Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Телематика (при ЦНИИ РТК)»

Отчет по лабораторным работам 5-8

По дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Выполнил
Студент гр.3630201/80101 _______ В.Н. Сеннов

Руководитель
доцент к.ф.-м.н. _______ А.Н. Баженов

«___»__________ 202__г.

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

1. Необходимо сгенерировать выборки размерами 20, 60, 100 элементов для двумерного нормального распределения $N(x, y, 0, 0, 1, 1, \rho)$, где $\rho = 0.0,\ 0.5,\ 0.9$, а также для смеси нормальных распределений:

$$f(x, y) = 0.9N(x, y, 0, 0, 1, 1, 0.9) + 0.1N(x, y, 0, 0, 1, 1, -0.9). \quad (1)$$

   Для каждого типа выборки необходимо вычислить коэффициенты корреляции Пирсона, Спирмена и квадрантный коэффициент корреляции 1000 раз, посчитать среднее значение и дисперсию. Также для каждого типа выборки нужно построить эллипс рассеивания.

2. В рамках данной работы необходимо сгенерировать выборку для зависимости

$$y_i = 2 + 2x_i + e_i,$$

   где $x_1 = -1.8,\ x_2 = -1.6,\ \ldots, x_{20} = 2$, $e_i \sim N(0, 1)$.

   Необходимо найти оценки коэффициентов линейной регрессии методом наименьших квадратов и наименьших модулей. Найти те же оценки для выборки, в которой элементы y_1 и y_{20} возмущены на 10 и -10.

3. В рамках данной работы необходимо сгенерировать выборку размером 100 элементов для нормального распределения $N(0, 1)$. Для нее найти методом максимального правдоподобия оценки параметров μ и σ для функции распределения $N(\mu, \sigma)$. Проверить эту гипотезу критерием χ^2 при уровне значимости $\alpha = 0.05$. Привести таблицу вычисления χ^2.

   Также необходимо сгенерировать выборку размером 20 элементов для распределения Лапласа $L(0, 1)$ и равномерного распределения $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Для них необходимо проделать те же действия.

4. В рамках данной работы необходимо сгенерировать выборки размером 20 и 100 элементов для нормального распределения $N(0, 1)$. Для них необходимо найти оценки параметров μ и σ методом наибольшего правдоподобия. На основе них найти интервальные оценки асимптотически и на основе статистик Стьюдента и χ^2.

   В качестве параметра надежности необходимо взять $\gamma = 0.95$.

2 Математическое описание

2.1 Двумерное нормальное распределение

Двумерное нормальное распределение в данной лабораторной имеет следующую плотность вероятности:

$$N(x, y, 0, 0, 1, 1, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}, \tag{2}$$

где ρ — коэффициент корреляции.

2.2 Коэффициенты корреляции

Коэффициентом корреляции двух величин называется величина ρ:

$$\rho = \frac{K}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $K = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})]$.

Выборочный коэффициент корреляции Пирсона r:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2}} \tag{3}$$

Выборочный квадрантный коэффициент корреляции r_Q:

$$r_Q = \frac{(n_1 + n_3) - (n_2 + n_4)}{n}, \tag{4}$$

где n — количество элементов выборки, а n_1, n_2, n_3, n_4 — количества точек, попавших соответственно в I, II, III, и IV квадранты координатной плоскости, параллельной OXY и имеющей центр в точке $(\operatorname{med} x; \operatorname{med} y)$.

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена r_S:

$$r_S = \frac{\frac{1}{n}\sum(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(u_i - \bar{u})^2 \frac{1}{n}\sum(v_i - \bar{v})^2}}, \tag{5}$$

где u_i — ранг величины x_i, v_i — ранг величины y_i, n — размер выборки, $\bar{u} = \bar{v} = \frac{n+1}{2}$ — средний ранг.

2.3 Эллипсы рассеивания

Эллипсом рассеивания называется эллипс, задаваемый уравнением:

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^2} = \lambda^2, \tag{6}$$

где λ — количество стандартных отклонений.

