Devoir maison n°7

Corrigé

⋆⋆⋆

Programmation linéaire et coloration de graphe

1 Programmation linéaire

1.1 Programmation entière

Question 1 On pose 1_n (resp. 0_n) le vecteur colonne de taille n constitué uniquement de 1 (resp. 0).

Soit (A, B) une instance de `EZU`. On définit les matrices par bloc $A' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B \\ 1_n \\ 0_n \end{pmatrix}$.

– si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\})$ est tel que $AX \leqslant B$, alors pour $X' = \begin{pmatrix} X \\ 0_n \\ 0_n \end{pmatrix}$, on a $A'X' \leqslant B'$;

– réciproquement, si $A'X' \leqslant B$ avec $X' \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{Z})$, alors on pose $X = \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix}$. Dès lors, $A'X' = \begin{pmatrix} AX \\ X \\ -X \end{pmatrix}$.

Les conditions $X \leqslant 1_n$ et $-X \leqslant 0_n$ garantissent que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\})$, et on a bien $AX \leqslant B$.

Ces équivalences montrent bien la réduction many-one, car A' et B' sont constructibles en temps polynomial.

Question 2 On a $\mu(C) = 1$ si et seulement s'il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que $\mu(\ell_i) = 1$. Comme $\mu(\ell_i) \in \{0,1\}$, on en déduit le résultat.

Question 3 On pose $A = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]}$ et $B = (b_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ telles que :

– si v_j apparait dans C_i, alors $a_{ij} = -1$;
– si $\overline{v_j}$ apparait dans C_i, alors $a_{ij} = 1$;
– sinon, $a_{ij} = 0$;
– $b_i = -1 + k$ où k est le nombre de négations qui apparaissent dans C_i.

Dès lors montrons que φ est satisfiable si et seulement s'il existe X tel que $AX \leqslant B$.

– supposons φ satisfiable et soit μ un modèle de φ. On pose $X = (\mu(v_1)\mu(v_2)\cdots\mu(v_n))^T$. On a alors $[AX]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Dès lors, si $C_i = \ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, on a $[AX - B]_i = -\mu(\ell_1) - \mu(\ell_2) - \mu(\ell_3) - 1 \leqslant 0$;
– réciproquement, soit $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\{0,1\})$ tel que $AX \leqslant B$. On pose, pour $j \in [\![1,m]\!]$, $\mu(v_j) = x_j$. Par le même calcul que précédemment, on montre que $\mu(C) = 1$ en utilisant la question précédente.

Question 4 `PE` $\in$ `NP`, un certificat étant un tel vecteur X, et une vérification consiste à calculer AX et à vérifier les inégalités.

Pour que cette vérification puisse se faire en temps polynomial, il faudrait pouvoir garantir que s'il existe une solution à $AX \leqslant B$, il en existe une dont les coefficients ne sont pas trop grands. Ce résultat est vrai, mais extrêmement difficile à montrer (j'aurais dû l'admettre dans l'énoncé). On peut se référer au lemme 4.37 dans

Integer Programming de Conforti, Conuéjols et Zambelli pour la preuve (qui nécessite plus ou moins d'avoir lu les 160 pages qui précèdent).

On obtient donc `3-SAT` $\leqslant_m^p$ `EZU` $\leqslant_m^p$ `PE`, `3-SAT` est NP-difficile et `PE` $\in \mathsf{NP}$, donc ces problèmes sont bien NP-complets.

1.2 Couverture des arêtes par les sommets

Question 5 Soit $X = (x_1 \ldots x_n)^T$ un vecteur à coefficients dans $\{0,1\}$. On pose $C = \{i \in [\![1,n]\!] \mid x_i = 1\}$. Alors X est solution du problème `EZU` si et seulement si C est solution de `Couverture par Sommets` : le cardinal de C est exactement la somme $\sum_{i=1}^{n} x_i$ et X vérifie $x_i + x_j \geqslant 1$ pour $\{i,j\} \in A$ si et seulement si C est une couverture par sommets : $x_i + x_j \geqslant 1$ si et seulement si $x_i = 1$ ou $x_j = 1$ (ou les deux) si et seulement si $x_i \in C$ ou $x_j \in C$ (ou les deux).

