

1. Симетричні оператори. Приклади.

Розглядатимемо задачі вигляду

$$Au = f, \quad (1.1)$$

де A – лінійний оператор, що відображає деяку множину D_A (область визначення оператора A), яка належить гільбертовому простору H , на множину $R_A \subset H$ (область значень оператора A).

Приклад 1. Для крайової задачі

$$-u''(x) = f, \quad x \in (a, b); \quad (1.2)$$

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \quad (1.3)$$

припускаючи, що $f \in C[a, b]$, схарактеризуємо область визначення D_A її оператора так:

$$D_A = \{u(x) : u(x) \in C^{(2)}[a, b], u(a) = 0, u'(b) = 0\}. \quad (1.4)$$

Отже, оператор крайової задачі (1.2), (1.3) характеризується диференціальним рівнянням (1.2) та областю визначення (1.4).

Означення. Оператор A називають симетричним, якщо його область визначення $D_A \subset H$ є щільною множиною у просторі H , і виконується співвідношення

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in D_A. \quad (1.8)$$

Приклад 3. Доведемо, що оператор задачі (1.2), (1.3) симетричний. Перш за все зазначимо, що множина D_A (1.4) щільна в $L_2(0, 1)$. Цей висновок ґрунтується на очевидному співвідношенні $C_0^{(\infty)} \subset D_A$ і тому факті, що $C_0^{(\infty)}$ утворює щільну множину у просторі $L_2(0, 1)$ [5, 10]. Розглянемо скалярний добуток

$$(Au, v) = - \int_a^b u'' v dx, \quad \forall u, v \in D_A. \quad (1.9)$$

Зінтегруємо праву частину попереднього виразу частинами і візьмемо до уваги граничні умови (1.3). Отримаємо

$$(Au, v) = \int_a^b u' v' dx. \quad (1.10)$$

Оскільки права частина цього виразу є симетричною відносно функцій u та v , то можна записати

$$(Au, v) = (Av, u). \quad (1.11)$$

З огляду на симетрію скалярного добутку остаточно одержимо

$$(Au, v) = (u, Av). \quad (1.12)$$

2. Додатні оператори. Приклад.

Означення. Оператор A називають додатним, якщо він симетричний, і виконуються співвідношення

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in D_A; \quad (1.13)$$

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u \equiv 0. \quad (1.14)$$

Якщо в цьому разі існує стала $\gamma > 0$ така, що виконується нерівність

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad (1.15)$$

то оператор A називають додатко визначеним.

Приклад 2. Розглянемо крайову задачу Діріхле для рівняння Пуассона у двовимірній області Ω з границею Γ :

$$-\Delta u = f(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega; \quad (1.5)$$

$$u = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma. \quad (1.6)$$

Тут

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

$f \in C(\bar{\Omega})$. Очевидно, що область визначення оператора задачі (1.5), (1.6) можна схарактеризувати так:

$$D_A = \{u(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) \in C^{(2)}(\bar{\Omega}); u = 0, x_1, x_2 \in \Gamma\}. \quad (1.7)$$

Приклад 4. Доведемо додатність оператора крайової задачі Діріхле для рівняння Пуассона (1.5), (1.6). Область визначення D_A цього оператора є щільною множиною в просторі $L_2(\Omega)$ (див. приклад 1). Розглянемо вираз

$$(Au, u) = - \int_{\Omega} \Delta u \, u \, d\Omega.$$

Щоб його перетворити, отримаємо формулу Гріна для оператора Лапласа. З цією метою використаємо формулу Остроградського [8,10]

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (\varphi l_1 + \psi l_2) d\Gamma, \quad (1.16)$$

де $l_i = \cos(\nu, x_i)$, $i = 1, 2$; ν — зовнішня нормаль до границі Γ області Ω . Прийемо у формулі (1.16) $\varphi = uv$, $\psi = 0$. Знайдемо

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\Gamma} uv l_1 d\Gamma. \quad (1.17)$$

Аналогічно матимемо

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_2} d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_2} d\Omega + \int_{\Gamma} u v l_2 d\Gamma. \quad (1.18)$$

Підставивши у формули (1.17), (1.18) замість функції u її похідні $\partial u / \partial x_1$ та $\partial u / \partial x_2$ і додаючи їх, отримаємо формулу Гріна

$$- \int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma, \quad (1.19)$$

де

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1} l_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} l_2. \quad (1.20)$$

Отже, для скалярного добутку (Au, u) з урахуванням формули Гріна та граничних умов (1.6) запишемо

$$(Au, u) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega. \quad (1.21)$$

Очевидно, що $(Au, u) \geq 0$. Припустимо тепер, що

$$(Au, u) = 0. \quad (1.22)$$

Звідси, враховуючи (1.21), матимемо

$$\operatorname{grad} u \equiv 0 \Rightarrow u \equiv \text{const}. \quad (1.23)$$

Якщо взяти до уваги граничну умову (1.6), то отримаємо потрібний результат $u \equiv 0$.

Зауваження. Для можливості застосування формули Остроградського вважатимемо, що область Ω — обмежена зв'язна множина евклідового простору \mathbf{R}^2 з ліпшицевою границею Γ .

3. Теорема про єдність розв'язку крайової задачі з додатним оператором.

Уважатимемо тут, що задача

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (1.33)$$

має додатний оператор, який відображає область його визначення D_A у гільбертів простір H .

Зазначимо перш за все, що властивість додатності оператора задачі (1.33) пов'язана з єдиністю її розв'язку. Виконується така теорема:

Теорема 1. *Нехай A – додатний оператор. Тоді, якщо задача (1.33) має розв'язок, то він єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки задачі (1.33) u_1 та u_2 , причому u_1 не дорівнює тотожно u_2 . Розглянемо скалярний добуток $(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2)$. Оскільки $A(u_1 - u_2) = Au_1 - Au_2 = f - f = 0$, то

$$(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0.$$

Звідси, враховуючи, що A – додатний оператор, робимо висновок, що $u_1 - u_2 \equiv 0$. Це суперечить початковому припущенню, а отже, доводить теорему. ■

4. Додатновизначені оператори. Приклади. Нерівність Фрідрікса.

Означення. Оператор A називають додатним, якщо він симетричний, і виконуються співвідношення

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in D_A; \quad (1.13)$$

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u \equiv 0. \quad (1.14)$$

Якщо в цьому разі існує стала $\gamma > 0$ така, що виконується нерівність

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad (1.15)$$

то оператор A називають додатко визначеним.

Приклад 5. Доведемо додатну визначеність оператора задачі (1.2), (1.3). Для цього запишемо $u(x)$ у вигляді

$$u(x) = \int_a^x \frac{du}{dt} dt. \quad (1.24)$$

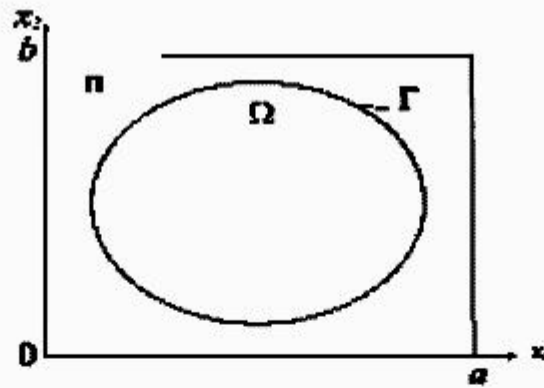


Рис. 1.1. Двовимірна область

Звідси, враховуючи нерівність Коші–Буняковського, отримаємо

$$u^2(x) = \left(\int_a^x \frac{du}{dt} dt \right)^2 \leq \int_a^x \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt \int_a^x dx \leq (x-a) \int_a^b \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dt. \quad (1.25)$$

Зінтегрувавши ліву та праву частини ланцюжка нерівностей (1.25), знайдемо

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx. \quad (1.26)$$

Отриману нерівність (1.26) називають нерівністю Фрідрікса. Використовуючи її, можна довести додатну визначеність оператора задачі (1.2), (1.3). Справді, враховуючи співвідношення (1.26), матимемо

$$(Au, u) \geq \frac{2}{(b-a)^2} \|u\|^2. \quad (1.27)$$

Отже,

$$\gamma^2 = \frac{2}{(b-a)^2}.$$

Приклад 6. Доведемо додатну визначеність оператора задачі (1.5), (1.6). Припустимо, не зменшуючи загальності, що однозв'язна область Ω з ліпшицевою границею Γ розташована у першому квадранті декартової системи координат (рис. 1.1). Помістимо область Ω усередині прямокут-

ника Π і довізначимо функцію $u(x_1, x_2)$ на $\Pi \setminus \Omega$, прийнявши, що в $\Pi \setminus \Omega$ вона дорівнює нулю. Запишемо далі очевидне співвідношення

$$u(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \frac{\partial u(t, x_2)}{\partial t} dt. \quad (1.28)$$

Звідси, враховуючи нерівність Коші–Буняковського, знайдемо (аналогічно як у формулі (1.25))

$$u^2(x_1, x_2) = x_1 \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1. \quad (1.29)$$

Зінтегруємо цю нерівність на прямокутнику Π

$$\int_{\Pi} u^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \frac{a^2}{2} \int_{\Pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dx_2. \quad (1.30)$$

Подібним способом отримаємо і таку нерівність:

$$\int_{\Pi} u^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \frac{b^2}{2} \int_{\Pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 dx_2. \quad (1.31)$$

Додаючи нерівності (1.30) та (1.31) і враховуючи, що в $\Pi \setminus \Omega$

$$u(x_1, x_2) \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \equiv 0,$$

одержимо нерівність, яку теж називають нерівністю Фрідрікса,

$$\int_{\Omega} u^2(x_1, x_2) d\Omega \leq c^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega, \quad (1.32)$$

де

$$c^2 = \min \left\{ \frac{a^2}{2}, \frac{b^2}{2} \right\}.$$

Урахувавши (1.21) та (1.32), отримаємо

$$(Au, u) \geq \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u^2 d\Omega.$$

Отже, оператор задачі Діріхле для рівняння Пуассона додатно визначений.

5. Теорема про функціонал енергії.

Уважатимемо тут, що задача

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (1.33)$$

має додатний оператор, який відображає область його визначення D_A у гільбертів простір H .

Теорема 2 (теорема про мінімум функціонала енергії). *Нехай A — додатний оператор. Якщо задача (1.33) має розв'язок, то він надає мінімуму функціоналу*

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f), \quad u \in D_A. \quad (1.34)$$

Навпаки, функція, яка надає мінімального значення функціоналу (1.34), є одночасно розв'язком задачі (1.33).

Доведення. 1. Нехай функція u_0 є розв'язком задачі (1.33). Візьмемо довільну функцію $\eta \in D_A$. Очевидно, що $u_0 + \eta \in D_A$. Розглянемо $F(u_0 + \eta)$. Враховуючи симетрію оператора A та симетрію скалярного добутку, отримаємо

$$F(u_0 + \eta) = F(u_0) + 2(Au_0 - f, \eta) + (A\eta, \eta). \quad (1.35)$$

Зауважимо, що другий доданок у формулі (1.35) дорівнює нулю, оскільки $Au_0 - f = 0$. Отже, для довільної функції $u_0 + \eta$ справджується співвідношення

$$F(u_0 + \eta) = F(u_0) + (A\eta, \eta). \quad (1.36)$$

Оскільки останній доданок у правій частині формули (1.36) задовольняє нерівність $(A\eta, \eta) \geq 0$ (A – додатний оператор), то функціонал F досягає свого мінімального значення на функції u_0 .

2. Доведемо тепер обернене твердження. Припустимо, що функція $u_0 \in D_A$ надає мінімального значення функціоналу (1.34). Це означає, що для довільної функції $\eta \in D_A$ і довільного дійсного числа t

$$F(u_0 + t\eta) \geq F(u_0). \quad (1.37)$$

Використавши знову симетрію оператора та симетрію скалярного добутку, отримаємо

$$\begin{aligned} F(u_0 + t\eta) &= (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) - \\ &- 2t(f, \eta) + 2t(Au_0, \eta) + t^2(A\eta, \eta). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Для вибраних функцій u_0, f, η $F(u_0 + t\eta)$ є квадратичною функцією змінної t . З умови теореми випливає існування у цієї функції мінімуму при $t = 0$. Це означає, що виконується рівність

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + t\eta) |_{t=0} = 0 \quad (1.39)$$

або, згідно з (1.38),

$$2(Au_0, \eta) - 2(f, \eta) = 0,$$

тобто

$$(Au_0 - f, \eta) = 0. \quad (1.40)$$

Оскільки η – довільна функція, а D_A – щільна множина, то звідси випливає [8]

$$Au_0 - f = 0. \blacksquare$$

6. Існування розв'язку задачі про мінімум квадратичного функціоналу.

Розглянемо функціонал

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f), \quad u \in D_A. \quad (1.45)$$

Згідно з теоремою про функціонал енергії, якщо A – додатний оператор, то задача мінімізації цього функціонала еквівалентна задачі $Au = f$ за умови, що існує її розв'язок. Якщо оператор A – додатно визначений, то функціонал (1.45) можна розглядати в енергетичному просторі

$$F(u) = (u, u)_A - 2(u, f), \quad u \in H_A. \quad (1.46)$$

Тоді ж можна довести, що існує розв'язок задачі про мінімум функціонала.

