Лекция 2.
Задачи типизации $\lambda_{\to}$.
Выразительная сила $\lambda_{\to}$.

Основные задачи типизации λ-исчисления

Рассмотрим $? \vdash ? : ?$.

1. *Проверка типа:* выполняется ли $\Gamma \vdash M : \sigma$ для контекста Γ, терма M и типа σ
   Компиляция в языке программирования, типизированном по Чёрчу. Проверка доказательства.
2. *Реконструкция типа:* $? \vdash M : ?$.
   Компиляция в языке программирования, типизированном по Карри. Это бывает чаще, чем кажется.
   ```
   template <class A, class B>
   auto min(A a, B b) -> decltype(a < b ? a : b) {
       return (a < b) ? a : b;
   }
   ```
3. *Обитаемость типа:* $\Gamma \vdash ? : \sigma$.
   Поиск доказательства.

Все задачи разрешимы.

Построение системы по терму M

Будем строить систему рекурсией по структуре терма M (предполагаем, что все имена для связанных переменных уникальны). Каждой переменной x сопоставим свежую типовую переменную α_x. Также каждой аппликации $P\ Q$ в терме сопоставим свежую типовую переменную β_{PQ}.
По терму M и по всем его подтермам рекурсивно построим пару $\langle \mathcal{E}_M, \sigma_M \rangle$ так:

$$\langle \mathcal{E}_M, \sigma_M \rangle := \begin{cases} \langle \varnothing, \alpha_x \rangle, & M = x \\ \langle \mathcal{E}_P, \alpha_x \to \sigma_P \rangle, & M = \lambda x.P \\ \langle \mathcal{E}_P \cup \mathcal{E}_Q \cup \{\sigma_P = \sigma_Q \to \beta_{PQ}\}, \beta_{PQ} \rangle, & M = P\ Q \end{cases}$$

Теорема

Если $S = \mathcal{U}(\mathcal{E}_M)$, то наиболее общим решением задачи типизации будет $\langle \{x : S(\alpha_x) \mid x \in FV(M)\}, S(\sigma_M) \rangle$

Доказательство.

Индукция по структуре M. □

Пример вывода типов

1. Выберем пример ($M = \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$) и индуктивно составим систему:
   - Для $f\ x$: $\langle\{\alpha_f = \alpha_x \to \beta_{fx}\},\ \beta_{fx}\rangle$
   - Для $f\ (f\ x)$: $\langle\{\alpha_f = \alpha_x \to \beta_{fx}, \alpha_f = \beta_{fx} \to \beta_{ffx}\}, \beta_{ffx}\rangle$
   - Для $\lambda x.f\ (f\ x)$: $\langle\{\alpha_f = \alpha_x \to \beta_{fx}, \alpha_f = \beta_{fx} \to \beta_{ffx}\}, \alpha_x \to \beta_{ffx}\rangle$
   - Для $\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$: $\langle\{\alpha_f = \alpha_x \to \beta_{fx}, \alpha_f = \beta_{fx} \to \beta_{ffx}\}, \alpha_f \to \alpha_x \to \beta_{ffx}\rangle$
2. Приводим систему к разрешённой форме:
   - $\alpha_f = \alpha_x \to \beta_{fx}, \alpha_f = \beta_{fx} \to \beta_{ffx}$
   - $\alpha_f = \alpha_x \to \beta_{fx}, \alpha_x \to \beta_{fx} = \beta_{fx} \to \beta_{ffx}$, правило (d)
   - $\alpha_f = \alpha_x \to \beta_{fx}, \alpha_x = \beta_{fx}, \beta_{fx} = \beta_{ffx}$, правило (c)
   - $\alpha_f = \beta_{fx} \to \beta_{fx}, \alpha_x = \beta_{fx}, \beta_{fx} = \beta_{ffx}$, правило (d)
   - $\alpha_f = \beta_{ffx} \to \beta_{ffx}, \alpha_x = \beta_{ffx}, \beta_{fx} = \beta_{ffx}$, правило (d)
3. Строим функцию подстановки: $S_0(\alpha_f) = \beta_{ffx} \to \beta_{ffx}, S_0(\alpha_x) = S_0(\beta_{fx}) = \beta_{ffx}$
4. Наиболее общая пара: $\langle\varnothing, S(\alpha_f \to \alpha_x \to \beta_{ffx})\rangle$, то есть

$$\vdash \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\beta_{ffx} \to \beta_{ffx}) \to \beta_{ffx} \to \beta_{ffx}$$

Проверка типа

1. Задача реконструкции типа находит наиболее общую типизацию.
2. Сведём задачу проверки $\Gamma \vdash M : \sigma$ к задаче реконструкции типа $? \vdash M :?$ и найдём $\langle \Gamma', \sigma' \rangle$.
3. Проверим, является ли $\langle \Gamma, \sigma \rangle$ частным случаем $\langle \Gamma', \sigma' \rangle$.