Question 6 Une solution à ce problème `EZU` est aussi une solution au problème `PL`, d'où l'inégalité.

Question 7 On remarque que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $y_i \leqslant 2x_i$ et on utilise la question précédente pour conclure.

Question 8 Il faut montrer que Y est bien une solution du problème `EZU` puis utiliser la question 6. En effet, pour $a = \{i,j\} \in A$, $x_i + x_j \geqslant 1$, donc l'une de ces deux valeurs est $\geqslant \frac{1}{2}$, donc y_i ou y_j est égal à 1. Dès lors, la 2-approximation est :

Entrée : graphe $G = (S, A)$.
Début algorithme
- $X \leftarrow$ solution au problème `PL`.
- $Y \leftarrow$ vecteur calculé comme décrit précédemment.
- $C \leftarrow \{i \in [\![1,n]\!] \mid y_i = 1\}$.
- **Renvoyer** C.

Comme on a admis que `PL` pouvait se résoudre en temps polynomial, cet algorithme est polynomial.

1.3 Couverture d'ensemble

Question 9 Il suffit de reformuler la relaxation continue donnée dans l'énoncé...

* **Instance** : un entier N et une collections d'ensembles $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{P}([\![1,N]\!])$.
* **Solution** : un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\{0,1\})$ vérifiant $\sum_{j \in J(x)} x_j \geqslant 1$ pour tout $x \in [\![1,N]\!]$.
* **Optimisation** : minimiser $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Ce problème est bien équivalent : $x_i = 1$ si et seulement si $i \in I$ et la contrainte $\sum_{j \in J(x)} x_j \geqslant 1$ assure qu'il existe $i \in I$ tel que $x \in S_i$. On a également $|I| = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Question 10 D'après l'algorithme $\mathbb{E}(|I|) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(i \in I) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. On conclut comme en question 7 en remarquant qu'une solution à coefficients dans $\{0,1\}$ est en particulier une solution au problème de relaxation continue.

Question 11 On commence par montrer l'inégalité demandée : on pose $f(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$. On a $f'(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. On obtient le tableau de variation :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ce qui donne bien l'inégalité voulue. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left(x \notin \bigcup_{i \in I} S_i\right) & = & \prod_{j \in J(x)} \mathbb{P}(i \notin I) \\ & = & \prod_{j \in J(x)} (1 - x_i) \\ & \leqslant & \prod_{j \in J(x)} \mathrm{e}^{-x_i} \\ & = & \mathrm{e}^{\sum_{j \in J(x)} -x_i} \\ & \leqslant & \mathrm{e}^{-1} \end{array}$$

On obtient l'inégalité demandée en passant à l'événement contraire.

Question 12 On a :

$$\mathbb{P}\left(x \notin \bigcup_{i \in I} S_i\right) \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{\lceil 2 \ln N \rceil} \leqslant \frac{1}{e^{2 \ln N}} = \frac{1}{N^2}$$

Question 13 On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} S_i \neq [\![1, N]\!]\right) = \mathbb{P}\left(\bigvee_{x \in [\![1, N]\!]} x \notin [\![1, N]\!]\right) \leqslant \sum_{x \in [\![1, N]\!]} \mathbb{P}(x \notin [\![1, N]\!]) \leqslant N \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$$

On en déduit le résultat voulu.

