Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Тернового Володимира Михайловича

Звіт
на тему:

"Крайова задача для системи диференціальних рівнянь"

Львів-2016

Зміст

1 Постановка задачі **3**

2 Метод **3**

3 Числові експерименти **5**

3.1 Приклад 5

Список літератури **7**

1 Постановка задачі

Розглянемо крайову задачу, яку описує система диференціальних рівнянь

$$-\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d}{dx}\left(p_{jk}(x)\frac{du_k}{dx}\right)-q_{jk}(x)u_k\right]=f_j(x);\quad x\in(a,b); \tag{1}$$

$$u_k(a)=u_k(b)=0;\quad k,j=1,2,\ldots,s \tag{2}$$

Уведемо позначення для матриць стовпців невідомих і правих частин та матриць коефіцієнтів

$$\begin{gathered} u=\{u_j\};\quad f=f_j(x);\\ P=\{p_{jk}(x)\};\quad Q=\{q_{jk}(x)\}; \end{gathered}$$

Урахувавши їх задачу (1), (2) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}P(x)\frac{du}{dx}+Q(x)u=f(x);\ x\in(a,b);\ f(x)\in L_2(a,b)\\ u(a)=0;\ u(b)=0; \end{gathered} \tag{3}$$

Оскільки оператор задачі (1), (2) додатно визначений, то її можна записати у таких варіаційних формулюваннях:

$$F(u)\to\min,\ u\in U; \tag{4}$$

$$F(u)=\sum_{j,k=1}^{s}\int\limits_a^b p_{jk}(x)u_j'u_k'dx+\sum_{j,k=1}^{s}q_{jk}(x)u_ju_kdx\geq\lambda\sum_{k=1}^{s}\int\limits_a^b {u_k'}^2dx$$

$$U=\left\{u=\{u_1,\ldots,u_s\}^T;\ u_k\in W_2^{(1)}(a,b),\ u_k(a)=u_k(b)=0,\ k=\overline{1,s}\right\};$$

$$(Au,v)=(f,v),\quad\forall v\in U,u\in U. \tag{5}$$

Варіаційні формулювання (4), (5) є еквівалентними.

2 Метод

Для побудови наближеного розв'язку варіаційної задачі задамо поділ області

$$a=x_0<x_1<,\ldots,<x_{n-1}<x_n=b. \tag{6}$$

На скінченному елементі $\Omega_i=[x_{i-1},x_i]$ наближений розв'язок u_h запишемо у вигляді

$$u_h=N_i(x)q_i; \tag{7}$$

Де матриця $N_i(x)$ розміру $s\times 2s$ має вигляд

$$N_i=\begin{pmatrix}\varphi_{i-1}^h & 0 & \varphi_i^h & 0\\ 0 & \varphi_{i-1}^h & 0 & \varphi_i^h\end{pmatrix}; \tag{8}$$

$$q_i=\left\{u_{1,i-1}^h,u_{2,i-1}^h,u_{1,i}^h,u_{2,i}^h\right\}^T; \tag{9}$$

Матриця системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ формується з матриць

$$A_i = K_i + M_i; \tag{10}$$

де,

$$K_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \begin{pmatrix} \varphi'^h_{i-1} & 0 \\ 0 & \varphi'^h_{i-1} \\ \varphi'^h_i & 0 \\ 0 & \varphi'^h_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^h_{i-1} & 0 & \varphi^h_i & 0 \\ 0 & \varphi^h_{i-1} & 0 & \varphi^h_i \end{pmatrix} dx \tag{11}$$

