

Об алгебраической топологии

Ещё один способ определения эквивалентности

Теорема

$f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ и $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$ тогда и только тогда, когда f биективна и $f^{-1} = g$

1,2

3

Доказательство.

- ▶ f инъективна, поскольку если найдутся $x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, то и $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, значит, $id_A(x_1) = id_A(x_2)$. ✓
- ▶ f сюръективна, поскольку если найдётся $y \in B$, что нет $x : f(x) = y$, то $f(g(y)) \neq y$, т.е. $id_B(y) \neq y$. ?
- ▶ $f^{-1} = g$, поскольку если $f(x) = y$, то $g(f(x)) = x$. •

Обратное утверждение очевидно из разбора определения.



Гомеоморфизм

Определение

Топологические пространства X и Y гомеоморфны ($X \simeq Y$), если найдётся непрерывная биективная $f : X \rightarrow Y$, для которой f^{-1} также непрерывна.

Теорема

Гомеоморфизм сохраняет мощность и компактность.

Пример

- ▶ Если пространства с дискретной топологией равномощны, то они гомеоморфны (очевидно).
- ▶ $[0, 1]$ не гомеоморфен \mathbb{R} (не сохраняется компактность).
- ▶ $(0, 1)$ гомеоморфен \mathbb{R} : пусть $f(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - 0.5))$.

бмт.



Бублик гомеоморфен чашке

Классическая шутка (файл с Wikimedia Commons, [Topology_joke.jpg](#), Keenan Crane and Henry Segerman):

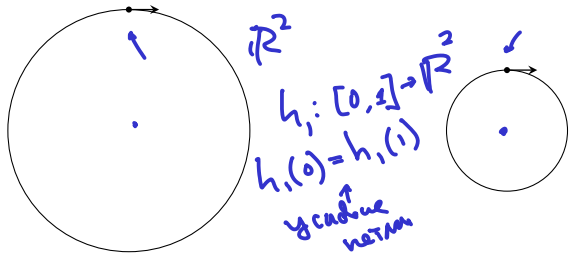


Гомотопия

Определение

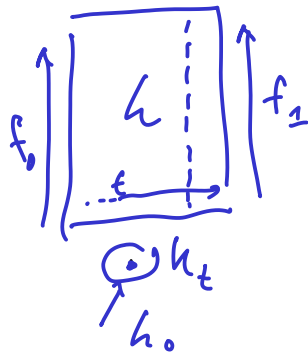
Будем говорить, что непрерывные функции $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ гомотопны ($f_0 \sim f_1$), если существует непрерывная функция $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, что $h(x, 0) = f_0$ и $h(x, 1) = f_1$. Иначе ещё будем обозначать $h_t(x) := h(x, t)$.

Пример $h_t(x)$ непр. по f и x . \leftarrow не пр.
Эти петли гомотопны, $h_t(x) = t(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$:



$$h_1(x) = (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

$$h_{0.5}(x) = \frac{1}{2}(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$



$$h_0(x) = 0(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

Гомотопическая эквивалентность пространств

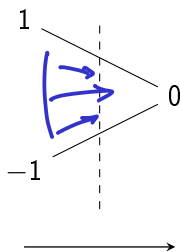
Определение

Будем называть топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентными, если найдутся непрерывные функции $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$, что $g \circ f \sim id_X$ и $f \circ g \sim id_Y$.

гомотопия

$$[-1, 1] \sim \{0\}$$

$[-1, 1] \sim \{0\}$: возьмём $f(x) := 0, g(x) := 0$. Очевидно, что $f(g(y)) \sim id_Y$: возьмём $h_t^{\leftarrow}(y) = 0$. В обратную сторону: $h_t^{\rightarrow}(x) = x \cdot (t)$. Тогда $h_0^{\rightarrow}(x) = 0 = g(f(x))$, и $h_1^{\rightarrow}(x) = x = id_X$



ретракт.

t_0 — точка.

$t_1: [-1, 1] \rightarrow 0$

$t_{0.5}: [0.5, 0.5] \rightarrow 0$

Связности

Определение

Пространство стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке (топологическому пространству из одного элемента).

Пример

$S = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\}$ стягиваемо. Доказательство аналогично написанному выше.