Оси эллипса пересекают ось OX под углом α:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

2.4 Простая линейная регрессия

Регрессионную модель описания данных называют простой линейной регрессией, если

$$y_i = a + bx_i + e_i, \tag{7}$$

где $x_1, \dots, x_n$ — заданные числа; $y_1, \dots, y_n$ — наблюдаемые значение отклика; $e_i \sim N(0, \sigma)$; a, b — неизвестные параметры регрессии.

2.5 Метод наименьших квадратов

Оценки a', b' для параметров a, b в формуле (7) можно найти минимизируя функционал (8).

$$Q(a', b') = \sum_{i=1} n(y_i - a' - b'x_i) \tag{8}$$

Оценки a' и b' можно найти по следующим формулам:

$$b' = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \tag{9}$$

$$a' = \bar{y} - \bar{x} \cdot b' \tag{10}$$

2.6 Метод наименьших модулей

Оценки a', b' для параметров a, b в формуле (7) можно найти минимизируя функционал (11).

$$Q'(a', b') = \sum_{i=1}^{n} |y_i - a' - b'x_i| \tag{11}$$

Расчетных формул для метода наименьших модулей нет, минимизировать функционал можно численно.

Метод наименьших модулей позволяет сделать робастную оценку, то есть устойчивую к случайным возмущениям.

2.7 Метод максимального правдоподобия

Для выборки $x_1, \dots, x_n$ и функции распределения f с вектором параметров θ определяют функцию правдоподобия L:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta)$$

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ находится по формуле:

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta).$$

Если f дифференцируема, то оценка максимального правдоподобия находится из системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{12}$$

2.8 Проверка гипотезы о законе распределения методом хи-квадрат

Пусть выдвинута гипотеза H_0 о генеральном законе распределения с функцией $F(x)$, которая не содержит неизвестных параметров.

Проверить эту гипотезу можно по следующему алгоритму:

1. Выбираем уровень значимости α.
2. Разбиваем выборку на k промежутков Δ_i.
3. Находим квантиль $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ по таблице [3].
4. Вычисляем $p_i = P(x \in \Delta_i)$ с помощью $F(x)$.
5. Находим частоты n_i попадания в промежуток Δ_i.
6. Вычисляем выборочное значение χ^2:

$$\chi^2_B = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)}{np_i} \tag{13}$$

7. Сравниваем χ^2_B и квантиль $\chi_{1-\alpha}(k-1)$.
   (a) Если $\chi^2_B < \chi_{1-\alpha}(k-1)$, то гипотеза H_0 принимается на данном этапе проверки.
   (b) Иначе гипотеза H_0 отвергается, выбирается другая гипотеза, для нее проделываются те же действия.

Количество интервалов k можно определить с помощью эвристики:

$$k \approx 1.72 \cdot \sqrt[3]{n} \tag{14}$$

2.9 Доверительные интервалы

Дана выборка размером n $(x_1, \dots, x_n)$ из генеральной совокупности. Для нее построим выборочное среднее $\bar{x}$ и среднеквадратическое отклонение s.

Параметры расположения μ и масштаба σ неизвестны. Построим для них доверительный интервал с доверительной вероятностью γ.

2.9.1 Оценка на основе статистики Стьюдента и хи-квадрат

Оценка для параметра положения:

$$P\left(\bar{x} - \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma, \tag{15}$$

где $1-\alpha = \gamma$, $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободами порядка $1-\alpha/2$.

Оценка для параметра масштаба:

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right) = \gamma, \tag{16}$$

где $1-\alpha=\gamma$, $\chi^2_p(n-1)$ — квантиль распределения хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы порядка p.

Эти оценки справедливы для выборки из нормальной генеральной совокупности.

2.9.2 Асимптотические оценки на основе центральной предельной теоремы

Оценка для параметра положения:

$$P\left(\bar{x}-\frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)\approx\gamma, \tag{17}$$

где $1-\alpha=\gamma$, $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $1-\alpha/2$.

Для оценки параметра масштаба необходимо рассчитать выборочный эксцесс $e=\frac{m_4}{s^4}$, где $m_4=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^4$ — четвертый выборочный центральный момент.

