n'est pas décidable, on en déduit que P non plus, ce qui conclut le théorème de Rice.

Question 8 On commence par montrer que la propriété « être non vide » est bien une propriété non triviale des langages semi-décidables. En effet :

- le langage $\emptyset$ est vide et est semi-décidable (et même décidable), par la fonction :

```
let f1 x = false
```

- le langage Σ^* est non vide et est semi-décidable (et même décidable), par la fonction :

```
let f2 x = true
```

Par le théorème de Rice, on en déduit que le problème est bien indécidable. On a ici $P = \mathcal{P}(\Sigma^*) \setminus \{\emptyset\}$.

Question 9

a) Ce problème est bien décidable : il suffit de « lire » le code source et de compter le nombre de boucle `while`. Aucune exécution de ce code source n'est nécessaire.

b) Cela ne rentre pas en contradiction avec le théorème de Rice, car ce dernier concerne les propriétés des langages de fonctions, et non les propriétés sur les fonctions elles-mêmes (leur code source).

Problème 2 : tas de sable

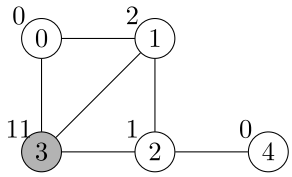
1 Introduction aux tas de sable

1.1 Préliminaires

Question 10 On remarque que $|\Delta_s| = 0$ et que $|c + c'| = |c| + |c'|$. Ainsi, si $c \to_s c'$, alors $c' = c + \Delta_s$ et $|c'| = |c|$.

Question 11 Avec les notations de l'énoncé, $c_2 = c + \Delta_s + \Delta_t = c + \Delta_t + \Delta_s = c_2'$.

Question 12 On obtient :



Il y a eu 17 éboulements.

Question 13 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite infinie d'éboulements depuis c. Comme S est fini, l'ensemble $I = \{s \in S \mid s \text{ s'éboule un nombre infini de fois}\}$ est non vide. Par ailleurs, $q \notin I$ (car le puits q ne s'éboule jamais), donc $S \setminus I$ est non vide. Par connexité de G, il existe deux sommets voisins $s \in I$ et $t \in S \setminus I$. Mais alors, le sommet t accumule un nombre infini de grains au cours des éboulements, ce qui est absurde car il n'y a qu'un nombre fini de grains initialement.

Question 14 On montre le résultat par récurrence sur la taille maximale des avalanches.

- si la taille maximale est 0, alors c est stable, donc $k = \ell = 0$ et les deux multi-ensembles sont vides ;
- supposons le résultat établi pour une taille maximale d'avalanche inférieure ou égale à $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que c est une configuration dont la taille maximale d'avalanche est $n+1$. Alors, en utilisant les notations de l'énoncé, c_1 et c'_1 ont une taille maximale d'avalanche $\leqslant n$. Si $s_1 = t_1$, on a $c_1 = c'_1$ et par hypothèse de récurrence on obtient bien le résultat voulu. Sinon, t_1 est un sommet instable dans c_1 et s_1 est un sommet instable dans c'_1. Notons alors c''_2 la configuration telle que $c_1 \to_{t_1} c''_2$ et $c'_1 \to_{s_1} c''_2$ (la notation est pertinente car les éboulements sont commutatifs). En considérant une avalanche :

$$c''_2 \to_{u_3} c''_3 \to_{u_4} \dots \to_{u_m} c''_m$$

  on en déduit, par hypothèse de récurrence, que $m = k$ et $m = \ell$, puis que $\{t_1, u_3, \dots, u_m\} = \{s_2, \dots, s_k\}$ et $\{s_1, u_3, \dots, u_m\} = \{t_2, \dots, t_\ell\}$. Cela permet bien de conclure sur l'égalité des multi-ensembles voulue.

On conclut par récurrence.

Question 15 L'existence est donnée par la question 13. L'unicité est donnée par la question 14 et la question 11 (les éboulements sont commutatifs et s'effectuent sur les mêmes sommets dans les deux cas).