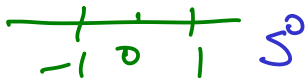
Определение

Пространство линейно связно, если любые две точки соединены путём.

Пространство односвязно, если оно линейно связно и каждая петля в нём гомотопна точке.



Сферы

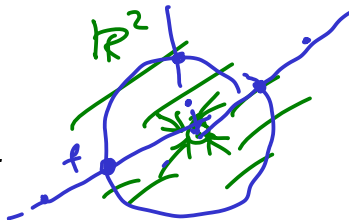


Определение

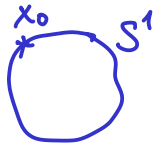
$$S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid |x| = 1\}$$

Пример

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \sim S^1$: пусть $f(\langle x, y \rangle) = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}$, и $g(\langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle$.



Произведение петель



Определение

Рассмотрим пространство X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ и петли f и g , что $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$. Тогда

$$\underline{fg}(x) = \begin{cases} f(2x), & x < 0.5 \\ g(2x - 1), & x \geq 0.5 \end{cases}$$

Теорема

Если f, g, h — петли в пространстве $\langle X, x_0 \rangle$, то

1. $f(gh) \sim (fg)h$
2. Если $e(x) := x_0$, то $fe \sim ef \sim f$
3. Если $f^{-1}(x) := f(1 - x)$, то $\underline{ff^{-1}} \sim f^{-1}f \sim e$.

гомотопия

$x: 0 \sim 1$
 $y: 1 \sim 2.$



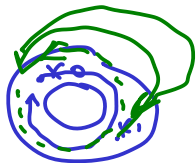
Фундаментальная группа

Определение

Группа петель в пространстве $\langle X, x_0 \rangle$ — фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$.

Теорема

Если пространство X линейно-связно, то $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна $\pi_1(X, x_1)$ при любом выборе x_0 и x_1 .



Ветви функции

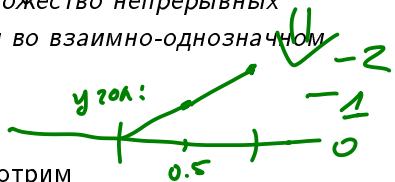


Теорема

Множество непрерывных отображений $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ и множество непрерывных функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(0) = 0$ и $f(1) \in \mathbb{Z}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Доказательство.

Рассмотрим некоторое отображение $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ и рассмотрим $\alpha(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. Заметим, что уравнение $\alpha(f(x)) = \varphi(\alpha(x))$ позволяет как выразить f по φ с точностью до прибавления целого значения, $\alpha^{-1}(t) \in [0, 1)$:



так и φ по f :

$$f(x) = \alpha^{-1}(\varphi(\alpha(x))) + C_1(x)$$

д. нотен биект.
с точн. го
 $\alpha(0) = \alpha(1)$

$$\varphi(a) = \alpha(f(\alpha^{-1}(a)))$$

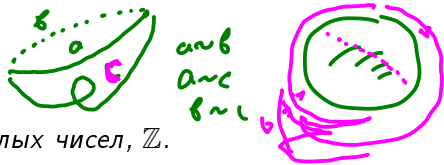
Однако, поскольку $f(0) = 0$ и функция непрерывна, мы можем доопределить $C_1(x)$ единственным образом.



Фундаментальная группа S^1

Теорема

Фундаментальная группа S^1 эквивалентна группе целых чисел, \mathbb{Z} .



Доказательство.

Возьмём петлю $\varphi(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. Тогда $\psi : S^1 \rightarrow S^1$ сопоставим петлю $\psi(\varphi(t))$.

По теореме выше каждому отображению $\psi : S^1 \rightarrow S^1$ можно сопоставить

➤ $f_\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда определим отображение группы петель на целые числа так:
 $|\psi| = f_\psi(1)$. Найдём $|\psi\xi|$:

$$f_{\psi\xi}(x) = \begin{cases} f_\psi(2x), & x < 0.5 \\ f_\xi(2x - 1) + f_\psi(1), & x \geq 0.5 \end{cases}$$

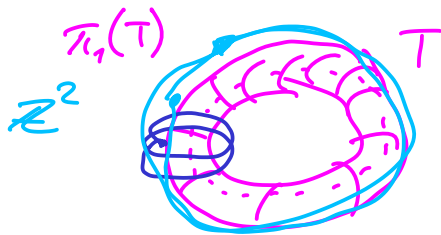
проверка
0 ир.
изом. гр.

