Лекция 1.
Свойства лямбда-исчисления.

Некоторые базовые определения — повторение

Определение

Пред-лямбда-терм:

$$\Lambda ::= (\lambda x.\Lambda)|(\Lambda\ \Lambda)|x$$

Определение

Лямбда-терм: $\Lambda/(=_\alpha)$

Определение

$R \subseteq A \times B$ *— бинарное отношение.*
Запишем aRb*, если* $\langle a, b\rangle \in R$
Отношение для инфиксной операции $a \star b$*:* $\langle a, b\rangle \in (\star)$

β-редуцируемость

Определение

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ — *транзитивное и рефлексивное замыкание отношения* $(\rightarrow_\beta)$
А именно, будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$*, если найдутся такие* $X_1 \dots X_n$*, что*
$A =_\alpha X_1 \rightarrow_\beta X_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta X_{n-1} \rightarrow_\beta X_n =_\alpha B$.

Пример

$\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

Определение (Ромбовидное свойство)

Отношение R обладает ромбовидным свойством, если для любых a, b, c:
из *aRb, aRc, $b \neq c$* **следует** *существование d, что bRd и cRd.*

Пример

$(\leqslant)$ *на $\mathbb{N}_0$ обладает ромбовидным свойством:*

$$d = max(b, c): \qquad 1 \leqslant 2, 1 \leqslant 3 \Rightarrow d = max(2, 3): 2 \leqslant 3, 3 \leqslant 3$$

$(>)$ *на $\mathbb{N}_0$ не обладает ромбовидным свойством:*

$$3 > 1, 3 > 0: \qquad \textit{нет } d: 1 > d, 0 > d$$

Теорема Чёрча-Россера

Теорема (Черча-Россера)

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ *обладает ромбовидным свойством.*

Следствие

Если у A есть нормальная форма, то она единственная.

Доказательство.

Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. B, C — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера найдётся D: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. $\square$

Лемма

Если B — нормальная форма, то не существует Q такой, что $B \rightarrow_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

Лемма

Если R — обладает ромбовидным свойством, то и R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание R) им обладает.

Доказательство.

Две вложенных индукции. $\square$

Лемма

$(\to_\beta)$ *не обладает ромбовидным свойством.*

Пусть $A = (\lambda x.xx)(\mathrm{I}\,\mathrm{I})$. Покажем, что в таком случае не будет выполняться ромбовидное свойство:

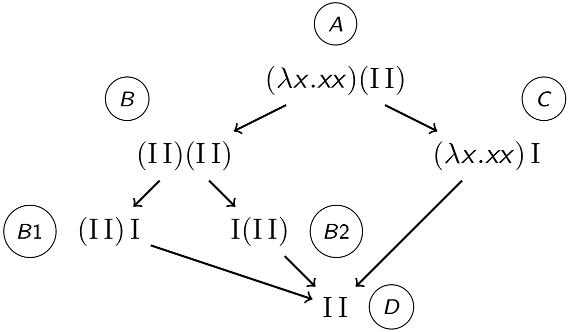

Рис.: Нет такого D, что $B \to_\beta D$ и $C \to_\beta D$.

Определение (Параллельная β-редукция)

$A \rightrightarrows_\beta B$, *если*

1. $A = B$
2. $A = P_1\ Q_1$, $B = P_2\ Q_2$ *и* $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A = \lambda x.P_1$, $B = \lambda x.P_2$ *и* $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x.P_1)Q_1$, $B =_\alpha P_2[x := Q_2]$, *причем* Q_2 *свободна для подстановки вместо* x *в* P_2 *и* $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$

Лемма: если $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$

- Пусть $P_1 =_\alpha P_2$. Индукция по структуре выражения.
- Пусть $P_1 \equiv A_1 B_1$, $P_2 \equiv A_2 B_2$. По определению ($\rightrightarrows_\beta$) $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$ и $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. Тогда:
    1. $x \in FV(A_1)$. По индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1[x := Q_1]B_1 \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]B_2$. Тогда $A_1 B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2 B_2[x := Q_2]$.
    2. $x \in FV(B_1)$. По индукционному предположению $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1 B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2 B_2[x := Q_2]$.
- Пусть $P_1 \equiv \lambda y.A_1$, $P_2 \equiv \lambda y.A_2$. По определению ($\rightrightarrows_\beta$) $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$. Тогда по индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $\lambda y.(A_1[x := Q_1]) \rightrightarrows_\beta \lambda y.(A_2[x := Q_2])$ по определению ($\rightrightarrows_\beta$). Следовательно $\lambda y.A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta \lambda y.A_2[x := Q_2]$ по определению подстановки.
- Пусть $P_1 =_\alpha (\lambda y.A_1)B_1$, $P_2 =_\alpha A_2[y := B_2]$ и $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$, $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. По индукционному предположению получаем, что $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$, $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$. По определению ($\rightrightarrows_\beta$) тогда $(\lambda y.A_1[x := Q_1])B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[y := B_2][x := Q_2]$