Параметр масштаба можно оценить так:

$$P\left(s(1+U)^{-0.5}<\sigma<s(1-U)^{-0.5}\right)\approx\gamma, \tag{18}$$

где $U=u_{1-\alpha/2}\sqrt{(e+2)/n}$, $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $1-\alpha/2$.

Эти оценки справедливы для выборки из генеральной совокупности, которая имеет конечные центральные моменты вплоть до 4 порядка и конечное матожидание.

3 Особенности реализации

Программа для выполнения лабораторной была написана на языке Python 3.8.2. Для построения графиков использовалась библиотека Matplotlib. Для генерации выборок использовалась библиотека scipy.

Отображение эллипса рассеяния, определяемого формулой (6), было реализовано с использованием примера к библиотеке Matplotlib [1]. Эллипсы были построены с коэффициентом $\lambda = 3$. Выборка для смеси нормальных распределений (1) была сгенерирована так: была сгенерирована выборка для первого распределения размером 90% от необходимого размера, а потом была сгенерирована выборка для второго распределения размером 10% от необходимого размера. Итоговая выборка является их объединением.

Оценки коэффициентов линейной регрессии были оценены методом наименьших квадратов по формулам (10) и (9) и методом наименьших модулей. Функционал (11) был минимизирован функцией **optimize.minimize**.

Можно показать, что для

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

решениями системы (12) являются значения $\mu = \bar{x}$, $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$. Таким образом искались оценки для параметров μ, σ методом максимального правдоподобия.

Остальные вычисления были проведены по формулам (13) и (14).

Вычисления интервальных оценок были проведены по формулам (15)-(18).

В приложении A приведена ссылка на репозиторий с исходным кодом.

4 Результаты работы программы

В этом разделе представлены результаты работы программы.

4.1 Эллипсы рассеяния

На рис. 1-3 представлены эллипсы рассеяния, построенные по формуле 6.

На рис. 1 изображены эллипсы рассеяния для выборок из 20 элементов.

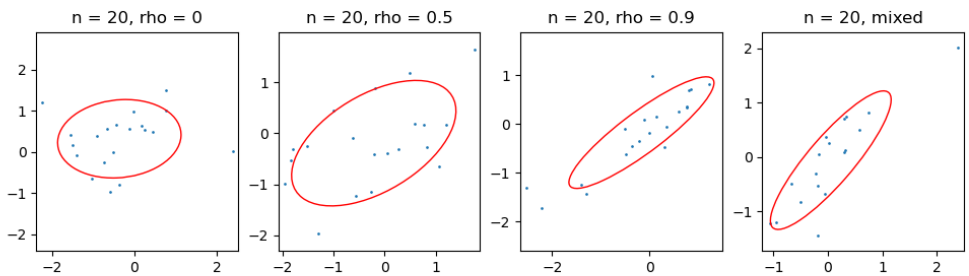

Рис. 1: Эллипсы рассеяния для выборок из 20 элементов

На рис. 2 изображены эллипсы рассеяния для выборок из 60 элементов.

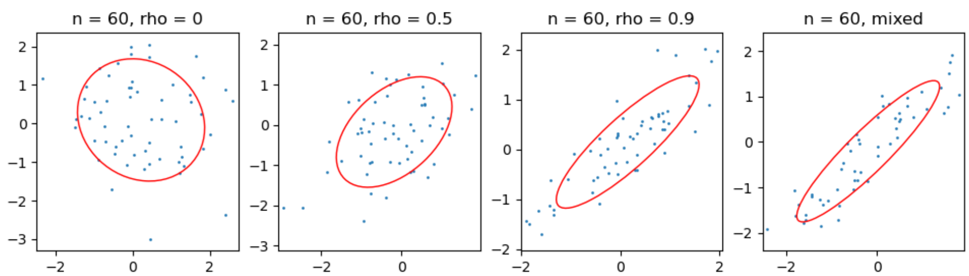

Рис. 2: Эллипсы рассеяния для выборок из 60 элементов

На рис. 3 изображены эллипсы рассеяния для выборок из 100 элементов.

