1. Коливання струни

4.1.1. Коливання струни

Рух струни, натягненої силою p, описує рівняння

$$p\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \leq T, \tag{4.1}$$

де $z(x,t)$ – відхилення струни в точці x у момент часу t в напрямі, перпендикулярному до осі x; ρ – густина матеріалу струни. Вважатимемо, що струна закріплена в точках $x = 0, a$. Тоді до рівняння (4.1) необхідно додати граничні умови

$$z(0,t) = 0, \qquad z(a,t) = 0. \tag{4.2}$$

2. Коливання стрижня

4.1.2. Згинні коливання стрижня

Відомо, що рух пружного стрижня під дією сил інерції описує рівняння

$$EJ\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -\rho F\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \; 0 < x < a, \; 0 < t \leq T. \tag{4.6}$$

Тут $z(x,t)$ – зміщення точки серединної лінії стрижня в момент часу t в напрямі, перпендикулярному до осі x; E – модуль Юнга; ρ – густина матеріалу стрижня; $F, J = \text{const}$ – площа та момент інерції поперечного перерізу стрижня.

У кінцевих точках стрижня $x = 0$, $\;x = a$ запишемо умови, що відповідають жорсткому защемленнню обидвох його країв:

$$z(0,t) = 0, \; \frac{\partial z(0,t)}{\partial x} = 0, \; z(a,t) = 0, \; \frac{\partial z(a,t)}{\partial x} = 0. \tag{4.7}$$

3. Коливання мембрани

4.1.3. Коливання мембрани

Рух тонкої мембрани, натягнутої зусиллям інтенсивності p, в полі сил інерції описують рівнянням

$$p\Delta z = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T]. \tag{4.11}$$

Тут ρ – густина матеріалу; p – сила натягу мембрани; $z(x_1, x_2, t)$ – зміщення точки x_1, x_2 двовимірної обмеженої області Ω з ліпшицевою границею Γ в момент часу t у напрямі, перпендикулярному до площини мембрани;

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}.$$

Уважатимемо, що край Γ області Ω, яку займає мембрана, закріплений, тобто виконуються граничні умови

$$z(x_1, x_2, t) = 0, \quad x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{4.12}$$

4. Коливання пластини

4.1.4. Коливання пластини

Нехай серединна площина пластини займає обмежену область Ω у площині x_1, x_2. Прогин $z(x_1, x_2, t)$ точки x_1, x_2 в момент часу t пластини під дією сил інерції описує рівняння

$$D\Delta\Delta z = -\rho h \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T]. \tag{4.16}$$

Тут ρ – густина матеріалу пластини; h – товщина пластини;

$$D = Eh^3/12;$$

E – модуль Юнга;

$$\Delta\Delta z = \frac{\partial^4 z}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial x_2^4}.$$

Уважатимемо, що край пластини, який проходить уздовж кривої Γ (вважатимемо її ліпшицевою кривою) з зовнішньою нормаллю ν, жорстко защемлений. Це означає, що на краю Γ виконуються граничні умови

$$z\left(x_1, x_2, t\right) = 0, \quad \frac{\partial z\left(x_1, x_2, t\right)}{\partial \nu} = 0; \quad x_1, x_2 \in \Gamma. \tag{4.17}$$

5. Теорема про дійсні власні числа

4.2. Властивості спектра оператора

Розглянемо задачу на власні значення вигляду

$$Au - \lambda u = 0, \tag{4.21}$$

де A – деякий оператор, який діє в гільбертовому просторі $H = L_2$.

Теорема 1. *Нехай A – симетричний оператор. Тоді власні числа задачі (4.21) є дійсними числами.*

Доведення. Домножимо (4.21) на власну функцію u:

$$(Au, u) = \lambda(u, u). \tag{4.22}$$

Звідси

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)},$$

де (u, u) – дійсне число. Вважаючи λ комплексним числом, запишемо до нього спряжене

$$\overline{\lambda} = \frac{\overline{(Au, u)}}{(u, u)}.$$

За першою аксіомою комплексного гільбертового простору маємо $(Au, u) = \overline{(u, Au)}$. Згідно з означенням симетричного оператора $(Au, u) = (u, Au)$. Отже, $\overline{(Au, u)} = (Au, u)$, тобто комплексне число (Au, u) дорівнює своєму спряженому. Таке число є дійсним. ■