Лемма: $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством

Будем доказывать индукцией по определению $(\rightrightarrows_\beta)$. Покажем, что если $M \rightrightarrows_\beta M_1$ и $M \rightrightarrows_\beta M_2$, то существует M_3, что $M_1 \rightrightarrows_\beta M_3$ и $M_2 \rightrightarrows_\beta M_3$. Рассмотрим случаи:

- Если $M \equiv M_1$, то просто возьмем $M_3 \equiv M_2$.
- Если $M \equiv \lambda x.P, M_1 \equiv \lambda x.P_1, M_2 \equiv \lambda x.P_2$ и $P \rightrightarrows_\beta P_1, P \rightrightarrows_\beta P_2$, то по предположению индукции существует P_3, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3, P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, тогда возьмем $M_3 \equiv \lambda x.P_3$.
- Если $M \equiv PQ, M_1 \equiv P_1 Q_1$ — естественное доказательство.
- Если $M \equiv (\lambda x.P)Q$, $M_1 \equiv P_1[x := Q_1]$ и $P \rightrightarrows_\beta P_1$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_1$, то рассмотрим случаи:
    1. $M_2 \equiv (\lambda x.P_2)Q_2$, $P \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Тогда по предположению индукции и лемме существует такой $M_3 \equiv P_3[x := Q_3]$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_2 \rightrightarrows_\beta Q_3$.
    2. $M_2 \equiv P_2[x := Q_2]$, $P \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Тогда по предположению индукции и лемме существует такой $M_3 \equiv P_3[x := Q_3]$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_2 \rightrightarrows_\beta Q_3$.

Лемма

1. $(\rightrightarrows_\beta)^* \subseteq (\to_\beta)^*$
2. $(\to_\beta)^* \subseteq (\rightrightarrows_\beta)^*$

Следствие

$(\to_\beta)^* = (\rightrightarrows_\beta)^*$

Из приведенных выше лемм и следствия докажем теорему Черча-Россера.

Доказательство.

$(\to_\beta)^* = (\twoheadrightarrow_\beta)$. Тогда $(\twoheadrightarrow_\beta) = (\rightrightarrows_\beta)^*$. Значит из того, что $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством и леммы 2, следует, что $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством. $\square$

Нормальный и аппликативный порядок вычислений

Пример

Выражение $KI\Omega$ можно редуцировать двумя способами:

1. $K\,I\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)\;I)\Omega \to_\beta (\lambda b.\,I)\Omega \to_\beta I$
2. $K\,I\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)\;I)((\lambda x.x\;x)(\lambda x.x\;x)) \twoheadrightarrow_\beta$
   $((\lambda a.\lambda b.a)\;I)((\lambda x.x\;x)(\lambda x.x\;x)) \to_\beta K\,I\,\Omega$

Определение (нормальный порядок редукции)

Редукция самого левого β-редекса.

Определение (аппликативный порядок редукции)

Редукция самого левого β-редекса из самых вложенных.

Теорема (Приводится без доказательства)

Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.

Нормальные формы

Определение

Редекс — выражение вида $(\lambda x.P)\ Q$

Определение

Выражение в нормальной форме — выражение без редексов

Определение

	Нормальная форма	*Заголовочная (Head) Н.Ф.*
(обычная)	*Нет редексов* $N\ ::=\ \lambda x.N \mid ((x\ N)\ \ldots\ N)$ $a\ (\lambda x.x)\ (\lambda x.x)$	*Без редексов в «заголовке»* $H\ ::=\ \lambda x.H \mid ((x\ \Lambda)\ \ldots\ \Lambda)$ $a\ ((\lambda x.x)\ (\lambda x.x))$
Слабая (Weak)	*Можно в абстракциях* $W\ ::=\ \lambda x.\Lambda \mid ((x\ W)\ \ldots W)$ $\lambda f.(\lambda x.x)\ (\lambda x.x)$	*Слабая и заголовочная* $F\ ::=\ \lambda x.\Lambda \mid ((x\ \Lambda)\ \ldots\ \Lambda)$ $\lambda f.a\ ((\lambda x.x)\ (\lambda x.x))$

