1．写出下列复数的实部，虚部，模和幅角：

（1）$1+i\sqrt{3}$；（2）$1-\cos\alpha+i\sin\alpha$，$0\le\alpha<2\pi$；（3）$e^{i\sin x}$，x为实数；（4）e^{iz}；

（5）e^{z}；（6）$\sqrt[4]{-1}$；（7）$\sqrt{1+i}$；（8）$\sqrt{\dfrac{1+i}{1-i}}$；（9）e^{1+i}；（10）$e^{i\varphi(x)}$，$\varphi(x)$是实变数x的实函数。

（1）$\mathrm{Re}=1$，$\mathrm{Im}=\sqrt{3}$，$\mathrm{Am}=\sqrt{\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2}=2$，$\mathrm{Arg}=\arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)+2k\pi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$；

（2）$\mathrm{Re}=1-\cos\alpha$，$\mathrm{Im}=\sin\alpha$，$\mathrm{Am}=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2-2\cos\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$，

$\tan(\mathrm{Arg})=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\cot\dfrac{\alpha}{2}$，所以$\mathrm{Arg}=\dfrac{\pi-\alpha}{2}+2k\pi$；

（3）$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\sin x+2k\pi$，$\mathrm{Re}=\cos(\sin x)$，$\mathrm{Im}=\sin(\sin x)$；

（4）$z=x+iy$，$e^{iz}=e^{-y+ix}$，$\mathrm{Am}=e^{-y}$，$\mathrm{Arg}=x+2k\pi$，$\mathrm{Re}=e^{-y}\cos x$，$\mathrm{Im}=e^{-y}\sin x$；

（5）$\mathrm{Am}=e^{x}$，$\mathrm{Arg}=y+2k\pi$，$\mathrm{Re}=e^{x}\cos y$，$\mathrm{Im}=e^{x}\sin y$；

（6）$\sqrt[4]{-1}=\left[e^{i(\pi+2n\pi)}\right]^{\frac{1}{4}}=e^{i\frac{2n+1}{4}\pi}$，($n=0$，1，2，3)，$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\dfrac{2n+1}{4}\pi+2k\pi$，

$\mathrm{Re}=\cos\left(\dfrac{2n+1}{4}\pi\right)$，$\mathrm{Im}=\sin\left(\dfrac{2n+1}{4}\pi\right)$；

（7）$\sqrt{1+i}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)/2}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+n\pi\right)}$，($n=0$，1)，$\mathrm{Am}=\sqrt[4]{2}$，$\mathrm{Arg}=\dfrac{\pi}{8}+n\pi+2k\pi$，

$\mathrm{Re}=\sqrt[4]{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{8}+n\pi\right)=(-1)^n\sqrt[4]{2}\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\mathrm{Im}=(-1)^n\sqrt[4]{2}\sin\dfrac{\pi}{8}$；

（8）$\sqrt{\dfrac{1+i}{1-i}}=\left[\dfrac{\sqrt{2}e^{i(\pi/4+2n\pi)}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{i\frac{\pi/2+2n\pi}{2}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}$，($n=0$，1)，$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\dfrac{\pi}{4}+n\pi+2k\pi$，

$\mathrm{Re}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{Im}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2}}$；

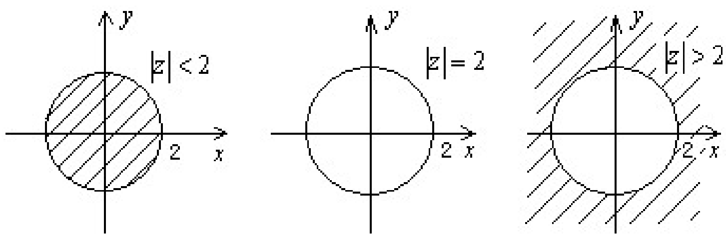
（9）$\mathrm{Am}=e$，$\mathrm{Arg}=1+2k\pi$，$\mathrm{Re}=e\cos 1$，$\mathrm{Im}=e\sin 1$；

（10）$\mathrm{Am}=1$，$\mathrm{Arg}=\varphi(x)+2k\pi$，$\mathrm{Re}=\cos[\varphi(x)]$，$\mathrm{Im}=\sin[\varphi(x)]$；

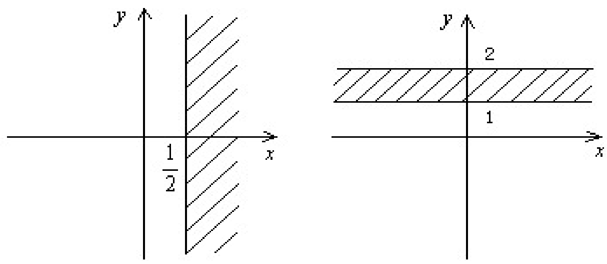
2．把下列关系用几何图形表示出来：

（1） $|z|<2$ ， $|z|=2$ ， $|z|>2$ ；（2） $\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$ ， $1<\mathrm{Im}\,z<2$ ；（3） $\arg(1-z)=0$ ， $\arg(1+z)=\frac{\pi}{3}$ ， $\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{2}$ ；（4） $0<\arg(1-z)<\frac{\pi}{4}$ ， $0<\arg(1+z)<\frac{\pi}{4}$ ， $\frac{\pi}{4}<\arg(z-1-2i)<\frac{\pi}{3}$ ；（5）$\alpha<\arg z<\beta$ 与 $\gamma<\mathrm{Re}\,z<\delta$ 的公共区域，α ，β ，γ ，δ 均为常数；（6） $|z-i|<1$ ，$1<|z-i|<\sqrt{2}$ ；（7） $|z-a|=|z-b|$ ， a ， b 为常数；（8） $|z-a|+|z-b|=c$ ，其中 a ， b ， c ，为常数，且 $c>|a-b|$ ；（9） $|z|+\mathrm{Re}\,z<1$ ；（10） $0<\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right)<\frac{\pi}{4}$ 。

（1）



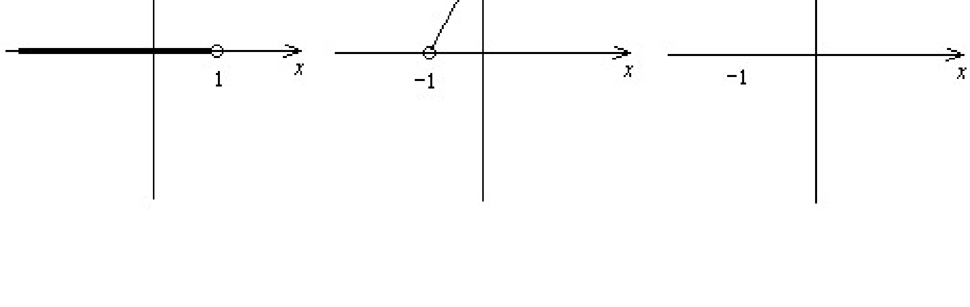
（2）



（3） $\arg(1-z)=\arg(1-x-iy)=0\Leftrightarrow 1-x>0$ 且 $y=0$ ，即 $x<1$ ， $y=0$ ；

$\arg(1+z)=\arg(1+x+iy)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 1+x>0$ 且 $y=\sqrt{3}(1+x)$ ；

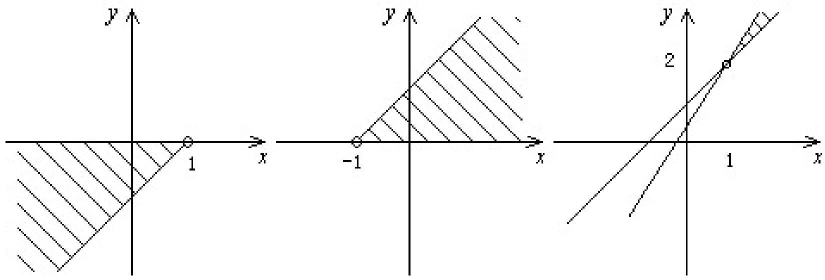
$\arg(z+1-i)=\arg\left[x+1+i(y-1)\right]=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x+1=0$ 且 $y-1>0$ 。



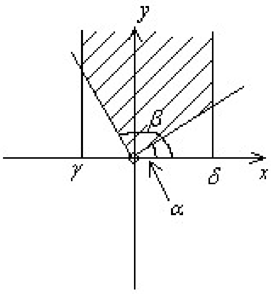
（4）$0<\arg(1-z)=\arg\left[(1-x)-iy\right]<\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0<-y<1-x$；

$0<\arg(1+z)=\arg\left[(1+x)+iy\right]<\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0<y<1+x$；

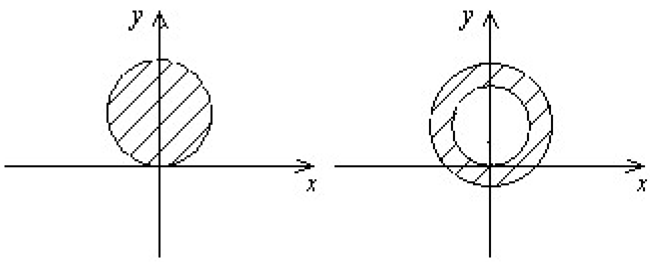
$\dfrac{\pi}{4}<\arg(z-1-2i)=\arg\left[(x-1)+i(y-2)\right]<\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow 0<x-1<y-2<\sqrt{3}(x-1)$；



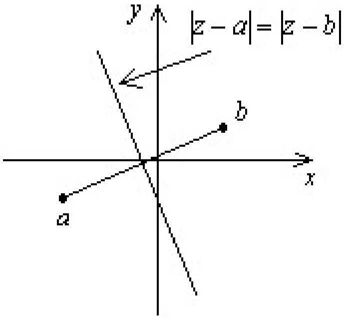
（5）



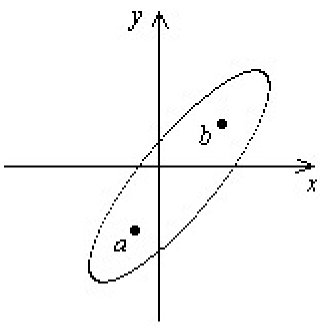
（6）



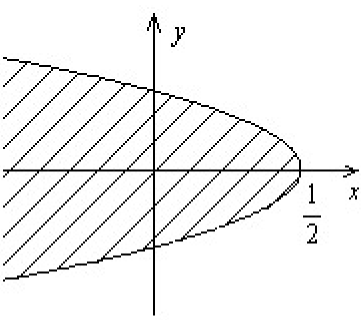
（7）



（8）

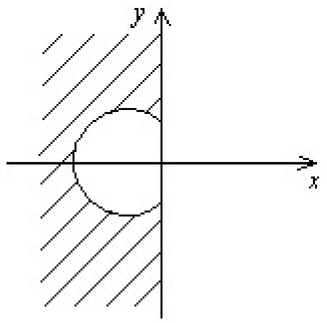


（9）$|z|+\operatorname{Re}z=\sqrt{x^2+y^2}+x<1$，化简得 $x<\dfrac{1}{2}\left(1-y^2\right)$。



（10）$\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}=\dfrac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+(y+1)^2}$，所以 $0<\arg\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)<\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow$

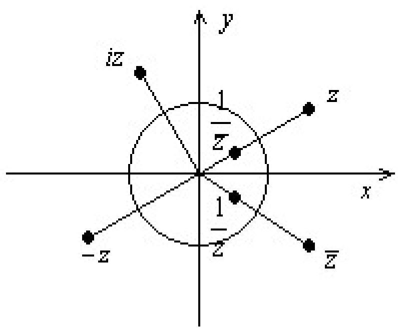
$0<-2x<x^2+y^2-1$，即 $x<0$ 且 $(x+1)^2+y^2>2$。



3．已知一复数 z，画出 iz，$-z$，$\overline{z}$，$\dfrac{1}{\overline{z}}$，$\dfrac{1}{z}$，并指出它们之间的几何关系。

把 z 写成 $\rho e^{i\varphi}$，则 $iz=\rho e^{i(\varphi+\pi/2)}$，即把 z 逆时针旋转 90 度。$-z=\rho e^{i(\varphi+\pi)}$，即把 z 逆时针旋转 180 度。$\overline{z}=\rho e^{-i\varphi}$，即 z 关于实轴的对称点。$\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{\rho}e^{i\varphi}$，即 z 关于单位圆的对称点。

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{\rho}e^{-i\varphi}$，即 $\overline{z}$ 关于单位圆的对称点。



4．若 $|z|=1$，试证明 $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$，$a$，$b$ 为任意复数。

$\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|^2=\dfrac{(az+b)(\overline{az}+\overline{b})}{(\overline{b}z+\overline{a})(b\overline{z}+a)}=\dfrac{|a|^2+a\overline{b}z+\overline{a}b\overline{z}+|b|^2}{|b|^2+a\overline{b}z+\overline{a}b\overline{z}+|a|^2}=1$，所以 $\left|\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right|=1$。

5．证明下列各式：

（1）$|z-1| \le ||z|-1| + |z||\arg z|$；

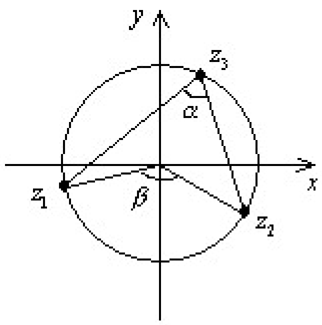
（2）若$|z_1| = |z_2| = |z_3|$，则$\arg\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z_2}{z_1}$。

（1）先证$\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right| \le |\arg z|$。

记$z=\rho e^{i\varphi}$，$\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right| = |e^{i\varphi}-1| = \sqrt{2-2\cos\varphi} = 2\left|\sin\dfrac{\varphi}{2}\right| \le |\varphi| = |\arg z|$。

$|z-1| = |z-|z|+|z|-1| \le |z-|z|| + ||z|-1| = ||z|-1| + |z|\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right| \le ||z|-1| + |z||\arg z|$。

（2）



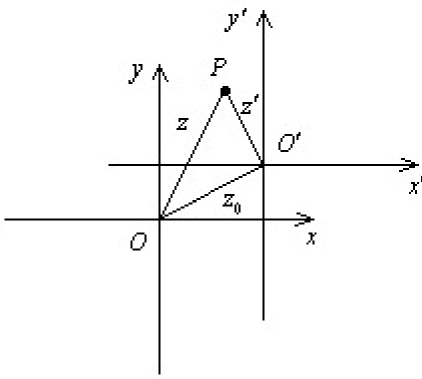
如图，z_1，z_2，z_3在同一圆周上，$\alpha = \arg\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$，$\beta = \arg\dfrac{z_2}{z_1}$。由于同弧所对圆周角是圆心角的一半，所以$\alpha = \dfrac{1}{2}\beta$，即$\arg\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z_2}{z_1}$。

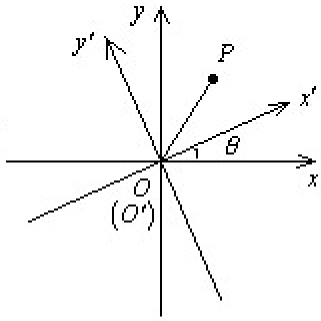
6．用复数z表示曲线上的变点。（1）写出经过点a且与复数b所代表的矢量平行的直线方程；（2）写出以d和$-d$为焦点，长轴长$2a$的椭圆方程（$a>|d|$）。

（1）矢量$z-a$与矢量b平行，所以$z-a=kb$，k为实数；

（2）由椭圆定义得$|z-d|+|z+d|=2a$。

7．用复数运算法则推出：（1）平面直角坐标平移公式；（2）平面直角坐标旋转公式。

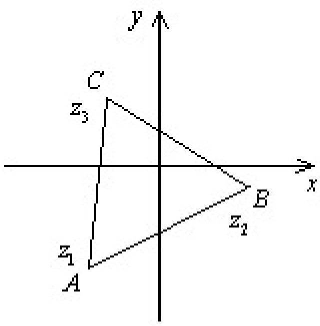




（1）设坐标系 $x'O'y'$ 的原点 O' 在坐标系 xOy 中的坐标是 $\left(x_0, y_0\right)$。P 点在 xOy 系中的坐标是 $\left(x, y\right)$，在 $x'O'y'$ 系中坐标 $\left(x', y'\right)$。如上面左图，令 $\overrightarrow{OP}=z$，$\overrightarrow{O'P}=z'$，$\overrightarrow{OO'}=z_0$。则 $z'=z-z_0$，即 $x'+iy'=x-x_0+i\left(y-y_0\right)$，由此得 $x'=x-x_0$，$y'=y-y_0$。

