

Лекция 3. Система F

ИИП второго порядка

- ▶ Алфавит: $a - z$, \vee , $\&$, \rightarrow , \neg , \forall , \exists .
- ▶ Метаварьиные: α для формул, p, x, y, z для переменных.
- ▶ $F ::= p \mid (F \star F) \mid (\forall p.F) \mid (\exists p.F) \mid \perp$
- ▶ Сокращения записи: приоритеты как в ИИВ, подкванторное выражение продолжается направо настолько, насколько возможно.

Пример

$$\forall p. \forall q. p \rightarrow q \rightarrow p$$

Теория доказательств

Правила вывода совпадают с правилами для ИИВ, добавлены 4 новых:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall p. \varphi} (p \notin FV(\Gamma)) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall p. \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[p := \theta]}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[p := \theta]}{\Gamma \vdash \exists p. \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash \exists p. \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} (p \notin FV(\Gamma, \psi))$$

Теория моделей

Простая неполная модель.

$$V = \{И, Л\}$$

$$\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket = \begin{cases} Л, \llbracket \varphi \rrbracket = И, \llbracket \psi \rrbracket = Л \\ И, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\llbracket \forall p. \varphi \rrbracket = \begin{cases} И, \llbracket \varphi \rrbracket^{p:=Л, И} = И \\ Л, \text{ иначе} \end{cases}$$

Выразимость всех связок через \forall, \rightarrow

Заметим, что достаточно определить связки \forall и \rightarrow .

Связка	Способ выразить
$\alpha \& \beta$	$\forall p. (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p$
$\alpha \vee \beta$	$\forall p. (\alpha \rightarrow p) \rightarrow (\beta \rightarrow p) \rightarrow p$
\perp	$\forall p. p$
$\exists p. \varphi$	$\forall f. (\forall p. \varphi \rightarrow f) \rightarrow f$

С так определёнными связками оказывается возможно показать все правила вывода. Например, примем $\alpha \& \beta$ за $\forall p. (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p$ и покажем, что из $\alpha \& \beta$ следует α :

$$\frac{\frac{\frac{\alpha, \beta \vdash \alpha}{\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha}}{\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha} \quad \frac{\vdash \forall p. (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p}{\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha} \quad p := \alpha}{\alpha}$$

Система F

Определение

Типы в системе F:

$$\tau = \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \dots & (\text{атомарные типы}) \\ \tau \rightarrow \tau \\ \forall \alpha. \tau & (\alpha - \text{переменная}) \end{cases}$$

Определение

Пред-лямбда-терм в системе F (типизировано по Чёрчу):

$$F ::= x \mid (\lambda x^{\tau}. F) \mid (F F) \mid (\Lambda \alpha. F) \mid (F \tau)$$

Типовая абстракция и применение

Примеры соответствующих конструкций из C++.

- ▶ Типовая абстракция, $\Lambda\tau.W$:

```
template<typename t>
class W {
    t x;
}
```

- ▶ Типовое применение, $W \text{ int}$:

```
W<int> w_test;
```

В системе F определены следующие правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^\tau. M : \tau \rightarrow \sigma} \quad (x \notin FV(\Gamma))$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha. M : \forall \alpha. \sigma} \quad (\alpha \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \sigma}{\Gamma \vdash M\tau : \sigma[\alpha := \tau]}$$

Начнем с β -редукции:

1. Типовая β -редукция: $(\Lambda \alpha. M^\sigma)\tau \rightarrow_\beta M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$
2. Классическая β -редукция: $(\lambda x^\sigma. M)^{\sigma \rightarrow \tau} X \rightarrow_\beta M[x := X] : \tau$

Абстрактные типы данных

Стек α из значений типа v : контейнер, соответствующий интерфейсу

метод	тип	комментарий
<code>empty</code>	α	(конструктор)
<code>push</code>	$v \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$	
<code>pop</code>	$\alpha \rightarrow \alpha \&v$	

Возможны разные реализации интерфейса.

Замечание: Мы понимаем АДТ как набор функций, без собственных данных. Напомним, что `a.method(...)` — другая запись для `method(a, ...)`.

Пример определения и применения АД

```
abstype stack with
  empty : stack
  push : int * stack -> stack
  pop : stack -> stack * int
is pack Maybe Int,
  empty = None
  push (n,s) = Some n
  pop s = case s with None -> 0 | Some v -> v
in
  stack::pop(stack::push(12,stack::empty))
```

Экзистенциальные типы

Экзистенциальный тип — тип, соответствующий квантору существования в смысле изоморфизма Карри-Ховарда. Соответствует абстрактному типу данных.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash \exists \alpha. \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists \alpha. \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

АТД имеет интерфейс φ , тип АТД α реализуется типом θ , а сам интерфейс — термом M :

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash (\text{pack } M, \theta \text{ to } \exists \alpha. \varphi) : \exists \alpha. \varphi}$$