1.2 Implémentation

Question 16 On écrit une fonction auxiliaire qui déplace un grain de s vers un de ses voisins. On l'applique à l'ensemble de ses voisins avec `List.iter`.

```
let eboulement g c s =
    let grain t =
        c.(t) <- c.(t) + 1;
        c.(s) <- c.(s) - 1 in
    List.iter grain g.(s);;
```

Question 17 On commence par calculer un tableau des degrés, pour vérifier efficacement si un sommet est stable, puis, tant qu'il reste un sommet instable, on l'éboule. On utilise un booléen pour savoir si on a parcouru l'ensemble des sommets sans trouver de sommet instable.

```
let avalanche g q c =
    let n = Array.length g in
    let degres = Array.init n (fun s -> List.length g.(s)) in
    let fini = ref false in
    while not !fini do
        fini := true;
        for s = 0 to n - 1 do
            while s <> q && c.(s) >= degres.(s) do
                fini := false;
                eboulement g c s
            done
        done
    done;;
```

Question 18 La fonction `eboulement` a une complexité linéaire en le degré de s, majoré par n. Ainsi, l'ensemble des éboulements s'effectuent en complexité $\mathcal{O}(kn)$. Le fait qu'on fasse une boucle `for` qui parcourt tous les sommets à chaque fois n'augmente pas cette complexité, car il y a au plus k passages dans la boucle `while`. Le calcul du tableau des degrés se fait en $\mathcal{O}(|S| + |A|) = \mathcal{O}(n^2)$, ce qui donne une complexité totale en $\mathcal{O}((k + n)n)$.

La complexité spatiale concerne uniquement le tableau des degrés, soit $\mathcal{O}(n)$.

2 Configurations récurrentes

Question 19 G possède un arbre couvrant T. Cet arbre couvrant possède un sommet s de degré 1 (sinon on peut créer un chemin infini, ce qui est absurde car l'arbre est sans cycle). En supprimant ce sommet de l'arbre, le reste de l'arbre reste connexe. On en déduit que $G[-s]$ reste connexe.

Question 20 Comme les configurations contiennent un nombre positif de grains sur les sommets réguliers, un sommet instable dans c reste instable dans $c+d$. On en déduit, par une simple récurrence, que $c+d \to^* c'+d$. De même, $c' + d \to^* c' + d'$, d'où le résultat.

Question 21 Si on considère le graphe à deux sommets et une arête $G = (\{0, 1\}, \{\{0, 1\}\})$, avec le puits 0, alors la configuration $(0, 0)$ est une configuration nulle et récurrente. En effet, $c + (-1, 1) \to c$ par un éboulement.

Si $|S| \geqslant 3$, une configuration nulle ne peut pas être récurrente. En effet, supposons que c est une configuration nulle récurrente et soit c' non nulle telle que $c+c' \to^* c$. Notons $c'' \to_s c$ le dernier éboulement d'une avalanche de $c + c'$. Comme $G[-q]$ est connexe, le sommet s (qui est régulier) a au moins un voisin t régulier. On en déduit que $c_t \geqslant 1$, ce qui est absurde, car c est nulle.

Question 22 La configuration c étant non nulle, il existe $s \in S$ un sommet régulier tel que $c_s > 0$. Notons, pour $m \in [\![0, n-1]\!]$, $S_m = \{t \in S \mid d(s, t) = m\}$, l'ensemble des sommets à distance m du sommet s. Montrons qu'en posant $k = n^{n-1}$, on obtient le résultat attendu. En effet :

- en éboulant s n^{n-2} fois, les sommets de S_1 gagnent ce nombre de grains et il reste au moins $n^{n-1} - (n - 1) \times n^{n-2} = n^{n-2}$ grains sur s (car $\deg(s) \leqslant n - 1$) ;
- en éboulant les sommets de S_1 n^{n-3} fois, les sommets de S_2 gagnent au moins ce nombre de grains et il reste au moins n^{n-3} grains sur les sommets de S_2 ;
- ...
- en éboulant les sommets de S_{n-2} une fois, les sommets de S_{n-1} gagnent au moins un grain et il reste au moins un grain sur les sommets de S_{n-2}.

