Об алгебраической топологии

Ещё один способ определения эквивалентности

Теорема

$f : A \to B$, $g : B \to A$ и $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$ тогда и только тогда, когда f биективна и $f^{-1} = g$

Доказательство.

- f инъективна, поскольку если найдутся $x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, то и $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, значит, $id_A(x_1) = id_A(x_2)$.
- f сюръективна, поскольку если найдётся $y \in B$, что нет $x : f(x) = y$, то $f(g(y)) \neq y$, т.е. $id_B(y) \neq y$.
- $f^{-1} = g$, поскольку если $f(x) = y$, то $g(f(x)) = x$.

Обратное утверждение очевидно из разбора определения. $\square$

Гомеоморфизм

Определение

Топологические пространства X и Y гомеоморфны ($X \simeq Y$), если найдётся непрерывная биективная $f : X \to Y$, для которой f^{-1} также непрерывна.

Теорема

Гомеоморфизм сохраняет мощность и компактность.

Пример

- *Если пространства с дискретной топологией равномощны, то они гомеоморфны (очевидно).*
- $[0, 1]$ *не гомеоморфен* $\mathbb{R}$ *(не сохраняется компактность).*
- $(0, 1)$ *гомеоморфен* $\mathbb{R}$*: пусть* $f(x) = tg(\pi(x - 0.5))$.

Бублик гомеоморфен чашке

Классическая шутка (файл с Wikimedia Commons, Topology_joke.jpg, Keenan Crane and Henry Segerman):

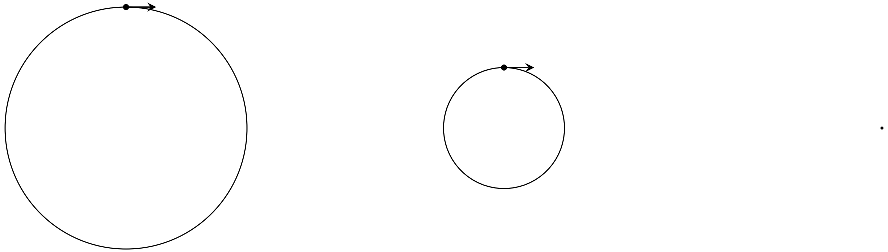
Гомотопия

Определение

Будем говорить, что непрерывные функции $f_0, f_1 : X \to Y$ *гомотопны* ($f_0 \sim f_1$), *если существует непрерывная функция* $h : X \times [0,1] \to Y$, *что* $h(x,0) = f_0$ *и* $h(x,1) = f_1$. *Иначе ещё будем обозначать* $h_t(x) := h(x,t)$.

Пример

Эти петли гомотопны, $h_t(x) = t(sin 2\pi x, cos 2\pi x)$:



$h_1(x) = (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$ $h_{0.5}(x) = \frac{1}{2}(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$ $h_0(x) = 0(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$

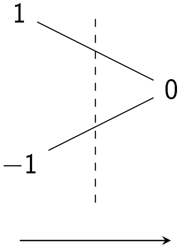
Гомотопическая эквивалентность пространств

Определение

Будем называть топологические пространства X *и* Y *гомотопически эквивалентными, если найдутся непрерывные функции функции* $f : X \to Y$ *и* $g : Y \to X$, *что* $g \circ f \sim id_X$ *и* $f \circ g \sim id_Y$.

$[-1, 1] \sim \{0\}$

$[-1, 1] \sim \{0\}$: возьмём $f(x) := 0, g(x) := 0$. Очевидно, что $f(g(y)) \sim id_Y$: возьмём $h_t^{\leftarrow}(y) = 0$. В обратную сторону: $h_t^{\rightarrow}(x) = x \cdot (t)$. Тогда $h_0^{\rightarrow}(x) = 0 = g(f(x))$, и $h_1^{\rightarrow}(x) = x = id_X$



Связности

Определение

Пространство стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке (топологическому пространству из одного элемента).

Пример

$S = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\}$ *стягиваемо. Доказательство аналогично написанному выше.*

Определение

Пространство линейно связно, если любые две точки соединены путём.
Пространство односвязно, если оно линейно связно и каждая петля в нём гомотопна точке.

Сферы

Определение

$S^k := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$

Пример

$\mathbb{R}^2 \backslash \{\langle 0, 0\rangle\} \sim S^1$: *пусть* $f(\langle x, y\rangle) = \frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|}$, *и* $g(\langle x, y\rangle) = \langle x, y\rangle$.

Произведение петель

Определение

Рассмотрим пространство X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ и петли f и g, что $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$. Тогда

$$fg(x) = \begin{cases} f(2x), & x < 0.5 \\ g(2x-1), & x \geqslant 0.5 \end{cases}$$

Теорема

Если f, g, h — петли в пространстве $\langle X, x_0 \rangle$, то

1. $f(gh) \sim (fg)h$
2. *Если $e(x) := x_0$, то $fe \sim ef \sim f$*
3. *Если $f^{-1}(x) := f(1-x)$, то $ff^{-1} \sim f^{-1}f \sim e$.*

Фундаментальная группа

Определение

Группа петель в пространстве $\langle X, x_0 \rangle$ *— фундаментальная группа* $\pi_1(X, x_0)$.