Теорема 4. *Нехай A – додатно визначений оператор. Тоді варіаційна задача про мінімум функціонала енергії (1.46) має єдиний розв'язок $u_0 \in H_A$.*

Доведення. Розглянемо лінійний функціонал

$$l(u) = (u, f), \quad u \in H_A. \quad (1.47)$$

Доведемо, що він обмежений у просторі H_A . Використовуючи нерівність Коші–Буняковського, матимемо

$$|l(u)| = |(u, f)| \leq \|u\| \|f\|.$$

Запишемо далі, враховуючи (1.43),

$$|l(u)| \leq \frac{\|f\|}{\gamma} \|u\|_A.$$

Звідси випливає обмеженість лінійного функціонала $l(u)$ в енергетичному просторі H_A . Тоді на підставі теореми Ріса [5,8,10] існує єдина функція $u_0 \in H_A$ така, що функціонал $l(u)$ можна записати у вигляді скалярного добутку

$$l(u) = (u, u_0)_A, \quad u_0 \in H_A. \quad (1.48)$$

Врахувавши (1.48), перепишемо функціонал (1.46) так:

$$F(u) = (u, u)_A - 2(u, u_0)_A. \quad (1.49)$$

Додамо і віднімемо у правій частині формули (1.49) скалярний добуток $(u_0, u_0)_A$. Отримаємо

$$\begin{aligned} F(u) &= (u, u)_A - 2(u, u_0)_A + (u_0, u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \\ &= \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2. \end{aligned} \quad (1.50)$$

З попередньої формули випливає, що мінімум функціонала досягається тоді і лише тоді, коли $u = u_0$. ■

7. Головні та природні крайові умови

Означення. Нехай диференціальне рівняння має порядок $2k$. Тоді граничні умови, що містять похідні до порядку $k - 1$ включно, є головними. Граничні ж умови, що містять похідні порядку k та вище, є природними граничними умовами.

У варіаційному формулюванні крайової задачі, як задачі мінімізації квадратичного функціонала, природні граничні умови та диференціальне рівняння становлять необхідні умови мінімуму функціонала (рівняння Ейлера).

Приклад 11. Розглянемо мішану крайову задачу для рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f, \quad x_1, x_2 \in \Omega; \quad (1.54)$$

$$u = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1; \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_2, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad (1.56)$$

де ν — зовнішня нормаль до границі Γ . Нескладно довести, що ця задача має додатний оператор. Отже, вона еквівалентна задачі про мінімум

функціонала енергії

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right) d\Omega - 2 \int_{\Omega} f u d\Omega. \quad (1.57)$$

Оскільки диференціальне рівняння є рівнянням другого порядку, то $k = 1$. Отже, гранична умова (1.55) є головною умовою, а гранична умова (1.56) – природною. Шукатимемо розв’язок задачі про мінімум функціонала (1.57) на множині функцій

$$M = \{ u(x_1, x_2) : u \in C^{(2)}; u = 0, x_1, x_2 \in \Gamma_1 \}.$$

Ми намагатимемось довести, що функція, яка надає мінімального значення функціоналу, задовольняє рівняння (1.54). Тому в попередньому визначенні множини M є завищеними ($u \in C^{(2)}$), ніж звичайно, вимоги щодо гладкості функцій. Доведемо, що необхідними умовами мінімуму функціонала (1.57) є рівняння (1.54) та граничні умови (1.56). Нехай $F(u_0) \rightarrow \min$; візьмемо довільну функцію $\eta \in M$. Розглянемо $v = u_0 + t\eta$, де $t \in R$. Запишемо необхідну умову мінімуму

$$\frac{dF(v)}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.58)$$

Отримаємо

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) d\Omega - \int_{\Omega} f \eta d\Omega = 0. \quad (1.59)$$

Перетворимо (1.59), використовуючи формулу Гріна (1.19), до вигляду

$$\int_{\Omega} (-\Delta u_0 - f) \eta d\Omega + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \eta d\Gamma = 0. \quad (1.60)$$

Оскільки η – довільний елемент із щільної множини, то з (1.60)

$$-\Delta u_0 = f \quad \text{в } \Omega; \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (1.62)$$

Отже, рівняннями Ейлера для функціонала (1.57) є диференціальне рівняння (1.54) та природна гранична умова (1.56).

8. Слабкий розв’язок крайової задачі.

Приклад 14. Задачу описує диференціальне рівняння

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + Pe \frac{du}{dx} + u = f, \quad x \in (a, b) \quad (1.115)$$

та граничні умови

$$u(a) = 0, \quad \frac{du(b)}{dx} = 0. \quad (1.116)$$

Тут Pe – безрозмірна стала, число Пекле; $f \in L_2(a, b)$. Область визначення D_A оператора цієї задачі можна описати таким співвідношенням:

$$D_A = \left\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(2)}, u(a) = 0, \frac{du(b)}{dx} = 0 \right\}.$$

Тут $W_2^{(2)}$ – простір Соболева функцій, які інтегровні на проміжку $[a, b]$ разом з узагальненими похідними до другого порядку включно (див. додаток).

Запишемо вираз для скалярного добутку (Au, v) , що відповідає операторові задачі (1.115), (1.116). Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$(Au, v) = \int_a^b \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + Pe \frac{du}{dx} v + uv \right) dx. \quad (1.117)$$

Видно, що скалярний добуток (1.117) не є симетричним.

З огляду на формулу (1.117) уведемо до розгляду простір

$$V = \left\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(1)}, u(a) = 0 \right\}, \quad (1.118)$$

де $W_2^{(1)}$ – простір Соболева функцій, які інтегровні на проміжку $[a, b]$ разом з узагальненими похідними до першого порядку включно; гранична

умова $v(a) = 0$ для функцій простору $W_2^{(1)}$ виконується в сенсі слідів (див. додаток).

Означення. Назвемо слабким розв'язком крайової задачі (1.115), (1.116) функцію $u(x) \in V$, яка задовольняє варіаційне рівняння

$$(Au, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (1.119)$$

Виконується включення

$$D_A \subset V.$$

Тому, очевидно, якщо функція $u(x) \in D_A$ є розв'язком задачі ((1.115), (1.116))

$$Au = f,$$

вона є і слабким розв'язком, тобто задовольняє варіаційне рівняння (1.119).

Припустимо, що функція $u(x) \in V$ є слабким розв'язком. Тоді вона задовольняє варіаційне рівняння

$$\int_a^b \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + Pe \frac{du}{dx} v + uv \right) dx = \int_a^b f v dx.$$

Застосувавши до першого доданка у лівій частині формулу інтегрування частинами і врахувавши запис (1.118), перепишемо це рівняння

$$\int_a^b \left(-\frac{d^2 u}{dx^2} + Pe \frac{du}{dx} + u - f \right) v dx + \frac{du(b)}{dx} v(b) = 0.$$

Оскільки $v(x)$ — довільна функція, то звідси випливають рівності

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + Pe \frac{du}{dx} + u - f = 0,$$

$$\frac{du(b)}{dx} = 0.$$

Отже, $u(x)$ є розв'язком задачі (1.115), (1.116), але таким, який належить ширшій, ніж область визначення D_A , множині V . Власне тому цей розв'язок і називають слабким розв'язком крайової задачі (1.115), (1.116).

9. Абстрактна варіаційна задача.

1.9. Абстрактна варіаційна задача

Запишемо варіаційну задачу (1.119) у загальному вигляді. Знайдемо $u \in V$ таке, що

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V,$$

де $a(u, v)$, $l(v)$ — деякі задані білінійна та лінійна форми. Питання існування і єдиності слабкого розв'язку цієї варіаційної задачі розглянуто у такій теоремі.

Теорема 7 (Лакса—Мільграма). Нехай V — гільбертів простір, у якому задана білінійна форма $a(u, v) : V \times V \rightarrow R$ та лінійна форма $l(v) : V \rightarrow R$. Уважатимемо, що білінійна форма неперервна та V -еліптична, тобто виконуються нерівності

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V; \quad (1.120)$$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1.121)$$

де M, α — сталі, $M > 0$, $\alpha > 0$ а лінійна форма $l(v)$ неперервна, тобто задовольняє нерівність

$$|l(v)| \leq K \|v\|_V, \quad (1.122)$$

де K — стала $K > 0$. Тоді така варіаційна задача: знайти таку функцію $u \in V$, що

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V, \quad (1.123)$$

має єдиний розв'язок, і виконується нерівність

$$\|u\|_V \leq \frac{K}{\alpha}. \quad (1.124)$$

10. Задача Штурма—Ліувілля. Апроксимація кусково-лінійними функціями.

11. Схема МСЕ для задачі Штурма—Леувілля. Апроксимація кусково-лінійними функціями.

1.7. Метод скінченних елементів

Опишемо варіант методу Рітца розв'язування крайових задач для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Його алгоритм будують з використанням спеціальних кусково-аналітичних базових функцій. Цей метод відомий у науковій літературі як метод скінченних елементів.

Для запису одновимірних кусково-лінійних базисних функцій методу скінченних елементів розділимо проміжок $[a, b]$ на відрізки – скінченні елементи, точками x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Задамо базисну функцію $\varphi_i^h(x)$ співвідношенням

$$\varphi_i^h = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x < x_{i-1}; \\ \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \leq x < x_i; \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}, & x_i \leq x < x_{i+1}; \\ 0, & x_{i+1} \leq x < x_n, \end{cases} \quad (1.94)$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$. Графік функції $\varphi_i^h(x)$ зображений на рис. 1.2.

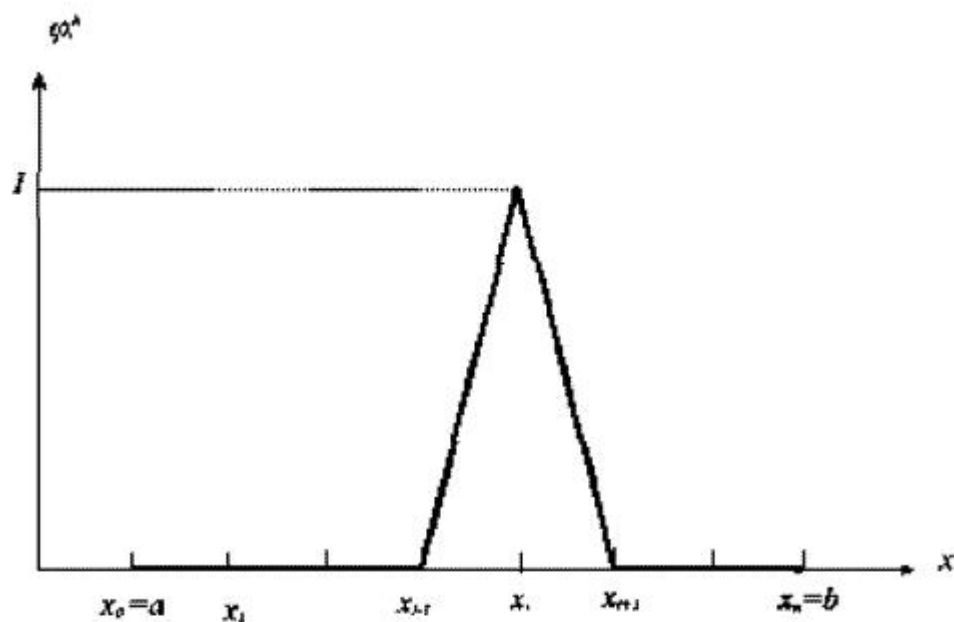


Рис. 1.2. Кусково-аналітичні базисні функції

Функції вигляду (1.94), які відмінні від нуля тільки в певній частині області визначення, називають функціями з компактним носієм.

З огляду на специфіку побудови функції $\varphi_i^h(x)$ мають такі властивості:

- 1° $\varphi_i^h(x) \in C[a, b]$;
- 2° $(\varphi_r^h, \varphi_s^h) = 0$, якщо $|r - s| \geq 2$;
- 3° $\varphi_i^h(x_j) = \delta_{ij}$.

