Урок 4. Часть 1.

1. Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

2. Проверить на совместность и чиесли сколько решений будет иметь СЛАУ.

a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & 4\frac{4}{7} & \frac{96}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 3 = n$$

$\Rightarrow$ система определена.

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

т.о.

$\mathrm{rank}\, A = 1, \quad \mathrm{rank}\, \tilde{A} = 3$

$\mathrm{rank}\, A < \mathrm{rank}\, \tilde{A} \Rightarrow$ система несовместна.

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 2$, но $< n$ (числа неизв.)

$\Rightarrow$ то система имеет бесконечное множество решений.

3. Проверить на совместность и вычислить сколько решений будет иметь СЛАУ:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{ранг} \tilde{A} = 4 = n$ $\Rightarrow$ система определена

$\operatorname{ранг} A = 4$

Проверим.

$$\begin{cases} 3a + 5b - 2c + 4d = 3, \\ 5b + d = 2, \\ c = 4 \\ d = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a - 8 + 8 = 3, & a = 1 \\ 5b + 2 = 2, & b = 0 \\ c = 4 \\ d = 2 \end{cases}$$

$a = 1, b = 0, c = 4, d = 2$ ч.т.д.

4. Дана система линейных уравнений

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right).$$

Найти соотношение м/у параметрами $a, b, c$, при к-ых система явл. несовместн.

Т.е. $\operatorname{ранг} A < \operatorname{ранг} \tilde{A}$.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & (c-7a)-2b+8a \end{array}\right)$$

Т.о. $\operatorname{ранг} A = 2 \Rightarrow$ система ~~не~~ несовмест.

при $\operatorname{ранг} \tilde{A} > 2 \Rightarrow$ при

$$(c-7a)-2b+8a \neq 0$$

$$a - 2b + c \neq 0$$ система несовместна.

Часть 2.

1. Решить СЛАУ методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \overset{-4}{-4\cdot 1} \overset{+\ 6}{-(-2)\cdot 3} = 2 \neq 0$$

=> система совместна.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = 2$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{26}{} + \overset{7}{} + \overset{10}{}$$

$$= 2\cdot(1+12) + (1+6) + 5(4-2) = 43 \neq 0$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10(\overset{130}{1+12}) + (\overset{1}{-2+3})$$

$$+ 5(\overset{-45}{-8-1}) = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$10 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(\overset{2}{\cancel{-2}}+3) - 10(\overset{-70}{\cancel{1}}+6) + 5(\overset{25}{\cancel{1}}+4) =$$

$$= \cancel{34}\ -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(\overset{18}{\cancel{1}}+8) + (\overset{5}{\cancel{1}}+4) +$$

$$10(\overset{20}{\cancel{4-2}}) = 43.$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{86}{43} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -\frac{43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{43}{43} = 1$$

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

2. Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$

$2\cdot$, $-$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim$

$3\cdot$, $-$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$\sim$

$4\cdot$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$ ; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$ ; $l_{21} = 2$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & 23 & 10 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$ ; $l_{31} = 3$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 16 & 23 & 10 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}$ ; $l_{41} = 4$

б)

$$\begin{array}{c} 2\cdot \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \qquad L_{21} = 2$$

$$\sim$$

$$\begin{array}{c} 3\cdot \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \qquad L_{31} = 3$$

$$\sim$$

$$\begin{array}{c} 4\cdot \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \qquad L_{41} = 4$$

$$\sim$$

$$\begin{array}{c} \\ 5\cdot \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \qquad L_{32} = 5$$

9

$$\begin{array}{c} \\ 5 \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ 6\cdot \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \quad L_{42} = 6$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 7\cdot \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \quad L_{43} = 7 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & 0 \\ 3 & 5 & 1 & \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{}{2} = 6$

3. Решить СЛАУ методом LU

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6, \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5. \end{cases}$$

Разложение на LU:

$$\frac{11}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad L_{21} = \frac{11}{2} \quad \sim \quad \frac{9}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -\frac{23}{2} \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \sim \qquad L_{22} = \frac{9}{2}$$

$$7^{|2} - \frac{11}{2} = \frac{3}{2}$$

$$5^{|2} - \frac{33}{2} = -\frac{23}{2}$$

$$\frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 7/2 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix} \quad 8^{|2} - \frac{9}{2} = \frac{7}{2} \qquad 4^{|2} - \frac{27}{2} = -\frac{19}{2}$$

$$L_{32} = \frac{7}{3} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{104}{6} \end{pmatrix}$$

$$\sim$$

$$-\frac{19}{2}^{|3} + \frac{23}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{161 - 57}{6} = \frac{104}{6}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{104}{6} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & 1 & 0 \\ 9/2 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решаем систему: $L \cdot y = b$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ \frac{11}{2} y_1 + y_2 = -6 \\ \frac{9}{2} y_1 + \frac{7}{3} y_2 + y_3 = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -\frac{12}{2} - \frac{11}{2} = -\frac{23}{2} \\ y_3 = -5 - \frac{9}{2} + \frac{161}{6} = \frac{52}{3} \end{cases}$$

$Ux = y$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ \frac{3}{2} x_2 - \frac{23}{2} x_3 = -\frac{23}{2} \\ \frac{104}{6} x_3 = \frac{52}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Проверка

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 0 + 3 = 1 \\ 11 \cdot (-1) + 0 + 5 = -6 \\ 9 \cdot (-1) + 0 + 4 = -5 \end{cases}$$ ч.т.д.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

4. Решить систему методом Холецкого.

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531, \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460, \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193. \end{cases}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 9$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{45}{9} = -5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5$$

10

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50-25} = 5$$

25

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} \cdot (a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-15-(-5)\cdot 5)$$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

13 $\frac{100}{5}$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38-25-4}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$L \cdot y = b$

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_3 + 3y_3 = 193 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = -33 \\ y_3 = -12 \end{cases}$$

$L^T \cdot x = y$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} 81 \cdot 6 - 45 \cdot (-5) + 45 \cdot (-4) = 531 \\ -45 \cdot 6 + 50 \cdot (-5) - 15(-4) = -460 \\ 45 \cdot 6 - 15(-5) + 38 \cdot (-4) = 193 \end{cases}$$ ч.т.д.

Ответ: $x_1 = 6,\ x_2 = -5,\ x_3 = -4$