La récurrence cachée derrière ce raisonnement permet bien de conclure.

Question 23 Par double implication :

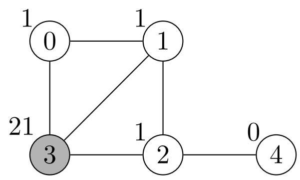
- si c est récurrente, soit c' non nulle telle que $\mathrm{av}(c+c') = c$. On remarque, par la question 20 et par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{av}(c+kc') = c$.

  Par la question précédente, il existe k et c'' tels que $kc' \to^* c''$ et $c''_s > 0$ pour tout s régulier. Par un raisonnement similaire, on peut en fait choisir $c''_s \geqslant \deg(s)$ (en augmentant la valeur de k). On a alors :

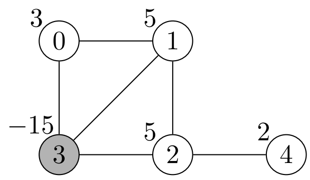
$$c + kc' \to^* c + c'' = (c + c'' - \delta) + \delta \to^* c$$

  On en déduit bien le résultat attendu, car $c + c'' - \delta$ est bien une configuration.
- réciproquement, s'il existe c' telle que $\mathrm{av}(c'+\delta) = c$, alors $\mathrm{av}(c + (c' + \delta - c)) = c$, et on remarque que $\delta - c$ est bien une configuration, car c est stable (c'est le résultat d'une avalanche).

Question 24 On a $\mathrm{av}(2\delta)$ qui vaut :



On obtient alors β la configuration :



Question 25 On a $\beta = \delta + (\delta - \mathrm{av}(2\delta))$. Or $\delta - \mathrm{av}(2\delta)$ est bien une configuration, car $\mathrm{av}(2\delta)$ est stable. On en déduit que β est bien une configuration.

Dès lors, $\beta + \delta = 2\delta + (\delta - \mathrm{av}(2\delta)) \to^* \mathrm{av}(2\delta) + (\delta - \mathrm{av}(2\delta)) = \delta$.

Question 26 Le sens réciproque est direct, car β est une configuration non nulle (si c'était le cas, alors 2δ serait une configuration stable, ce qui est faux).

Supposons que c est une configuration récurrente. Par la question 22, il existe une configuration c' telle que $\mathrm{av}(c'+\delta) = c$. Dès lors, $c' + \delta + \beta \to^* c' + \delta \to^* c$. De plus, $c' + \delta + \beta \to^* c + \beta \to^* c$, par unicité de la configuration obtenue par avalanche. On en déduit bien que $\mathrm{av}(c+\beta) = c$.

3 Parcours décroissants

Question 27 Remarquons que $\sigma^{<k} = \tau^{<k}$, donc σ_k et τ_k ne peuvent pas être tous deux une arête (car l'arête maximale vérifiant les conditions est unique). Si σ_k et τ_k sont tous deux un sommet, alors $\sigma_{k-1} = \tau_{k-1}$ est l'arête $\{\sigma_k, \tau_k\}$. Mais alors σ_{k-1} n'est incidente à aucun sommet de $\sigma^{<k-1}$. On conclut par l'absurde.

Question 28 Remarquons que $\Phi(\sigma)$ est bien un ensemble d'arêtes, car un parcours décroissant ne peut pas contenir deux sommets consécutifs (un sommet apparaît toujours après une arête, s'il est régulier, ou au début du parcours pour le puits). Par ailleurs, $|\Phi(\sigma)| = |S \setminus \{q\}| = n - 1$. Enfin, $(S, \Phi(s))$ est connexe, car chaque sommet σ_k est adjacent à l'un des sommets de $\sigma^{<k}$. On en déduit que c'est un arbre, qui est également couvrant.