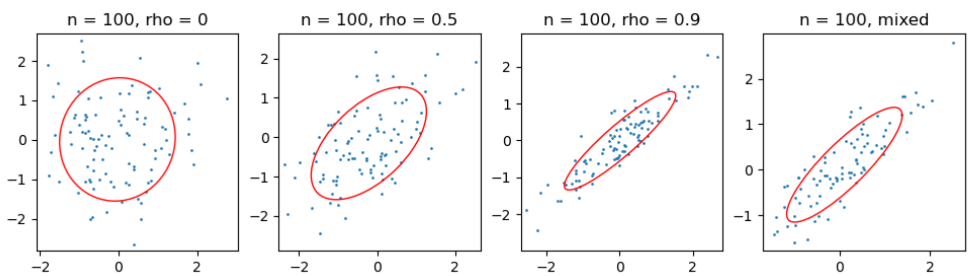

Рис. 3: Эллипсы рассеяния для выборок из 100 элементов

4.2 Коэффициенты корреляции

В таблицах 1-3 представлены коэффициенты корреляции r, r_Q, r_S, рассчитанные по формулам (3), (4) и (5) соответственно.

Средние значения $E(z)$ коэффициентов корреляции округлены до первого знака $\sqrt{D(z)}$, дисперсия $D(z)$ округлена до первого значащей цифры.

$\rho = 0$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.0	0.0	0.0
$D(z)$	0.05	0.05	0.05
$\rho = 0.5$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.5	0.5	0.3
$D(z)$	0.03	0.03	0.04
$\rho = 0.9$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.89	0.87	0.7
$D(z)$	0.003	0.004	0.03
Смесь (1)	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.89	0.86	0.7
$D(z)$	0.003	0.005	0.03

Таблица 1: Двумерное нормальное распределение, $n = 20$

$\rho = 0$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.0	0.0	0.0
$D(z)$	0.02	0.02	0.02
$\rho = 0.5$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.5	0.5	0.3
$D(z)$	0.01	0.01	0.02
$\rho = 0.9$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.90	0.88	0.7
$D(z)$	0.0007	0.001	0.009
Смесь (1)	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.90	0.88	0.7
$D(z)$	0.0008	0.001	0.01

Таблица 2: Двумерное нормальное распределение, $n = 60$

$\rho = 0$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.0	0.0	0.0
$D(z)$	0.01	0.01	0.01
$\rho = 0.5$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.50	0.48	0.3
$D(z)$	0.006	0.006	0.008
$\rho = 0.9$	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.90	0.89	0.71
$D(z)$	0.0004	0.0006	0.005
Смесь (1)	r	r_S	r_Q
$E(z)$	0.90	0.89	0.71
$D(z)$	0.0004	0.0006	0.005

Таблица 3: Двумерное нормальное распределение, $n = 100$

4.3 Оценка параметров линейной регрессии

4.3.1 Выборка без возмущений

Оценки, полученные методом наименьших квадратов:

$$a' \approx 2.2400, \quad b' \approx 2.2019$$

Оценки, полученные методом наименьших модулей:

$$a' \approx 2.6183, \quad b' \approx 2.2312$$

На рис. 4 изображены графики для выборки без возмущений.

4.3.2 Выборка с возмущениями

Оценки, полученные методом наименьших квадратов:

$$a' \approx 2.3828, \quad b' \approx 0.7733$$

Оценки, полученные методом наименьших модулей:

$$a' \approx 2.0569, \quad b' \approx 1.8281$$

На рис. 5 изображены графики для выборки с возмущениями.