... и если вычисление $N : \psi$ работает при условии наличия какой-то реализации АТД $x : \varphi$ в контексте, то нам достаточно АТД $P : \exists \alpha. \varphi$ для получения результата:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \exists \alpha. \varphi \quad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \text{abstype } \alpha \text{ with } x : \varphi \text{ is } P \text{ in } N : \psi} (\alpha \notin FV(\Gamma, \psi))$$

Стек в F

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash (\text{pack } M, \theta \text{ to } \exists \alpha. \varphi) : \exists \alpha. \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash P : \exists \alpha. \varphi \quad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \text{abstype } \alpha \text{ with } x : \varphi \text{ is } P \text{ in } N : \psi}$$

Интерфейс стека (возьмём v как чёрчевский нумерал):

$$\varphi := (\underbrace{\alpha}_{\text{empty}} \ \& \ (\underbrace{v \& \alpha \rightarrow \alpha}_{\text{push}}) \& \ (\underbrace{\alpha \rightarrow \alpha \& v}_{\text{pop}})$$

Какое-нибудь вычисление — скажем, $\text{pop}(\text{push}(12, \text{empty}))$:

$$x : \varphi \vdash \underbrace{\pi_R((\pi_R x)((\pi_R(\pi_L x))\langle 12, \pi_L(\pi_L x) \rangle))}_N : v$$

И простая реализация, для $\theta := (\gamma \rightarrow \gamma) \vee v$ — это `Maybe Int`:

$$\vdash \langle \langle (\text{In}_L \ \lambda x. x), \lambda n. \text{In}_R \ (\pi_L \ n) \rangle, \lambda n. \text{case } (\lambda x. 0) \ (\lambda x. x) \ n \rangle : \varphi[\alpha := \theta]$$

Раскрываем \exists через \forall

Напомним, что $\exists\alpha.\varphi := \forall\beta.(\forall\alpha.\varphi \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash (\text{pack } M, \theta \text{ to } \exists\alpha.\varphi) : \exists\alpha.\varphi}$$

Перепишем это правило только через базовые конструкции системы F :

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash \Lambda\beta.\lambda e^{\forall\alpha.\varphi \rightarrow \beta}.(e \ \theta) \ M : \forall\beta.(\forall\alpha.\varphi \rightarrow \beta) \rightarrow \beta}$$

«Пусть есть вычисление e , использующее АТД α с интерфейсом φ , возвращающее β . Тогда, имея конкретный тип реализации АТД θ и саму реализацию АТД $M : \varphi[\alpha := \theta]$, то с помощью вычисления e возможно вычислить результат и вернуть значение типа β ».

Сравните с case для алгебраического типа и вспомните действия редактора связей (линкера).

Раскроем abstype

$$\frac{\Gamma \vdash P : \exists \alpha. \varphi \quad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \text{abstype } \alpha \text{ with } x : \varphi \text{ is } P \text{ in } N : \psi}$$

Перепишем это правило через базовые конструкции системы F :

$$\frac{\Gamma \vdash P : \forall \beta. (\forall \alpha. \varphi \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \quad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash (P \ \psi) \ (\Lambda \alpha. \lambda x^\varphi. N) : \psi}$$

Вспомним rask :

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash \Lambda \beta. \lambda e^{\forall \alpha. \varphi \rightarrow \beta}. (e \ \theta) \ M : \forall \beta. (\forall \alpha. \varphi \rightarrow \beta) \rightarrow \beta}$$

Результат:

$$\begin{aligned} & ((\Lambda \beta. \lambda e^{\forall \alpha. \varphi \rightarrow \beta}. (e \ \theta) \ M) \ \psi) \ (\Lambda \alpha. \lambda x^\varphi. N) \rightarrow_\beta \\ & (\lambda e^{\forall \alpha. \varphi \rightarrow \psi}. (e \ \theta) \ M) \ (\Lambda \alpha. \lambda x^\varphi. N) \rightarrow_\beta \\ & (\Lambda \alpha. \lambda x^\varphi. N) \ \theta \ M \rightarrow_\beta \\ & (\lambda x^{\varphi[\alpha := \theta]}. N[\alpha := \theta]) \ M \rightarrow_\beta N[\alpha := \theta][x := M] \end{aligned}$$

Пример реализации на Хаскеле

```
{-# LANGUAGE RankNTypes #-}
data AbstractStack = AS (forall b . (forall a .
    ( a, Integer -> a -> a, a -> (a, Integer) )
    -> b) -> b)

abstype :: AbstractStack -> Integer
abstype stack =
  case stack of
    AS r -> r x where
      x (empty, push, pop) =
        let (stk, v) = pop (push 12 $ push 5 empty) in
        let (stk2, v2) = pop stk in
        v + v2

packedStack :: AbstractStack
packedStack = AS (\t -> t ( [], \i -> \l -> i:l, \ (i:l) -> (l,i) ) )

main = do print (abstype packedStack)
```

Общие свойства системы F

В системе F (в варианте по Чёрчу, так и в варианте по Карри) имеют место теорема Чёрча-Россера и сильная нормализация.