Теорема

Если пространство X *линейно-связно, то* $\pi_1(X, x_0)$ *изоморфна* $\pi_1(X, x_1)$ *при любом выборе* x_0 *и* x_1.

Ветви функции

Теорема

Множество непрерывных отображений $\varphi : S^1 \to S^1$ и множество непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, что $f(0) = 0$ и $f(1) \in \mathbb{Z}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Доказательство.

Рассмотрим некоторое отображение $\varphi : S^1 \to S^1$ и рассмотрим $\alpha(t) = (sin 2\pi t, cos 2\pi t)$. Заметим, что уравнение $\alpha(f(x)) = \varphi(\alpha(x))$ позволяет как выразить f по φ с точностью до прибавления целого значения, $\alpha^{-1}(t) \in [0,1)$:

$$f(x) = \alpha^{-1}(\varphi(\alpha(x))) + C_1(x)$$

так и φ по f:

$$\varphi(a) = \alpha(f(\alpha^{-1}(a)))$$

Однако, поскольку $f(0) = 0$ и функция непрерывна, мы можем доопределить $C_1(x)$ единственным образом. $\square$

Фундаментальная группа S^1

Теорема

Фундаментальная группа S^1 эквивалентна группе целых чисел, $\mathbb{Z}$.

Доказательство.

Возьмём петлю $\varphi(t) = (sin 2\pi t, cos 2\pi t)$. Тогда $\psi : S^1 \to S^1$ сопоставим петлю $\psi(\varphi(t))$.
По теореме выше каждому отображению $\psi : S^1 \to S^1$ можно сопоставить $f_\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Тогда определим отображение группы петель на целые числа так: $|\psi| = f_\psi(1)$. Найдём $|\psi\xi|$:

$$f_{\psi\xi}(x) = \begin{cases} f_\psi(2x), & x < 0.5 \\ f_\xi(2x - 1) + f_\psi(1), & x \geqslant 0.5 \end{cases}$$

Заметим, что $f_{\psi\xi}$ непрерывна и удовлетворяет граничным условиям, $f_{\psi\xi}(x) = \alpha^{-1}(\psi\xi(\alpha(x))) + C(x)$. Такая функция единственна, значит, это функция, соответствующая $\psi\xi$. Поэтому $|\psi\xi| = |\psi| + |\xi|$. Значит, мы задали изоморфизм групп. $\square$

$S^1 \not\simeq [0,1]$

Теорема

Если $X \sim Y$, то $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.

Теорема

$S^1 \not\simeq [0,1]$

Доказательство.

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, однако $\pi_1([0,1]) = \{0\}$, так как $[0,1]$ стягиваемо. $\square$

Теорема

S^1 не односвязна.

π_1 в Аренде

```
\instance Aut {A : \1-Type} (a : A) : Group (a = a)
  | ide => idp
  | * => *>
  | ide-left => idp_*>
  | ide-right _ => idp
  | *-assoc => *>-assoc
  | inverse => inv
  | inverse-left => inv_*>
  | inverse-right => *>_inv

\func pi1-1 (X : \1-Type) (x : X) => Aut x

\func pi1Mult {X : \1-Type} {x : X} (a b : pi1-1 X x) => a * b
```

Отображение наматывания

```
\data Sphere1
  | base1
  | loop : base1 = base1
  \where \func ploop => path loop

\func wind (x : Int) : base1 = base1
  | pos 0 => idp
  | pos (suc n) => wind (pos n) *> path loop
  | neg (suc n) => wind (neg n) *> inv (path loop)

\func code (x : Sphere1) : \Set0
  | base1 => Int
  | loop i => iso isuc ipred ipred_isuc isuc_ipred i

\func encode (x : Sphere1) (p : base1 = x) : code x => transport code p 0
```

Аксиома унивалентности

Определение

$A \simeq B$, если найдутся $f : A \to B$, $g : B \to A$, $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$
Аксиома унивалентности: $(A \simeq B) \simeq (A = B)$

```
\func Equiv (A B : \Type) => \Sigma (f : A -> B)
                                    (g : B -> A)
                                    (\Pi (x : A) -> g (f x) = x)
                                    (\Pi (y : B) -> f (g y) = y)
```

Из равенства легко получить эквивалентность:

```
\func equality=>equivalence (A B : \Type) (p : A = B) : Equiv A B =>
  transport (Equiv A) p (\lam x => x, \lam x => x, \lam x => idp, \lam x => idp)
```

Обратное же постулирует аксиома унивалентности:

```
\func equivalence=>equality (A B : \Type) (e : Equiv A B) : A = B =>
  path (iso e.1 e.2 e.3 e.4)
```

Доказательство $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

```
\func encode_decode {x : Sphere1} (p : base1 = x) : decode x (encode x p) =
  | idp => idp

\func encode_wind (x : Int) : encode base1 (wind x) = x
  | ...

\func Loop_S1 : (base1 = base1) = Int =>
  path (iso (encode base1) wind encode_decode encode_wind)
```

$f : S^1 \to Int$, $g : Int \to S^1$, причём $g(fx) = x$ и $f(gx) = x$.