Nombres réels

I $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I.1 Les entiers naturels

Les entiers naturels sont définis par induction structurelle, on a 0, et on a la relation successeur $S(n) = n + 1$.

On a l'**axiome de récurrence** : $(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P(n)))$

Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: *Tout sous ensemble non vide et majoré de* $\mathbb{N}$ *admet un maximum.*

Il en découle que tout sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ est équivalente à l'axiome de récurrence.

De plus, $\mathbb{N}$ est doté d'une $\begin{cases} + \text{ commutative et associative} \\ \times \text{ commutative, associative et distribuable sur le } + \end{cases}$

I.2 Les entiers relatifs

Pour construire $\mathbb{Z}$ on symétrise tout $n \in \mathbb{N}$.

Les opérations $+$ et $\times$ se prolongent à $\mathbb{Z}$, ainsi $\mathbb{Z}$ est un **anneau** ($+$ associative, commutative avec un neutre 0 et il existe $-a$ et une $\times$ associative, distribuable sur $+$ et avec un neutre 1).

On dit aussi que $(A, +)$ est un **groupe abélien**.

II $\mathbb{Q}$

II.1 Construction de $\mathbb{Q}$

La classe $\overline{(a,b)}$ du couple (a,b) est noté $\frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Les lois définies sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ telles que $(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$ et $(a,b) \times (c,d) = (ac, bd)$ se prolongent, ainsi on a : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Propriétés et lois de $\mathbb{Q}$:

- $+$ et $\times$ commutatives et associatives
- $\times$ distribuable sur le $+$
- $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et $\frac{a}{b}$ admet un opposé $-\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$
- $1 = \frac{1}{1}$ neutre pour $\times$, tout $\frac{a}{b} \neq 0$ admet un inverse $\frac{b}{a}$

Ainsi $\mathbb{Q}$ est un **corps**.

Si on a $q = \frac{a}{b}$ et $r = \frac{c}{d}$ (avec $(b,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$), alors le signe de $ad - bc$ est indépendant des (a,b,c,d) choisis pour q et r.

Ainsi $q \leq r$ si et seulement si $ad - bc \leq 0$. La relation $\leq$ ainsi définie est un **ordre total** sur $\mathbb{Q}$.

III $\mathbb{R}$

III.1 Existence de nombres non rationnels

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On dit que x et y sont **incommensurables** si $\frac{x}{y}$ est irrationel.

Si n n'est pas un carré parfait, $\sqrt{n}$ est irrationnelle.

III.2 L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$

On obtient $\mathbb{R}$ en "bouchant" les trous de $\mathbb{Q}$, on considère $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$, ainsi E est borné et n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. En construisant $\mathbb{R}$, on comble ces trous en complétamt $\mathbb{Q}$ des bornes supérieures de tous les ensembles non vides bornés.

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: *Tout sous ensemble E non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*

On en déduit que *Tous sous ensemble E non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

III.3 Valeurs absolue et partie positive et négative

On a $|x|$ la **valeur absolue** de x, définie par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Elle est utile notamment pour majorer et minorer A par B et $-B$. En effet, $-B \leq A \leq B$ est équivalent à $|A| \leq B$.

On note x^+ la **partie positive** de x tel que $x^+ = \max(0, x)$ et on note x^- la **partie négative** de x tel que $x^- = -\min(0, x) = \max(0, -x)$.

Et on a les propriétés suivantes :

- $x^+ \geq 0$ et $x^- \geq 0$
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$
- $x = x^+ - x^-$
- $|x| = x^+ + x^-$

III.4 Rappels sur les opérations et les inégalités

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifie :

- C'est une relation d'*ordre total*
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^+$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x + y \geq 0$ avec égalité si $x = y = 0$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, xy \geq 0$

On a $x, y \in \mathbb{R}$, ainsi d'après la **règle des signes** on a :

- Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ ou $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$
- Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $xy \geq 0$

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, alors :

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, $a + c \leq b + d$ avec égalité $a = b$ et $c = d$
- Si $a \leq b$ alors $-b \leq -a$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, $a - d \leq b - c$
- Si $a \geq 0$ et $c \leq d$, alors $ac \leq ad$
- Si $a \leq 0$ et $c \leq d$, alors $ac \geq ad$
- Si $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$, alors $0 < ac \leq bd$ avec égalité si et seulement si $a = b$ et $c = d$

- Sinon pour les produits d'inégalités on se ramène à des raisonnements sur la valeur absolue avec ajout des signes ensuite.