Question 14

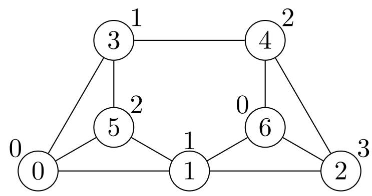
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(|I| \leqslant (4 \ln N + 2)|I|^*) & = & 1 - \mathbb{P}(|I| > (4 \ln N + 2)|I|^*) \\ & \geqslant & 1 - \dfrac{\mathbb{E}(|I|)}{(4 \ln N + 2)|I|^*} \\ & \geqslant & 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

La première inégalité est due à l'inégalité de Markov. La deuxième inégalité vient du fait que $\mathbb{E}(|I|) \leqslant \lceil 2 \ln N \rceil \, \mathbb{E}(|I'|) \leqslant \lceil 2 \ln N \rceil \, |I|^*$ d'après la question 11, I' désignant un ensemble renvoyé par `Couv_Alea`.

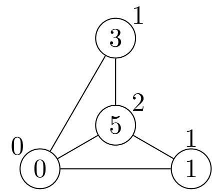
2 Coloration de graphe

2.1 Préliminaires

Question 15 La numérotation suivante est une 4-coloration



Les sommets 0 et 5 sont adjacents entre eux et tous deux adjacents aux sommets 1 et 3 donc, quitte à renuméroter, si G_1 possède une 3-coloration, on doit colorer ces 4 sommets de la manière suivante :



Dès lors, les sommets 2, 4 et 6 sont adjacents à des sommets dont la couleur est 1. Comme ces trois sommets sont deux à deux adjacents, ils ne peuvent pas recevoir la même couleur, ni la couleur 1. On en déduit qu'il est nécessaire d'utiliser une quatrième couleur pour colorer le graphe G_1.

Question 16 On distingue :

- si n est pair, alors $\chi(\mathcal{C}_n) = 2$. En effet, si on indexe les sommets dans l'ordre du cycle $0, 1, \dots, n-1$, alors deux sommets de même parité ne seront jamais adjacents, donc il est possible d'attribuer la couleur 0 à tous les sommets d'indice pairs et la couleur 1 à tous les sommets d'indice impair. Le graphe est donc 2-colorable. Le graphe n'est pas 1-colorable, car $n \geqslant 3$ (par définition de $\mathcal{C}_n$), donc il existe au moins deux sommets adjacents.
- Si n est impair, alors $\chi(\mathcal{C}_n) = 3$. En effet, si on indexe les sommets dans l'ordre du cycle $0, 1, \dots, n-1$, alors on peut attribuer la couleur 0 aux sommets pairs de $0, \dots, n-3$, la couleur 1 aux sommets impairs de $1, \dots, n-2$ et la couleur 2 au sommet $n-1$. Le graphe est donc 3-colorable. Le graphe n'est pas 2-colorable, car si on suppose que c'est le cas, en attribuant sans perte de généralité la couleur 0 au sommet 0, il est nécessaire d'attribuer la couleur 1 au sommet 1, puis la couleur 0 au sommet 2, et on montre par récurrence que les sommets $0, \dots, n-2$ se voit attribuer la même couleur que décrit ci-dessus. Dès lors, le sommet $n-1$ est adjacent au sommet 0 (coloré par 0) et au sommet $n-2$ (coloré par 1). Il est donc nécessaire d'utiliser une troisième couleur.

Question 17 Le nombre chromatique d'un graphe complet à n sommets est n, car il faut attribuer une couleur différente à chaque sommet du graphe (car ils sont deux à deux adjacents).

Question 18 On a $\chi(G) \geqslant \omega(G)$. En effet, dans un graphe G, s'il existe une clique de taille k, alors il sera nécessaire d'utiliser k couleurs différentes pour colorer ces k sommets qui sont deux à deux adjacents. Le nombre chromatique de G sera donc au moins égal à k.

Cette inégalité est une égalité pour les graphes complets à n sommets d'après la question 17.

D'après la question 16, c'est une inégalité stricte pour $\mathcal{C}_n$ avec n impair (car $\omega(\mathcal{C}_n) = 2$). Dans le cas n pair, on peut rajouter un sommet adjacent à un seul sommet de $\mathcal{C}_{n-1}$ pour avoir une inégalité stricte.

