

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3232-М3239, весна 2025 года

## Домашнее задание №1: лямбда исчисление — бестиповое и просто-типизированное

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{aligned} L &:= \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.(thisisafixedpointcombinator) \\ R &:= LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{aligned}$$

В данном определении терм  $R$  является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм  $F$ , выполнено  $R F =_{\beta} F (R F)$ .

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
  - (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами и осмысленной русской фразой в терме  $L$ ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
2. Найдите необитаемый тип в просто-типизированном лямбда-исчислении (напомним: тип  $\tau$  называется необитаемым, если ни для какого  $P$  не выполнено  $\vdash P : \tau$ ).
  3. Покажите на основании следующего преобразования полноту комбинаторного базиса SKI (проведите полное рассуждение по индукции, из которого будет следовать отсутствие в результате других термов, кроме SKI, бета-эквивалентность и определённость результата для всех комбинаторов  $\sigma$ ):

$$[\sigma] = \begin{cases} x, & \sigma = x \\ [\varphi] [\psi], & \sigma = \varphi \psi \\ K [\varphi], & \sigma = \lambda x. \varphi, \quad x \notin FV(\varphi) \\ I, & \sigma = \lambda x. x \\ [\lambda x. [\lambda y. \varphi]], & \sigma = \lambda x. \lambda y. \varphi, \quad x \in FV(\varphi), x \neq y \\ S [\lambda x. \varphi] [\lambda x. \psi], & \sigma = \lambda x. \varphi \psi, \quad x \in FV(\varphi) \cup FV(\psi) \end{cases}$$

Заметим, что данные равенства объясняют смысл названий комбинаторов:

$S$  verSchmelzung, «сплавление»  
 $K$  Konstanz  
 $I$  Identität

4. Покажите, что следующая система комбинаторов образует полный базис в бестиповом лямбда-исчислении, но соответствующая им система аксиом в исчислении гильбертового типа не образует полного базиса для импликативного фрагмента:

$$\begin{aligned} I &:= \lambda x. x \\ K &:= \lambda x. \lambda y. x \\ S' &:= \lambda i. \lambda x. \lambda y. \lambda z. i (i ((x (i z)) (i (y (i z))))) \end{aligned}$$

Указание: покажите невыводимость  $(\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ .

5. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения  $(\lambda x. I I) (\lambda y. I I)$  самые вложенные редексы — применения  $I I$ :

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. \underline{I I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. I I)$$

- (a) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.
- (b) Докажите или опровергните, что параллельная бета-редукция из теоремы Чёрча-Россера не медленнее (в смысле количества операций для приведения выражения к нормальной форме), чем нормальный порядок редукции с мемоизацией.

- (с) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.
6. Сформулируем определение бета-редукции на языке пред-лямбда-термов.  $A \rightarrow_\beta B$ , если:
- $A \equiv (\lambda x.P) Q$ ,  $B \equiv P [x := Q]$ , при условии свободы для подстановки;
  - $A \equiv (P Q)$ ,  $B \equiv (P' Q')$ , при этом  $P \rightarrow_\beta P'$  и  $Q = Q'$ , либо  $P = P'$  и  $Q \rightarrow_\beta Q'$ ;
  - $A \equiv (\lambda x.P)$ ,  $B \equiv (\lambda x.P')$ , и  $P \rightarrow_\beta P'$ .
- (а) Найдите лямбда-выражение, бета-редукция которого не может быть произведена из-за нарушения правила свободы для подстановки (для продолжения редукции потребуется производить переименование связанных переменных). Поясните, какое ожидаемое ценное свойство будет нарушено, если ограничение правила проигнорировать.
- (б) Покажите, что недостаточно наложить требования на исходное выражение, и свобода для подстановки может быть нарушена уже в процессе редукции исходно полностью корректного лямбда-выражения.
7. Две задачи на вычисление СЗНФ при помощи нормального порядка редукции.
- (а) Постройте функцию прибавления 1 к значениям из списка в лямбда-исчислении:  
`let plus1 l = map (fun x -> x+1) l`. Постройте бесконечный список из нечётных чисел  $[1, 3, \dots]$ . Примените функцию `plus1` к списку и получите результат в СЗНФ.
- (б) Напишите функцию вычисления суммы первых двух элементов списка:  
`let compute (l1::l2::ls) = (l1+l2, ls)`, примените её к результату предыдущего пункта, получите результат в СЗНФ.
8. Как мы уже разбирали,  $\nVdash x x : \tau$  в силу дополнительных ограничений правила