6. Теорема про невідємні і додатні власні числа

Теорема 2. *Власні числа додатного оператора невід'ємні; власні числа додатно визначеного оператора додатні.*

Доведення. З формули (4.22) випливає, що

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{4.23}$$

Звідси, якщо взяти до уваги означення додатного і додатно визначеного оператора, отримаємо доведення теореми. ■

7. Теорема про ортогональність власних функцій у вихідному просторі

Теорема 3. *Власні функції симетричного оператора, що відповідають різним власним числам, ортогональні.*

Доведення. Нехай λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ – власні числа, а u_1, u_2 – відповідні їм власні функції. Тоді виконуються співвідношення

$$Au_1 - \lambda_1 u_1 = 0;$$
$$Au_2 - \lambda_2 u_2 = 0.$$

Домножимо скалярно обидва рівняння на функції u_2, u_1, відповідно:

$$(Au_1, u_2) = \lambda_1(u_1, u_2);$$
$$(Au_2, u_1) = \lambda_2(u_2, u_1).$$

Віднімемо від першого рівняння друге і врахуємо властивість симетрії оператора A та властивість симетрії скалярного добутку в дійсному гільбертовому просторі (перша аксіома), тобто

$$(Au_1, u_2) = (u_1, Au_2) = (Au_2, u_1).$$

Матимемо

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0.$$

Звідси, оскільки $\lambda_1 \neq \lambda_2$, випливає, що $(u_1, u_2) = 0$, тобто власні функції u_1, u_2 ортогональні. ■

8. Теорема про ортогональність власних функцій у енергетичному просторі

Теорема 4. *Власні функції додатно визначеного оператора, що відповідають різним власним числам, ортогональні за енергією.*

Доведення. Нехай λ_i, λ_j $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ – власні числа, а u_i, u_j – відповідні їм власні функції додатно визначеного оператора. З (4.21) випливає, що

$$Au_i - \lambda_i u_i = 0.$$

Домножимо це рівняння скалярно на власну функцію u_j. Отримаємо

$$(Au_i, u_j) = \lambda_i (u_i, u_j).$$

Права частина цього співвідошення дорівнює нулю згідно з теоремою 3. Отже,

$$(Au_i, u_j) = 0, \qquad i \neq j,$$

що доводить ортогональність власних функцій за енергією. ■

9. Теорема про найменше власне число

Теорема 5. *Нехай A – додатно визначений оператор*

$$(Au, u) \geq \gamma^2 \left\| u \right\|^2,$$

і нехай λ_1 $(\lambda_1 \geq \gamma^2)$ – точна нижня границя значень функціонала

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)}. \tag{4.24}$$

Якщо існує функція $u_1 \in D_A$ (D_A – область визначення оператора A) така, що

$$\frac{(Au_1, u_1)}{(u_1, u_1)} = \lambda_1, \tag{4.25}$$

то λ_1 є найменше власне число оператора A, а u_1 – відповідна йому власна функція.

10. Теорема про довільне власне число

Теорема 6. *Нехай* $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n$ *−* n *перших власних чисел додатно визначеного оператора,* $u_1, u_2, ..., u_n$ *− відповідні їм ортонормовані власні функції. Нехай існує функція* u_{n+1}*, яка не дорівнює тотожному нулю і надає мінімального значення функціоналу*

$$\frac{(Au, u)}{(u, u)}, \tag{4.33}$$

за додаткових умов

$$(u, u_i) = 0, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{4.34}$$

Тоді u_{n+1} *− власна функція, яка відповідає власному числу*

$$\lambda_{n+1} = \frac{(Au_{n+1}, u_{n+1})}{(u_{n+1}, u_{n+1})}. \tag{4.35}$$

11. Теорема про дискретний спектр

Теорема 7. *Нехай* A *− додатно визначений оператор, який діє в гільбертовому просторі* H*, і нехай довільна множина функцій, обмежена за енергетичною нормою, компактна в* H*. Тоді справджуються такі твердження: а) оператор* A *має нескінченну кількість власних чисел*

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n ..., \lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty;$$

б) відповідні власні функції утворюють систему, повну як у просторі H*, так і в енергетичному просторі* H_A*.*

13. Мінімаксимальний принцип Куранта

Теорема 8. *Нехай* A *– додатно визначений оператор з дискретним спектром, що діє в просторі* H. *Нехай* $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_n ...$ *– власні числа оператора* A *і* $u_1, u_2, ..., u_n ...$ *– відповідні їм власні функції. Виберемо у просторі* H_A *довільні функції* $v_1, v_2, ..., v_n$. *Позначимо через* $\lambda(v_1, v_2, ..., v_n)$ *мінімальне значення величини* $\|u\|_A^2$ *за додаткових умов*

$$\|u\|^2 = 1; \tag{4.66}$$

$$(u, v_1) = (u, v_2) = ... = (u, v_n) = 0. \tag{4.67}$$

тоді $n + 1-$*ше власне число* λ_{n+1} *оператора* A *дорівнює максимуму* $\lambda(v_1, v_2, ..., v_n)$ *за довільних змін функцій* $v_1, ..., v_n$.

