

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3232-М3239, весна 2025 года

## Домашнее задание №1: лямбда исчисление — бестиповое и просто-типизированное

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{aligned} L &:= \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.(thisisafixedpointcombinator) \\ R &:= LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{aligned}$$

В данном определении терм  $R$  является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм  $F$ , выполнено  $R F =_{\beta} F (R F)$ .

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
  - (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 32 параметрами и осмысленной русской фразой в терме  $L$ ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
2. Найдите необитаемый тип в просто-типизированном лямбда-исчислении (напомним: тип  $\tau$  называется необитаемым, если ни для какого  $P$  не выполнено  $\vdash P : \tau$ ).
  3. Покажите на основании следующего преобразования полноту комбинаторного базиса SKI (проведите полное рассуждение по индукции, из которого будет следовать отсутствие в результате других термов, кроме SKI, бета-эквивалентность и определённость результата для всех комбинаторов  $\sigma$ ):

$$[\sigma] = \begin{cases} x, & \sigma = x \\ [\varphi] [\psi], & \sigma = \varphi \psi \\ K [\varphi], & \sigma = \lambda x. \varphi, \quad x \notin FV(\varphi) \\ I, & \sigma = \lambda x. x \\ [\lambda x. [\lambda y. \varphi]], & \sigma = \lambda x. \lambda y. \varphi, \quad x \in FV(\varphi), x \neq y \\ S [\lambda x. \varphi] [\lambda x. \psi], & \sigma = \lambda x. \varphi \psi, \quad x \in FV(\varphi) \cup FV(\psi) \end{cases}$$

Заметим, что данные равенства объясняют смысл названий комбинаторов:

$S$  verSchmelzung, «сплавление»  
 $K$  Konstanz  
 $I$  Identität

4. Покажите, что следующая система комбинаторов образует полный базис в бестиповом лямбда-исчислении, но соответствующая им система аксиом в исчислении гильбертового типа не образует полного базиса для импликативного фрагмента:

$$\begin{aligned} I &:= \lambda x. x \\ K &:= \lambda x. \lambda y. x \\ S' &:= \lambda i. \lambda x. \lambda y. \lambda z. i (i ((x (i z)) (i (y (i z))))) \end{aligned}$$

Указание: покажите невыводимость  $(\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ .

5. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения  $(\lambda x. I I) (\lambda y. I I)$  самые вложенные редексы — применения  $I I$ :

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. \underline{I I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. I I)$$

- (a) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.
- (b) Докажите или опровергните, что параллельная бета-редукция из теоремы Чёрча-Россера не медленнее (в смысле количества операций для приведения выражения к нормальной форме), чем нормальный порядок редукции с мемоизацией.

- (с) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.
6. Сформулируем определение бета-редукции на языке пред-лямбда-термов.  $A \rightarrow_\beta B$ , если:
- $A \equiv (\lambda x.P) Q$ ,  $B \equiv P [x := Q]$ , при условии свободы для подстановки;
  - $A \equiv (P Q)$ ,  $B \equiv (P' Q')$ , при этом  $P \rightarrow_\beta P'$  и  $Q = Q'$ , либо  $P = P'$  и  $Q \rightarrow_\beta Q'$ ;
  - $A \equiv (\lambda x.P)$ ,  $B \equiv (\lambda x.P')$ , и  $P \rightarrow_\beta P'$ .
- (а) Найдите лямбда-выражение, бета-редукция которого не может быть произведена из-за нарушения правила свободы для подстановки (для продолжения редукции потребуется производить переименование связанных переменных). Поясните, какое ожидаемое ценное свойство будет нарушено, если ограничение правила проигнорировать.
- (б) Покажите, что недостаточно наложить требования на исходное выражение, и свобода для подстановки может быть нарушена уже в процессе редукции исходно полностью корректного лямбда-выражения.
7. Две задачи на вычисление СЗНФ при помощи нормального порядка редукции.
- (а) Постройте функцию прибавления 1 к значениям из списка в лямбда-исчислении:  
`let plus1 1 = map (fun x -> x+1) 1.` Постройте бесконечный список из нечётных чисел  $[1, 3, \dots]$ . Примените функцию `plus1` к списку и получите результат в СЗНФ.
- (б) Напишите функцию вычисления суммы первых двух элементов списка:  
`let compute (l1::l2::ls) = (l1+l2, ls)`, примените её к результату предыдущего пункта, получите результат в СЗНФ.
8. Как мы уже разбирали,  $\not\vdash x x : \tau$  в силу дополнительных ограничений правила

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

Найдите лямбда-выражение  $N$ , что  $\not\vdash N : \tau$  в силу ограничений правила

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.N : \sigma \rightarrow \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

9. Рассмотрим подробнее отличия исчисления по Чёрчу и по Карри. Определим точно бета-редукцию в исчислении по Чёрчу:  $A \rightarrow_\beta B$ , если
- $$\begin{aligned} A &= (\lambda x^\sigma.P) Q, & B &= P[x := Q] \\ A &= P Q, & B &= P Q' \text{ или } B = P' Q \text{ при } P \rightarrow_\beta P' \text{ и } Q \rightarrow_\beta Q' \\ A &= \lambda x^\sigma.P, & B &= \lambda x^\sigma.P' \text{ при } P \rightarrow_\beta P' \end{aligned}$$
- (а) Покажите, что в исчислении по Карри не выполняется свойство расширения типизации (subject expansion) даже в такой формулировке: если  $\vdash_K M : \sigma$ ,  $M \rightarrow_\beta N$  и  $\vdash_K N : \tau$ , то необязательно, что  $\sigma = \tau$ .
- (б) Покажите, что в исчислении по Чёрчу свойство расширения типизации в такой формулировке также не выполняется:

найдутся такие  $M, N, \sigma$ , что  $\vdash_K N : \sigma$ ,  $M \rightarrow_\beta N$ , но  $\not\vdash_K M : \sigma$ .

Но при этом в исчислении по Чёрчу выполнено свойство расширения типизации в такой формулировке:

если  $\vdash_K M : \sigma$ ,  $M \rightarrow_\beta N$  и  $\vdash_K N : \tau$ , то тогда  $\sigma = \tau$ .

## Домашнее задание №2: теорема о сильной нормализуемости просто типизированного лямбда-исчисления

1. Найдите  $\llbracket \alpha \rightarrow \alpha \rrbracket$  и  $\llbracket (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rrbracket$ .
2. Покажите, что  $\llbracket \alpha \rrbracket$  насыщенное, и что если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  насыщены, то  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  насыщенное.
3. Покажите, что SN — насыщенное (постройте полноценные рассуждения по индукции для определения).