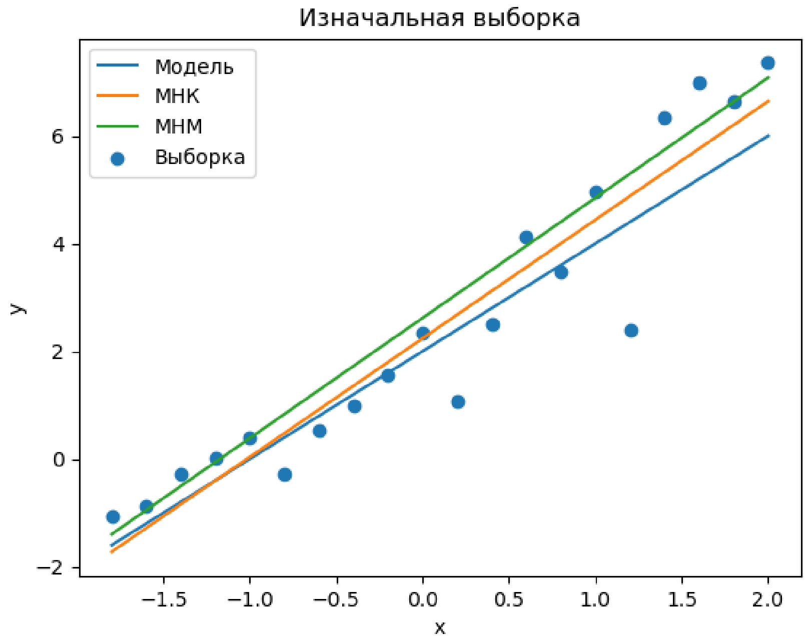

Рис. 4: Графики для выборки без возмущений.

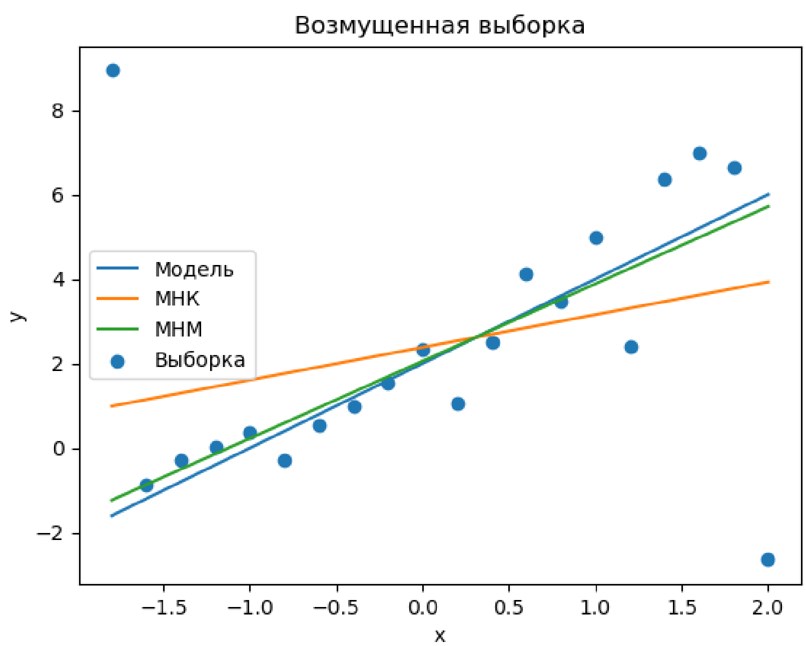

Рис. 5: Графики для выборки с возмущениями.

4.4 Метод максимального правдоподобия

С помощью метода максимального правдоподобия были получены следующие оценки:

$$\hat{\mu} \approx -0.01617 \qquad \hat{\sigma} \approx 0.9251$$

4.5 Критерий хи-квадрат

Для выборки из 100 элементов был выбран $k = 8$ по формуле (14). Уровень значимости был выбран $\alpha = 0.05$.