Обитаемость типа

1. Задача поиска M, что $\Gamma \vdash M : \sigma$.
2. Эквивалентно поиску доказательства утверждения σ в ИИП (разрешимо).
3. По доказательству затем получим его краткую запись в виде терма.

Выразительная сила

Определение

Расширенный полином, где $P(x)$, $P(x,y)$ — полиномы (выражения, составленные из сложения, умножения, аргументов и натуральных констант), c — константа:

$$E(m,n) := \begin{cases} c, & m = 0, n = 0 \\ P_1(m), & n = 0 \\ P_2(n), & m = 0 \\ P_3(m,n), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Теорема

Пусть $\eta = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Если $F : \eta \to \eta \to \eta$, то найдётся такой расширенный полином $E(m,n)$, что при всех $m, n \in \mathbb{N}_0$ выполнено $F\ \overline{m}\ \overline{n} =_\beta \overline{E(m,n)}$, либо $F\ \overline{m}\ \overline{n} =_\beta \lambda f.f$ при $E(m,n) = 1$.

Расширение языка: полное ИИВ

- Попробуем увеличить выразительную силу, воспользовавшись изоморфизмом Карри-Ховарда. Рассмотрим полное ИИВ.
- Расширим язык:

$$
\begin{array}{rcll}
\Lambda & ::= & x \mid (\Lambda\ \Lambda) \mid (\lambda x.\Lambda) & \\
& \mid & \langle \Lambda, \Lambda \rangle \mid (\pi_L\ \Lambda) \mid (\pi_R\ \Lambda) & \text{термы для } \& \\
& \mid & (In_L\ \Lambda) \mid (In_R\ \Lambda) \mid (Case\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda) & \text{термы для } \vee \\
& \mid & (Absurd\ \Lambda) & \text{термы для } \perp
\end{array}
$$

Связки ИИВ не выражаются друг через друга

Теорема (случай связки $(\to)$)

Какое бы ни было выражение $\varphi(A, B)$, составленное из связок $(\&)$,$(\vee)$,$\bot$, найдётся оценка, что $[\![A \to B]\!] \neq [\![\varphi(A, B)]\!]$

Доказательство.

Рассмотрим алгебру Гейтинга на $\mathbb{R}$, пусть $[\![A]\!] = (0, \infty)$ и $[\![B]\!] = \varnothing$.
Заметим, что связки замкнуты относительно множества $\{\varnothing, \mathbb{R}, (0, \infty)\}$:

$(\bot)$	$(\&)$	$(\vee)$
	$\mathbb{R} \cap X = X$	$\mathbb{R} \cup X = \mathbb{R}$
$\varnothing$	$\varnothing \cap X = \varnothing$	$\varnothing \cup X = X$
	$(0, \infty) \cap X \in \{\varnothing, (0, \infty)\}$	$(0, \infty) \cup X \in \{(0, \infty), \mathbb{R}\}$

Однако, $[\![A \to B]\!] = (-\infty, 0)$. $\square$

Новые связки требуют отдельных правил

- Упорядоченная пара в бестиповом лямбда-исчислении.

$$\mathsf{MkPair} ::= \lambda a.\lambda b.\underbrace{(\lambda p.p\ a\ b)}_{\mathsf{MkPair\ a\ b}} \qquad \mathsf{Fst} ::= \lambda p.p\ \mathsf{T} \qquad \mathsf{Snd} ::= \lambda p.p\ \mathsf{F}$$

- Какой тип у MkPair a b?

$$\mathsf{MkPair\ a\ b} = \lambda p^{\alpha\to\beta\to\gamma}.p\ a^{\alpha}\ b^{\beta} : (\alpha\to\beta\to\gamma)\to\gamma$$

- Тип зависит от типа результата γ: при левой проекции $\alpha = \gamma$

$$\mathsf{Fst} = \lambda p.p^{(\alpha\to\beta\to\gamma)\to\gamma}\ \mathsf{T}^{\alpha\to\beta\to\alpha} : \gamma$$

  При правой проекции $\beta = \gamma$: $\mathsf{Snd} = \lambda p.p^{(\alpha\to\beta\to\gamma)\to\gamma}\ \mathsf{F}^{\alpha\to\beta\to\beta} : \gamma$

- Из-за невыразимости связок друг через друга в ИИВ никакая формула не сможет типизировать упорядоченную пару. Однако, в данном варианте типизации может помочь квантор по γ или схема аксиом (правил вывода).