Использование СЗНФ

Нормальный порядок редукции останавливается в Н.Ф. А если Н.Ф. нет?

```
let InfList n = n : InfList (n+1)
InfList 0 = 0 : InfList 1 = ... = 0 : 1 : 2 : InfList 3 = ...
```

Для ленивого языка разумно искать СЗНФ.
Пусть $F := \lambda r.\lambda v.Cons\ v\ (r\ (v+1))$. Тогда построим СЗНФ для $Y\ F$:

$$(\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f(x\ x)))\ F \twoheadrightarrow_\beta \underbrace{(\lambda x.F\ (x\ x))\ (\lambda x.F\ (x\ x))}_{Y_F}$$

И дальше:

$$Y_F \to_\beta F\ Y_F = \lambda r.\lambda v.Cons\ v\ (r\ (v+1))\ Y_F \twoheadrightarrow_\beta \lambda v.Cons\ v\ (Y_F\ (v+1))$$

Тогда для 0:

$$Y_F\ 0 \twoheadrightarrow_\beta (\lambda v.Cons\ v\ (Y_F\ (v+1)))\ 0 \to_\beta Cons\ 0\ (Y_F\ (0+1))$$

Давайте ещё чуть вглубь: что такое $Cons$?

- Константа — переменная, реализация которой указана в контексте. Ну или так: $(\lambda Cons.(\dots))$ (Cons implementation)
- Алгебраический тип для списка: `type list = Nil | Cons a list`
- $In_L\ a := \lambda p.\lambda q.p\ a$; $In_R\ b := \lambda p.\lambda q.q\ b$; $Case\ f\ g\ v := v\ f\ g$
- $Y_F\ 0 \twoheadrightarrow_\beta Cons\ 0\ (Y_F\ (0+1))$, то есть $\lambda p_1.\lambda q_1.q_1\ \langle 0, Y_F\ (0+1)\rangle$
- Тогда `dropFirst [] = []; dropFirst (x:xs) = xs` превратится в такое: $dropFirst := \lambda l.l\ (\lambda c.[])\ Snd$
- $dropFirst\ \lambda p_1.\lambda q_1.q_1\ \langle 0, Y_F\ (0+1)\rangle \twoheadrightarrow_\beta Snd\ \langle 0, Y_F\ (0+1)\rangle \twoheadrightarrow_\beta Y_F\ (0+1) \twoheadrightarrow_\beta Cons\ (0+1)\ (Y_F\ ((0+1)+1))$

Нормальный порядок — медленный

Пример

Рассмотрим λ-выражение $(\lambda x.x\ x\ x\ x)(I\,I)$. Попробуем редуцировать его нормальным порядком:

$$(\lambda x.x\ x\ x\ x)(I\,I) \to_\beta (I\,I)(I\,I)(I\,I)(I\,I) \to_\beta I(I\,I)(I\,I)(I\,I) \to_\beta (I\,I)(I\,I)(I\,I) \to_\beta \ldots \to_\beta I$$

Как мы увидим, в данной ситуации аппликативный порядок редукции оказывается значительно эффективней:

$$(\lambda x.x\ x\ x\ x)(I\,I) \to_\beta (\lambda x.x\ x\ x\ x)\,I \to_\beta I\,I\,I\,I \to_\beta I\,I\,I \to_\beta I\,I \to_\beta I$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение ($\lambda_{\rightarrow}$ по Карри)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \rightarrow \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Определение ($\lambda_{\rightarrow}$ по Чёрчу)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \rightarrow \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение ($\lambda_{\to}$ по Карри)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Определение ($\lambda_{\to}$ по Чёрчу)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример

По Карри	*По Чёрчу*
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	$\lambda f^{\alpha \to \alpha}.\lambda x^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение ($\lambda_\to$ по Карри)

$$\frac{}{\Gamma, x:\varphi \vdash x:\varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x:\varphi \vdash A:\psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A:\varphi \qquad \Gamma \vdash B:\varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA:\psi}$$