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} x \notin FV(\Gamma)$$

Найдите лямбда-выражение  $N$ , что  $\nVdash N : \tau$  в силу ограничений правила

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.N : \sigma \rightarrow \tau} x \notin FV(\Gamma)$$

9. Рассмотрим подробнее отличия исчисления по Чёрчу и по Карри. Определим точно бета-редукцию в исчислении по Чёрчу:  $A \rightarrow_\beta B$ , если
- $$\begin{aligned} A &= (\lambda x^\sigma.P) Q, & B &= P[x := Q] \\ A &= P Q, & B &= P Q' \text{ или } B = P' Q \text{ при } P \rightarrow_\beta P' \text{ и } Q \rightarrow_\beta Q' \\ A &= \lambda x^\sigma.P, & B &= \lambda x^\sigma.P' \text{ при } P \rightarrow_\beta P' \end{aligned}$$
- (а) Покажите, что в исчислении по Карри не выполняется свойство расширения типизации (subject expansion) даже в такой формулировке: если  $\vdash_K M : \sigma$ ,  $M \rightarrow_\beta N$  и  $\vdash_K N : \tau$ , то обязательно, что  $\sigma = \tau$ .
- (б) Покажите, что в исчислении по Чёрчу свойство расширения типизации в такой формулировке также не выполняется:

найдутся такие  $M, N, \sigma$ , что  $\vdash_{\text{ч}} N : \sigma$ ,  $M \rightarrow_\beta N$ , но  $\nVdash_{\text{ч}} M : \sigma$ .

Но при этом в исчислении по Чёрчу выполнено свойство расширения типизации в такой формулировке:

если  $\vdash_K M : \sigma$ ,  $M \rightarrow_\beta N$  и  $\vdash_K N : \tau$ , то тогда  $\sigma = \tau$ .

## Домашнее задание №2: теорема о сильной нормализуемости просто типизированного лямбда-исчисления

1. Найдите  $\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket$  и  $\llbracket (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rrbracket$ .
2. Покажите, что  $\llbracket \alpha \rrbracket$  насыщенное, и что если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  насыщены, то  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  насыщенное.
3. Покажите, что SN — насыщенное (постройте полноценные рассуждения по индукции для определения).

## Домашнее задание №3: экзистенциальные типы, типовая система Хиндли-Милнера

1. Постройте экзистенциальный тип для очереди, и реализуйте его с помощью двух стеков. Реализацию напишите на Хаскеле, используя `AbstractStack` с лекции как АДТ стека (возможно, этот пример надо будет расширить нужными вам методами), и реализуйте какой-нибудь простой классический алгоритм с её помощью. Как, интересно, осуществить инстанциацию вложенного абстрактного типа данных? Придумайте.

Как с помощью двух стеков можно реализовать очередь со средним временем доступа  $\Theta(1)$ : входные значения кладём во входной стек, выходные достаём из выходного, при исчерпании — переносим всё из входного в выходной:

Входной стек	Выходной стек	Действие
$[] \rightarrow [1]$	$[]$	<i>push 1</i>
$[1] \rightarrow [3; 1]$	$[]$	<i>push 3</i>
$[3; 1] \rightarrow []$	$[] \rightarrow [1; 3] \rightarrow [3]$	<i>pull</i>
$[] \rightarrow [5]$	$[3]$	<i>push 5</i>

2. Выразите дизъюнкцию через квантор существования в ИИП 2 порядка, а также алгебраический тип через экзистенциальный.
3. Покажите, что если  $rk(\sigma, 1)$ , то для выражения  $\sigma$  найдётся эквивалентное  $\sigma'$  с поверхностными кванторами.
4. Покажите, что в предыдущем задании также имеется изоморфизм типов: существует биективная функция  $\sigma \rightarrow \sigma'$ , которую можно выразить лямбда-выражениями.
5. Рассмотрим QuickSort:

```
let rec quick l = match l with
  [] -> []
  | l1 :: ls -> List.filter (fun x -> x < l1) ls @ [l1] @ List.filter (fun x -> x >= l1)
```

Укажите полные типовые схемы в системе НМ для всех функций, участвующих в данном примере (тип списка раскрывать не надо).