（2）将坐标系 xOy 绕原点逆时针旋转 θ 角得到坐标系 $x'O'y'$。如上面右图，$x'O'y'$ 系中 z' 只是比 xOy 系中 z 的幅角小 θ，即 $z'=ze^{-i\theta}$，由此得 $x'=x\cos\theta+y\sin\theta$，$y'=-x\sin\theta+y\cos\theta$。

8．设复数 z_1，z_2，z_3 满足 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$。证明：$\left|z_2-z_1\right|=\left|z_3-z_2\right|=\left|z_1-z_3\right|$。



如图，$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{|AB|}{|AC|}e^{i\angle A}$，$\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\dfrac{|AC|}{|BC|}e^{i\angle C}$。所以 $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{|AC|}{|BC|}$，$\angle A=\angle C$。

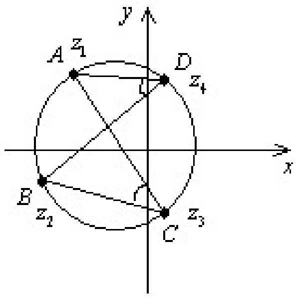
由 $\angle A=\angle C$ 可得 $|AB|=|BC|$，代入 $\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{|AC|}{|BC|}$ 可得 $|AB|=|BC|=|AC|$，即

$\left|z_2-z_1\right|=\left|z_3-z_2\right|=\left|z_1-z_3\right|$。

9．（1）给出 z_1, z_2, z_3 三点共线的充要条件；（2）给出 z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆的充要条件。

（1）若三点共线，则矢量 $z_1 - z_3$ 与矢量 $z_2 - z_3$ 平行，反之也成立。所以三点共线的充要条件是 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} =$ 实数。

（2）

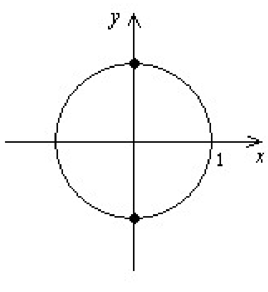


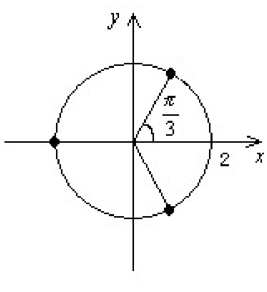
如图若四点共圆，则有 $\angle ACB = \angle ADB$（同弧所对圆周角相等）。反之也成立。写成复数形式即为 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\Big/\dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} =$ 实数。

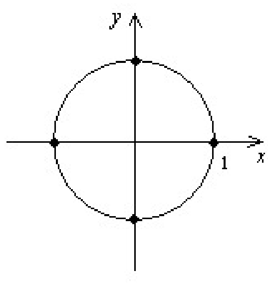
10．求下列方程的根，并在复平面上画出它们的位置。

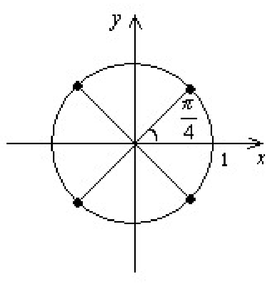
（1）$z^2 + 1 = 0$；（2）$z^3 + 8 = 0$；（3）$z^4 - 1 = 0$；（4）$z^4 + 1 = 0$；（5）$z^{2n} + 1 = 0$，n 为正整数；（6）$z^2 + 2z\cos\lambda + 1 = 0$，$0 < \lambda < \pi$。

（1）$z = \pm i$；　　（2）$z = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}, -2$；　　（3）$z = \pm 1, \pm i$；　　（4）$z = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$；



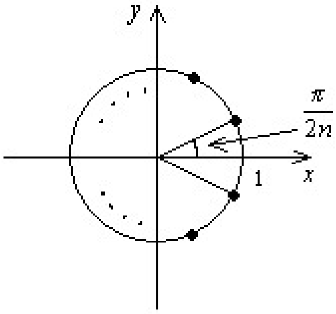


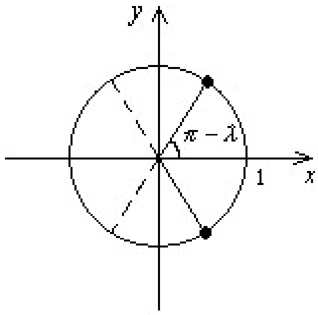




（5）$z = e^{i(\pi + 2k\pi)/2n}$，$k = 0, 1, \cdots, 2n-1$；

（6）$z = -e^{\pm i\lambda}$。





11．设 $z=p+iq$ 是实系数方程 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0$ 的根，证明 $\overline{z}=p-iq$ 也是此方程的根。

对方程两边取共轭得 $a_0+a_1\overline{z}+a_2\overline{z}^2+\cdots+a_n\overline{z}^n=0$，即 $\overline{z}$ 也满足此方程。

12．证明：$\sin^4\varphi=\dfrac{1}{8}\left(\cos 4\varphi-4\cos 2\varphi+3\right)$。

$$e^{4i\varphi}-4e^{2i\varphi}+3=e^{4i\varphi}-1+4\left(1-e^{2i\varphi}\right)=e^{2i\varphi}\left(e^{2i\varphi}-e^{-2i\varphi}\right)-4e^{i\varphi}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)$$

$$=2ie^{2i\varphi}\sin 2\varphi-8ie^{i\varphi}\sin\varphi=2i\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right)\sin 2\varphi-8i\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\sin\varphi$$

$$=8\sin^4\varphi+i\left(\sin 4\varphi-4\sin 2\varphi\right)$$

取等式两边实部即得证。

13．把 $\sin n\varphi$ 和 $\cos n\varphi$ 用 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 表示出来。

$$\cos n\varphi+i\sin n\varphi=\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!i^k}{k!\left(n-k\right)!}\cos^{n-k}\varphi\sin^k\varphi$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\left(-1\right)^k\frac{n!}{\left(2k\right)!\left(n-2k\right)!}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi$$

$$+i\sum_{k=0}^{\left[(n-1)/2\right]}\left(-1\right)^k\frac{n!}{\left(2k+1\right)!\left(n-2k-1\right)!}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi$$

比较两边实部和虚部得：

$$\cos n\varphi=\sum_{k=0}^{[n/2]}\left(-1\right)^k\frac{n!}{\left(2k\right)!\left(n-2k\right)!}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi\text{；}$$

$$\sin n\varphi=\sum_{k=0}^{\left[(n-1)/2\right]}\left(-1\right)^k\frac{n!}{\left(2k+1\right)!\left(n-2k-1\right)!}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi\text{。}$$

14．将下列和式表示成有限形式：（1）$\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi$；（2）$\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi$。

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ik\varphi}=e^{i\varphi}\frac{1-e^{in\varphi}}{1-e^{i\varphi}}=e^{i\varphi}\frac{e^{i\frac{n\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{n\varphi}{2}}-e^{-i\frac{n\varphi}{2}}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)}=e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

比较两边实部和虚部得：

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}，\quad \sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}。$$

15．证明：$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$。

记$1,z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$为方程$z^n=1$的n个根，即$z_k=e^{i\frac{2k}{n}\pi}$，$k=1,2,\cdots,n-1$。则有

$z^n-1=(z-1)(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})$，

所以$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})=\frac{z^n-1}{z-1}=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1$。

令上式两边$z=1$，则有$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i\frac{2k}{n}\pi}\right)=n$。

$$1-e^{i\frac{2k}{n}\pi}=-e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)=-2ie^{i\frac{k\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{k\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i\frac{2k}{n}\pi}\right)=2^{n-1}e^{-i\frac{n-1}{2}\pi+i\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n，\text{即}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}。$$

16．求下列序列$\{a_n\}$的聚点和极限，如果是实数序列，则同时求出上下极限。

（1）$a_n=(-1)^n\frac{n}{2n+1}$；（2）$a_n=(-1)^n\frac{1}{2n+1}$；（3）$a_n=n+(-1)^n(2n+1)i$；

（4）$a_n=2n+1+(-1)^n ni$；（5）$a_n=\left(1+\frac{i}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{6}$；（6）$a_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cos\frac{n\pi}{3}$。

（1）聚点±1/2，极限无，上极限 1/2，下极限-1/2；
（2）聚点 0，极限 0，上下极限 0；
（3）聚点∞，极限∞；
（4）聚点∞，极限∞；
（5）聚点 0，±1/2，±$\sqrt{3}$/2，±1，极限无；
（6）聚点±1/2，±1，极限无，上极限 1，下极限-1。

17．证明序列 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 极限存在。

先证 $\frac{x}{x+1} \le \ln(1+x) \le x$，其中 $x \ge 0$。

令 $f(x)=\ln(1+x)-x$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\le 0$，所以 $f(x)\le f(0)=0$，不等式右半部分得证，同样可证左半部分。

由此可得 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$，即 a_n 是递减序列。

由 $\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 得 $a_n>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$

$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

即 a_n 是递减有下界序列，所以极限存在。

18．证明 Lagrange 恒等式：$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)-\sum_{k<j}\left|z_k\overline{w}_j-z_j\overline{w}_k\right|^2$。

$$\begin{aligned}
\text{右边}&=\sum_{k,j}|z_k|^2|w_j|^2-\sum_{k<j}\left(z_k\overline{w}_j-z_j\overline{w}_k\right)\left(\overline{z}_k w_j-\overline{z}_j w_k\right)\\
&=\sum_{k,j}|z_k|^2|w_j|^2-\sum_{k<j}|z_k|^2|w_j|^2-\sum_{k<j}|z_j|^2|w_k|^2+\sum_{k<j}z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j+\sum_{k<j}z_j\overline{z}_k w_k\overline{w}_k\\
&=\sum_{k,j}|z_k|^2|w_j|^2-\sum_{k\ne j}|z_k|^2|w_j|^2+\sum_{k\ne j}z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j\\
&=\sum_{k}|z_k|^2|w_k|^2+\sum_{k\ne j}z_k\overline{z}_j w_k\overline{w}_j=\sum_k z_k w_k\sum_j\overline{z_j w_j}\\
&=\sum_k z_k w_k\overline{\sum_k z_k w_k}=\left|\sum_{k=1}^{n}z_k w_k\right|^2=\text{左边。}
\end{aligned}$$

19．试证明：从条件$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$可以导出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=A$。又当$A=\infty$时上述结论还正确吗？

由$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$知对于任意的$\varepsilon>0$，存在整数$N_1$，使得当$n>N_1$时有$\left|z_n-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

对于给定的N_1，存在N_2，使得$\dfrac{\left|z_1-A\right|+\left|z_2-A\right|+\cdots+\left|z_{N_1}-A\right|}{N_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$。当$n>N=\max\left(N_1,N_2\right)$

时，
$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}-A\right| &= \frac{1}{n}\left|\left(z_1-A\right)+\left(z_2-A\right)+\cdots+\left(z_n-A\right)\right| \\ &\le \frac{1}{n}\left(\left|z_1-A\right|+\left|z_2-A\right|+\cdots+\left|z_{N_1}-A\right|\right)+\frac{1}{n}\left(\left|z_{N_1+1}-A\right|+\left|z_{N_1+2}-A\right|+\cdots+\left|z_n-A\right|\right) \\ &< \frac{\left|z_1-A\right|+\left|z_2-A\right|+\cdots+\left|z_{N_1}-A\right|}{N_2}+\frac{1}{n-N_1}\left(\left|z_{N_1+1}-A\right|+\left|z_{N_1+2}-A\right|+\cdots+\left|z_n-A\right|\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n-N_1}\left(n-N_1\right)\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=A$。

20．设 $z=x+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，$c=a+ib$，并且已知 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，证明 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$ 等价。

由于 $|f-c|=|(u-a)+i(v-b)|$，所以 $|u-a|(\text{或}|v-b|)\le|f-c|\le|u-a|+|v-b|$。

若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$，对于任意的 $\varepsilon>0$，则存在 δ，当 $|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，就有 $|u-a|(\text{或}|v-b|)\le|f-c|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$。

同样的，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$，就有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$。

21．证明：$f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$ 在单位圆 $|z|<1$ 内连续但不一致连续。

易证 $f(z)$ 连续（初等函数）。下面证 $f(z)$ 在单位圆内不一致连续。

定义在 D 上的函数 $f(z)$ 在 D 上一致连续的充要条件：任意的 $\{x_n\}\subset D$，$\{y_n\}\subset D$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(x_n)-f(y_n)\right]=0$

令 $x_n=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$，$y_n=\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}$，则 $x_n-y_n=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}}\to 0$，

$f(x_n)-f(y_n)=\dfrac{n}{2}\to\infty$。所以 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内不一致连续。

22．证明下列函数在 $z=0$ 点连续：

（1）$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\left[\mathrm{Re}\left(z^2\right)\right]^2}{z^2}, z\ne 0\\ 0, z=0\end{cases}$，　　（2）$f(z)=|z|$。

（1）在 $z\ne 0$ 处，$|f(z)|=\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^2}{\left|x^2-y^2+2ixy\right|}\le\dfrac{\left(x^2-y^2\right)^2}{\left|x^2-y^2\right|}=\left|x^2-y^2\right|$，

$\lim\limits_{z\to 0}|f(z)|=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|x^2-y^2\right|=0$，即 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=f(0)$，所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 点连续。

（2）$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0)$。

23．判断下列函数在何处可导（并求出导数），在何处解析：

（1）$|z|$；（2）$\overline{z}$；（3）z^m，$m=0,1,2,\cdots$；（4）e^z；（5）$\left(x^2+2y\right)+i\left(x^2+y^2\right)$；

（6）$(x-y)^2+2i(x+y)$；（7）$z\operatorname{Re} z$；（8）$1/z$；（9）$\cos z$；（10）$\operatorname{sh}z$。

由可导充分条件（25 题）判别：

（1）全平面不可导，不解析；

（2）全平面不可导，不解析；

（3）全平面可导，解析，$\left(z^m\right)'=mz^{m-1}$；

（4）全平面可导，解析，$\left(e^z\right)'=e^z$；

（5）除（-1，-1）点可导外，全平面其余处处不可导，全平面不解析；

（6）除 y=x-1 的线上处处可导外，其余点不可导，全平面不解析；

（7）z=0 点可导，$\left(z\operatorname{Re}z\right)'\Big|_{z=0}=0$，其余处处不可导，全平面不解析；

（8）除 z=0 点外在扩充全平面上可导，解析，$\left(1/z\right)'=-1/z^2$；

（9）全平面可导，解析，$\left(\cos z\right)'=-\sin z$；

（10）全平面可导，解析，$\left(\operatorname{sh}z\right)'=\operatorname{ch}z$。

24．证明极坐标下的 Cauchy-Riemann 条件：$\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}$，$\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$。

由变换关系 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi+\rho\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial\rho}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi+\rho\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi。$$

变换得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\cos\varphi-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\sin\varphi$，　　（1）

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi,\tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi,\tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi。\tag{4}$$

代入直角坐标的 C-R 方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 有

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi=\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi,\tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi=-\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi。\tag{6}$$

（5）$\times\cos\varphi+$（6）$\times\sin\varphi$ 得 $\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$，

（5）$\times\sin\varphi-$（6）$\times\cos\varphi$ 得 $\frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$。

25．证明：若函数 $f(z)$ 的偏导数在 $z=z_0$ 点连续，且满足 C-R 方程，则 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 点可导。

