Ещё о равенстве

η-преобразование

Определение

Если x не входит свободно в F, то можем определить η-редукцию:

$$\lambda x.F\ x \to_\eta F$$

и η-экспансию:

$$F \to_\eta \lambda x.F\ x$$

Язык Аренд можно попросить применить эта-экспансию (указав двойное подчёркивание на месте ожидаемого параметра):

```
\func s (a : (Nat -> Nat) -> Nat) (x : Nat -> Nat) => a (x 5 Nat.+ __)
\func s' (a : (Nat -> Nat) -> Nat) (x : Nat -> Nat)
      => a (\lam z => x 5 Nat.+ z)

\func s_id : smthf (\lam f => f 0) (\lam x => x Nat.+ 1) = 6 => idp
```

Ещё немного об эта-экспансии

Вариант также корректен:

```
alpha (x __ Nat.+ 5)
```

А вот такая запись:

```
alpha (x (id __) Nat.+ 5)
```

означает

```
alpha (x (\lam u => id u) Nat.+ 5)
```

Пример

Сжатие путей

```
\func path_squeeze {A : \Type} {a a' : A} (p : a = a') (i : I)
      : a = p @ i => path (p @ I.squeeze i __)
```

Высшие индуктивные типы: фактор-множества

Определение

Пусть задано A и отношение на нём: $R \subseteq A \times A$. Тогда фактор-множество:

$$A/_R := \{\{\langle x, y\rangle | y \in A, R(x, y)\} \mid x \in A\}$$

В Аренде фактор-множество задаётся довольно схожим образом:

```
\truncated \data Quotient {A : \Type} (R : A -> A -> \Type) : \Set
  | in~ A
  | ~-equiv (x y : A) (R x y) : in~ x = in~ y
```

Высший индуктивный тип `Quotient` содержит конструктор для значений (`in~`) и конструктор для равенства (`~-equiv`).

Работа с высшими индуктивными типами

```
\func IntEqual (a b : \Sigma Nat Nat) : \Prop => a.1 Nat.+ b.2 = a.2 Nat.+ b.1
\func Integer => Quotient IntEqual

\func prove01=10 : 0 Nat.+ 1 = 1 Nat.+ 0 => idp
\func idpx : in~ {_} {IntEqual} (0,0) = in~ (1,1) =>
  \lam i => ~-equiv (0,0) (1,1) prove01=10 i

\func plus (a b : Integer) : Integer \elim a,b
  | in~ a, in~ b => Quotient.in~ (a.1 Nat.+ b.1, a.2 Nat.+ b.2)

  -- ~-equiv (x y : A) (R x y) : in~ x = in~ y
  | in~ a, ~-equiv (xa, xb) (ya, yb) r =>
    -- r : xa+yb=xb+ya
    -- Требуется: in~ (a.1 Nat.+ xa, a.2 Nat.+ xb) = in~ (a.1 Nat.+ ya, a.2 Nat.+ yb)
    -- То есть: a.1+xa + a.2+yb = a.2+xb + a.1+ya
    Quotient.~-equiv (a.1 Nat.+ xa, a.2 Nat.+ xb) (a.1 Nat.+ ya, a.2 Nat.+ yb) {?} __

  | ~-equiv x y r i, in~ a => {?}
```

Пропы

Докажем `props-equal {A : \Prop} (a b : A) : a = b`

```
\lemma props-equal {A : \Prop} {a a' : A} : a = a'
  => \case truncP (inP a) (inP a') __ \with {
    | inP x => x
  }
```

Парадокс Жирара

Расширение обобщённых типовых систем

Расширение обобщённых типовых систем, 5 уровней:

№	название	обозначение, примеры
0	термы: доказательства	x, $\lambda p.q$, ...
1	типы: утверждения	$1 = 1$
2	рода: семейства утверждений	$\star$
3	сорт «квадратик»	$\square$ (единственный представитель)
4	сорт «треугольник»	$\triangle$ (единственный представитель)

Обобщённые типовые системы, системы U и U^-

Название	Аксиомы	Правила
λHOL	$\star : \square,\ \square : \triangle$	$(\star,\star),\ (\square,\square),\ (\square,\star)$
	$\star : \square,\ \square : \triangle$	$(\star,\star),\ (\square,\square),\ (\square,\star),\ (\triangle,\star)$
λU^-	$\star : \square,\ \square : \triangle$	$(\star,\star),\ (\square,\square),\ (\square,\star),\ (\triangle,\square)$
λU	$\star : \square,\ \square : \triangle$	$(\star,\star),\ (\square,\square),\ (\square,\star),\ (\triangle,\square),\ (\triangle,\star)$

Парадокс Бурали-Форте

Теорема

Множества всех ординалов не существует

Доказательство.

Пусть Ω — множество всех ординалов.