Дополнительные правила для расширенного языка

1. Типизация дизъюнкции (алгебраического типа)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi}{\Gamma \vdash In_L\ A : \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash B : \psi}{\Gamma \vdash In_R\ B : \varphi \vee \psi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash L : \varphi \vee \psi, \quad \Gamma \vdash f : \varphi \to \tau, \quad \Gamma \vdash g : \psi \to \tau}{\Gamma \vdash \text{Case}\ L\ f\ g : \tau}$$

2. Типизация конъюнкции (упорядоченной пары)

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \psi}{\Gamma \vdash \langle A, B \rangle : \varphi \& \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash P : \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \text{Fst}\ P : \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash P : \varphi \& \psi}{\Gamma \vdash \text{Snd}\ P : \psi}$$

3. Типизация лжи

$$\frac{\Gamma \vdash A : \perp}{\Gamma \vdash \text{Absurd}\ A : \varphi}$$

Нормализуемость

Определение

- *Терм A назовём слабо нормализуемым, если существует последовательность редукций, приводящих его в нормальную форму.*
- *Терм A назовём сильно нормализуемым, если не существует бесконечной последовательности его редукций.*
- *Исчисление назовём сильно нормализуемым, если любой его терм сильно нормализуем.*

Теорема

Бестиповое лямбда-исчисление не является сильно нормализуемым

Доказательство.

$\Omega \to_\beta \Omega$ □

Теорема

Просто типизированное лямбда-исчисление является сильно нормализуемым

Сильно нормализуемые множества

Определение

SN — множество всех сильно нормализуемых лямбда-термов.
Насыщенное множество $\mathcal{X} \subseteq SN$ *— такое, что:*

1. *для любых* $n \geqslant 0$ *и* $M_1, \dots, M_n \in SN$
$$x\ M_1 \dots M_n \in \mathcal{X}$$
2. *для любых* $n \geqslant 1$, $M_1, \dots, M_n \in SN$ *и* $N \in \Lambda$
$$N[x := M_1]\ M_2 \dots M_n \in \mathcal{X} \text{ влечёт } (\lambda x.N)\ M_1\ M_2 \dots M_n \in \mathcal{X}$$

Лемма

SN — насыщенное.

Интересен пункт 2: если $N[x := M_1]\ M_2 \dots M_n \in SN$, то $\underline{(\lambda x.N)\ M_1}\ M_2 \dots M_n \in SN$.
Подстановка подчёркнутого возвращает к редукции посылки, бесконечная «локальная» подстановка может быть повторена с посылкой.

Определение

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$, *то* $\mathcal{A} \to \mathcal{B} = \{X \in \Lambda \mid \forall Y \in \mathcal{A} \,.\, X\ Y \in \mathcal{B}\}$

Пример

$\{\lambda x.\lambda y.x\} \to \{X \mid X =_\beta \lambda x.\lambda y.y\} = \{Not, \lambda t.F, Xor\ T, \ldots\}$

Определение

$$[\![\sigma]\!] = \begin{cases} SN, & \sigma = \alpha \\ [\![\tau_1]\!] \to [\![\tau_2]\!], & \sigma = \tau_1 \to \tau_2 \end{cases}$$

Лемма

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *насыщены, то* $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *насыщено*

$[\![\sigma]\!]$ *насыщено.*

Лемма

$[\![\sigma]\!] \subseteq SN$

Оценка

Определение

Оценка $\rho : \mathcal{V} \to \Lambda$ *— отображение переменных в лямбда-термы.*
$M_\rho := M[x_1 := \rho(x_1), \ldots, x_n := \rho(x_n)]$*, где* x_i *— все свободные переменные* M*.*
Будем писать $\rho \models M : \sigma$*, если* $M_\rho \in [\![\sigma]\!]$*. Будем писать* $\rho \models \Gamma$*, если* $\rho(x) \in [\![\sigma]\!]$ *для всех* $x : \sigma \in \Gamma$*.*
$\Gamma \models M : \sigma$*, если для любой оценки* ρ *из* $\rho \models \Gamma$ *следует* $\rho \models M : \sigma$*.*

Теорема

$\Gamma \vdash M : \sigma$ *влечёт* $\Gamma \models M : \sigma$*.*

Доказательство индукцией по структуре вывода $\Gamma \vdash M : \sigma$ со следующим разбором случаев.