由 $f(z)$ 的偏导数在 $z=z_0$ 点连续可知 $u(x,y)$， $v(x,y)$ 在 $z=z_0$ 点可微，所以有

$$u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y+\varepsilon_1,$$

$$v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x+\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y+\varepsilon_2。$$

上面的 ε_1， ε_2 是 $|\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小。记 $a=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$，

$b=-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$，则以上两式写成

$$u(z_0+\Delta z)-u(z_0)-a\Delta x+b\Delta y=\varepsilon_1,$$

$v(z_0+\Delta z)-v(z_0)-b\Delta x-a\Delta y=\varepsilon_2$。

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-(a+ib)\right|=\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)-a\Delta z-ib\Delta z}{\Delta z}\right|$$

$$=\left|\frac{u(z_0+\Delta z)-u(z_0)-a\Delta x+b\Delta y+i\left[v(z_0+\Delta z)-v(z_0)-b\Delta x-a\Delta y\right]}{\Delta z}\right|$$

$$=\left|\frac{\varepsilon_1+i\varepsilon_2}{\Delta z}\right|\le\frac{|\varepsilon_1|}{|\Delta z|}+\frac{|\varepsilon_2|}{|\Delta z|}$$

当$\Delta z\to 0$时，$\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\to a+ib$，即 $f(z)$在$z=z_0$点可导。

26．设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4}, z\ne 0\\ 0, z=0\end{cases}$。（1）证明：当 $z\to 0$ 时，$\dfrac{f(z)}{z}$ 的极限不存在；（2）若 $u=\operatorname{Re} f(z)$，$v=\operatorname{Im} f(z)$，证明：$u(x,0)=x$，$v(0,y)=y$，$u(0,y)=v(x,0)=0$；（3）证明：u，v的偏导数存在，且C-R方程成立，但（1）中已证明 $f'(0)$不存在，这个结论和25题矛盾吗？

（1） $z\ne 0$ 时，$\dfrac{f(z)}{z}=\dfrac{z^4}{|z|^4}=\dfrac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+4ixy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$。在直线 $y=kx$ 上

$\dfrac{f(z)}{z}=\dfrac{(1-k^2)^2-4k^2+4ik(1-k^2)}{(1+k^2)^2}$，可见$z$沿不同直线趋于 0 将有不同极限值，所以

$\dfrac{f(z)}{z}$的极限不存在。

（2）$z\ne 0$时，$f(z)=\dfrac{x^5-10x^3y^2+5xy^4+i(5x^4y-10x^2y^3+y^5)}{(x^2+y^2)^2}$。

所以$u=\begin{cases}\dfrac{x^5-10x^3y^2+5xy^4}{(x^2+y^2)^2},(x,y)\ne 0\\ 0,(x,y)=0\end{cases}$，$v=\begin{cases}\dfrac{5x^4y-10x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2},(x,y)\ne 0\\ 0,(x,y)=0\end{cases}$。

容易看出$u(x,0)=x$，$v(0,y)=y$，$u(0,y)=v(x,0)=0$。

（3）仿（1）的方法，u，v 在 $z=0$ 处的偏导数不存在。

27．利用极坐标下的 C-R 方程（24 题）证明：$f'(z)=\dfrac{\rho}{z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+i\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}-i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$。

利用 24 题（1）（3）式，

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-i\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi$$

代入极坐标 C-R 方程，

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-i\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi$$

$$=\frac{\rho}{z}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\varphi+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi-i\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi\right)$$

$$=\frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)$$

再利用极坐标 C-R 方程有 $f'(z)=\dfrac{\rho}{z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+i\dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}-i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$。

28．设 $\rho=\rho(x,y)$，$\varphi=\varphi(x,y)$ 是实变量 x,y 的实函数。若 $f(z)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 是 $z=x+iy$ 的解析函数，证明：$\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$，$\dfrac{\partial \rho}{\partial y}=-\rho\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}。$$

由 C-R 方程可得：

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y},\qquad（1）$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi+\rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}。\qquad（2）$$

（1）$\times\cos\varphi+$（2）$\times\sin\varphi$ 得 $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$， （1）$\times\sin\varphi-$（2）$\times\cos\varphi$ 得 $\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=-\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$。

29．设 $r=r(\rho,\varphi)$，$\theta=\theta(\rho,\varphi)$ 是实变数 ρ,φ 的实函数。若 $f(z)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 解析，其中 $z=\rho e^{i\varphi}$，试证：$\dfrac{\partial r}{\partial\rho}=\dfrac{r}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$，$\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}=-\rho r\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$。

$\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{\partial r}{\partial\rho}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$，$\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$，

$\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{\partial r}{\partial\rho}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$，$\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$。

由极坐标 C-R 方程（24 题）得：

$$\frac{\partial r}{\partial\rho}\cos\theta-r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\theta+\frac{r}{\rho}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\text{，}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial\rho}\sin\theta+r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\theta+\frac{r}{\rho}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\text{。}\qquad(2)$$

（1）$\times\cos\varphi+$（2）$\times\sin\varphi$ 得 $\dfrac{\partial r}{\partial\rho}=\dfrac{r}{\rho}\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}$，

（2）$\times\sin\varphi-$（1）$\times\cos\varphi$ 得 $\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}=-\rho r\dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}$。

30．若函数 $f(z)=u+iv$ 在 G 内解析，且 $f(z)\neq$ 常数，试讨论下列函数是否也是 G 内的解析函数：（1）$u-iv$；（2）$-u-iv$；（3）$-v+iu$；（4）$v+iu$。

由 C-R 方程判断，（2）（3）解析，（1）（4）不解析。

31．设 $z=x+iy$，已知解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部或虚部如下，试求其导数 $f'(z)$：（1）$u=e^{-y}\cos x$；（2）$u=\operatorname{ch}x\cos y$；（3）$v=\sin x\operatorname{sh}y$；（4）$v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；（5）$u=\ln\left(x^2+y^2\right)$；（6）$v=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$。

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^{-y}\sin x$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-y}\cos x$，

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}(-\sin x+i\cos x)=ie^{-y+ix}=ie^{iz}$；

（2） $f'(z)=\operatorname{sh} z$；（3） $f'(z)=\sin z$；（4） $f'(z)=-\frac{i}{z^2}$；（5） $f'(z)=\frac{2}{z}$；

（6） $f'(z)=3(2+i)z^2$。

32．根据下列条件确定解析函数 $f(z)=u+iv$。

（1） $u=x+y$；（2） $u=\sin x\operatorname{ch} y$；（3） $v=\frac{x}{x^2+y^2}$；（4） $v=\arctan\frac{y}{x}$。

（1） $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=d(y-x)$，所以 $v=y-x+C$（C 为实常数），

$f=u+iv=(1-i)x+(1+i)y+iC=(1-i)z+iC$；

（2） $f=\sin z+iC$；（3） $f=\frac{i}{z}+C$；（4） $f=\ln z+C$。

33．若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，且 $u(x,y)-v(x,y)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$，求 $f(z)$。

由已知可得 $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=x^2+4xy+y^2+(x-y)(2x+4y)$，

$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(4x+2y)$，

再由 C-R 方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$。由以上四式可解出：

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=6xy$， $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=3(x^2-y^2)$。

解出 $u=3x^2y-y^3+C_1$， $v=3xy^2-x^3+C_2$，由已知条件可确定 $C_1=C_2=C$。

$f(z)=u+iv=3x^2y-y^3+i(3xy^2-x^3)+(1+i)C=iz^3+(1+i)C$

34．若 $u(x,y)$ 具有连续三阶偏导数，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，证明函数 $\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ 解析。

令$U=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$V=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$，则$\dfrac{\partial U}{\partial x}-\dfrac{\partial V}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=0$，即该函数满足 C-R 方程，所以解析。

35．如果$u(x,y)$和$v(x,y)$都是调和函数，讨论下列函数是否也是调和函数：

（1）$U=u\left[v(x,y),0\right]$；（2）$U=u\left[0,v(x,y)\right]$；（3）$U=u(x,y)v(x,y)$；

（4）$U=u(x,y)+v(x,y)$。

（1）$\dfrac{\partial U}{\partial x}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v,0)}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，　$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v,0)}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v,0)}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，

$\dfrac{\partial U}{\partial y}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v,0)}\dfrac{\partial v}{\partial y}$，　$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v,0)}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v,0)}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}&=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v,0)}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(v,0)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\&=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(v,0)}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

上式右边一般不等于 0，所以不是调和函数。

（2）$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(0,v)}\left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$，不是调和函数。

（3）$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}v+2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+u\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}v+2\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+u\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$，不是调和函数。

（4）$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$，是调和函数。

36．假设函数$f(z)$在区域 G 内任意一点都满足$f'(z)=0$，证明$f(z)$在 G 内为常数。

$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，所以$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，即$u$，$v$都是常数，$f(z)$为常数。

37．若 $f(z)$ 在区域 G 内解析，且 $\operatorname{Im} f(z)=0$，证明 $f(z)$ 在 G 内为常数。

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$，所以 u 为常数，又 $v=0$，所以 $f(z)$ 在 G 内为常数。

38．若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 G 内解析，且 $au+bv=c$，其中 a,b,c 是不为 0 的实常数，证明 $f(z)$ 在 G 内为常数。如果 a,b,c 是不为 0 的复常数，结论还成立吗？

由已知可得 $a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0$，$a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0$，代入 C-R 方程，

$a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}=0$，$a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial x}=0$，两式消去 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 得 $\left(a^2+b^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0$，由于 a,b 为实数，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$。同样可得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，所以 $f(z)$ 为常数。如果 a,b,c 是复数，结论不成立。

39．若 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $z=a$ 点解析，且 $f(a)=g(a)=0$，而 $g'(a)\neq 0$，试证：

$\lim\limits_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$。

$\lim\limits_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\Big/\frac{g(z)-g(a)}{z-a}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$。

40．设 z 沿着从原点出发的射线运动，其模无限增大，试讨论函数 e^z 的变化趋势。

$e^z=e^x e^{iy}$，若 $x>0$（即 $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$），$e^z\to\infty$。

若 $x<0$（即 $\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$），$e^z\to 0$。

若 $x=0$（即 $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$），e^z 的实部虚部在 $[-1,1]$ 之间振荡。

41．证明下列公式：

（1）$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$；

（2）$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$；

（3）$\operatorname{sh} z = -i \sin iz$；

（4）$\operatorname{ch} z = \cos iz$；

（5）$\cos^{-1} z = -i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$；

（6）$\tan^{-1} z = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{1+iz}{1-iz}$；

（7）$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$；

（8）$1 - \operatorname{th}^2 z = \operatorname{sech}^2 z$。

（1）$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 = \dfrac{\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)}{4i}$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2)$$

同样得，$\sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 = \sin(z_1 - z_2)$

（2）$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \dfrac{\left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)}{4}$

$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2)$$

同样得，$\cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2 = \cos(z_1 - z_2)$

（3）$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}}{2} = -i \dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = -i \sin iz$

（4）$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}}{2} = \cos iz$

（5）令 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$，则 $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$，解出 $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$，

所以 $\cos^{-1} z = w = -i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

（6）令 $z = \tan w = -i \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$，解出 $e^{2iw} = \dfrac{1+iz}{1-iz}$。所以 $\tan^{-1} z = w = \dfrac{1}{2i} \ln \dfrac{1+iz}{1-iz}$

（7）$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=\dfrac{\left(e^z+e^{-z}\right)^2-\left(e^z-e^{-z}\right)^2}{4}=1$

（8）$1-\operatorname{th}^2 z=1-\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\right)^2=\dfrac{4}{\left(e^z+e^{-z}\right)^2}=\operatorname{sech}^2 z$

42．证明下列公式：（1）$(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$；（2）$(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z$；

（3）$(\operatorname{th} z)'=\operatorname{sech}^2 z$；（4）$(\operatorname{cth} z)'=-\operatorname{csch}^2 z$

（1）$(\operatorname{sh} z)'=\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}\right)'=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}=\operatorname{ch} z$

（2）$(\operatorname{ch} z)'=\left(\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}\right)'=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}=\operatorname{sh} z$

（3）$(\operatorname{th} z)'=\left(\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}\right)'=\dfrac{\left(e^z+e^{-z}\right)^2-\left(e^z-e^{-z}\right)^2}{\left(e^z+e^{-z}\right)^2}=\left(\dfrac{2}{e^z+e^{-z}}\right)^2=\operatorname{sech}^2 z$

（4）$(\operatorname{cth} z)'=\left(\dfrac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}\right)'=\dfrac{\left(e^z-e^{-z}\right)^2-\left(e^z+e^{-z}\right)^2}{\left(e^z-e^{-z}\right)^2}=-\left(\dfrac{2}{e^z-e^{-z}}\right)^2=-\operatorname{csch}^2 z$

43．证明下列不等式：（1）$|\operatorname{sh} y|\le|\sin(x+iy)|\le\operatorname{ch} y$；

（2）$|\operatorname{sh} y|\le|\cos(x+iy)|\le\operatorname{ch} y$。

（1）$\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$，

所以$|\sin(x+iy)|=\sqrt{\sin^2 x\operatorname{ch}^2 y+\cos^2 x\operatorname{sh}^2 y}$。

代入$\operatorname{ch}^2 y=1+\operatorname{sh}^2 y$得$|\sin(x+iy)|=\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}\ge\operatorname{sh} y$，

代入$\operatorname{sh}^2 y=\operatorname{ch}^2 y-1$得$|\sin(x+iy)|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-\cos^2 x}\le\operatorname{ch} y$。不等式得证。

（2）同（1）。

44．解下列方程：（1）$\operatorname{sh} z=0$；（2）$2\operatorname{ch}^2 z-3\operatorname{ch} z+1=0$；（3）$\sin^2 z-\dfrac{5}{2}\sin z+1=0$；

（4） $\tan z = i$ 。

（1） $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0$ ，即 $e^{2z} = 1 = e^{i2k\pi}$ ，所以 $z = ik\pi$ ，（ $k = 0, \pm1, \pm2\cdots$ ）；

（2）解得 $\operatorname{ch} z$ =1 或 1/2，即 $e^{2z} = 1 = e^{i2k\pi}$ 或 $e^z = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i(\pm\pi/3 + 2k\pi)}$ ，所以 $z = ik\pi$ ，

$i\left(\pm\pi/3 + 2k\pi\right)$ ，（ $k = 0, \pm1, \pm2\cdots$ ）；

（3） $z = \pi/6 + 2k\pi$ ， $5\pi/6 + 2k\pi$ ， $\pi/2 - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi$ ，（ $k = 0, \pm1, \pm2\cdots$ ）；

（4）无解。

46．扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 经变换 $w = z^3$ 后边成什么区域？（上半平面）

47．试证：圆 $A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0$ 经变换 $w = \dfrac{1}{z}$ 后仍为圆，并讨论 $A = 0$ 及 $D = 0$ 的情况。

由于 $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\overline{z}$ ， $x = \dfrac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$ ， $y = \dfrac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right)$ ，圆方程可写为

$Az\overline{z} + \dfrac{1}{2}\left(B - iC\right)z + \dfrac{1}{2}\left(B + iC\right)\overline{z} + D = 0$ 。令 $E = \dfrac{1}{2}\left(B + iC\right)$ ，则方程写成

$Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0$ ，这就是圆的标准方程。代入 $z = 1/w$ ，得到

$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0$ ，仍是圆方程。

$A = 0$ 时，将直线变换为圆， $D = 0$ 时，将圆变换成直线。

48． $w = e^{iz}$ 把实轴上线段 $0 \le x < 2\pi$ 变为什么图形？

由 $y = 0$ 得 $w = e^{ix}$ ，所以 $|w| = 1$ 。 $0 \le x < 2\pi$ 即是 $0 \le \arg w < 2\pi$ ，所以变为单位圆。

49．双组线 $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ 经变换 $w = z^2$ 后变为什么图形？

令 $z = \rho e^{i\varphi}$ ，则 $w = \rho^2 e^{2i\varphi}$ 。令 $w = re^{i\theta}$ ，则 $\theta = 2\varphi$ ， $r = \rho^2 = 2a^2\cos\theta$ ，即变换为圆。

