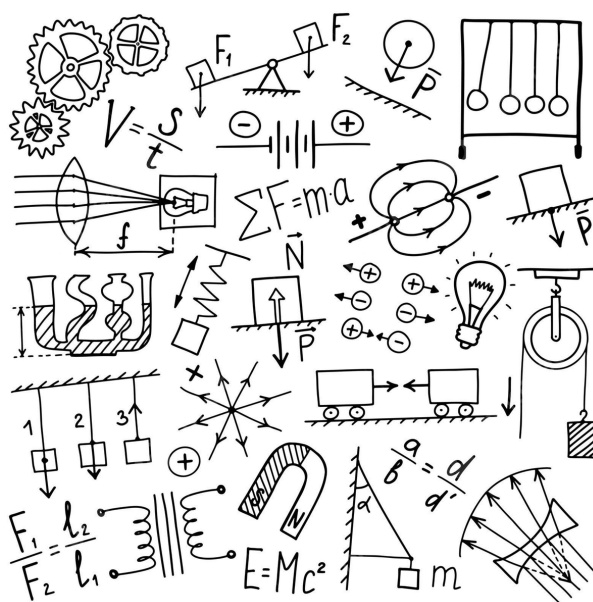




Essentiel de physique

2023/2024

Victor Sarrazin



Bienvenue dans l'essentiel de physique de mes cours de prépa. Ce document a pour objectif de contenir l'intégralité des cours de physique afin de les condenser et de les adapter.

Dans la dernière partie une liste de méthodes est détaillée pour faciliter notre voyage dans la physique.

Bonne lecture...









Sommaire


Optique :

 I Introduction à l'optique	4
 II Lentilles minces et miroir plan	7
 III Appareils optiques	10







Électricité :

 I Introduction à l'électricité	12
 II Circuits d'ordre 1	16
 III Circuits d'ordre 2, Oscillateurs	20
 IV Circuits en régime sinusoïdal forcé	22
 V Filtrage	26
 VI Signaux périodiques et filtrage linéaire	29







Ondes :

 I Introduction aux ondes	32
 II Diffraction/Interférences	34
 III La lumière onde	36





Mécanique :

 I Cinématique du point	39
 II Dynamique du point	42
 III Énergétique du point	45
 IV Loi du moment cinétique	48
 V Mouvement dans un champ de force newtonien	49
 VI Mécanique du solide	52

Thermodynamique :

 I Introduction à la thermodynamique	57
 II Premier principe	58
 III Second principe	61
 IV Flux thermiques	63
 V Machines thermiques	64
 VI Changement de phase du corps pur	66


Magnétostatique :

 I Introduction à la dynamique des particules chargées	69
 II Généralités sur le champ magnétique	70
 III Lois de l'induction : le cas des circuits fixes	76
 IV Lois de l'induction : le cas des circuits mobiles	78

Mécanique quantique :

 I Introduction à la mécanique quantique	80
---	----

Fiches TP :

 I Régression linéaire	81
 II Instruments d'optique	82
 III Auto-collimation	83
 IV Euler	83
 V Multimètre	85
 VI Pont de Wheatstone	86
 VII Oscilloscope	87
 VIII Monte-Carlo	88

Annexe :

 I Analyse dimensionnelle	90
 II Incertitudes	92
 III Équations différentielles	94

Optique

I Introduction à l'optique

I.1 Généralités

On considère des milieux **transparent homogène isotropes** (THI) :

- Transparent : La lumière n'est pas absorbée
- Homogène : Invariant par translation
- Isotrope : Invariant par quelque soit la direction depuis laquelle on regarde

On a la **vitesse de la lumière** dans le vide, $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$

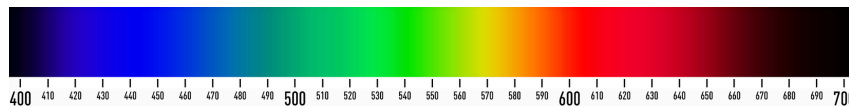
Indice optique :

On a l'**indice optique** n (ou *indice de réfraction*), usuellement $n > 1$. On a $n = \frac{c}{v}$ avec v la vitesse dans un THI donné.

On a $n_{\text{vide}} = 1$, $n_{\text{air}} - n_{\text{vide}} = 3 \cdot 10^{-4}$ et $n_{\text{eau}} = 1.3$

Relation de dispersion :

On a $\lambda = \frac{c}{f}$ avec f la fréquence temporelle et λ la longueur d'onde dans le vide. Dans un THI on a donc $\lambda = \frac{c}{nf}$

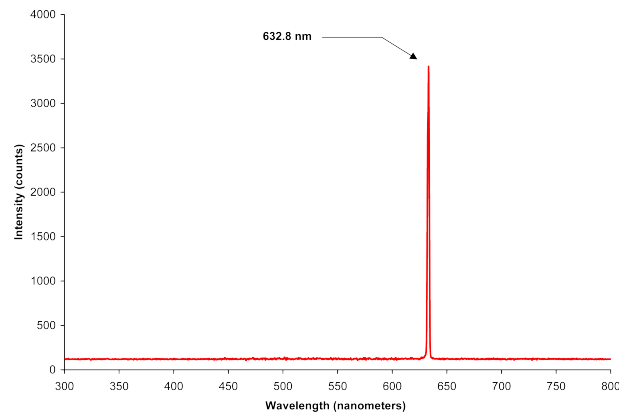


On a $\lambda_{\text{violet}} = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_{\text{rouge}} = 800 \text{ nm}$. Si $\lambda < 400 \text{ nm}$ on est dans le domaine des **ultraviolets** et si $\lambda > 800 \text{ nm}$ on est dans le domaine des **infrarouges**.

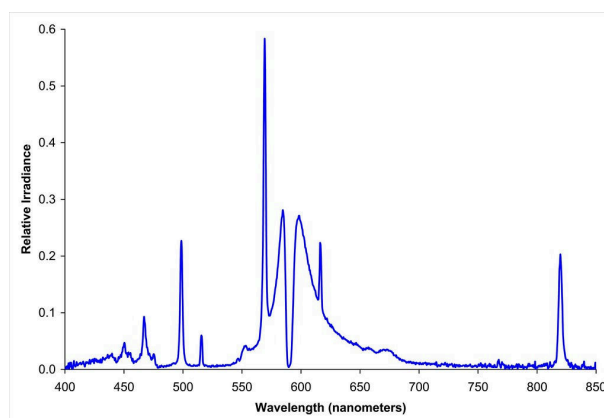
La puissance lumineuse moyenne par unité de surface est appelée **éclairement** (ξ) ou **intensité lumineuse** (I).

I.2 Caractérisation spectrale des sources lumineuses

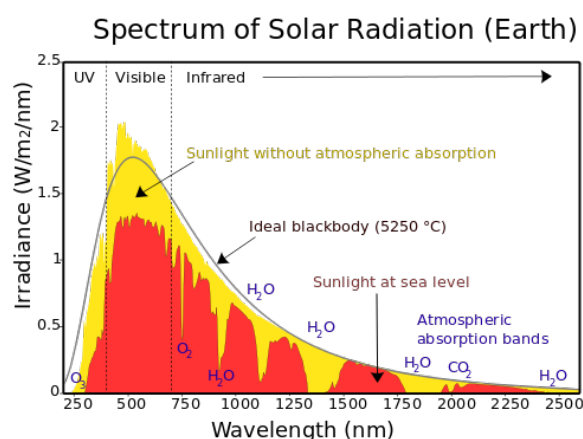
Une onde lumineuse possède une décomposition spectrale. On utilise principalement un spectromètre à réseau pour déterminer cette décomposition.



On a dans le cas du laser une seule raie spectrale, on parle alors de lumière **monochromatique**.



On a dans le cas d'une lampe spectrale plusieurs raies, c'est un spectre des éléments qui composent la valeur dans l'ampoule. Chaque pic correspond à un 1 photon d'énergie donnée



On a dans le cas du soleil un spectre continu (corps noir) avec des "trous" liés aux absorptions sélectives des espèces chimiques présentes dans l'atmosphère.

1.3 Source lumineuse ponctuelle, rayon lumineux

Une **source lumineuse ponctuelle** est une source de lumière dont les dimensions sont négligeables devant les distances caractéristiques du problème.

On appelle **rayon lumineux** une ligne selon laquelle se propage la lumière.

Propriétés des rayons lumineux :

- Les rayons lumineux sont indépendants les uns des autres
- Les rayons lumineux se propagent de façon rectiligne uniforme dans les milieux THI

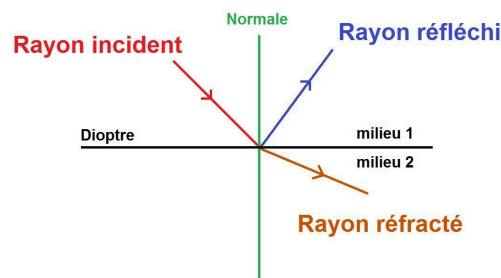
1.4 Approximation de l'optique géométrique

Approximation de l'optique géométrique :

Les systèmes rencontrés par la lumière lors de sa propagation sont de dimension grande devant la longueur d'onde.

Dans la suite on se place dans cette approximation

1.5 Lois de Snell–Descartes



1.5.a Lois de l'optique géométrique

On parle d'un **dioptre** pour désigner la surface entre deux milieux transparents.

Principe de retour inverse :

La forme d'un rayon lumineux ne dépend pas du sens dans lequel la lumière le parcourt

Loi de Descartes pour la réflexion :

Les rayons incidents et réfléchis sont dans le même plan , et

$$\alpha = i$$

Avec α l'angle réfléchi et i d'incidence

Loi de Descartes pour la réfraction :

Les rayons incidents et réfractés sont dans le même plan , et

$$n_r \sin(r) = n_i \sin(i)$$

Avec r l'angle réfléchi et i d'incidence, avec n_r, n_i les indices optiques des 2 milieux

1.5.b Réflexion totale

Si $n_1 > n_2$, on dit que le milieu 1 est plus **réfringent** que le milieu 2.

Réflexion totale :

Il existe un angle d'incidence limite $i_{1,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ tel que si $i_1 > i_{1,\text{lim}}$ il n'y ait plus de rayon réfracté

Preuve :

On part de la loi de Descartes pour la réfraction, $n_1 \sin(i) = n_r \sin(r)$ avec $r > i$ et $n_1 > n_2$ d'où $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(r)}{\sin(i)} > 1$ d'où $\sin(r) > \sin(i)$.

Ainsi $\sin(r) = \frac{n_1}{n_2} \sin(i)$ d'où si $i > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ on a $\sin(r) > 1$ ce qui est contradictoire.

Ce phénomène est utilisé dans les fibres optiques.

II Lentilles minces et miroir plan

II.1 Vocabulaire

Un **système optique** est un système plus ou moins complexe susceptible de perturber le trajet des rayons lumineux.

On a :

Rayons incidents \rightarrow Système optique \rightarrow Rayons émergents

Si des rayons incidents proviennent d'un même point, on parle de **point objet**.

Si des rayons émergents proviennent d'un même point, on parle de **point image**.

On dit que A' est conjugué à A si A' est l'image de A , et on note $A \overset{\text{miroir}}{\rightsquigarrow} A'$

Un système qui conjugue à un point objet un point image est dit **stigmatique**. Seul le **miroir plan** l'est parfaitement.

On parle de **système centré** pour un système possédant un axe de symétrie appelé **axe optique** (OA)

On parle d'**aplanétisme** si 2 points objets dans le même plan orthogonal à OA sont conjugués à 2 points image dans un même plan orthogonal à OA (encore le cas du miroir plan)

Un point est **réel** si il exist réellement, et **virtuel** un point où se coupent les prolongements des rayons incidents.

II.2 Lentilles minces

On parle de lentille mince car l'épaisseur est petite devant les rayons de courbure.

Conditions de Gauss :

Tous les rayons sont **paraxiaux**, soit peu inclinés et peu éloignés de OA .

Dans ces conditions on a un stigmatisme approché et un aplanétisme approché.

On peut aussi se placer dans l'approximation des petits angles, $\alpha \ll 1$ d'où $\tan \alpha = \sin \alpha = \alpha$ et $\cos \alpha = 1$

Le **centre optique** est le point d'un système optique où les rayons ne sont pas déviés.

Le **foyer principal image** (F') est l'image conjuguée d'un point objet à l'infini dans la direction de l'axe optique.

Le **foyer principal objet** (F) est l'objet conjugué d'un point image à l'infini dans la direction de l'axe optique.

Distance focale :

On a la **distance focale image** : $\overline{OF'} = f'$ et on a la **distance focale objet** : $\overline{OF} = f$

Ces deux grandeurs sont algébriques

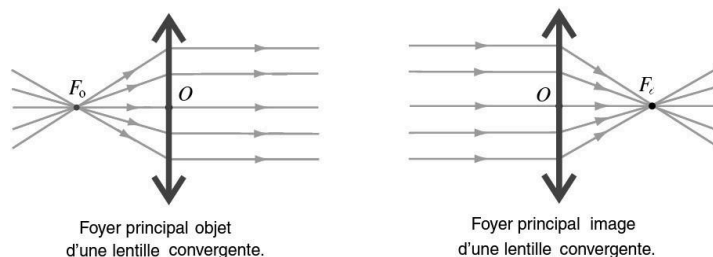
On a $|f| = |f'|$. Une lentille est très convergente/divergente quand $|f'|$ est très petit.

On note la **vergence** d'une lentille $v = \frac{1}{f}$ en dioptrie δ avec $[\delta] = \text{m}^{-1}$

On définit le **grandissement**, $\gamma = \frac{A'B'}{AB}$ soit la taille de l'image sur la taille de l'objet

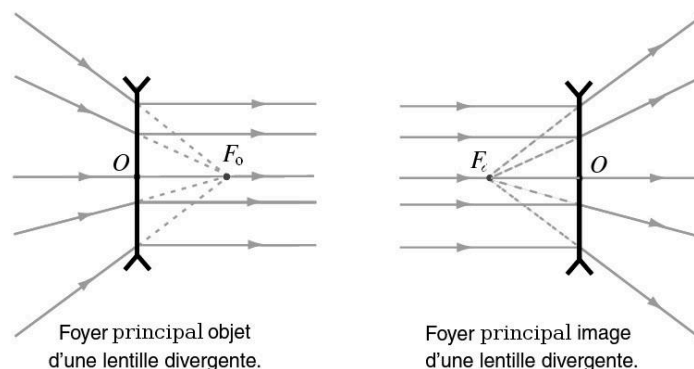
II.2.a Lentille convergente

Une lentille est dite **convergente** si elle est à bords fins.



II.2.b Lentille divergente

Une lentille est dite **divergente** si elle est à bords épais.

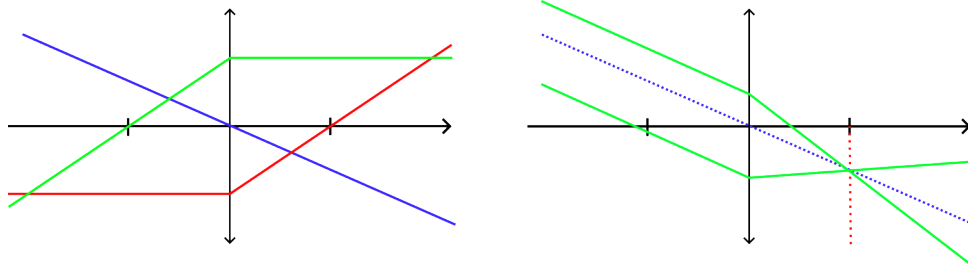


II.3 Constructions

On fera toujours les constructions au stylo, et on respectera les règles suivantes :

- Un rayon incident qui passe par O est non dévié
- Un rayon incident qui passe par F émerge parallèlement à OA
- Un rayon émergent qui passe par F' incide parallèlement à OA
- Deux rayons incidents parallèles entre eux émergent en se croisant en un même point du plan focal image

- Deux rayons émergents parallèles entre eux incident en se croisant en un même point du plan focal objet



II.4 Relations de conjugaison

Relations de Descartes (centre optique) :

On a :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Relations de Newton (foyer) :

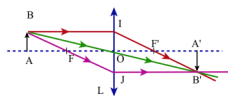
On a :


$$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = -(f')^2$$

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

Preuve :

Cette preuve est hors programme théoriquement.



 A faire (Si pas la flemme)

II.5 Condition $4f'$

Condition $4f'$:

Pour obtenir une image réelle d'un objet réel avec une lentille convergente,

$$D \geq 4f'$$

Preuve :

On pose $\overline{AA'} = D$ d'où $\overline{OA'} = D - x$ et $\overline{OA} = -x$ (grandeurs algébriques)

On utilise la relation de conjugaison, $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ d'où $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$

Ainsi on a $x^2 - Dx + f'D$ donc $\Delta = D(D - 4f')$, ainsi si $D \geq 4f'$ on a $\Delta \geq 0$ donc $x \geq 0$ donc A' est réel, sinon A' est virtuel (d'où la condition)

III Appareils optiques

III.1 Généralités

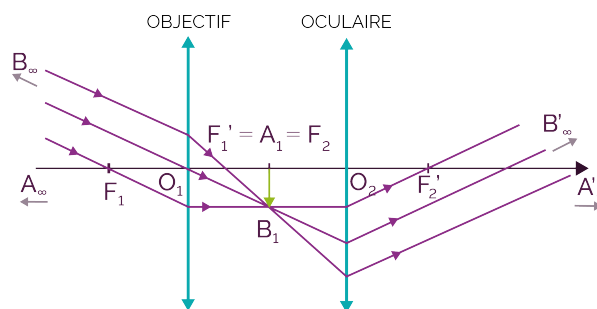
On parle de **diamètre apparent** pour l'angle sous lequel on voit un objet.

Grossissement :

On a le **grossissement**,

$$G = \frac{\alpha_{\text{appareil optique}}}{\alpha_{\text{oeil nu}}}$$

III.2 La lunette astronomique



La lunette astronomique est un système optique composé de deux lentilles, une **objectif** et une **oculaire**.

L'**objectif** est la lentille qui reçoit la lumière, et l'**oculaire** est la lentille qui donne l'image.

Le **foyer principal objet** de l'objectif doit être confondu avec le **foyer principal image** de l'oculaire.

On parle d'un système **afocal** si on donne une image à l'infini d'un objet à l'infini.

Ce dispositif permet d'avoir une image à l'infini d'un objet à l'infini.

Il est détaillé dans les fiches TP.

III.3 L'oeil

La plus petite séparation angulaire que l'oeil peut distinguer est de $1'$ (minute d'arc) soit $\frac{1}{60}$ degré.

L'oeil est modélisable comme un dispositif optique :

- On a l'iris qui joue le rôle de diaphragme

- Le cristallin qui joue le rôle de lentille convergente
- La rétine qui joue le rôle d'écran

On parlera de **punctum proximum** pour la distance minimale à laquelle on peut voir distinctement (25 cm, et de **punctum remotum** pour la distance maximale à laquelle on peut accommoder (∞)

⚡ Électricité

⚡ I Introduction à l'électricité

⚡ I.1 Généralités

⚡ I.1.a Charge électrique

La **charge** est une propriété intrinsèque d'une particule et s'exprime en Coulomb (C) et est de dimension $I.T$, est algébrique, additive et conservative (un système fermé est de charge fixe).

La charge est portée par les électrons ($-e$) et les protons (e) avec $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ la **charge élémentaire** (souvent notée q).

⚡ I.1.b Courant électrique

Le **courant électrique** est un déplacement d'ensemble de charges

On parle de **régime continu** si le courant est constant, et de **régime variable** si le courant varie.

⚡ I.1.c Dipôle, branche, maille, circuit

Un **dipôle** possède 2 pôles, lui permettant d'être traversé par un courant électrique. Une association de dipôles forme un **circuit**.

Une association de dipôles à la suite est appelée **association série** et forme une **branche**.

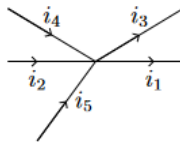
On parle de **noeud** pour un point où plusieurs branches se rejoignent.

Une association de dipôles bouclant sur elle-même est appelée **maille**.

⚡ I.1.d Intensité électrique

L'**intensité électrique** est un débit de charge noté I , avec $I = \frac{\delta Q}{dt}$ avec δQ la charge traversant la section pendant dt .

Pour mesurer une intensité on utilise un *ampèremètre* avec le $+$ sur le mA ou μA et le $-$ sur le COM (en série).



Loi des noeuds :

Dans une maille on a :

$$\sum_{\text{entrants}} I = \sum_{\text{sortants}} I$$

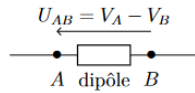
Ordres de grandeur de l'intensité :

- $I_{\text{téléphone}} \approx mA$

- $I_{\text{prise}} = \text{qq A}$
- $I_{\text{TGV, ligne haute tension}} = 500 - 1000 \text{ A}$
- $I_{\text{foudre}} = 10^4 \text{ A}$

⚡ I.2 La tension électrique

La **tension électrique** U est une différence de potentiels en Volts (V) et est additive.

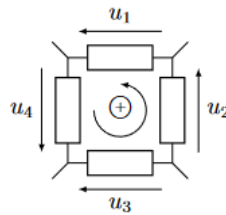


Expression de U_{AB} :

On a $U_{AB} = V_A - V_B$ avec V_A et V_B deux potentiels électriques

Ordres de grandeur de la tension :

- $U_{\text{pile}} = 1 - 9 \text{ V}$
- $U_{\text{batterie}} = 12 \text{ V}$
- $U_{\text{prise}} = 220 \text{ V}$
- $U_{\text{ligne haute tension}} = 150 - 1000 \text{ kV}$
- $U_{\text{foudre}} = 10^8 \text{ V}$



Loi des mailles :

Dans une maille, on a :

$$\sum_{\text{tension maille}} \varepsilon_i U_i$$

avec $\varepsilon_i = +1$ si U_i est dans le sens du parcours et $\varepsilon_i = -1$ sinon.

La loi des mailles et la loi des noeuds s'appellent les **lois de Kirchhoff**. Elles sont variables en régime continu et en régime lentement variable.

Pour mesurer une tension on utilise un *voltmètre* avec le + sur la borne Ω et le - sur la borne COM (en dérivation).

⚡ I.3 Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

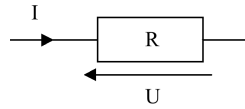
Critère d'ARQS :

Si $\tau \gg \frac{d}{c}$ avec τ le temps caractéristique, d la taille du circuit et c la longueur du vide alors on est dans l'approximation.

Si ce critère est vérifié, tous les points du circuit "voient" le changement en direct. Ce critère est tout le temps vérifié en tp.

⚡ I.4 Résistors

Un **résistor** est une dipôle qui conduit + ou – bien l'électricité.



Une résistance est schématisée ainsi en convention récepteur (ie l'intensité et la tension ne sont pas dans le même sens), et dans ce cas la $P = UI$ représente la puissance reçue.

Loi d'Ohm :

On a $U = RI$ avec R la résistance en Ohm (Ω) en convention récepteur.

Attention, en convention générateur, on a $U = -RI$

On définit la **conductance** $G = \frac{1}{R}$ en Siemens (S).

Ordres de grandeur de la résistance :

- $R_{\text{Ampèremètre}} = \text{qq } \Omega$
- $R_{\text{Fer à repasser}} = 40 \Omega$
- $R_{\text{Électronique}} = 10^6 - 10^7 \Omega$
- $R_{\text{Voltmètre}} = 10^6 \Omega$

On dit qu'un résistor est un dipôle passif (en l'absence de I , pas de U) et linéaire ($U = f(I)$).

On a $R = \frac{l}{\sigma S}$ avec l la longueur, σ la conductivité électrique et S la section.

On considère qu'un fil a une résistance négligeable.

Tension d'un fil :

La tension aux bornes d'un fil est nulle.

Le voltmètre ($\approx 10 M\Omega$) est modélisée par un interrupteur ouvert, et l'ampèremètre ($\approx 0.1 \Omega$) modélisée par un fil.

Puissance dissipée par un résistor :

On a $P = RI^2$

Preuve :

On a $P_{\text{reçue}} = UI = U_R I_R = RI_R I_R = RI_R^2$

On a la **masse**, un point d'un circuit de potentiel nul, $V = 0 \text{ V}$ c'est l'origine des potentiels.

En théorie elle est choisie arbitrairement, mais en pratique elle est imposée par certains appareils reliés à la Terre.