$$K_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \begin{pmatrix} (\varphi'^h_{i-1})^2 p_{11} & (\varphi'^h_{i-1})^2 p_{12} & \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{11} & \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{12} \\ (\varphi'^h_{i-1})^2 p_{12} & (\varphi'^h_{i-1})^2 p_{22} & \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{12} & \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{22} \\ \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{11} & \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{12} & (\varphi'^h_i)^2 p_{11} & (\varphi'^h_i)^2 p_{12} \\ \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{12} & \varphi'^h_{i-1}\varphi'^h_i p_{22} & (\varphi'^h_i)^2 p_{12} & (\varphi'^h_i)^2 p_{22} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$M_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \begin{pmatrix} (\varphi^h_{i-1})^2 q_{11} & (\varphi^h_{i-1})^2 q_{12} & \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{11} & \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{12} \\ (\varphi^h_{i-1})^2 q_{12} & (\varphi^h_{i-1})^2 q_{22} & \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{12} & \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{22} \\ \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{11} & \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{12} & (\varphi^h_i)^2 q_{11} & (\varphi^h_i)^2 q_{12} \\ \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{12} & \varphi^h_{i-1}\varphi^h_i q_{22} & (\varphi^h_i)^2 q_{12} & (\varphi^h_i)^2 q_{22} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Стовпець правих частин системи рівнянь МСЕ формується з матриць

$$B_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} N_i^T(x) f(x) dx = \begin{pmatrix} \varphi^h_{i-1} & 0 \\ 0 & \varphi^h_{i-1} \\ \varphi^h_i & 0 \\ 0 & \varphi^h_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \begin{pmatrix} \varphi^h_{i-1}, f_1 \\ \varphi^h_{i-1}, f_2 \\ \varphi^h_i, f_1 \\ \varphi^h_i, f_2 \end{pmatrix} dx. \tag{14}$$

Схема формування лінійних алгебричних рівнянь для (s=2) зображена на рис.1.1

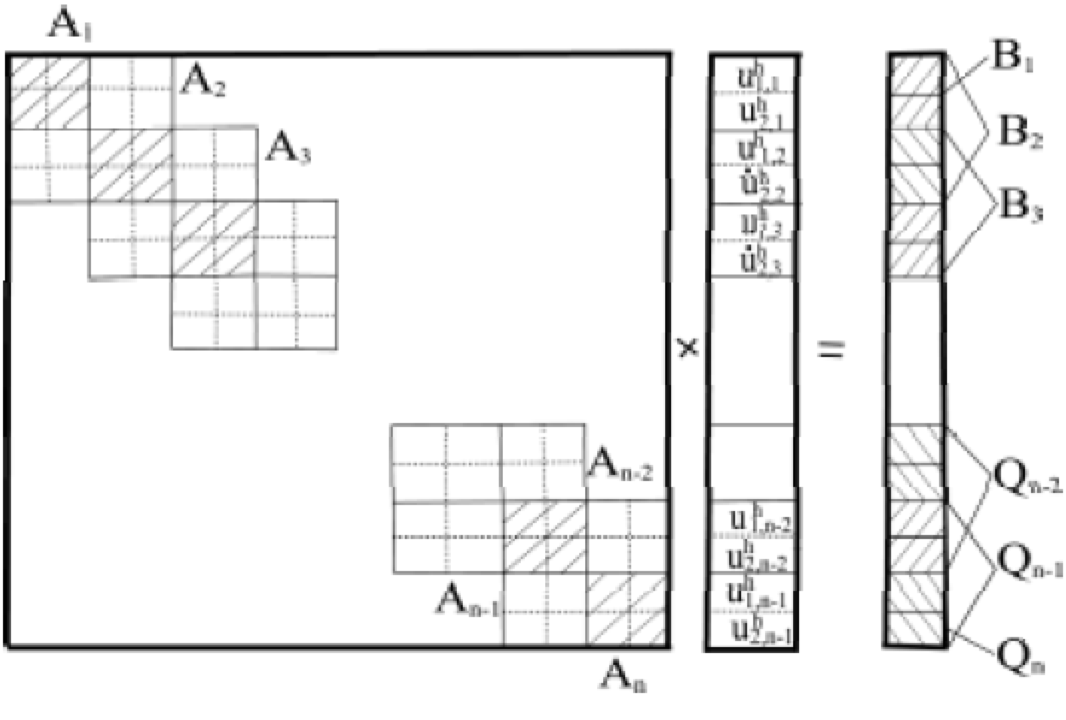

Рис.1.1 Структура системи лінійних алгебричних рівнянь.