1. Легко заметить, что Ω является ординалом:
   - Все ординалы сравнимы (если есть аксиома выбора) — линейный порядок
   - Если множество ординалов $X \subseteq \Omega$ непусто $(x \in X)$, то в $\min X = \min(x' \cap X)$. Поскольку x' — ординал, то в любом его непустом подмножестве есть минимум — полный порядок.
   - Если $y \in x$ и $x \in \Omega$, то y ординал — транзитивность.
2. Однако, любой ординал $\alpha \in \Omega$, то есть $\Omega < \Omega$
3. Однако, это есть противоречие с определением строгого порядка.

$\square$

Порядковые типы

Definition

Множества $(A, \prec)$ и $(B, \sqsubset)$ имеют одинаковый *порядковый тип*, если существует биекция между ними, сохраняющая порядок:

$$\forall a \in A. \forall b \in A. a \prec b \leftrightarrow f(a) \sqsubset f(b)$$

Definition

Операции перехода от множества к порядковому типу и назад:

1. σ — по порядковому типу (по соответствующему ординалу) получить вполне упорядоченное множество: $\sigma\alpha = \{t : \text{ординал} | t < \alpha\}$
2. τ — по вполне упорядоченному множеству получить его порядковый тип: τX

Заметим, что (здесь X — некоторое множество ординалов):

$$\sigma\tau X = \{\beta : \text{ординал} | \beta < \tau X\} = \{\tau\sigma\alpha | \alpha \in X\}$$

Парадоксальные универсумы

Напомним, что $X \to Y := \Pi x^X . Y$.

Definition

Булеан множества S (power set) — множество всех предикатов на S:

$$\wp : S \to \star$$

Рассмотрим $\sigma : \mathcal{U} \to \wp\mathcal{U}$ и $\tau : \wp\mathcal{U} \to \mathcal{U}$

Definition

$\mathcal{U}$ парадоксален, если для всех $X \in \wp\mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma\tau X = \{\tau\sigma x | x \in X\}$$

Предшественники

Фиксируем парадоксальный универсум $\mathcal{U}$ вместе с отображениями σ и τ.

Definition

Назовём y *предшественником* x ($y < x$), если $y \in \sigma x$.

Lemma (о выражении предшественника)

Если $t < \tau\sigma x$, то $t = \tau\sigma y$ для некоторого $y < x$

Доказательство.

Пусть $X = \sigma x = \{y | y < x\}$; это множество всех предшественников x.
$t < \tau\sigma x$, то есть $t \in \sigma\tau\sigma x$, то есть $t \in \sigma\tau X$, то есть (по парадоксальности) $t \in \{\tau\sigma y | y \in X\}$, то есть $t = \tau\sigma y$ для некоторого $y \in X$, то есть $t = \tau\sigma y$ при $y < X$. $\square$

Lemma

Если $p < q$, то $\tau\sigma p < \tau\sigma q$

Индуктивность и фундированность

Definition

Рассмотрим универсум $\mathcal{U}$. Индуктивность множеств и фундированность:

1. $X \subseteq \mathcal{U}$ — *индуктивное*, если всякий x, предшественники которого содержатся в X, сам содержится в X:

$$\text{Если для всех } y < x \text{ выполнено } y \in X, \text{ то } x \in X$$

2. $x \in \mathcal{U}$ — *фундированный*, если x принадлежит всем индуктивным множествам.

Множество Ω

Definition

Фиксируем некоторый универсум $\langle \mathcal{U}, \sigma, \tau \rangle$. Тогда $\Omega = \tau\{x | x \text{ фундирован}, x \in \mathcal{U}\}$ — порядковый тип множества всех фундированных множеств.

Легко заметить, что $\Omega \in \mathcal{U}$.

Лемма

Если X индуктивно, то и $T = \{y | \tau\sigma y \in X\}$ также индуктивно.

Доказательство.

Для индуктивности T нужно показать, что если $y < x$ влечёт $y \in T$, то $x \in T$. Фиксируем x, что $\tau\sigma y \in X$ для всех $y < x$. Тогда заметим, что если $k < \tau\sigma x$, то найдётся такой y, что $k = \tau\sigma y$ и $y < x$ (лемма о выражении предшественника), то есть $k \in X$. Значит (индуктивность X), $\tau\sigma x \in X$, то есть $x \in T$. $\square$

Ω фундировано

Лемма

В парадоксальном универсуме $(\sigma\tau X = \{\tau\sigma x | x \in X\})$ *множество* Ω *фундировано.*

Доказательство.

- Фиксируем индуктивное $X \subseteq \mathcal{U}$. Чтобы показать $\Omega \in X$, по определению индуктивности надо показать, что если $t < \Omega$, то $t \in X$. Пусть F — множество всех фундированных элементов, $F \subseteq \mathcal{U}$.
- Пусть $t < \Omega$, тогда $t \in \sigma\Omega$ (определение предшествования), отсюда $\sigma\Omega = \sigma\tau F$ (определение Ω).
- По парадоксальности, $\sigma\tau F \subseteq \{\tau\sigma x | x \in F\}$, то есть $t \in \sigma\Omega \subseteq \{\tau\sigma x | x \in F\}$, то есть $t = \tau\sigma\omega$ при некотором $\omega \in F$.
- Поскольку X индуктивно, то по лемме и множество $T = \{y | \tau\sigma y \in X\}$ индуктивно. По определению, ему принадлежат все фундированные элементы: $F \subseteq T$. Значит, $\omega \in F$ влечёт $\omega \in T$, то есть $t = \tau\sigma\omega \in X$.

