Nombres réels

I $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

I.1 Les entiers naturels

Les entiers naturels sont définis par induction structurelle, on a 0, et on a la relation successeur $S(n) = n + 1$.

On a l'**axiome de récurrence** : $(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P(n)))$

Propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: *Tout sous ensemble non vide et majoré de* $\mathbb{N}$ *admet un maximum.*

Il en découle que tout sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

La propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ est équivalente à l'axiome de récurrence.

De plus, $\mathbb{N}$ est doté d'une $\begin{cases} + \text{ commutative et associative} \\ \times \text{ commutative, associative et distribuable sur le } + \end{cases}$

I.2 Les entiers relatifs

Pour construire $\mathbb{Z}$ on symétrise tout $n \in \mathbb{N}$.

Les opérations $+$ et $\times$ se prolongent à $\mathbb{Z}$, ainsi $\mathbb{Z}$ est un **anneau** ($+$ associative, commutative avec un neutre 0 et il existe $-a$ et une $\times$ associative, distribuable sur $+$ et avec un neutre 1).

On dit aussi que $(A, +)$ est un **groupe abélien**.

II $\mathbb{Q}$

II.1 Construction de $\mathbb{Q}$

La classe $\overline{(a, b)}$ du couple (a, b) est noté $\frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Les lois définies sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ telles que $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$ se prolongent, ainsi on a : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Propriétés et lois de $\mathbb{Q}$:

- $+$ et $\times$ commutatives et associatives
- $\times$ distribuable sur le $+$
- $0 = \frac{0}{1}$ est neutre pour $+$, et $\frac{a}{b}$ admet un opposé $-\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$ si et seulement si $a = 0$
- $1 = \frac{1}{1}$ neutre pour $\times$, tout $\frac{a}{b} \neq 0$ admet un inverse $\frac{b}{a}$

Ainsi $\mathbb{Q}$ est un **corps**.

Si on a $q = \frac{a}{b}$ et $r = \frac{c}{d}$ (avec $(b, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$), alors le signe de $ad - bc$ est indépendant des (a, b, c, d) choisis pour q et r.

Ainsi $q \leq r$ si et seulement si $ad - bc \leq 0$. La relation $\leq$ ainsi définie est un **ordre total** sur $\mathbb{Q}$.

III $\mathbb{R}$

III.1 Existence de nombres non rationnels

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$. On dit que x et y sont **incommensurables** si $\frac{x}{y}$ est irrationel.

Si n n'est pas un carré parfait, $\sqrt{n}$ est irrationnelle.

III.2 L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$

On obtient $\mathbb{R}$ en "bouchant" les trous de $\mathbb{Q}$, on considère $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$, ainsi E est borné et n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. En construisant $\mathbb{R}$, on comble ces trous en complétamt $\mathbb{Q}$ des bornes supérieures de tous les ensembles non vides bornés.

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: *Tout sous ensemble E non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*

On en déduit que *Tous sous ensemble E non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

III.3 Valeurs absolue et partie positive et négative

On a $|x|$ la **valeur absolue** de x, définie par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Elle est utile notamment pour majorer et minorer A par B et $-B$. En effet, $-B \leq A \leq B$ est équivalent à $|A| \leq B$.

On note x^+ la **partie positive** de x tel que $x^+ = \max(0, x)$ et on note x^- la **partie négative** de x tel que $x^- = -\min(0, x) = \max(0, -x)$.

Et on a les propriétés suivantes :

- $x^+ \geq 0$ et $x^- \geq 0$
- $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$
- $x = x^+ - x^-$
- $|x| = x^+ + x^-$

III.4 Rappels sur les opérations et les inégalités

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifie :

- C'est une relation d'*ordre total*
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^+$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x + y \geq 0$ avec égalité si $x = y = 0$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, xy \geq 0$

On a $x, y \in \mathbb{R}$, ainsi d'après la **règle des signes** on a :

- Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ ou $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors $xy \leq 0$
- Si $x \leq 0$ et $y \leq 0$ alors $xy \geq 0$

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, alors :

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, $a + c \leq b + d$ avec égalité $a = b$ et $c = d$
- Si $a \leq b$ alors $-b \leq -a$
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, $a - d \leq b - c$
- Si $a \geq 0$ et $c \leq d$, alors $ac \leq ad$
- Si $a \leq 0$ et $c \leq d$, alors $ac \geq ad$
- Si $0 < a \leq b$ et $0 < c \leq d$, alors $0 < ac \leq bd$ avec égalité si et seulement si $a = b$ et $c = d$

- Sinon pour les produits d'inégalités on se ramène à des raisonnements sur la valeur absolue avec ajout des signes ensuite.

Pour obtenir des inégalités on peut :

- Tout passer du même côté
- Procéder par étude de fonctions
- Utiliser une propriété de convexité ou de concavité
- Utiliser les inégalités classiques

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (**inégalité triangulaire**)
- $|a+b| \geq \||a| - |b|\|$ (**deuxième inégalité triangulaire**)

Il en découle que $\||a| - |b|\| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$ et que $|\sum_{i \in I} a_i| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$

On pose $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$, alors d'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** on a :

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ sont colinéaires.

On admet l'**inégalité arithmético-géométrique**, ainsi pour tout $X \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ on a :

$$\frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n) \leq \sqrt[n]{x_1 ... x_n}$$