З властивості 3° випливає: якщо

$$u_h = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i^h(x), \quad (1.95)$$

то $a_i = u_h(x_i)$ (позначимо $u_h(x_i) = u_i^h$). На скінченному елементі $[x_{i-1}, x_i]$ функцію u_h можна записати у вигляді

$$u_h = u_{i-1}^h \varphi_{i-1}^h(x) + u_i^h \varphi_i^h(x). \quad (1.96)$$

Використаємо кусково-поліноміальні функції (1.94) для побудови наближеного розв'язку задачі Штурма–Ліувіля

$$-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad x \in (a, b); \quad (1.97)$$

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \quad (1.98)$$

Якщо коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$ рівняння (1.97) задовольняють умови $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, то оператор задачі (1.97), (1.98) є додатно визначений (параграф 1.1). Крайову задачу (1.97), (1.98) можна сформулювати як варіаційну. Її узагальнений розв'язок існує і єдиний. Застосувавши метод Рітца до побудови наближеного розв'язку, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \alpha_j (\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = (f, \varphi_i^h), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.99)$$

де

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = \int_a^b (p(\varphi_i^h)'(\varphi_j^h)' + q\varphi_i^h\varphi_j^h) dx, \quad (f, \varphi_i^h) = \int_a^b f\varphi_i^h dx. \quad (1.100)$$

Позначимо тут для зручності скалярний добуток $(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A$ на проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ через $[\varphi_i^h, \varphi_j^h]_k$, тобто

$$[\varphi_i^h, \varphi_j^h]_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} (p(\varphi_i^h)'(\varphi_j^h)' + q\varphi_i^h\varphi_j^h) dx.$$

Враховувавши властивості кусково-поліноміальних функцій, знайдемо, що

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = 0, \quad |i - j| \geq 2. \quad (1.101)$$

Для $|i - j| < 2$ матимемо

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = \sum_{k=1}^n [\varphi_i, \varphi_j]_k. \quad (1.102)$$

Обчислимо i -й елемент стовпця вільних членів системи лінійних алгебричних рівнянь (1.99). Запишемо

$$(f, \varphi_i^h) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\varphi_i^h dx. \quad (1.103)$$

Позначимо тут значення скалярного добутку (f, φ_i^h) на проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ через $(f, \varphi_i^h)_k$, тобто

$$(f, \varphi_i^h)_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \varphi_i^h dx.$$

У формулах (1.102), (1.103) для довільного фіксованого i відмінними від нуля є тільки два доданки, тобто

$$(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A = [\varphi_i^h, \varphi_j^h]_i + [\varphi_i^h, \varphi_j^h]_{i+1}; \quad (1.104)$$

$$(f, \varphi_i^h) = (f, \varphi_i^h)_i + (f, \varphi_i^h)_{i+1}. \quad (1.105)$$

У цьому разі, якщо врахувати (1.101), індекс j у (1.104) може набувати значення $i-1$, i , $i+1$. Якщо $j=i$, то у формулі (1.104) є два доданки. Якщо $j=i-1$ або $j=i+1$, то у цій формулі залишається тільки один, відповідно, перший або другий доданок.

Якщо поставити собі за мету обчислити всі можливі значення $(\varphi_i^h, \varphi_j^h)_A$ на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$ (скінченному елементі Ω_i), то їх можна розмістити у матриці

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} [\varphi_{i-1}^h, \varphi_{i-1}^h]_i & [\varphi_{i-1}^h, \varphi_i^h]_i \\ [\varphi_i^h, \varphi_{i-1}^h]_i & [\varphi_i^h, \varphi_i^h]_i \end{pmatrix}. \quad (1.106)$$

Аналогічно стосовно скалярного добутку (f, φ_i^h) . Всі можливі його значення на Ω_i можна розмістити у матриці-стовпці

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} (f, \varphi_{i-1}^h)_i \\ (f, \varphi_i^h)_i \end{pmatrix}. \quad (1.107)$$

Зазначимо, що, враховуючи вигляд скалярного добутку (1.102), матрицю A_i можна описати сумою двох матриць

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{M}_i, \quad (1.108)$$

де

$$\mathbf{K}_i = \left\{ \begin{array}{cc} [\varphi_{i-1}^h, \varphi_{i-1}^h]_{i,p} & [\varphi_{i-1}^h, \varphi_i^h]_{i,p} \\ [\varphi_i^h, \varphi_{i-1}^h]_{i,p} & [\varphi_i^h, \varphi_i^h]_{i,p} \end{array} \right\}; \quad (1.109)$$

$$\mathbf{M}_i = \left\{ \begin{array}{cc} [\varphi_{i-1}^h, \varphi_{i-1}^h]_{i,q} & [\varphi_{i-1}^h, \varphi_i^h]_{i,q} \\ [\varphi_i^h, \varphi_{i-1}^h]_{i,q} & [\varphi_i^h, \varphi_i^h]_{i,q} \end{array} \right\}; \quad (1.110)$$

$$[\varphi_i^h, \varphi_j^h]_{i,p} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(\varphi_i^h)'(\varphi_j^h)' dx, \quad [\varphi_i^h, \varphi_j^h]_{i,q} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q \varphi_i^h \varphi_j^h dx.$$

Матриці K_i і M_i називають матрицями жорсткості та мас. Ця термінологія перейнята з інженерних наук, зокрема, з комп'ютерної механіки деформування інженерних конструкцій. Для побудови матриць \mathbf{K}_i , \mathbf{M}_i , \mathbf{B}_i можна скористатись формалізмом матричних перетворень, а також матричним записом наближеного розв'язку (1.96) на Ω_i

$$u^h = \mathbf{N}_i(x) \mathbf{Q}_i, \quad (1.111)$$

де

$$\mathbf{N}_i(x) = \left(-\frac{x - x_i}{h_i}, \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right), \quad \mathbf{Q}_i = (u_{i-1}^h, u_i^h)^T.$$

Легко бачити, що виконуються співвідношення

$$\mathbf{K}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{d}{dx} \mathbf{N}_i(x) \right)^T p(x) \frac{d}{dx} \mathbf{N}_i(x) dx; \quad (1.112)$$

$$\mathbf{M}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i(x)^T q(x) \mathbf{N}_i(x) dx; \quad (1.113)$$

$$\mathbf{B}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i(x)^T f(x) dx. \quad (1.114)$$

Зазначимо, що для довільних коефіцієнтів $p(x)$, $q(x)$ з метою обчислення інтегралів у формулах (1.112)–(1.114) використовують квадратурні формули, зокрема, формули Гаусса. Якщо коефіцієнти p, q та права частина f – сталі, то інтеграли в формулах (1.112), (1.113), (1.114) можна обчислити у явному вигляді

$$\mathbf{K}_i = \frac{p}{h_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

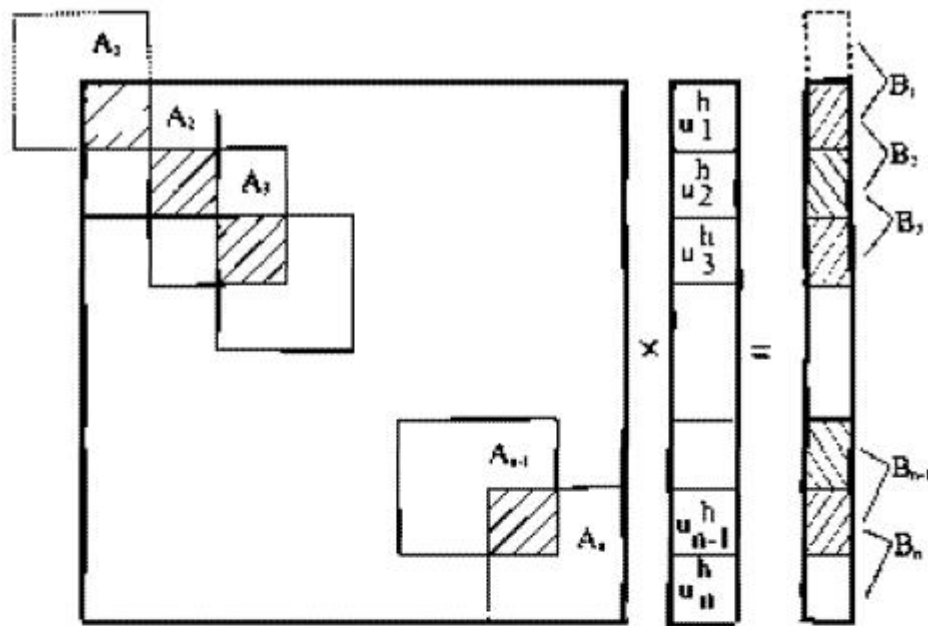


Рис. 1.3. Схема формування системи лінійних алгебричних рівнянь

$$M_i = h_i \frac{q}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_i = f \frac{h_i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно, враховуючи попередні зауваги, систему лінійних алгебричних рівнянь (1.99) можна зобразити схемою, показаною на рис 1.3. Матриця системи є тридіагональною та симетричною. Коефіцієнти в заштрихованих частинах додають. Головна гранична умова $u(a) = 0$ врахована, оскільки індекс j у формулі (1.95) змінюється від значення 1 (не від нуля). Штрихом на рис. 1.3 зображені матриці A_1 і B_1 , які формуються з урахуванням того, що індекс у формулі (1.95) починають відраховувати від одиниці. З кожної з цих матриць використовують тільки один елемент.

12. Похибки апроксимації кусково-лінійними функціями.

2.1. Похибки апроксимації кусково-лінійними функціями

Найпростіші кусково-лінійні одновимірні базисні функції, які використовують у методі скінченних елементів, наведені в 1.7. Похибку апроксимації цими базисними функціями визначає така теорема.

Теорема 1. *Нехай функція $u(x) \in W_2^{(2)}(a, b)$. Тоді для її інтерполянта*

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^n u_i \varphi_i^h(x), \quad u_i = u(x_i), \quad (2.1)$$

побудованого шляхом використання кусково-лінійних базисних функцій на сітці

$$x_i = a + \sum_{j=0}^i h_j, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

зі змінним кроком h_j виконуються оцінки

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{L_2} \leq C_1 h^2 \|u\|_{W_2^{(2)}}, \quad (2.2)$$

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{W_2^{(1)}} \leq C_2 h \|u\|_{W_2^{(2)}}, \quad (2.3)$$

де $h = \max_i h_i$, C_1, C_2 – сталі, які не залежать від h .

Зазначимо, що сталі C_1, C_2 у нерівностях (2.2), (2.3) не залежать від кроку h та функції u .

13. Ермітові одновимірні апроксимації на скінченних елементах.

2.3. Ермітові одновимірні апроксимації на скінченних елементах

Для отримання наближених розв'язків задач, описуваних диференціальними рівняннями порядків, вищих, аніж другий, потрібно мати базисні функції, які задовольняють підвищені умови щодо їхньої гладкості. Такі функції можна будувати з використанням інтерполяційних поліномів Ерміта [15].

Проілюструємо це прикладом кубічного полінома Ерміта. Розглянемо скінченний елемент $\Omega_i = \{x : x_{i-1} < x < x_i\}$. Виберемо за вузлові параметри значення функції та її першої похідної

$$u_h(x_j) = u_j^h, \quad \frac{du_h(x_j)}{dx} = \dot{u}_j^h, \quad j = i-1, i.$$

Запишемо на Ω_i

$$u_h = \mathbf{N}_i(x) \mathbf{q}_i, \quad (2.27)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i(x) &= \{H_{i-1,0}(x), H_{i-1,1}(x), H_{i,0}(x), H_{i,1}(x)\}; \\ \mathbf{q}_i &= \left\{u_{i-1}^h, \dot{u}_{i-1}^h, u_i^h, \dot{u}_i^h\right\}^T; \\ H_{i-1,0}(x) &= H_{i-1}^2(x) (1 + 2H_i(x)); \\ H_{i,0}(x) &= H_i^2(x) (1 + 2H_{i-1}(x)); \\ H_{i-1,1}(x) &= hH_{i-1}^2(x) H_i(x); \\ H_{i,1}(x) &= -hH_i^2(x) H_{i-1}(x); \\ H_{i-1}(x) &= -\frac{x - x_i}{h}, \quad H_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h}. \end{aligned}$$

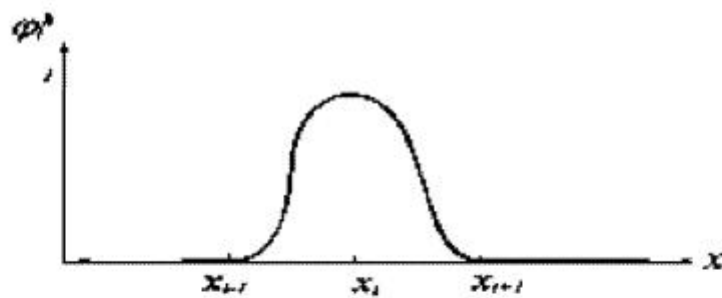


Рис. 2.2. Ермітова базисна функція першого виду

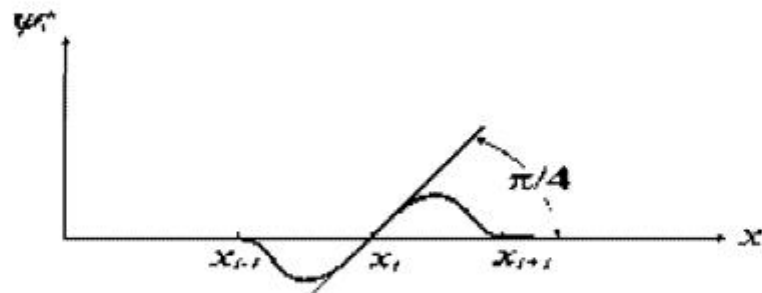


Рис. 2.3. Ермітова базисна функція другого виду

Отже, формула для наведення апроксимованої функції (2.27) отримана, шляхом використання двох видів базисних функцій $\varphi_i^h(x)$ та $\psi_i^h(x)$, графічно зображених на рис. 2.2, 2.3. Як бачимо з рисунків, ці базисні функції неперервні на проміжку $[a, b]$ разом з похідними першого порядку.

