Sommes

I Manipulation des signes $\sum$ et $\prod$

I.1 Définition des notations

Soit I un ensemble fini et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.

- On note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des a_i pour $i \in I$.
- On note $\prod_{i\in I} a_i$ le produit des a_i pour $i \in I$.
- Lorque $I = [\![n, m]\!]$, avec $n \leq m$, on note $\sum_{i=n}^{m} a_i$ la somme des a_i pour $i \in [\![n, m]\!]$.

On dit que i une variable muette, il est donc possible de remplacer i par une autre lettre. Cependant, il est impossible de remplacer i par une lettre déjà utilisée dans la somme.

Si $I = \emptyset$, alors par convention $\sum_{i\in I} a_i = 0$ et $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

On définit la **factorielle** de n par $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

I.2 Changements d'indice

On a I et J deux ensembles finis, et $f : I \overset{\approx}{\to} J$ une bijection, alors $\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{f(i)}$. (On peut remplacer $\sum$ par $\prod$).

Il est aussi possible de translater l'indice, c'est-à-dire de remplacer i par $i - l$. On a alors $\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n-l}^{m-l} a_{i+l}$.

I.3 Sommation par groupement de termes

On suppose $I = I_1 \uplus I_2$, avec I fini, ainsi $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$.

On peut ainsi généraliser à n ensembles $I_1, I_2, ..., I_n$, avec $I = I_1 \uplus I_2 \uplus ... \uplus I_n$, on a alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i + ... + \sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in I_k} a_i$.

I.4 Linéarité

Soit λ et μ deux nombres réels ou complexes, alors on a $\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I}(a_i + b_i)$ et $\lambda \sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \lambda a_i$.

Ainsi on en déduit $\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$.

On a E un ensemble fini, et a un nombre réel ou complexe, alors $\sum_{i\in I} a = |E| \times a$.

I.5 Sommes télescopiques

On dit que $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est une somme télescopique si $a_k = b_{k+1} - b_k$.

On a alors $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0$.

I.6 Cas des produits

- Si $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors $\prod_{i \in I_1} a_i \times \prod_{i \in I_2} a_i = \prod_{i \in I_1 \uplus I_2} a_i$
- Si $\left(\prod_{i \in I} a_i\right)^\lambda \left(\prod_{i \in I} b_i\right)^\mu = \prod_{i \in I} (a_i)^\lambda (b_i)^\mu$
- $\prod_{i \in I} a = a^{|I|}$

On dit que $\prod_{k=0}^n a_k$ est une produit télescopique si $a_k = \frac{b_{k+1}}{b_k}$.

On a alors $\prod_{k=0}^n a_k = \prod_{k=0}^n \left(\frac{b_{k+1}}{b_k}\right) = \frac{b_{n+1}}{b_0}$.

I.7 Sommes multiples

Certaines sommes sont indexées sur un produit cartésien.

Ainsi on a $K \subset I \times J$,

- Soit $i \in I$, on définit la **coupe de K suivant i** : $K_{i,\bullet} = \{j \in J \mid (i,j) \in K\}$
- Soit $j \in J$, on définit la **coupe de K suivant j** : $K_{\bullet,j} = \{i \in I \mid (i,j) \in K\}$

On définit aussi $K'_{i,\bullet} = \left\{(i,j) \mid j \in K_{i,\bullet}\right\}$ et $K'_{\bullet,j} = \left\{(i,j) \mid i \in K_{\bullet,j}\right\}$.

On a l'inversion des signes sommes, ainsi :

$$\sum_{(i,j) \in K} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in K_{i,\bullet}} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{(i,j) \in K'_{i,\bullet}} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in K_{\bullet,j}} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{(i,j) \in K'_{\bullet}} a_{i,j}$$

Si $K = I \times J$ on a $K_{i,\bullet} = J$ et $K_{\bullet,j} = I$, ainsi

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j} \text{ (somme sur un pavé)}$$

On a aussi $\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{i,j}$ (somme sur un triangle)

I.8 Produits de sommes

On a $\left(\sum_{i \in I} a_i\right)\left(\sum_{j \in J} b_j\right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$

⚠ Il est important de rentre les indices idépendants comme dit précédemment.

Théorème de distributivité généralisé : On a :

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^{m_k} a_{k,i}\right) = \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in [\![1,m_1]\!] \times \dots \times [\![1,m_n]\!]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n}$$

II Sommes classiques à connaître

II.1 Sommes de puissances d'entiers

- $\sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

II.2 Sommes géométriques

On a a et b deux nombres réels ou complexes, et $n \in \mathbb{N}$, ainsi :

- $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$

- Si $b = 1$, $a^n - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$
- Si n est impair, on a $a^n + b^n = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k$

Soit x un nombre réel ou complexe, on a $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } x=1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ sinon} \end{cases}$