Question 19 Soit c une k-coloration de G. Alors pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $C(i) = \{s \in S \mid c(s) = i\}$ forme un stable, par définition d'une coloration. On en déduit que $|C(i)| \leqslant \alpha(G)$. Comme l'ensemble des $C(i)$ forme une partition de S, on en déduit que $n = \sum_{i=0}^{k-1} |C(i)| \leqslant k\alpha(G)$, soit $\frac{n}{\alpha(G)} \leqslant k$. Ceci étant vrai pour toute k-coloration, c'est en particulier vrai pour une $\chi(G)$-coloration, d'où la minoration voulue.

Les mêmes exemples de la question précédente conviennent pour le cas d'égalité et d'inégalité stricte (pour les graphes de l'inégalité stricte, on a $\alpha(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et $\chi(G) = 3$).

2.2 NP-complétude

Question 20 À partir d'une instance G du problème k-coloration, on peut créer une instance $f(G) = (G, k)$ qui est une entrée du problème Coloration. On a bien $G \in$ k-coloration $\Leftrightarrow f(G) \in$ Coloration et f est bien constructible en temps polynomial.

Question 21 À partir d'une instance $G = (S, A)$ du problème h-coloration, on construit une instance $f(G) = G'$ de la manière suivante : on rajoute $k - h$ nouveaux sommets deux à deux adjacents, et adjacents à tous les sommets de S. Dès lors, montrons que $G \in$ h-coloration $\Leftrightarrow f(G) \in$ k-coloration :

- si $G \in$ h-coloration, alors il existe une h-coloration de G. En attribuant à chacun des $k - h$ nouveaux sommets une nouvelle couleur, on obtient bien une k-coloration de G', donc $f(G) \in$ k-coloration ;
- réciproquement, si $f(G) \in$ k-coloration, alors il existe une k-coloration de G'. Dans cette coloration, nécessairement, les $k - h$ nouveaux sommets ont chacun une couleur différente qui n'apparait pas parmi les sommets de S. Cela signifie que ces sommets sont colorés en utilisant $k - (k - h) = h$ couleurs, donc $G \in$ h-coloration.

f étant bien constructible en temps polynomial, on en déduit le résultat.

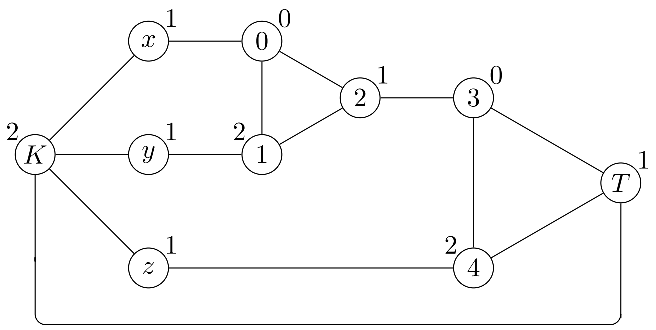
Question 22 On peut résoudre ce problème par un parcours de graphe. On décrit l'algorithme pour un graphe connexe. Dans le cas général, on appliquera l'algorithme à chaque composante connexe.

- on attribue une couleur $c(s_0) = 0$ à un premier sommet choisi arbitrairement ;
- pour chaque sommet s à traiter, on parcourt chacun de ses voisins t :
  - si t n'a pas encore de couleur, on pose $c(t) = 1 - c(s)$ et on relance un traitement depuis t ;
  - si t a déjà une couleur et $c(t) = 1 - c(s)$, on ne fait rien ;
  - si t a déjà une couleur et $c(s) = c(t)$, on conclut que le graphe n'est pas 2-colorable et on renvoie Faux.

Un tel algorithme a une complexité linéaire en $|S| + |A|$, donc 2-coloration $\in$ P.