Question 29

– Φ est injective : soient σ et τ deux parcours décroissants et k l'indice minimal tel que $\sigma_k \neq \tau_k$. Sans perte de généralité, par la question 27, σ_k est un sommet et τ_k est une arête. Alors l'arête $\sigma_{k-1} = \tau_{k-1}$ est une arête de $\Phi(\sigma)$, mais pas de $\Phi(\tau)$, donc $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\tau)$, ce qui donne l'injectivité.
– Φ est surjective : soit $T = (S, B)$ un arbre couvrant de G. On pose σ le parcours arêtes-sommets défini par :
  * $\sigma_0 = q$;
  * pour $i \in [\![1, m+n-1]\!]$, si $\sigma_{i-1} \in B$, on pose σ_i l'unique sommet incident à σ_{i-1} qui n'est pas dans $\sigma^{<i}$, sinon, on pose σ_i l'arête maximale selon $<_A$ parmi les arêtes hors de $\sigma^{<i}$ et incidentes à un sommet de $\sigma^{<i}$.

  Cette définition est correcte et donne un parcours décroissant. Par sa définition, on a bien $\Phi(\sigma) = T$, d'où la surjectivité.

Question 30 Notons $T = (S, B) = \Phi(\sigma)$. Notons de plus rg la fonction qui à un sommet ou une arête associe son rang dans σ, c'est-à-dire vérifiant, pour tout i, $rg(\sigma_i) = i$. Par double implication :

– supposons que $a = \{s, t\}$ est forte pour σ. Dans un premier temps, par définition de Φ, $a \notin B$. Posons $\gamma = (a_1, s_1, a_2, s_2, \ldots, a_k, s_k)$ le cycle obtenu en rajoutant a à T, avec $a_1 = a$, $s_1 = s$ et $s_k = t$. Posons ℓ l'indice tel que s_ℓ est de rang minimal parmi les sommets du cycle. Nécessairement, $rg(s_\ell)$ est inférieur au rang de ses deux arêtes incidentes (sinon une telle arête aurait son autre extrémité de rang inférieur, ce qui contredirait la minimalité de s_ℓ).

  Par ailleurs, pour $1 < i \leqslant k$, a_i est une arête de l'arbre, donc doit être de rang égal à celui d'une de ses extrémités moins un. En particulier, pour $1 < i \leqslant \ell$, $rg(a_i) = rg(s_{i-1}) - 1$ (par récurrence descendante, car s_ℓ est minimal). De même, pour $\ell < i \leqslant k$, $rg(a_i) = rg(s_i) - 1$. On a alors :

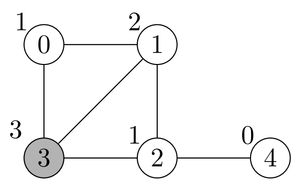
$$rg(a) > rg(s_1) > rg(a_2) > rg(s_2) > \ldots > rg(a_\ell) > rg(s_\ell)$$

$$rg(s_\ell) < rg(a_{\ell+1}) < rg(s_{\ell+1}) < \ldots < rg(a_k) < rg(s_k) < rg(a)$$

  Dès lors, a est de rang maximal dans le cycle. Posons r tel que a_r est l'arête du cycle minimale pour $<_A$. Supposons que $r \neq 1$. Sans perte de généralité, quitte à renuméroter le cycle dans l'autre sens, supposons $\ell < r \leqslant k$. Alors, après avoir choisi le sommet s_{r-1} dans le parcours σ, l'arête a_r n'est jamais l'arête maximale selon $<_A$ parmi les arêtes qui ne sont pas dans $\sigma^{<i}$ incidentes à un sommet de $\sigma^{<i}$, tant que toutes les autres arêtes du cycle n'ont pas été sélectionnées. On en déduit que le parcours n'est en fait pas un parcours décroissant, car on aurait dû avoir $rg(a) < rg(a_r)$. Par l'absurde on en déduit que a est bien minimale pour $<_A$, donc est active extérieurement.
– Réciproquement, supposons que $a = \{s, t\}$ est active extérieurement. Supposons par l'absurde que a n'est pas forte, c'est-à-dire, sans perte de généralité, que $rg(s) < rg(a) < rg(t)$. Soit σ_j le sommet du cycle de rang minimal tel que $rg(a) < rg(\sigma_j)$ (σ_j existe bien, car l'ensemble des tels sommets contient au moins t). Alors σ_{j-1} est une arête du cycle incidente à σ_j (sinon par une preuve similaire à la précédente, σ_j serait de rang minimal dans le cycle, ce qui est impossible). On a donc $rg(a) < j - 1$. Mais alors, l'autre extrémité de σ_{j-1} est de rang inférieur au rang de a (car c'est un sommet du cycle, et par définition de σ_j). On en déduit que dans le parcours σ, au moment où a a été ajouté au parcours, l'arête σ_{j-1} avait une extrémité déjà choisie et est $>_A a$ (car a est active extérieurement). Par l'absurde, on en déduit que a est forte pour σ.