6. Заметим, что список — это «параметризованные» числа в аксиоматике Пеано. Число — это длина списка, а к каждому штриху мы присоединяем какое-то значение. Операции добавления и удаления элемента из списка — это операции прибавления и вычитания единицы к числу.

Рассмотрим тип «бинарного списка»:

```
type 'a bin_list = Nil | Zero of (('a*'a) bin_list) | One of 'a * (('a*'a) bin_list);;
```

Заметим, что здесь мы рассматриваем двоичную запись числа (чередующиеся `Zero` и `One`) — двоичную запись длины бинарного списка, и элемент двоичной записи номер  $n$  хранит  $2^n$  или  $2^n + 1$  значение (в зависимости от типа элемента). Например, 5-элементный список:

```
One ("a", Zero (One (((("b","c"),("d","e")), Nil)))
```

По идее, операция добавления элемента к списку записывается на языке Окамль вот так (сравните с прибавлением 1 к числу в двоичной системе счисления):

```
let rec add elem lst = match lst with
  Nil -> One (elem,Nil)
  | Zero tl -> One (elem,tl)
  | One (hd,tl) -> Zero (add (elem,hd) tl)
```

Однако, тип этой функции Окамль вывести автоматически не может, его надо указывать явно, чтобы код скомпилировался:

```
let rec add : 'a . 'a -> 'a bin_list -> 'a bin_list = fun elem lst -> match lst with
```

- (a) Какой тип имеет `add` в (расширенной) системе  $F$  (напомним, поскольку функция рекурсивна, она должна использовать  $Y$ -комбинатор в своём определении)? Считайте, что семейство типов `bin_list 'a` предопределено и обозначается как  $\tau_\alpha$ . Также считайте, что определены функции `roll` и `unroll` с надлежащими типами. Какой ранг имеет тип этой функции? Почему этот тип не выразим в типовой системе Хиндли-Милнера?
- (b) Предложите функции для печати списка и для удаления элемента списка (головы).
- (c) Предложите функцию для эффективного соединения двух списков (источник для вдохновения — сложение двух чисел в столбик).
- (d) Предложите функцию для эффективного выделения  $n$ -го элемента из списка.

## Домашнее задание №4: Обобщённая система типов, гомотопическая теория типов, язык Аренд

1. Укажите тип (род) в исчислении конструкций для следующих выражений (при необходимости определите типы используемых базовых операций и конструкций самостоятельно):

- (a) В алгебраическом типе `'a option = None | Some 'a` предложите тип (род) для: `Some`, `None` и `option`.
- (b) Пусть задан род `nonzero : * → *`, выбрасывающий нулевой элемент из типа. Например, `nonzero unsigned` — тип положительных целых чисел. Тогда, для кода

```
template<typename T, T x>
struct NonZero { const static std::enable_if_t<x != T(0), T> value = x; };
```

предложите тип (род) поля `value`.

2. Предложите выражение на языке C++ (возможно, использующее шаблоны), имеющее следующий род (тип):

- (a)  $* \rightarrow * \rightarrow *$ ;  $* \rightarrow \text{unsigned}$
- (b)  $\text{int} \rightarrow (* \rightarrow *)$
- (c)  $(* \rightarrow \text{int}) \rightarrow *$
- (d)  $\Pi x^*. \lambda n^{\text{int}}. F(n, x)$ , где

$$F(n, x) = \begin{cases} \text{int}, & n = 0 \\ x \rightarrow F(n - 1, x), & n > 0 \end{cases}$$

3. Какова должна быть топология на множестве пар натуральных чисел (интуитивно мы будем понимать эти пары как рациональные числа, пары «числитель-знаменатель»), чтобы непрерывными были бы те и только те функции, для которых выполнено  $f(p, q) = f(p', q')$  для всех таких  $p, p', q$  и  $q'$ , что  $p \cdot q' = p' \cdot q$ . Напомним, что равенство мы понимаем как наличие непрерывного пути между точками.
4. Докажите, приведя компилирующуюся программу на языке Аренд (возможно, вам потребуются функции и приёмы, изложенные в документации по языку: <https://arend-lang.github.io/documentation/tutorial/PartI/>):
  - (a) коммутативность умножения;
  - (b) дистрибутивность:  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ;
  - (c) куб суммы:  $(a + 1)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 + 3 \cdot a + 1$ .
5. Определим, что  $x$  делится на  $p$ , если обитаем тип  $\Sigma (q : \text{Nat}) (p * q = x)$ .
  - (a) Покажите, что если  $x$  делится на 6, то  $x$  делится и на 3;
  - (b) Покажите, что  $x!$  делится на  $x$ ;
  - (c) Покажите, что если  $x$  делится на  $y$  и  $y$  делится на  $z$ , то  $x$  делится на  $z$ ;
6. Определите предикат (т.е. функцию с надлежащим типом) для формализации понятия простого числа `isPrime`. Покажите, что:
  - (a) 3 и 11 — простые числа;
  - (b) Произведение простых чисел не просто;