50．证明： $w = -i\dfrac{z-1}{z+1}$ 将直线 $y = ax$ 变为圆。

直线方程写为 $\bar{A}z+A\bar{z}=0$，其中 $A=\frac{1}{2}(a-i)$。代入 $z=\frac{1+iw}{1-iw}$ 得

$aw\bar{w}+w+\bar{w}-a=0$，即为圆方程。

51．证明：在变换 $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ 下，z 平面上以原点为圆心，e^{β}（$\beta>0$）为半径的圆变为 w 平面上的椭圆，焦点为 $\pm i$，长短半轴分别为 $\mathrm{ch}\,\beta$ 及 $\mathrm{sh}\,\beta$。

令 $z=\rho e^{i\varphi}$，则圆方程为 $\rho=e^{\beta}$。

$$
\begin{aligned}
w&=\frac{1}{2}\left(e^{\beta}e^{i\varphi}-e^{-\beta}e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left[e^{\beta}\cos\varphi+ie^{\beta}\sin\varphi-e^{-\beta}\cos\varphi+ie^{-\beta}\sin\varphi\right]\\
&=\mathrm{sh}\,\beta\cos\varphi+i\,\mathrm{ch}\,\beta\sin\varphi
\end{aligned}
$$

令 $w=x+iy$，则 $x=\mathrm{sh}\,\beta\cos\varphi$，$y=\mathrm{ch}\,\beta\sin\varphi$，消去 φ 得 $\frac{x^2}{\mathrm{sh}^2\beta}+\frac{y^2}{\mathrm{ch}^2\beta}=1$，即以 $\pm i$ 为焦点，$\mathrm{ch}\,\beta$ 及 $\mathrm{sh}\,\beta$ 为长短半轴的椭圆。

52. 设 $w=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，且 $\frac{dw}{dz}\neq 0$，试证曲线族 $u(x,y)=C_1$，$v(x,y)=C_2$（C_1，C_2 为任意实常数）互相正交。

设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 为过点 (x,y) 的两曲线在该点的法向量，即 $\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，$\boldsymbol{n}_2=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right)$。

则 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=0$，即两曲线正交。

53．判断下列函数是单值的还是多值的：

（1）$z+\sqrt{z-1}$；（2）$\dfrac{1}{1+\ln z}$；（3）$\sqrt{\cos z}$；（4）$\ln\sin z$；（5）$\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；（6）$\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$。

明显（1）~（4）都是多值函数。

用 $\pm w$ 表示 z 的两个平方根，即 $\sqrt{z}=w$ 或 $-w$。取 $\sqrt{z}=w$，则 $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\dfrac{\cos w}{w}$，取 $\sqrt{z}=-w$，则 $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\dfrac{\cos(-w)}{-w}=-\dfrac{\cos w}{w}$，即 $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ 为多值函数，同样可得，$\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ 为单值函数。

54．找出下列函数的枝点，并讨论 z 绕各个枝点移动一周回到原处函数值的变化。若同时绕两个，三个枝点，又会出现怎样的情况？

（1）$\sqrt{1-z^3}$；（2）$z+\sqrt{z^2-1}$；（3）$\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$；（4）$\dfrac{1}{1+\ln z}$；（5）$\dfrac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；

（6）$\sqrt[3]{z^2-4}$；（7）$\sqrt[3]{z^2(z+1)}$；（8）$\ln\left(z^2+1\right)$。

（1）$w=\sqrt{1-z^3}=\sqrt{(1-z)\left(z-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)}$，当 z 逆时针绕 1 点一圈（不包围 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 和 $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$）回到原处，因子 $\sqrt{1-z}$ 顺时针绕 0 点旋转 π，另外两个因子 $\sqrt{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ 和 $\sqrt{z-e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$ 不变，故 w 顺时针绕 0 点旋转 π。当 z 逆时针绕 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$（或 $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$）点一圈（不包围另外两点）回到原处，w 逆时针绕 0 点旋转 π。所以 1，$e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$ 为枝点。若 z 逆时针绕 1 和 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 两点一圈（不包围 $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$）回到原处，w 不变，同样的，z 逆时针绕任意两个枝点一圈（不包围另一个枝点）回到原处，w 都不变。若 z 逆时针绕这三个枝点一圈回到原处，w 顺时针绕 0 点旋转 π，所以 ∞ 也是枝点。

（2）枝点是 ±1；

（3）枝点是 a，b（z 绕 b 逆时针一圈回到原处，因子 $\dfrac{1}{\sqrt{z-b}}$ 顺时针绕 0 点旋转 π）；

（4）枝点是 0，∞；

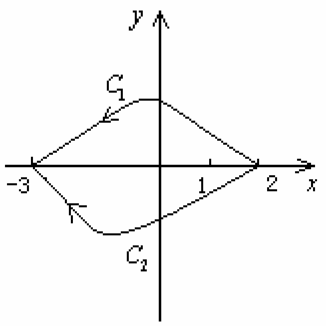
（5）枝点是 0，∞；

（6）枝点是 ±2，∞；

（7）枝点是 0，-1；

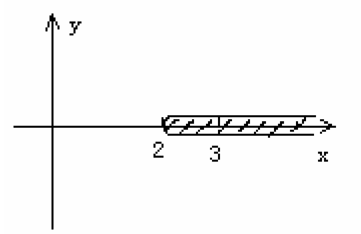
（8）枝点是 $\pm$i，∞；

55．函数 $w=z+\sqrt{z-1}$，规定 $w(2)=1$，是分别求当 z 沿着图中的 C_1 和 C_2 连续变化时 $w(-3)$ 之值。



若规定 $z=2$ 处 $\arg(z-1)=2\pi$，则有 $w(2)=1$。z 沿 C_1 连续变化到-3 时，$\arg(z-1)=3\pi$，所以 $w(-3)=-3+\sqrt{4}e^{i\frac{3\pi}{2}}=-3-2i$。沿 C_2 有 $w(-3)=-3+2i$。

56．规定函数 $w=z\sqrt[3]{z-2}$ 在下图割线上岸的幅角为 0，试求该函数在割线下岸 $z=3$ 处的数值，又问，这个函数有几个单值分枝：求出在其他分枝中割线下岸 $z=3$ 处的函数值。



$z-2$ 在割线上岸幅角为 0，下岸为 2π，所以 $w(3)=3e^{i\frac{2\pi}{3}}$。

有三个单值分枝。规定割线上岸幅角为 2π，则下岸为 4π，$w(3)=3e^{i\frac{4\pi}{3}}$，

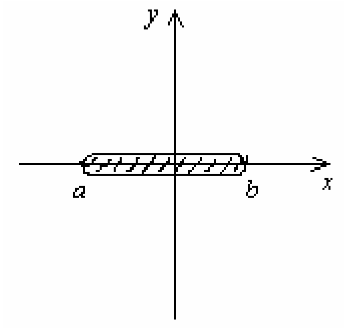
规定割线上岸幅角为 4π，则下岸为 6π，$w(3)=3$。

57．函数 $w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 的割线有多少种可能的做法？试在两种不同做法下讨论单值分枝的规定。设 a,b 为实数，且 $a\neq b$。

a,b 为枝点，连接 a,b 的任意线段都可作为割线，所以有无穷种做法。

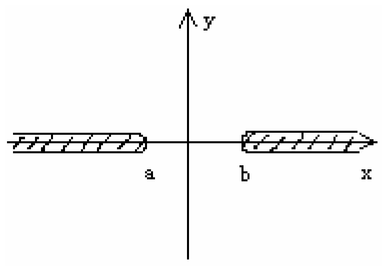
其中两种做法：

（1）



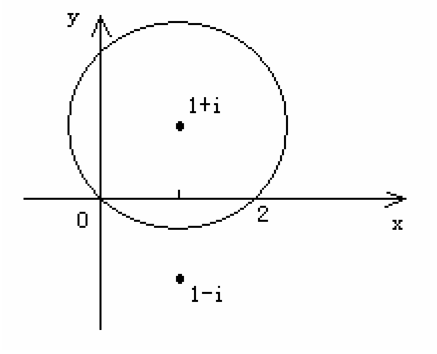
规定割线上岸 $\arg(z-a)+\arg(z-b)=\pi$ 和 3π 可得两个单枝分枝。

（2）



可规定正实轴割线上岸 $\arg(z-a)+\arg(z-b)$ 分别为 0，2π 。

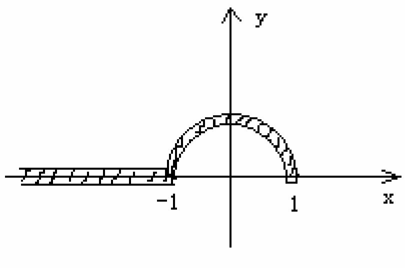
58．规定函数 $w=\sqrt{z^2-2z+2}$， $w(0)=\sqrt{2}$ 。求当 z 由原点出发沿圆 $\left|z-(1+i)\right|=\sqrt{2}$ 逆时针方向通过 x 轴时的函数值。又当 z 回到原点时函数之值如何？



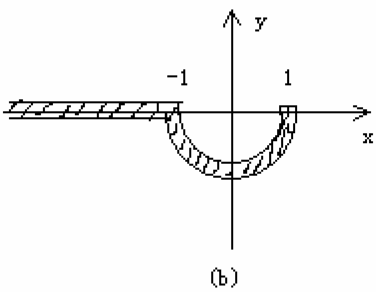
$w=\sqrt{\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)}$ 。只要规定 $z=0$ 时 $\arg\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)=-\dfrac{3\pi}{4}$，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$ 就有 $w(0)=\sqrt{2}$ 。当 z 沿圆逆时针到达 $z=2$ 时，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$，所以 $w(2)=\sqrt{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\cdot\sqrt{2}e^{i\pi/4}}=\sqrt{2}$ 。当 z 回到原点时，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)=\dfrac{5\pi}{4}$，$\arg\left(z-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$，所以

$w(0)=\sqrt{\sqrt{2}e^{i5\pi/4}\cdot\sqrt{2}e^{i3\pi/4}}=\sqrt{2}e^{i\pi}=-\sqrt{2}$ 。

59．函数 $w=\ln\left(1-z^2\right)$，规定 $w(0)=0$，试讨论当 z 分别限制在以下两图中变化时，$w(3)$ 之值。



(a)

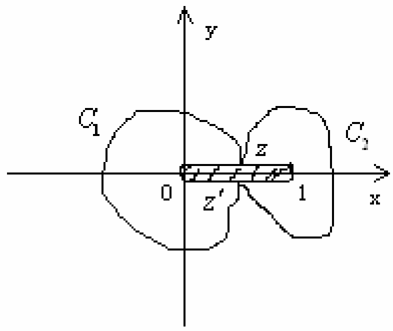


(b)

（a）$w=\ln\left[(1-z)(z+1)\right]$。规定 $z=0$ 时 $\arg(1-z)=0$，$\arg(z+1)=0$ 就有 $w(0)=0$。z 从下半平面到达 $z=3$ 时有 $\arg(1-z)=\pi$，$\arg(z+1)=0$，所以 $w(3)=\ln\left(2e^{i\pi}\cdot 4e^{i0}\right)=3\ln 2+i\pi$。

（b）z 从上半平面到达 $z=3$ 时有 $\arg(1-z)=-\pi$，$\arg(z+1)=0$，所以 $w(3)=\ln\left(2e^{-i\pi}\cdot 4e^{i0}\right)=3\ln 2-i\pi$。

60．函数 $w=\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ 在割线上岸函数值与下岸函数值有何不同？割线如下图。



若割线上岸上一点 z 由左边（曲线 C_1）绕到割线下岸同一处（记为 z'），则 z 的辐角增加 2π，即 $z'=ze^{i2\pi}$，$1-z$ 的辐角不变，即 $(1-z)'=1-z$。所以

$w'=\sqrt[4]{z'(1-z)'^3}=\sqrt[4]{ze^{i2\pi}(1-z)^3}=we^{i\pi/2}$。

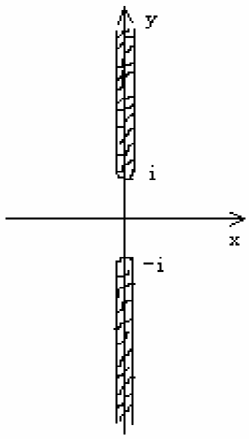
若 z 由右边（曲线 C_2 ）绕到割线下岸同一处，则 z 的辐角不变，$1-z$ 的辐角减小 2π ，

$$w'=\sqrt[4]{z\left[(1-z)e^{-i2\pi}\right]^3}=we^{-i3\pi/2}$$ 。

61．规定 $0\le\arg z<2\pi$ ，求 $w=\sqrt{z}$ 在 $z=i$ 处的导数值。

$$w'(z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}，\ w'\left(e^{i\pi/2}\right)=\frac{1}{2}e^{-i\pi/4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)$$ 。

62．规定 $z=0$ 处 $\arctan z=\pi$ ，求在 $z=2$ 处的导数值。割线做法如图。



$$\arctan z=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-z}{z+i}，\ (\arctan z)'=\frac{1}{z^2+1}，\ (\arctan z)'\Big|_{z=2}=\frac{1}{5}$$ 。

虽然导函数 $f'(z)$ 是单值函数，但它是在 $f(z)$ 的单值分枝中定义的，否则极限值 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 不定。

63．证明：若函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，其模为一常数，则函数 $f(z)$ 本身也必为一常数。

证：令 $f(z)=Ae^{i\varphi(x,y)}=A\cos\varphi+iA\sin\varphi$，其中 $\varphi(x,y)$ 为实函数。由于 $f(z)$ 解析，C-R 方程为：$-A\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=A\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$， $A\sin\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=A\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ 。可由此解出 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0$ ， $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0$，即 $\varphi(x,y)$ 为常数，所以 $f(z)$ 为常数。

64． $f\left(z\right)=\dfrac{z^{1-p}\left(1-z\right)^{p}}{2z}$， $-1<p<2$。在实轴上沿 0 到 1 做割线，规定沿割线上岸 $\arg z=\arg\left(1-z\right)=0$，试计算 $f\left(\pm i\right)$。

$z=i$ 时， $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$， $\arg\left(1-z\right)=-\dfrac{\pi}{4}$， $f\left(i\right)=\dfrac{\left(e^{i\pi/2}\right)^{1-p}\left(2^{1/2}e^{-i\pi/4}\right)^{p}}{2i}=2^{\frac{p}{2}-1}e^{i\frac{3}{4}p\pi}$ 。

z 从左边由割线上岸绕到 $z=-i$，则 $\arg z=\dfrac{3\pi}{2}$， $\arg\left(1-z\right)=\dfrac{\pi}{4}$， $f\left(-i\right)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-i\frac{5}{4}p\pi}$ 。

z 从右边由割线上岸绕到 $z=-i$，则 $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$，$\arg\left(1-z\right)=-\dfrac{7\pi}{4}$，$f\left(-i\right)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-i\frac{5}{4}p\pi}$ 。

65．试按给定的路径计算下列积分：

（1）$\int_{-1}^{1}\frac{dz}{z}$，（i）沿路径$C_1$：$|z|=1$的上半圆周，（ii）沿路径$C_2$：$|z|=1$的下半圆周；

（2）$\int_{0}^{2+i}\operatorname{Re} z dz$，（i）$C_1$：直线段[0，2]和[2，2+i]组成的折线，（ii）C_2：直线段$z=(2+i)t$，$0\le t\le 1$。

（1）（i）$\int_{C_1}\frac{dz}{z}=\int_{\pi}^{0}\frac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}=\int_{\pi}^{0}id\varphi=-\pi i$，

（ii）$\int_{C_2}\frac{dz}{z}=\int_{-\pi}^{0}\frac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}=\int_{-\pi}^{0}id\varphi=\pi i$；