⚡ I.5 Associations des résistors

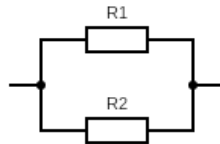


Association série de résistors :

Soit R_1 et R_2 deux résistances en série, on a $R_e = R_1 + R_2$ la résistance équivalente

Preuve :

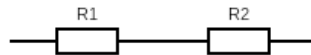
On a $U_1 = R_1 I$ et $U_2 = R_2 I$ ainsi $U = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$ ainsi $R_e = R_1 + R_2$

**Association parallèle de résistors :**

Soit R_1 et R_2 deux résistances en parallèle, on a $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ la résistance équivalente

Preuve :

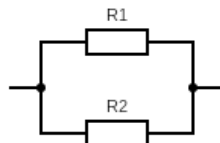
Par loi des mailles, $U = U_1 = U_2$, ainsi $U = R_1 I_1 = R_2 I_2$, d'après la loi des noeuds, $I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ ainsi $U = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I$

⚡ 1.6 Ponts diviseurs**Pont diviseur tension :**

Soit R_1 et R_2 deux résistances en séries, $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$

Preuve :

On a $U_1 = R_1 I$ et $U = (R_1 + R_2) I$ d'où $\frac{U_1}{U} = \frac{R_1 I}{(R_1 + R_2) I}$

**Pont diviseur courant :**

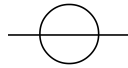
Soit R_1 et R_2 deux résistances en parallèle, $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I$

Preuve :

On a $I_1 = \frac{U}{R_1}$ et $U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$ d'où $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$

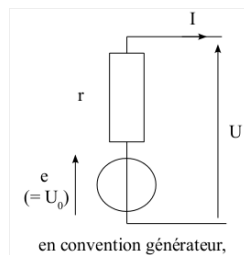
⚡ I.7 Générateurs

⚡ I.7.a Générateur de tension



Un **générateur de tension** est un dipôle qui impose une tension entre ses bornes. La tension imposée par un générateur est aussi appelée sa **force électromotrice** (f.e.m)

U est donc indépendante, c'est une dipôle actif.

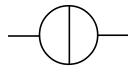


Un générateur réel est un générateur de Thévenin, on a :

Générateur de Thévenin :

On a $U = U_r + E = E - R_i I$ et $P_{\text{fournie}} = UI = (E - R_i I)I = EI - R_i I^2$, avec R_i la résistance interne et E la f.e.m

⚡ I.7.b Générateurs de courant (HP)



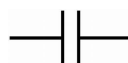
Il existe des **générateurs de courant** qui fixent une intensité dans le circuit.

⚡ II Circuits d'ordre 1

⚡ II.1 Le condensateur

⚡ II.1.a Généralités

Le **condensateur** est un dipôle linéaire composé de deux armatures séparées par un milieu isolant (*diélectrique*).



On a Q la charge algébrique par l'armature de gauche et $-Q$ par celle de droite : le condensateur est globalement neutre.

On a $Q = CU$ avec C la **capacité du condensateur** en Farad (F)

Ordres de grandeur de la capacité :

- $C_{\text{condensateur de TP}} = 1 \text{ nF} - 1 \mu\text{F}$
- $C_{\text{condensateur en électrotechnique}} = 1 \mu\text{F} - 1 \text{ F}$
- $C_{\text{condensateur en électronique}} = 1 \text{ pF} - 1 \mu\text{F}$

Intensité aux bornes d'un condensateur :

En convention récepteur, $I = C \frac{dU}{dt}$

Preuve :

On a $\frac{dQ}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} = I$ et $Q = CU$ donc $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = C \frac{dU}{dt}$

Énergie stockée dans un condensateur :

En convention récepteur, on a $E = \frac{1}{2} CU^2$

Preuve :

On a $P_{\text{reçue}} = UI = U \times C \frac{dU}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} CU^2)}{dt}$ or $P_{\text{reçue}} = \frac{dE}{dt}$ d'où $E = \frac{1}{2} CU^2$

Continuité de U au bornes d'un condensateur :

Aux bornes d'un condensateur U est continue

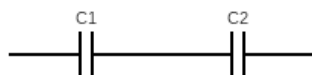
Preuve :

On suppose U discontinue donc E aussi, ainsi $P = \frac{dE}{dt}$ diverge donc $P_{\text{reçue}}$ infinie n'est pas possible

Comportement en régime permanent :

En régime permanent un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert ($I = 0 \text{ A}$)

⚡ II.1.b Associations



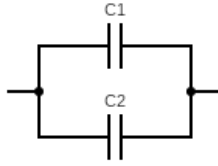
Association série de condensateurs :

Soit C_1 et C_2 deux condensateurs en parallèle, on a $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ le condensateur équivalent

Preuve :

On a $U = U_1 + U_2$ avec $i = i_1 = i_2$ d'où $i = C_1 \frac{dU_1}{dt} = C_2 \frac{dU_2}{dt}$.

Ainsi on a $\frac{dU}{dt} = \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt}$ soit $\frac{i}{C_e} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$ d'où la relation cherchée.



Association parallèle de condensateurs :

Soit C_1 et C_2 deux condensateurs en série, on a $C_e = C_1 + C_2$ le condensateur équivalent

Preuve :

Loi des noeuds on a $i = i_1 + i_2$ d'où on a $i_1 = C_1 \frac{dU}{dt}$ et $i_2 = C_2 \frac{dU}{dt}$ d'où $i = (C_1 + C_2) \frac{dU}{dt}$

⚡ II.2 Charge d'un condensateur

On peut étudier la charge d'un condensateur (ou sa décharge) avec une équation d'ordre 1 dans un circuit RC

Équation différentielle RC :

On a

$$\frac{dU}{dt} + \frac{U}{\tau} = \frac{U_{\infty}}{\tau}$$

avec $\tau = RC$ le temps caractéristique dans le circuit RC

⚡ II.3 La bobine

⚡ II.3.a Généralités

La **bobine** est un dipôle linéaire composé d'un enroulement de fils sur lui même



On associe à une bobine une **inductance** L en Henry (H), dépendant du nombre de fils et la quantités de spires (tours)

Ordres de grandeur de l'inductance :

- $L_{\text{bobine de TP}} = 1 \mu\text{H} - 1 \text{mH}$
- $L_{\text{haut parleur}} = 1 \text{mH}$
- $L_{1\text{m de cable}} = 100 \text{nH}$

Intensité aux bornes d'une bobine :

En convention récepteur, $U = L \frac{di}{dt}$

Énergie stockée dans une bobine :

En convention récepteur, on a $E = \frac{1}{2}Li^2$

Preuve :

On a $P_{\text{reçue}} = UI = L \frac{di}{dt} \times i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$ or $P_{\text{reçue}} = \frac{dE}{dt}$ d'où $E = \frac{1}{2} Li^2$

Continuité de i au bornes d'une bobine :

Aux bornes d'une bobine i est continue

Preuve :

On suppose i discontinue donc E aussi, ainsi $P = \frac{dE}{dt}$ diverge donc $P_{\text{reçue}}$ infinie n'est pas possible

Comportement en régime permanent :

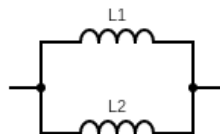
En régime permanent un condensateur est équivalent à un fil ($U = 0$ V)

⚡ II.3.b Associations**Association série de bobines :**

Soit L_1 et L_2 deux bobines en série, on a $L_e = L_1 + L_2$ la bobine équivalente

Preuve :

On a $U = U_1 + U_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$

**Association parallèle de bobines :**

Soit L_1 et L_2 deux bobines en parallèle, on a $\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ la résistance équivalente

Preuve :

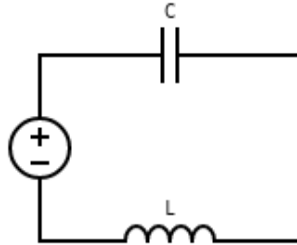
Par loi des mailles, $U = U_1 = U_2$, ainsi $U = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$.

D'après la loi des noeuds, $i = i_1 + i_2$ d'où $\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$ soit $\frac{U}{L} = \frac{U}{L_1} + \frac{U}{L_2}$ d'où la relation recherchée

⚡ III Circuits d'ordre 2, Oscillateurs

Les oscillateurs sont présentés dans un cas électrique, mais on les retrouve aussi en mécanique ou encore en thermodynamique.

⚡ III.1 Oscillateur harmonique



On considère un circuit LC, on trouve $LC \frac{d^2 U}{dt^2} + U = E$ d'où en posant $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ on retrouve :

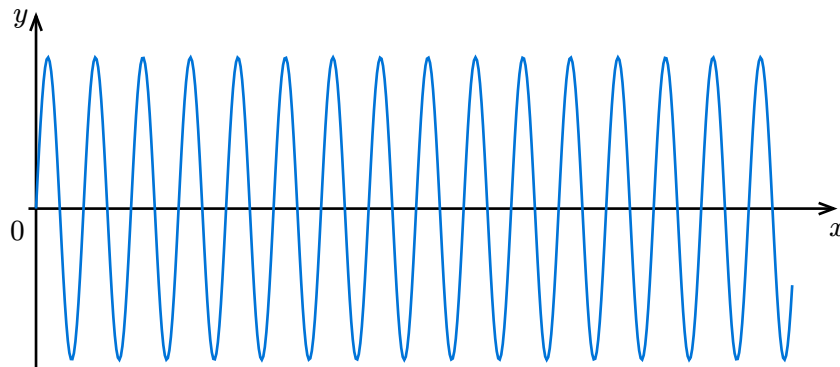
Oscillateur harmonique :

On a l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 B$$

avec ω_0 la **pulsation caractéristique** homogène à un rad s^{-1} et B une constante

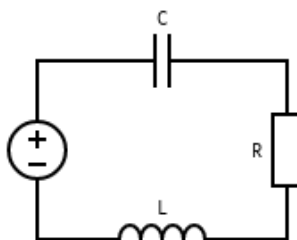
La forme générale est $sp + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$, la résolution étant détaillée en annexe III. Elle admet la courbe suivante.



Ainsi l'oscillateur possède un comportement oscillant avec $2\pi f = \omega_0$

⚡ III.2 Oscillateur amorti

⚡ III.2.a Généralités



On considère maintenant un circuit RLC, ainsi on trouve l'équation différentielle suivante $\frac{E}{LC} = \frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC}U$, en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ on a :

Oscillateur amorti :

On a l'équation différentielle de l'oscillateur amorti :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_\infty$$

avec ω_0 la **pulsation caractéristique** homogène à un rad s^{-1} , Q le **facteur de qualité** adimensionné

Si on a beaucoup d'oscillations, Q correspond au nombre de périodes avant amortissement.

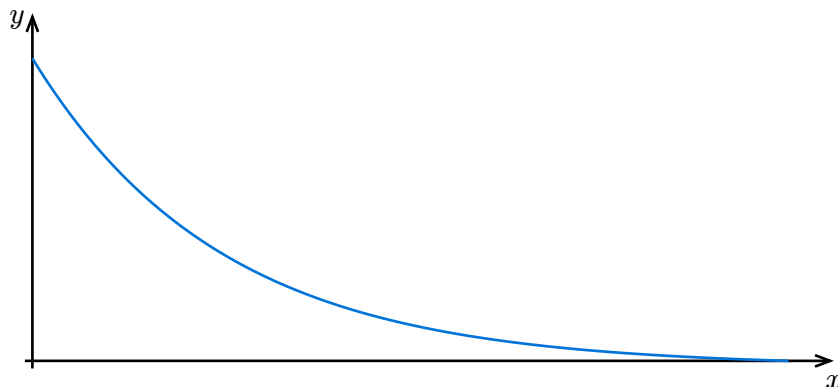
Selon la valeur de Q on a un des trois types d'oscillateurs suivants :

- Si $Q < \frac{1}{2}$, on est en régime apériodique
- Si $Q = \frac{1}{2}$, on est en régime critique
- Si $Q > \frac{1}{2}$, on est en régime pseudo-périodique

⚡ III.2.b Régime apériodique

Dans le cas apériodique on a $\Delta > 0$ d'où $U(t) = sp + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$, la résolution étant détaillée en annexe III.

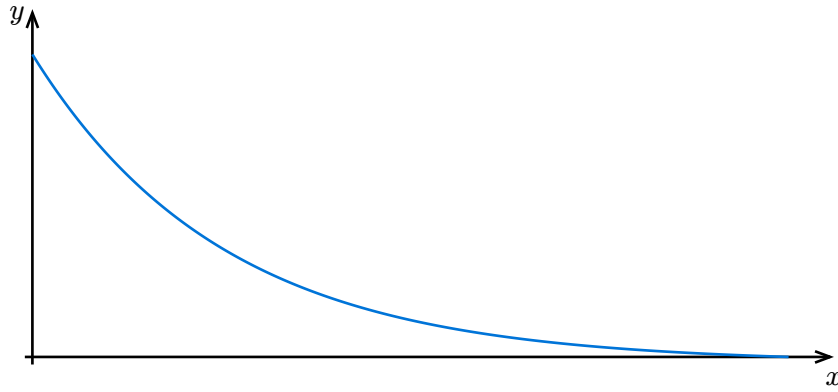
U s'amortit donc en quelques $\max(\tau_1, \tau_2)$, et en faisant un DL on a $\tau_2 = \frac{1}{\omega_0 Q}$



⚡ III.2.c Régime critique

Dans le cas critique, on a $\Delta = 0$ d'où $U(t) = sp + (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}$, la résolution étant détaillée en annexe III, on a quelques $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

Le cas critique est très compliqué à réaliser expérimentalement.

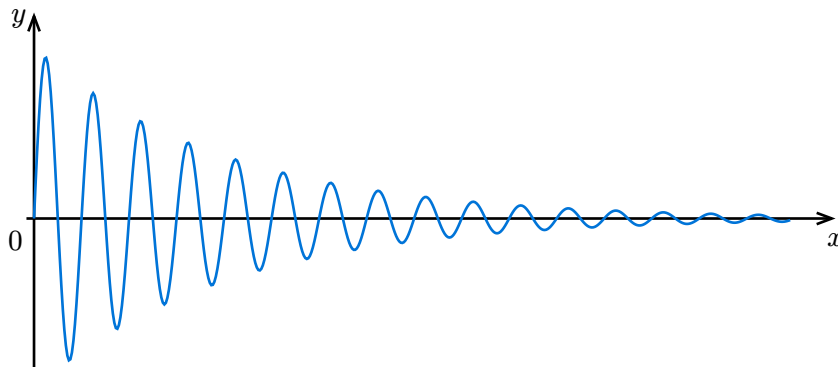


⚡ III.2.d Régime pseudo-périodique

Dans le cas pseudo-périodique, on a $\Delta < 0$ d'où on a $U(t) = sp + (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec ω la **pseudo-pulsation**, la résolution étant détaillée en annexe III.

On a quelques $\tau = \frac{2Q}{w_0}$

Ainsi dans ce cas les oscillateurs voient leur amplitude d'oscillations diminuer avec le temps.



On définit le **décroissement logarithmique** $\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \frac{T}{\tau}$, avec T la **pseudo-période**. Le décroissement logarithmique s'obtient en prenant deux valeurs maximales et en faisant $\delta = \ln\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$ avec $t_1 < t_2$.

La durée du transitoire est de quelques τ .

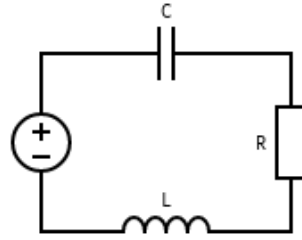


Attention :

En régime pseudo-périodique il n'est pas possible de déterminer graphiquement τ comme dans les autres régimes.

⚡ IV Circuits en régime sinusoïdal forcé

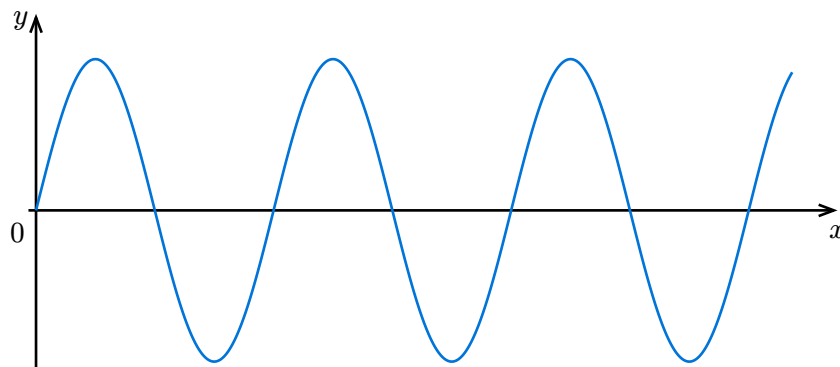
⚡ IV.1 Régime transitoire



Le circuit est en régime sinusoïdal forcé si le **générateur basse fréquence** (GBF) délivre une tension sinusoïdale. Ainsi on a l'apparition d'un déphasage aux temps longs, et l'amplitude du GBF n'est pas forcément la même que celle de U .

Ainsi le second terme dans les équations différentielles devient de la forme $A \cos(\omega t)$

⚡ IV.2 Vocabulaire des signaux périodiques



On définit :

- La **période** T en s correspondant à l'écart entre deux passages au même point
- La **fréquence** f en Hz correspondant au nombre de périodes en une seconde d'où $f = \frac{1}{T}$
- La **valeur moyenne** $\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(\tilde{t}) d\tilde{t}$
- L'**amplitude crête à crête** (peak to peak) $\Delta = u_{\max} - u_{\min}$
- La **valeur efficace**, $u_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$

Valeur efficace pour un signal sinusoïdal :

Dans le cas d'un signal de la forme $S_0 \cos(\omega t)$, on a $\langle S \rangle = 0$ et $S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$

Preuve :

En effet en intégrant sur une période, on a $\langle S \rangle = 0$

On a $\langle S^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} (S_0 \cos(\omega \tilde{t}))^2 d\tilde{t} = \langle S^2 \rangle = \frac{S_0^2}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} \frac{1+\cos(\omega \tilde{t})}{2} d\tilde{t} = \frac{S_0^2}{2\pi} \frac{2\pi}{2} = \frac{S_0^2}{2}$ d'où en passant à la racine, $S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$

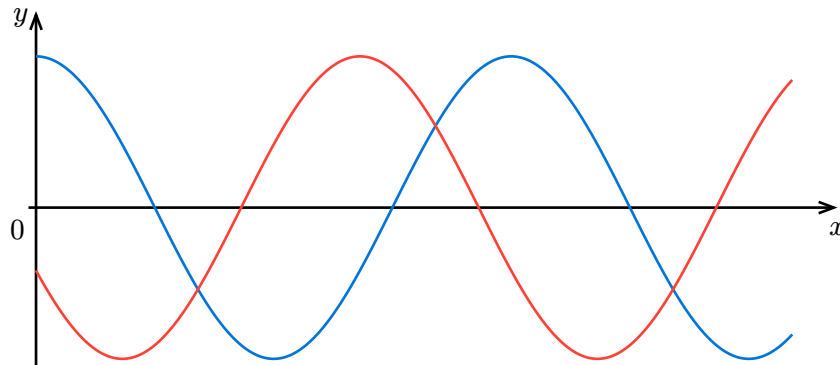
⚡ IV.3 Déphasage entre signaux

Soit $s_1(t) = s \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = s \cos(\omega t + \varphi_2)$, on définit le **déphasage** de s_2 par rapport à s_1 par $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

Le déphasage est défini modulo 2π

- Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \pmod{2\pi}$ alors les deux signaux sont en **accord de phase**

- Si $\Delta\varphi = \pm\pi$, alors les deux signaux sont en **opposition de phase**
- Si $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, alors les deux signaux sont en **quadrature de phase**
- Si $\varphi_2 > \varphi_1$, s_2 est en **avance de phase** sur s_1
- Si $\varphi_2 < \varphi_1$, s_2 est en **retard de phase** sur s_1



Pour mesurer le déphasage, on mesure l'écart de temps entre 2 passages au même endroit et on obtient Δt_1 et Δt_2 , ainsi on doit choisir, en connaissance du système entre 1 et 2, et $|\Delta\varphi| = \frac{\Delta t_i}{T} \times 2\pi \bmod 2\pi$

⚡ IV.4 Représentation complexe d'un signal harmonique

Pour parler d'une représentation complexe en physique on utilise $\underline{s} = a + ib$, et le conjugué de \underline{s} est noté $\underline{s}^* = \bar{s} = a - ib$

Attention :



Dans le contexte spécifique de l'électricité et pour éviter des confusions avec l'intensité i , on note j le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$ (définition différente des mathématiques)

En posant $u = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, on a $\underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ d'où $\underline{u} = U_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ avec $\underline{U} = U_0 e^{j\varphi}$ l'**amplitude complexe** et $U = |\underline{u}(t)|$

De plus on a $\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg(U_0 e^{j\varphi})$

Dériver en complexe revient à multiplier par $j\omega$

⚡ IV.5 Impédances complexes

⚡ IV.5.a Généralités

Impédance complexe :

En convention récepteur, on définit $\underline{z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_0}{I_0} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ l'**impédance complexe** homogène à une résistance

Cas d'une résistance :

Pour une résistance, on a $\underline{z}_R = R$, d'où $\underline{z} \in \mathbb{R}_+$, on dit que le dipôle est **résistif**

Cas d'une bobine :

Pour une bobine, on a $\underline{z}_L = j\omega L$, d'où $\underline{z} \in i\mathbb{R}$ et $\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$, donc $u(t)$ est en quadrature de phase avance par rapport à $i(t)$, on dit que le dipôle est **inductif**.

Preuve :

On a $u_L = L \frac{di}{dt}$ d'où $\underline{u}_L = Lj\omega \underline{i}$ d'où $\underline{z}_L = j\omega L$

Cas d'un condensateur :

Pour un condensateur, on a $\underline{z}_C = \frac{1}{j\omega C}$, d'où $\underline{z} \in i\mathbb{R}$ et $\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$, donc $u(t)$ est en quadrature de phase retard par rapport à $i(t)$, on dit que le dipôle est **capacitif**.

Preuve :

On a $i = C \frac{du_C}{dt}$ d'où $\underline{i} = Lj\omega \underline{u}_C$ d'où $\underline{z}_C = \frac{1}{j\omega C}$

On définit aussi l'**admittance complexe** comme étant $\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}}$

⚡ IV.5.b Comportement basse et haute tension

Comportement basse fréquence :

En basse fréquence :

- La bobine se comporte comme un **fil**
- Le condensateur se comporte comme un **interrupteur ouvert**

Comportement haute fréquence :

En haute fréquence :

- La bobine se comporte comme un **interrupteur ouvert**
- Le condensateur se comporte comme un **fil**

⚡ IV.6 Lois de l'électricité en RSF

Les lois de l'électricité restant valides dans l'ARQS, elles sont aussi valides si $\omega \ll \frac{2\pi c}{d}$.

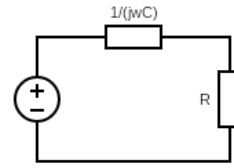
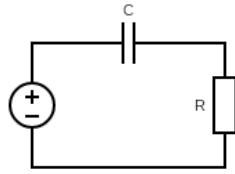
Les impédances s'associent en série et en parallèle comme des résistances, et les ponts diviseurs s'appliquent aussi aux impédances.

⚡ IV.7 Étude d'un circuit

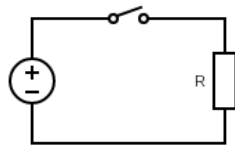
Pour étudier un circuit :

- On peut établir l'équation différentielle de u , puis passer dans \mathbb{C} et déterminer \underline{u} puis U et φ
- On peut utiliser la méthode des impédances complexes (voir ci dessous), valide uniquement en RSF

On considère le circuit suivant, qu'on peut remplacer avec des impédances :



Ainsi en basse et haute fréquence on a :



Par loi des mailles on a $\underline{z}_R = R$ et $\underline{z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ d'où le dipôle équivalent est $\underline{z} = R + \frac{1}{j\omega C}$

En utilisant un pont diviseur tension on a $\underline{u}_C = \frac{\underline{z}_C}{\underline{z}_R + \underline{z}_C} E = \frac{1}{1 + j\omega RC} E$

On remarque qu'on peut retrouver l'équation différentielle, on a $\underline{u} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{e}$ d'où $\underline{u} + j\omega RC \underline{u} = \underline{e}$ d'où $u + RC \dot{u} = e$

⚡ IV.8 Résonance

Lorsque l'amplitude de la réponse sinusoïdale d'un système à une excitation sinusoïdale, d'amplitude fixe mais de fréquence variable passe par un maximum, on dit qu'il y a **résonance**.

Dans un RLC série alimenté par un générateur de tension idéal, on a : $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{R}} = \frac{U_0/R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
 $(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}})$

Si on trace la **réponse en amplitude**, l'amplitude réelle présente un maximum, alors on dit qu'il y a **résonance en intensité**. On définit ω_{res} la **pulsation de résonance**, pas toujours égale à ω_0 (notamment dans du 2nd ordre).

On définit ω_c les **pulsations de coupure** tel que $I\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right) = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$

On a $\Delta\omega_c = |\omega_{c1} - \omega_{c2}|$ la **largeur de résonance**

De plus on a aussi $\frac{\omega_{\text{res}}}{\Delta\omega_c}$ l'**acuité de résonance**, plus elle est élevée, plus on a un pic.

On peut tracer la **réponse en phase**, $\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$, on remarque dans le cas d'un RLC que $\varphi(\omega_{\text{res}}) = 0$, $|\varphi(\omega_c)| = \frac{\pi}{4}$ et $\omega_{\text{res}} = \omega_0$.

On a résonance en intensité peu importe le facteur de qualité, mais ça n'est pas toujours le cas (notamment en tension ou en vitesse en mécanique)

On a aussi $Q = \frac{\omega_{\text{res}}}{\Delta\omega_c}$

⚡ V Filtrage

Les signaux dans la réalité sont complexes à analyser car souvent superposés à un bruit qu'on cherche à éliminer. Ainsi on réalise un **filtrage**, analogique (ici) ou numérique.