14. Одновимірні апроксимації функціями-бульбашками.

2.4. Одновимірні апроксимації функціями-бульбашками

Є багато задач, для числового аналізу яких необхідно використовувати спеціальні апроксимації високих порядків, утворені так званими функціями-бульбашками. Опишемо тут апроксимації функціями-бульбашками на одновимірних скінченних елементах.

Нехай проміжок $[a, b]$ розділений точками

$$x_i, i = 0, 1, \dots, n, (x_0 = a, x_n = b)$$

на скінченні елементи

$$\Omega = \{x : x_{k-1} < x < x_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.28)$$

Відобразимо кожен елемент (2.28) на "стандартний" скінченний елемент Ω_* вигляду

$$\Omega_* = \{\xi : -1 < \xi < 1\} \quad (2.29)$$

за допомогою співвідношення

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_{k-1} + \frac{1+\xi}{2}x_k, \quad \xi \in \Omega_*. \quad (2.30)$$

На елементі Ω_* побудуємо послідовність базисних функцій

$$\varphi_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{1+\xi}{2}, \quad \varphi_j = \Phi_{j-1}(\xi), \quad j = 3, 4, \dots, p+1. \quad (2.31)$$

Тут $\Phi_j(\xi)$ визначені через поліноми Лежандра P_{j-1} за формулою [7, 20]

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(t) dt, \quad j = 2, 3, \dots \quad (2.32)$$

Наведемо тут вирази для чотирьох перших поліномів Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \quad P_1 = t; \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1); \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Зазначимо, що виконується рекурентна формула [7, 20]

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad (2.34)$$

яка дає змогу знайти вираз для P_{n+1} через вирази для P_n та P_{n-1} . Тому, якщо відомі перші два поліноми Лежандра, за формулою (2.34) можна знайти вирази для всіх інших.

Відомо, що поліноми Лежандра є ортогональними на проміжку $[-1, 1]$, тобто виконується співвідношення

$$\int_{-1}^1 P_i(t) P_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \frac{2}{2i+1}, & i = j. \end{cases} \quad (2.35)$$

Базисні функції φ_1, φ_2 називають вузловими. У випадку запису апроксимованої функції у вигляді суми за базисними функціями

$$u = u_{k-1}\varphi_1(\xi) + u_k\varphi_2(\xi) + \sum_{j=3}^{p+1} a_j\varphi_j(\xi) \quad (2.36)$$

їм відповідають вузлові значення u_{k-1}, u_k . Базисні функції $\varphi_j(\xi)$, $j = 3, 4, \dots, p+1$, називають функціями-бульбашками. Ця назва зумовлена їхньою властивістю

$$\varphi_j(\xi) = 0, \quad \xi = \pm 1, \quad j = 3, 4, \dots, p+1. \quad (2.37)$$

У записі (2.36) коефіцієнти a_j не є вузловими значеннями.

Властивість (2.37) зумовлена таким. При $\xi = -1$ базисні функції пропорційні (2.32) інтегралам з однаковими верхньою та нижньою границею. Те, що базисні функції при $\xi = 1$ дорівнюють нулю, зумовлене тим, що цей інтеграл теж дорівнює нулю, це випливає з властивості ортогональності поліномів Лежандра P_j ($j > 1$) до одиниці. З формули

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.38)$$

яку задовольняють поліноми Лежандра [7, 20], випливає таке важливе співвідношення:

$$\varphi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} (P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)), \quad j = 3, 4, \dots, \quad (2.39)$$

яким можна користуватися для обчислення інтегралів від добутків базисних функцій. З (2.32) та (2.35) випливає також, що для базисних функцій-бульбашок виконується формула

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\varphi_j(\xi)}{d\xi} d\xi = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2.40)$$

15. Одновимірні апроксимації Лагранжового типу.

2.2. Одновимірні скінченні елементи лагранжового типу

За аналогією з 1.7 можна побудувати кусково-поліноміальні функції вищих, аніж перший, порядків. Наведемо тут матричний запис апроксимуючої функції на скінченному елементі $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$

$$u_h = \mathbf{N}_i(x) \mathbf{q}_i, \quad (2.23)$$

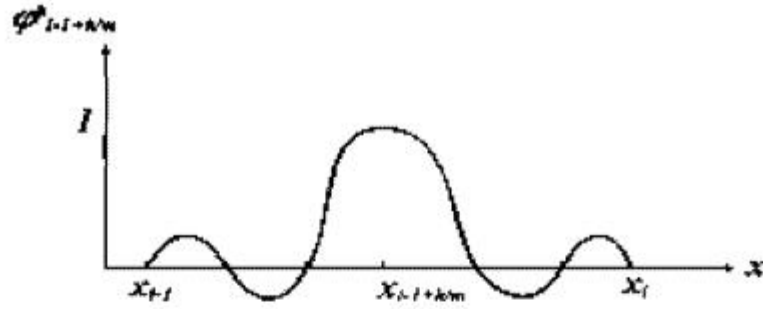


Рис. 2.1. Кусково-поліноміальна апроксимуюча функція

де

$$\begin{aligned} N_i(x) &= \left\{ \varphi_{i-1}^{(i)}(x), \varphi_{i-1+\frac{1}{m}}^{(i)}(x), \dots, \varphi_i^{(i)}(x) \right\}, \\ \mathbf{q}_i &= \left\{ u_{i-1}^h, u_{i-1+\frac{1}{m}}^h, \dots, u_i^h \right\}. \end{aligned}$$

Щоб отримати вирази функцій $\varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^h(x)$ ($k = 0, 1, \dots, m$), уважатимемо, що на елементі (x_{i-1}, x_i) вибрано $m-1$ внутрішніх точок (рис. 2.1).

На системі точок $x_{i-1}, x_{i-1+\frac{k}{m}}, x_i$, використовуючи формулу для інтерполяційного полінома Лагранжа, запишемо

$$\begin{aligned} \varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^{(i)}(x) &= \\ &= \frac{(x - x_{i-1}) \dots (x - x_{i-1+\frac{k-1}{m}}) (x - x_{i-1+\frac{k+1}{m}}) \dots (x - x_i)}{(\hat{x} - x_{i-1}) \dots (\hat{x} - x_{i-1+\frac{k-1}{m}}) (\hat{x} - x_{i-1+\frac{k+1}{m}}) \dots (\hat{x} - x_i)}, \\ \hat{x} &= x_{i-1+\frac{k}{m}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Графіки функцій (2.24) зображені на рис. 2.1. За аналогією з 1.7 запишемо кусково-поліноміальну базисну функцію m степеня на $[a, b]$ у вигляді

$$\varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^h = \begin{cases} 0, & x \in [a, x_{i-2}), \\ \varphi_{i-1}^{(i-1)}(x), & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \cap k = 0, \\ 0, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}) \cap k \neq 0, \\ \varphi_{i-1+\frac{k}{m}}^{(i)}(x), & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \varphi_i^{(i+1)}(x), & x \in [x_i, x_{i+1}) \cap k = m, \\ 0, & x \in [x_i, x_{i+1}) \cap k \neq m, \\ 0, & x \in [x_{i+1}, b]. \end{cases} \quad (2.25)$$

Зазначимо, що функції вигляду (2.25) належать до класу $C[a, b]$. Похідні від них мають розриви першого роду на границях скінченних елементів.

У праці [13] з'ясовано, що для скінченноелементних апроксимацій степені k , тобто таких, за допомогою яких довільний повний поліном багатьох змінних x_1, x_2, \dots, x_n степені, що не перевершує k , може бути поданий на скінченному елементі за допомогою лінійної комбінації базисних функцій, виконується оцінка похибки апроксимації

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(s)}} \leq C_s h^{k+1-s} \|u\|_{W_2^{(k+1)}}. \quad (2.26)$$

16. Апроксимації на трикутних скінченних елементах.

2.5. Апроксимації на трикутних скінченних елементах

Припустимо, що двовимірний область Ω розділена на скінченні елементи Ω_e трикутної форми (рис. 2.4).

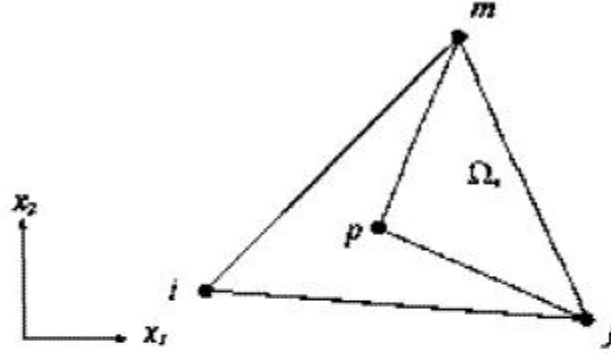


Рис. 2.4. Скінченний елемент трикутної форми

Позначимо літерами i, j, m вершини трикутника з координатами, відповідно, $x_1^i, x_2^i; x_1^j, x_2^j; x_1^m, x_2^m$, літерою p — біжучу внутрішню точку трикутника з координатами x_1, x_2 . Побудуємо на трикутнику Ω_e функції $\varphi_k^{(e)}(x_1, x_2)$, $k = i, j, m$ за формулою

$$\varphi_i^{(e)}(x_1, x_2) = \frac{S_{pjm}}{S_{ijm}}, \quad (2.41)$$

де S_{pjm} , S_{ijm} — площі трикутників pjm та ijm .

Очевидно, що $\varphi_i^{(e)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = 1$ і $\varphi_i^{(e)}(x_1, x_2) = 0$ на лінії jm .

Використовуючи відомі співвідношення для обчислення площі трикутника через координати його вершин

$$S_{pjm} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} \end{pmatrix}, \quad S_{ijm} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} \end{pmatrix},$$

знайдемо

$$\varphi_i^{(e)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = \frac{1}{\delta} (a_i + b_i x_1 + c_i x_2), \quad (2.42)$$

де $a_i = x_1^{(j)} x_2^{(m)} - x_2^{(j)} x_1^{(m)}$, $b_i = x_2^{(j)} - x_2^{(m)}$, $c_i = x_1^{(m)} - x_1^{(j)}$, $\delta = 2S_{ijm}$.

Отже, $\varphi_i^{(e)}$ є лінійною функцією змінних x_1, x_2 .

Нехай $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$. За ідеями, викладеними в 1.7, побудуємо на об'єднанні трикутників Ω_e кусково-лінійні базові функції

$$\varphi_i^h(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi_i^{(e)}(x_1, x_2), & i \in \Omega_e, \\ 0, & i \notin \Omega_e. \end{cases} \quad (2.43)$$

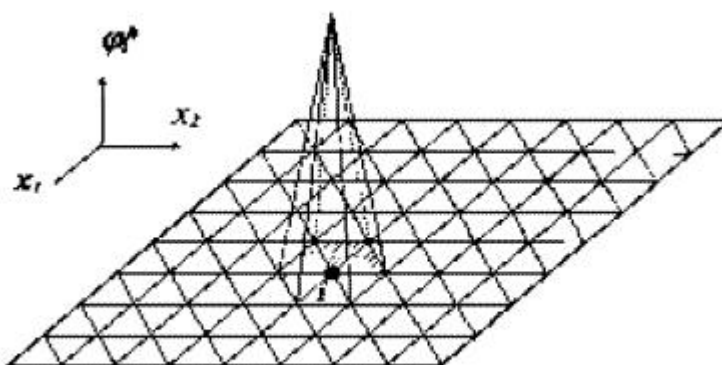


Рис. 2.5. Базисна функція на множині трикутних скінченних елементів

Графічне зображення функції φ_i^h показано на рис. 2.5.

Функції φ_i^h вигляду (2.43) відмінні від нуля тільки в певній частині області Ω (заштрихована частина на рис. 2.5) на сукупності трикутників, що містять точку i . Вони мають такі властивості:

- 1°. $\varphi_i^h \in C(\Omega)$;
- 2°. $(\varphi_r^h, \varphi_s^h) = 0$, якщо точки r та s не належать одному трикутному скінченному елементу Ω_e .

З використанням лінійних функцій $\varphi_i^{(e)}(x_1, x_2)$ запишемо апроксимуючу функцію u_h на Ω_e у вигляді

$$u_h = u_i^h \varphi_i^{(e)}(x_1, x_2) + u_j^h \varphi_j^{(e)}(x_1, x_2) + u_m^h \varphi_m^{(e)}(x_1, x_2). \quad (2.44)$$

Теорема 2. Якщо $u(x) \in W_2^{(2)}(\Omega)$ і інтерполант цієї функції $u_h(x) = \sum_i u_i \varphi_i^h(x_1, x_2)$, то справджуються оцінки

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq C_1 h^2 \|u\|_{W_2^{(2)}};$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}} \leq C_2 \frac{h}{\sin \theta} \|u\|_{W_2^{(2)}},$$

де $C_1, C_2 = \text{const}$, h — максимальне значення серед сторін трикутників (діаметр розбиття на скінченні елементи), θ — мінімальне значення серед кутів трикутників.

