

# Nombres réels

## I $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

### I.1 Les entiers naturels

Les entiers naturels sont définis par induction structurelle, on a 0, et on a la relation successeur  $S(n) = n + 1$ .

On a l'**axiome de récurrence** :  $(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1))) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$

**Propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$**  : *Tout sous ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{N}$  admet un maximum.*

Il en découle que tout sous ensemble non vide de  $\mathbb{N}$  admet un minimum.

**La propriété fondamentale de  $\mathbb{N}$  est équivalente à l'axiome de récurrence.**

De plus,  $\mathbb{N}$  est doté d'une  $\begin{cases} + \text{ commutative et associative} \\ \times \text{ commutative, associative et distribuable sur le } + \end{cases}$

### I.2 Les entiers relatifs

Pour construire  $\mathbb{Z}$  on symétrise tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Les opérations  $+$  et  $\times$  se prolongent à  $\mathbb{Z}$ , ainsi  $\mathbb{Z}$  est un **anneau** ( $+$  associative, commutative avec un neutre 0 et il existe  $-a$  et une  $\times$  associative, distribuable sur  $+$  et avec un neutre 1).

On dit aussi que  $(A, +)$  est un **groupe abélien**.

## II $\mathbb{Q}$

### II.1 Construction de $\mathbb{Q}$

La classe  $\overline{(a, b)}$  du couple  $(a, b)$  est noté  $\frac{a}{b}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ .

Les lois définies sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  telles que  $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$  et  $(a, b) \times (c, d) = (ac, bd)$  se prolongent, ainsi on a :  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  et  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .

Propriétés et lois de  $\mathbb{Q}$  :

- $+$  et  $\times$  commutatives et associatives
- $\times$  distribuable sur le  $+$
- $0 = \frac{0}{1}$  est neutre pour  $+$ , et  $\frac{a}{b}$  admet un opposé  $-\frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} = 0$  si et seulement si  $a = 0$
- $1 = \frac{1}{1}$  neutre pour  $\times$ , tout  $\frac{a}{b} \neq 0$  admet un inverse  $\frac{b}{a}$

Ainsi  $\mathbb{Q}$  est un **corps**.

Si on a  $q = \frac{a}{b}$  et  $r = \frac{c}{d}$  (avec  $(b, d) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ), alors le signe de  $ad - bc$  est indépendant des  $(a, b, c, d)$  choisis pour  $q$  et  $r$ .

Ainsi  $q \leq r$  si et seulement si  $ad - bc \leq 0$ . La relation  $\leq$  ainsi définie est un **ordre total** sur  $\mathbb{Q}$ .

### III $\mathbb{R}$

#### III.1 Existence de nombres non rationnels

Soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont **incommensurables** si  $\frac{x}{y}$  est irrationnel.

Si  $n$  n'est pas un carré parfait,  $\sqrt{n}$  est irrationnelle.

#### III.2 L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$

On obtient  $\mathbb{R}$  en "bouchant" les trous de  $\mathbb{Q}$ , on considère  $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ , ainsi  $E$  est borné et n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$ . En construisant  $\mathbb{R}$ , on comble ces trous en complétant  $\mathbb{Q}$  des bornes supérieures de tous les ensembles non vides bornés.

**Propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$**  : *Tout sous ensemble  $E$  non vide et majoré de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$ .*

On en déduit que *Tous sous ensemble  $E$  non vide et majoré de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure dans  $\mathbb{R}$ .*

#### III.3 Valeurs absolue et partie positive et négative

On a  $|x|$  la **valeur absolue** de  $x$ , définie par  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

Elle est utile notamment pour majorer et minorer  $A$  par  $B$  et  $-B$ . En effet,  $-B \leq A \leq B$  est équivalent à  $|A| \leq B$ .

On note  $x^+$  la **partie positive** de  $x$  tel que  $x^+ = \max(0, x)$  et on note  $x^-$  la **partie négative** de  $x$  tel que  $x^- = -\min(0, x) = \max(0, -x)$ .

Et on a les propriétés suivantes :

- $x^+ \geq 0$  et  $x^- \geq 0$
- $x^+ = 0$  ou  $x^- = 0$
- $x = x^+ - x^-$
- $|x| = x^+ + x^-$

#### III.4 Rappels sur les opérations et les inégalités

La relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$  vérifie :

- C'est une relation d'*ordre total*
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \iff x - y \in \mathbb{R}^+$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x + y \geq 0$  avec égalité si  $x = y = 0$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, xy \geq 0$

On a  $x, y \in \mathbb{R}$ , ainsi d'après la **règle des signes** on a :

- Si  $x \geq 0$  et  $y \leq 0$  ou  $x \leq 0$  et  $y \geq 0$ , alors  $xy \leq 0$
- Si  $x \leq 0$  et  $y \leq 0$  alors  $xy \geq 0$

Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , alors :

- Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$ ,  $a + c \leq b + d$  avec égalité  $a = b$  et  $c = d$
- Si  $a \leq b$  alors  $-b \leq -a$
- Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$ ,  $a - d \leq b - c$
- Si  $a \geq 0$  et  $c \leq d$ , alors  $ac \leq ad$
- Si  $a \leq 0$  et  $c \leq d$ , alors  $ac \geq ad$
- Si  $0 < a \leq b$  et  $0 < c \leq d$ , alors  $0 < ac \leq bd$  avec égalité si et seulement si  $a = b$  et  $c = d$

- Sinon pour les produits d'inégalités on se ramène à des raisonnements sur la valeur absolue avec ajout des signes ensuite.