Заметим, что $f_{\psi\xi}$ непрерывна и удовлетворяет граничным условиям,

$f_{\psi\xi}(x) = \alpha^{-1}(\psi\xi(\alpha(x))) + C(x)$. Такая функция единственна, значит, это функция, соответствующая $\psi\xi$. Поэтому $|\psi\xi| = |\psi| + |\xi|$. Значит, мы задали изоморфизм групп.



$$S^1 \not\sim [0, 1]$$



Теорема

Если $X \sim Y$, то $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.

Теорема

$$S^1 \not\sim [0, 1]$$

Доказательство.

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, однако $\pi_1([0, 1]) = \{0\}$, так как $[0, 1]$ стягиваемо.



Теорема

S^1 не односвязна.



Согл. о 4 ветках.



π_1 в Аренде

пр. б. о.
густ. с. н.

б. о. т. о. к. а.

$x \xrightarrow{idp} x = x$

```
\instance Aut {A : \1-Type} (a : A) : Group (a = a)
```

```
- | ide => idp
```

```
| * => *>
```

```
| ide-left => idp_*>
```

```
| ide-right _ => idp
```

```
| *-assoc => *>-assoc
```

```
| inverse => inv -одр. i
```

```
| inverse-left => inv_*>
```

```
| inverse-right => *>_inv
```

одр. б. о.

б. о. е.

$e x = x e = e$

б. о. одр.

$a \bar{a}' = \bar{a}' a = e$

```
\func pi1-1 (X : \1-Type) (x : X) => Aut x
```

```
\func pi1Mult {X : \1-Type} {x : X} (a b : pi1-1 X x) => a * b
```

Отображение намотывания

```
\data Sphere1
| base1
| loop : base1 = base1
\where \func ploop => path loop
```

назад нет

ед. нет

```
\func wind (x : Int) : base1 = base1
| pos 0 => idp
| pos (suc n) => wind (pos n) *> path loop
| neg (suc n) => wind (neg n) *> inv (path loop)
```

$\Sigma_{int} \rightarrow S'$

Trunc P

| idp x

| trunc p : x = y

```
\func code (x : Sphere1) : \Set0
| base1 => Int
| loop i => iso isuc ipred ipred_isuc isuc_ipred i
```

$S' \rightarrow Int$

```
\func encode (x : Sphere1) (p : base1 = x) : code x => transport code p 0
```

fun. 3m.

Аксиома унивалентности

Определение

изоморфизм.

$A \simeq B$, если найдутся $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$, $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$

Аксиома унивалентности: $(A \simeq B) \simeq (A = B)$

```
\func Equiv (A B : \Type) => \Sigma (f : A -> B)
                                     (g : B -> A)
                                     (\Pi (x : A) -> g (f x) = x)
                                     (\Pi (y : B) -> f (g y) = y)
```

легко из =
получить.

Из равенства легко получить эквивалентность:

```
\func equality=>equivalence (A B : \Type) (p : A = B) : Equiv A B =>
  transport (Equiv A) p (\lam x => x, \lam x => x, \lam x => idp, \lam x => idp)
```

Обратное же постулирует аксиома унивалентности:

```
\func equivalence=>equality (A B : \Type) (e : Equiv A B) : A = B =>
  path (iso e.1 e.2 e.3 e.4)
```

Доказательство $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Построим изоморфизм: $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$

```
\func encode_decode {x : Sphere1} (p : base1 = x) : decode x (encode x p) =  
  | idp => idp
```

```
\func encode_wind (x : Int) : encode base1 (wind x) = x  
  | ...
```

```
\func Loop_S1 : (base1 = base1) = Int =>  
  path (iso (encode base1) wind encode_decode encode_wind)
```

$f : S^1 \rightarrow \text{Int}$, $g : \text{Int} \rightarrow S^1$, причём $g(fx) = x$ и $f(gx) = x$.