$\square$

Множество Ω противоречиво

Лемма

Ω не может быть фундировано.

Доказательство.

Можно показать, используя обратное включение: $\{\tau\sigma x | x \in X\} \subseteq \sigma\tau X$. $\square$

Теорема

Множество Ω не существует

Доказательство.

Ω фундировано, но его фундированность ведёт к противоречию. $\square$

Построение парадокса в U^-

Теперь, имея идею парадокса, покажем, что в U^- есть парадоксальные универсумы.

Вспомним изоморфизм Карри-Ховарда: $P(x) \approx x \in \{t \mid P(t)\} \approx X : P(x)$

После этого выразим операции σ, τ и построим Ω.

1. $\mathcal{U} = \Pi X : \square.((\wp X \to X) \to \wp X)$
2. $\tau = \lambda X : \wp\mathcal{U}.\lambda A : \square.\lambda c : (\wp A \to A).\lambda a : A.\varphi$, где $\varphi = \Pi P^{\wp A}.(\Pi x^{\mathcal{U}}.X\ x \Rightarrow (P(c(\{x\ A\}\ c)))) \Rightarrow P\ a$
3. $\sigma = \lambda x : \mathcal{U}.((x\ \mathcal{U})\ \tau)$

Заметим, что для задания $\mathcal{U}$ нам требуются правила $(\triangle, \square)$.

Несложно показать, что $(\mathcal{U}, \sigma, \tau)$ — парадоксальный: $\mathcal{U}$ парадоксален, если для всех $X \in \wp\mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma\tau X = \{\tau\sigma x | x \in X\}$$

Например потому, что для всех $X : \wp\mathcal{U}$ выполнено

$\sigma\tau X =_\beta \bigcap\{P \subseteq \mathcal{U} \mid \forall x \in X.\tau\sigma x \in P\}$

А далее строим Ω и выписываем применение двух утверждений: Ω фундирован и Ω фундирован $\to \bot$.

Упрощённая формула

Рассмотрим $\sigma : \mathcal{U} \to \wp\wp\mathcal{U}$ и $\tau : \wp\wp\mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Назовём $\mathcal{U}$ мощным универсумом, если при $C \in \wp\wp\mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma\tau C = \{X \mid \{y | \tau\sigma y \in X\} \in C\}$$

Дадим следующие обозначения:

1. Универсум:
$$\mathcal{U} = \Pi x^{\square}.(\wp\wp x \to x) \to \wp\wp x$$
2. Отображения:
$$\tau t = \lambda X^{\square}.\lambda f^{\wp\wp X \to X}.\lambda p^{\wp X}.t \lambda x^{\mathcal{U}}.p(f\ (x\ X)\ f)$$
$$\sigma s = (s\ \mathcal{U})\ \lambda t^{\wp\wp\mathcal{U}}.\tau t$$
3. Вспомогательное:
$$\Delta = \lambda y^{\mathcal{U}}.(\Pi p^{\wp\mathcal{U}}.\sigma y p \to p \tau\sigma y) \to \bot$$

Омега и парадокс

В качестве Ω берём $\tau\{X|X$ индуктивен$\}$:

$$\Omega = \tau\ \lambda p^{\wp\mathcal{U}}.\Pi x^{\mathcal{U}}.\sigma x p \to p x$$

Тогда следующее выражение обитает в типе «ложь» ($\bot = \Pi p^{\star}.p$):

$$\begin{gathered}\lambda a_0 : \Pi p : \wp\mathcal{U}.(\Pi x : \mathcal{U}.(\sigma x p) \to (p x)) \to (p\Omega)).\\ ((a_0\ \Delta)\ \lambda x^{\mathcal{U}}.\lambda a_2^{(\sigma x \Delta)}.\lambda a_3^{\Pi p:\wp\mathcal{U}.(\sigma x p)\to p\tau\sigma x}.\\ ((a_3\ \Delta)\ a_2)\ \lambda p^{\wp\mathcal{U}.(a_3\ \lambda y:\mathcal{U}.p\tau\sigma y)}(\lambda p^{\wp\mathcal{U}}.a_0\ \lambda y : \mathcal{U}.(p\tau\sigma y)))\\ \lambda p^{\wp\mathcal{U}}.\lambda a_1^{\Pi x:\mathcal{U}.\sigma x p\to p x}.(a_1\ \Omega)\ \lambda x^{\mathcal{U}}.a_1\ \tau\sigma x\end{gathered}$$