（2）（i）$\int_{C_1}\operatorname{Re} z dz=\int_{0}^{2}xdx+i\int_{0}^{1}2dy=2+2i$，

（ii）$\int_{C_2}\operatorname{Re} z dz=\int_{0}^{1}2td(2+i)t=2(2+i)\int_{0}^{1}tdt=2+i$。

66．计算：（1）$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}$；　（2）$\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}$；　（3）$\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{z}$；　（4）$\int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|$。

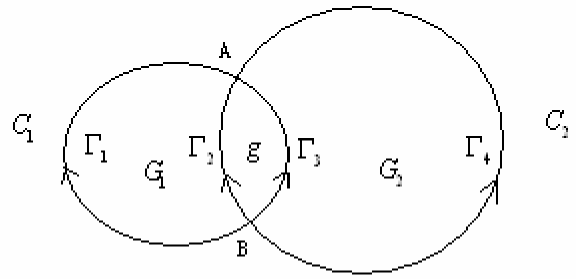
（1）令$z=e^{i\varphi}$，$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=\int_{0}^{2\pi}\frac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}=\int_{0}^{2\pi}id\varphi=2\pi i$；

（2）$\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}=\int_{0}^{2\pi}de^{i\varphi}=e^{i\varphi}\Big|_{0}^{2\pi}=0$；

（3）$\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{z}=\int_{0}^{2\pi}\frac{|ie^{i\varphi}d\varphi|}{e^{i\varphi}}=\int_{0}^{2\pi}e^{-i\varphi}d\varphi=ie^{-i\varphi}\Big|_{0}^{2\pi}=0$；

（4）$\int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|=\int_{0}^{2\pi}d\varphi=2\pi$。

67．考虑两简单闭合曲线C_1，C_2，彼此相交于 A，B 两点。设C_1与C_2所包围的内部区域分别是G_1与G_2，其公共区域为g。若$f(z)$在曲线C_1，C_2上解析，且在区域G_1-g及G_2-g内解析，试证明：$\oint_{C_1}f(z)dz=\oint_{C_2}f(z)dz$。



如图，$\Gamma_1 \sim \Gamma_4$表示四条边界线，C_1是Γ_1的负向加上Γ_3的正向，C_2是Γ_2的负向加上Γ_4的正向。

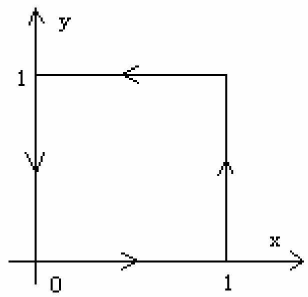
$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = -\int_{\Gamma_1} fdz + \int_{\Gamma_3} fdz + \int_{\Gamma_2} fdz - \int_{\Gamma_4} fdz$$

Γ_1的负向加上Γ_2的正向就是$G_1 - g$的边界，所以$-\int_{\Gamma_1} fdz + \int_{\Gamma_2} fdz = 0$，

同样的，$\int_{\Gamma_3} fdz - \int_{\Gamma_4} fdz = 0$，所以有$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$。

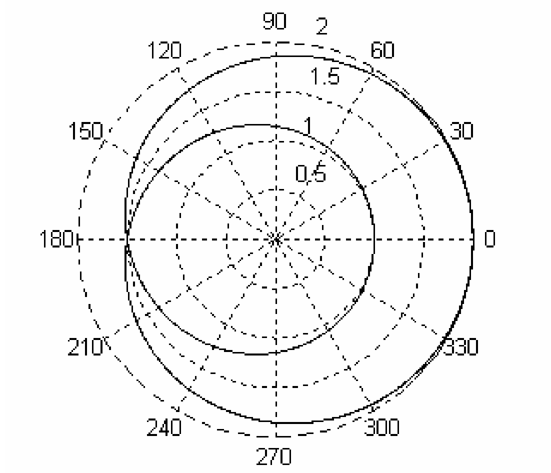
68．对于任一解析函数的实部或虚部，Cauchy 定理仍成立吗？如果成立，试证明之，如果不成立，试说明理由，并举一例。

不成立。取$f(z) = z$，则实部$u(x,y) = x$。取如下积分路径：



$\oint udz = \int_0^1 xdx + i\int_0^1 dy + \int_1^0 xdx = i$。

69．证明：$\oint_C \frac{dz}{z} = 4\pi i$，其中积分路径$C$为闭合曲线$\rho = 2 - \sin^2 \frac{\varphi}{4}$。这个结果和围绕原点一圈$\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$的结论有矛盾吗？为什么？



$$\oint_C \frac{dz}{z}=\int_0^{4\pi}\frac{d\left[\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}\right]}{\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}}=\int_0^{4\pi}\frac{-\frac{1}{4}\sin\frac{\varphi}{2}e^{i\varphi}+i\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}}{\left(2-\sin^2\frac{\varphi}{4}\right)e^{i\varphi}}d\varphi$$

$$=\int_0^{4\pi}id\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{3+\cos\frac{\varphi}{2}}d\varphi$$

上式右边第二项被积函数以 4π 为周期，所以积分限可换为 $-2\pi\sim 2\pi$，被积函数又是奇函数，故积分为 0，所以 $\oint_C \frac{dz}{z}=4\pi i$。由上图可看出，$C$ 绕原点两圈，并不与围绕原点一圈 $\oint\frac{dz}{z}=2\pi i$ 的结论矛盾。

70．计算 $\oint_{|z|=3}\frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}dz$。

原式 $=\oint_{|z|=3}\frac{2z^2-15z+30}{(z-2)(z-4)^2}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{2z^2-15z+30}{(z-4)^2}\right|_{z=2}=4\pi i$

71．计算：（1）$\oint_C\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$，$C$ 分别为：（i）$|z|=\frac{1}{2}$，（ii）$|z-1|=1$，（iii）$|z|=3$；

（2）$\oint_C\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$，$C$ 分别为：（i）$|z-i|=1$，（ii）$|z|=2$，（iii）$|z+i|+|z-i|=2\sqrt{2}$。

（1）（i）积分路径不包围任何奇点，故积分值为 0，

（ii）积分路径包围奇点 $z=1$，$\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz = 2\pi i\cdot\left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}i$，

（iii）积分路径包围奇点 $z=\pm1$，C_1, C_2 为单独包围 $z=\pm1$ 的闭路径，

$$\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz = \oint_{C_1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz + \oint_{C_2} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right|_{z=1} + \left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right|_{z=-1}\right) = \sqrt{2}\pi i \text{。}$$

（2）（i）$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\cdot\left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{\pi}{e}$，

（ii）$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} + \left.\frac{e^{iz}}{z-i}\right|_{z=-i}\right) = -2\pi\,\mathrm{sh}1$，

（iii）同（ii）。

72．计算：（1）$\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}dz$；（2）$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}dz$；（3）$\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}dz$；（4）$\oint_{|z|=2}\frac{z^2-1}{z^2+1}dz$；

（5）$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2}$；（6）$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+z+1}$；（7）$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-8}$；（8）$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-2z+3}$；

（9）$\oint_{|z|=2}\frac{|z|e^z dz}{z^2}$；（10）$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2\left(z^2+16\right)}$。

（1）$\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}dz = 2\pi i\cdot\cos z|_{z=0} = 2\pi i$；

（2）$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}dz = 2\pi i(\sin z)'\big|_{z=0} = 2\pi i$；

（3）$\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}dz = 2\pi i\cdot z^2|_{z=1} = 2\pi i$；

（4）$\oint_{|z|=2}\frac{z^2-1}{z^2+1}dz = 2\pi i\left(\left.\frac{z^2-1}{z+i}\right|_{z=i} + \left.\frac{z^2-1}{z-i}\right|_{z=-i}\right) = 0$；

（5）$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2} = 0$；

（6）$\oint_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+z+1} = 2\pi i\left(\left.\frac{1}{z+1/2-i\sqrt{3}/2}\right|_{z=-1/2-i\sqrt{3}/2} + \left.\frac{1}{z+1/2+i\sqrt{3}/2}\right|_{z=-1/2+i\sqrt{3}/2}\right) = 0$；

（7）$\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2-8}=0$；（不包围奇点）

（8）$\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2-2z+3}=2\pi i\left(\dfrac{1}{z-1-i\sqrt{2}}\bigg|_{z=1-i\sqrt{2}}+\dfrac{1}{z-1+i\sqrt{2}}\bigg|_{z=1+i\sqrt{2}}\right)=0$；

（9）$\oint_{|z|=2}\dfrac{|z|e^z dz}{z^2}=2\oint_{|z|=2}\dfrac{e^z dz}{z^2}=4\pi i\left(e^z\right)'\Big|_{z=0}$；

（10）$\oint_{|z|=2}\dfrac{dz}{z^2\left(z^2+16\right)}=2\pi i\left(\dfrac{1}{z^2+16}\right)'\Bigg|_{z=0}=0$。

73.（1）计算$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^3}dz$；（2）对于什么样的$a$值，函数$F(z)=\int_{z_0}^{z}e^t\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{a}{t^3}\right)dt$是单值的？

（1）$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^3}dz=\dfrac{2\pi i}{2!}\left(e^z\right)''\Big|_{z=0}=\pi i$；

（2）$\oint_C e^t\left(\dfrac{1}{t}+\dfrac{a}{t^3}\right)dt=\begin{cases}0, C\text{不包围原点}\\(2+a)\pi i，C\text{包围原点}\end{cases}$。当$a=-2$时，对任意的闭曲线（不过原点）该积分都是0，则$F(z)$为单值函数。

74．证明：在挖去$z=0$点的全平面上不存在一个解析函数$f(z)$，使其满足$f'(z)=\dfrac{1}{z}$。这个结论和$\dfrac{d}{dz}\ln z=\dfrac{1}{z}$矛盾吗？

因为$z=0$点是$\dfrac{1}{z}$的奇点，$\dfrac{1}{z}$在绕原点路径上的积分不为 0，所以无法定义变上限函数$\int_{z_0}^{z}\dfrac{1}{t}dt$，即找不到在除去$z=0$点的全平面上解析的原函数。$\ln z$在划定割线，在单值分枝内才有$\dfrac{d}{dz}\ln z=\dfrac{1}{z}$，他是在分割的平面上成立，而不是全平面。

75．设G是单连通区域，C是它的边界，$z_1,z_2,\cdots,z_n$是G内的n个不同的点。$P(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$，$f(z)$在$G$中解析，证明：$Q(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\zeta)}{P(\zeta)}\dfrac{P(\zeta)-P(z)}{\zeta-z}d\zeta$

是一个$n-1$次多项式，且$Q(z_k)=f(z_k)$，$k=1,2,\cdots,n$。如果G是复连通区域，上述结果还正确吗？

证：$z\neq z_k$时，$$Q(z)=\sum_{i=1}^{n}\left[(\zeta-z_i)\frac{f(\zeta)}{P(\zeta)}\frac{P(\zeta)-P(z)}{\zeta-z}\right]_{\zeta=z_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left.\frac{f(z_i)(\zeta-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(\zeta-z_j)}\right|_{\zeta=z_i}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)}{z-z_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z_i-z_j)}\prod_{j\neq i}(z-z_j)\right]$$

即它是$n-1$次多项式。

$z=z_k$时，$Q(z_k)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z_k}d\zeta=f(z_k)$。

若G是复连通区域，上面的计算不成立。

76．设$f(z)$在$|z|\le R$的区域内解析，且$\zeta=\rho e^{i\varphi}$（$0\le\rho<R$）为圆内一点，证明圆内的Poisson公式：$$f(\zeta)=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta。$$

证：$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-\rho e^{i\varphi}}dRe^{i\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Rf(Re^{i\theta})}{R-\rho e^{i(\varphi-\theta)}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\left[R-\rho e^{-i(\varphi-\theta)}\right]}{\left[R-\rho e^{i(\varphi-\theta)}\right]\left[R-\rho e^{-i(\varphi-\theta)}\right]}f(Re^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-R\rho e^{-i(\varphi-\theta)}}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}f(Re^{i\theta})d\theta \qquad (1)$$

令$\zeta'=\dfrac{R^2}{\rho}e^{i\varphi}$，它在圆外，所以有$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\dfrac{f(z)}{z-\zeta'}dz=0$（函数$\dfrac{f(z)}{z-\zeta'}$在圆内解析）。

$$0=\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-\zeta'}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-R\rho e^{-i(\varphi-\theta)}}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}f(Re^{i\theta})d\theta \qquad (2)$$

（1）－（2）即得$f(\zeta)=\dfrac{R^2-\rho^2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{f(Re^{i\theta})}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta$。

77．若 $f(z)$ 在区域 G 内单值连续，且沿 G 内任一闭合路径 C 均有 $\oint_C f(z)dz=0$，试证 $f(z)$ 在区域 G 内解析（这是 Cauchy 定理的逆定理，即 Morera 定理）。

因为 $f(z)$ 沿 G 内任一闭合路径积分都是 0，则 $\int_{z_0}^{z} f(t)dt$ 与积分路径无关，它定义了一个单值函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(t)dt$。

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(t)-f(z)\right]dt\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}\left|f(t)-f(z)\right||dt|$$

由于 $f(z)$ 在 z 点连续，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|t-z|<\delta$ 时，$\left|f(t)-f(z)\right|<\varepsilon$，所以只要 $|\Delta z|<\delta$，对于 $t\in[z,z+\Delta z]$，有 $|t-z|\le|\Delta z|<\delta$，

$\left|\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\dfrac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon$。所以 $F'(z)=f(z)$，$F(z)$ 为解析函数，而解析函数的导函数仍解析，即 $f(z)$ 在区域 G 内解析。

78．考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$。（1）它对于所有不通过原点的闭合围道 C 都有积分 $\oint_C f(z)dz=0$，但 $f(z)$ 在 $z=0$ 点不解析。这个情况和 Morera 定理（上题）矛盾吗？

（2）当 $z\to\infty$ 时，此函数有界，但并不是一个常数。这和 Liouville 定理矛盾吗？

（1）对于过原点路径上的积分，由于 $f(0)\to\infty$，积分 $\to\infty$，并不满足 Morera 定理条件；

（2）Liouville 定理要求全平面解析。

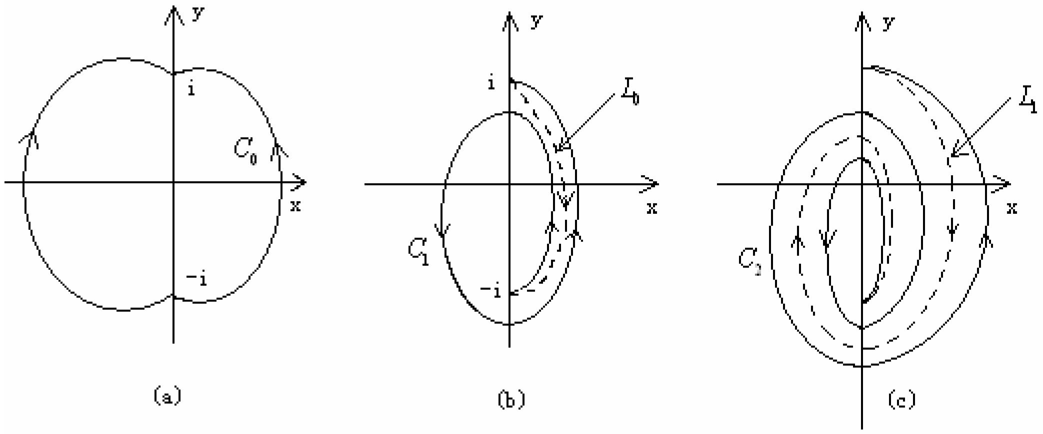
79．设 G 为单连通区域，其边界为简单闭合曲线 C。若函数 $f(z)$ 在 $\overline{G}=G+C$ 中解析，且在 C 上，$f(z)=0$。证明：在区域 G 内恒有 $f(z)=0$。