14. Теорема про порівняння власних чисел

Теорема 9. *Нехай A і B — додатно визначені оператори з дискретними спектрами і такі, що $A \geqslant B$, тоді для довільного $k \in \mathbf{N}$*

$$\lambda_k \geqslant \mu_k, \tag{4.77}$$

де λ_k — k-не власне число оператора A і μ_k — k-не власне число оператора B.

Доведення. Згідно з мінімаксимальним принципом

$$\lambda_k = \max_{v_j \in H_A} \min_{u \in H_A} \|u\|_A, \quad \forall v_j \in H_A, \quad \|u\| = 1, \quad (u, v_j) = 0, \tag{4.78}$$

$$j = 1, 2, ..., k-1;$$

$$\mu_k = \max_{v_j \in H_B} \min_{u \in H_B} \|u\|_A, \quad \forall v_j \in H_B, \quad \|u\| = 1, \quad (u, v_j) = 0, \tag{4.79}$$

$$j = 1, 2, ..., k-1.$$

Оскільки $A \geqslant B$, то нерівність

$$\min_{u \in H_A} \|u\|_A \geqslant \min_{u \in H_B} \|u\|_B \tag{4.80}$$

виконується і за додаткових умов

$$\|u\| = 1, \quad (u, v_j) = 0, \quad j = 1, 2, ..., k-1.$$

Таке ж міркування справджується і стосовно максимальних значень величин

$$\lambda(v_1, v_2, ..., v_{k-1}) \geqslant \mu(v_1, v_2, ..., v_{k-1}) \tag{4.81}$$

Це й означає, що

$$\lambda_k \geqslant \mu_k. \blacksquare$$

15. Метод Рітца в задачах на власні значення

$$\lambda_1 = \min \frac{(Au, u)}{(u, u)}, \ u \in H_A, \tag{4.92}$$

або

$$\lambda_1 = \min (Au, u), \ (u, u) = 1, \ u \in H_A. \tag{4.93}$$

До розв'язування задач (4.92) або (4.93) застосуємо метод Рітца, який полягає у такому. Виберемо послідовність базисних (координатних) функцій $\{\varphi_n\}$, які задовольняють умови

1° $\varphi_n \in H_A$;

2° для довільного n функції φ_n лінійно незалежні;

3° послідовність базисних функцій $\{\varphi_n\}$ повна за енергією.

Приймемо

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{4.94}$$

де a_k – сталі коефіцієнти. Виберемо a_k, враховуючи варіаційне формулювання задачі на власні значення (4.93), тобто

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m (A\varphi_k, \varphi_m) \to \min, \tag{4.95}$$

за додаткової умови

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} a_k a_m (\varphi_k, \varphi_m) = 1. \tag{4.96}$$

16. Теорема про порядок алгебраїчного рівняння для визначення власних чисел

$$\det\{[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)]\} = 0, \ k, m = 1, 2, ..., n. \tag{4.100}$$

Отже, задача зводиться до матричної задачі на власні значення.

Якщо система базисних функцій φ_k ортонормована у просторі H, то рівняння (4.100) дещо спрощується. Воно матиме вигляд

$$\det\left\{\begin{array}{ccc} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda & (A\varphi_1, \varphi_2) & ... \\ (A\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda & ... \\ ... & ... & ... \end{array}\right\} = 0. \tag{4.101}$$

Теорема 10. *Рівняння (4.100) (4.101) є алгебричними рівняннями n-го степеня щодо невідомої λ.*

Доведення. Справді, коефіцієнтом при $(-1)^n \lambda^n$ в обидвох цих рівняннях є визначник Грамма

$$\det\{(A\varphi_k, \varphi_m)\}, \ k, m = 1, 2, ..., n \tag{4.102}$$

системи лінійно незалежних функцій. ■

17. Теорема про дійсні власні числа

$$\det\{[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)]\} = 0, \ k, m = 1, 2, ..., n. \tag{4.100}$$

Отже, задача зводиться до матричної задачі на власні значення.