Разрешимость задач типизации системы F :

	По Чёрчу	По Карри
$\Gamma \vdash M : \sigma$	да	нет
$\Gamma \vdash M : ?$	да	нет
$\Gamma \vdash ? : \sigma$	нет	нет
$? \vdash M : \sigma$	нет	нет
$? \vdash M : ?$	нет	нет

Ранг типа

Напомним, что $\exists\alpha.\varphi := \forall\beta.(\forall\alpha.\varphi \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$.

Определение

Функция «ранг типа» $rk \subseteq T \times \mathbb{N}_0$. $rk(\sigma) = [mrk(\sigma), +\infty) \cap \mathbb{N}_0$, где mrk :

$$mrk(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \text{ без кванторов} \\ \max(mrk(\sigma), 1), & \tau = \forall x.\sigma \\ \max(mrk(\sigma_1) + 1, mrk(\sigma_2)), & \tau = \sigma_1 \rightarrow \sigma_2, \tau \text{ имеет кванторы} \end{cases}$$

Лемма

Если $rk(\sigma, 1)$, то для формулы σ найдётся эквивалентная формула с поверхностными кванторами.

Пример

$0 \notin rk(\forall\alpha.\gamma \rightarrow \beta)$; $1 \notin rk((\forall\alpha.\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow f) = \{2, 3, \dots\}$

$1 \notin rk(\exists\alpha.\gamma) = rk(\forall\beta.(\forall\alpha.\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) = \{2, 3, \dots\}$

$1 \in rk(\forall\alpha.\delta \rightarrow \forall\beta.\delta \rightarrow \forall\gamma.\delta)$

Типовая система Хиндли-Милнера: язык

Определение

Тип (τ) и типовая схема:

$$\tau ::= \alpha \mid (\tau \rightarrow \tau) \quad \sigma ::= \forall x. \sigma \mid \tau$$

Пред-лямбда-терм (типизация по Карри)

$$H ::= x \mid (H \ H) \mid (\lambda x. H) \mid (\text{let } x = H \text{ in } H)$$

Редукция для let:

$$\text{let } x = E_1 \text{ in } E_2 \rightarrow_{\beta} E_2[x := E_1]$$

Пример

$$\text{let } \text{Inc} = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x) \text{ in } \text{Inc}(\text{Inc } \bar{0}) \rightarrow_{\beta} \bar{2}$$

Типовая система Хиндли-Милнера: специализация

Определение

Пусть $\sigma_1 = \forall \alpha_1. \forall \alpha_2. \dots \forall \alpha_n. \tau_1$. Тогда σ_2 — частный случай или специализация σ_1 (обозначается как $\sigma_1 \sqsubseteq \sigma_2$), если

$$\sigma_2 = \forall \beta_1. \forall \beta_2. \dots \forall \beta_m. \tau_1[\alpha_1 := S(\alpha_1), \dots, \alpha_n := S(\alpha_n)] \text{ и } \beta_i \notin FV(\forall \alpha_1. \forall \alpha_2. \dots \forall \alpha_n. \tau_1)$$

Пример

$$\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \sqsubseteq \forall \beta_1. \forall \beta_2. (\beta_1 \rightarrow \beta_2) \rightarrow (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$$

Типовая система Хиндли-Милнера: правила вывода

$$\begin{array}{c}
 \overline{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma} \quad x \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash E_0 : \tau \rightarrow \tau' \quad \Gamma \vdash E_1 : \tau}{\Gamma \vdash E_0 E_1 : \tau'} \qquad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash E : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x. E : \tau \rightarrow \tau'} \\
 \\
 \frac{\Gamma \vdash E_0 : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash E_1 : \tau}{\Gamma \vdash \text{let } x = E_0 \text{ in } E_1 : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash E : \sigma' \quad \sigma' \sqsubseteq \sigma}{\Gamma \vdash E : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash E : \sigma}{\Gamma \vdash E : \forall \alpha. \sigma} \quad \alpha \notin FV(\Gamma)
 \end{array}$$

Пример

$$\begin{array}{c}
 \overline{x : \alpha \vdash x : \alpha} \\
 \hline
 \vdash \lambda x. x : \alpha \rightarrow \alpha \\
 \hline
 \vdash \lambda x. x : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \\
 \\
 \frac{\overline{\text{id} : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \vdash \text{id} : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha}}{\text{id} : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \vdash \text{id} : \text{int} \rightarrow \text{int}} \quad S(\alpha) = \text{int} \qquad \text{id} : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \vdash 0 : \text{int} \\
 \hline
 \text{id} : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \vdash \text{id } 0 : \text{int}
 \end{array}$$

Отсюда: `let id = λx.x in ⟨id 0, id «a»⟩ : int&string`