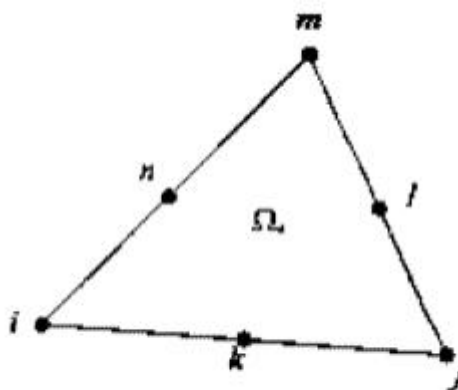


Рис. 2.7. Трикутний скінченний елемент з шістьма вузлами

17. Лагранжові апроксимації на прямокутниках.

2.6. Лагранжові апроксимації на прямокутних скінченних елементах

Уважатимемо, що двовимірний область розділена на прямокутні скінченні елементи Ω_e (рис. 2.8).

На кожному елементі виберемо множину вузлових точок на перетині ліній $x_2 = \text{const}$, $x_1 = \text{const}$. Кожна вузлова точка однозначно характеризується парою чисел i, j і має координати $(x_1 = x_1^{(i)}, x_2 = x_2^{(j)})$.

Для побудови базисних функцій на вибраному прямокутному скінченному елементі використаємо спосіб побудови інтерполяційного полінома Лагранжа у прямокутній області, згідно з яким

$$\varphi_{ij}^{(e)}(x_1, x_2) = l_i^{(m)}(x_1) l_j^{(n)}(x_2), \quad (2.48)$$

де

$$l_i^{(m)}(x_1) = \frac{(x_1 - x_1^{(1)}) \dots (x_1 - x_1^{(i-1)}) (x_1 - x_1^{(i+1)}) \dots (x_1 - x_1^{(m)})}{(x_1^{(i)} - x_1^{(1)}) \dots (x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)}) (x_1^{(i)} - x_1^{(i+1)}) \dots (x_1^{(i)} - x_1^{(m)})};$$

$$l_j^{(n)}(x_2) = \frac{(x_2 - x_2^{(1)}) \dots (x_2 - x_2^{(j-1)}) (x_2 - x_2^{(j+1)}) \dots (x_2 - x_2^{(n)})}{(x_2^{(j)} - x_2^{(1)}) \dots (x_2^{(j)} - x_2^{(j-1)}) (x_2^{(j)} - x_2^{(j+1)}) \dots (x_2^{(j)} - x_2^{(n)})}.$$

Оскільки функції $l_i^{(m)}(x_1)$ та $l_j^{(n)}(x_2)$ мають властивості

$$l_i^{(m)}(x_1^{(r)}) = \delta_{ir}, \quad l_j^{(n)}(x_2^{(r)}) = \delta_{jr},$$

то подібну властивість має і функція $\varphi_{ij}^{(e)}(x_1, x_2)$:

$$\varphi_{ij}^{(e)}(x_1^{(k)}, x_2^{(r)}) = l_i^{(m)}(x_1^{(k)}) l_j^{(n)}(x_2^{(r)}) = \delta_{ik} \delta_{jr}, \quad (2.49)$$

де δ_{ik} — символ Кронекера.

Враховуючи (2.49), запишемо апроксимуючу функцію u_h на прямокутному скінченному елементі у вигляді

$$u_h(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^h \varphi_{ij}^{(e)}(x_1, x_2). \quad (2.50)$$

Тут u_{ij}^h — значення апроксимованої функції у вузловій точці ij .

Базисні функції $\varphi_{ij}^{(e)}(x_1, x_2)$ визначені на одному скінченному елементі. Як і в попередньому, вони можуть бути неперервно поширені на всю область. У цьому разі базисні функції, які відповідають внутрішнім вузловим точкам, локалізовані тільки на одному скінченному елементі (дорівнюють нулю на всіх інших скінченних елементах). Базисні функції, які відповідають граничним вузловим точкам, локалізовані на елементах, які містять ці вузлові точки.

18. Ермітові апроксимації на прямокутниках.

2.7. Ермітові апроксимації на прямокутних скінченних елементах

Побудова на скінченних елементах базисних функцій двох і більше змінних, які задовольняють більш сильні, ніж неперервність вимоги, є дуже складною. Задача побудови таких функцій є відкритою, оскільки відомі її розв'язки лише в деяких часткових випадках. Одним із них є бікубічна апроксимація на прямокутному скінченному елементі, яку отримують як узагальнення одновимірної апроксимації Ерміта (параграф 2.3). Розглянемо прямокутний скінченний елемент Ω_e (рис. 2.9). Використовуючи ермітові кубічні поліноми (див. 2.3), запишемо на Ω_e таке подання для апроксимованої функції u_h :

$$\begin{aligned} u_h(x_1, x_2) = & H_{i-1,0}(x_1) f_{i-1}(x_2) + H_{i-1,1}(x_1) f_{i-1}^{(1)}(x_2) + \\ & + H_{i,0}(x_1) f_i(x_2) + H_{i,1}(x_1) f_i^{(1)}(x_2), \end{aligned} \quad (2.51)$$

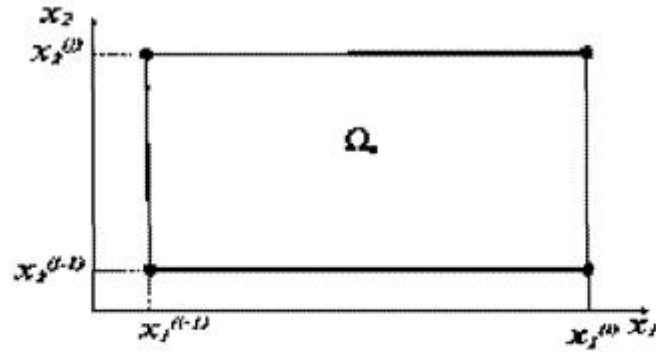


Рис. 2.9. Прямокутний скінченний елемент

де $f_r(x_2)$, $r = i-1, i$ – значення функції $u_h(x_1, x_2)$ на лінії $x_1 = x_1^{(r)}$; $f_r^{(1)}(x_2)$ – значення першої похідної за змінною x_1 на лінії $x_1 = x_1^{(r)}$.

Наблизимо функції $f_r(x_2)$, $f_r^{(1)}(x_2)$, ($r = i-1, i$) ермітовими кубічними поліномами за їхніми значеннями та значеннями їхніх перших похідних за змінною x_2 у вузлових точках. Отримаємо

$$f_r(x_2) = H_{j-1,0}(x_2) u_{r,j-1}^h + H_{j-1,1}(x_2) \frac{\partial u_{r,j-1}^h}{\partial x_2} + H_{j,0}(x_2) u_{r,j}^h + H_{j,1}(x_2) \frac{\partial u_{r,j}^h}{\partial x_2}; \quad (2.52)$$

$$f_r^{(1)}(x_2) = H_{j-1,0}(x_2) \frac{\partial u_{r,j-1}^h}{\partial x_1} + H_{j-1,1}(x_2) \frac{\partial^2 u_{r,j-1}^h}{\partial x_1 \partial x_2} + H_{j,0}(x_2) \frac{\partial u_{r,j}^h}{\partial x_1} + H_{j,1}(x_2) \frac{\partial^2 u_{r,j}^h}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad r = i-1, i, \quad (2.53)$$

де через

$$u_{r,s}^h, \quad \frac{\partial u_{r,s}^h}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_{r,s}^h}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 u_{r,s}^h}{\partial x_1 \partial x_2}$$

позначені значення функції u_h та її похідних у вузловій точці $x_1^{(r)} x_2^{(s)}$ ($r = i-1, i$, $s = j-1, j$).

Підставляючи співвідношення (2.52), (2.53) у формулу (2.51), отримаємо вираз для апроксимації функції u_h на прямокутному скінченному елементі Ω_e . Запишемо його у матричному вигляді

$$u_h = \mathbf{N}_e(x_1, x_2) \mathbf{q}_e, \quad (2.54)$$

де

$$\mathbf{N}_e(x_1, x_2) = \left\{ \varphi_{i-1,j-1}^{(0,0)}, \varphi_{i-1,j-1}^{(1,0)}, \varphi_{i-1,j-1}^{(0,1)}, \varphi_{i-1,j-1}^{(1,1)}, \dots, \varphi_{i,j-1}^{(1,1)} \right\};$$

$$\varphi_{r,s}^{(0,0)} = H_{r,0}(x_1) H_{s,0}(x_2);$$

$$\varphi_{r,s}^{(1,0)} = H_{r,1}(x_1) H_{s,0}(x_2);$$

$$\varphi_{r,s}^{(0,1)} = H_{r,0}(x_1) H_{s,1}(x_2);$$

$$\varphi_{r,s}^{(1,1)} = H_{r,1}(x_1) H_{s,1}(x_2);$$

$$r = i - 1, i; s = j - 1, j;$$

$$\mathbf{q}_e^T = \left\{ u_{i-1,j-1}^h, \frac{\partial u_{i-1,j-1}^h}{\partial x_1}, \frac{\partial u_{i-1,j-1}^h}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u_{i-1,j-1}^h}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u_{i-1,j}^h}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u_{i,j}^h}{\partial x_1 \partial x_2} \right\}.$$

Вигляд функцій $H_{r,0}$, $H_{r,1}$ наведено у 2.2.

Отже, для бікубічної апроксимації ермітового типу у кожній вузловій точці маємо чотири вузлові параметри.

Базисні функції $\varphi_{ij}^{(r,s)}(x_1, x_2)$ побудовані на одному скінченному елементі. Як і у попередньому, вони можуть бути поширені на всю область. При цьому розширенні зберігається неперервність до перших похідних включно в разі переходу через спільні сторони прямокутників.

19. Двовимірні ізопараметричні апроксимації.

2.8. Двовимірні ізопараметричні апроксимації

Характерною особливістю апроксимацій, які вже розглянуто в цьому розділі, було те, що двовимірну область у площині x_1, x_2 вважали полігональною, або в процесі побудови скінченних елементів вона апроксимувалась полігональною областю. Опишемо тут спосіб побудови таких апроксимацій, які вільні від зазначених обмежень. Питання точності подання областей з криволінійними границями в рамках цього підходу детально описано у монографії [18].

Розглянемо квадрат Ω^* у системі координат ξ, η

$$\Omega^* = \{\xi, \eta : -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}.$$

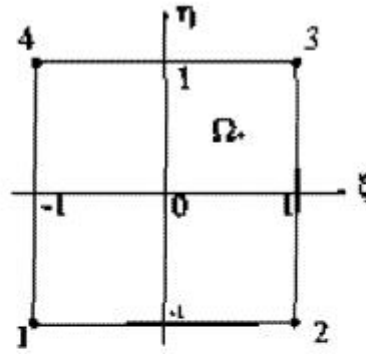


Рис. 2.10. Скінченний елемент у вигляді квадрата з чотирма вузлами

На квадраті виберемо три сукупності вузлових точок. На вибраних сукупностях вузлових точок побудуємо такі три системи базисних функцій:

1° білінійну (рис. 2.10)

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, \dots, 4; \quad (2.55)$$

$\xi_i \eta_i$ — координати i -ї вузлової точки;

2° біквадратичну (рис. 2.11)

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1), \\ &\quad i = 1, 3, 5, 7; \\ \varphi_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta), \quad i = 2, 6; \\ \varphi_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2), \quad i = 4, 8; \end{aligned} \quad (2.56)$$

3° бікубічну (рис. 2.12)

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi, \eta) &= \frac{9}{32} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{10}{9} \right), \\ &\quad i = 1, 4, 7, 10; \\ \varphi_i(\xi, \eta) &= \frac{27}{32} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) \left(\frac{1}{3} + 3\xi_i \xi \right), \\ &\quad i = 2, 3, 8, 9; \end{aligned} \quad (2.57)$$

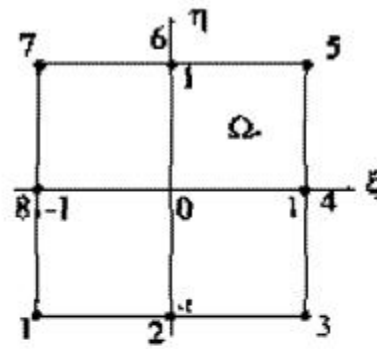


Рис. 2.11. Скінченний елемент у вигляді квадрата з вісьмома вузлами

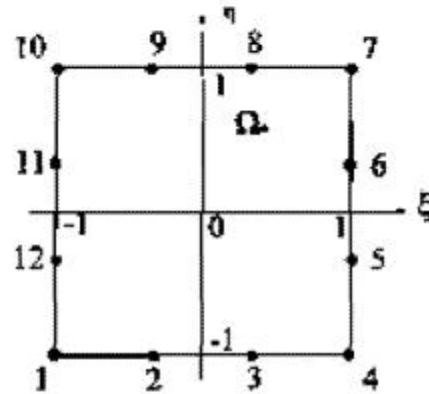


Рис. 2.12. Скінченний елемент у вигляді квадрата з дванадцятьма вузлами

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \frac{27}{32} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta^2) \left(\frac{1}{3} + 3\eta_i \eta \right), i = 5, 6, 11, 12.$$

Не становить труднощів переконатися у тому, що всі побудовані базисні функції задовольняють умову

$$\varphi_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}, \tag{2.58}$$

тобто складають вузловий базис.

