Travaux Pratiques notés n°1

⋆⋆⋆

Chasse au trésor

Adapté d'un sujet de TP ENS

IMPORTANT : il vous a été donné sur votre fiche réponse un numéro u_0 qui servira d'entrée à vos programmes. Toutes les réponses doivent être données avec la valeur de u_0 indiquée sur votre fiche-réponse. Toutefois, afin de vous permettre de vérifier les calculs, les réponses sont données pour la valeur $\widetilde{u_0} = 42$ au verso de cet énoncé.

Dans ce sujet, on s'intéresse à une chasse au trésor sur un graphe, où l'objectif est de ramasser des pièces d'or le plus rapidement possible.

Dans l'ensemble du sujet, les graphe considérés sont non pondérés et non orientés. On notera un graphe $G = (S, A)$, avec $n = |S|$ son nombre de sommets et $A \subseteq \mathcal{P}_2(S)$ son ensemble d'arêtes.

1 Génération pseudo-aléatoire

Étant donné $u_0 \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence la suite :

$$\forall i \in \mathbb{N}, u_{i+1} = 19\,999\,999 \times u_i \pmod{19\,999\,981}$$

Question 1 Déterminer les valeurs de u_i modulo 1000, pour :

(a) $i = 123$, (b) $i = 456\,000$, (c) $i = 789\,000\,000$.

Question 2 Déterminer les valeurs de $\sum_{i=0}^{m} u_i$ modulo 1000, pour :

(a) $m = 123$, (b) $m = 45\,600$, (c) $m = 78\,900\,000$.

2 Préliminaires sur les graphes

À partir de la suite u et de paramètres entiers $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$, on construit un graphe $G(n, p, a)$ non orienté à n sommets et au plus p arêtes, tel que $S = [\![0, n-1]\!]$ et tel que l'ensemble des arêtes est donné par :

$$A = \{\{u_{a+i} \pmod n, u_{a+i+p} \pmod n\} \mid i \in [\![0, p-1]\!], u_{a+i} \pmod n \neq u_{a+i+p} \pmod n\}$$

Les graphes considérés étant simples, on considèrera qu'il n'y a pas d'arête multiple. On prendra donc garde à supprimer les doublons. Par ailleurs, la condition $u_{a+i} \pmod n \neq u_{a+i+p} \pmod n$ garantit qu'il n'y a pas de boucle.

Question 3 Déterminer le degré maximal d'un sommet de $G(n, p, a)$, pour :

(a) $n = 100$, $p = 300$, $a = 123$, (b) $n = 1\,000$, $p = 5\,000$, $a = 456$, (c) $n = 10\,000$, $p = 50\,000\,000$, $a = 789$.

Question 4 Déterminer le nombre de sommets dans la composante connexe de 0 du graphe $G(n, p, a)$, pour :

(a) $n = 100$, $p = 90$, $a = 123$, (b) $n = 10\,000$, $p = 9\,000$, $a = 456$, (c) $n = 500\,000$, $p = 450\,000$, $a = 789$.

Question 5 Déterminer le nombre de composantes connexes du graphe $G(n, p, a)$, pour :

(a) $n = 100$, $p = 90$, $a = 123$, (b) $n = 10\,000$, $p = 9\,000$, $a = 456$, (c) $n = 500\,000$, $p = 450\,000$, $a = 789$.

Afin de s'assurer que, pour la suite, les graphes considérés sont bien connexes, on souhaite ajouter des arêtes à un graphe $G(n, p, a)$. Pour ce faire, on considère le graphe $G_c(n, p, a)$ défini par :

- $G_c(n, p, a) = G(n, p, a)$ si ce dernier est connexe ;
- sinon, notons $(C_1, C_2, \ldots, C_\ell)$ les composantes connexes de $G(n, p, a)$, triées selon leur plus petit sommet. Si $G(n, p, a) = (S, A)$, alors $G_c(n, p, a) = (S, A')$, où :

$$A' = A \cup \{\{\max C_i, \min C_{i+1}\} \mid i \in [\![1, \ell - 1]\!]\}$$

  où $\min C_i$ (resp. $\max C_i$) désignent le sommet de plus petit indice (resp. de plus grand indice) dans la composante C_i.