Pour obtenir des inégalités on peut :

- Tout passer du même côté
- Procéder par étude de fonctions
- Utiliser une propriété de convexité ou de concavité
- Utiliser les inégalités classiques

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

- $|a + b| \leq |a| + |b|$  (**inégalité triangulaire**)
- $|a + b| \geq ||a| - |b||$  (**deuxième inégalité triangulaire**)

Il en découle que  $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$  et que  $|\sum_{i \in I} a_i| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$

On pose  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ , alors d'après l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** on a :

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  sont colinéaires.

On admet l'**inégalité arithmético-géométrique**, ainsi pour tout  $X \in (\mathbb{R}^+)^n$  on a :

$$\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

### III.5 Division euclidienne dans $\mathbb{R}$

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x < ny$  d'après la **propriété d'Archimède**. Elle est reformulable en disant que pour tout  $y > 0$ , la suite  $(ny)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Pour tout  $x > 0$  et tout  $y > 0$ , il existe un rationnel  $r$  tel que  $0 < rx < y$ .

Soit  $x, y \in \mathbb{R}^+$ , il existe un unique  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $ny \leq x < (n+1)y$ . Et il existe un unique  $n' \in \mathbb{N}$  tel que  $n'x < x \leq (n'+1)y$ . Sauf quand  $\frac{x}{y}$  est entier,  $n = n'$ , le résultat se généralise à  $x$  négatif.

On a la **division euclidienne**, ainsi :

- Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}^+$ , il existe un unique entier  $n$  et un unique réel  $r \in [0, y[$  tel que  $x = ny + r$
- Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}^*$ , il existe un unique entier  $n$  et un unique réel  $r \in [0, |y|[$  tel que  $x = ny + r$

### III.6 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Un sous ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  est **dense** dans  $\mathbb{R}$ , si pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $x < y$ , il existe  $z \in E$  tel que  $x < z < y$ .

Les ensembles  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

### III.7 Partie entière, partie décimale

La **partie entière** d'un réel  $x$ , notée  $\lfloor x \rfloor$  est le quotient de la division euclidienne de  $x$  par 1.

Le reste de cette division est parfois noté  $\{x\}$ , appelé **partie décimale**.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

- $\lfloor x \rfloor = \max(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\})$
- $\lfloor x \rfloor = \min(\{n \in \mathbb{Z} \mid n > x\}) - 1$

- $\lfloor x \rfloor$  est l'unique entier tel que  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\lfloor x \rfloor$  est l'unique entier tel que  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

On définit parfois aussi la **partie entière par excès**, notée  $\lceil x \rceil$ , comme étant le plus petit entier supérieur ou égal à  $x$  :  $\lceil x \rceil = \min(\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\})$ .

On a alors  $x \in \mathbb{R}$ ,

- $\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

On a les propriétés suivantes pour la partie entière :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \geq \lfloor x + y \rfloor > \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \lfloor xy \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

### III.8 Représentation décimale

On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des **nombres décimaux**, c'est à dire des réels  $x$  tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $10^n x$  est entier.

Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{D}_n$  l'ensemble des décimaux tel que  $10^n x \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique élément  $y \in \mathbb{D}_n$  tel que  $y_n \leq x < y_n + 10^{-n}$ .

- $y_n$  est appelé **valeur approchée décimale** à la précision  $10^{-n}$  **par défaut**.
- $y_n + 10^{-n}$  est appelé **valeur approchée décimale** à la précision  $10^{-n}$  **par excès**.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  tel que  $y_n - y_{n-1} = \frac{a_n}{10^n}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ , il existe pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , des entiers  $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$  tel que :

- Il existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $\forall n \leq n_0, a_n = 0$
- $$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=n_0}^0 a_n 10^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n} = \sum_{n=n_0}^0 a_n 10^{-n} + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N a_n 10^{-n}$$
- Sauf si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, a_n = 9$ , on a alors :

$$\lfloor x \rfloor = \sum_{n=n_0}^0 a_n 10^{-n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^N a_n 10^{-n}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors :

- Si  $x$  n'est pas décimal, alors  $x$  admet un unique développement décimal.
- Si  $x$  est décimal,  $x$  admet deux développements décimaux exactement, l'un terminant uniquement par des 9, l'autre uniquement par des 0.