Відобразимо квадрат Ω^* на деякий криволінійний чотирикутник Ω_e

за допомогою перетворення

$$\begin{aligned}x_1 &= \sum_i x_1^{(i)} \varphi_i(\xi, \eta); \\x_2 &= \sum_i x_2^{(i)} \varphi_i(\xi, \eta),\end{aligned}\tag{2.59}$$

де $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}$ — координата i -ї точки чотирикутника в площині $x_1 x_2$.

Для того, щоб перетворення координат (2.59) здійснювало взаємно однозначне відображення області Ω^* на область Ω_e , будемо домагатися, щоб якобіан перетворення (2.59) був відмінним від нуля в Ω^* , тобто

$$\det \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \neq 0.\tag{2.60}$$

Від базисних функцій $\varphi_i(\xi, \eta)$ можна за аналогією з 1.7 перейти до функцій $\varphi_i^h(x_1, x_2)$, заданих у всій області. У цьому випадку ці функції належатимуть класу $C(\Omega)$, де $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$.

Опишемо на Ω_e апроксимовану функцію u_h співвідношенням

$$u_h = \sum_i \varphi_i u_i^h,\tag{2.61}$$

яке можна навести у матричному вигляді

$$u_h = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}_e,$$

де

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(\xi, \eta) &= \{\varphi_1(\xi, \eta), \varphi_2(\xi, \eta), \dots\}, \\ \mathbf{q}_e^T &= \{u_1^h, u_2^h, \dots\}.\end{aligned}$$

Зазначимо, що ці апроксимації називають ізопараметричними. Цей термін означає, що для подання апроксимованої функції і відображення Ω^* на Ω_e використовують одні й ті ж вузлові точки та базисні функції. В літературі [14,17,18] відомі й інші типи апроксимацій, в основі побудови яких є ідея відображення областей, — це суперпараметричні та субпараметричні апроксимації.

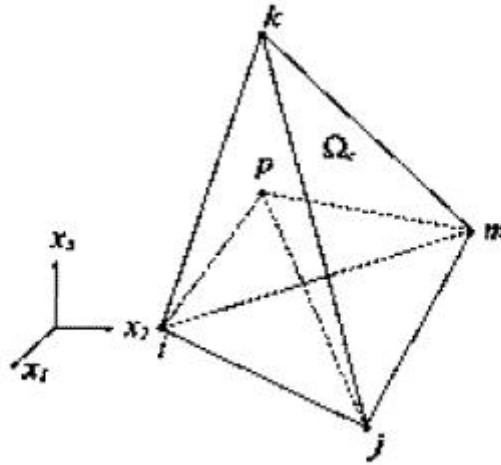


Рис. 2.13. Скінченний елемент у вигляді тетраедра

20. Апроксимації на тетраедрах.

2.9. Апроксимації на тетраедрах

Припустимо, що деяка тривимірна область Ω розділена на скінченні елементи Ω_e у вигляді тетраедрів (рис. 2.13).

Побудуємо на тетраедрі Ω_e лінійні апроксимаційні функції за аналогією зі способом побудови апроксимаційних функцій на трикутному елементі, викладеним у 2.5. Для цього виберемо в Ω_e деяку внутрішню точку $P(x_1, x_2, x_3)$. Введемо функцію

$$\varphi_k^{(e)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{V_{pijm}}{V_{kijm}}, \quad (2.62)$$

де V_{pijm} , V_{kijm} — об'єми тетраедрів $pijm$ та $kijm$. Для їхнього обчислення використаємо відому формулу з аналітичної геометрії. Отримаємо

$$V_{pijm} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \end{pmatrix}; \quad (2.63)$$

$$V_{kijm} = \frac{1}{6} \delta, \quad (2.64)$$

де

$$\delta = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \\ 1 & x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & x_3^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Розкриваючи визначник у формулі (2.63) за елементами першого рядка, знайдемо

$$\varphi_k^{(e)} = \frac{1}{\delta} (a_k + b_k x_1 + c_k x_2 + d_k x_3), \quad (2.65)$$

де

$$a_k = \det \begin{pmatrix} x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \end{pmatrix};$$

$$b_k = -\det \begin{pmatrix} 1 & x_2^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_2^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_2^{(m)} & x_3^{(m)} \end{pmatrix};$$

$$c_k = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(i)} & x_3^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_3^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_3^{(m)} \end{pmatrix};$$

$$d_k = -\det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} \\ 1 & x_1^{(j)} & x_2^{(j)} \\ 1 & x_1^{(m)} & x_2^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Усі інші функції $\varphi_r^{(e)}$ отримують аналогічно.

Функції $\varphi_r^{(e)}$ мають властивість (вона є наслідком геометричної побудови)

$$\varphi_r^{(e)}(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) = \delta_{rs}. \quad (2.66)$$

За аналогією з 1.7 запишемо вираз для кусково-аналітичних базисних функцій, заданих у всій області Ω :

$$\varphi_i^h(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \varphi_i^{(e)}, & i \in \bar{\Omega}_e, \\ 0, & i \notin \bar{\Omega}_e. \end{cases} \quad (2.67)$$

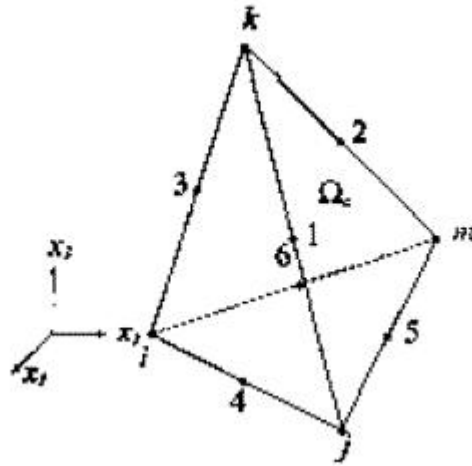


Рис. 2.14. Скінченний елемент у вигляді тетраедра з шістьма вузлами

Як і раніше (див. 2.5), для запису апроксимованої функції на скінченному елементі Ω_e матимемо формулу

$$u_h = u_i^h \varphi_i^{(e)} + u_j^h \varphi_j^{(e)} + u_m^h \varphi_m^{(e)} + u_k^h \varphi_k^{(e)}. \quad (2.68)$$

Використовуючи функції $\varphi_r^{(e)}$ на тетраедрі, можна побудувати апроксимаційні формули вищих порядків, зокрема другого. Для цього на тетраедрі виберемо систему вузлових точок, зображених на рис. 2.14, де точки 1, ..., 6 розміщені на середині ребер тетраедра.

Система базисних функцій $\psi_r^{(e)}$ на тетраедрі Ω_e має вигляд

$$\begin{aligned} \psi_k^{(e)} &= \varphi_k^{(e)} (2\varphi_k^{(e)} - 1); \\ \psi_1^{(e)} &= 4\varphi_k^{(e)} \varphi_j^{(e)}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Усі решта функції $\psi_r^{(e)}$ отримують аналогічно. Можна переконатися, що ці функції задовольняють умови

$$\psi_r^{(e)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) = \delta_{rs}. \quad (2.70)$$

Для запису апроксимованої функції на скінченному елементі Ω_e матимемо формулу

$$u_h = u_1^h \psi_1^{(e)} + u_2^h \psi_2^{(e)} + \dots + u_9^h \psi_9^{(e)} + u_{10}^h \psi_{10}^{(e)}. \quad (2.71)$$

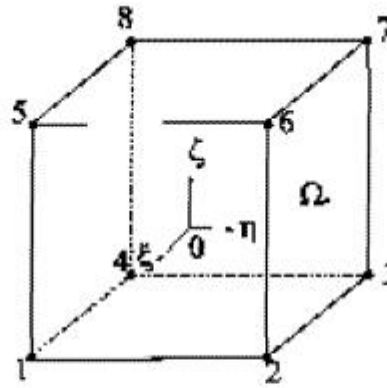


Рис. 2.15. Скінченний елемент у вигляді куба з вісьмома вузлами.

Зазначимо, що наведені тут апроксимаційні формули на тетраедрі утворюють у разі розширення їх на область Ω функції класу $C^{(0)}(\Omega)$.

21. Тривимірні ізопараметричні апроксимації.

2.10. Тривимірні ізопараметричні апроксимації

Криволінійні ізопараметричні апроксимації, запропоновані у 2.8, можна поширити на тривимірний випадок.

Розглянемо куб

$$\Omega_* = \{\xi, \eta, \zeta : -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1\}$$

у декартовій системі координат ξ, η, ζ . На кубі виберемо дві сукупності координатних вузлів (рис. 2.15, 2.16).

На вибраних системах вузлових точок запишемо такі сукупності базисних функцій:

1° полілінійну

$$\varphi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta), \quad i = 1, \dots, 8; \quad (2.72)$$

де ξ_i, η_i, ζ_i — координати i -ї вузлової точки;

2° поліквадратичну

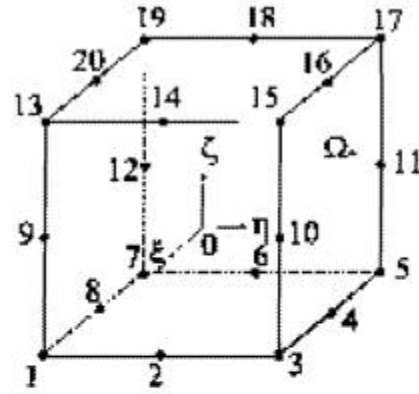


Рис. 2.16. Скінчений елемент у вигляді куба з двадцятьма вузлами.

$$\varphi_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2), \quad (2.73)$$

$$i = 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 19;$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta), & i = 8, 4, 16, 20; \\ \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2) (1 + \zeta_i \zeta), & i = 2, 6, 14, 18; \\ \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 - \zeta^2), & i = 9, 10, 11, 12. \end{aligned}$$

Зазначимо, що всі вибрані функції $\varphi_r(\xi, \eta, \zeta)$ задовольняють умову

$$\varphi_r = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) = \delta_{rs}. \quad (2.74)$$

Пропонуємо перевірити її шляхом безпосередніх обчислень.

За допомогою вибраних функцій виконаємо взаємно однозначне відображення куба на криволінійний шестигранник

$$x_k = \sum_i x_k^{(i)} \varphi_i(\xi, \eta, \zeta), \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.75)$$

а також на Ω^* апроксимуємо деяку функцію $u(\xi, \eta, \zeta)$

$$u_h(\xi, \eta, \zeta) = \sum_i u_i^h \varphi_i(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.76)$$

де u_i^h — вузлові значення апроксимованої функції.

22. Крайова задача для рівняння парного порядку.

3.1. Крайова задача для рівняння парного порядку

Розглянемо крайову задачу

$$Lu = \sum_{k=0}^s (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} = f(x), \quad x \in (a, b); \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} u(a) = u'(a) = \dots = u^{(s-1)}(a) &= 0; \\ u(b) = u'(b) = \dots = u^{(s-1)}(b) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Стосовно відомих коефіцієнтів рівняння та правої частини припустимо

$$p_k \in C^{(k)}[a, b], \quad r = 0, \dots, s, \quad f(x) \in C[a, b].$$

Лема 1. *Оператор задачі (3.1), (3.2) симетричний.*

Теорема 2. *Нехай $p_s(x) \geq P > 0$ і $p_k(x) \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, s-1$, тоді оператор задачі (3.1), (3.2) додатно визначений.*

За отриманими результатами сформулюємо задачу (3.1), (3.2) у такому варіаційному вигляді:

$$F(u) \rightarrow \min, \quad u \in U,$$

де

$$F(u) = \sum_{k=0}^s \int_a^b p_k \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx - 2 \int_a^b u f d\Omega;$$

$$U = \left\{ u(x) : u(x) \in W_2^{(s)}, \quad u(a) = 0, \dots, u^{(s-1)}(b) = 0 \right\}.$$

23. Априорна оцінка похибки МСЕ для задачі Штурма-Леувілля.