Par exemple, si $G(n, p, a)$ est le graphe de la figure 1, alors ses composantes triées par sommet minimal seraient $(\{0, 4, 6, 8\}, \{1, 5\}, \{2, 3, 7\})$. Les arêtes rajoutées pour obtenir $G_c(n, p, a)$ seraient $\{8, 1\}$ et $\{5, 2\}$.

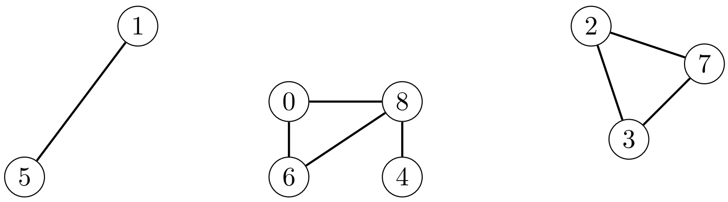

FIGURE 1 – un graphe non connexe

La distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin entre eux, où la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes.

Question 6 Déterminer la distance entre le sommet 0 et le sommet $n - 1$ dans le graphe $G_c(n, p, a)$, pour :

(a) $n = 100$, $p = 90$, $a = 123$, (b) $n = 10\,000$, $p = 9\,000$, $a = 456$, (c) $n = 500\,000$, $p = 450\,000$, $a = 789$.

3 Nombre de mouvements pour un nombre fixé de pièces

On fixe un nombre k de pièces et on considère que les k sommets de plus grands indices (donc $n - k, n - k + 1, \ldots, n - 1$) contiennent chacun une pièce.

En partant du sommet 0, à chaque tour, on se déplace en suivant une arête. Si le sommet contient une pièce d'or, celle-ci est immédiatement ramassée.

On souhaite minimiser le nombre de mouvements nécessaires pour les ramasser toutes.

On étudie dans un premier temps la stratégie gloutonne suivante : à chaque instant, on se déplace vers la pièce d'or la plus proche. Si deux pièces sont à distances égales, on choisit celle sur le sommet de plus petit indice.

Question 7 Déterminer le nombre de mouvements de la stratégie gloutonne pour ramasser toutes les pièces d'or, pour le graphe $G_c(n, p, a)$, et pour une certaine valeur de k, donnés par :

(a) $n = 100$, $p = 100$, $a = 123$, $k = 8$, (b) $n = 10\,000$, $p = 5\,000$, $a = 456$, $k = 50$, (c) $n = 500\,000$, $p = 450\,000$, $a = 789$, $k = 18$.

On s'intéresse à présent à une stratégie optimale pour aller chercher les pièces d'or, c'est-à-dire minimisant le nombre total de mouvements.

Question 8 Déterminer le nombre de mouvements de la stratégie optimale pour ramasser toutes les pièces d'or, pour le graphe $G_c(n, p, a)$, et pour une certaine valeur de k, donnés par :

(a) $n = 100$, $p = 100$, $a = 123$, $k = 8$, (b) $n = 10\,000$, $p = 10\,000$, $a = 456$, $k = 10$, (c) $n = 500\,000$, $p = 450\,000$, $a = 789$, $k = 18$.

⋆ ⋆ ⋆

FICHE EXEMPLE

$\widetilde{u_0} = 42$

Question	Réponse (a)	Réponse (b)	Réponse (c)
Question 1	768	915	229
Question 2	543	75	665
Question 3	14	22	340
Question 4	75	7353	367 096
Question 5	22	2039	98 612
Question 6	9	1799	122 459
Question 7	50	6935	122 694
Question 8	46	6925	122 660

FICHE RÉPONSE

Nom et prénom : ....

$u_0 =$

Question	Réponse (a)	Réponse (b)	Réponse (c)
Question 1			
Question 2			
Question 3			
Question 4			
Question 5			
Question 6			
Question 7			
Question 8			