В таблице 4 вычислен выборочный коэффициент χ^2_B по формуле (13).

i	Δ_i	n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
1	$(-\infty; -2.03)$	1	0.0125	1.25	-0.25	0.05
2	$(-2.03; -1.45)$	2	0.0489	4.89	-2.88	1.71
3	$(-1.45; -0.87)$	20	0.1377	13.77	6.23	2.82
4	$(-0.87; -0.29)$	22	0.2425	24.25	-2.25	0.21
5	$(-0.29; 0.29)$	28	0.2675	26.75	1.25	0.06
6	$(0.29; 0.87)$	15	0.185	18.5	-3.5	0.66
7	$(0.87; 1.45)$	7	0.0801	8.01	-1.00	0.13
8	$(1.45; +\infty)$	5	0.0258	2.58	2.42	2.27
Сумма	-	100	1.0000	100.00	0.00	7.91

Таблица 4: Вычисление χ^2_B при проверке гипотезы о нормальном законе распределения

Табличное значение $\chi^2_{0.95}(7) = 14.0671$, выборочное значение $\chi^2_B = 7.91$, значит гипотеза может быть принята на данном этапе.

4.6 Проверка чувствительности критерия хи-квадрат

Для выборок из 20 элементов был выбран $k = 5$. Уровень значимости был выбран $\alpha = 0.05$.

В таблице 5 вычислен выборочный коэффициент χ^2_B для выборки, соответствующей распределению Лапласа.

i	Δ_i	n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
1	$(-\infty; -2.56)$	5	0.1042	2.08	2.91	4.08
2	$(-2.56; -1.65)$	0	0.1739	3.47	-3.47	3.48
3	$(-1.65; -0.74)$	4	0.2542	5.08	-1.08	0.23
4	$(-0.74; 0.17)$	5	0.2413	4.82	0.17	0.01
5	$(0.17; +\infty)$	6	0.2265	4.53	1.46	0.48
Сумма	-	20	1.0000	20.00	0.00	8.28

Таблица 5: Вычисление χ^2_B при проверке гипотезы о нормальном законе распределения для выборки $L(0, 1)$

Табличное значение $\chi^2_{0.95}(4) = 9.4877$, выборочное значение $\chi^2_B = 8.28$, значит гипотеза также может быть принята на данном этапе.

i	Δ_i	n_i	p_i	np_i	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
1	$(-\infty; -1.04)$	4	0.1586	3.17	0.82	0.22
2	$(-1.04; -0.37)$	3	0.2078	4.15	-1.15	0.32
3	$(-0.37; 0.3)$	6	0.2582	5.16	0.83	0.14
4	$(0.3; 0.97)$	2	0.211	4.22	-2.21	1.17
5	$(0.96; +\infty)$	5	0.1668	3.33	1.66	0.83
Сумма	-	20	1.0000	20.00	0.00	2.68

Таблица 6: Вычисление χ^2_B при проверке гипотезы о нормальном законе распределения для выборки $N(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

В таблице 6 вычислен выборочный коэффициент χ^2_B для выборки, соответствующей равномерному распределению.

Табличное значение $\chi^2_{0.95}(4) = 9.4877$, выборочное значение $\chi^2_B = 2.68$, значит гипотеза также может быть принята на данном этапе.

4.7 Интервальные оценки

В таблице 7 представлены интервальные оценки на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат.

n	Интервал μ	Интервал σ
20	$(-0.92; 0.10)$	$(0.82; 1.58)$
100	$(-0.15; 0.26)$	$(0.90; 1.20)$

Таблица 7: Интервальные оценки на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат.

В таблице 8 представлены асимптотические интервальные оценки.

n	Интервал μ	Интервал σ
20	$(-0.87; 0.05)$	$(0.85; 1.54)$
100	$(-0.15; 0.26)$	$(0.90; 1.24)$

Таблица 8: Асимптотические интервальные оценки

Заключение

1. В рамках лабораторной работы были сгенерированы выборки разного размера для двумерных нормальных распределений с различными коэффициентами корреляции и для смеси двумерных нормальных распределений. Для полученных выборок были рассчитаны выборочные коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена, квадрантный коэффициент корреляции. Также для выборок были построены эллипсы рассеивания.
   По построенным эллипсам видно, что чем больше коэффициент корреляции, тем более выражена разница осей. Для выборки размером 100 элементов с нулевой корреляцией эллипс очень близок к окружности.
   Для таких выборок видно, что коэффициент корреляции Пирсона очень близок к коэффициенту корреляции выборки. Коэффициент корреляции Спирмена менее точен, но тоже достаточно близок к коэффициенту корреляции выборки. Квадратный коэффициент корреляции для выборок с ненулевой корреляцией заметно отличается от коэффициента корреляции выборки.
   Смесь двух двумерных нормальных распределений нельзя отличить от чистого двумерного нормального распределения по выборочным коэффициентам корреляции, но при большом объеме выборки эллипсы рассеивания заметно отличаются.