3.2. Априорна оцінка точності МСЕ

Зазначимо, що частковим випадком задачі, розглянутої у попередньому параграфі, є задача Штурма-Леувілля

$$-\frac{d}{dx} p_1(x) \frac{du}{dx} + p_0(x) u(x) = f(x), \quad x \in (a, b); \quad (3.8)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \quad (3.9)$$

У першому розділі описана схема МСЕ (на основі кусково-лінійних базисних функцій) числового розв'язування цієї задачі. Тут отримаємо априорні оцінки точності послідовності числових розв'язків МСЕ. З метою оцінки збіжності схеми МСЕ (див. 1.7) для задачі Штурма-Леувілля

використаємо лему Сеа (див. 1.10) і оцінки похибки апроксимації кусково-лінійними базисними функціями (див. 2.1). Доведемо для цього, що енергетична норма оператора задачі (3.8), (3.9) задовольняє подвійну нерівність

$$m^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2 \leq \|u\|_A^2 \leq M^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2. \quad (3.10)$$

Справді

$$\|u\|_A^2 = \int_a^b (p_1 u'^2 + p_0 u^2) dx \geq P \int_a^b u'^2 dx.$$

Застосуємо далі нерівність Фрідріхса (1.26). Отримаємо

$$\|u\|_A^2 \geq \frac{1}{2} P \int_a^b u'^2 dx + \frac{P}{(b-a)^2} \int_a^b u^2 dx.$$

Отже, виконується ліва частина нерівності (3.10), і

$$m^2 = \min \left\{ \frac{1}{2} P, \frac{P}{(b-a)^2} \right\}.$$

Права частина подвійної нерівності (3.10) випливає з такого співвідношення:

$$\int_a^b (p_1 u'^2 + p_0 u^2) dx \leq M^2 \int_a^b (u'^2 + u^2) dx,$$

де

$$M^2 = \max \left\{ \max_{x \in [a,b]} p_1(x), \max_{x \in [a,b]} p_0(x) \right\}.$$

На підставі леми Сеа, та з урахуванням першої нерівності з теореми 1 розділу 2 для наближеного розв'язку u_h отримаємо

$$\|u_0 - u_h\|_{W_2^{(1)}} \leq \frac{M^2}{m^2} C_2 h \|u_0\|_{W_2^{(2)}}. \quad (3.11)$$

Оцінку вигляду (3.11) називають апіорною оцінкою похибки наближеного розв'язку u_h . Вона дає інформацію про швидкість збіжності наближеного розв'язку, який можна отримати МСЕ. Зокрема, для задачі, яку розглядаємо, з оцінки (3.11) випливає, що наближений розв'язок u_h прямує до узагальненого розв'язку u_0 як $O(h)$. У цьому разі узагальнений розв'язок повинен задовольняти умову $u_0 \in W_2^{(2)}$.

24. Апіорна оцінка похибки за Нітше.

3.3. Априорна оцінка точності за Нітше

У попередньому параграфі отримано оцінку збіжності схеми МСЕ у нормі простору $W_2^{(1)}$. З'ясовано, що її порядок є $O(h)$. Зі збіжності у нормі цього простору випливає збіжність (див. 1.6) і в нормі простору L_2 . Опишемо тут спосіб визначення порядку збіжності у цій нормі, відомий під назвою способу Нітше.

Позначимо $e_h = u_0 - u_h$, де u_0 – узагальнений розв'язок задачі (3.8), (3.9). Розглянемо допоміжну задачу, яку описує цей же оператор, що й (3.8), (3.9), однак її права частина дорівнює e_h , тобто

$$Az = e_h. \quad (3.12)$$

Запишемо для (3.12) еквівалентну варіаційну задачу (див. 1.7)

$$(Az, v) = (e_h, v), \quad \forall v \in H_A. \quad (3.13)$$

Прийmemo в (3.13) $v = e_h$. Отримаємо

$$(Az, e_h) = (e_h, e_h). \quad (3.14)$$

Врахуємо, що наближений розв'язок u_h є ортогональною проекцією u_0 на підпростір S_h , натягнений на базисні функції φ_i^h . Це означає, що (див. 1.6)

$$(Ae_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in S_h. \quad (3.15)$$

Якщо взяти до уваги, що A – симетричний оператор, то (3.15) можна переписати у вигляді

$$(Av_h, e_h) = 0, \quad \forall v_h \in S_h. \quad (3.16)$$

Віднімемо (3.16) від (3.14):

$$(A(z - v_h), e_h) = \|e_h\|^2.$$

Застосуємо далі нерівність Шварца. Отримаємо нерівність

$$\|e_h\|^2 \leq \|z - v_h\|_A \|e_h\|_A. \quad (3.17)$$

Для оцінки зверху множників у правій частині формули (3.17) вважатимемо, що v_h є лінійним інтерполянтом розв'язку z і використаємо нерівності

$$\|e_h\|_A^2 \leq C_u h \|u_0\|_{W_2^{(2)}}; \quad (3.18)$$

$$\|z - v_h\|_A \leq C_z h \|z\|_{W_2^{(2)}}, \quad (3.19)$$

які впливають з оцінки (3.11) та нерівності (3.10) для вихідної задачі (3.8), (3.9) і задачі (3.12). Окрім цього, використаємо нерівність [12]

$$\|z\|_{W_2^{(2)}} \leq K \|e_h\|,$$

яка виражає неперервну залежність розв'язку задачі (3.12) від правої частини. Підставимо (3.18), (3.19) у праву частину (3.17). Отримаємо

$$\|e_h\|^2 \leq C_z C_u h^2 K \|u_0\|_{W_2^{(2)}} \|e_h\|. \quad (3.20)$$

Скоротимо ліву та праву частини нерівності (3.20) на $\|e_h\|$. Остаточо запишемо

$$\|e_h\| \leq C h^2 \|u_0\|_{W_2^{(2)}}, \quad (3.21)$$

де $C = C_z C_u K$.

Нерівність (3.21) означає, що у нормі простору L_2 наближений розв'язок збігається до узагальненого як $O(h^2)$.

25.Схема МСЕ для рівняння четвертого порядку.

3.4. Схема МСЕ для рівняння четвертого порядку

Одним із часткових випадків задачі, розглянутої у 3.1, є задача про згин стрижня [6], яку описує рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (3.22)$$

де $w(x)$ – шукана функція-зміщення точки x осі стрижня під дією зовнішнього навантаження, яке характеризує функція $f(x) \in L_2(a, b)$; E – модуль Юнга; $J(x)$ – момент інерції поперечного перерізу стрижня. До рівняння (3.22) необхідно додати крайові умови. Якщо кінці стрижня защемлені, то ці умови матимуть вигляд

$$w(a) = w'(a) = 0, \quad w(b) = w'(b) = 0. \quad (3.23)$$

Для побудови схеми МСЕ наведемо задачу (3.22), (3.23) згідно з результатами 3.1 у такому варіаційному формулюванні:

$$F(x) \rightarrow \min, \quad w \in W, \quad (3.24)$$

де

$$F(w) = \int_a^b \left(EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - 2wf \right) dx,$$

$$W = \left\{ w(x) : w(x) \in W_2^{(2)}(a, b), \quad w(a) = w'(a) = w(b) = w'(b) = 0 \right\}.$$

У 2.3 зазначено, що для задач, які описані диференціальними рівняннями порядку вищого, аніж другий, для побудови наближених розв'язків можна використати ермітові апроксимації на скінченних елементах. Отже, для наближення розв'язку задачі на скінченному елементі

$$\Omega_i = \{x : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

використаємо поліноми Ерміта третього степеня. Виберемо як вузлові параметри значення функції та її першої похідної

$$u_h(x_j) = u_j^h, \quad \frac{du_h(x_j)}{dx} = \dot{u}_j^h, \quad j = i-1, i.$$

Запишемо на Ω_i

$$u_h = \mathbf{N}_i(x) \mathbf{q}_i, \quad (3.25)$$

де

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_i(x) &= \{H_{i-1,0}(x), H_{i-1,1}(x), H_{i,0}(x), H_{i,1}(x)\}; \\ \mathbf{q}_i &= \left\{u_{i-1}^h, \dot{u}_{i-1}^h, u_i^h, \dot{u}_i^h\right\}^T; \\ H_{i-1,0}(x) &= H_{i-1}^2(x)(1 + 2H_i(x)); \\ H_{i,0}(x) &= H_i^2(x)(1 + 2H_{i-1}(x)); \\ H_{i-1,1}(x) &= hH_{i-1}^2(x)H_i(x); \\ H_{i,1}(x) &= -hH_i^2(x)H_{i-1}(x); \\ H_{i-1}(x) &= -\frac{x-x_i}{h}, \quad H_i(x) = \frac{x-x_{i-1}}{h}, \quad h = x_i - x_{i-1}.\end{aligned}$$

Систему лінійних алгебричних рівнянь МСЕ формують за аналогією з задачею Штурма–Ліувілля (див. 1.7) з матриць \mathbf{K}_i та \mathbf{Q}_i , які обчислюють за формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{d^2\mathbf{N}_i}{dx^2}\right)^T EJ \frac{d^2\mathbf{N}_i}{dx^2} dx; \\ \mathbf{Q}_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i^T f dx.\end{aligned}$$

Структура матриці і правої частини системи алгебричних рівнянь зображена на рис. 3.1.

26. Крайова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь.

3.5. Крайова задача для системи диференціальних рівнянь

Розглянемо крайову задачу, яку описує система звичайних диференціальних рівнянь

$$-\sum_{k=1}^s \left[\frac{d}{dx} \left(p_{jk}(x) \frac{du_k}{dx} \right) - q_{jk}(x) u_k \right] = f_j(x); \quad x \in (a, b); \quad (3.26)$$

$$u_k(a) = u_k(b) = 0; \quad k, j = 1, 2, \dots, s. \quad (3.27)$$

Уведемо позначення для матриць-стовпців невідомих і правих частин та матриць коефіцієнтів

$$\mathbf{u} = \{u_j\}; \quad \mathbf{f} = \{f_j(x)\};$$

$$\mathbf{P} = \{p_{jk}(x)\}; \quad \mathbf{Q} = \{q_{jk}(x)\}.$$

Урахувавши їх, задачу (3.26), (3.27) можна записати у такому вигляді:

$$-\frac{d}{dx} \mathbf{P}(x) \frac{d\mathbf{u}}{dx} + \mathbf{Q}(x) \mathbf{u} = \mathbf{f}(x); \quad x \in (a, b); \quad \mathbf{f}(x) \in \mathbf{L}_2(a, b);$$

$$\mathbf{u}(a) = 0; \quad \mathbf{u}(b) = 0.$$

Зазначимо, що у гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(a, b)$ векторних функцій скалярний добуток та норма визначено співвідношеннями

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_a^b \mathbf{u}^T \mathbf{v} dx = \int_a^b \sum_{k=1}^s u_k v_k dx;$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \int_a^b \mathbf{u}^T \mathbf{u} dx.$$

Область визначення D_A оператора цієї задачі можна задати співвідношенням

$$D_A = \left\{ \mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_s\}^T : u_k \in W_2^{(2)}(a, b), \quad u_k(a) = u_k(b) = 0, \quad k = 1, \dots, s \right\}.$$

Виконується така лема.

Лема 3. Нехай \mathbf{P}, \mathbf{Q} — симетричні матриці. Тоді оператор задачі (3.26), (3.27) симетричний.

Теорема 4. Нехай \mathbf{P} – додатно визначена матриця

$$\mathbf{t}^T \mathbf{P} \mathbf{t} > 0, \quad \forall \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s)^T, \quad t_i \in \mathbf{R},$$

а \mathbf{Q} – невід’ємна матриця

$$\mathbf{t}^T \mathbf{Q} \mathbf{t} \geq 0.$$

Тоді оператор задачі (3.26), (3.27) додатно визначений.

27. Особливості схеми МСЕ для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Оскільки оператор задачі (3.26), (3.27) додатно визначений, то її можна записати у таких варіаційних формулюваннях:

$$F(\mathbf{u}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}; \quad (3.31)$$

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{j,k=1}^s \int_a^b p_{jk}(x) u'_j u'_k dx + \sum_{j,k=1}^s q_{jk} u_j u_k dx - 2 \sum_{j=1}^s \int_a^b u_j f_j dx;$$

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_s\}^T : u_k \in W_2^{(1)}(a, b), \quad u_k(a) = u_k(b) = 0, \quad k = 1, s \right\};$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \quad (3.32)$$

Варіаційні формулювання (3.31) та (3.32) є еквівалентними.

Для побудови наближеного розв’язку варіаційної задачі задамо поділ області

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Оскільки система диференціальних рівнянь є другого порядку за кожною змінною, то для наближеного запису розв’язку можна використати кусково-поліноміальні базисні функції, описані в 2.2. Використаємо найпростіші кусково-лінійні базисні функції (1.96). На скінченному елементі $\Omega_i = [x_{i-1}, x_i]$ наближений розв’язок \mathbf{u}_h запишемо у вигляді

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}_i(x) \mathbf{q}_i,$$

де матриця $\mathbf{N}_i(x)$ (розміру $s \times 2s$) має вигляд

$$\mathbf{N}_i(x) = \begin{Bmatrix} \varphi_{i-1}^h & 0 & 0 & \varphi_i^h & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{i-1}^h & 0 & 0 & \varphi_i^h & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \varphi_{i-1}^h & 0 & 0 & \varphi_i^h \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{q}_i^T = \{u_{1,i-1}^h, u_{2,i-1}^h, \dots, u_{s,i-1}^h, u_{1,i}^h, u_{2,i}^h, \dots, u_{s,i}^h\}.$$

Діятимемо далі формально за аналогією з випадками параграфу 1.7. Використаємо одне з еквівалентних варіаційних формулювань (3.31) або (3.32). Матриця системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ формується з матриць

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{M}_i,$$

де

$$\mathbf{K}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{d}{dx} \mathbf{N}_i(x) \right)^T \mathbf{P} \frac{d}{dx} \mathbf{N}_i(x) dx; \quad (3.33)$$

$$\mathbf{M}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i^T \mathbf{Q} \mathbf{N}_i dx. \quad (3.34)$$

Стовпець правих частин системи рівнянь МСЕ формується з матриць

$$\mathbf{B}_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{N}_i^T(x) \mathbf{f}(x) dx. \quad (3.35)$$

Схема формування системи лінійних алгебричних рівнянь (для $s = 2$) зображена на рис. 3.2.

