Урок 3. Линейные преобразования

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, найти собственные векторы и собственные значения

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(-1-\lambda)(6-\lambda) - 2(-6) = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda - 6 + 12 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$D = b^2 - 4a \cdot c = 25 - 24 = 1,$

$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2$

$\lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3$; т.о. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

При $\lambda = \lambda_1 = 2$:

$\begin{cases} (-1-\lambda)x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda) \cdot x_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$

$\Big\{ x_1 = -2x_2$, при $x_2 = 1$, $x_1 = -2$

$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

При $\lambda = \lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \left\{ x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \right.$$

При $x_2 = 2$, $x_1 = -3$

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: собственные числа: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Собственные вектора:

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Дан оператор поворота на 180°

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Покажите, что любой вектор является для него собственным.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 + 2x + 1 = 0$$

$$D = b2 - 4a\cdot c = 4 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x = -x \\ -y = -y \end{cases}$$, т.е. при любых значения x и y равенство верное. Значит собственный вектор по сути любой вектор.

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$ установить, является ли вектор $x = (1,1)$ собственным вектором.

По определению вектор называется собственным, если при умножении на оператор получается тот же вектор с неким ненулевым коэффициентом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Т.о. вектор $(1,1)$ является собственным вектором.

Ответ: да, является.

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

установить, является ли вектор $x(3, -3, -4)$ собственным вектором этого оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-3) \\ 3\cdot(+3) \\ 3\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ или } -3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$ Т.О.

вектор $x(3, -3, -4)$ не является собственным вектором оператора A.