2. В рамках лабораторной работы была сгенерирована выборка для линейной зависимости с нормально распределенной ошибкой, были оценены оценки коэффициентов линейной регрессии методом наименьших квадратов и методом наименьших модулей для полученной выборки и выборки с возмущениями. Для полученных оценок были построены оценки.
   Видно, что для выборки без возмущений и метод наименьших квадратов, и метод наименьших модулей достаточно точно приближают исходную зависимость. Но найти коэффициенты методом наименьших квадратов проще, чем методом наименьших модулей.
   Для выборки с возмущениями метод наименьших квадратов дают гораздо менее точную оценку, очень сильно отличается коэффициент наклона. При этом оценка, полученная методом наименьших модулей, практически не меняется.

3. В рамках лабораторной работы была сгенерирована выборка для размером 100 элементов для нормального распределения $N(0, 1)$. Для нее найти методом максимального правдоподобия оценки параметров μ и σ для функции распределения $N(\mu, \sigma)$. Такая гипотеза была проверена критерием χ^2. Те же действия были сделаны для выборок размером 20 элементов, соответствующих распределению Лапласа и равномерному распределению.
   Было установлено, что применение метода максимального правдоподобия для нормального распределения сводится к нахождению выборочного среднего и среднеквадратичного отклонения.
   Критерий χ^2 не отверг гипотезу о соответствии нормальной выборки нормальному распределению, чего и следовало ожидать.
   Критерий χ^2 также не отверг гипотезу о соответствии нормальному распределению малых выборок, которые были сгенерированы в соответствии с распределением Лапласа и равномерным распределением. Это объясняется тем, что критерий χ^2 имеет асимптотический характер, а значит может давать ошибочные результаты при малых размерах выборки. Стоит также отметить, что при реализации лабораторной работы сначала генерировались выборки размером 100 элементов, и для них примерно в половине случаев

критерий χ^2 отвергал гипотезу о нормальности.

4. В рамках лабораторной работы была сгенерированы выборки размером 20 и 100 элементов для стандартного нормального распределения. Для них были найдены оценки параметров μ и σ методом наибольшего правдоподобия. На основе них были найдены интервальные оценки асимптотически и на основе статистик Стьюдента и χ^2.
   Видно, что исходные параметры попадают в доверительный интервал, что говорит о состоятельности оценок.
   Также видно, что при малом размере выборки доверительные интервалы заметно больше, чем для выборки большего размера. То есть оценка тем точнее, чем больше размер выборки.
   Для выборки малого размера асимптотические оценки дали большую точность, что не очень логично и скорее является случайностью, которая присутствует при работе с малыми выборками. Для выборки большего размера классические интервальные оценки точнее асимптотических.

Программа для лабораторной была написана языке Python 3.8.2, для построения графиков использовалась библиотека Matplotlib.

Список литературы

[1] Plot a confidence ellipse of a two-dimensional dataset. // Matplotlib documentation. — URL: https://matplotlib.org/3.1.1/gallery/statistics/confidence_ellipse.html#sphx-glr-gallery-statistics-confidence-ellipse-py . — (дата обращения: 24.11.2020)

[2] Теоретическое приложение к лабораторным работам №5-8 по дисциплине «Математическая статистика». — Спб.: Санкт-Петербургский политехнический университет, 2020. — 12 с.

[3] Chi-square distribution. // Wikipedia, the free encyclopedia. — https://en.wikipedia.org/wiki/Chi-square_distribution . — (дата обращения: 05.12.20)

A Репозиторий с исходным кодом

Исходный код программы для данной лабораторной размещен на сервисе GitHub.

Ссылка на репозиторий: https://github.com/Vovan-S/TV-Lab1.