

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Телематика (при ЦНИИ РТК)»

Отчет по лабораторной работе

Вычисление интервальных оценок

По дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

Выполнил

Студент гр.3630201/80101

В.Н. Сеннов

Руководитель

доцент к.ф.-м.н.

А.Н. Баженов

«___» _____ 202__г.

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1	Постановка задачи	4
2	Математическое описание	5
2.1	Доверительные интервалы	5
2.1.1	Оценка на основе статистики Стьюдента и хи-квадрат	5
2.1.2	Асимптотические оценки на основе центральной предельной теоремы . .	5
3	Особенности реализации	6
4	Результаты работы программы	7
	Заключение	8
	Список литературы	9
A	Репозиторий с исходным кодом	10

Список таблиц

1	Интервальные оценки на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат.	7
2	Асимптотические интервальные оценки	7

1 Постановка задачи

В рамках данной работы необходимо сгенерировать выборки размером 20 и 100 элементов для нормального распределения $N(0, 1)$. Для них необходимо найти оценки параметров μ и σ методом наибольшего правдоподобия. На основе них найти интервальные оценки асимптотически и на основе статистик Стьюдента и χ^2 .

В качестве параметра надежности необходимо взять $\gamma = 0.95$.

2 Математическое описание

2.1 Доверительные интервалы

Дана выборка размером n (x_1, \dots, x_n) из генеральной совокупности. Для нее построим выборочное среднее \bar{x} и среднеквадратическое отклонение s .

Параметры расположения μ и масштаба σ неизвестны. Построим для них доверительный интервал с доверительной вероятностью γ .

2.1.1 Оценка на основе статистики Стьюдента и хи-квадрат

Оценка для параметра положения:

$$P\left(\bar{x} - \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{s \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = \gamma, \quad (1)$$

где $1-\alpha = \gamma$, $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы порядка $1-\alpha/2$.

Оценка для параметра масштаба:

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}\right) = \gamma, \quad (2)$$

где $1-\alpha = \gamma$, $\chi_p^2(n-1)$ — квантиль распределения хи-квадрат с $(n-1)$ степенями свободы порядка p .

Эти оценки справедливы для выборки из нормальной генеральной совокупности.

2.1.2 Асимптотические оценки на основе центральной предельной теоремы

Оценка для параметра положения:

$$P\left(\bar{x} - \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \approx \gamma, \quad (3)$$

где $1-\alpha = \gamma$, $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $1-\alpha/2$.

Для оценки параметра масштаба необходимо рассчитать выборочный эксцесс $e = \frac{m_4}{s^4}$, где $m_4 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^4$ — четвертый выборочный центральный момент.

Параметр масштаба можно оценить так:

$$P\left(s(1+U)^{-0.5} < \sigma < s(1-U)^{-0.5}\right) \approx \gamma, \quad (4)$$

где $U = u_{1-\alpha/2} \sqrt{(e+2)/n}$, $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $1-\alpha/2$.

Эти оценки справедливы для выборки из генеральной совокупности, которая имеет конечные центральные моменты вплоть до 4 порядка и конечное матожидание.

3 Особенности реализации

Программа для выполнения лабораторной была написана на языке Python 3.8.2. Для генерации выборки был использован модуль **stats** библиотеки `scipy`. Для вычисления квантилей нормального распределения, распределения Стьюдента и распределения хи-квадрат был также использован модуль **stats** библиотеки `scipy`.

Вычисления интервальных оценок были проведены по формулам (1)-(4).

В приложении А приведена ссылка на репозиторий с исходным кодом.

4 Результаты работы программы

В таблице 1 представлены интервальные оценки на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат.

n	Интервал μ	Интервал σ
20	$(-0.92; 0.10)$	$(0.82; 1.58)$
100	$(-0.15; 0.26)$	$(0.90; 1.20)$

Таблица 1: Интервальные оценки на основе статистик Стьюдента и хи-квадрат.

В таблице 2 представлены асимптотические интервальные оценки.

n	Интервал μ	Интервал σ
20	$(-0.87; 0.05)$	$(0.85; 1.54)$
100	$(-0.15; 0.26)$	$(0.90; 1.24)$

Таблица 2: Асимптотические интервальные оценки

Заключение

В рамках лабораторной работы были сгенерированы выборки размером 20 и 100 элементов для стандартного нормального распределения. Для них были найдены оценки параметров μ и σ методом наибольшего правдоподобия. На основе них были найдены интервальные оценки асимптотически и на основе статистик Стьюдента и χ^2 .

Видно, что исходные параметры попадают в доверительный интервал, что говорит о состоятельности оценок.

Также видно, что при малом размере выборки доверительные интервалы заметно больше, чем для выборки большего размера. То есть оценка тем точнее, чем больше размер выборки.

Для выборки малого размера асимптотические оценки дали большую точность, что не очень логично и скорее является случайностью, которая присутствует при работе с малыми выборками. Для выборки большего размера классические интервальные оценки точнее асимптотических.

Программа для лабораторной была написана языке Python 3.8.2, для генерации выборок была использована библиотека `scipy`.

Список литературы

- [1] Теоретическое приложение к лабораторным работам №5-8 по дисциплине «Математическая статистика». — Спб.: Санкт-Петербургский политехнический университет, 2020. — 12 с.

А Репозиторий с исходным кодом

Исходный код программы для данной лабораторной размещен на сервисе GitHub.

Ссылка на репозиторий: <https://github.com/Vovan-S/TV-Lab1>.