Линейные и уникальные типы

Контекст требует формализации

Напомним правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, \theta \vdash \theta} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Что такое контекст?

1. Это множество? Ведь $\alpha, \alpha \to \beta = \alpha \to \beta, \alpha$

$$\frac{\dfrac{}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \beta} \qquad \dfrac{}{\alpha \to \beta, \alpha \vdash \alpha}}{\alpha \to \beta, \alpha \vdash \beta}$$

2. Разве это множество? Ведь $\alpha, \alpha \neq \alpha$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\alpha, \alpha \vdash \alpha}}{\alpha \vdash \alpha \to \alpha}}{\vdash \alpha \to \alpha \to \alpha}$$

Структурные правила

Перестановка:

$$\frac{\Xi, \Delta, \Sigma, H \vdash \varphi}{\Xi, \Sigma, \Delta, H \vdash \varphi}$$

Сжатие:

$$\frac{\Xi, \delta, \delta \vdash \varphi}{\Xi, \delta \vdash \varphi}$$

Ослабление:

$$\frac{\Xi \vdash \varphi}{\Xi, \delta \vdash \varphi}$$

Сжатие и ослабление предполагают содержательные действия.

$$\dfrac{\dfrac{y : \beta \vdash y : \beta}{y : \beta, x : \alpha \vdash y : \beta}}{y : \beta \vdash \lambda x^{\alpha}.y : \alpha \to \beta} \qquad \dfrac{\dfrac{x : \alpha \vdash x : \alpha \qquad x : \alpha \vdash x : \alpha}{x : \alpha, x : \alpha \vdash (x, x) : \alpha \times \alpha}}{x : \alpha \vdash (x, x) : \alpha \times \alpha}$$

Два варианта удаления конъюнкции

Вариант 1 (классический):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

Вариант 2 (альтернативный):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta \quad \Delta, \alpha, \beta \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Варианты эквивалентны при наличии структурных правил (например, классический через альтернативный):

$$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta \quad \dfrac{\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}}{\alpha, \beta \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha}$$

Изоморфизм Карри-Ховарда

- Сжатие — копирование значения
- Ослабление — удаление значения
- Классическая конъюнкция:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(P) : \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(P) : \beta}$$

- Альтернативная конъюнкция:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta \quad \Delta, x : \alpha, y : \beta \vdash E : \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{case}\ P\ \mathsf{of}\ (x, y) \rightarrow E : \varphi}$$

Линейная интуиционистская логика (вариант Филиппа Вадлера)

Грамматика:

$$\varphi ::= X \mid \varphi \multimap \varphi \mid \varphi \otimes \varphi \mid \varphi \,\&\, \varphi \mid \varphi \oplus \varphi \mid \mid\, !\varphi$$

Связки носят специальные названия: линейная импликация, мультипликативная и аддитивная конъюнкция, аддитивная дизъюнкция, фабрика («точно», «конечно»).

В линейной классической логике ещё рассматривают связки $\varphi ⅋ \varphi$ и $?\varphi$, в изоморфизме Карри-Ховарда они не используются.

Два типа контекстов: $\langle\alpha\rangle$ — линейный, $[\beta]$ — интуиционистский

Структурные правила:

$$\frac{\Xi, \Gamma, \Delta, H \vdash \alpha}{\Xi, \Delta, \Gamma, H \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma, [\alpha], [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, [\alpha] \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma, [\alpha] \vdash \beta}$$

Аксиомы:

$$\frac{}{[\alpha] \vdash \alpha} \qquad \frac{}{\langle\alpha\rangle \vdash \alpha}$$

Правила для связок

Правила для «конечно» (возможно тиражировать построение α):

$$\frac{[\Gamma] \vdash \alpha}{[\Gamma] \vdash !\alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash !\alpha \qquad \Delta, [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

Линейная импликация:

$$\frac{\Gamma, \langle\alpha\rangle \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta \qquad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

Правила для связок: конъюнкция и дизъюнкция

Мультипликативная конъюнкция (возможно построить и α и β одновременно):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \otimes \beta \qquad \Delta, \langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Аддитивная конъюнкция (возможно построить α и возможно построить β, что-то одно по нашему выбору):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

Аддитивная дизъюнкция (возможно построить α или возможно построить β, что-то одно по их выбору):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta \qquad \Delta, \langle\alpha\rangle \vdash \varphi \qquad \Delta, \langle\beta\rangle \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Пример: интуиционистская импликация

Введём обозначение:

$$\alpha \to \beta := !\alpha \multimap \beta$$

Заметим, что такая импликация ведёт себя как интуиционистская:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle !\alpha \rangle \vdash !\alpha} \qquad \Gamma, [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, \langle !\alpha \rangle \vdash \beta}}{\Gamma \vdash !\alpha \multimap \beta}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash !\alpha \multimap \beta \qquad \dfrac{[\Delta] \vdash \alpha}{[\Delta] \vdash !\alpha}}{\Gamma, [\Delta] \vdash \beta}$$

Вложение остальных интуиционистских связок в линейные

Например, можно так:

$$\alpha \to \beta := !\alpha \multimap \beta$$
$$\alpha \times \beta := \alpha \& \beta$$
$$\alpha + \beta := !\alpha \oplus !\beta$$