4 Parcours décroissants et configurations récurrentes

Question 31 On obtient la configuration suivante :



Question 32 On pose $c = \Psi(\sigma)$. On remarque que pour un sommet régulier σ_i, $I(\sigma_i)$ contient au moins une arête dans $\sigma^{<i}$. On en déduit que $c_{\sigma_i} < |I(\sigma_i)| = \deg(\sigma_i)$, donc c est une configuration stable.

Par ailleurs, posons c' la configuration telle que $c'_q = -\deg(q)$, $c'_s = 1$ si $s \in V(q)$, et $c'_s = 0$ pour les autres sommets. Montrons que $c+c' \to^* c$. En effet, en éboulant les sommets dans l'ordre de σ, on obtient exactement c. Remarquons que configuration $c + c'$ correspond à une configuration obtenue où on a éboulé le puits q.

Dès lors, si on suppose qu'on a éboulé tous les sommets de $\sigma^{<i}$ quand on atteint le sommet σ_i, alors les grains sur ce sommet sont :

- les $|I(\sigma_i) \setminus \sigma^{<i}|$ grains initialement présents ;
- les $|I(\sigma_i) \cap \sigma^{<i}|$ grains reçus par les voisins de σ_i déjà éboulés.

Il y a donc $|I(\sigma_i)| = \deg(\sigma_i)$ grains sur σ_i, qui est bien instable et peut être éboulé.

Finalement, si on éboule chaque sommet exactement une fois, chaque sommet s perd $\deg(s)$ grains lors de son éboulement et reçoit $\deg(s)$ grains lors de l'éboulement de chacun de ses voisins, ce qui montre bien qu'on obtient la configuration c au final.

Question 33

- Ψ est injective : soient σ et τ deux parcours décroissants et k l'indice minimal tel que $\sigma_k \neq \tau_k$. Sans perte de généralité, par la question 27, σ_k est un sommet et τ_k est une arête. Supposons que $\sigma_k = \tau_\ell$, avec $\ell > k$. Alors $I(\tau_\ell) \setminus \tau^{<\ell} \subseteq\neq I(\sigma_k) \setminus \sigma^{<k}$. On en déduit que $\Psi(\sigma)(\sigma_k) > \Psi(\tau)(\sigma_k)$, ce qui montre bien l'injectivité.
- Ψ est surjective : soit c une configuration récurrente telle que $c_q = \deg(q)$. On définit le parcours arêtes-sommets σ par :
  * $\sigma_0 = q$;
  * pour $i \in [\![1, m+n-1]\!]$, si σ_{i-1} est une arête incidente à un sommet s tel que $s \notin \sigma^{<i}$ et $|I(s) \setminus \sigma^{<i}| = c_s$, on pose $\sigma_i = s$, sinon on pose σ_i l'arête maximale selon $<_A$ parmi les arêtes hors de $\sigma^{<i}$ et incidentes à un sommet de $\sigma^{<i}$.

  Cette définition est correcte et donne un parcours décroissant. Par sa définition, on a bien $\Psi(\sigma) = c$, d'où la surjectivité.

Question 34 Une arête forte apparaît dans σ après ses deux extrémités, donc elle ajoute un grain à chacune de ses extrémités. Une arête qui n'est pas forte ajoute un grain à seulement une de ses deux extrémités (celle qui apparaît avant dans σ). On en déduit que le poids de $\Psi(\sigma)$ est bien la somme du nombre d'arêtes plus le nombre d'arêtes fortes (les arêtes fortes sont comptées deux fois).

⋆⋆⋆