由 Cauchy 积分公式 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 可证。

80．计算 $\int_C\dfrac{dz}{z}$，积分路径 C 为：（1）没有割线的 z 平面上，由 $-i$ 到 i 的各种可能路径；

（2）沿负实轴割开的 z 平面上，由 $-i$ 到 i 的各种可能路径。

（1）可计算出沿右半圆从 $-i$ 到 i 的积分值为 πi，沿左半圆从 $-i$ 到 i 的积分值为 $-\pi i$。



如上图（a），对于右半平面从 $-i$ 到 i 的任意路径 C_0，与 i 到 $-i$ 的右半圆构成闭合路径，该闭路径积分值为 0，所以 $I_0=\int_{C_0}\frac{dz}{z}=\pi i$。

如上图（b），C_1 为从 $-i$ 逆时针绕原点一圈后从右半平面到达 i 的曲线，记 C_1 上的积分为 I_1。L_0 为右半平面从 i 到 $-i$ 的曲线，L_0 上的积分即为 $-I_0$。C_1 与 L_0 构成的闭曲线绕原点一圈，所以 C_1 与 L_0 上的积分之和为 $2\pi i$，即 $I_1-I_0=2\pi i$，所以 $I_1=3\pi i$。

如上图（c），C_2 为从 $-i$ 逆时针绕原点两圈后从右半平面到达 i 的曲线，记 C_2 上的积分为 I_2。L_1 为从 $-i$ 逆时针绕原点一圈后从右半平面到达 i 的反向曲线，L_1 上的积分即为 $-I_1$。C_2 与 L_1 构成的闭曲线绕原点一圈，所以 $I_2-I_1=2\pi i$，即 $I_2=5\pi i$。

依此类推，从 $-i$ 逆时针绕原点 n 圈后从右半平面到达 i 的曲线上的积分为 $I_n=(2n+1)\pi i$，$n=0,1,2,\cdots$。

同样可得，对于从 $-i$ 顺时针绕原点 n 圈后从左半平面到达 i 的曲线上的积分为 $I_n'=-(2n+1)\pi i$，$n=0,1,2,\cdots$。

（2）只能由右半平面直接从 $-i$ 到 i 的路径积分，积分值为 πi。

81．证明：$\oint_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i, n=1\\ 0, n\neq 1\end{cases}$，其中 C 为包围 a 点的任一简单闭合围道，n 为整数。

证：设ε为任意小的正数。$\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{d\left(a+\varepsilon e^{i\varphi}\right)}{\varepsilon^n e^{in\varphi}}=i\varepsilon^{1-n}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\varphi}d\varphi$，

当$n\neq 1$时，$\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)\varphi}d\varphi=0$，即$\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}=0$，

当$n=1$时，$\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}=i\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i$。

对于包围a点的任一简单闭合围道C，存在ε，使$|z-a|=\varepsilon$在C包围的区域内，则

$\oint_C\frac{dz}{(z-a)^n}=\oint_{|z-a|=\varepsilon}\frac{dz}{(z-a)^n}$，得证。

82．计算$\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}$。规定$z=1$时$\sqrt{z}=1$，沿路径：（1）单位圆的上半周从 1 到-1；（2）单位圆的下半周从 1 到-1。

$z=1$时，$\arg z=0$。（1）$z=-1$时，$\arg z=\pi$，$\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}\Big|_1^{-1}=2\left(\sqrt{e^{i\pi}}-1\right)=2(-1+i)$；

（2）$z=-1$时，$\arg z=-\pi$，$\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}\Big|_1^{-1}=2\left(\sqrt{e^{-i\pi}}-1\right)=-2(1+i)$。

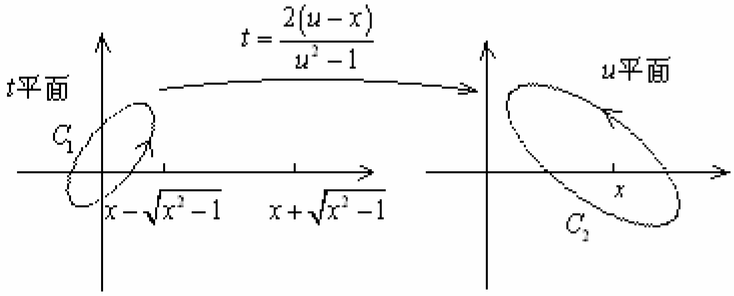
83．设$f(z)$在区域G内解析，C为G内任一简单闭合曲线，证明对于G内，但不在C上的任一点z，$\oint_C\frac{f'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$。

由 Cauchy 积分公式，$\oint_C\frac{f'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f'(z)$。由解析函数高阶导数公式，

$\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=2\pi i f'(z)$，得证。

84．设$\Psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$，$t$是复变数。试证：$\left.\frac{\partial^n\Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$。

证：



根据高阶微商公式，$\left.\frac{\partial^n\Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{\Psi(t,x)}{t^{n+1}}dt=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{1}{t^{n+1}\sqrt{1-2xt+t^2}}dt$ 。

上式中 C_1 是绕原点的围线，且不包围 $\Psi(t,x)$ 的两个奇点 $x\pm\sqrt{x^2-1}$ 。

作变换 $\sqrt{1-2xt+t^2}=1-ut$ ，即 $t=\frac{2(u-x)}{u^2-1}$ ，则 C_1 映射为绕 x 的 C_2（方向不变），

上面的积分化为：

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{1}{t^{n+1}\sqrt{1-2xt+t^2}}dt=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\left[\frac{\left(u^2-1\right)^{n+1}}{2^{n+1}(u-x)^{n+1}}\frac{u^2-1}{-u^2+2ux-1}\frac{-2u^2+4ux-2}{\left(u^2-1\right)^2}\right]du$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{\left(u^2-1\right)^n}{(u-x)^{n+1}}du=\frac{1}{2^n}\frac{d^n}{du^n}\left.\left(u^2-1\right)^n\right|_{u=x}=\frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n 。$$

85．设 $\Psi(t,x)=\exp\left(2tx-t^2\right)$ ，t 是复变数，试证：$\left.\frac{\partial^n\Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ 。

证：同上题。C_1 是 t 平面上逆时针绕原点的围线，通过变换 $t=x-u$ 映射为 u 平面上逆时针绕 x 的围线 C_2 。

$$\left.\frac{\partial^n\Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{e^{2tx-t^2}}{t^{n+1}}dt=-\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^{2(x-u)x-(x-u)^2}}{(x-u)^{n+1}}du$$

$$=(-1)^n e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}}du=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

86． $f(z)$ 在 a 点的邻域内解析，当 $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$ ， $z\to a$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地

趋于 k，试证：$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = ik(\theta_2-\theta_1)$。其中 C_δ 为：$|z-a|=\delta$，$\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$（逆时针）。

证：可计算出 $\int_{C_\delta}\dfrac{dz}{z-a}=i(\theta_2-\theta_1)$，

$$\int_{C_\delta} f(z)dz-ik(\theta_2-\theta_1)=\int_{C_\delta} f(z)dz-\int_{C_\delta}\frac{k}{z-a}dz=\int_{C_\delta}\left[(z-a)f(z)-k\right]\frac{dz}{z-a}。$$

$(z-a)f(z)$ 一致地趋于 k，即任意 $\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}>0$，存在 $\delta_1>0$（与 $\arg(z-a)$ 无关），使

$|z-a|<\delta_1$ 时，$\left|(z-a)f(z)-k\right|<\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}$。当 $\delta<\delta_1$ 时，对于 C_δ 上的点有 $|z-a|=\delta<\delta_1$，

则 $\left|\int_{C_\delta} f(z)dz-ik(\theta_2-\theta_1)\right|\le\int_{C_\delta}\left|(z-a)f(z)-k\right|\left|\dfrac{dz}{z-a}\right|<\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\cdot(\theta_2-\theta_1)=\varepsilon$

87．$f(z)$ 在 ∞ 点邻域内解析，当 $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$，$z\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋于 K。

试证：$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=iK(\theta_2-\theta_1)$。其中 C_R 为：$|z|=R$，$\theta_1\le\arg z\le\theta_2$（逆时针）。

证：同上题，有 $\int_{C_R} f(z)dz-iK(\theta_2-\theta_1)=\int_{C_R} f(z)dz-\int_{C_R}\dfrac{K}{z}dz=\int_{C_R}\left[zf(z)-K\right]\dfrac{dz}{z}$。

任意 $\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}>0$，存在 $M>0$（与 $\arg z$ 无关），当 $|z|>M$ 时，$\left|zf(z)-K\right|<\dfrac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}$。

只要 $R>M$，在 C_R 上有 $|z|=R>M$，所以

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz-iK(\theta_2-\theta_1)\right|\le\int_{C_R}\left|zf(z)-K\right|\left|\frac{dz}{z}\right|<\frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1}\cdot(\theta_2-\theta_1)=\varepsilon。$$

88．证明：$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z}dz=\dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$。从而计算出 $\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$。

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{(\cos\theta+i\sin\theta)}}{e^{i\theta}}de^{i\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta$$

上式右边第二项被积函数是奇函数，积分为 0，第一项被积函数为偶函数，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$$ 。

计算上式左边的积分得$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi e^z\Big|_{z=0}=\pi$

89， $f(z)$在全平面解析，且$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0$，证明 $f(z)$为常数。

证：令$F(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(0)}{z},z\neq 0\\ f'(0),z=0\end{cases}$。$z\neq 0$时$F(z)$显然是可导的，$z=0$时，

$\frac{F(z)-F(0)}{z}=\frac{f(z)-f(0)-zf'(0)}{z^2}$，利用洛比达法则，

$\lim\limits_{z\to 0}\frac{F(z)-F(0)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{f'(z)-f'(0)}{2z}=\frac{1}{2}f''(0)$。即$F(z)$在$z=0$处也是可导的，所以$F(z)$在全平面解析。因为$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0$，则对于$\varepsilon=1$，存在$M>1$，当$|z|>M>1$时，有$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\varepsilon=1$，$|F(z)|\le\left|\frac{f(z)}{z}\right|+\left|\frac{f(0)}{z}\right|<\varepsilon+\frac{|f(0)|}{M}<1+|f(0)|$，即$|F(z)|$有界，根据 Liouville 定理，$F(z)$为常数。由于$\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(0)}{z}=0$，所以$F(z)=0$。由此得，$z\neq 0$时，$F(z)=\frac{f(z)-f(0)}{z}=0$，$f(z)=f(0)$，即$f(z)$为常数。

90． $f(z)$在全平面解析，且$|f(z)|\ge 1$，证明 $f(z)$为常数。

证：令$F(z)=\frac{1}{f(z)}$，因为$|f(z)|\ge 1$，所以 $f(z)$没有零点，则$F(z)$没有奇点，即$F(z)$在全平面解析。$|F(z)|=\frac{1}{|f(z)|}\le 1$，即$F(z)$有界，根据 Liouville 定理，$F(z)$为常数，则$f(z)$为常数。

91．求$\left|\sin z\right|$在闭区域$0\le \operatorname{Re} z\le 2\pi$，$0\le \operatorname{Im} z\le 2\pi$中的最大值。

由最大模原理，在边界上寻找最大值。

在$y=0$，$0\le x\le 2\pi$上，$\sin z=\sin x$，最大值为 1；

在$x=2\pi$，$0\le y\le 2\pi$上，$\left|\sin z\right|=\left|\sin\left(2\pi+iy\right)\right|=\left|\sin\left(iy\right)\right|=\left|\operatorname{sh} y\right|$，最大值为$\operatorname{sh}2\pi$；

在$y=2\pi$，$0\le x\le 2\pi$上，

$\left|\sin z\right|=\left|\sin\left(x+2\pi i\right)\right|=\left|\operatorname{ch}2\pi\sin x+i\operatorname{sh}2\pi\cos x\right|=\sqrt{\left(\operatorname{ch}2\pi\sin x\right)^2+\left(\operatorname{sh}2\pi\cos x\right)^2}$，

可求出最大值为$\operatorname{ch}2\pi$；

在$x=0$，$0\le y\le 2\pi$上，$\left|\sin z\right|=\left|\sin\left(iy\right)\right|=\left|\operatorname{sh} y\right|$，最大值为$\operatorname{sh}2\pi$；

所以最大值为$\operatorname{ch}2\pi$。

92．函数$f\left(z\right)$在G内解析，且z_0为G内一点，有$f'\left(z_0\right)\ne 0$，试证明：

$\dfrac{2\pi i}{f'\left(z_0\right)}=\oint_C\dfrac{dz}{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}$。其中$C$是以$z_0$为圆心的一个足够小的圆。

证：令$F\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{z-z_0}{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)},z\ne z_0\\ \dfrac{1}{f'\left(z_0\right)},z=z_0\end{cases}$，$z\ne z_0$时$F\left(x\right)$显然是可导的，对于$z=z_0$点，

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F\left(z\right)-F\left(z_0\right)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\left(z-z_0\right)f'\left(z_0\right)-f\left(z\right)+f\left(z_0\right)}{f'\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)\left[f\left(z\right)-f\left(z_0\right)\right]},$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f'\left(z_0\right)-f'\left(z\right)}{f'\left(z_0\right)\left[f\left(z\right)-f\left(z_0\right)\right]+f'\left(z_0\right)f'\left(z\right)\left(z-z_0\right)}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{-\dfrac{f'\left(z\right)-f'\left(z_0\right)}{z-z_0}}{f'\left(z_0\right)\dfrac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}+f'\left(z_0\right)f'\left(z\right)}=-\frac{f''\left(z_0\right)}{2\left[f'\left(z_0\right)\right]^2}。$$

即$F\left(x\right)$在$z=z_0$点也是可导的，所以$F\left(x\right)$在在G内解析，因此有：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{dz}{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{F\left(z\right)}{z-z_0}dz=F\left(z_0\right)=\frac{1}{f'\left(z_0\right)}。$$

93．函数 $f(z)$，$g(z)$ 及 $g(z)$ 的反函数均在 G 内单值解析，且 $g'(z)$ 恒不为 0，试计算 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}d\zeta$，其中 C 是 G 内的简单闭曲线，z 不在 C 上。

由于 $g(z)$ 的反函数在 G 内单值，所以当且仅当 $\zeta = z$ 时 $g(\zeta)=g(z)$，即 $\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}$ 在 G 内只有一个奇点 $\zeta = z$。

若 C 不包围 z，则 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}d\zeta = 0$。

若 C 包围 z，同上题作法，令 $F(\zeta)=\begin{cases} \frac{\zeta - z}{g(\zeta)-g(z)} f(\zeta), \zeta \neq z \\ \frac{f(z)}{g'(z)}, \zeta = z \end{cases}$，它在 G 内解析，所以

有：$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = F(z) = \frac{f(z)}{g'(z)}$。

94．设$\sum a_n$与$\sum b_n$皆为正项级数，试举反例，说明下列说法不对：

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$，则$\sum a_n$收敛；（2）若$a_{2n}<a_{2n+1}$，则$\sum a_n$发散；

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{a_n}=\infty$，则$\sum a_n$发散；（4）若$\sum a_n$与$\sum b_n$发散，则$\sum\sqrt{a_nb_n}$发散。

（1）取$a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$；（可用积分判别法断定级数$\sum\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$当$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散）

（2）取$a_n=\dfrac{2-(-1)^n}{n^2}$，则$n\ge 1$时$a_{2n}-a_{2n+1}=\dfrac{-8n^2+4n+1}{(2n)^2(2n+1)^2}<0$，而$a_n\le\dfrac{3}{n^3}$，$\sum\dfrac{3}{n^3}$收敛，所以$\sum a_n$收敛；

（3）取$a_n=n^{-2-\frac{(-1)^n}{2}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$，而$a_n\le n^{-\frac{3}{2}}$，$\sum\dfrac{1}{n^{3/2}}$是收敛的，所以$\sum a_n$收敛；

（4）取$a_n=\dfrac{1}{n^{2+(-1)^n}}$，$b_n=\dfrac{1}{n^{2-(-1)^n}}$，因为$\sum\limits_n a_n=\sum\limits_k\dfrac{1}{(2k)^3}+\sum\limits_k\dfrac{1}{2k+1}$，右边第一个级数收敛，第二个发散，所以$\sum a_n$发散，同样的，$\sum b_n$也发散，而$\sum\sqrt{a_nb_n}=\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛。