⚡ V.1 Spectre d'un signal, décomposition de Fourier

Un signal périodique de période T peut se décomposer en une superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples.

On a $u(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$ (décomposition de Fourier)

On a E_0 la **valeur moyenne** du signal et les $E_k \cos(2\pi k f t + \varphi_k)$ sont appelés les **harmoniques**. La première harmonique, $E_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1)$ est appelée **le fondamental**.

Donner le spectre en amplitude c'est fournir les valeurs des E_n

 A faire Spectre en amplitude

⚡ V.2 Réponse fréquentielle d'un quadripôle

Un **quadripôle** est un circuit électrique comportant 2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie.

On impose dans ce cours des dipôles linéaires, d'être en sortie ouverte donc l'intensité sortante est nulle.

On a la **réponse fréquentielle**, $e(t) = E \cos(\omega t)$ et on étudie $s(t)$ en régime établi.

Dans un quadripôle linéaire, e et s sont liés par une équation différentielle, et e étant sinusoïdale, les impédances sont autorisées dans ce cadre.

Filtre :

Un **filtre** est caractérisé par la **fonction de transfert** complexe $\underline{H} = \frac{s}{e}$

On a $\underline{H} = \frac{S_{e^{j\omega t}}}{E_{e^{j\omega t}}} = \frac{S}{E}$, et \underline{H} est adimensionné.

On a $\underline{H} = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, et le filtre est de l'**ordre** du degré de Q .

Gain :

Le **gain** du filtre est défini par $|\underline{H}| = \left| \frac{S}{E} \right| = \frac{S}{E}$, et la connaissance du gain renseigne sur le rapport des amplitudes de l'entrée et de la sortie.

Déphasage :

On a $\arg(\underline{H}) = \varphi_s - \varphi_e$

Preuve :

On a $\arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{S}{E}\right) = \arg\left(\frac{S e^{j\varphi_s}}{E e^{j\varphi_e}}\right) = \arg(e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}) = \varphi_s - \varphi_e$

Donc l'argument de \underline{H} nous renseigne sur le déphasage entre la sortie et l'entrée.

⚡ V.3 Filtre d'ordre 1

Filtre ordre 1 :

Dans un **filtre du premier ordre**, on a $\underline{H} = \frac{a_0 + a_1 j\omega}{b_0 + b_1 j\omega}$

Pour trouver \underline{H} on peut faire une équation différentielle ou les impédances \mathbb{C} .

On peut ensuite mettre \underline{H} sous forme canonique, ainsi $\underline{H} = \frac{\dots}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec ω_0 la **pulsation caractéristique du filtre**.

Pour étudier un filtre :

- On regarde d'abord son comportement BF/HF avec les dipôles équivalents pour les bobines et condensateurs. Si on a $u = \begin{cases} 0 & \text{en BF} \\ e & \text{en HF} \end{cases}$ on a un **passé-haut** sinon si $u = \begin{cases} e & \text{en BF} \\ 0 & \text{en HF} \end{cases}$ on a un **passé-bas**.



Attention :

On est en HF si $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow 2\pi f \gg 2\pi f_0 \Leftrightarrow f \gg f_0$

- On regarde ensuite le gain $|\underline{H}|$ en BF et HF en négligeant $\frac{\omega}{\omega_0}$ ou $\frac{\omega_0}{\omega}$ selon le cas.

Gain en décibel :

On a le **gain en décibel** $G_{dB} = 20 \log_{10}(|\underline{H}|)$, l'échelle log étant plus adaptée car à chaque facteur $\times 10$ on a $\pm 20k$

On a la **pulsation de coupure** à -3 dB telle que $G_{dB} = -3$ dB

La **bande passante du filtre** à -3 dB sont les ω tels que $G_{dB}(\omega) \geq G_{dB \max} - 3$ dB

On peut retrouver ces valeurs avec $|\underline{H}|$, en effet $|\underline{H}|(\omega_c) = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$

On a la **largeur de la bande passante**, $\Delta\omega = \max(\omega) - \min(\omega)$ avec ω dans la bande passante.

Dans un filtre du premier ordre, $\omega_c = \omega_0$ et $\Delta\omega = \omega_0$

Type	Transmittance	Pulsation de coupure	Gain
Passe-bas (ordre 1)	$\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$	ω_0	$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$
Passe-haut (ordre 1)	$\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$	ω_0	$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

On peut tracer les **diagrammes de Bode** en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$ pour le gain et le déphasage, et observer un comportement intégrateur ou dérivateur.

On a un comportement intégrateur dans le cas d'un passe-bas et dérivateur dans le cas d'un passe-haut.

⚡ V.4 Filtre d'ordre 2

Seul le filtre passe-bande d'ordre 2 est au programme

Transmittance passe-bande :

Dans un **filtre passe-bande d'ordre 2**, on a $\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

On retrouve Q le facteur de qualité.

Comme son nom l'indique, le filtre passe-bande laisse passer une bande de fréquences autour de ω_0 .

Lien pulsation coupure et facteur de qualité :

On a $\frac{\omega_0}{\Delta\omega_c} = Q$

Ainsi si Q est grand, la bande passante est étroite, et si Q est petit, la bande passante est large.

Les résultats suivants sont hors programme mais peuvent être utiles :

Type	Transmittance	Pulsation de coupure
Passe-bande (ordre 2)	$\frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	ω_0
Passe-bas (ordre 2)	$\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$	ω_0
Passe-haut (ordre 2)	$\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$	ω_0
Réjecteur de bande	$\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$	ω_0



Attention :

On remarquera que la forme canonique a toujours un 1 au dénominateur

⚡ VI Signaux périodiques et filtrage linéaire

⚡ VI.1 Signaux périodiques et leur caractérisation

L'analyse harmonique est importante, car les sinusoides sont stables par intégration et dérivation et parcequ'elles constituent la base de la décomposition de Fourier.

On rappelle qu'on définit la **valeur efficace** par $E_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$: la **valeur efficace** de $e(t)$ est la valeur de la tension continue qui déposerait la même énergie que $e(t)$ pendant une période dans un résistor.

Dans un résistor on a $P(t) = \frac{e^2(t)}{R}$ d'où $\mathcal{E} = \frac{1}{R} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (e^2(t)) dt$ d'où on retrouve l'expression de E_{eff} .

Dans le cas d'un sinus on a bien $E_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$ et $E_{\text{eff}} = 0$ dans le cas d'un signal créneau.

Décomposition de Fourier :

Toute fonction $e(t)$ périodique de pulsation ω_1 peut s'écrire de la façon unique suivante :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

Les a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** de $e(t)$ et $\omega_n = n\omega_1$

Expression des coefficients :

Si $n = 0$, on a $a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) dt$ et $b_0 = 0$

Sinon on a :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \cos(\omega_n t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e(t) \sin(\omega_n t) dt$$



Attention :

Attention au $\frac{1}{T}$ pour a_0 et $\frac{2}{T}$ pour les autres

On remarque que :

- $a_0 = \langle e(t) \rangle$, aussi appelé **offset** en électronique
- La série de Fourier d'une fonction impaire ne contient que des sinus et celle d'une fonction paire que des cosinus
- Si $e(t + \frac{T}{2}) = -e(t)$, alors tous les termes de degré pair sont nuls
- La décomposition est définie si a_n, b_n tendent vers 0 quand n tend vers l'infini

On appelle **rapport cyclique** (entre 0 et 1) la proportion du temps passé en haut pour un signal créneau et la durée de la phase montante pour un signal triangle.

On rappelle qu'un signal triangle est l'intégrale d'un signal créneau.

On peut aussi tracer le **spectre en amplitude**, car tout signal peut s'écrire sous la forme $e(t) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan(\varphi_n) = -\frac{b_n}{a_n}$

Pour un signal périodique de fréquence f_1 , le terme périodique de fréquence nulle est la **composante continue** d'amplitude A_0 , le terme A_1 est le **fondamental** et $\forall n \geq 0$, A_n est l'amplitude de l'**harmonique** de rang n .

On peut ainsi tracer le spectre en amplitude, A_n en fonction de n ou de $f_n = nf_1$. Plus un spectre contient d'harmoniques, plus il est **riche**.

Formule de Parseval :

On a

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} A_n^2}$$

Preuve :

On a $\left(\sum_{n \geq 0} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\right)^2 = \sum_{n \geq 0} A_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) + \sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}} A_n A_m \cos(\omega_n t + \varphi_n) \cos(\omega_m t + \varphi_m)$

Et $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega_n t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{si } n \neq 0 \\ T & \text{si } n = 0 \end{cases}$

D'où le résultat

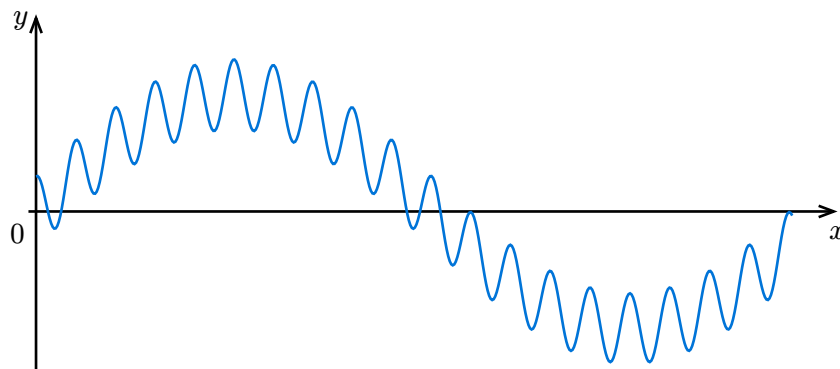
🎵 Ondes

🎵 I Introduction aux ondes

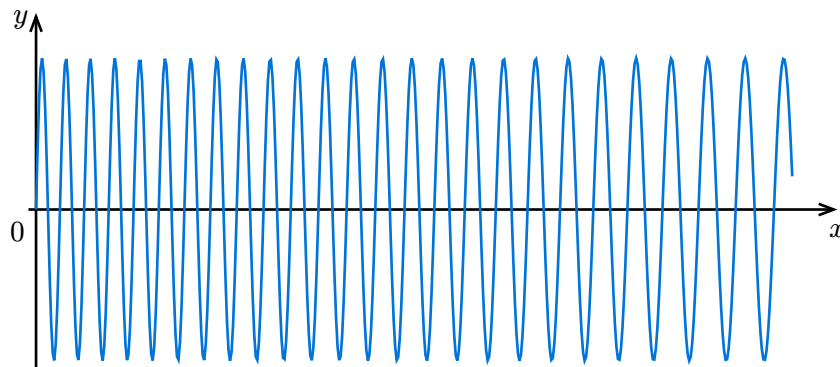
🎵 I.1 Définition et exemples

Une **onde progressive** est une perturbation du champ qui se propage de proche en proche sans transport global de matière mais avec transport global d'énergie.

Une onde est dite **transverse** si la perturbation est orthogonale au sens de propagation



Une onde est dite **longitudinale** si cette perturbation est dans le même sens que la direction de propagation



Onde mécanique :

Une **onde mécanique** est une onde qui a besoin d'un milieu matériel pour se propager

On se limitera à la description de la propagation des ondes dans un milieu illimité, non dispersif et transparent :

- **Illimité** : On néglige les effets de bord
- **Non dispersif** : La vitesse ne dépend pas de la longueur d'onde
- **Transparent** : Pas de perte d'énergie de l'onde vers le milieu

Ondes acoustiques :

- Sons audibles : 20 – 20000 Hz
- Téléphonie : 300 – 3400 Hz

- La3 par un diapason : 440 Hz

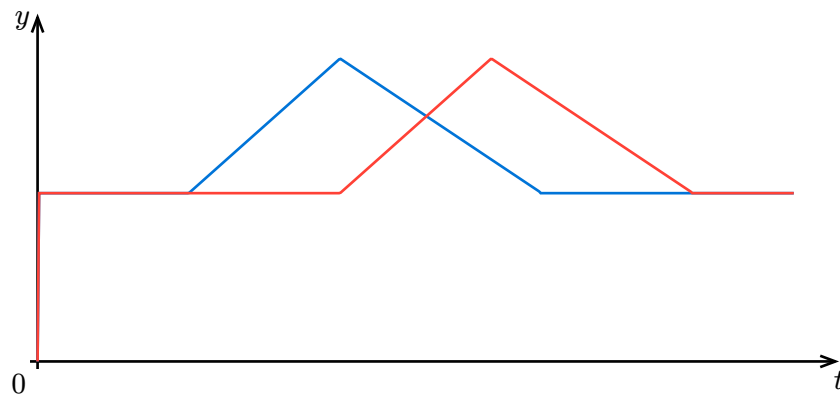
Ondes électromagnétiques :

- WiFi : 2.4 – 5 GHz
- Lumière visible : 400 – 800 THz ($4 \cdot 10^{14}$ – $8 \cdot 10^{14}$ Hz)
- Radio FM : 88 – 108 MHz

🎵 1.2 Célérité, couplage temps/espace

Dans les conditions d'études, une onde unidimensionnelle se propage en se translatant

On a une onde qui se déplace de la manière suivante, en **bleu** en t_0 et en **rouge** en $t_1 > t_0$



On notera qu'un graphe en fonction de $t(y)$ donnera une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de l'onde.

Forme de l'onde plane :

Dans le cas d'une onde plane on a :

$$s(x, t) = F(x \pm vt)$$

avec v la **célérité de l'onde** et F dépendant de la forme de l'onde.

Si l'onde se déplace vers les x croissants on a $x - vt$ et si x se déplace vers les x décroissants on a $x + vt$

Dans le cas **sphérique isotrope** (onde émise dans toutes les directions), on a $s(d, t) = A(d) \times F(d - vt)$

🎵 1.3 Ondes planes progressives harmoniques

Une onde **plane** est une onde 3D mais ne nécessitant qu'une seule dimension pour être décrite un plan $P(x, t)$.

Une onde est dite **harmonique** lorsque $P(x, t) = P_0 \cos(k(x \pm vt) + \varphi) = P_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

Le k est appelé **vecteur d'onde** et est de dimension rad L^{-1} et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Relations avec k :

On a $T = \frac{\lambda}{v}$, $f = \frac{v}{\lambda}$ et $\omega = kv$

Une onde harmonique possède une double périodicité : spatiale de longueur d'onde λ et temporelle de périodicité de période T .

Vitesse de phase :

On a $v = \frac{\omega}{k}$, dans notre cas c'est la célérité.

La **surface d'onde** est le lieu des points qui sont dans le même état vibratoire (dans une onde harmonique c'est le lieu des points qui ont la même phase).

🎵 I.4 Puissance d'une onde

On définit la **puissance surfacique moyenne d'une onde**, $P_{\text{surf}} = k \langle s^2 \rangle$

On définit aussi la **quantité moyenne d'énergie par unité de temps** qui traverse cette surface, $P = \iint_{\text{surface}} P_{\text{surf}} ds$

Pour une onde plane se déplaçant vers les x croissants, on a $P_{\text{surf}} = k \frac{S_0^2}{2}$

Preuve :

Soit $s(x, t) = \cos(\omega t - kt + \varphi)$, ainsi $P_{\text{surf}} = k \langle S_0^2 \cos^2(\dots) \rangle = k \frac{S_0^2}{2}$

Dans un volume d'espace, $P_{\text{entrante}} = P_{\text{sortante}}$

Preuve :

$P_{\text{entrante}} = k \frac{S_e^2}{2}$ et $P_{\text{sortante}} = k \frac{S_s^2}{2}$ or $S_e = S_s$ dans ce cours d'où $P_{\text{entrante}} = P_{\text{sortante}}$

De même, dans un milieu sphérique isotrope, on a $P_{\text{entrante}} = P_{\text{sortante}} = P_{\text{source}}$

Preuve :

$P_{\text{entrante}} = P_{\text{source}}$ et $P_{\text{sortante}} = P_{\text{surf}} \times 4\pi R^2$ et puisqu'il n'y a pas d'absorption et de stockage, $P_{\text{entrante}} = P_{\text{sortante}} = P_{\text{source}}$

De plus, on a $S = \frac{C}{R}$ avec R le rayon du cercle considéré

🎵 I.5 Spectre d'une onde périodique

On considère $s(0, t) = S_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} S_m \cos(m\omega t + \varphi_m)$ comme dans le cours d'optique

Principe de superposition :

Dans un milieu linéaire, l'onde totale qui résulte de plusieurs ondes est la somme des ondes

De plus on a la **relation de dispersion** entre k_ω et m_ω , $m_\omega = k_\omega c$

🎵 I.6 Ordre de grandeur

On a $\lambda = 10^{-6}$ m pour les ondes lumineuses, $f = 10^{14}$ Hz et $\omega = 10^{15}$ rad s⁻¹

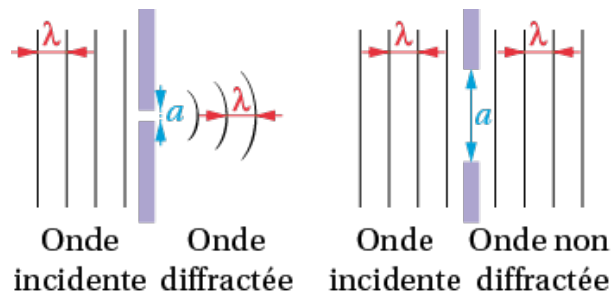
Le spectre de l'audible est de 20 Hz à 20 kHz et le spectre des ondes radio est de 10 kHz à 10 GHz

🎵 II Diffraction/Interférences

La **diffraction** et les **interférences** sont deux principes intrinsèques aux ondes qui ne dépendent pas de leur nature.

🎵 II.1 Diffraction

La **diffraction** se fait selon le schéma suivant :



Critère de diffraction :

On a le **critère de diffraction** $\frac{\lambda}{a}$ (addimensionné) :

- Si $a < \frac{\lambda}{2}$ il ne se passe rien
- Si $\lambda \approx a$, on a une onde circulaire avec la même pulsation et la même longueur d'onde
- Si $a > \text{qq } \lambda$ on a une onde restreinte angulairement
- Si $a \gg \lambda$ l'onde n'est pas diffractée

Formule de la diffraction :

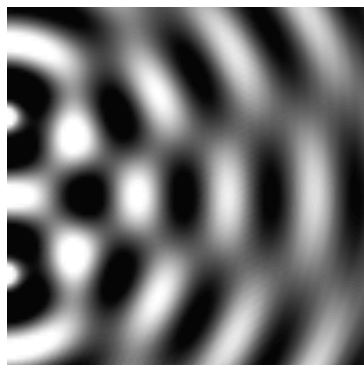
Si $\lambda \leq a$, l'onde est contrainte dans un secteur angulaire d'un demi angle au sommet θ tel que $\sin(\theta) \approx \frac{\lambda}{a}$

🎵 II.2 Interférences

Les interférences résultent d'une superposition de plusieurs ondes selon le principe de superposition.

Les **interférences** se font selon le schéma suivant :

Les zones noires sont appelées **interférences destructives** et les zones blanches sont appelées **interférences constructives**.



L'**intensité** d'une onde est la puissance surfacique.

On a la représentation complexe d'une onde, $s = S \cos(\omega t + \varphi(M))$ d'où $\underline{s} = S \exp^{j(\omega t + \varphi(M))}$

Formule de Fresnel :

On a la **formule des interférences** ou **de Fresnel** en considérant 2 ondes harmoniques de même pulsation :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M))$$

Preuve :

On a $\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$ d'où $S^2 = |\underline{s}|^2 = (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*) = \underline{s}_1 \underline{s}_1^* + \underline{s}_2 \underline{s}_2^* + \underline{s}_1 \underline{s}_2^* + \underline{s}_1^* \underline{s}_2$

Et $S_1 e^{j(\omega t - \varphi_1)} S_2 e^{-j(\omega t - \varphi_2)} + S_1 e^{-j(\omega t - \varphi_1)} S_2 e^{j(\omega t - \varphi_2)} = S_1 S_2 [e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)}] = 2S_1 S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

D'où $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

Soit $\frac{k}{2} S^2 = \frac{k}{2} S_1^2 + \frac{k}{2} S_2^2 + 2 \left(\sqrt{\frac{k}{2}} S_1 \right) \left(\sqrt{\frac{k}{2}} S_2 \right) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

Donc on a bien $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$


On remarque donc bien que si $I_1 = I_2 = I_0$, on a $I = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi))$

Si les deux ondes sont en phase, on a $\cos(\Delta\varphi) = 1$ d'où $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ ou encore $I = 4I_0$ sous les hypothèses précédentes. On dit dans ce cas qu'on a des **inteférences constructives**.

Si les deux ondes sont opposition en phase, on a $\cos(\Delta\varphi) = -1$ d'où $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ ou encore $I = 0$ sous les hypothèses précédentes. On dit dans ce cas qu'on a des **inteférences destructives**.

On définit la **différence de marche** $\delta(M) = d_2(M) - d_1(M)$ la différence de chemin optique entre les deux ondes.

De même on a des interférences constructives si $\Delta\varphi = 2k\pi$ ou $\delta(M) = k\lambda$ (différence de marche) et des interférences destructives si $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ ou $\delta(M) = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

 A faire (Voir pour expliciter les expressions des trous d'Young + interfrange)

Interfrange :

On a l'**interfrange** $i = \frac{\lambda d}{a}$ l'espacement entre deux interférences constructives

III La lumière onde

III.1 Généralités

Dans le point de vue ondulatoire, la lumière est une onde se déplaçant à $299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$

La plupart des diélectriques suivent la **loi de Cauchy**, $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$, $A > 0$ dépendant du matériau et B dépendant du diélectrique

On parle de **diélectrique dispersent** une dispersion de la lumière avec λ dans le prisme arc-en-ciel.

Souvent on fera l'hypothèse que cette dispersion est négligeable.

III.2 Modèle scalaire

La lumière est une onde scalaire (\vec{E}, \vec{B}) (3D) mais on se place en 1D en disant que la lumière est de forme $s(x, y, z, t)$

Dans le cas d'un milieu homogène et d'une onde plane harmonique avec λ_0 la longueur d'onde dans le vide on a $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}n$

Preuve :

Le milieu est linéaire, d'où on a $\omega_{\text{vide}} = \omega_{\text{diélectrique}} = \omega$ avec $\omega = ck_0 = c \frac{2\pi}{\lambda_0}$ dans le vide et $\omega = \frac{c}{n}k = \frac{c}{n} \frac{2\pi}{\lambda}$

Ainsi $\frac{c}{n} \frac{2\pi}{\lambda} = c \frac{2\pi}{\lambda_0}$ d'où $n\lambda = \lambda_0$ soit $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$

Dans un milieu homogène, le **chemin optique** est $L_{AB} = nx$

Expression générale du chemin optique :

Dans un milieu inhomogène, le chemin optique est $L_{AB} = \int_A^B n \, dl$

Retard de phase :

On a le **retard de phase** entre A et B noté $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{AB}$

Preuve :

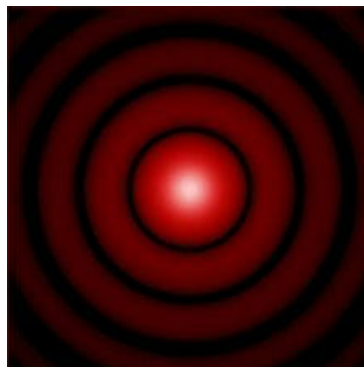
On a $\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T} \times 2\pi = \frac{1}{cT} \times L_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{AB}$ car $cT = \lambda_0$

III.3 Diffraction

Il est possible de retrouver la nature de l'objet diffractant avec la forme de la figure de diffraction

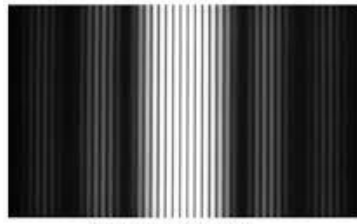
Pour un objet rectangulaire le caractère diffractant est d'autant plus marqué que le côté est proche de λ

On observe une **tache d'Airy** lorsque l'on fait passer un laser dans une fente

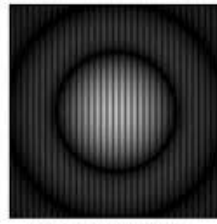


III.4 Interférences

On peut refaire l'expérience des trous de Young en lumière monochromatique :



Fentes d'Young



Trous d'Young

Il est aussi possible de la faire en lumière blanche, on observe que plus on s'éloigne du point central, plus les couleurs disparaissent car aucune longueur d'onde ne sera majoritaire

Mécanique

I Cinématique du point

I.1 Généralités

Un **solide indéformable** est un système matériel Σ tel que $\forall M_1, M_2 \in \Sigma, \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ est constant dans le temps.

Un **point matériel** est un solide indéformable donc on néglige la taille et les mouvements de rotation sur lui même.

Pour un point il faut 3 infos sur sa position, et pour un solide il faut 3 infos en plus : celles sur sa rotation.

Pour décrire l'état mécanique d'un système il faut connaître 3 vitesses pour un point, et pour un solide il faut en plus connaître 3 vitesses angulaires.

La **cinématique** est l'étude des mouvements sans se préoccuper des causes.