28. Задача про циліндричний згин пластини.

3.6. Задача про циліндричний згин пластини

Система звичайних диференціальних рівнянь (3.26), незважаючи на її досить загальний вигляд, все ж не описує всі існуючі математичні моделі. Наведемо тут систему двох диференціальних рівнянь другого порядку, яка описує циліндричний згин пластини в рамках математичної моделі С.П. Тимошенка [10]

$$\begin{aligned} -G \left(\frac{d\gamma_1}{d\alpha_1} + \frac{d^2 w}{d\alpha_1^2} \right) &= f_1(\alpha_1); \\ -D \frac{d^2 \gamma_1}{d\alpha_1^2} + G \left(\gamma_1 + \frac{dw}{d\alpha_1} \right) &= f_2(\alpha_1), \quad \alpha_1 \in (a, b). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Тут γ_1, w – шукані функції, фізичним змістом яких є кут повороту нормалі до серединної площини пластини в напрямі осі α_1 та прогин серединної площини; G, D – сталі, які виражають через фізичні характеристики матеріалу пластини – модуль Юнга E , коефіцієнт Пуасона ν , коефіцієнт зсуву $k' = 5/6$ та товщину пластини h за формулами

$$G = \frac{k' E h}{2(1 + \nu)}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (3.37)$$

Для системи рівнянь (3.36) розглянемо крайову задачу, яка відповідає умовам жорсткого заземлення країв

$$\gamma_1(a) = 0, w(a) = 0, \gamma_1(b) = 0, w(b) = 0. \quad (3.38)$$

Уважатимемо, що $f_i \in L_2(a, b)$, тоді область визначення оператора задачі (3.36), (3.38) є такою множиною:

$$\mathbf{D}_A = \left\{ \mathbf{u} = (\gamma_1, w) : \mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^{(2)}(a, b), \mathbf{u}(a) = 0, \mathbf{u}(b) = 0 \right\}.$$

Виконується така лема.

Лема 5. *Оператор задачі (3.36), (3.38) симетричний.*

Теорема 6. *Оператор задачі (3.36), (3.38) додатно визначений.*

29. **Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Існування слабкого розв'язку.**

30. **Задача Неймана для рівняння Пуассона. Існування слабкого розв'язку.**

31. **Задача Ньютона для рівняння Пуассона. Існування слабкого розв'язку.**

3.7. Крайові задачі для рівняння Пуассона

Розглянемо головні крайові задачі для рівняння Пуассона (інша назва – неоднорідне рівняння Лапласа)

$$-\Delta u = f(x), \quad x = (x_1, x_1, \dots, x_n), \quad x \in \Omega, \quad (3.46)$$

де

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

$u(x)$ – шукана функція, $f(x) \in L_2(\Omega)$ – задана права частина, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – обмежена область, з ліпшицевою границею Γ . Для рівняння (3.46) звичайно ставлять три головні крайові задачі, які відповідають таким трьом крайовим умовам:

1° задача Діріхле

$$u(x) = 0, x \in \Gamma;$$

2° задача Неймана

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \Gamma,$$

де

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)$$

– похідна за напрямом зовнішньої нормалі ν до границі Γ ;

3° задача Ньютона

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) u(x) = 0, x \in \Gamma,$$

де $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$, $\sigma_0 = \text{const.}$

$$D_{A_1} = \{u(x) : D^i u(x) \in L_2(\Omega), |i| \leq 2; u(x) = 0, x \in \Gamma\};$$

$$D_{A_2} = \left\{ u(x) : D^i u(x) \in L_2(\Omega), |i| \leq 2; \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0, x \in \Gamma \right\};$$

$$D_{A_3} = \left\{ u(x) : D^i u(x) \in L_2(\Omega), |i| \leq 2; \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + \sigma(x) u(x) = 0, x \in \Gamma \right\}.$$

Теорема 9. *Оператори трьох головних крайових задач для неоднорідного рівняння Лапласа є додатно визначеними.*

Як наслідок з доведеної теореми про додатну визначеність операторів головних крайових задач для рівняння Пуассона випливає твердження про існування та єдиність їхніх узагальнених розв'язків.

32.Схема МСЕ для крайових задач для рівняння Пуассона.

33.Збіжність схеми МСЕ для крайових задач для рівняння Пуассона.

3.8. Схема МСЕ для рівняння Пуассона

Нехай двовимірна обмежена область Ω з ліпшицевою границею Γ розділена на скінченні елементи трикутної форми

$$\Omega = \bigcup_e \Omega_e, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset.$$

На заданому поділі виберемо базисні функції вигляду (2.42) (див. параграф 2.4) і наведемо наближений розв'язок варіаційних задач, що відповідають крайовим задачам для рівняння Пуассона на Ω_e , у вигляді

$$u_h = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{N}_e = (\varphi_i^e, \varphi_j^e, \varphi_m^e); \quad \mathbf{q}_e = (u_i^h, u_j^h, u_m^h)^T.$$

На підставі варіаційних формулювань (3.55), методу Рітца, отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_j u_j^h (A\varphi_i^h, \varphi_j^h) = (f, \varphi_j^h), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.57)$$

За аналогією з 1.7 ця система (для задач Діріхле і Неймана) формується з матриць

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{N}_e)^T \nabla \mathbf{N}_e d\Omega; \quad (3.58)$$

$$\mathbf{Q}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T f d\Omega, \quad (3.59)$$

де

$$\nabla \mathbf{N}_e = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (\varphi_i^e, \varphi_j^e, \varphi_m^e). \quad (3.60)$$

Виконавши нескладні обчислення у формулі (3.60), отримаємо

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{2\delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_m + c_j c_m \\ b_i b_m + c_i c_m & b_j b_m + c_j c_m & b_m^2 + c_m^2 \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Тут

$$b_i = x_2^{(j)} - x_2^{(m)}, \quad c_i = x_1^{(m)} - x_1^{(j)}, \quad (3.62)$$

δ — подвоєна площа трикутника Ω_e . Формули для b_j, b_m, c_j, c_m можна отримати з (3.62) шляхом циклічного переставляння індексів i, j, m .

Для обчислення інтеграла у формулі (3.59) зінтерполюємо функцію f на трикутнику Ω_e виразом

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{N}_e(x_1, x_2) \mathbf{f}_e, \quad (3.63)$$

Для отримання апіорної оцінки збіжності схеми МСЕ, як і в попередньому, використаємо лему Сеа (див. 1.10) і оцінку похибки апроксимації на трикутних елементах (див. 2.4). Попередньо доведемо, що енергетична норма задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\|u\|_A^2 = \int_{\Omega} \text{grad}^2 u d\Omega$$

де

$$\mathbf{f}_e = (f_i, f_j, f_m)^T,$$

$f_r = f(x_1^{(r)}, x_2^{(r)})$ – значення функції $f(x_1, x_2)$ у вузловій точці $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}$, $r = i, j, m$. Підставимо формулу (3.63) у вираз (3.59). Отримаємо

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{M}_e \mathbf{f}_e.$$

Тут

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \left(\varphi_i^{(e)}\right)^2 & \varphi_i^{(e)} \varphi_j^{(e)} & \varphi_i^{(e)} \varphi_m^{(e)} \\ \varphi_i^{(e)} \varphi_j^{(e)} & \left(\varphi_j^{(e)}\right)^2 & \varphi_j^{(e)} \varphi_m^{(e)} \\ \varphi_i^{(e)} \varphi_m^{(e)} & \varphi_j^{(e)} \varphi_m^{(e)} & \left(\varphi_m^{(e)}\right)^2 \end{bmatrix} d\Omega.$$

Для обчислення інтегралів у попередньому виразі використаємо формулу [11]

$$\int_{\Omega_e} \left(\varphi_i^{(e)}\right)^a \left(\varphi_j^{(e)}\right)^b \left(\varphi_m^{(e)}\right)^c d\Omega = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \delta, \quad (3.64)$$

де a, b, c – цілі невід’ємні числа; δ – подвоєна площа трикутника.

У результаті отримаємо

$$\mathbf{M}_e = \frac{\delta}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

задовольняє подвійну нерівність

$$m^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2 \leq \|u\|_A^2 \leq M^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2, \quad (3.65)$$

де

$$\|u\|_{W_2^{(1)}}^2 = \int_{\Omega} (\text{grad}^2 u + u^2) d\Omega.$$

Права частина цієї нерівності є очевидною; справді, для $M = 1$

$$\int_{\Omega} \text{grad}^2 u d\Omega \leq \int_{\Omega} (\text{grad}^2 u + u^2) d\Omega.$$

Для доведення лівої частини запишемо

$$\|u\|_A^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}^2 u d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{grad}^2 u d\Omega.$$

Застосувавши далі нерівність Фрідрікса (3.50), отримаємо

$$\|u\|_A^2 \geq m^2 \|u\|_{W_2^{(1)}}^2,$$

де

$$m^2 = \min \left\{ \frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Отже, подвійна нерівність доведена.

Згідно з лемою Сеа наближений розв'язок u_h задовольняє нерівність

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}} \leq \frac{M^2}{m^2} \|u - u_I^h\|_{W_2^{(1)}}. \quad (3.66)$$

Оцінимо праву частину нерівності (3.66), використовуючи теорему 2.2.

Припустивши в цьому разі, що розв'язок задачі $u \in W_2^{(2)}$, отримаємо

$$\|u - u_h\|_{W_2^{(1)}} \leq \frac{M^2}{m^2} C_2 \frac{h}{\sin \theta} \|u\|_{W_2^{(2)}}. \quad (3.67)$$

З оцінки (3.67) випливає, що наближений розв'язок u_h прямує до узагальненого розв'язку задачі в нормі простору $W_2^{(1)}$, якщо $h \rightarrow 0$. Порядок збіжності становить $O(h)$.

З оцінки (3.67) випливає, що в разі поділу області на трикутні скінченні елементи потрібно уникати трикутників з гострими кутами, для яких $\sin \theta$ є малим.

34. Рівняння стаціонарної адвекції-дифузії.

3.10. Рівняння стаціонарної адвекції–дифузії

Розглянемо тут задачу, яка описує стаціонарний процес адвекції–дифузії. Оператор цієї задачі не є симетричним, а побудова її числового розв'язку обчислювально складна. Водночас проблема конструювання ефективних алгоритмів побудови числових розв'язків цієї задачі є актуальною з огляду на її важливість у комп'ютерному моделюванні, зокрема процесів забруднення довкілля.

Нехай Ω – обмежена зв'язна область евклідового простору \mathbf{R}^n з ліпшицевою границею Γ і нехай ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до границі,

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), \quad \nu_i = \cos(\nu, x_i),$$

x_i – безрозмірні координати. Вважатимемо заданим в Ω безрозмірний вектор швидкості перенесення субстанції

$$\mathbf{w} = (P_e w_1, P_e w_2, P_e w_3, \dots, P_e w_n),$$

де

$$\mathbf{w}^* = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$$

– одиничний вектор, який характеризує напрям перенесення; P_e – число Пекле, яке характеризує швидкість перенесення. Окрім того, будемо вважати, що середовище, в якому відбувається перенесення, є нестисливим, тобто вектор швидкості задовольняє умову

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_e w_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.75)$$

Відомо [2], що безрозмірна функція $u(x)$, ($x = x_1, x_2, \dots, x_n$), яка характеризує розподіл концентрації певної субстанції у середовищі, задовольняє рівняння

$$-\Delta u + \mathbf{w} \operatorname{grad} u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.76)$$

де $f(x) \in L_2(\Omega)$ – задана функція, що характеризує інтенсивність внутрішніх джерел субстанції. До рівняння додамо такі граничні умови:

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (3.77)$$

Тут, як і раніше, через Δ позначений оператор Лапласа.

Задачу (3.76), (3.77) запишемо у варіаційному формулюванні про знаходження слабкого розв'язку u варіаційного рівняння

$$a(u, v) + b(u, v) = l(v), \forall v \in V, \quad (3.78)$$

де

$$a(u, v) = \int_{\Omega} -\Delta u v d\Omega; \quad (3.79)$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \operatorname{grad} u v d\Omega; \quad (3.80)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega; \quad (3.81)$$

$$V = \{v(x) : v \in W_2^{(1)}(\Omega); v(x) = 0, x \in \Gamma.\}$$

Теорема 10. *Білінійна форма*

$$A(u, v) = a(u, v) + b(u, v), \quad (3.88)$$

що відповідає варіаційному рівнянню (3.78), є неперервною та V -еліптичною.

35. Бігармонічне рівняння.

Для бігармонічного рівняння

$$\Delta^2 u = f(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in \Omega, \quad (3.91)$$

де

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4};$$

Ω — обмежена область з ліпшицевою границею Γ ; $f(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$ — задана права частина, розглянемо крайові задачі, які відповідають таким крайовим умовам:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma, \quad (3.92)$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma. \quad (3.93)$$

Теорема 13. *Оператори крайових задач (3.91), (3.92) та (3.91), (3.93) є додатно визначеними.*