(с) 2 — единственное чётное простое число.

7. Определим отношение «меньше» на натуральных числах так (с помощью индуктивного типа, обобщения алгебраического типа данных — зависимого типа, в котором при разных значениях аргументов типа допустимы разные конструкторы):

```
\data NatLessEq (a b : Nat) \with
| 0, m => natlesseq-zero
| suc m, suc n => natlesseq-next (NatLessEq m n)
```

Например, конструктор `natlesseq-zero` можно использовать только если первый аргумент типа — число 0. А конструктор `natlesseq-next` применим только если первый аргумент больше 0; при этом данный конструктор требует значение типа с определёнными аргументами в качестве своего аргумента.

Будем говорить, что  $a \preceq b$  тогда и только тогда, когда `NatLessEq a b` обитаем. Например, утверждение  $1 \preceq 3$  доказывается так:

```
\func one-le-three : NatLessEq 1 3 => natlesseq-next (natlesseq-zero)
```

В самом деле, `natlesseq-zero` может являться конструктором типа `NatLessEq 0 b`, а тогда

```
natlesseq-next (natlesseq-zero) : NatLessEq 1 (b+1)
```

Унифицировать  $b + 1$  и 3 компилятор (в данном случае) может самостоятельно, и потому код выше проходит проверку на корректность.

Докажите (везде предполагается, что  $a, b, c : \text{Nat}$ , если не указано иного):

- (a)  $a \preceq b$  тогда и только тогда, когда  $a$  меньше или равно  $b$  в смысле натуральных чисел (здесь требуется рассуждение на мета-языке).
  - (b)  $a \preceq a + b + 1$ ; то есть, определите функцию  

```
\func n-less-sum (a b : Nat) : NatLessEq a (a Nat.+ suc b)
```
  - (c) Если  $a \preceq b$ , то  $a + c \preceq b + c$
  - (d) Если  $a \preceq b$  и  $c \preceq d$ , то  $a \cdot c \preceq b \cdot d$
  - (e)  $a \preceq 2^a$
  - (f) Транзитивность: если  $a \preceq b$  и  $b \preceq c$ , то  $a \preceq c$
  - (g)  $a \preceq b \vee b \preceq a$
  - (h) Найдите стандартное определение отношения «меньше» в библиотеке Аренда (`Nat.<`) и докажите, что  $a \preceq b$  тогда и только тогда, когда  $a < b$  или  $a = b$  (реализуйте функции `there (p : NatLessEq a b) : Data.Or (a Nat.< b) (a = b)` и обратную к ней).
  - (i) Покажите, что  $a \preceq b$  тогда и только тогда, когда  $\exists k^{\text{No}}. a + k = b$ .
8. С точки зрения изоморфизма Карри-Ховарда индуктивные типы можно воспринимать как аналоги предикатов. В этом задании надо построить индуктивные типы для различных предикатов:
- (a) Факториал (`IsFact n`), который будет обитаем только для таких  $n$ , что  $n = k!$ . Докажите на языке Аренд, что `IsFact (1 · 2 · 3 · ... · n)` всегда обитаем, а тип `IsFact 3` — необитаем.
  - (b) Наибольший общий делитель двух чисел `GCD x a b`; *указание/пожелание*: воспользуйтесь алгоритмом Эвклида.
  - (c) Ограниченное натуральное число `IndFin n`, обитателями типа являются только те числа, которые меньше  $n$ . В стандартной библиотеке `Fin` определён через натуральные числа; сделайте это исключительно через индуктивные типы. Покажите, что если  $x : \text{IndFin } m$  и  $y : \text{IndFin } n$ , то  $x + y : \text{IndFin } (m + n)$ .