I.2 Observateur, repère, référentiel

On a besoin de 3 informations spatiales et 1 information temporelle pour décrire un mouvement.

Un **repère** est composé d'une origine, de 3 axes et d'une unité de longueur (souvent le mètre).

Le **mètre** est défini par la distance parcourue par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299792458}$ s

L'observateur est lui muni d'une unité de temps, souvent la seconde.

La **seconde** est définie par la durée de 919263177 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

Référentiel :

Un **référentiel** est un repère d'espace et de temps

On se place dans le contexte de la relativité galiléenne, le temps est absolu et l'espace est absolu (pas vrai en général).

I.3 Position, vitesse, accélération

Position :

Soit O l'origine et M un point matériel, ainsi **vecteur position** est \overrightarrow{OM}

Le **vecteur déplacement élémentaire** est $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}$

Vitesse :

La **vitesse** est la dérivée de la position par rapport au temps, $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire.

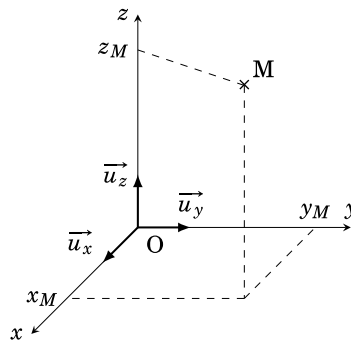
Accélération :

L'**accélération** est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$

On dit qu'un mouvement est **rectiligne** si la trajectoire est une droite, **circulaire** si la trajectoire est un cercle, **curviligne** si la trajectoire est une courbe.

De plus le mouvement est **uniforme** si la vitesse est constante, **accéléré** si la vitesse augmente, **décéléré** si la vitesse diminue.

🔑 I.3.a Coordonnées cartésiennes



Coordonnées cartésiennes :

On a :

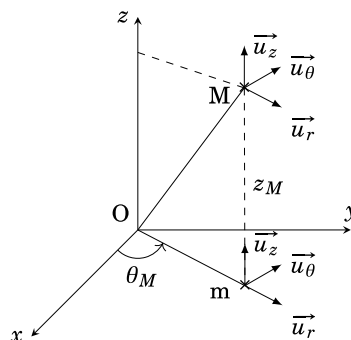
$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$d\vec{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

🔑 I.3.b Coordonnées cylindriques



Coordonnées cylindriques :

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Preuve :

On a $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$ d'où $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\cos(\theta(t))\vec{e}_x}{dt} + \frac{d\sin(\theta(t))\vec{e}_y}{dt} = -\sin(\theta(t))\dot{\theta}\vec{e}_x + \cos(\theta(t))\dot{\theta}\vec{e}_y = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

D'où $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

Ainsi on a $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

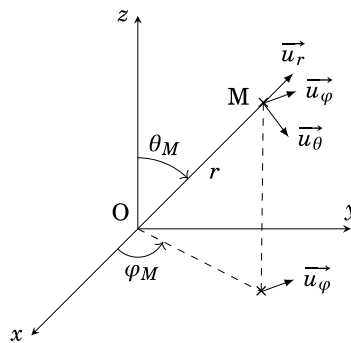
De plus on a $\vec{a} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)}{dt}$

Avec $\frac{d\dot{r}\vec{e}_r}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{dr\dot{\theta}\vec{e}_\theta}{dt} = \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

D'où $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

La composante $r\vec{e}_r$ est la composante radiale et $z\vec{e}_z$ est la composante axiale.

🔑 I.3.c Coordonnées sphériques



On appelle φ la longitude et θ la colatitude

Coordonnées sphériques :

On a :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + \varphi\vec{e}_\varphi$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r \sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

La formule de l'accélération n'est pas à connaître

🔑 I.3.d Base de Frenet

On a la **base de Frenet** pour les abscisses curvilignes.

On considère le **cercle osculateur**, c'est à dire le cercle qui approxime le mieux la courbe en un point.

Base de Frenet :

Avec \vec{r} le **vecteur unitaire tangent** et \vec{n} le **vecteur unitaire normal** au cercle osculateur, on a :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{r}$$

🔑 I.4 Description de quelques mouvements

🔑 I.4.a Mouvement uniforme 1D

On est à vitesse constante, ainsi $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$ d'où en intégrant on a $x = \|\vec{v}\|t + x_0$

🔑 I.4.b Mouvement circulaire uniforme

Dans un mouvement circulaire uniforme on a r fixé, donc avec $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ d'où $\|\vec{v}\| = r\dot{\theta}$ donc $\theta(t) = \omega t + \theta_0$

🔑 II Dynamique du point

En dynamique on s'intéresse aux causes des mouvements contrairement à la cinématique.

🔑 II.1 Masse, centre de masse, quantité de mouvement

L'**inertie** est la résistance d'un corps à une variation de son état de mouvement.

La **masse** en physique est une mesure de l'inertie d'un corps, elle s'exprime en kilogramme (kg), est extensive et additive.

On appelle **centre de masse** le point où l'on peut assimiler la masse du système à une masse ponctuelle, et on note G le centre de masse (auss appelé barycentre). On a $\vec{OG} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{OG}_i$

Quantité de mouvement :

La **quantité de mouvement** est le produit de la masse par la vitesse, $\vec{P} = m\vec{v}$

La vitesse d'un système de points est la vitesse du centre de masse.

Une **force** décrit une interaction pour modifier l'état de mouvement (c'est à dire la quantité de mouvement) d'un point matériel. On note $\vec{F}_{a \rightarrow b}$ l'action de a sur b . Une force est une grandeur vectorielle, s'exprime en Newton (N), est extensive et additive.

🔑 II.2 Les lois de Newton

🔑 II.2.a 1ère loi de Newton

Un **système isolé** est un système qui n'échange pas de quantité de mouvement avec l'extérieur.

Un **système pseudo-isolé** est un système qui échange de la quantité de mouvement avec l'extérieur mais dont la somme des forces extérieures est nulle (la résultante des forces extérieures est nulle).

Principe d'inertie :

Il existe une classe de référentiels dits d'**inertie** ou **galiléens** dans lesquels un système isolé ou pseudo-isolé est à l'équilibre ou en mouvement rectiligne uniforme.

2 référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

On a les référentiels de référence suivants :

- **Héliocentrique** : Le point fixe est le centre de masse du soleil, et les 3 axes pointent vers des étoiles fixes. Il est supposé galiléen.
- **De Copernic** : Le point fixe est le centre de masse du système solaire, et les 3 axes pointent vers des étoiles fixes. Il est supposé galiléen.
- **Géocentrique** : Le point fixe est le centre de la Terre, et les 3 axes pointent vers des étoiles fixes. Il est supposé galiléen sur des $t \ll 1$ an.
- **Terrestre** : Le point fixe est accroché à la surface terrestre et les trois axes sont fixes à la surface terrestre. Il est supposé galiléen sur des $t \ll 1$ j.

🔑 II.2.b 2ème loi de Newton

Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

Dans un référentiel galiléen, un point matériel vérifie $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$, ainsi la résultante des forces est égale à la dérivée de la quantité de mouvement.

A m constante, on a $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ et dans un système isolé ou pseudo-isolé, $m\vec{a} = 0$

🔑 II.2.c 3ème loi de Newton

Principe des actions réciproques :

On a $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$

🔑 II.3 Méthode de résolution des exercices

Pour résoudre un exercice on suit les étapes suivantes :

1. On fait un grand schéma avec le repère et la/les base(s)
2. On définit le système étudié, le référentiel d'étude et on précise le caractère galiléen.
3. On fait un **bilan des actions mécaniques externes** (BAME) et on le fait apparaître sur le schéma
4. On fait l'exercice

🔑 II.4 Forces à connaître

🔑 II.4.a Poids

On considère un corps de masse m plongé dans un champ gravitationnel \vec{g}

Poids :

On a $\vec{P} = m\vec{g}$ le **poids** s'appliquant sur le corps

🔑 II.4.b Poussée d'Archimède

On considère un corps plongé dans un fluide de masse volumique ρ_f et un champ de pesanteur \vec{g}

Poussée d'Archimède :

On a $\vec{\Pi} = -\rho_f V \vec{g}$ avec V le volume déplacé valide si et seulement si le fluide est à l'équilibre en l'absence du corps

Il ne faut pas hésiter à la négliger si $\rho_{\text{corps}} \gg \rho_f$

🔑 II.4.c Réaction d'un support

La réaction du support est une force au contact, avec \vec{R}_n la composante normale (toujours vers l'extérieur) et \vec{R}_t la composante tangentielle (Spé), nulle en l'absence de frottements solides.

On n'a pas de formule pour \vec{R}_n

🔑 II.4.d Tension d'un fil inextensible

On a \vec{T} dirigé vers le fil, avec le point d'application au contact système/fil, si le fil n'est pas tendu on a $\vec{T} = 0$

On n'a pas de formule pour \vec{T}

On peut retrouver l'équation différentielle d'un pendule avec cette force

🔑 II.4.e Force de rappel élastique (loi de Hooke)

Un ressort applique une force qui s'oppose à la déformation

Force de rappel élastique :

On a $\vec{F} = k(l - l_0)\vec{u}$ avec k la **constante de raideur** du ressort et l_0 sa **longueur à vide**, et \vec{u} est un vecteur unitaire à déterminer avec précision (pour garantir l'opposition à la déformation).

La constante de raideur s'exprime en N m^{-1} , plus k est grand plus il est compliqué déformer le ressort.

🔑 II.4.f Force de frottement

On a 2 types de frottements

Frottements fluides linéaires :

On a $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ qui s'opposent à la vitesse

Il existe aussi les frottements quadratiques, pour des vitesses plus élevées modélisés par $\vec{F}_f = -\beta\vec{v}^2$

🔑 II.5 Interactions à connaître

🔑 II.5.a Interaction gravitationnelle

On considère 2 points massifs

Force d'interaction gravitationnelle :

On a $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{u}$ avec $\mathcal{G} = 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ la constante de pesanteur

🔑 II.5.b Interaction coulombienne

On considère 2 particules chargées

Force d'interaction coulombienne :

On a $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}$ avec $\epsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide

🔑 III Énergétique du point

🔑 III.1 Travail et puissance d'une force

Travail élémentaire :

Soit M un point matériel se déplaçant de $d\vec{OM}$ en dt , on a $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$

Si $\delta W > 0$, on dit que \vec{F} est **motrice**, si $\delta W < 0$, on dit que \vec{F} est **résistante** et si $\delta W = 0$, \vec{F} ne **travaille pas**.

Si A est un état initial et B un état final on a $W_{A \rightarrow B} = \int_{\text{chemin}} \delta W$

On note que si \vec{F} est constante on a $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$

On a pour le poids $W_p = -mgh$

Preuve :

On a $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = (-mg\vec{e}_z) \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = -mgdz$

D'où $W = \int_a^b \delta W = -mg(z_b - z_a)$

Puissance d'une force :

On a la puissance d'une force, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ d'où $\delta W = P dt$

Preuve :

On a $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} dt = P dt$

🔑 III.2 Théorème de l'énergie cinétique

Énergie cinétique :

On a l'énergie cinétique, $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$

Théorème énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen on a :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext}}}$$

Théorème puissance cinétique :

On a

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum P_{\text{ext}}$$

Preuve :

Par PFD on a $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ d'où $m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}$, ainsi on a $\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} = \sum P_{\text{ext}}$ donc on a $d(\frac{1}{2}mv^2) = \sum P_{\text{ext}} dt$ donc en intégrant $\Delta \mathcal{E}_c = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext}}}$

🔑 III.3 Force conservative, énergie potentielle

Une force est dit **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin parcouru

On a \mathcal{E}_p l'**énergie potentielle**, et est définie à une constante près.

Énergies potentielles à connaître :

Une force conservative admet une énergie potentielle :

- Pour le poids, $\mathcal{E}_{pp} = mgh$ (appelée **énergie potentielle de pesanteur**), avec un — devant si \vec{e}_z est descendant
- Pour le rappel élastique, $\mathcal{E}_p = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$
- Pour la gravitation, $\mathcal{E}_p = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{d}$
- Pour la force coulombienne, $\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$

Preuve :

On a $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = (k(l - l_0)\vec{u}) \cdot d\vec{OM}$

D'où $\vec{u} \cdot (d\vec{OM}_r + d\vec{OM}_t) = \vec{u} \cdot \vec{u} dl = dl$

Donc on a $\delta W = -k(l - l_0) dl = -d(\frac{k}{2}(l - l_0)^2)$ d'où $\mathcal{E}_p = \frac{k}{2}(l - l_0)^2$

Les forces de frottement ne sont pas conservatives.

Relation $d\mathcal{E}_p/\delta W$:

On a $\delta W = -d\mathcal{E}_p$

Un système est dit **conservatif** si toutes les forces sont conservatives

Relation \mathcal{E}_p/\vec{F} :

On a $\vec{F} = \frac{d\mathcal{E}_p}{d\vec{OM}} \vec{OM}$

III.4 Théorème de l'énergie mécanique

Énergie mécanique :

On a l'énergie mécanique, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$

Théorème énergie mécanique :

Dans un référentiel galiléen on a :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext non conservatives}}}$$

avec \vec{F} les forces non conservatives

Preuve :

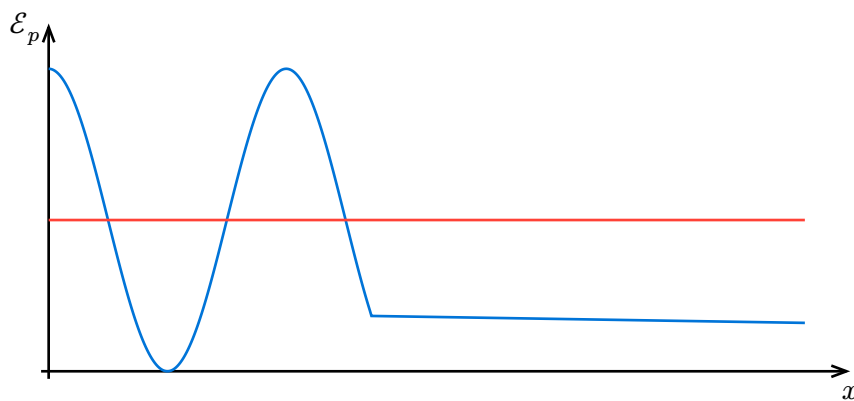
On a $\Delta \mathcal{E}_c = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext}}} = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext non conservatives}}} + \sum W_{\vec{F}_{\text{ext conservatives}}}$

Or $W_{\vec{F}_{\text{ext conservative}}} = \int \delta W = \int -d\mathcal{E}_p = -\Delta \mathcal{E}_p$

D'où $\Delta \mathcal{E}_c = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext non conservatives}}} - \Delta \mathcal{E}_p$ donc on a bien $\Delta \mathcal{E}_m = \sum W_{\vec{F}_{\text{ext non conservatives}}}$

III.5 Graphe d'énergie potentielle

On se place dans des systèmes qui évoluent en 1D, on peut tracer la courbe suivante :



Un **point de rebroussement** est un point tel que $\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_m$, ainsi $\mathcal{E}_c = 0$ d'où $v = 0$, et elle change de signe

Les zones au dessus de la ligne rouge (\mathcal{E}_m) sont dites **innaccessibles** car $\mathcal{E}_p > \mathcal{E}_m$ d'où $\mathcal{E}_c < 0$ ce qui est impossible.

On a un **puits de potentiel** si on est coincé entre 2 points de rebroussement, ainsi on est dans un **état lié** et x ne tend pas vers ∞

Si on a un seul point de rebroussement, on est en **état libre** et x tend vers ∞

On dit que x_e est une **position d'équilibre** si $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_e) = 0$ et elle est **stable** si après une petite perturbation une force tend à la ramener à sa position d'équilibre (ou que la courbe est concave)

On a un **potentiel attractif** si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} > 0$ et **répulsif** si $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} < 0$

🔑 IV Loi du moment cinématique

🔑 IV.1 Approche vectorielle

Moment cinétique :

Soit un point matériel de masse m avec une vitesse \vec{v} en M , on a le **moment cinétique** :

$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge m\vec{v}$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire, on a $\vec{L}_A = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$

Preuve :

On a $\vec{AM} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Ainsi on a $\vec{L}_A = r\vec{e}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$

Le moment cinétique est extensif et additif, de plus $[\vec{L}_A] = \text{m}^2 \text{kg s}^{-1}$

On a ainsi $\vec{L}_A \perp \vec{AM}$ et $\vec{L}_A \perp \vec{v}$ d'où $\vec{L}_A = 0$ si \vec{AM} et \vec{v} sont colinéaires.

Moment d'une force :

Le **moment d'une force** \vec{F} en C sur A est :

$$\vec{M}_A = \vec{AC} \wedge \vec{F}$$

Le moment d'une force modélise la capacité de \vec{F} à mettre en rotation autour de A , et on a $[A] = \text{N m}$

Théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel galiléen avec A **fixe** dans le référentiel d'étude, on a $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_{\text{ext}})$

Preuve :

On a $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{OM} \wedge m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Donc $\frac{d\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$ et $\vec{OM} \wedge \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

D'où $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$

🔑 IV.2 Approche scalaire

Notons $A_u = (A, \vec{u})$ un axe orienté avec \vec{u} un vecteur unitaire.

Moment cinétique par rapport à A_u :

On a le **moment cinétique par rapport à A_u** :

$$L_{A_u} = \vec{L}_A \cdot \vec{u}$$

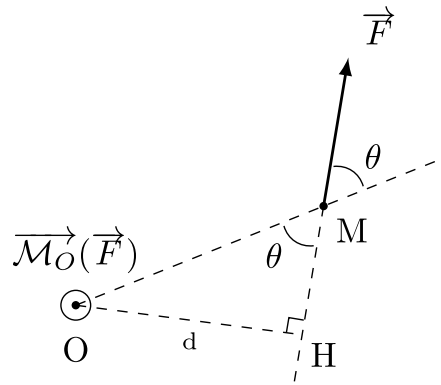
Moment d'une force par rapport à A_u :

On a le **moment d'une force par rapport à A_u :**

$$M_{A_u} = \overrightarrow{M_A} \cdot \vec{u}$$

Ainsi $M_{A_u}(\vec{F})$ ne dépend que de la composante de \vec{F} dans le plan perpendiculaire à A_u , d'où la distance d sur le schéma.

On appelle **bras de levier** la distance entre A et la droite d'action de \vec{F}



Moment de force par bras de levier :

On a $M_{A_u}(\vec{F}) = \pm \|\vec{F}\| \times \text{bras de levier}$, avec un $+$ si la force entraîne une rotation dans le sens, et un $-$ sinon.

Ainsi si la droite d'action passe par A , le bras de levier est nul donc il n'y a pas de mouvement.

Théorème du moment cinétique du moment scalaire :

Dans un référentiel galiléen avec A_u **fixe** dans le référentiel d'étude, on a

$$\frac{dL_{A_u}}{dt} = \sum M_{A_u}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Preuve :

Immédiat par produit scalaire

V Mouvement dans un champ de force newtonien

Une **force centrale** est une force qui pointe vers/depuis un point fixe du référentiel d'étude.

V.1 Statuer sur le caractère central

On considère un astéroïde (a) de masse m et un astre (A) de masse M , par principe des actions réciproques, on a $\|\vec{F}_{a \rightarrow A}\| = \|\vec{F}_{A \rightarrow a}\|$

Pour savoir qui impose une force centrale sur qui, on regarde le rapport $\frac{m}{M}$

On parle de **force newtonienne** si $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r$, et ces forces dérivent d'un potentiel

🔑 V.2 Propriétés de mouvement dans un champ de force centrale

Conservation de $\vec{L}_0(M)$:

Dans le cas des forces centrales, $\vec{L}_0(M)$ se conserve.

Preuve :

En effet, on a d'après le TMC, $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_O \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$.

Or \vec{OM} et \vec{F} sont colinéaires d'où $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$ donc \vec{L}_0 se conserve

Une première conséquence de ce résultat est que M évolue dans le plan orthogonal à \vec{L}_0

Preuve :

On a $P \perp \vec{L}_0$ et $O \in P$ ainsi on a $\vec{L}_0(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$

On a $\vec{OM} \perp \vec{L}_0$ d'où $M \in P$

Une autre conséquence est la **loi des aires**, l'aire balayée pendant \vec{OM} est proportionnelle à Δt

Preuve :

On a $\frac{dA}{dt}$ l'aire balayée par unité de temps avec une vitesse oréolaire.

On a $\vec{M}(t)\vec{M}(t+dt) = d\vec{OM} = \frac{d\vec{OM}}{dt} dt = \vec{v} dt$

On a $A = \|\vec{OM} \wedge \vec{v} dt\|$ d'où $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{L}_0(M)\|}{m}$ donc c'est constant

Constante des aires :

Pour réduire la dimension du problème on pose $\mathcal{C} = \frac{L_{Oz}}{m} = r^2\dot{\theta}$ la **constante des aires**.

Le satellite ne change pas de sens de rotation

Preuve :

En effet on a $\vec{L}_0(M) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$, avec $r^2 > 0, m > 0$ d'où $\dot{\theta} > 0$

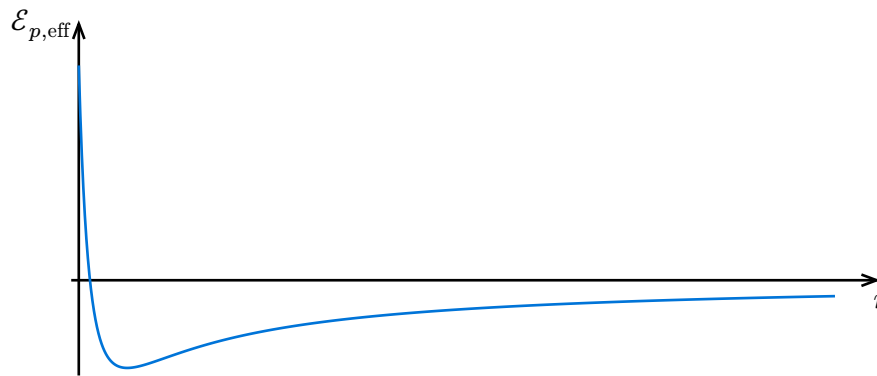
🔑 V.3 Approche énergétique, cas d'une force conservatrice

On a $\mathcal{C} > 0$ et $\dot{\theta} > 0$, de plus le système est conservatif d'où la conservation de \mathcal{E}_m

On a $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}$ avec $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}$

On constate l'apparition d'un nouveau terme pour l'énergie potentielle : on appelle $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{C}^2}{r^2}$ l'**énergie potentielle effective**

D'où on a :



Ainsi selon le rayon du satellite on a une trajectoire libre ou liée.

Le graphe d' $\mathcal{E}_{p,eff}$ passe par un minimum pour $r = r_0$, dans ce cas la trajectoire est **circulaire**.

Si $\mathcal{E}_m > 0$, la trajectoire est une hyperbole, si $\mathcal{E}_m = 0$, la trajectoire est une parabole, et si $\mathcal{E}_m < 0$, la trajectoire est une ellipse.

Lorsque l'astéroïde est au plus proche de l'astre (ou au plus loin) on a $\dot{r} = 0$

On parle de **périastre** quand il est au plus proche de l'astre, **périhélie** quand il est au plus près du Soleil, et **périgée** quand il est plus proche de la Terre

De même on parle de **apoastre** quand il est au plus loin de l'astre, **aphélie** quand il est au plus loin du Soleil, et **apogée** quand il est plus loin de la Terre

🔑 V.4 Lois de Kepler

3 lois de Kepler :

Kepler a énoncé les trois lois suivantes :

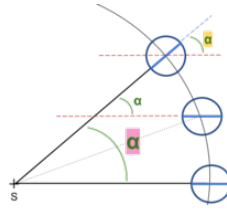
1. Les planètes du **système solaire** décrivent des **orbites elliptiques** dont le soleil occupe l'un des foyers
2. **Loi des aires** (voir plus tôt)
3. **Loi des périodes**, le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est indépendant de la planète considérée dans le système solaire, avec a le demi-axe de l'ellipse, et dans le cas du système solaire, $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$

✎ A faire (Savoir retrouver $\frac{T^2}{a^3}$, vitesse et Em + vitesse orbite basse et vitesse+ de libération)

🔑 V.5 Jour solaire vs jour sidéral

Un **jour solaire** est un intervalle de temps entre 2 passage au zénith du Soleil, on a $T_s = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$

Un **jour sidéral** est la durée pour que la Terre fasse un tour complet dans le référentiel géocentrique, on a $T_{\text{sidéral}} = 86\,164 \text{ s} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$



On a $\alpha = \frac{2\pi}{365.25 \text{ jours}}$

🔑 V.6 Satellites géostationnaires

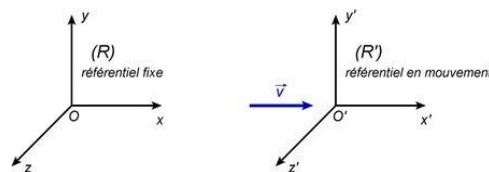
Un satellite est dit **géostationnaire** si il pointe toujours vers le même point de la Terre.