Pour obtenir des inégalités on peut :

- Tout passer du même côté
- Procéder par étude de fonctions
- Utiliser une propriété de convexité ou de concavité
- Utiliser les inégalités classiques

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (**inégalité triangulaire**)
- $|a+b| \geq \| a| - |b\|$ (**deuxième inégalité triangulaire**)

Il en découle que $\| a| - |b\| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$ et que $|\sum_{i \in I} a_i| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$

On pose $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$, alors d'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** on a :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ sont colinéaires.

On admet l'**inégalité arithmético-géométrique**, ainsi pour tout $X \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ on a :

$$\frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) \leq \sqrt[n]{x_1 ... x_n}$$

III.5 Division euclidienne dans $\mathbb{R}$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$ d'après la **propriété d'Archimède**. Elle est reformulable en disant que pour tout $y > 0$, la suite $(ny)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, il existe un rationnel r tel que $0 < rx < y$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $ny \leq x < (n+1)y$. Et il existe un unique $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n'x < x \leq (n'+1)y$. Sauf quand $\frac{x}{y}$ est entier, $n = n'$, le résulat se généralise à x négatif.

On a la **division euclidienne**, ainsi :

- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe un unique entier n et un unique réel $r \in [0, y[$ tel que $x = ny + r$
- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{*}$, il existe un unique entier n et un unique réel $r \in [0, |y|[$ tel que $x = ny + r$

III.6 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$, si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il existe $z \in E$ tel que $x < z < y$.

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

III.7 Partie entière, partie décimale

La **partie entière** d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$ est le quotient de la division euclidienne de x par 1.

Le reste de cette division est parfois noté $\{x\}$, appellé **partie décimale**.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

- $\lfloor x \rfloor = \max(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\})$
- $\lfloor x \rfloor = \min(\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\}) - 1$

- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

On définit parfois aussi la **partie entière par excès**, notée $\lceil x \rceil$, comme étant le plus petit entier supérieur ou égal à x : $\lceil x \rceil = \min(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\})$.

On a alors $x \in \mathbb{R}$,

- $\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \text{ si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

On a les propriétés suivantes pour la partie entière :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \geq \lfloor x + y \rfloor > \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \lfloor xy \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

III.8 Représentation décimale

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des **nombres décimaux**, c'est à dire des réels x tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x$ est entier.

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique élément $y \in D_n$ tel que $y_n \leq x < y_n + 10^{-n}$.

- y_n est appellé **valeur approchée décimale** à la précision 10^{-n} **par défaut**.
- $y_n + 10^{-n}$ est appellé **valeur approchée décimale** à la précision 10^{-n} **par excès**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tel que $y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des entiers $a_n \in [\![0, 9]\!]$ tel que :

- Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall n \leq n_0, a_n = 0$
- $$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=n_0}^{0} a_n 10^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=n_0}^{0} a_n 10^{-n} + \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}$$
- Sauf si pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = 9$, on a alors :

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{n=n_0}^{0} a_n 10^{-n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

- Si x n'est pas décimal, alors x admet un unique développement décimal.
- Si x est décimal, x admet deux développements décimaux exactement, l'un terminant uniquement par des 9, l'autre uniquement par des 0.

On appelle **développement décimal propre** de x l'unique développement de x si x n'est pas décimal, ou l'unique développement de x terminant par des 0 si x est décimal. Ainsi, tout réel admet un unique développement décimal propre.

IV Intervalles

IV.1 Description des intervalles

Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dit que E est **convexe** si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB]$ est entièrement inclus dans E.

Un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$, c'est à dire tel que :
$\forall (a,b) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \Longrightarrow x \in I$

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles a et b :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, a \leq b$
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, a < b$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, a < b$
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, a < b$
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$
- $\emptyset$

On dit qu'un intervalle est :

- **ouvert** si il est de forme $]a,b[,]a,+\infty[,]-\infty,b[, \mathbb{R}$ et $\emptyset$
- **fermé** si il est de forme $[a,b], [a,+\infty[,]-\infty,b], \mathbb{R}$ et $\emptyset$
- **semi-ouvert** si il est de forme $[a,b[\text{et}]a,b]$