Определение ($\lambda_\to$ по Чёрчу)

$$\frac{}{\Gamma, x:\varphi \vdash x:\varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x:\varphi \vdash A:\psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A:\varphi \qquad \Gamma \vdash B:\varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA:\psi}$$

Пример

По Карри	*По Чёрчу*
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	$\lambda f^{\alpha\to\alpha}.\lambda x^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta)$	$\lambda f^{\beta\to\beta}.\lambda x^{\beta}.f\ (f\ x) : (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta)$

Теоремы о $\lambda_\to$

Лемма (о редукции, subject reduction)

Если $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $\vdash A : \tau$, то $\vdash B : \tau$.

Лемма

Если $\vdash A : \tau$, то любое подвыражение A также имеет тип.

Теорема (Чёрча-Россера)

Если $\vdash A : \tau$, $A \twoheadrightarrow_\beta B$, $A \twoheadrightarrow_\beta C$ и $B \neq C$, то найдётся D, что $\vdash D : \tau$, и $B \twoheadrightarrow_\beta D$, $C \twoheadrightarrow_\beta D$.

Соответствие между исчислениями

Определение

$$|A| = \begin{cases} x, & A = x \\ \lambda x.|Q| & A = \lambda x^{\tau}.Q \\ |P|\ |Q| & A = P\ Q \end{cases}$$

Теорема

1. *Если* $\Gamma \vdash_{ч} A : \tau$, *то* $|\Gamma| \vdash_{к} |A| : \tau$;
2. *Если* $\Gamma \vdash_{к} A : \tau$, *то найдутся такие* $B : A = |B|$ *и* $\Delta : \Gamma = |\Delta|$, *что* $\Delta \vdash_{ч} B : \tau$.

Теорема (уникальность типов, для исчисления по Чёрчу)

1. $\Gamma \vdash_{ч} M : \sigma$ *и* $\Gamma \vdash_{ч} M : \tau$ *влечёт* $\sigma = \tau$;
2. $\Gamma \vdash_{ч} M : \sigma$, $\Gamma \vdash_{ч} N : \tau$ *и* $M =_{\beta} N$ *влечёт* $\sigma = \tau$.

Лемма (о расширении, subject expansion)

Если $\Gamma \vdash_{ч} A : \tau$, $\Gamma \vdash_{ч} B : \sigma$ *и* $B \twoheadrightarrow_{\beta} A$, *то* $\Gamma \vdash_{ч} B : \tau$.

Изоморфизм Карри-Ховарда

Теорема (изоморфизм Карри-Ховарда)

1. *Если* $\Gamma \vdash \tau$, *то найдётся* Δ, A, *что* $\Gamma = |\Delta|$ *и* $\Delta \vdash A : \tau$;
2. *Если* $\Gamma \vdash A : \tau$, *то* $|\Gamma| \vdash \tau$.

Основные задачи типизации λ-исчисления

Основные задачи типизации λ-исчисления

Рассмотрим $? \vdash ? : ?$.

1. *Проверка типа:* выполняется ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для контекста Γ, терма M и типа σ
   Компиляция в языке программирования, типизированном по Чёрчу. Проверка доказательства.
2. *Реконструкция типа:* $? \vdash M : ?$.
   Компиляция в языке программирования, типизированном по Карри. Это бывает чаще, чем кажется.
   ```
   template <class A, class B>
   auto min(A a, B b) -> decltype(a < b ? a : b) {
       return (a < b) ? a : b;
   }
   ```
3. *Обитаемость типа:* $\Gamma \vdash ? : \sigma$.
   Поиск доказательства.

Все задачи разрешимы.

Задача реконструкции типа

Определение

Алгебраический терм

$$\theta ::= x \mid (f\ \theta\ \dots\ \theta)$$

Определение

Подстановка переменных — функция $S_0 : V \to T$, где $S_0(x) = x$ почти везде (за исключением конечного множества переменных).
Подстановка: $S : T \to T$, что $S(x) = S_0(x)$, но $S(f\ \theta_1\ \dots \theta_k) = f\ S(\theta_1)\ \dots\ S(\theta_k)$
$S(\Gamma) = \{x : S(\tau_x) \mid x : \tau_x \in \Gamma\}$

Определение

Будем воспринимать запись типа как некоторое выражение в алгебраических термах, импликация — единственный функциональный символ. Наиболее общей парой для задачи реконструкции типа $? \vdash M :?$ назовём такие $\langle \Gamma, \gamma \rangle$, что:

1. $\Gamma \vdash M : \gamma$
2. *Если $\Delta \vdash M : \delta$, то найдётся такая подстановка S, что $\Delta = S(\Gamma)$ и $\delta = S(\gamma)$.*

Общий план решения

1. Основа решения — алгоритм унификации для системы уравнений в алгебраических термах.
2. По терму M строим систему уравнений в алгебраических термах.
3. Наиболее общим унификатором системы будет является подстановка, из которой можно получить наиболее общую пару.