Аксиома

Вывод имеет вид:

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}$$

Фиксируем $\rho \models \Gamma \cup \{x : \sigma\}$, тогда $x_\rho = \rho(x) \in [\![\sigma]\!]$
Отсюда $\Gamma, x : \sigma \models x : \sigma$

Применение

Вывод имеет вид:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}$$

Фиксируем $\rho \models \Gamma$. По индукционному предположению, $\Gamma \models M : \sigma \to \tau$ и $\Gamma \models N : \sigma$, так что $\rho \models M : \sigma \to \tau$ и $\rho \models N : \sigma$, что означает, что $M_\rho \in [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$ и $N_\rho \in [\![\sigma]\!]$. Тогда $(M\ N)_\rho = M_\rho\ N_\rho \in [\![\tau]\!]$.

Абстракция

Вывод имеет вид:

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$

Пусть $\rho \models \Gamma$. Чтобы показать $(\lambda x.M)_\rho \in [\![\sigma \to \tau]\!]$, надо для всех $N \in [\![\sigma]\!]$ показать $(\lambda x.M)_\rho\ N \in [\![\tau]\!]$.
Фиксируем $N \in [\![\sigma]\!]$. Тогда $\rho^{x:=N} \models \Gamma, x : \sigma$. По индукционному предположению, $\Gamma, x : \sigma \models M : \tau$, так что $\rho^{x:=N} \models M : \tau$ (по определению $\models$). То есть, $M_{\rho^{x:=N}} \in [\![\tau]\!]$.
Произведём редукцию:

$$(\lambda x.M)_\rho N = (\lambda x.M)^{y_1:=\rho(y_1),\ldots,y_n:=\rho(y_n)}\ N \to_\beta M^{y_1:=\rho(y_1),\ldots,y_n:=\rho(y_n),x:=N} = M_{\rho^{x:=N}}$$

Заметим, $N \in [\![\sigma]\!] \subseteq SN$ и $M_{\rho^{x:=N}} \in [\![\tau]\!]$. Заметим ещё, что $M_{\rho^{x:=N}} = M_\rho[x := N]$.
По определению насыщенного множества из $M_\rho[x := N] \in [\![\tau]\!]$ следует требуемое $(\lambda x.M)_\rho\ N \in [\![\tau]\!]$.

Основная теорема

Теорема

$\Gamma \vdash M : \sigma$ *влечёт* $M \in SN$

Доказательство.

По предыдущей теореме, $\Gamma \models M : \sigma$. Построим «тождественную» оценку, $\rho(x) = x$ для всех $x : \tau \in \Gamma$.

Рассмотрим каждый $x : \tau$ из контекста. По лемме выше, $[\![\tau]\!]$ насыщенное. По определению насыщенного, $x \in [\![\tau]\!]$. Поэтому $\rho \models \Gamma$.

Поскольку $\Gamma \models M : \sigma$, то $M = M_\rho \in [\![\sigma]\!]$. А по лемме выше, $[\![\sigma]\!] \subseteq SN$. $\square$

О свойстве сильной нормализуемости

Правило сечения в S_∞ (без одной боковой формулы):

$$\frac{\sigma \vee \neg\beta \qquad \beta}{\sigma}$$

Или перепишем в привычной грамматике (подобно Modus Ponens):

$$\frac{\beta \rightarrow \sigma \qquad \beta}{\sigma}$$

И заметим нечто похожее в просто-типизированном лямбда-исчислении:

$$\frac{(\lambda x.P) : \tau \rightarrow \sigma \qquad Q : \tau}{(\lambda x.P)\ Q : \sigma}\ \beta - \text{редекс}$$

Поэтому добавим пункты к изоморфизму Карри-Ховарда:

Логика	$\lambda_\rightarrow$
Правило сечения, M.P.	Бета-редекс
Устранение сечения	Бета-редукция
Теорема об устранении сечений	Нормализуемость