Logique et raisonnements

I Rudiments de logique

I.1 Formule propositionnelles, prédicats

Une **formule propositionnelle** est une formule liant des lettres représentant des *propositions élémentaires* et les *opérations logiques* suivantes :

- $\wedge$: et
- $\vee$: ou
- $\Longrightarrow$: implique
- $\Longleftrightarrow$: équivalent à
- $\neg$: non

On dit que A est **suffisante** à B si $A \Longrightarrow B$, que A est **nécessaire** à B si $B \Longrightarrow A$ et qu'elle est **suffisante et nécessaire** si $A \Longleftrightarrow B$.

Les **tables de vérité** permettent de savoir quand une propriété est vraie ou fausse.

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$(P \vee Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$(P \wedge Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$(P \Longrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$(P \Longleftrightarrow Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Deux formules sont dites **équivalentes** si et seulement si elles possèdent la même table de vérité, ainsi on note $A \equiv B$.

Les **tautologies** sont des formules toujours vraies.

On a les équivalences et tautologies suivantes :

- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ *(associativité)*
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ *(associativité)*
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *(distributivité)*
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(distributivité)*
- $(A \wedge (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow B$ est une tautologie *(modus ponens)*
- $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow B \vee \neg A$
- $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$ *(contraposée)*

I.2 Quantificateurs

On a $F(x)$ une propriété dépendant d'une variable x,

- Le quantificateur $\forall$ est satisfait si et seulement si, pour toute valeur possible prise de x, $F(x)$ est vraie.
- Le quantificateur $\exists$ est satisfait si et seulement si, il existe un x tel que $F(x)$ soit vraie. Il est donc possible de choisir un x convenable. Si le x est unique, on utilise le quantificateur $\exists!$.

Dans le cas des quantificateurs, les variables choisies sont dites **muettes**. Les quantificateurs peuvent être réduits à des intervalles spécifiques avec $\forall x \in E$ ou $\exists x \in E$.

I.3 Négation

On a les formules suivantes pour les négations :

- $\neg\neg P \equiv P$
- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ *(loi de De Morgan)*
- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \wedge \vee Q$ *(loi de De Morgan)*
- $\neg(P \implies Q) \equiv P \wedge \neg Q$
- $\neg(P \iff Q) \equiv ((\neg P) \iff Q) \equiv (Q \iff (\neg P))$

Les quantificateurs sont aussi négationnables :

- $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$
- $\neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$

II Principes de rédaction, modes raisonnements et démonstrations

II.1 Composition d'un texte mathématique

Un texte mathématique est constitué de :

1. **définitions** : descriptions de certains objets
2. **résultats** : énoncés mettant en jeu les objets définis, et donnant des propriétés vérifiées. On distingue :
   - *axiomes* : résultats qui sont des vérités fondamentales qui ne sont pas à démontrer
   - *théorèmes* : résultats les plus significatifs, démontrés à partir des axiomes et de résultats démontrés antérieurement
   - *propositions* : résultats de moindre envergure
   - *lemmes* : résultats à voir comme des étapes intermédiaires
   - *corollaires* : conséquences d'autres résultats
3. **démonstrations** : justification de la véracité des résultats
4. **conjectures** : ce qu'on pense être vrai mais qu'on a pas réussi à prouver

Un énoncé est souvent sous la forme $A \implies B$ avec A les hypothèses et B les conclusions.

II.2 Comment construire une démonstration

Pour construire une démonstration on utilise les principes suivants :

- **Prouver une implication** $A \implies B$:

  On suppose que A est vrai, et on montre que B est vrai. Il peut être plus simple de montrer la contraposée dans certains cas.

- **Prouver une équivalence** $A \iff B$:

  On prouve $A \implies B$ et $B \implies A$, il est aussi possible de faire par équivalences successives mais il faut bien vérifier qu'on peut *remonter* les équivalences.

- **Prouver une conjonction** $A \wedge B$:

  On prouve A puis on prouve B.

- **Prouver une disjonction** $A \vee B$:

  On prouve que $\neg A \implies B$, ainsi on suppose que $\neg A$ et on montre que B est vraie. On peut intervertir A et B pour faciliter la résolution.

- **Prouver** $\forall x A(x)$:

  On pose un x **supposé quelconque** et on montre que pour ce x, $A(x)$ est vérifié. Le fait d'avoir pris x quelconque montre qu'alors $A(x)$ est vrai pour tout x.

- **Prouver** $\exists x A(x)$:

  Dans le meilleur des cas on construit **x** qui convient. Pour s'aider à trouver un **x** convenable on peut faire une analyse/synthèse.

⚠ **Il ne faut jamais perdre de vue le but d'une preuve**

II.3 Le Modus ponens

Pour que B soit vrai, il suffit que A soit vrai et que $A \implies B$, on exploite la tautologie $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$. Il est important de vérifier à la fois A et à la fois $A \implies B$, comme quand on utilise un théorème utilisé en donnant son nom, et la validité des hypothèses d'autre part.

II.4 Démonstration par la contraposée

On exploite l'équivalence $(A \implies B) \equiv (\neg B \implies \neg A)$, ainsi on suppose la conclusion B fausse et on montre que dans ce cas l'hypothèse A ne peut être vraie. L'expression $\neg B \implies \neg A$ est appelée **contraposée** de $A \implies B$.

Si A est toujours vraie, alors on montre que supposer $\neg B$ nous amène à une contradiction, on procède donc à une **démonstration par l'absurde**.

II.5 Disjonction de cas

Le principe de disjonction de cas repose sur $(A \vee B) \implies C \equiv (A \implies C) \wedge (B \implies C)$. On regarde ce qu'il se passe pour l'hypothèse A, puis pour l'hypothèse B. Ainsi si A est vérifiée C aussi, et pareillement pour B.

II.6 Analyse-Synthèse

Ce principe de démonstration est surtout adapté pour les problèmes existenciels.

- Phase d'**analyse** (recherche de CN) : On suppose que l'objet existe, et à l'aide des propriétés qu'il est censé vérifier on récupère le plus d'informations possibles sur la façon de le construire.
- Phase de **synthèse** (vérification des CS) : Lorsqu'on a suffisamment d'informations sur une façon de construire l'objet, on construit un objet de la sorte, et on vérifie si il répond au problème.
- Si la phase d'analyse fournit une expression explicite de l'objet, alors l'objet est unique.

⚠ **Il est primordial de préciser qu'il s'agit d'une analyse synthèse car on suppose que l'objet existe.**

II.7 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence est un axiome de la construction de $\mathbb{N}$, il s'énonce :

$$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1))) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$$

On a $P(0)$ l'initialisation et $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1))$ l'hérédité.

II.8 Principe de la descente infinie (HP)