Un satellite géostationnaire est à une altitude de $h = 35786 \text{ km}$, a une période de révolution de $T_{\text{sidéral}} = 86\,164 \text{ s}$ et a une trajectoire circulaire dans le plan équatorial.

🔑 VI Mécanique du solide

🔑 VI.1 Généralités

Le **référentiel propre** (\mathcal{R}_p) est le référentiel dans lequel le solide est immobile



Ainsi on a 2 repères : le référentiel d'étude (\mathcal{R}) et le référentiel lié (ou propre)

Le repère propre n'est à priori pas galiléen

🔑 VI.2 Mouvements de translation

🔑 VI.2.a Aspect cinématique

Solide en translation :

Un solide est dit en translation dans \mathcal{R} si les axes du repère lié sont d'orientation fixe dans \mathcal{R}

Une conséquence est que \vec{u}_{e_x} et \vec{u}_{e_y} n'ont pas de dépendance temporelle, et qu'on n'a pas besoin d'angle pour décrire le mouvement : la dynamique du point s'applique

Rapport $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

Pour tout $M_1, M_2 \in \Sigma^2$, le rapport $\overrightarrow{M_1 M_2}$ est constant

Preuve :

Notons $\overrightarrow{M_1 M_2} = x\vec{u}_{e_x} + y\vec{u}_{e_y} + z\vec{u}_{e_z}$

Vitesse dans \mathcal{R} :

Tous les points du solide ont la même vitesse dans \mathcal{R}

Preuve :

On $\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = 0$ d'après la conséquence précédente, d'où $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = -\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ avec O l'origine du référentiel d'étude

Et $\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt} = -\frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ d'où $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

VI.2.b Grandeurs cinétiques

Barycentre :

On a G le **barycentre** du solide tel que :

$$m_{\text{tot}} \overrightarrow{OG} = \iiint_{M \in \text{solide}} \overrightarrow{OM} dm$$

Grandeurs cinétiques :

On a dans le cas d'un solide en translation :

- $\vec{p} = m_{\text{tot}} \vec{v}$
- $\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m_{\text{tot}} \vec{v}$
- $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v^2$

Preuve :

Ces démonstrations sont non exigibles, on les rappelle car elles permettent de se remémorer les formules

- On a $\vec{p} = \iiint d\vec{p}(M) = \iiint dm \vec{v}(M) \underset{\vec{v}_{\text{cst}}}{=} \vec{v} \iiint dm = m_{\text{tot}} \vec{v}$
- On a $\vec{L}_O = \iiint d\vec{L}_O(M) = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge dm \vec{v}(M) \underset{\vec{v}_{\text{cst}}}{=} \left[\iiint \overrightarrow{OM} dm \right] \wedge \vec{v} \underset{\text{barycentre}}{=} \overrightarrow{OG} \wedge m_{\text{tot}} \vec{v}$
- On a $\mathcal{E}_c = \iiint d\mathcal{E}_c(M) = \frac{1}{2} v^2 \iiint dm = \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v^2$

VI.2.c Loi de la quantité de mouvement

Une loi importante n'est pas mise en défaut par un solide en translation

Loi de la quantité de mouvement :

Dans un référentiel galiléen, pour un solide soumis à des forces extérieures à m fixée on a

$\frac{d\vec{p}_{\text{ext}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ d'où :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

VI.3 Mouvement de rotation par rapport à un axe fixe

VI.3.a Aspect cinématique

Solide en rotation par rapport à un axe fixe :

Un solide est dit en rotation par rapport à un axe fixe si il existe un axe (Δ) fixe dans le référentiel d'étude et le référentiel propre

Distribution des vitesses :

Dans un solide en rotation la vitesse varie linéairement avec la distance au projeté de l'axe de rotation

Preuve :

On repère le point M en coordonnées cylindriques, avec ω sa vitesse de rotation, et H son projeté sur l'axe.

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = z\vec{e}_z + r\vec{e}_r$ (\overrightarrow{OH} étant sur \vec{e}_z et \overrightarrow{HM} sur \vec{e}_r à une distance r fixée) et $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{z}\vec{e}_z + \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

D'où $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est appelé **vecteur rotation instantané** du solide.



Attention :

La loi de quantité de mouvement n'a plus de sens ici, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \nRightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

Il ne faut aussi pas confondre mouvement circulaire, rotation et translation circulaire

Dans l'exemple d'une grande roue, les cabines sont en **translation circulaire**, tandis que la roue est en **rotation** autour d'une axe fixe

🔑 VI.3.b Moment d'inertie

Moment cinétique d'un solide en rotation :

Soit Δ un axe fixe orienté par \vec{e}_z , on a le **moment cinétique** $L_\Delta = J_\Delta\omega$ avec J_Δ le **moment d'inertie**

Moment d'inertie :

Soit Δ un axe fixe orienté par \vec{e}_z , on a le **moment d'inertie** $J_\Delta = \iiint r^2 dm$ en $\text{m}^2 \text{kg}$

Le moment d'inertie est additif et **quantifie l'inertie à la mise en rotation**

On a les moments d'inertie suivants :

Forme	J_Δ
Tige	$\frac{1}{3}mr^2$
Cerceau	mr^2
Disque homogène (HP)	$\frac{1}{2}mr^2$
Boule homogène (HP)	$\frac{2}{5}mr^2$
Coquille (HP)	$\frac{2}{3}mr^2$

Preuve :

On note μ la **masse linéique**, on a $J_\Delta = \int_0^r r^2 \mu dr = \mu \int_0^r r^2 dr = \mu \frac{r^3}{3}$

Or dans le cas d'une tige **homogène** on a $\mu = \frac{m}{r}$ d'où $J_\Delta = m \frac{r^2}{3}$

Énergie cinétique :

Dans le cas d'un solide en rotation, on a $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$

Preuve :

$$\text{On a } d\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} dm v^2(M) = \frac{1}{2} dm r^2 \omega^2$$

$$\text{D'où } \mathcal{E}_c = \iiint d\mathcal{E}_c = \iiint \frac{1}{2} dm r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} (\iiint dm r^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

VI.3.c Actions mécanique et condition d'équilibre

Une **action mécanique** est une contrainte appliquée par un système, c'est à dire les forces, les moments de force et les couples

Couple :

Un couple est constitué de deux forces de même module, de sens opposé et de droites d'action non confondues

Un couple ne modifie pas la quantité de mouvement

Preuve :

$$\text{On a } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Moment d'un couple :

Un couple crée un moment noté $\vec{\Gamma}$ avec $\vec{\Gamma} = \pm F d \vec{e}_z$ avec d la distance entre les droites d'action

Preuve :

$$\text{On a } \vec{M}_{O_{\text{tot}}} = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{OP}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OP}_2 \wedge -\vec{F}_1 = (\vec{OP}_1 - \vec{OP}_2) \wedge \vec{F}_1 = \vec{P}_2\vec{P}_1 \wedge \vec{F}_1$$

A noter que $\vec{\Gamma}$ est aussi appelé couple et s'exprime en N m

Condition d'équilibre d'un solide :

Le solide est à l'équilibre si $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$ (translation solide) et $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) = 0$ (rotation)

VI.3.d Théorème du moment cinétique pour un solide

Théorème du moment cinétique pour un solide :

Soit Δ un axe fixe, ainsi on a avec \vec{F}_{ext} les forces extérieures connues et $\vec{\Gamma}_{\text{ext}}$ les couples qui ne sont pas des moments des forces extérieures :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) + \sum \Gamma_{\text{ext}}$$

Preuve :

Par le TMC on a $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}})$ avec $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \frac{dJ_{\Delta}\dot{\theta}}{dt} = J_{\Delta}\ddot{\theta}$ ce qui conclut en séparant les termes selon leur connaissance ou non

🔑 VI.4 Énergétique du solide

Dans un solide indéformable il n'y a pas de travail interne



Attention :

Cette affirmation entre en défaut lorsque l'on travaille avec un solide articulé

Théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation :

On a $P = M_{\Delta}(\vec{F}) \times \omega$ d'où on a :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum P_{\text{ext}} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) \dot{\theta}$$

Preuve :

On part du TMC solide, on a $\frac{dJ_{\Delta}\dot{\theta}}{dt} = \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}})$ d'où en multipliant par $\dot{\theta}$, on a $\frac{d\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}^2}{dt} = \sum P_{\text{ext}}$

Il est toujours possible d'utiliser les théorèmes d'énergétique de la dynamique du point mais il faut faire attention au domaine d'application

Thermodynamique

I Introduction à la thermodynamique

I.1 Généralités

On parle de **système thermodynamique** pour une portion de matière ou un ensemble de portions de matière séparées du reste de l'univers par une frontière réelle ou imaginaire qui est constitué d'un trop grand nombre de particules pour être étudié individuellement.

Échelle macroscopique : On observe la matière à notre échelle, à cette échelle la matière est continue

Échelle microscopique : On observe la matière à l'échelle des particules, à cette échelle la matière est discrète (donc discontinue)

Échelle mésoscopique : On observe la matière à l'échelle intermédiaire, à cette échelle la matière apparaît continue

On a $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ la constante d'Avogadro

Les 3 états de la matière :

- **Solide** : Particules assez ordonnées, proches et peu mobiles (incompressible et indéformable)
- **Liquide** : Particules très désordonnées, proches et très mobiles (incompressible et déformable)
- **Gaz** : Particules très désordonnées, éloignées et très mobiles (compressible et déformable)

On parle d'un **fluide** pour un gaz ou un liquide et d'une **phase condensée** pour un liquide ou un solide.

I.2 Variables d'état

Une **variable d'état** est une grandeur permettant de décrire l'équilibre thermodynamique d'un système.

Une grandeur est dite **extensive** si elle dépend de la taille du système (volume par ex) et **intensive** si ce n'est pas le cas (pression par ex), à noter que le produit de 2 grandeurs extensives donne une grandeur intensive.

Pour toute grandeur G extensive on peut définir la **grandeur molaire** $G_m = \frac{G}{n}$ avec n le nombre de moles et la **grandeur massique** $g = \frac{G}{m}$ avec m la masse.

I.2.a Pression

La **pression** est une variable d'état en Pascal (Pa) avec $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, est intensive et est causée par des chocs particuliers sur la paroi

Force de pression :

On a $\vec{F} = PS\vec{u}$ avec \vec{u} orienté vers l'extérieur de fluide dans le cas d'une paroi plane

Si on a une paroi non plane on a $\vec{F} = \int P dS \vec{u}$ avec $\vec{F} = PS\vec{u}$ si la pression est uniforme

💧 I.2.b Température

La température s'exprime en Kelvin (K), avec $T > 0 \text{ K}$ et $0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$, est intensive et provient d'une agitation moléculaire.

On a $\mathcal{E}_c = \frac{3}{2}k_B T$ l'énergie thermique moléculaire avec $k_B = \frac{R}{N_A}$ la constante de Boltzmann.

💧 I.3 Équilibre thermodynamique

On atteint un état d'équilibre thermodynamique quand les propriétés macroscopiques du système n'évoluent plus, ainsi on a :

- Équilibre mécanique avec l'extérieur
- Équilibre thermique
- Équilibre radiatif
- Équilibre chimique

A l'équilibre thermodynamique un système voit ses variables d'état liées par une relation d'état

💧 I.4 Modèle des gaz parfaits

Gaz parfait :

On parle d'un gaz parfait pour un gaz composé de particules ponctuelles sans interaction entre elles.

Équation des gaz parfaits :

On a à l'équilibre thermodynamique : $PV = nRT$ avec $R = 8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

Si quelqu'un voulait la démo de l'équation des gaz parfaits j'ai pas envie désolé :)

💧 II Premier principe

💧 II.1 Énergie interne, capacité thermique à volume constant

On note U l'**énergie interne** d'un système thermique, c'est une fonction d'état additive et extensive s'exprimant en Joule : c'est l'énergie microscopique du système.

La variation des fonctions d'état ne dépend que des états initial et final, et est indépendante du chemin parcouru.

1ère loi de Joule :

Dans le cas d'un gaz parfait, $U = AT$, ainsi elle ne dépend que de la température

Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique on a $U = \frac{3}{2}nRT$ et dans le cas d'un gaz parfait diatomique on a $U = \frac{5}{2}nRT$

A noter qu'il y a énormément d'énergie stockée de manière interne.

On définit la **capacité thermique** à volume fixé par $C_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$ et dans le cas d'un GP on a $C_v = \frac{dU}{dT}$, et est additive, extensif et s'exprime en J K^{-1}

Expression de ΔU :

$$\text{On a } \Delta U = \int_{T_i}^{T_f} C_v dT = C_v \Delta T$$

💧 II.2 Premier principe

Premier principe :

Dans un **système fermé** évoluant entre des états d'équilibre on a $\Delta(E_{m_{\text{macro}}} + U) = W + Q$ d'où dans la plupart des cas :

$$\Delta U = W + Q$$

Dans le cas infinitésimal on a $dU = \delta W + \delta Q$

Avec W le travail reçu par le système ($W > 0$ si récepteur et moteur sinon) et Q le transfert thermique ($Q > 0$ reçoit et fournit sinon).

On a 3 types de transfert thermiques :

- **Convection** : Transfert accompagné d'un déplacement macroscopique de matière et concerne donc les fluides
- **Conduction** : Transfert thermique qui intervient dans un milieu où la température n'est pas homogène, et qui ne s'accompagne pas de déplacement de matière : c'est celui qui prédomine dans les solides
- **Rayonnement** : Transfert thermique par rayonnement électromagnétique

Il faut bien penser à définir le système pour utiliser le premier principe

💧 II.3 Types de transformations

- **Adiabatique** : Sans transfert thermique ($Q = 0$)
- **Monobare** : Au contact d'un système qui fixe la pression
- **Monotherme** : Au contact d'un système de température fixée (un thermostat)
- **Quasi statiques** : État d'équilibre au cours de toute la transformation
- **Brutale** : Les variables d'état ne sont pas définies dans les moments intermédiaires mais seulement à l'état initial et final
- **Système Calorifugé** : Limite les échanges de chaleur
- **Isochore** : V constant
- **Isotherme** : T constant
- **Isobare** : P constant

💧 II.4 Travail des forces de pression

Travail des forces de pression :

$$\text{On a } \delta W = -P_{\text{ext}} dV \text{ donc } W = \int -P_{\text{ext}} dV$$

Preuve :

$$\text{On a } \vec{F}_p = -P_{\text{ext}} S \vec{e}_x \text{ d'où on a } \delta W = \vec{F}_p \cdot d\vec{x} = -P_{\text{ext}} S dx = -P_{\text{ext}} dV$$

II.4.a Cas isochore

On a $dV = 0$ d'où $W = 0$

II.4.b Cas isotherme

On a $\Delta U = 0$ d'où $W = -Q$

II.4.c Mécanique réversible

On a $P_{\text{ext}} = P$ car on a toujours un état d'équilibre, d'où :

- Isobare : On a $W = -P\Delta V$
- Isotherme : On a $W = -nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

Preuve :

En effet $W = \int -P_{\text{ext}} dV = \int -P dV = \int -nRT \frac{dV}{V} = -nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

II.5 Diagramme de Watt

On peut représenter l'évolution sur un graphe (V, P) , ainsi le travail correspond à l'aire sous le chemin parcouru.

Si un cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, on a un récepteur et si il est parcouru dans le sens horaire on a un moteur

II.6 Enthalpie

On a l'**enthalpie** une fonction d'état additive et extensive telle que $H = U + PV$

2e loi de Joule :

Dans le cas d'un gaz parfait, $H = A \times T$ avec A une constante

Ainsi on a le premier principe monobare :

Premier principe monobare :

Dans un système fermé évoluant entre des états d'équilibre avec une transformation monobare on a $\Delta(E_{m_{\text{macro}}} + H) = W_u + Q$ d'où dans la plupart des cas :

$$\Delta H = W_u + Q$$

Preuve :

On a $\Delta(E_{m_{\text{macro}}} + U) = W_u + W_{\text{pression}} + Q$ or $W_{\text{pression}} = -\Delta(PV) = 0$, ainsi on a la propriété recherchée

Avec W_u la puissance utile des autres forces que celles de pression (souvent nulles d'où $\Delta H = Q$ dans certains cas)

On définit la capacité thermique à pression fixée par $C_p = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P$ et $C_p = \frac{dH}{dT}$ dans le cas d'un gaz parfait.

Expression de ΔH :

On a $\Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_p dT = C_p \Delta T$

Dans le cas des phases condensées on a $PV \ll U$ d'où $U = H$ ainsi $C_p = C_v = C$

Relation de Mayer :

Dans le cas d'un gaz parfait on a $C_p = C_v + nR$

Preuve :

On a $\Delta U + \Delta(PV) = C_v \Delta T + nR \Delta T$ d'où $C_p \Delta T = C_v \Delta T + nR \Delta T$ ce qui conclut

On pose $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

Expression de C_v et C_p :

Dans le cas d'un gaz parfait on a $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$

Preuve :

On a $C_p = \gamma C_v = C_v + nR$ d'où $C_v(\gamma - 1) = nR$ ainsi $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$

III Second principe

III.1 Entropie et second principe

On considère un système fermé avec un ou plusieurs thermostats, ainsi il **existe** une fonction d'état appelée **entropie** notée S , additive et extensive en J K^{-1} qui est une mesure du désordre.

Second principe :

Dans un tel système, on a $\Delta S = S_{\text{créée}} + S_{\text{échangée}}$ avec $S_c \geq 0$

Dans le cas infinitésimal on a donc $dS = \delta S_c + \delta S_e$ et à l'équilibre on a $\delta S_c = \delta S_e = 0$

Expression de S_e :

On a $S_e = \sum_{\text{thermostats}} \frac{Q_i}{T_i}$

L'entropie d'un système isolé augmente nécessairement au cours d'une transformation thermodynamique

Preuve :

Isolé implique $\delta Q_i = 0$ d'où $S_e = 0$ ainsi $\Delta S = S_c \geq 0$

Une transformation adiabatique réversible ne modifie pas l'entropie

Preuve :

On a $\Delta S = \sum_{\text{thermostats}} \frac{Q_i}{T_i} + S_c$ car $Q_i = 0$ (adiabatique) et $S_c = 0$ pour ne pas contredire le caractère réversible

III.2 Irréversibilité d'une transformation thermodynamique

Une transformation est dite **irréversible** si elle n'a lieu que dans un sens.

Une transformation est **réversible** si on peut en inverser le sens par changement infinitésimal des contraintes extérieures. Ces transformations extérieures sont lentes (quasi statiques) et $S_e = 0$

On a irréversibilité si :

- Inhomogénéité de température
- Gradient de pression
- Réaction chimique
- Frottement

💧 III.3 Identité thermodynamique (HP)

Identité thermodynamique (HP) :

Dans un système fermé avec uniquement des forces de pression on a $dU = TdS - PdV$

Preuve :

On a $dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - P_{\text{ext}}dV \underset{(\text{rév})}{=} \delta Q - PdV$ et $dS = \cancel{\delta S_{c(\text{rév})}} + \delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{\text{th}}}$ avec $T_{\text{th}} = T$ car réversible. D'où $\delta Q = TdS$ ainsi $dU = TdS - PdV$

💧 III.4 Entropie des gaz parfaits, lois de Laplace

Variation d'entropie :

On a :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\Delta S = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

Lois de Laplace :

Dans le cas d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait on a :

- $PV^\gamma = \text{cst}$
- $TV^{\gamma-1} = \text{cst}$
- $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cst}$

Preuve :

On retient la première et on retrouve avec $PV = nRT$

Ainsi sur un diagramme de Watt, le courbe est plus marquée pour une transformation adiabatique

III.5 Entropie des phases condensées

Entropie des phases condensées :

On a $S(T) = S(T_0) + C \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$ d'où $\Delta S = C \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$

IV Flux thermiques

IV.1 Flux thermique, puissance

Flux thermique :

Un flux est un échange de chaleur par unité de temps algébrique, on a $\Phi = \frac{\delta Q}{dt}$, et on peut définir $\Phi_{\text{surf}} = \frac{\delta Q}{dt dS}$

On a Φ en W et Φ_{surf} en $W m^{-2}$

IV.2 Échanges conductifs

Flux conductif :

Dans le cas d'un échange convectif (c'est à dire via une paroi) entre 2 systèmes, on a $\Phi = \frac{1}{R} \Delta T$ avec R la résistance thermique

Résistance thermique :

Une résistance thermique est homogène à $K W^{-1}$, et on a $R = \frac{e}{S\lambda}$ avec e l'épaisseur, S la surface et λ la conductivité thermique

La conductivité thermique s'exprime en $W m^{-1} K^{-1}$, plus la conductivité est grande moins on isole.

On a $G = \frac{1}{R}$ la conductance.

Les résistances thermiques ont le même comportement qu'en électricité, ainsi en série on a $R_{AB} = R_A + R_B$ et en parallèle $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$.

Preuve :

- Série : On a $\Phi = \Phi_A = \Phi_B$ avec $\Phi_A = \frac{T_A - T_*}{R_A}$ et $\Phi_B = \frac{T_* - T_B}{R_B}$
Ainsi on a $T_A - T_B = T_A - T_* + T_* - T_B = R_A \Phi_A + R_B \Phi_B = (R_A + R_B) \Phi$
- Parallèle : On a $\Phi_A = \frac{1}{R_A} \Delta T$ et $\Phi_B = \frac{1}{R_B} \Delta T$, et $\Phi = \Phi_A + \Phi_B = \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) \Delta T$

IV.3 Échanges conductoconvectifs

On considère un fluide et un solide et leurs échanges thermiques

Loi thermique de Newton :

On a $\Phi_{\text{surf}} = h(T_{\text{surf}} - T_{\text{ext}})$ avec h le coefficient de transfert en $W m^{-2} K^{-1}$, h étant plus grand pour un liquide que pour un gaz.

De manière analogue on peut définir $\frac{1}{R} = Sh$

IV.4 Analogie électrique

On a l'analogie suivante :

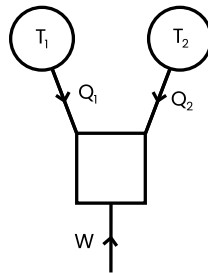
Thermodynamique	Électricité
ΔT	U ou ΔV
Φ	I
$\Delta T = R\Phi$	$U = RI$

Ainsi on peut représenter des problèmes thermodynamiques avec des circuits électriques

V Machines thermiques

V.1 Description générale d'une machine thermique cyclique

On parle d'un système **cyclique** si il décrit un cycle



On représente ainsi une machine cyclique, avec T_1, \dots, T_n les thermostats. Le système est en convention récepteur sur le schéma.