3 Числові експерименти

Для запису одновимірних кусково-лінійних базисних функцій розділимо проміжок $[a, b]$ на відрізки — скінченні елементи, точками $x_i, i = 0, 1, ..., n, x_0 = a, x_n = b$. Задамо базисну функцію $\varphi_i^h(x)$ співвідношенням

$$\varphi_i^h = \begin{cases} 0, \; x_0 < x < x_{i-1}; \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-}}, \; x_{i-1} \leq x < x_i; \\ -\frac{x - x_{i+1}}{h_{i+1}}, \; x_i \leq x < x_{i+1}; \\ 0, \; x_{i+1} \leq x < x_n, \end{cases},$$

де $h_i := x_i - x_{i-1}$.

3.1 Приклад

Задамо $a = 0, \quad b = 1, \quad f_1 = -4 + a + b - 4, \quad f_2 = 3x^2 - 12x - 2ax - 2bx - 4a + 4b - 2$. Результат:

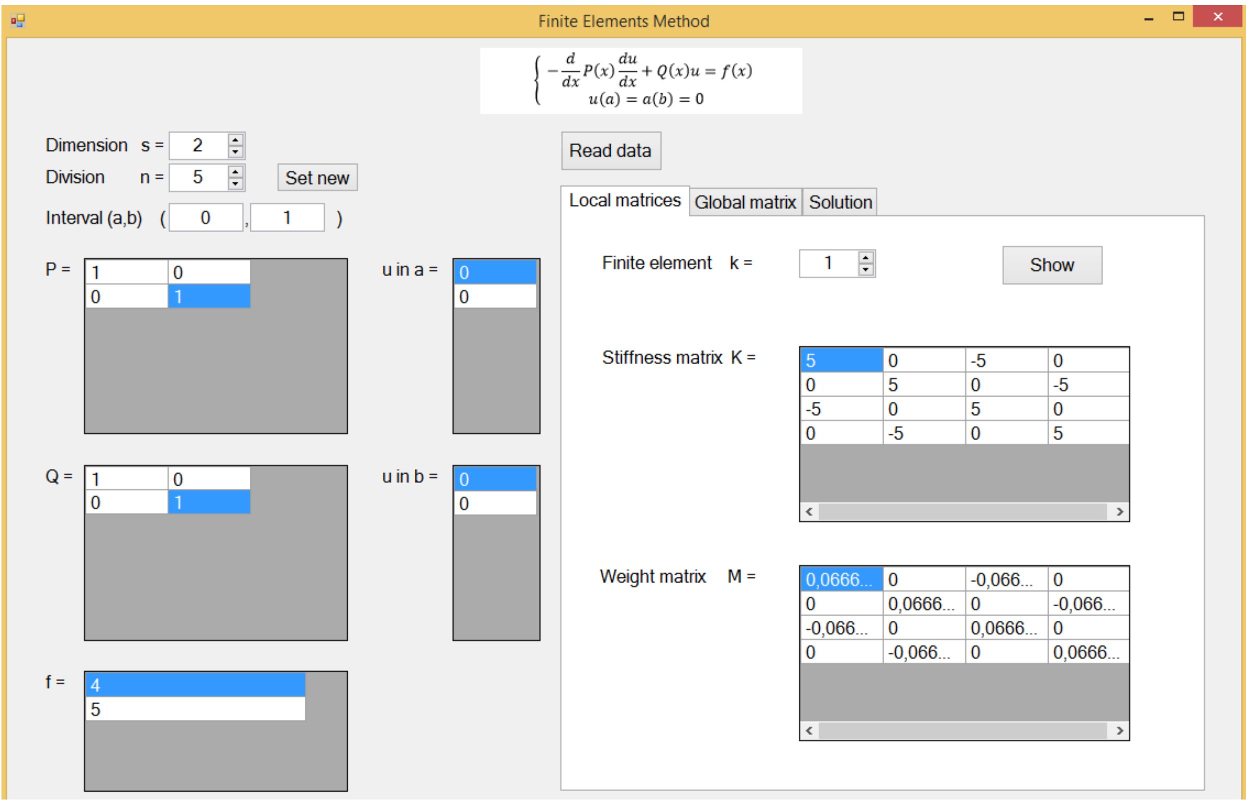

Рис.1.2 Вхідні дані.