95．指出下列谬误：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots=1+\left(\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-2\times\frac{1}{6}\right)+-\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)=0$$

不能随意改变求和顺序。

96．判断下列级数的收敛性及绝对收敛性：（1）$\sum\frac{i^n}{\ln n}$；（2）$\sum\frac{i^n}{n}$。

（1）$\sum_n\frac{i^n}{\ln n}=\sum_k\frac{(-1)^k}{\ln(2k)}+i\sum_k\frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)}$，右边两个级数都收敛（用 Leibnitz 判别法），所以$\sum\frac{i^n}{\ln n}$收敛，因为$\left|\frac{i^n}{\ln n}\right|=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$，而$\sum\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\frac{i^n}{\ln n}$不绝对收敛

（2）同上，$\sum\frac{i^n}{n}=\sum\frac{(-1)^k}{2k}+i\sum\frac{(-1)^k}{2k+1}$，所以$\sum\frac{i^n}{n}$收敛。$\left|\frac{i^n}{n}\right|=\frac{1}{n}$，$\sum\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\frac{i^n}{n}$不绝对收敛。

97．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$，$|z|\neq1$收敛，并求其和。

$$S_N(z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}=\frac{1}{z(1-z)}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-z^n}-\frac{1}{1-z^{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{z(1-z)}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{1-z^3}+\cdots+\frac{1}{1-z^N}-\frac{1}{1-z^{N+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{z(1-z)}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z^{N+1}}\right)$$

若$|z|<1$，$N\to\infty$时$S_N(z)\to\frac{1}{(1-z)^2}$，若$|z|>1$，$S_N(z)\to\frac{1}{z(1-z)^2}$，即

$$S(z)=\lim_{N\to\infty}S_N(z)=\begin{cases}\frac{1}{(1-z)^2},|z|<1\\ \frac{1}{z(1-z)^2},|z|>1\end{cases}。$$

98．证明无穷乘积$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)=(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots$，（$|z|<1$）收敛，并求其积。

记其前 N 项部分积为 $P_N(z)$。

$$P_N(z)=(1+z)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-z}(1-z)(1+z)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-z}\left(1-z^2\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-z}\left(1-z^4\right)\left(1+z^4\right)\cdots\left(1+z^{2^{N-1}}\right)=\cdots\cdots=\frac{1-z^{2^N}}{1-z}$$

因为$|z|<1$，所以$P(z)=\lim\limits_{N\to\infty}P_N(z)=\dfrac{1}{1-z}$。

99．证明：（1）$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{z}{2^n}=\dfrac{\sin z}{z}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{z}{2^n}=\dfrac{1}{z}-\cot z$。

（1）$P_N(z)=\cos\dfrac{z}{2}\cdot\cos\dfrac{z}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{z}{2^{N-1}}\cdot\cos\dfrac{z}{2^N}$

$$=\cos\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{z}{2^{N-1}}\cdot\cos\frac{z}{2^N}\cdot\sin\frac{z}{2^N}\cdot\frac{1}{\sin\frac{z}{2^N}}$$

$$=\cos\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{z}{2^{N-1}}\cdot\sin\frac{z}{2^{N-1}}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{z}{2^N}}$$

$$=\cos\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2^2}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{z}{2^{N-2}}\cdot\frac{1}{2^2\sin\frac{z}{2^N}}=\cdots\cdots=\frac{\sin z}{2^N\sin\frac{z}{2^N}}$$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{z}{2^n}=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\sin z}{2^N\sin\frac{z}{2^N}}=\dfrac{\sin z}{z}$；

（2）$\cot z+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{z}{2^n}=\dfrac{1-\tan^2\frac{z}{2}}{2\tan\frac{z}{2}}+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{z}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^N}\tan\dfrac{z}{2^N}$

$$=\frac{1}{2\tan\frac{z}{2}}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{z}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^N}\tan\frac{z}{2^N}$$

$$=\frac{1-\tan^2\dfrac{z}{2^2}}{2^2\tan\dfrac{z}{2^2}}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{z}{2^2}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{z}{2^3}\cdots+\frac{1}{2^N}\tan\frac{z}{2^N}$$

$$=\frac{1}{2^2\tan\dfrac{z}{2^2}}+\frac{1}{2^3}\tan\frac{z}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^N}\tan\frac{z}{2^N}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{1}{2^N\tan\dfrac{z}{2^N}}$$

令 $N\to\infty$，则 $\dfrac{1}{2^N\tan\dfrac{z}{2^N}}\to\dfrac{1}{z}$，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{z}{2^n}=\frac{1}{z}-\cot z$ 。

100．证明级数 $\sum e^{-n}\sin nz$ 在区域 $|\operatorname{Im} z|<1$ 内解析。

证：对于任意 $p\in(0,1)$，当 $|\operatorname{Im} z|\le p$ 时，（参考习题 02 的 43 题）

$\left|e^{-n}\sin nz\right|\le e^{-n}\operatorname{ch} ny\le e^{-n}\operatorname{ch} pn=\dfrac{1}{2}\left[e^{-(1-p)n}+e^{-(1+p)n}\right]$。因为级数 $\sum\left[e^{-(1-p)n}+e^{-(1+p)n}\right]$ 收敛，所以级数 $\sum e^{-n}\sin nz$ 在区域 $|\operatorname{Im} z|\le p$ 内一致收敛，由 Weierstrass 定理，级数 $\sum e^{-n}\sin nz$ 在区域 $|\operatorname{Im} z|<p$ 内解析。这里的 p 具有任意性。

任取区域 $|\operatorname{Im} z|<1$ 内一点 z_0，存在 p_0 使 $|\operatorname{Im} z_0|<p_0<1$。由于级数 $\sum e^{-n}\sin nz$ 在区域 $|\operatorname{Im} z|<p_0$ 内解析，故在 z_0 点解析。由 z_0 的任意性，$\sum e^{-n}\sin nz$ 在区域 $|\operatorname{Im} z|<1$ 内解析。

101． x 为实数，证明：（1）级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ 绝对收敛，但不一致收敛；

（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ 一致收敛，但不绝对收敛。

（1）这是正项等比级数，显然绝对收敛。记和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=\begin{cases}0, x=0\\ -\dfrac{1}{1+x^2}, x\neq 0\end{cases}$，

$x=0$ 处为间断点，而 $\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ 在整个实轴上是连续的，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ 不一致收敛。

（2）由于 $\dfrac{1}{n+x^2}\le\dfrac{1}{n}$，所以 $\dfrac{1}{n+x^2}$ 单调一致趋于 0，由 Leibnitz 判敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ 一致收敛。$\left|\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}\right|=\dfrac{1}{n+x^2}$，它不绝对收敛。

102．确定下列级数的收敛半径（或收敛区域）：（1）$\sum\dfrac{1}{n^n}z^n$；（2）$\sum\dfrac{1}{2^n n^n}z^n$；

（3）$\sum\dfrac{n!}{n^n}z^n$；（4）$\sum\dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}z^n$；（5）$\sum n^{\ln n}z^n$；（6）$\sum z^n$；（7）$\sum\dfrac{1}{2^{2n}}z^{2n}$；

（8）$\sum\left(\dfrac{z}{1+z}\right)^n$；（9）$\sum(-1)^n\left(z^2+2z+2\right)^n$；（10）$\sum 2^n\sin\dfrac{z}{3^n}$；（11）$\sum\dfrac{\ln\left(n^n\right)}{n!}z^n$；

（12）$\sum\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|n^n\right|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$，所以收敛半径 $R=\infty$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|2^n n^n\right|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2n=\infty$，所以收敛半径 $R=\infty$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!}{n^n}\Big/\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，所以收敛半径 $R=e$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\Big/\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2(n+1)}\left[(n+1)!\right]^2}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}4(n+1)^2=\infty$，所以收敛半径 $R=\infty$；

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|n^{\ln n}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{\ln n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}=1$，所以收敛半径 $R=1$；

（6）显然收敛半径 $R=1$；

（7）$\dfrac{1}{2^{2n}}z^{2n}=\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2n}$，收敛半径 $R=2$；

（8）收敛域为 $\left|\dfrac{z}{1+z}\right|<1$，化简得 $\operatorname{Re}z>-\dfrac{1}{2}$；

（9）收敛域为 $\left|z^2+2z+2\right|<1$；

（10）$\sum 2^n \sin\frac{z}{3^n}$ 在全平面收敛，即收敛域为全平面；

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n\ln n}{n!}\middle/\frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln(n+1)} = \infty$，所以收敛半径 $R=\infty$；

（12）$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right|^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$，所以收敛半径 $R=1$。

103．已知幂级数 $\sum a_n z^n$ 和 $\sum b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2，试讨论下列幂级数的收敛半径：（1）$\sum(a_n+b_n)z^n$；（2）$\sum a_n b_n z^n$；（3）$\sum\frac{1}{a_n}z^n$；（4）$\sum\frac{b_n}{a_n}z^n$。

（1）设 $R_1<R_2$。$|z|<R_1$ 时，级数收敛，$R_1<|z|<R_2$ 时，级数发散；由阿贝尔第一定理，当 $|z|>R_2$ 时级数也发散，所以 $R=R_1$。

若 $R_1=R_2$，$|z|<R_1=R_2$ 时，级数收敛，$|z|>R_1=R_2$ 时，级数有可能收敛。

综上，$R\ge\min\{R_1,R_2\}$。

（2）参考数学分析中关于上下极限的等式和不等式。

$$R=\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n b_n|^{1/n}} \ge \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|^{1/n}}\cdot\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{|b_n|^{1/n}} = R_1 R_2;$$

（3）$R=\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n|^{1/n}}} \le \dfrac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n|^{1/n}}} = \dfrac{1}{R_1}$；

（4）$R=\varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|^{1/n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|b_n|^{1/n}} = \dfrac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|a_n|^{1/n}}}\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|b_n|^{1/n}} = \dfrac{R_2}{R_1}$。

104．如果 $\sum a_n z^n$ 的收敛半径为 R，试证明 $\sum(\operatorname{Re}a_n)z^n$ 的收敛半径 $R'\ge R$。

$$R'=\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\operatorname{Re}a_n}\right|^{1/n} = \varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{2}{a_n+\bar{a}_n}\right|^{1/n} \ge \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{2}{|a_n|+|\bar{a}_n|}\right)^{1/n} = \varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|^{1/n} = R$$

105．设级数$\sum a_n$收敛，而$\sum |a_n|$发散，证明级数$\sum a_n z^n$的收敛半径为 1。

$|z|<1$时，存在δ使$|z|<\delta<1$，则$|a_n z^n|<|a_n|\delta^n$。

因为$\sum a_n$收敛，有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，对于$\varepsilon=1$，当$n$充分大时$|a_n|<\varepsilon=1$，则$|a_n z^n|<\delta^n$，

因为$\sum \delta^n$收敛，所以$\sum a_n z^n$绝对收敛。

$|z|>1$时，$|a_n z^n|>|a_n|$，因为$\sum |a_n|$发散，所以$\sum a_n z^n$发散。

106．若级数$\sum a_n$收敛，而$\sum n|a_n|$发散，证明级数$\sum a_n z^n$的收敛半径为 1。

$|z|<1$时，同上题方法可证$\sum a_n z^n$收敛。

$|z|>1$时，存在ζ使$|z|>\zeta>1$，则$|a_n z^n|>|a_n|\zeta^n$。因为$\zeta>1$，所以当n充分大时有$\zeta^n>n$，

则$|a_n z^n|>n|a_n|$，因为$\sum n|a_n|$发散，所以$\sum a_n z^n$发散。

107．证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$在$|z|\le 1$中一致收敛，但由它逐项微商求得的级数在$|z|<1$内却不一致收敛。这个结果和 Weierstrass 定理矛盾吗？

$|z|\le 1$时$\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，由于$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\dfrac{z^n}{n^2}$在$|z|\le 1$中一致收敛。

假设$\sum\dfrac{z^{n-1}}{n}$在$|z|<1$内一致收敛，则对任意$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，对任意整数p

有$\left|\dfrac{z^n}{n+1}+\dfrac{z^{n+1}}{n+2}+\cdots+\dfrac{z^{n+p-1}}{n+p}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，（$\forall |z|<1$）由于$\dfrac{z^n}{n+1}$在全平面连续，可令$z$从单位圆内趋于 1 得$\lim\limits_{z\to 1}\left|\dfrac{z^n}{n+1}+\dfrac{z^{n+1}}{n+2}+\cdots+\dfrac{z^{n+p-1}}{n+p}\right|=\left|\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+p}\right|\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，即级数

$\sum\dfrac{1}{n}$收敛，所以假设不成立，即级数$\sum\dfrac{z^{n-1}}{n}$在$|z|<1$内不一致收敛。这并不与 Weierstrass 定理矛盾，该定理结论是逐项微商求得的级数在收敛域内的闭区域上一致收敛，$|z|<1$非闭区域。

108．证明 Riemann-ζ 函数$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$在区域$\operatorname{Re}z>1$内解析，并计算$\zeta'(z)$。

证：对任意 $p>1$，当$\operatorname{Re}z\ge p$时，$\left|\frac{1}{n^z}\right|=\frac{1}{e^{x\ln n}}\le\frac{1}{e^{p\ln n}}=\frac{1}{n^p}$。由于级数$\sum\frac{1}{n^p}$收敛，所以$\sum\frac{1}{n^z}$在$\operatorname{Re}z\ge p$内一致收敛，所以$\zeta(z)$在$\operatorname{Re}z>p$内解析，逐项可导。

任取区域$\operatorname{Re}z>1$内一点z_0，存在p_0使$\operatorname{Re}z_0>p_0>1$。由于$\zeta(z)$在$\operatorname{Re}z>p_0$内解析，逐项可导，所以$\zeta(z)$在$z_0$点解析，逐项可导，由$z_0$的任意性，$\zeta(z)$在$\operatorname{Re}z>1$内解析，逐项可导。$\zeta'(z)=\sum\left(\frac{1}{n^z}\right)'=-\sum\frac{\ln n}{n^z}$。

109．将下列函数在指定点展成 Taylor 级数，并给出其收敛半径：

（1）$\sin z$，在$z=n\pi$展开；（2）$1-z^2$，在$z=1$展开；（3）$\frac{1}{1+z+z^2}$，在$z=0$展开；

（4）$\ln z$，在$z=i$展开，规定：(i) $0\le\arg z<2\pi$，(ii) $-\pi\le\arg z<\pi$，(iii) $(\ln z)_{z=i}=-\frac{3}{2}\pi i$；

（5）$\arctan z$的主值，在$z=0$展开；（6）$\frac{\sin z}{1-z}$，在$z=0$展开；

（7）$\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$，在$z=0$展开（可只求前四项系数）；（8）$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$，在$z=\infty$展开。

（1）$(\sin z)^{(k)}_{z=n\pi}=\sin\left(n\pi+\frac{k}{2}\pi\right)=\begin{cases}0,k=2m\\(-1)^{n+m},k=2m+1\end{cases}$

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\sin z)^{(k)}_{z=n\pi}(z-n\pi)^k=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{(2m+1)!}(z-n\pi)^{2m+1};$$

（2）$1-z^2=-(z-1)(z+1)=-(z-1)\left[2+(z-1)\right]=-2(z-1)-(z-1)^2$；

（3）$$\frac{1}{1+z+z^2}=\frac{1}{\left(z-e^{i2\pi/3}\right)\left(z-e^{-i2\pi/3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\frac{1}{z-e^{i2\pi/3}}-\frac{1}{z-e^{-i2\pi/3}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}i}\left(\frac{e^{i2\pi/3}}{1-e^{i2\pi/3}z}-\frac{e^{-i2\pi/3}}{1-e^{-i2\pi/3}z}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{i2\pi/3}\left(e^{i2\pi/3}z\right)^n-e^{-i2\pi/3}\left(e^{-i2\pi/3}z\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{i2(n+1)\pi/3}-e^{-i2(n+1)\pi/3}\right]z^n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left[\frac{2}{3}(n+1)\pi\right]z^n \quad （|z|<1）；$$