Inégalité de Carnot :

Pour un système au contact de plusieurs thermostats, on a $\sum_{\text{thermostats}} \frac{Q_i^{\text{cycle}}}{T_i} \leq 0$, et si il est réversible $\sum_{\text{thermostats}} \frac{Q_i^{\text{cycle}}}{T_i} = 0$

Preuve :

On a $\Delta S = S_c^{\text{cycle}} + S_e^{\text{cycle}} = 0$ (car S est une fonction d'état) d'où $\sum_{\text{thermostats}} \frac{Q_i^{\text{cycle}}}{T_i} = -S_c \leq 0$

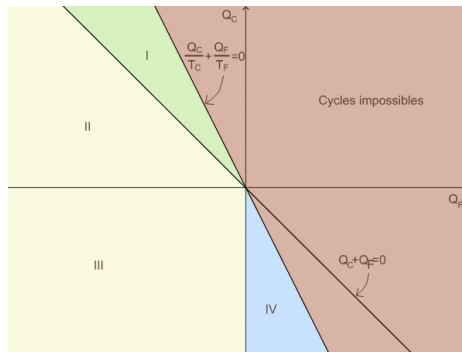
V.2 Les moteurs

Second principe selon Thomson :

Un système au contact avec une seule source de chaleur, ne peut au cours d'un cycle que recevoir du travail et fournir de la chaleur

Preuve :

On a moteur d'où $W < 0$, avec l'inégalité de Carnot on a $\frac{Q}{T} \leq 0$ et le premier principe nous dit que $0 = Q + W$ d'où $W = -Q \geq 0$ ce qui est contradictoire



Pour étudier un moteur on peut utiliser le diagramme de Raveau avec les zones suivantes :

- I : Fonctionnement moteur, $Q_c \geq 0$ et $Q_f \leq 0$ car on prélève de l'énergie à la source chaude
- II/III : Sans intérêt
- IV : Fonctionnement récepteur, $Q_f \geq 0$ et $Q_c \leq 0$ car on prélève de l'énergie à la source froide

💧 V.3 Rendement, efficacité

Rendement ou efficacité :

On définit le rendement dans le cas d'un moteur et l'efficacité dans le cas d'un récepteur de la manière suivante :

$$\eta = \frac{\text{énergie valorisable}}{\text{énergie couteuse}}$$

Ainsi on a le tableau suivant :

Type de machine	Transferts thermiques	Rendement/Efficacité
Moteur	$Q_c > 0$ et $Q_f < 0$	$\eta = -\frac{W}{Q_c}$
Réfrigérateur	$Q_c < 0$ et $Q_f > 0$	$e = \frac{Q_f}{W}$
Pompe à chaleur	$Q_c < 0$ et $Q_f > 0$	$e = -\frac{Q_c}{W}$

Rendement de Carnot :

Pour un moteur ditherme son rendement maximal est :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} \text{ avec } \eta \leq \eta_c$$

Preuve :

On a $Q_F + Q_C + W = 0$, $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$ et $\eta = -\frac{W}{Q_C}$

D'où $\eta = \frac{Q_C + Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$ or $Q_F \leq -Q_C \frac{T_F}{T_C}$ d'où $\eta \leq 1 - \frac{T_F}{T_C}$

Efficacité de Carnot (réfrigérateur) :

Pour un réfrigérateur son efficacité maximale est :

$$e_c = \frac{T_F}{T_C - T_F} \text{ avec } \eta \leq \eta_c$$

Preuve :

$$\text{On a } Q_F + Q_C + W = 0, \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0 \text{ et } \eta = \frac{Q_F}{W}$$

$$\text{D'où } \eta = -\frac{Q_F}{Q_C + Q_F} \text{ avec } Q_F \geq -Q_C \frac{T_F}{T_C} \text{ d'où } \eta \leq \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

Dans les faits, $3 \leq e \leq 4$

Efficacité de Carnot (pompe à chaleur) :

Pour une pompe à chaleur son efficacité maximale est :

$$e_c = \frac{T_C}{T_C - T_F} \text{ avec } \eta \leq \eta_c$$

Preuve :

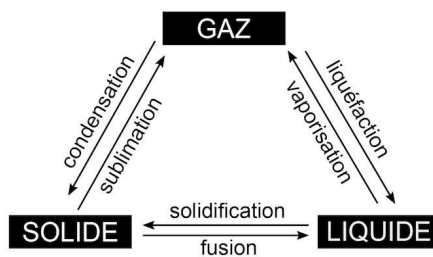
$$\text{On a } Q_F + Q_C + W = 0, \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0 \text{ et } \eta = -\frac{Q_C}{W}$$

$$\text{D'où } \eta = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} \text{ avec } Q_F \geq -Q_C \frac{T_F}{T_C} \text{ d'où } \eta \leq \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

Dans les faits, $2 \leq e \leq 5$

🔹 VI Changement de phase du corps pur

Une **phase** est une partie d'un système dont les variables intensives sont continues



🔹 VI.1 Échauffement isobare d'un corps pur

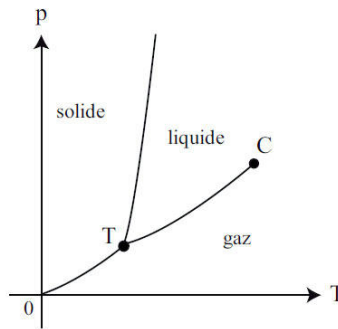
La **température d'ébullition** est la température d'équilibre liquide vapeur (ie les 2 coexistent)

La **température de fusion** est la température d'équilibre solide liquide (ie les 2 coexistent)

La **pression de vapeur saturante** est la pression d'équilibre liquide vapeur

Dans le cas des corps purs, on a $P_{\text{vap}} = f(T_{\text{ébul}})$

🔹 VI.2 Diagramme (P, T)



T représente le **point triple**, c'est à dire le point où on a équilibre vapeur solide liquide

C représente le **point critique**, c'est à dire au delà duquel il n'y a plus de différence entre état liquide et gazeux (on parle de **fluide supercritique**)

En regardant le diagramme on a des informations sur l'état du système considéré, et on peut se rendre compte que de l'eau se liquéfie sous l'effet de la compression

VI.3 Diagramme de Clapeyron (P, v), isotherme d'Andrews

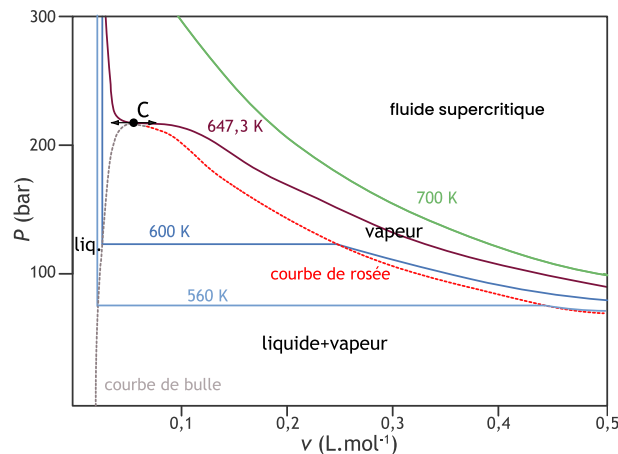


Figure 49: Un isotherme d'Andrews

On voit sur le diagramme qu'au dessus de C on ne passe pas par l'équilibre liquide vapeur. De plus on appelle la courbe noire l'**isotherme critique**.

Théorème des moments chimiques :

On peut retrouver x_{gaz} et x_{liq} les titres en vapeur et en liquide (ie les pourcentages en terme de quantité de matière).

$$\text{On a } x_{\text{gaz}} = \frac{n_{\text{gaz}}}{n_{\text{tot}}} = \frac{m_{\text{gaz}}}{m_{\text{tot}}} \text{ et } x_{\text{liq}} = \frac{n_{\text{liq}}}{n_{\text{tot}}} = \frac{m_{\text{liq}}}{m_{\text{tot}}}$$

De plus on a $x_{\text{gaz}} = \frac{v - v_{\text{liq}}}{v_{\text{gaz}} - v_{\text{liq}}}$ et $x_{\text{liq}} = \frac{v_{\text{gaz}} - v}{v_{\text{gaz}} - v_{\text{liq}}}$ d'où $x_{\text{gaz}} + x_{\text{liq}} = 1$ avec $v, v_{\text{gaz}}, v_{\text{liq}}$ les volumes massiques lus sur un isotherme d'Andrews

Preuve :

On a $V = V_g + V_l = m_{\text{tot}} v$ avec v le volume massique moyen, $V_g = m_g v_g$ et $V_l = m_l v_l$

D'où on a $x_l = \frac{m_l}{m_{\text{tot}}}$ ainsi on a $m_g v_g + m_l v_l = m_{\text{tot}} v$ d'où $v_l x_l m_{\text{tot}} + v_g (1 - x_l) m_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} v$

$$\text{d'où } x_l = \frac{v_{\text{gaz}} - v}{v_{\text{gaz}} - v_{\text{liq}}}$$

Dans le cas d'un diagramme (P, H) on a aussi $x_l = \frac{h_{\text{gaz}} - h}{h_{\text{gaz}} - h_{\text{liq}}}$

💧 VI.4 Enthalpie et entropie de changement d'état

Lors d'un changement d'état, l'enthalpie présente une discontinuité, ainsi on définit l'**enthalpie de changement d'état** (ou chaleur latente), de même il y a discontinuité de l'entropie.

Les enthalpies de changement d'état sont définies par la différence d'enthalpie entre les deux états à température fixée.

Variations d'enthalpie/d'entropie :

Soit $\Delta_A h$ l'enthalpie de changement d'état A et $\Delta_A s$ l'entropie de changement d'état A .

On a $\Delta_A H = m \Delta_A h$ et $\Delta_A S = \frac{\Delta_A H}{T_A}$ avec T_A la température de changement d'état.

De plus on a $\Delta_{\text{sub}} h > 0$, $\Delta_{\text{vap}} h > 0$ et $\Delta_{\text{fus}} h > 0$ et $\Delta_{\text{con}} h = -\Delta_{\text{sub}} h$, $\Delta_{\text{liq}} h = -\Delta_{\text{vap}} h$ et $\Delta_{\text{sol}} h = -\Delta_{\text{fus}} h$

D'après l'expression des variations, on en déduit que $S_{\text{gaz}} > S_{\text{liq}} > S_{\text{sol}}$ ce qui est logique d'après la définition de l'entropie

Magnétisme

I Introduction à la dynamique des particules chargées

I.1 Force de Lorentz

On considère des particules dans un champ magnétique et électrique

Force de Lorentz :

On a la **force de Lorentz**, $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la force subie par un électron

Dans l'étude d'un mouvement dans un champ électromagnétique, le poids et les forces de frottement sont négligées.

I.2 Origine électrique

Le champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée : elle peut agir à la fois sur la norme et la direction de la vitesse.

On note \vec{E} un **champ électrique** en V m^{-1} et une particule plongée dans un tel champ subit la composante électrique c'est à dire $\vec{F} = q\vec{E}$

Pour créer un champ homogène on utilise un condensateur, \vec{E} est homogène quand on n'est pas trop proche des bords (pas des bornes) du condensateur

Champ électrique créé par un condensateur :

Un condensateur crée un champ électrique $E = \frac{U}{d}$ avec U la tension et d la distance entre les électrodes

Le champ \vec{E} est orienté vers l'armature de plus faible potentiel

Le vecteur accélération d'une particule chargée dans un champ électrique est $\vec{a} = q\frac{\vec{E}}{m}$ et est donc constant : sa trajectoire est donc une portion de parabole ou une droite si sa vitesse initiale est nulle ou parallèle à \vec{E}

La force de Lorentz électrique dérive d'un potentiel

Énergie potentielle de Lorentz électrique :

On a $E_p = qV = q(-xE_x)$ en supposant que $\vec{E} = E_x\vec{e}_x$

Preuve :

On a $\vec{F} = q\vec{E} = q\frac{U}{d}\vec{e}_y = -\frac{du}{dy}(-q\frac{U}{d}y + C)\vec{e}_y$

Ainsi $E_p = -q\frac{U}{d}y + C$ d'où $V(y) = \frac{E_p}{q} = -\frac{U}{d}y + C'$

Pour déterminer C on peut placer une masse dans le circuit

L'**électron-volt** (eV) correspond à l'énergie d'un électron à un potentiel de 1 V, ainsi $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Dans un système conservatif on a $v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$ si $v \leq 0.1c$

Preuve :

On a $0 = \Delta\mathcal{E}_m = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p = \Delta\mathcal{E}_c + q(V_f - V_i)$ d'où $\Delta\mathcal{E}_c = q(V_i - V_f)$

En supposant $v_0 = 0$ et $V_i = 0$, on trouve $\frac{1}{2}mv_f^2 = qU$ d'où $v = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$

1.3 Origine magnétique


Un champ magnétique ne peut pas modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée, il agit uniquement sur la direction de la vitesse.

Un **champ magnétique** est un champ vectoriel noté \vec{B} en Tesla (T)

La composante magnétique de la force de Lorentz est $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Une particule de charge q à une vitesse initiale \vec{v}_0 perpendiculaire à \vec{B} décrit un cercle de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ à la vitesse angulaire $\omega = \frac{|q|B}{m}$, on parle de **pulsation cyclotron**

Preuve :

 A faire (Pas prioritaire mais à faire)

La puissance est nulle, en effet $P = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$, de plus la force ne travaille pas donc $\Delta\mathcal{E}_c = 0$

II Généralités sur le champ magnétique

II.1 Généralités

Le **champ magnétique** est un champ vectoriel $\vec{B}(M, t)$ s'exprimant en Tesla (T). On le mesure avec une sonde à effet Hall.

On a les ordres de grandeurs suivants :

- $B_{\text{Terre}} = 10^{-5} \text{ T} = 0.01 \text{ mT}$
- $B_{\text{aimant}} = (0.1 - 1) \text{ T}$
- $B_{\text{IRM}} = \text{qqs T}$
- $B_{\text{LABO}} = 10 \text{ T}$

Lignes de champ :

Les **lignes de champ** sont un tracé colinéaire en tout point au champ magnétique.

Leur principal intérêt est la lisibilité et que la distance entre les lignes de champ varie comme l'inverse de l'intensité du champ.

Le champ est nul en un point si les lignes de champ se croisent en ce point

Propriété HP : Les lignes de champ sont orthogonales aux lignes iso-champ.

Propriétés des lignes de champ :

- 2 lignes de champ ne se croisent pas, **sauf si le champ est nul localement**
- Dans le cas des lignes de champ magnétiques elles sont toujours bouclées sur elles-mêmes.

II.2 Dépendance courant électrique et lignes de champ

Champ magnétique créé par un circuit :

Un circuit parcouru par un courant constant (ou lentement variable) crée un champ magnétique constant (ou lentement variable) $\vec{B}(\text{pos}, I)$ proportionnel à I

Pour trouver le sens des lignes de champ on utilise la règle de la main droite : on oriente son pouce dans le sens du courant et les lignes de champ vont dans le sens de repliement des mains.

Un fil infiniment mince crée un champ magnétique $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \vec{e}_\theta$ avec I orienté vers $z > 0$ et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ la permittivité magnétique du vide.

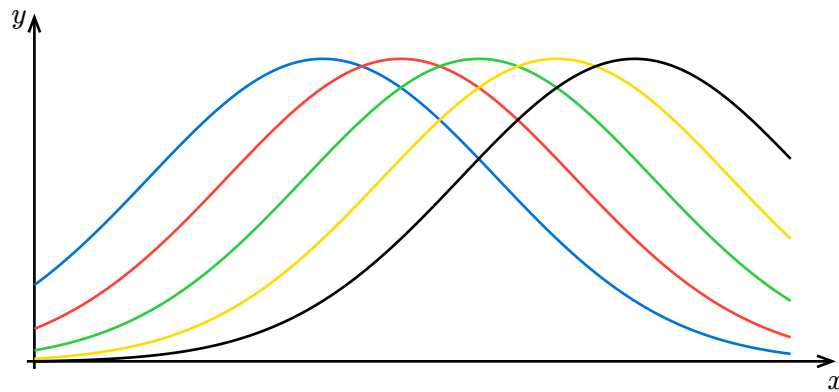
Un **spire** est un fil circulaire.

Théorème de superposition :

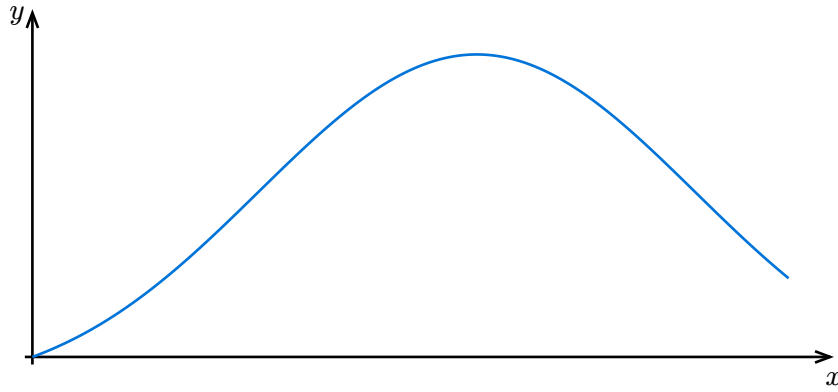
Dans un milieu linéaire, le champ magnétique total est la somme (la superposition) de chaque \vec{B}_i créé par chaque source de \vec{B} prise indépendamment. On a donc :

$$\vec{B} = \sum_{\text{sources}} \vec{B}_i$$

Dans le cas d'une série de spires, on a pour chaque spire la courbe suivante :



D'où pour \vec{B} on a :



On a donc le champ magnétique dans le solénoïde infini égal à $\vec{B} = \mu_0 n i$ avec n le nombre de spires par unité de longueur et i l'intensité

II.3 Champ magnétiques continus dans la nature

Dans la nature il est possible de trouver des champs magnétiques. Certains matériaux possèdent la propriété d'être aimantés ou magnétisables. C'est lié à une propriété magnétique des électrons, le *spin*.

La Terre en est un bon exemple, le noyau externe constitue un champ magnétique sous l'effet d'un mouvement convectif.

II.4 Moment magnétique, dipôle magnétique

Moment magnétique :

Dans le cas d'une spire parcourue par un courant I , on a :

$$\vec{\mu} = IS\vec{u} = I\vec{S}$$

avec S l'aire du disque, \vec{u} un vecteur unitaire ou \vec{S} le vecteur surface

On a $[\vec{\mu}] = \text{A m}^2$

Le moment magnétique quantifie à quel point l'aimant est "fort" : la norme du moment magnétique est proportionnelle à la force de l'aimant et la direction de $\vec{\mu}$ définit l'axe de révolution des lignes de champ.

Couple de Laplace, Energie potentielle :

Un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu}$ subit le **couple de Laplace**, $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$.

Cette interaction étant conservative, on a $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

En champ lointain, $\vec{\mu}$ traduit l'"intensité" de cette source de champ magnétique et même si un aimant ne présente pas de courant électrique, un aimant possède un moment magnétique.



Attention :

On a $\vec{\Gamma}$ connu mais pas les forces donc on ne peut pas appliquer un PFD

II.5 Créer un champ magnétique

On peut utiliser des bobines ou un aimant pour créer un champ magnétique.

Dans un solénoïde infini, le champ est continu par morceaux sauf si on s'approche trop près du bord.

Pour créer un champ tournant, on alimente des bobines par des courants sinusoïdaux déphasés.

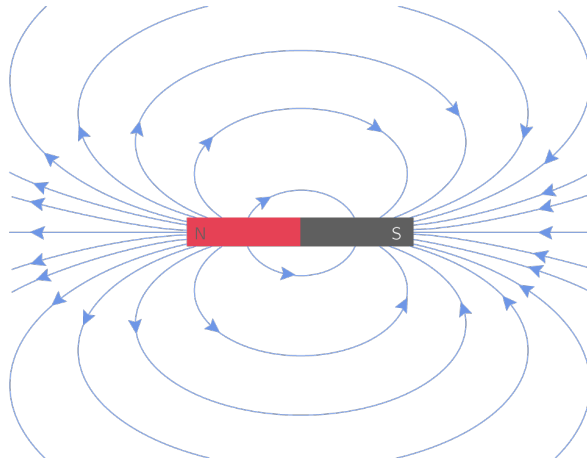
II.6 Lire une carte magnétique

Lecture d'une carte de champ :

Plus les lignes de champ sont proches, plus $\|\vec{B}\|$ est grand.

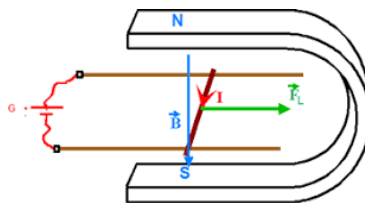
L'orientation des lignes de champ ou des fils respectent la règle de la main droite

Dans le cas d'un aimant les lignes de champ sortent du pôle nord et rentrent par le pôle sud.



II.7 Action mécanique d'un champ magnétique sur un système physique

On a l'expérience des rails de Laplace :



Forces de Laplace :

Un barreau rectiligne conducteur de longueur l parcouru par une intensité I dans un champ magnétique \vec{B} subit une force

$$\vec{F}_L = Il\vec{u} \wedge \vec{B}$$

avec \vec{u} un vecteur unitaire orienté dans le sens du courant.

Dans le cas d'un chemin on a

$$\vec{F}_L = \int I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Preuve :

On se place dans un cas simple, les électrons ont tous la même vitesse \vec{v} et sont distribués de manière homogène.

On a n^* le nombre d'électrons par unité de volume.

On a $I = \frac{\delta Q}{dt}$ avec $\delta Q = \delta N e$ la charge traversant la section pendant dt , et δN le nombre d'électrons traversant la section pendant dt .

D'où $\delta N = n^* S v dt$ soit $I = n^* S v e$

On a $\vec{F}_L = N \times \vec{F}_{\text{Lorentz}}$ avec N le nombre d'électrons et $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = (-e)(-v\vec{e}_x) \wedge \vec{B} = ev\vec{e}_x \wedge \vec{B}$.

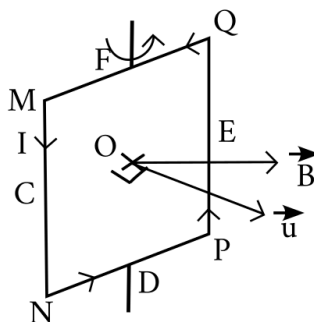
D'où $\vec{F}_L = N e v \vec{e}_x \wedge \vec{B} = n^* l S e v \vec{e}_x \wedge \vec{B} = Il\vec{u} \wedge \vec{B}$

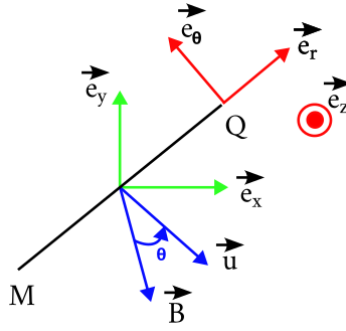
Dans un circuit filiforme non rectiligne, $\vec{F}_L = \int I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Dans le cas du schéma au dessus, les forces sur les rails de Laplace sont opposées et se compensent.

La force s'applique au baricentre du barreau.

On considère maintenant le schéma suivant :





Force et moment dans une spire carrée :

Dans une spire carrée, on a $\vec{F}_L = 0$ et $\vec{M}_0 = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

Preuve :

Pour la force :

$$\text{On a } \vec{F}_L = \vec{F}_L^{MN} + \vec{F}_L^{NP} + \vec{F}_L^{PQ} + \vec{F}_L^{QM}$$

$$\text{On a } \vec{F}_L^{MN} = \overrightarrow{IMN} \wedge \vec{B} \text{ et } \vec{F}_L^{PQ} = \overrightarrow{IPQ} \wedge \vec{B} = -\overrightarrow{IMN} \wedge \vec{B} \text{ d'où } \vec{F}_L^{MN} + \vec{F}_L^{PQ} = 0$$

$$\text{De même pour } \vec{F}_L^{NP} + \vec{F}_L^{QM} = 0 \text{ d'où } \vec{F}_L = 0$$

Preuve :

Pour le moment :

$$\text{On se place dans le second schéma, on a } \vec{M}_0(\vec{F}_L) = \vec{M}_0(\vec{F}_L^{MN}) + \vec{M}_0(\vec{F}_L^{NP}) + \vec{M}_0(\vec{F}_L^{PQ}) + \vec{M}_0(\vec{F}_L^{QM})$$

$$\text{On a } \vec{M}_0(\vec{F}_L^{MN}) = \overrightarrow{OC} \wedge (\overrightarrow{IMN} \wedge \vec{B}) = I(-\frac{a}{2}\vec{e}_r) \wedge (-a\vec{e}_z \wedge (-B\vec{e}_y)) = I\frac{a^2}{2}B\vec{e}_r \wedge \vec{e}_x = -I\frac{a^2}{2}B\sin(\theta)\vec{e}_z$$

$$\text{On a } \vec{M}_0(\vec{F}_L^{PQ}) = \overrightarrow{OE} \wedge (\overrightarrow{IPQ} \wedge \vec{B}) = -\overrightarrow{OC} \wedge (\overrightarrow{IMN} \wedge \vec{B}) = -I\frac{a^2}{2}B\sin(\theta)\vec{e}_z$$

$$\text{On a } \vec{M}_0(\vec{F}_L^{NP}) = \overrightarrow{OD} \wedge (\overrightarrow{INP} \wedge \vec{B}) = I(-\frac{a}{2}\vec{e}_z) \wedge (-a\vec{e}_r \wedge (-B\vec{e}_y)) = \frac{a}{2}\vec{e}_z \wedge IaB\cos(\theta)\vec{e}_z = 0$$

$$\text{De même pour } \vec{M}_0(\vec{F}_L^{QM}) = 0$$

$$\text{D'où } \vec{M}_0(\vec{F}_L) = -Ia^2B\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -Ia^2B\sin(\theta)\vec{e}_z = -\mu B\sin(\theta)\vec{e}_z$$

$$\text{Par ailleurs } \vec{\mu} \wedge \vec{B} = (-\mu\vec{e}_\theta) \wedge (-B\vec{e}_y) = -\mu B\sin(\theta)\vec{e}_z$$

II.8 Approche énergétique : Puissance des forces de Laplace

Puissance des forces de Laplace :

La puissance des forces de Laplace est $P = ILB\dot{x}$

Preuve :

$$\text{On a } \vec{F}_L = \overrightarrow{IMN} \wedge \vec{B} = ILB\vec{e}_x \text{ d'où } P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = ILB\dot{x}$$

III Lois de l'induction : le cas des circuits fixes

III.1 Les phénomènes d'induction

L'**induction électromagnétique** est le phénomène par lequel un courant électrique apparaît dans un circuit fermé sans générateur.

L'induction est utilisée dans les transformateurs électriques ou encore les rechargement par induction.

On considère des circuits **filiformes rigides fixes** :

- **filiforme** : On ne considère que le contour
- **rigides** : Ne se déforment pas

Flux :

Dans un champ magnétique \vec{B} avec S la surface on a :

$$\Phi_B = \iint_{\substack{\text{surface délimitée} \\ \text{par le contour}}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ orienté selon le sens du courant (règle de la main droite) et $[\Phi_B] = \text{Wb} = \text{T m}^{-2}$ (Weber)

Le flux est additif (par linéarité des intégrales)

On a $[\Phi_B] = \text{T m}^2$, et dans le cas d'une spire de rayon a on a $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{u} \pi a^2$

Flux total :

Dans un champ magnétique \vec{B} on a :

$$\Phi_{\text{tot}} = \sum_{\text{chaque spire}} \Phi_{1 \text{ spire}}$$

On considère un aimant qu'on approche d'une bobine, avec \vec{u} et \vec{B} de direction opposée.