Question 23 Le nouveau graphe possède $3 + 2n + 5m$ sommets, où n est le nombre de variables et m le nombre de clauses. Il possède par ailleurs $3 + 3n + 10m$ arêtes. Sachant que le nombre de variables qui apparaissent dans φ est au plus $3m$, on en déduit que la taille du graphe G_φ (en nombre de sommets est d'arêtes) est bien polynomial en m, le nombre de clauses.

Question 24 Le graphe est 3-colorable comme en atteste la coloration suivante (on a indicé les 5 sommets intermédiaires pour la preuve suivante) :



Dès lors, supposons que dans une 3-coloration, chacun des sommets x, y et z ont une couleur différente de T. Sachant que K est adjacent à ces 4 sommets, cela signifie (sans perte de généralité) que T a la couleur 1, K a la couleur 2, et x, y et z ont la couleur 0. On en déduit que nécessairement les sommets 0 et 1 se voient attribuer les couleurs 1 et 2, puis que le sommet 2 est également coloré en 0. Dès lors les sommets 3 et 4 sont tous deux adjacents à un sommet coloré par 0 et un sommet coloré par 1. Comme ils sont eux-mêmes adjacents, il faudrait une quatrième couleur pour terminer la coloration. On conclut par l'absurde que dans une 3-coloration, l'un des sommets x, y ou z possède la même couleur que T.

Question 25 Supposons que φ est satisfiable et soit μ une valuation qui satisfait φ. Construisons par étapes une 3-coloration c de G_φ :

- on pose $c(F) = 0$, $c(T) = 1$ et $c(K) = 2$;
- pour chaque variable v, on pose $c(v) = 0$ si $\mu(v) = \bot$ et $c(v) = 1$ si $\mu(v) = \top$;
- pour chaque variable v, on pose $c(\overline{v}) = 1 - c(v)$.

À cette étape, deux sommets adjacents ont bien une couleur différente. Montrons qu'on peut alors compléter la coloration pour chaque sous-graphe correspondant à une clause $(x \vee y \vee z)$. En réutilisant l'indexation de la réponse précédente, on pose $c(1) = c(4) = 2$, $c(0) = c(3) = 1 - c(x)$ et $c(2) = c(x)$. À nouveau, deux sommets adjacents ont une couleur différentes.

La numérotation c est bien une 3-coloration de G_φ.

Question 26 Supposons que G_φ est 3-colorable. Sans perte de généralité, il existe une 3-coloration c telle que $c(F) = 0$, $C(T) = 1$ et $c(K) = 2$. Dès lors, pour chaque littéral ℓ, on a $c(\ell) \in \{0, 1\}$ (car les littéraux sont adjacents à K).

Définissons alors la valuation μ telle que pour chaque variable $v \in V, \mu(v) = \top \Leftrightarrow c(v) = 1$. Sachant que chaque variable v est adjacente à $\overline{v}$, on en déduit que pour tout littéral ℓ, $\mu(\ell) = \top \Leftrightarrow c(\ell) = 1$.

Par la question précédente, on en déduit également que dans chaque clause de φ, il existe un littéral ℓ qui a la couleur 1, donc tel que $\mu(\ell) = \top$. On en déduit que μ satisfait φ.

Question 27 La donnée d'une k-coloration est un certificat de taille polynomiale prouvant qu'un graphe est k-colorable. Vérifier que c'est bien une k-coloration consiste à déterminer la valeur maximale d'une couleur et que c'est bien une coloration. Cette vérification se fait bien en temps polynomial. On en déduit que k-coloration $\in$ NP.

Les questions précédentes montrent que $\varphi \in$ 3-SAT $\Leftrightarrow G_\varphi \in$ 3-coloration. On a montré que G_φ est constructible en temps polynomial. On en déduit que 3-SAT est réductible en temps polynomial à 3-coloration. Sachant que 3-SAT est NP-complet (donc NP-difficile), on en déduit que 3-coloration est NP-difficile. Sachant que 3-coloration $\in$ NP, ce problème est également NP-complet.

⋆ ⋆ ⋆