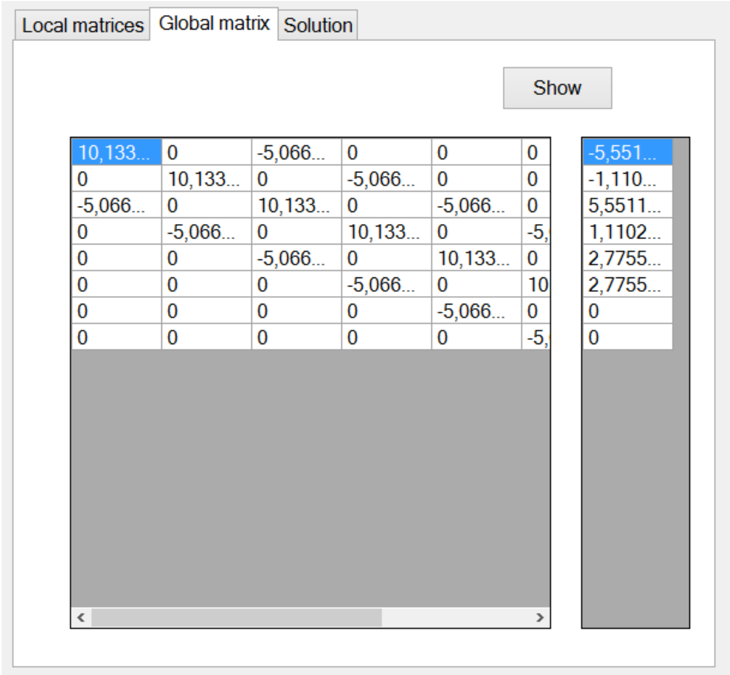

Рис.1.3 Глобальна матриця.

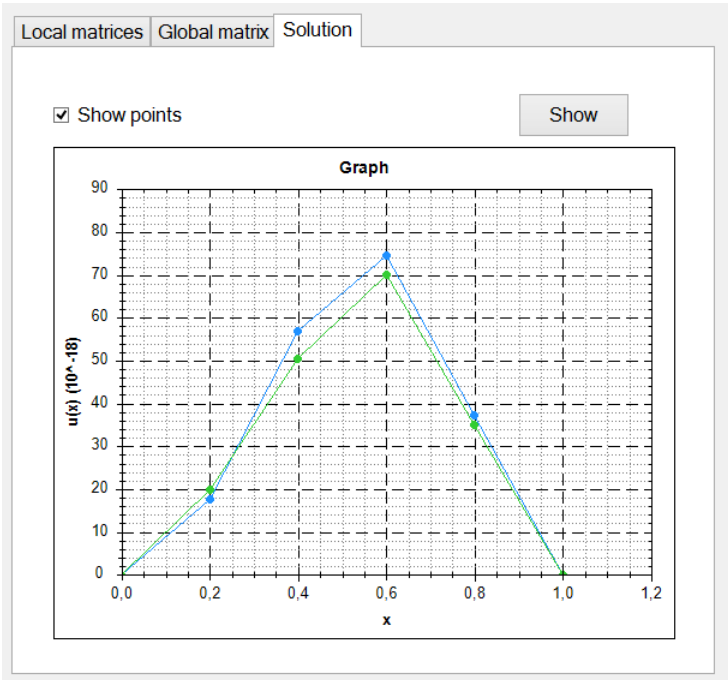

Рис.1.4 Графік.

Література

[1] *Савула Я.Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. - Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.

[2] *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.–590 с.