Si l'aimant est loin ou immobile, $\Phi = 0$ et il n'y a pas de courant

Quand on rapproche l'aimant, Φ diminue et $i > 0$ et $u > 0$

Quand on éloigne l'aimant, Φ augmente et $i < 0$ et $u < 0$

Ainsi une diminution du flux induit un courant positif

Ces observations sont toujours valable lorsque la bobine bouge et non l'aimant

On remarque que le champ magnétique induit est toujours dans le sens inverse à la variation de champ magnétique extérieur

Loi de Lenz :

On a la **loi de Lenz** qui est un principe de modération : Un phénomène d'induction s'oppose par ses conséquences aux causes qui l'ont engendré

Pour étudier un circuit, on l'oriente puis on définit le vecteur surface \vec{S} perpendiculaire au plan du circuit et orienté par la règle de la main droite.

III.2 Loi de Faraday

On place dans le cadre de l'ARQS

Loi de Faraday :

Si Φ_B varie il apparaît alors dans le circuit une force électromotrice induite du même sens que la convention d'orientation du circuit.

On a :

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Le $-$ dans la formule est dû à la loi de Lenz

III.3 Auto induction et couplage inductif

Flux propre et coefficient d'auto inductance :

Un circuit parcouru par un courant i crée un champ magnétique. Le flux correspondant dans le circuit est appelé **flux propre** et $\Phi_P = Li$, avec L le coefficient d'**auto inductance** ou **inductance** (en Henry)

On a $e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dLi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$ (en convention générateur) donc on retrouve une formule du chapitre d'électricité, de même que la continuité de i peut se retrouver avec la loi de Lenz : le système limite i lors de son apparition

Ainsi l'énergie stockée dans une bobine est stockée sous forme d'énergie magnétique

Dans le cas d'un circuit avec faible enroulement on néglige les auto-inductances


Puisque le flux est additif on trouve $e = -\frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt} = -\frac{d\Phi_{\text{propre}}}{dt} - \frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt}$

Ainsi deux circuits proches l'un de l'autre peuvent présenter un couplage magnétique

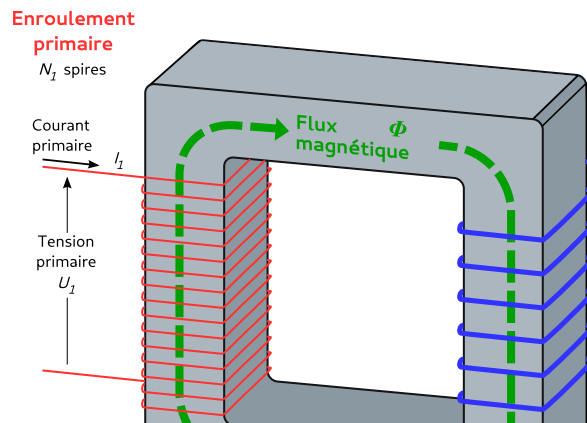
Inductance mutuelle :

On a $\Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1$ et $\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2$, avec M l'**inductance mutuelle** en Henry

En électricité on notera une impédance mutuelle par un

 A faire (Faire un schéma et la puissance reçue avec le schema)

III.4 Influence totale



On peut guider les lignes de champs en utilisant un guide magnétique

Expression de l'auto inductance :

Pour deux bobines de même longueur l avec N_1 et N_2 spires on a :

$$L_1 = \mu_0 S \frac{N_1^2}{l}$$

Preuve :

On a $B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1$ et $\Phi_{\text{spire}} = B_1 S$ d'où $\Phi_{N_1, \text{spire}} = N_1 \Phi_{\text{spire}} = \mu_0 S \frac{N_1^2}{l} i_1$ donc on retrouve bien L_1

Expression de la mutuelle :

Pour deux bobines de même longueur l avec N_1 et N_2 spires on a :

$$M = \mu_0 S \frac{N_1 N_2}{l}$$

Preuve :

On a $\Phi_{B_1 \rightarrow \text{bobine 2}} = N_2 \Phi_{B_1 \rightarrow 1 \text{ spire de 2}}$ avec $\Phi_{B_1 \rightarrow 1 \text{ spire de 2}} = \mu_0 S \frac{N_1}{l} i_1$

D'où on a $\Phi_{B_1 \rightarrow \text{bobine 2}} = \mu_0 S \frac{N_1 N_2}{l} i_1$ d'où l'expression de M

On remarque aussi que $M^2 = L_1 L_2$

La mutuelle change de signe si on pivote de 90°

Dans la matière en réalité, μ_0 n'est pas constant et dépend du matériau choisi

Dans les faits on aura des pertes dans les matériaux avec $M_{\text{réel}} < M_{\text{th}}$

Dans le cas de l'interaction totale on a $\left| \frac{e_1}{e_2} \right| = \frac{N_1}{N_2}$ car $e_1 = \pm e_2$

On utilise ce genre de dispositifs pour faire des transformateurs pour passer de basse tension à haute tension.

IV Lois de l'induction : le cas des circuits mobiles

IV.1 Force électromotrice d'un circuit en mouvement

En considérant un conducteur se déplaçant à une vitesse \vec{v}_0 , on a $e = -\frac{\delta Q}{dt}$ avec δQ le **flux coupé** (HP)

Force électromotrice :

$$\text{On a } e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

IV.2 Rail de Laplace générateur

En considérant un rail de Laplace, on analyse un système de la manière suivante :

1. On fait une mise en équation mécanique
2. On fait une mise en équation électrique
3. On fait une équation différentielle et un bilan de puissance

Ensuite on réalise un bilan de puissances :

On multiplie par \dot{x} ou i puis on obtient un bilan qui peut faire intervenir Ri^2 la puissance dissipée par effet Joule, ou encore $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$ comme termes

Il peut aussi y avoir des termes en plus, comme la puissance fournie par l'opérateur

A noter que pour un circuit mobile, la somme des puissances est nulle (il y a conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique)

✧ Mécanique quantique

✧ I Introduction à la mécanique quantique

✧ I.1 Nature ondulatoire de la lumière

Un **corps noir** est un objet qui absorbe toute la lumière incidente, et qui émet un rayonnement thermique.

Le début de la théorie quantique est liée à l'effet photoélectrique, qui est l'émission d'électrons (arrachés) par un matériau sous l'effet de la lumière. On observe une fréquence seuil au delà de laquelle l'effet photoélectrique se produit, mais on n'arrive pas à expliquer pourquoi avec la théorie ondulatoire.

C'est là qu'entre en jeu Einstein, avec la théorie des **quanta** : on considère que la lumière n'est plus continue mais est faite de quanta d'énergie hf d'où la présence d'une fréquence seuil.

Relation de Plank-Einstein :

La lumière se compose de **photon** d'énergie $E = hf$ avec $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J s la constante de Planck et f la fréquence (parfois notée ν)

Dans le vide, la lumière se propage à la vitesse $c = 3 \cdot 10^8$ m s⁻¹

Le photon possède une quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{c}$ avec λ la longueur d'onde

Attention :



Les expressions ci dessus ne sont vraies que pour les photons, et $\vec{p} = m\vec{v}$ n'est valable que dans le cas **non relativiste** ($v \leq 0.1c$)

✧ I.2 Nature ondulatoire de la matière

En mécanique classique on représente un électron par un corpuscule, mais cette représentation est incompatible avec les trous de Young : en effet on observe un phénomène d'interférence avec des électrons.

Relation de de Broglie :

Pour toute particule de quantité de mouvement p on a une longueur d'onde associée $\lambda = \frac{h}{p}$ avec h la constante de Planck

On prononce "de Broglie" comme "de Broille"

Les phénomènes quantiques sont observables quand les obstacles sont de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie, si jamais la longueur d'onde est trop petite devant la taille de l'obstacle on retrouve les lois classiques.



Fiches TP



I Régression linéaire



I.1 Explication

La régression linéaire consiste à établir une relation linéaire entre une variable dépendante y et une ou plusieurs variables indépendantes x_1, \dots, x_n .

Pour cela, on utilise Python et les bibliothèques `numpy` et `matplotlib`.



I.2 Comment faire?



I.2.a Importer les bibliothèques

Pour importer les bibliothèques, on utilise la commande `import`.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```



I.2.b Créer les données

On considère les listes X et Y suivantes (ces données sont fictives et sont normalement issues d'une expérience réelle) :

```
1 X = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
2 Y = [1, 2.4, 3.6, 4.8, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5, 10.5]
```



I.2.c Tracer le nuage de points

En physique on ne relie jamais des points expérimentaux par des segments, mais on trace un nuage de points. Pour cela, on utilise la commande `plt.plot` avec `o` comme forme.

```
1 plt.plot(X, Y, "o")
2 plt.label("X (unité)")
3 plt.ylabel("Y (unité)")
4
5 plt.show()
```



I.2.d Réaliser la régression linéaire

Pour réaliser la régression linéaire, on utilise la commande `np.polyfit` qui prend en argument les listes X et Y ainsi que le degré du polynôme (ici 1 car on veut une droite).

```
1 a, b = np.polyfit(X, Y, 1)
```



I.2.e Tracer la droite de régression

Pour tracer la droite de régression, on utilise la commande `plt.plot` avec `--` comme forme.

Pour avoir des valeurs régulières en abscisse, on utilise la commande `np.linspace` qui prend en argument la valeur minimale, la valeur maximale et le nombre de valeurs voulues dans l'intervalle.

```

1  # Si on veut laisser les points expérimentaux on utilise la commande suivante
2  plt.plot(X, Y, "o")
3
4  # Tracé de la droite de régression
5  list_x = np.linspace(min(X), max(X), 100) # 100 valeurs entre min(X) et max(X)
6  plt.plot(list_x, a * np.array(list_x) + b, "--")
7  plt.xlabel("X (unité)")
8  plt.ylabel("Y (unité)")
9
10 plt.show()

```

Il est ensuite possible de récupérer les coefficients de la droite de régression avec `a` et `b` et de les afficher.

```

1  print("a = ", a)
2  print("b = ", b)

```

Il est bien sûr aussi possible de les récupérer de manière géométrique avec une règle.

II Instruments d'optique

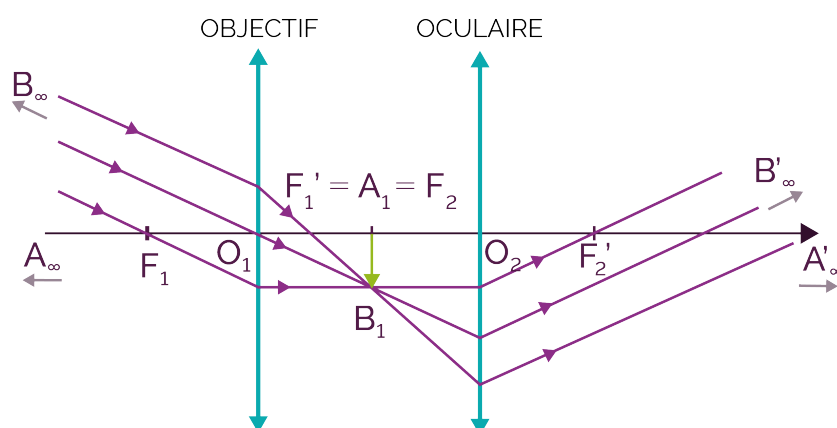
II.1 Viseur

Le viseur est un appareil optique composé de deux lentilles convergentes appelées objectif et oculaire, avec une réticule entre les deux.

L'intérêt du viseur est que tout objet que l'on voit net à travers le viseur est à une même distance, d'où on peut estimer la distance avec un objet.

II.2 Lunette Astronomique

La lunette astronomique est un appareil optique composé de deux lentilles convergentes appelées objectif et oculaire. On a le foyer image de l'objectif qui est le foyer objet de l'oculaire.



Ainsi la lunette permet d'observer une image à l'infini, en la grandissant avec un grandissement G , et de renvoyer une image réelle à l'infini.

II.3 Collimateur

Le collimateur est un appareil optique composé d'une source lumineuse et d'une lentille convergente. Il permet de rendre parallèle un faisceau lumineux.

Pour cela, on place la source lumineuse au foyer principal objet de la lentille convergente.

III Auto-collimation

III.1 Principe

On a une source qui éclaire, les faisceaux lumineux passent par une lentille convergente et se réfléchissent sur un miroir plan. On place un écran dans le plan de l'objet (c'est à dire le plan de la source lumineuse).

III.2 Réalisation

III.2.a Montage

On effectue donc le montage expliqué précédemment.

L'intérêt de l'auto-collimation est de déplacer la lentille pour observer différents phénomènes.

III.2.b Règle des $4f$

Comme vu dans le chapitre d'optique géométrique, on a la règle des $4f$ qui donne une condition pour observer une image.

Si cette condition est respectée, on dispose de 2 positions pour observer une image nette.

IV Euler

IV.1 Présentation

La méthode d'Euler est une méthode de résolution numérique d'équations différentielles. Elle est basée sur le principe de la tangente à la courbe représentative de la solution de l'équation différentielle.

IV.2 Principe algorithmique

On considère une équation différentielle de la forme $y' = f(x, y)$, avec f une fonction continue. On cherche à déterminer une fonction y telle que $y' = f(x, y)$.

On divise l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$ en n sous-intervalles de longueur Δt (appelé pas de résolution). Et on a donc $t_k = t_{\min} + k * \Delta t$.

On cherche à déterminer y_k tel que $y_k = y(t_k)$. Puisque l'on connaît y_0 (on connaît $y(t_{\min})$), on peut déterminer tous les y_k en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) * \Delta t$$

IV.3 Exemple d'application

On considère la fonction euler suivante :

```
1 def euler(F, y_0, tmin, tmax, dt):  
2     list_t = np.arange(tmin, tmax + dt, dt)  
3     N = len(list_t)  
4     y = np.zeros(N)  
5  
6     y[0] = y_0  
7  
8     for k in range(N - 1):  
9         y[k + 1] = y[k] + F(y[k], tmin + k * dt) * dt  
10  
11     return list_t, y
```

On considère l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$.

On a donc $f(x, y) = y$ et $y_0 = 1$.

On peut donc définir la fonction F suivante :

```
1 def F(y, x):  
2     return y
```