On appelle **développement décimal propre** de  $x$  l'unique développement de  $x$  si  $x$  n'est pas décimal, ou l'unique développement de  $x$  terminant par des 0 si  $x$  est décimal. Ainsi, tout réel admet un unique développement décimal propre.

## IV Intervalles

### IV.1 Description des intervalles

Soit  $E$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $E$  est **convexe** si et seulement si pour tout couple de points  $A$  et  $B$  de  $E$ , le segment  $[AB]$  est entièrement inclus dans  $E$ .

Un **intervalle**  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un sous-ensemble convexe  $I$  de  $\mathbb{R}$ , c'est à dire tel que :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \implies x \in I$$

Tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles  $a$  et  $b$  :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, a \leq b$
- $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, a < b$
- $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, a < b$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, a < b$
- $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
- $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$
- $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
- $] - \infty, b[ = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
- $] - \infty, +\infty[ = \mathbb{R}$
- $\emptyset$

On dit qu'un intervalle est :

- **ouvert** si il est de forme  $]a, b[, ]a, +\infty[, ] - \infty, b[, \mathbb{R}$  et  $\emptyset$
- **fermé** si il est de forme  $[a, b], [a, +\infty[, ] - \infty, b], \mathbb{R}$  et  $\emptyset$
- **semi-ouvert** si il est de forme  $[a, b[$  et  $]a, b]$

## IV.2 Intervalles et topologie

La notion d'intervalle est liée à la notion de topologie. On utilisera une brève introduction des ces notions dans  $\mathbb{R}^n$ , en utilisant la distance euclidienne canonique :  $d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ . Si  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a  $d(x, y) = |x - y|$ .

Soit  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $r \in \mathbb{R}^+$ , on a :

- On a la **boule ouverte** de centre  $X$  et de rayon  $r$  :  $B(X, r) = \dot{B}(X, r) = \{Y \in \mathbb{R}^n, d(X, Y) < r\}$ .
- On a la **boule fermée** de centre  $X$  et de rayon  $r$  :  $\overline{B}(X, r) = \{Y \in \mathbb{R}^n, d(X, Y) \leq r\}$ .

Dans  $\mathbb{R}$  les boules ouvertes et fermées sont des intervalles,  $B(x, r) = ]x - r, x + r[$  et  $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$ . De fait, *tout intervalle ouvert est une boule ouverte, et tout intervalle fermé est une boule fermée*. Soit  $]a, b[ = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$  et  $[a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ .

La majoration de certaines *valeurs absolue* se traduit par l'appartenance à une *boule fermée*, ainsi  $|x - a| \leq r$  est équivalent à  $x \in \overline{B}(a, r)$  et par l'appartenance à une *boule ouverte*, ainsi  $|x - a| < r$  est équivalent à  $x \in B(a, r)$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , un **voisinage** de  $x$  est un ensemble  $V$  tel qu'il existe une boule ouverte centrée en  $x$  et incluse dans  $V$  :

$$\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset V, \text{ i.e. } \exists \varepsilon > 0, \forall y \in V, d(x, y) < \varepsilon \implies y \in V$$

En gros,  $V$  est un voisinage de  $x$  si  $x$  est à l'intérieur de  $V$ , et non sur le bord.

Un **ouvert**  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est un sous ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que pour tout  $x \in U$ ,  $U$  est un voisinage de  $x$ .  $U \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert ssi :  $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset U$ .

Un sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  est **fermé** si et seulement si son complémentaire  $C_E F$  est ouvert.

On a :

- Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert
- Toute intersection quelconque de fermés est un fermé
- Toute union finie de fermés est un fermé

On a les contre-exemples suivants :

- Pour une intersection infinie d'ouverts, on a  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left] - \frac{1}{n}, 1[ = [0, 1[$
- Pour une union infinie de fermés, on a  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n}, 1 \right] = ]0, 1]$

## V Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

La **droite achevée**  $\overline{\mathbb{R}}$  est l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

On peut prolonger l'ordre de  $\mathbb{R}$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  en posant  $-\infty \leq x \leq +\infty$  pour tout  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ .

On peut prolonger partiellement les opérations  $+$  et  $\times$  à  $\overline{\mathbb{R}}$  en posant :

- $-(+\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}, x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}, x + (-\infty) = -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_+^*, x \times (+\infty) = +\infty, x \times (-\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_-^*, x \times (+\infty) = -\infty, x \times (-\infty) = +\infty$

**⚠ Attention :** Il existe certaines opérations qui ne sont pas définies, et définissent les *formes indéterminées* de la somme et du produit :  $-\infty + (+\infty)$ ,  $0 \times (+\infty)$  et  $0 \times (-\infty)$

On peut étendre la *propriété fondamentale* de  $\mathbb{R}$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , ainsi *tout sous ensemble de  $\overline{\mathbb{R}}$  admet une borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$* . On a aussi *tout sous ensemble de  $\overline{\mathbb{R}}$  admet une borne inférieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$* .