Якщо система базисних функцій φ_k ортонормована у просторі H, то рівняння (4.100) дещо спрощується. Воно матиме вигляд

$$\det\left\{\begin{array}{ccc} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda & (A\varphi_1, \varphi_2) & ... \\ (A\varphi_2, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda & ... \\ ... & ... & ... \end{array}\right\} = 0. \tag{4.101}$$

Теорема 11. *Всі корені рівнянь (4.100), (4.101) дійсні.*

18. Теорема про збіжність до найменшого власного числа

Теорема 12. *Нехай A — додатно визначений оператор з дискретним спектром і нехай базисні функції, які використовують у методі Рітца, задовольняють умови 1°–3 °, тоді послідовність наближених значень $\lambda_1^{(n)}$ найменшого власного числа λ_1, отриманих методом Рітца, є збіжною*

$$\lambda_1^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \lambda_1,$$

причому

$$\lambda_1^{(n)} \geq \lambda_1.$$

19. Слабке формулюваня задачі на власні значення

Нагадаємо спочатку (див. параграф 1.8), що слабким розв'язком задачі

$$Au = f \tag{4.108}$$

називають функцію $u \in V$, де V — вибраний простір, яка задовольняє співвідношення

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V. \tag{4.109}$$

Тут $a(u,v)$ – білінійна форма, визначена диференціальним оператором

$$a(u,v) = (Au,v);$$

(f,v) – скалярний добуток у $H = L_2(\Omega)$.

Розглянемо задачу на власні значення

$$Au - \lambda u = 0. \tag{4.110}$$

Запишемо для неї за аналогією з (4.109) слабке формулювання

$$a(u,v) - \lambda(u,v) = 0, \quad \forall v \in V. \tag{4.111}$$

Задачу знаходження числа λ і функції $u(x)$ такої, що $u \in V$ задовольняє рівняння (4.111) і не дорівнює тотожно нулю, називають слабким формулюванням задачі на власні значення.

21. Параболічна задача

5.1. Параболічна задача

Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння параболічного типу, яка полягає у знаходженні функції $u(x,t)$ такої, що задовольняє рівняння

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T] \tag{5.1}$$

та початкові умови

$$u(x,t) = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega,\ t = 0. \tag{5.2}$$

Тут $u(x,t)$ – шукана функція; A – додатно визначений оператор, який діє у гільбертовому просторі H (див., наприклад, 3.12); Ω – обмежена область евклідового простору $\mathbf{R}^n$. Уважатимемо, що границя Γ області

Ω є ліпшицевою. Через $x = x_1, x_2, ..., x_n$ позначимо точку області Ω, а через t – часову змінну.

Характерним прикладом рівняння параболічного типу (5.1) є рівняння теплопровідності. Для нього оператор A визначений співвідношеннями

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}; \tag{5.3}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T]. \tag{5.4}$$

22. Варіаційне формулювання параболічної задачі

Наведемо варіаційне формулювання параболічної задачі.
Знайти функцію $u(x,t) \in L_2(0,T;V)$ таку, що задовольняє рівняння

$$m(u',v) + a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V; \tag{5.12}$$

$$m(u(x,0) - u_0, v) = 0. \tag{5.13}$$

$$m\,(u,v) = \int\limits_{\Omega} \rho_0 uv d\Omega; \tag{5.9}$$

$$a\,(u,v) = \int\limits_{\Omega} Auv d\Omega; \tag{5.10}$$

$$l\,(u) = \int\limits_{\Omega} fu d\Omega; \tag{5.11}$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

25. Існування розрязку варіаційної задачі

Наведемо варіаційне формулювання параболічної задачі.
Знайти функцію $u(x,t) \in L_2(0,T;V)$ таку, що задовольняє рівняння

$$m(u',v) + a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V; \tag{5.12}$$

$$m(u(x,0) - u_0, v) = 0. \tag{5.13}$$

Теорема 4. *Нехай задані функції* $u_0 \in H$ *та* $f \in L_2(0,T;H)$. *Тоді варіаційна задача теплопровідності (5.12), (5.13) має єдиний розв'язок* $u \in L_\infty\,(0,T;H) \cap L_2\,(0,T;V)$.