On peut alors tracer la solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0, 10]$ avec un pas de résolution de 0.1 (valeurs prises pour l'exemple) :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt  
2  
3 t, y = euler(F, 1, 0, 10, 0.1)  
4  
5 plt.clf()  
6 plt.figure()  
7  
8 plt.plot(t, y, ".") # On ne relie pas les points en physique  
9 plt.xlabel("X (unité)")  
10 plt.ylabel("Y (unité)")  
11  
12 plt.legend()  
13  
14 plt.show()
```

Il sera donc possible de visualiser l'allure de la solution de l'équation différentielle.

IV.4 Bonnes pratiques

Il faut toujours vérifier que le pas de résolution est suffisamment petit pour que la solution obtenue soit proche de la solution réelle.

Si le pas de résolution est trop grand, la solution obtenue sera très éloignée de la solution réelle.

Mais si le pas de résolution est trop petit, le temps de calcul sera très long.

Il faut donc trouver un compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul.

V Multimètre

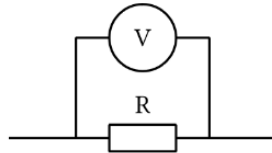
V.1 Présentation

Le multimètre est un appareil de mesure qui permet de mesurer des grandeurs électriques telles que la tension, l'intensité ou la résistance. On appelle voltmètre la partie du multimètre qui permet de mesurer la tension, ampèremètre la partie qui permet de mesurer l'intensité et ohmmètre la partie qui permet de mesurer la résistance.

V.2 Voltmètre

Pour mesurer la tension aux bornes d'un dipôle, il faut brancher le voltmètre en dérivation du dipôle.

Il faut brancher le + sur la borne Ω et le – sur la borne *COM*.



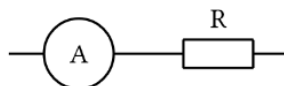
Pour avoir une mesure correcte, il faut que le voltmètre ait une résistance interne très grande devant la résistance du dipôle. (Le voltmètre est modélisé par un interrupteur ouvert.)

Il est aussi possible d'ajuster le *RANGE* du voltmètre pour avoir une mesure avec différents ordres de grandeur.

V.3 Ampèremètre

Pour mesurer l'intensité qui traverse un dipôle, il faut brancher l'ampèremètre en série avec le dipôle.

Il faut brancher le + sur la borne *mA* (ou μA) et le – sur la borne *COM*.



Pour avoir une mesure correcte, il faut que l'ampèremètre ait une résistance interne très faible devant la résistance du dipôle. (L'ampèremètre est modélisé par un fil.)

Il est aussi possible d'ajuster le *RANGE* de l'ampèremètre pour avoir une mesure avec différents ordres de grandeur.

Attention :

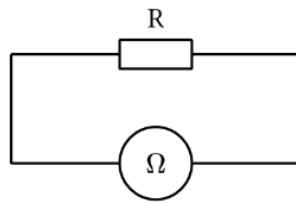


Il est très important de faire attention aux valeurs maximales que peut mesurer l'ampèremètre. Si le courant est trop fort, l'ampèremètre peut être endommagé.

V.4 Ohmmètre

Pour mesurer la résistance d'un dipôle, il faut brancher l'ohmmètre en série avec le dipôle. Il faut que le dipôle ne soit pas alimenté.

Il faut brancher le + sur la borne Ω et le – sur la borne *COM*.



Il est aussi possible d'ajuster le *RANGE* de l'ohmmètre pour avoir une mesure avec différents ordres de grandeur.



Attention :

Il est primordial de ne pas alimenter le dipôle pour utiliser l'ohmmètre.



VI Pont de Wheatstone



VI.1 Présentation

Le pont de Wheatstone est un montage électrique utilisé pour mesurer une résistance inconnue. Il est composé de quatre résistances, dont une inconnue, et d'une source de tension. Il est utilisé dans de nombreux domaines, notamment en physique pour mesurer la résistance d'un conducteur, ou en médecine pour mesurer la résistance de la peau.



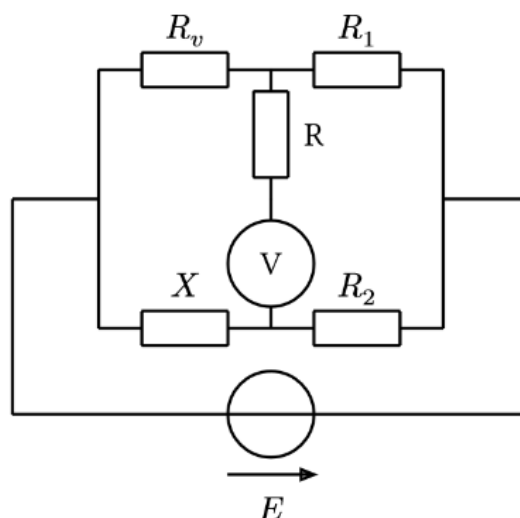
VI.2 Principe

Le principe du pont de Wheatstone est de mesurer la valeur de la résistance inconnue en équilibrant le pont. Pour cela, on utilise un voltmètre pour arriver à l'équilibre. On peut alors déterminer la valeur de la résistance inconnue à partir des valeurs des autres résistances.



VI.3 Montage

Le montage du pont de Wheatstone est le suivant :



VI.4 Équilibre du pont de Wheatstone

Pour que le pont de Wheatstone soit équilibré, il faut que la tension aux bornes du voltmètre soit nulle. On a alors :

$$\frac{R_v}{X} = \frac{R_1}{R_2}$$

VI.5 Mesure de la résistance inconnue

On peut alors déterminer la valeur de la résistance inconnue à partir des valeurs des autres résistances :

$$X = \frac{R_2 R_v}{R_1}$$

VII Oscilloscope

VII.1 Présentation

L'oscilloscope est un appareil de mesure qui permet de visualiser des signaux électriques. Il est composé d'un écran sur lequel on peut voir le signal, de boutons pour régler les paramètres de mesure et de sondes pour connecter l'oscilloscope au circuit à mesurer.

VII.2 Montage

VII.2.a Schématisation

L'oscilloscope se schématise donc par $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 \end{matrix}$ et une masse, chaque flèche représentant une voie de mesure.

Ici sur le schéma, la voie 1 mesure E et la voie 2 mesure U aux bornes du condensateur.

VII.2.b Spécificité

Le condensateur étant relié à la Terra, il est important de faire attention aux branchements notamment celui de la masse. C'est pour cette raison qu'on respectera le code couleurs des fils.

VII.3 Utilisation

VII.3.a Allumage et branchements

Quand on allume l'oscilloscope, les boutons vont clignoter. Il faut alors attendre que l'oscilloscope soit prêt, quand le bouton STOP est en vert.

Il est ensuite possible de brancher 2 voies et de les allumer ou non avec les boutons portant leur numéro.

VII.3.b Réglage horizontal

Il est possible d'ajouter un retard à l'oscilloscope en tournant le petit bouton "horizontal"

L'échelle est quand à elle changeable via le grand bouton "horizontal"

VII.3.c Réglage vertical

L'échelle verticale (soit celle de l'amplitude des signaux) est réglable avec le bouton au dessus de celui pour activer/désactiver une voie.

De même il est possible de translater une voie avec le bouton en dessous de chaque voie.

VII.3.d Seuil

Il y a une molette seuil permettant de changer la valeur seuil, c'est à dire la valeur pour stabiliser l'oscilloscope.

VII.3.e Curseurs

Le bouton CURSOR permet d'ajouter des curseurs sur les axes X et Y afin de faire des mesures précises, c'est notamment utile pour trouver une période ou un amplitude

VII.3.f Meas

La fonction MEAS permet de traiter directement dans l'oscilloscope, elle permet de trouver un déphasage, une amplitude ou une période sans avoir à s'embêter avec des curseurs.

Cette méthode est plus simple et plus précise.

VII.3.g Type d'acquisition

En TP on utilise normalement le mode d'acquisition "normal" mais si l'oscilloscope a un comportement étrange il est possible d'utiliser la fonction de moyennage qui permet de lisser le signal.

A noter aussi que si l'oscilloscope est vraiment trop étrange, il est possible de le réinitialiser ou de le brancher sur une source externe (en utilisant un GBF par exemple).

VIII Monte-Carlo

VIII.1 Présentation

En pratique en faisant des manipulations on a des incertitudes sur les mesures. La méthode Monte-Carlo permet de propager les distributions d'incertitudes sur les mesures pour obtenir une incertitude sur une grandeur finale.

VIII.2 Procédé

VIII.2.a Étape 1

On détermine au moins une valeur et son incertitude pour chaque grandeur mesurée (plus il y a de valeurs, plus la méthode est précise).

Ainsi pour chaque valeur on va postuler la distribution de probabilité de la valeur mesurée.

VIII.2.b Étape 2

On génère un grand nombre de valeurs pour chaque grandeur mesurée en utilisant la distribution de probabilité postulée. On calcule alors la valeur de la grandeur finale pour chaque jeu de valeurs.

VIII.2.c Étape 3

La valeur finale s'obtient donc avec la valeur moyenne des valeurs obtenues et l'incertitude s'obtient avec la largeur de la distribution obtenue.

VIII.3 Et sur des régressions linéaires?

Pour une régression linéaire, on peut utiliser la méthode Monte-Carlo pour propager les incertitudes sur les valeurs mesurées et obtenir une incertitude sur les coefficients de la droite de régression.

VIII.3.a Étape 1

Dans un premier temps, on détermine les valeurs et les incertitudes pour chaque grandeur mesurée.

On réalise ensuite une régression linéaire pour obtenir les coefficients de la droite de régression.

VIII.3.b Étape 2

Par la méthode Monte-Carlo, on génère un grand nombre de valeurs pour chaque grandeur mesurée en utilisant la distribution de probabilité postulée.

De même, on génère un grand nombre de droites de régression en utilisant les valeurs générées pour chaque grandeur mesurée.

Enfin on calcule la valeur moyenne des coefficients de la droite de régression et l'incertitude sur ces coefficients.

C'est gagné!

Annexe

I Analyse dimensionnelle

I.1 Système SI

La physique est dotée du système international d'unités qui permet de normaliser les unités utilisées en physique. On a ainsi les unités de base suivantes :

Grandeur	Unités SI	Symbole
Distance	Mètre (m)	L
Masse	Kilogramme (kg)	M
Temps	Seconde (s)	T
Intensité électrique	Ampère (A)	I
Température	Kelvin (K)	Θ
Quantité de matière	Mole (mol)	N
Intensité lumineuse	Candela (cd)	J

Ainsi toute grandeur physique peut être décomposée en un produit de puissances de ces unités de base.

I.2 Résoudre une équation de dimension

Avant d'écrire une équation, il est important de vérifier que les dimensions des deux membres de l'équation sont compatibles.

On ne peut pas additionner des grandeurs de dimensions différentes.



Attention :

Il est important de vérifier les dimensions des grandeurs physiques pour éviter des erreurs de calcul, notamment à la fin du calcul pour vérifier l'homogénéité

Mais on peut aussi trouver la dimension d'une grandeur en réalisant une équation de dimension.

Soit une grandeur X dépendant potentiellement de A , B et C .

On a alors $[X] = A^a B^b C^c$, or on sait que X dépend de Y et Z de dimensions $[Y] = ABC^y$ et $[Z] = A^z BC$ tel que $X = \frac{Y}{Z}$

Ainsi en identifiant les dimensions on a $[X] = A^{1-z} C^{y-1}$

I.3 Homogénéité

Unité/Grandeur	Unités SI	Dimension	Relation
Énergie \mathcal{E}	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$E = mgh$

Puissance \mathcal{P}	W	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$	$P = \frac{E}{t}$
Travail \mathcal{W}	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$W = mgh$
Intensité lumineuse I	W m^{-2}	kg s^{-3}	$I = \frac{P}{S}$
Charge électrique q	C	A s	$Q = It$
Tension U	V	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$	$U = \frac{P}{I}$
Capacité C	F	$\text{kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^4 \text{A}^2$	$C = \frac{Q}{U}$
Résistance R	Ω	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}$	$R = \frac{U}{I}$
Inductance L	H	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{A}^{-2}$	$L = \frac{U}{\frac{dI}{dt}}$
Conductivité électrique σ	S m^{-1}	$\text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{s}^3 \text{A}^2$	$\sigma = \frac{1}{R}$
Vecteur d'onde k	m^{-1}	m^{-1}	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Position x	m	m	$x = x_0 + vt$
Vitesse v	m s^{-1}	m s^{-1}	$v = \frac{dx}{dt}$
Accélération a	m s^{-2}	m s^{-2}	$a = \frac{dv}{dt}$
Quantité de mouvement p	kg m s^{-1}	kg m s^{-1}	$p = mv$
Force F	N	kg m s^{-2}	$F = mg$
Constante de raideur k	N m^{-1}	kg s^{-2}	$k = \frac{F}{x}$
Constante de gravitation \mathcal{G}	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	$F = Gm \frac{M}{r^2}$
Permittivité magné. du vide μ_0	H m^{-1}	$\text{kg m s}^{-2} \text{A}^{-2}$	/
Permittivité élec. du vide ε_0	F m^{-1}	$\text{kg}^{-1} \text{m}^{-3} \text{s}^4 \text{A}^2$	/
Moment cinétique L	N m s	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$	$L = mvr$
Moment d'une force M	N m	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$M = rF$
Moment d'inertie I	J	kg m^2	$I = mr^2$
Couple Γ	N m	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$\Gamma = \frac{dL}{dt}$

Champ électrique E	V m^{-1}	$\text{kg m s}^{-3} \text{A}^{-1}$	$E = \frac{U}{d}$
Champ magnétique B	T	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$	$E = \mu \cdot B$
Moment magnétique μ	A m^2	A m^2	$\mu = IS$
Constante de Planck h	J s	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$	$E = hf$
Pression P	Pa	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	$P = \frac{F}{S}$
Constante des gaz parfaits R	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$	$PV = nRT$
Transfert thermique Q	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$Q = \Delta U - W$
Capacité thermique C	J K^{-1}	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$	$\Delta U = C\Delta T$
Enthalpie H	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$H = U + PV$
Entropie S	J K^{-1}	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$	$S_e = \frac{Q}{T}$
Flux thermique Φ	W	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$	$\Phi = \frac{dQ}{dt}$
Résistance thermique R	K W^{-1}	K W^{-1}	$R = \Delta \frac{T}{\Phi}$
Conductivité thermique λ	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kg m s}^{-3} \text{K}^{-1}$	$R = \frac{e}{\lambda S}$
Coefficient de transfert thq h	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$	$\text{kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$	$\Phi = hS\Delta T$
Enthalpie de chgt d'état Δh	J kg^{-1}	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$\Delta H = m\Delta h + \dots$
Entropie de chgt d'état ΔS	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$	$\Delta S = \frac{m\Delta h}{T}$

II Incertitudes

En physique les mesures sont souvent associées à des incertitudes sur ces dernières. Il est important de les propager pour pouvoir vérifier nos résultats et les confronter à la réalité.

On parle de **mesurande** pour la grandeur que l'on souhaite mesurer et de **mesurage** pour le processus de mesure.

Les erreurs peuvent être dues à des erreurs aléatoires (bruit des mesures) ou des erreurs systématiques (une erreur de montage par exemple)

II.1 Incertitude type A

Une incertitude de type A correspond à une multiplication de mesure dans les mêmes conditions, on note x_1, \dots, x_n ces mesures

Ensuite on fait la moyenne $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$

Mais cette moyenne varie d'un échantillon à un autre donc $\langle x \rangle$ possède aussi une incertitude :

Incertitude d'une moyenne :

On a

$$u(\langle x \rangle) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

l'incertitude sur cette moyenne avec $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \langle x \rangle)^2}$ l'écart type expérimental

Ainsi plus on réalise de mesures plus elle sera précise au final mais dans la pratique on ne réalise pas souvent des milliers de mesure donc on peut avoir recours à des méthodes de régression linéaires ou Monte Carlo

II.2 Incertitude type B

Dans le cas des incertitudes de type B on détermine l'incertitude à partir des propriétés de l'outil qui servent à réaliser les mesures

Pour une règle on prendra une demi graduation

Pour une horloge qui bat la seconde on prendra 0.5 s

De manière plus générale pour avoir l'incertitude d'un outil il est intéressant de prendre la notice

II.3 Composer des incertitudes

On est souvent amenés à avoir plusieurs incertitudes sur une valeur finale ainsi il est intéressant de pouvoir composer des incertitudes

II.3.a Somme d'incertitudes

Supposons que $x = a + b$ (ou $x = a - b$)

On a alors $u(x) = \sqrt{(u(a))^2 + (u(b))^2}$

II.3.b Produit d'incertitudes

Supposons que $x = ab$ (ou $x = \frac{a}{b}$)

On a alors $\frac{u(x)}{x} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$ souvent réécrit $u(x) = x \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$



Attention :

Il ne faut pas oublier le x dans l'expression sinon on en perd tout son sens

II.4 Chiffres significatifs

On notera un résultat de mesure par $X = (x \pm \Delta x)$ unité

On fera notamment attention à garder un nombre cohérent de chiffres significatifs avec les données de l'énoncé : on ne garde que le même nombre de chiffres significatifs que la valeur qui en a le moins dans l'énoncé.

De plus on n'arrondit jamais une incertitude à l'inférieur et on garde au maximum ou deux chiffres significatifs sur l'incertitude



Attention :

On ne met jamais plus de chiffres significatifs à l'incertitude qu'à la valeur : ça n'as pas de sens!

II.5 Écart normalisé

Pour regarder la compatibilité d'une valeur on va regarder les intervalles de confiance et considérer l'**écart normalisé** ou **z-score**

Expression de l'écart normalisé :

On a

$$z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Si $|z| > 1$ il y a 68% de chance que les valeurs soient incompatibles Si $|z| > 2$ il y a 95% de chance que les valeurs soient incompatibles Si $|z| > 3$ il y a 99% de chance que les valeurs soient incompatibles

Ainsi on comparera souvent cette valeur à 2 pour avoir un intervalle de confiance à 95%

III Équations différentielles

En physique on est souvent amené à résoudre des équations différentielles pour modéliser des phénomènes physiques. On peut les résoudre de manière analytique ou numérique.

Une résolution numérique est réalisée avec la méthode d'Euler (voir les fiches TP).

III.1 Équations linéaires d'ordre 1

Équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est

$$y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{y_\infty}{\tau}$$

avec y_∞ une constante

On dit que τ est le **temps caractéristique** du système.

Forme générale de la solution :

La solution générale de cette équation est

$$y(t) = y_\infty + A \exp^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A obtenu par les conditions initiales

III.2 Équations linéaires d'ordre 2

Dans le cadre d'un **oscillateur harmonique** on a :

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y'' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_\infty$$

avec y_∞ une constante



Attention :

On fera attention au + sans quoi l'oscillateur n'est pas harmonique

On dit que ω_0 est la **pulsation propre** du système.

Forme générale de la solution :

La solution générale de cette équation est

$$y(t) = y_\infty + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec A et B obtenus par les conditions initiales

Dans le cas d'un **oscillateur amorti** on a :

Équation différentielle linéaire d'ordre 2 amortie :

La forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_\infty$$

avec y_∞ une constante

On dit que Q est le **facteur de qualité** du système et ω_0 la **pulsation propre** du système.

Dans les systèmes avec beaucoup d'oscillations on a Q le nombre d'oscillations avant l'arrêt.

Selon la valeur de Q on a différents régimes :

- Si $Q < \frac{1}{2}$ on a un **régime apériodique**
- Si $Q = \frac{1}{2}$ on a un **régime critique**
- Si $Q > \frac{1}{2}$ on a un **régime pseudo-périodique**

Ces différents régimes sont en fait liés au discriminant du polynôme caractéristique de l'équation différentielle, on retrouve donc le cadre des mathématiques.

III.2.a Régime apériodique

Régime apériodique :

Pour un régime apériodique on a

$$y(t) = y_{\infty} + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

avec A et B obtenus par les conditions initiales

On trouve τ_1 et τ_2 en résolvant le polynôme caractéristique de l'équation différentielle avec $\tau_1 = -\frac{1}{r_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{r_2}$

III.2.b Régime critique

Régime critique :

Pour un régime critique on a

$$y(t) = y_{\infty} + (A + Bt)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A et B obtenus par les conditions initiales

On trouve τ en résolvant le polynôme caractéristique de l'équation différentielle avec $\tau = -\frac{1}{r}$

III.2.c Régime pseudo-périodique

Régime pseudo-périodique :

Pour un régime pseudo-périodique on a

$$y(t) = y_{\infty} + (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A et B obtenus par les conditions initiales

On trouve ω et τ en résolvant le polynôme caractéristique de l'équation différentielle avec ses solutions $x = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega$

Attention :



On ne peut plus trouver τ le temps caractéristique avec les méthodes qui seront développées ensuite, mais avec le décrétement logarithmique

III.3 Résolution avec les complexes

On peut résoudre une équation différentielle en se souvenant que $\frac{d}{dt} = j\omega$

Ainsi on peut réécrire une équation différentielle sous forme complexe.

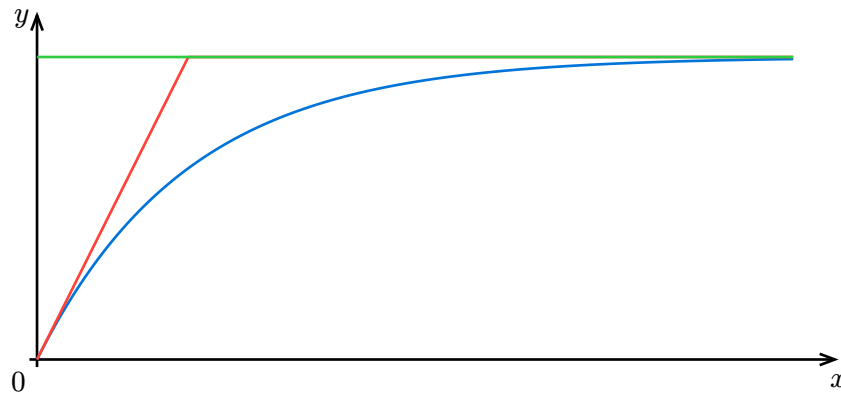
On rappelle aussi que $\cos(\omega t) = e^{j\omega t}$ et $\sin(\omega t) = -j\omega e^{j\omega t}$

Ainsi on peut obtenir l'expression de l'amplitude avec le module de la solution complexe et la phase avec l'argument de la solution complexe.

III.4 Temps caractéristique

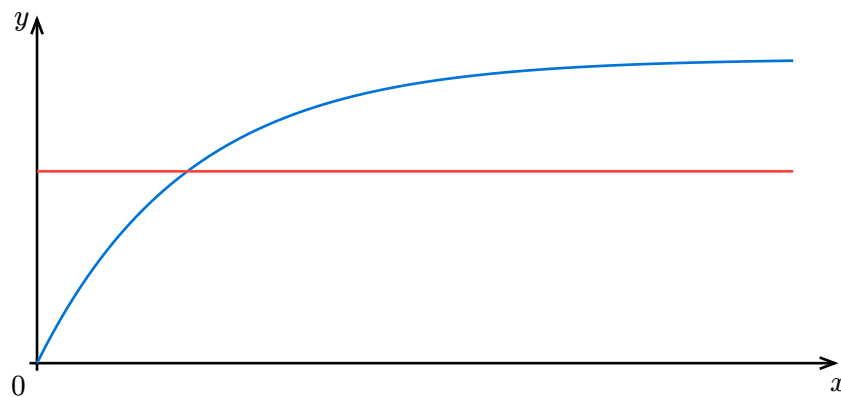
Il existe plusieurs manières de trouver le temps caractéristique

III.4.a Méthode des tangentes



Le point d'intersection de la tangente en 0 avec la valeur finale donne le temps caractéristique

III.4.b Méthode des 63%



Il est aussi possible de trouver le temps caractéristique en regardant le temps pour atteindre 63% de la valeur finale

III.4.c Décrément logarithmique













































































Dans le cas d'un régime pseudo-périodique on peut aussi trouver le temps caractéristique avec le décrément logarithmique (voir chapitre sur le RSF)

III.5 Autres équations

Si on a une équation qui ne rentre pas dans ce cadre :

- On peut essayer de la linéariser pour la résoudre
- On peut intégrer des deux côtés pour essayer de la résoudre

Table des matières

	I Introduction à l'optique	4		II.3.a Généralités	18
	I.1 Généralités	4		II.3.b Associations	19
	I.2 Caractérisation spectrale des sources lumineuses	4		III Circuits d'ordre 2, Oscillateurs	20
	I.3 Source lumineuse ponctuelle, rayon lumineux	5		III.1 Oscillateur harmonique	20
	I.4 Approximation de l'optique géométrique	6		III.2 Oscillateur amorti	20
	I.5 Lois de Snell-Descartes	6		III.2.a Généralités	20
	I.5.a Lois de l'optique géométrique	6		III.2.b Régime apériodique	21
	I.5.b Réflexion totale	6		III.2.c Régime critique	21
	II Lentilles minces et miroir plan	7		III.2.d Régime pseudo-périodique	22
	II.1 Vocabulaire	7		IV Circuits en régime sinusoïdal forcé	22
	II.2 Lentilles minces	7		IV.1 Régime transitoire	22
	II.2.a Lentille convergente	8		IV.2 Vocabulaire des signaux périodiques	23
	II.2.b Lentille divergente	8		IV.3 Déphasage entre signaux	23
	II.3 Constructions	8		IV.4 Représentation complexe d'un signal harmonique	24
	II.4 Relations de conjugaison	9		IV.5 Impédances complexes	24
	II.5 Condition $4f'$	9		IV.5.a Généralités	24
	III Appareils optiques	10		IV.5.b Comportement basse et haute tension	25
	III.1 Généralités	10		IV.6 Lois de l'électricité en RSF	25
	III.2 La lunette astronomique	10		IV.7 Étude d'un circuit	25
	III.3 L'oeil	10		IV.8 Résonnance	26
	I Introduction à l'électricité	12		V Filtrage	26
	I.1 Généralités	12		V.1 Spectre d'un signal, décomposition de Fourier	27
	I.1.a Charge électrique	12		V.2 Réponse fréquentielle d'un quadripole	27
	I.1.b Courant électrique	12		V.3 Filtre d'ordre 1	27
	I.1.c Dipôle, branche, maille, circuit	12		V.4 Filtre d'ordre 2	28
12				VI Signaux périodiques et filtrage linéaire	29
	I.1.d Intensité électrique	12		VI.1 Signaux périodiques et leur caractérisation	29
	I.2 La tension électrique	13		I Introduction aux ondes	32
	I.3 Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)	13		I.1 Définition et exemples	32
	I.4 Résistors	14		I.2 Célérité, couplage temps/espace	33
	I.5 Associations des résistors	14		I.3 Ondes planes progressives harmoniques	33
	I.6 Ponts diviseurs	15		I.4 Puissance d'une onde	34
	I.7 Générateurs	16		I.5 Spectre d'une onde périodique	34
	I.7.a Générateur de tension	16		I.6 Ordre de grandeur	34
	I.7.b Générateurs de courant (HP)	16		II Diffraction/Interférences	34
	II Circuits d'ordre 1	16		II.1 Diffraction	35
	II.1 Le condensateur	16			
	II.1.a Généralités	16			
	II.1.b Associations	17			
	II.2 Charge d'un condensateur	18			
	II.3 La bobine	18			

🎵 II.2 Interférences	35	47	
🎵 III La lumière onde	36	🦴 III.5 Graphe d'énergie potentielle	47
🎵 III.1 Généralités	36	🦴 IV Loi du moment cinétique	48
🎵 III.2 Modèle scalaire	37	🦴 IV.1 Approche vectorielle	48
🎵 III.3 Diffraction	37	🦴 IV.2 Approche scalaire	48
🎵 III.4 Interférences	37	🦴 V Mouvement dans un champ de force newtonien	49
🦴 I Cinématique du point	39	🦴 V.1 Statuer sur le caractère central	49
🦴 I.1 Généralités	39	🦴 V.2 Propriétés de mouvement dans un champ de force centrale	50
🦴 I.2 Observateur, repère, référentiel	39	🦴 V.3 Approche énergétique, cas d'une force conservatrice	50
🦴 I.3 Position, vitesse, accélération	39	🦴 V.4 Lois de Kepler	51
🦴 I.3.a Coordonnées cartésiennes	40	🦴 V.5 Jour solaire vs jour sidéral	51
🦴 I.3.b Coordonnées cylindriques	40	🦴 V.6 Satellites géostationnaires	52
🦴 I.3.c Coordonnées sphériques	41	🦴 VI Mécanique du solide	52
🦴 I.3.d Base de Frenet	42	🦴 VI.1 Généralités	52
🦴 I.4 Description de quelques mouvements	42	🦴 VI.2 Mouvements de translation	52
🦴 I.4.a Mouvement uniforme 1D	42	🦴 VI.2.a Aspect cinématique	52
🦴 I.4.b Mouvement circulaire uniforme	42	🦴 VI.2.b Grandeurs cinétiques	53
🦴 II Dynamique du point	42	🦴 VI.2.c Loi de la quantité de mouvement	53
🦴 II.1 Masse, centre de masse, quantité de mouvement	42	🦴 VI.3 Mouvement de rotation par rapport à un axe fixe	53
🦴 II.2 Les lois de Newton	42	🦴 VI.3.a Aspect cinématique	53
🦴 II.2.a 1ère loi de Newton	42	🦴 VI.3.b Moment d'inertie	54
🦴 II.2.b 2ème loi de Newton	43	🦴 VI.3.c Actions mécanique et condition d'équilibre	55
🦴 II.2.c 3ème loi de Newton	43	🦴 VI.3.d Théorème du moment cinétique pour un solide	55
🦴 II.3 Méthode de résolution des exercices	43	🦴 VI.4 Énergétique du solide	56
🦴 II.4 Forces à connaître	43	💧 I Introduction à la thermodynamique	57
🦴 II.4.a Poids	43	💧 I.1 Généralités	57
🦴 II.4.b Poussée d'Archimède	44	💧 I.2 Variables d'état	57
🦴 II.4.c Réaction d'un support	44	💧 I.2.a Pression	57
🦴 II.4.d Tension d'un fil inextensible	44	💧 I.2.b Température	58
🦴 II.4.e Force de rappel élastique (loi de Hooke)	44	💧 I.3 Équilibre thermodynamique	58
🦴 II.4.f Force de frottement	44	💧 I.4 Modèle des gaz parfaits	58
🦴 II.5 Interactions à connaître	44	💧 II Premier principe	58
🦴 II.5.a Interaction gravitationnelle	45	💧 II.1 Énergie interne, capacité thermique à volume constant	58
🦴 II.5.b Interaction coulombienne	45	💧 II.2 Premier principe	59
🦴 III Énergétique du point	45	💧 II.3 Types de transformations	59
🦴 III.1 Travail et puissance d'une force	45	💧 II.4 Travail des forces de pression	59
🦴 III.2 Théorème de l'énergie cinétique	45	💧 II.4.a Cas isochore	60
🦴 III.3 Force conservative, énergie potentielle	46	💧 II.4.b Cas isotherme	60
🦴 III.4 Théorème de l'énergie mécanique	46	💧 II.4.c Mécanique réversible	60

II.5 Diagramme de Watt	60	II.7 Action mécanique d'un champ magnétique sur un système physique	73
II.6 Enthalpie	60	II.8 Approche énergétique : Puissance des forces de Laplace	75
III Second principe	61	III Lois de l'induction : le cas des circuits fixes	76
III.1 Entropie et second principe	61	III.1 Les phénomènes d'induction	76
III.2 Irréversibilité d'une transformation thermodynamique	61	III.2 Loi de Faraday	77
III.3 Identité thermodynamique (HP)	62	III.3 Auto induction et couplage inductif	77
III.4 Entropie des gaz parfaits, lois de Laplace	62	III.4 Influence totale	77
III.5 Entropie des phases condensées	63	IV Lois de l'induction : le cas des circuits mobiles	78
IV Flux thermiques	63	IV.1 Force électromotrice d'un circuit en mouvement	79
IV.1 Flux thermique, puissance	63	IV.2 Rail de Laplace générateur	79
IV.2 Échanges conductifs	63	I Introduction à la mécanique quantique	80
IV.3 Échanges conductovectifs	63	I.1 Nature ondulatoire de la lumière	80
IV.4 Analogie électrique	64	I.2 Nature ondulatoire de la matière	80
V Machines thermiques	64	I Régression linéaire	81
V.1 Description générale d'une machine thermique cyclique	64	I.1 Explication	81
V.2 Les moteurs	64	I.2 Comment faire?	81
V.3 Rendement, efficacité	65	I.2.a Importer les bibliothèques	81
VI Changement de phase du corps pur	66	I.2.b Créer les données	81
VI.1 Échauffement isobare d'un corps pur	66	I.2.c Tracer le nuage de points	81
VI.2 Diagramme (P, T)	66	I.2.d Réaliser la régression linéaire	81
VI.3 Diagramme de Clapeyron (P, v), isotherme d'Andrews	67	I.2.e Tracer la droite de régression	81
VI.4 Enthalpie et entropie de changement d'état	68	II Instruments d'optique	82
I Introduction à la dynamique des particules chargées	69	II.1 Viseur	82
I.1 Force de Lorentz	69	II.2 Lunette Astronomique	82
I.2 Origine électrique	69	II.3 Collimateur	83
I.3 Origine magnétique	70	III Auto-collimation	83
II Généralités sur le champ magnétique	70	III.1 Principe	83
II.1 Généralités	70	III.2 Réalisation	83
II.2 Dépendance courant électrique et lignes de champ	71	III.2.a Montage	83
II.3 Champ magnétiques continus dans la nature	72	III.2.b Règle des $4f$	83
II.4 Moment magnétique, dipôle magnétique	72	IV Euler	83
II.5 Créer un champ magnétique	73	IV.1 Présentation	83
II.6 Lire une carte magnétique	73	IV.2 Principe algorithmique	83
		IV.3 Exemple d'application	84
		IV.4 Bonnes pratiques	84
		V Multimètre	85
		V.1 Présentation	85

 V.2 Voltmètre	85	 II.5 Écart normalisé	94
 V.3 Ampèremètre	85	 III Équations différentielles	94
 V.4 Ohmmètre	85	 III.1 Équations linéaires d'ordre 1	94
 VI Pont de Wheatstone	86	 III.2 Équations linéaires d'ordre 2	95
 VI.1 Présentation	86	 III.2.a Régime apériodique	96
 VI.2 Principe	86	 III.2.b Régime critique	96
 VI.3 Montage	86	 III.2.c Régime pseudo-périodique	96
 VI.4 Équilibre du pont de Wheatstone		 III.3 Résolution avec les complexes	96
87		 III.4 Temps caractéristique	96
 VI.5 Mesure de la résistance inconnue		 III.4.a Méthode des tangentes	97
87		 III.4.b Méthode des 63%	97
 VII Oscilloscope	87	 III.4.c Décroissement logarithmique	97
 VII.1 Présentation	87	 III.5 Autres équations	97
 VII.2 Montage	87	Table des matières	98
 VII.2.a Schématisation	87		
 VII.2.b Spécificité	87		
 VII.3 Utilisation	87		
 VII.3.a Allumage et branchements			
87			
 VII.3.b Réglage horizontal	87		
 VII.3.c Réglage vertical	88		
 VII.3.d Seuil	88		
 VII.3.e Curseurs	88		
 VII.3.f Meas	88		
 VII.3.g Type d'acquisition	88		
 VIII Monte-Carlo	88		
 VIII.1 Présentation	88		
 VIII.2 Procédé	88		
 VIII.2.a Étape 1	88		
 VIII.2.b Étape 2	88		
 VIII.2.c Étape 3	88		
 VIII.3 Et sur des régressions linéaires?			
89			
 VIII.3.a Étape 1	89		
 VIII.3.b Étape 2	89		
 I Analyse dimensionnelle	90		
 I.1 Système SI	90		
 I.2 Résoudre une équation de dimension	90		
 I.3 Homogénéité	90		
 II Incertitudes	92		
 II.1 Incertitude type A	92		
 II.2 Incertitude type B	93		
 II.3 Composer des incertitudes	93		
 II.3.a Somme d'incertitudes	93		
 II.3.b Produit d'incertitudes	93		
 II.4 Chiffres significatifs	93		