Комбинаторный базис BCKW

- $B := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ (y\ z)$ (комбинатор Z, Zusammensetzung)
- $C := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ y$ (комбинатор T, verTauschnung)
- $K := \lambda x.\lambda y.x$ (Konstanz)
- $W := \lambda x.\lambda y.x\ y\ y$

BC — линейная логика (значение нельзя ни удалить, ни скопировать)
BCK — аффинная логика (значение можно удалить, но не скопировать)
$BCKW$ — интуиционистская логика

Почему? Например, $W : (\alpha \to \alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

Реализация
Уникальные типы

Язык

Роды:

$$\kappa ::= \mathcal{T} \mid \mathcal{U} \mid \star \mid \kappa \to \kappa$$

Типы:

$$\begin{array}{ll} \texttt{Int} & : \mathcal{T} \\ \to & : \star \to \star \to \mathcal{T} \\ \circ, \times & : \mathcal{U} \\ \vee, \wedge & : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \to \mathcal{U} \\ \neg & : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \\ \texttt{Attr} & : \mathcal{T} \to \mathcal{U} \to \star \end{array}$$

Обозначения:

$$t^u := \texttt{Attr}\ t\ u$$

$$a \to^u b := \texttt{Attr}\ (a \to b)\ u$$

Значения:

$$E ::= x^{\odot} \mid x^{\otimes} \mid \lambda x.E \mid E\ E$$

Типизация

Правила типизации имеют такой вид:

$$\Gamma \vdash E : \tau|_{fv}$$

Здесь Γ сопоставляет переменным типы рода $\star$. fv сопоставляет переменным типы рода $\mathcal{U}$.
Правила вывода:

$$\overline{\Gamma, x : t^u \vdash x^{\odot} : t^u|_{x:u}} \qquad \overline{\Gamma, x : t^{\times} \vdash x^{\otimes} : t^{\times}|_{x:\times}}$$

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash E : b|_{fv}}{\Gamma \vdash \lambda x.E : a \to^{\bigvee fv'} b|_{fv'}} \; fv' := fv \backslash \{x : \tau\} \qquad \frac{\Gamma \vdash E_1 : a \to^u b|_{fv_1} \qquad \Gamma \vdash E_2 : a|_{fv2}}{\Gamma \vdash E_1 \; E_2 : b|_{fv_1 \cup fv_2}}$$

Смысл булевский выражений

Будем считать уникальность истиной, а неуникальность — ложью. И рассмотрим, например, функцию `fst`:

$$\texttt{fst} : (t^u, s^v)^{w \vee u} \to t^u$$

Это то же самое, что и

$$\texttt{fst} : (t^u, s^v)^{w} \to t^u, w \leqslant u$$

Однако, подобные выражения могут быть разрешены с помощью *булевской унификации*.

Где применяются линейные/уникальные типы

Ручное распределение памяти:

```
void compute() {
    char* x = new char[1024];
    char* y = x;
    y[10] = 'a';
    delete [] x;      // delete y; нельзя! будут ошибки.
}
```

Автоматическое распределение памяти (сборка мусора, подсчёт ссылок):

```
public void compute() {
    int[] x = new int[1024];
    int[] y = x;
    x[10] = 15;
}
```

```
fn compute() {
    let x = Arc::new("abcde");
    let y = x.clone();
}
```

А давайте посчитаем количество ссылок при компиляции. Значение линейного/аффинного типа всегда существует в единственном экземпляре.

Практический пример: Раст

- В Расте (если не использовать небезопасные конструкции) ссылки можно копировать неограниченно, ограничения в «заимствовании» (borrow):
  1. На чтение (immutable, неизменяющее заимствование): количество одновременных заимствований неограничено;
  2. На запись (mutable, изменяющее заимствование): только однократно.

```
fn main() {
    let mut v = [1,2,3].to_vec();
    let vv = &mut v;
    if let Some(v_0) = v.get(0) {    // заимствование v для чтения
        vv.insert(2, 123);           // заимствование v для записи
        println!("v[0] = {}", v_0);
    }
}
>>> error[E0502]: cannot borrow ‘v‘ as immutable because it is
                  also borrowed as mutable
```

- Значение можно «удалить» (drop) — скорее похоже на аффинные типы.
- Правила вывода задаются неформально.

Линейные и аффинные типы: отличия

- С аффинными типами допустимо ослабление — нельзя (дёшево) размножать, но можно уничтожить (массив, вектор, хэш-таблица).
- Внешний мир для программы (монада IO) — значение линейного типа. Нельзя создать, удалить, можно только изменить. Изменение производится пользователем при вводе значения — или компьютером, при выводе.
- Однако, IO в Хаскеле только имитирует поведение линейного типа, поскольку монады можно удалять, копировать и склеивать с помощью bind:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{return} : x \to \tau(x) & \text{(создание монады)} \\ (>>=) : \tau(x) \to (x \to \tau(y)) \to \tau(y) & \text{(bind, склейка монад)} \end{array}$$

- Рассмотрим следующие смелые манипуляции с внешним миром (IO):

```
main :: IO ()
main = let m = return () in (m1, m2, m3) = (m, m, m) in
       (m1 >>= \u -> putStr "Hello, ") >> (m2 >>= \u -> putStr "IO!")
```