Система уравнений в алгебраических термах

Определение

Система уравнений в алгебраических термах

$$\begin{cases} \theta_1 = \sigma_1 \\ \vdots \\ \theta_n = \sigma_n \end{cases}$$

где θ_i и σ_i — термы

Задача унификации

Определение

Решением задачи унификации для системы уравнений $\sigma_k = \tau_k$ назовём такую подстановку S, что $S(\sigma_k) = S(\tau_k)$.

Определение

Наиболее общим решением задачи унификации назовём такую подстановку S, что для любого другого решения T найдётся подстановка R, что $T(\rho) = R(S(\rho))$.

Определение

Система в разрешённой форме — каждое уравнение имеет вид $x_i = \theta_i$, причём каждый из x_i входит в систему ровно один раз (является левой частью одного из уравнений)

Определение

Система несовместна — система не имеет решений.

Алгоритм унификации

Пусть дана система уравнений $\sigma_i = \tau_i$. Возьмём произвольное уравнение и попробуем проверить/применить одно из следующих условий/действий к нему:

(a) $\sigma_i = x$ если σ_i не переменная перепишем как $x = \sigma_i$

(b) $\sigma_i = \sigma_i$ удалим

(c) $f\ \theta_1 \dots \theta_n = f\ \rho_1 \dots \rho_n$ заменим на n уравнений $\theta_k = \rho_k$

(d) если уравнение имеет вид $x = \tau_i$ и x входит хотя бы в одно другое уравнение, то заменим все другие уравнения на $\sigma_k[x := \tau_i] = \tau_k[x := \tau_i]$

(e) если уравнение имеет вид $x = f\ \dots x_i \dots$, система несовместна (occurrs check)

(f) если уравнение имеет вид $f\ ... = g\ ...$ при $f \neq g$, система несовместна.

Если нет ни одного подходящего правила ни для одного уравнения — закончим работу (система находится в разрешённой форме).

Алгоритм всегда завершает работу

- Рассмотрим $\langle x, y, z \rangle$, где:
  - x — количество переменных, входящих в систему, которые входят не в разрешённом виде. Переменная t входит в систему в разрешённом виде, если переменная входит в систему ровно один раз, причём входит в уравнение вида $t = \sigma$;
  - y — количество функциональных символов в системе;
  - z — количество уравнений типа $a = a$ и $\theta = b$, где θ не переменная.
- Упорядочим тройки лексикографически (согласно порядковому типу ω^3).
- Заметим, что операции (a) и (b) всегда уменьшают z и иногда уменьшают x. Операция (c) всегда уменьшает y, иногда x и, возможно, увеличивает z. Операция (d) всегда уменьшает x и иногда увеличивает y. То есть, операции $(a) - (d)$ всегда уменьшают соответствующий ординал.
- Согласно лемме из матлога любая строго убывающая последовательность ординалов имеет конечную длину.

Корректность алгоритма

Теорема

Для системы уравнений $\sigma_k = \tau_k$ алгоритм даёт наиболее общее решение, если оно существует.

Доказательство.

- Операции $(a) - (d)$ не меняют множества решений системы. За конечное время либо выполнится условие (e) или (f), либо будут исчерпаны правила.
- Условия (e), (f) очевидно означают несовместность системы (в т.ч. исходной).
- При отсутствии возможности применения правил и условий все уравнения имеют вид $x = \theta_x$, где x входит в систему только один раз. Построим $S_0(x) = \theta_x$.
- Если есть подстановка $T : T(\sigma_k) = T(\tau_k)$, тогда положим $R = \mathcal{U}(\{S_0(x) = T_0(x) \mid x \neq T_0(x)\})$. Очевидно, $T(\zeta) = R(S(\zeta))$

$\square$