（4）$\left(\ln z\right)_{z=i}^{(k)}=\left(\frac{1}{z}\right)_{z=i}^{(k-1)}=\left.\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{z^k}\right|_{z=i}=-\frac{(-1)^k(k-1)!}{i^k}=-\frac{i^{2k}(k-1)!}{i^k}=-i^k(k-1)!$，

（ $k=1,2,3,\cdots$ ）。 $\ln z=\left(\ln z\right)_{z=i}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\ln z\right)_{z=i}^{(k)}(z-i)^k=\left(\ln z\right)_{z=i}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k}(z-i)^k$ ，

（$|z-i|<1$）；(i)(ii) $\left(\ln z\right)_{z=i}=\frac{1}{2}\pi i$；(iii) $\left(\ln z\right)_{z=i}=-\frac{3}{2}\pi i$ 代入上式即可。

（5）$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-t^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$，（$|t|<1$）

对两边积分，由于幂级数在收敛域内可逐项积分，故有

$$\arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+t^2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^z t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}，（|z|<1）$$

（6）$\left(\frac{\sin z}{1-z}\right)_{z=0}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{1-z}\right)_{z=0}^{(n-k)}\left(\sin z\right)_{z=0}^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\sin\frac{k}{2}\pi=\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^m n!}{(2m+1)!}$

$$\frac{\sin z}{1-z}=\left(\frac{\sin z}{1-z}\right)_{z=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\sin z}{1-z}\right)_{z=0}^{(n)}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}z^n， \quad （|z|<1）$$

（7）记 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$，则 $f(0)=e$。 $f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}e^{\frac{1}{1-z}}$， $f'(0)=e$。

$$f''(z)=\left[\frac{2}{(1-z)^3}+\frac{1}{(1-z)^4}\right]e^{\frac{1}{1-z}}，\quad f''(0)=3e。$$

$$f'''(z)=\left[\frac{6}{(1-z)^4}+\frac{6}{(1-z)^5}+\frac{1}{(1-z)^6}\right]e^{\frac{1}{1-z}}，\quad f'''(0)=13e。$$

$$f^{(4)}(z)=\left[\frac{24}{(1-z)^5}+\frac{36}{(1-z)^6}+\frac{12}{(1-z)^7}+\frac{1}{(1-z)^8}\right]e^{\frac{1}{1-z}}，\quad f^{(4)}(0)=73e。$$

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{1}{2}f''(0)z^2+\frac{1}{6}f'''(0)z^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(0)z^4+\cdots$$

$$=e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\frac{73}{24}z^4+\cdots\right) \quad （|z|<1）$$

（8）记 $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$，则 $f\left(\frac{1}{t}\right)=\ln\frac{t+1}{t-1}=\ln(t+1)-\ln(t-1)$。

$$\ln(t+1)=\ln(t+1)_{t=0}+\int_0^t\frac{1}{1+u}du=\ln(t+1)_{t=0}+\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n du$$

$$=\ln(t+1)_{t=0}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^t u^n du=\ln(t+1)_{t=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^{n+1}\text{，（}|t|<1\text{）}$$

$$-\ln(t-1)=-\ln(t-1)_{t=0}+\int_0^t\frac{1}{1-u}du=-\ln(t-1)_{t=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t u^n du$$

$$=-\ln(t-1)_{t=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}t^{n+1}\text{，（}|t|<1\text{）}$$

±1 为 $\ln\dfrac{t+1}{t-1}$ 的两个枝点，以连接两点的线段为割线，规定割线上岸 $\arg(t+1)-\arg(t-1)=(2k+1)\pi$，（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$），则

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\ln\frac{t+1}{t-1}\bigg|_{t=0}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n+1}t^{n+1}=(2k+1)\pi i+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n+1}\text{，}$$

$$f(z)=(2k+1)\pi i+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{-(2n+1)}\text{。}$$

110．求下列级数之和：（1）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$，$|z|<1$；（2）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$，$|z|<\infty$。

（1）记 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$，则 $f'(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}=\frac{1}{1-z^2}$，（$|z|<1$）

$f(z)=f(0)+\displaystyle\int_0^z\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^z\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$，为使 $f(0)=0$，规定 $\ln\dfrac{1+z}{1-z}\Big|_{z=0}=0$。

（2）记 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$，则 $f'(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}z^{2n-1}$，$f''(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-2)!}z^{2n-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}z^{2k}$，

所以有 $f''(z)-f(z)=0$，由初始条件 $f(0)=1$，$f'(0)=0$ 解此方程得 $f(z)=\operatorname{ch}z$。

111．验证等式$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+-\cdots=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt$，（$a>0,b>0$）。因此，此类无穷级数求和就化为求定积分。利用这个办法求下列级数之和：

（1）$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+-\cdots$；（2）$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+-\cdots$；（3）$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+-\cdots$。

证：$\frac{t^{a-1}}{1+t^b}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{a+bn-1}$，（$|t|<1$）

$$\int_0^x\frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{a+bn-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}x^{a+bn}，（|x|<1）$$

由于级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{a+bn-1}$在区间$|t|\le|x|$（$|x|<1$）上一致收敛，所以上式中求和与积分可交换顺序。上式右边的幂级数在$x=1$点是收敛的，所以它在$x=1$点左连续（Abel 第二定理），即$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}x^{a+bn}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}$。左边的积分是关于$x$的连续函数，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}x^{a+bn}=\lim_{x\to1-0}\int_0^x\frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt。$$

（1）　这里$a=1,b=3$，所以和为

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^3}dt=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-2}{t^2-t+1}\right)dt=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln(t+1)\Big|_{t=0}^{t=1}-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{d\left(t^2-t+1\right)}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln2-\frac{1}{6}\ln\left(t^2-t+1\right)\Big|_{t=0}^{t=1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln2\right)$$

（2）$a=2,b=3$，和为$\int_0^1\frac{t}{1+t^3}dt$。由于

$$\int_0^1\frac{t}{1+t^3}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t^3}dt=\int_0^1\frac{1}{t^2-t+1}dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

所以$\int_0^1 \frac{t}{1+t^3}dt = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right)$。

（3）$a=1, b=4$，和为$\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)dt$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\left[\sqrt{2}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]}{1+\left[\sqrt{2}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\left[\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]}{1+\left[\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(2+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{\pi}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(2-\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) + \operatorname{arc\,cot}\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\pi\right]$$

112．如果k和n是自然数，$a>0, b>0$，证明：

$\frac{k!}{(a+nb)(a+nb+1)\cdots(a+nb+k)} = \int_0^1 t^{a+nb-1}(1-t)^k dt$，并求下列级数之和：

（1）$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$；（2）$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} - + \cdots$；

（3）$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9} + \cdots$；（4）$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} - + \cdots$。

证：$\int_0^x t^{p-1}(x-t)^k dt = \frac{1}{p}\int_0^x \left(t^p\right)'(x-t)^k dt = \frac{k}{p}\int_0^x t^p (x-t)^{k-1} dt$

$$=\frac{k(k-1)}{p(p+1)}\int_0^x t^{p+1}(x-t)^{k-2} dt$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{k!x^k}{p(p+1)\cdots(p+k)}x^p$$

令$p=a+nb$，$x=1$即可得$\frac{k!}{(a+nb)(a+nb+1)\cdots(a+nb+k)} = \int_0^1 t^{a+nb-1}(1-t)^k dt$。

级数$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt = x^{k+a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k!}{\left(a+bn\right)\left(a+bn+1\right)\cdots\left(a+bn+k\right)}x^{bn}$是幂级数。

当$k\geq 1$时，$\sum_n\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt\Big|_{x=1} = \sum_n\frac{k!}{\left(a+nb\right)\left(a+nb+1\right)\cdots\left(a+nb+k\right)}$显然是收敛的，由 Abel 第二定理，幂级数$\sum_n\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt$在$x=1$处左连续，即下式成立：

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_n\int_0^x t^{a+nb-1}\left(x-t\right)^k dt = \sum_n\int_0^1 t^{a+nb-1}\left(1-t\right)^k dt \qquad （\left|x\right|<1）。$$

级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(a+nb\right)\left(a+nb+1\right)\cdots\left(a+nb+k\right)} = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^{a+nb-1}\left(1-t\right)^k dt$

$$=\frac{1}{k!}\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{a+bn-1}\left(x-t\right)^k dt$$

由于级数$\sum_n t^{bn}$收敛半径为 1，所以对于$\left|x\right|<1$，求和与积分可交换顺序，即

上式$=\frac{1}{k!}\lim_{x\to 1-0}\int_0^x t^{a-1}\left(x-t\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}t^{bn}dt = \frac{1}{k!}\int_0^1\frac{t^{a-1}\left(1-t\right)^k}{1-t^b}dt$

同样可得$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(a+nb\right)\left(a+nb+1\right)\cdots\left(a+nb+k\right)} = \frac{1}{k!}\int_0^1\frac{t^{a-1}\left(1-t\right)^k}{1+t^b}dt$。

（1）这里$a=1,b=2,k=2$。和为$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1-t^2}dt$。

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{1+t}-1\right)dt = \ln 2-\frac{1}{2};$$

（2）和为$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right)$。

（3）$a=1,b=3,k=2$。和为$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(1-t\right)^2}{1-t^3}dt$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\frac{d\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]^2}-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 3\right)$$

（4）$a=2,b=2,k=2$。和为$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t\left(1-t\right)^2}{1+t^2}dt = \int_0^1\left(\frac{1}{2}t-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\pi-3\right)$。

113．求下列函数的 Laurent 展开：（1） $\dfrac{1}{z^2(z-1)}$，在 $z=1$ 附近展开；

（2） $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$，展开区域为：(i) $1<|z|<2$ ，(ii) $2<|z|<\infty$；

（3） $\dfrac{1}{z(z+1)}$，展开区域为：(i) $1<|z-i|<\sqrt{2}$ ，(ii) $0<|z|<1$；

（4） $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，展开区域为：(i) $3<|z|<4$，(ii) $4<|z|<\infty$；

（5） $\dfrac{e^z}{z+2}$，在 $|z|>2$ 处展开；（6） $\dfrac{1}{1-\cos z}$，在 $z=2n\pi$ 附近展开（可只求出不为 0 的前四项系数）。

（1） $\dfrac{1}{z^2}=\left[1+(z-1)\right]^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-n+1)}{n!}(z-1)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n \qquad (|z-1|<1)$$

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=(z-1)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^n=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+2)(z-1)^k\text{，}(0<|z-1|<1)$$

（2）(i) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-z/2}-z^{-1}\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n-z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad (1<|z|<2)$$

(ii) $$\frac{1}{z^2-3z+2}=z^{-1}\frac{1}{1-2z^{-1}}-z^{-1}\frac{1}{1-z^{-1}}=\sum_{k=-2}^{-\infty}\left(2^{-k-1}-1\right)z^k \qquad (2<|z|<\infty)$$

（3）(i) $\dfrac{1}{z(z+1)}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}=(z-i)^{-1}\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{z-i}}-\dfrac{1}{1+i}\dfrac{1}{1+\dfrac{z-i}{1+i}}$

$$=\sum_{n=-1}^{-\infty}i^{n+1}(z-i)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n \qquad (1<|z-i|<\sqrt{2})$$

(ii) $$\frac{1}{z(z+1)}=z^{-1}-\frac{1}{1+z}=z^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n \qquad (0<|z|<1)$$

（4）(i) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1+\dfrac{6}{z-4}-\dfrac{2}{z-3}=1-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1-z/4}-2z^{-1}\dfrac{1}{1-3z^{-1}}$

$$=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}z^{n}-2\sum_{n=-1}^{-\infty}3^{-n-1}z^{n} \qquad （3<|z|<4）$$

(ii) $\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1+6z^{-1}\dfrac{1}{1-4z^{-1}}-2z^{-1}\dfrac{1}{1-3z^{-1}}$

$$=1+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{3}{2}\cdot 4^{-n}-\frac{2}{3}\cdot 3^{-n}\right)z^{n} \qquad （4<|z|<\infty）$$

（5）$\dfrac{1}{z+2}=z^{-1}\dfrac{1}{1+2/z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{n}z^{-n-1}$ （$|z|>2$），$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}z^{n}$ （$|z|<\infty$），两级数都是绝对收敛的，所以可用 Cauchy 乘积计算 $\dfrac{e^{z}}{z+2}$。

$$\frac{e^{z}}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{k}}{k!}\cdot(-2)^{n-k}z^{k-n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-2)^{n-k}}{k!}z^{2k-n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2k}^{\infty}\frac{(-2)^{n-k}}{k!}z^{2k-n-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{2k-1}\frac{(-2)^{n-k}}{k!}z^{2k-n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-1}^{-\infty}\frac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m}$$

$$=\sum_{m=-1}^{-\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-m-1}}{k!}z^{m} \qquad （2<|z|<\infty）$$

（6）$\dfrac{1}{1-\cos z}=\dfrac{1}{1-\cos(z-2n\pi)}=\dfrac{1}{2\sin^{2}\left(\dfrac{z-2n\pi}{2}\right)}$，可看出 $z=2n\pi$ 是二阶极点，且它是关于 $z-2n\pi$ 的偶函数，故可设 $\dfrac{1}{1-\cos z}=\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n}(z-2n\pi)^{2n}$ 。

$1=(1-\cos z)\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n}(z-2n\pi)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}(z-2n\pi)^{2n}\cdot\sum_{n=-1}^{\infty}a_{n}(z-2n\pi)^{2n}$，其中 $b_{n}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$。

假设上式右边的 Cauchy 乘积收敛，则 $1=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-1}^{n-1}a_{k}b_{n-k}(z-2n\pi)^{2n}$ 。比较系数可得

$1=a_{-1}b_{1}$，$0=a_{-1}b_{2}+a_{0}b_{1}$，$0=a_{-1}b_{3}+a_{0}b_{2}+a_{1}b_{1}$，$0=a_{-1}b_{4}+a_{0}b_{3}+a_{1}b_{2}+a_{2}b_{1}$，$\cdots$

解得 $a_{-1}=2$， $a_0=\dfrac{1}{6}$， $a_1=\dfrac{1}{120}$， $a_2=\dfrac{1}{3024}$， $\cdots$

即 $\dfrac{1}{1-\cos z}=2(z-2n\pi)^{-2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{120}(z-2n\pi)^2+\dfrac{1}{3024}(z-2n\pi)^4+\cdots$（$0<|z-2n\pi|<2\pi$）

114．用级数相乘的方法求下列函数在 $z=0$ 附近的级数展开：（1）$-\ln(1-z)\ln(1+z)$；

（2）$\ln(1+z^2)\arctan z$；（3）$\exp\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{a^2}{z}\right)$；（4）$e^z\sin\dfrac{1}{z}$。

由于幂级数在 $|z|<R$（R 是收敛半径）内都是绝对收敛的，故可计算 Cauchy 乘积。

（1）$\ln(1+z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$， $\ln(1-z)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n$。（$|z|<1$）

$$-\ln(1-z)\ln(1+z)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k(n-k)}z^n$$

当 n 为奇数时，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k(n-k)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k(n-k)}$。又有 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k(n-k)}=-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(-1)^j}{j(n-j)}$，

（作变换 $n-k=j$）所以 $a_n=-a_n$，即 $a_n=0$。令上面的级数表达式中 n 只取偶数，则

$$-\ln(1-z)\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k(2n-k)}z^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{(-1)^{k+1}}{2n-k}\right]z^{2n}$$

作变换 $2n-k=m$，则 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2n-k}=\sum_{m=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{m+1}}{m}$，所以

$$-\ln(1-z)\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}z^{2n}\qquad（|z|<1）$$

（2）$\ln(1+z^2)\arctan z=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^{2n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(2k+1)(n-k)}z^{2n+1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{2k+1}+\frac{1}{n-k}\right)z^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)z^{2n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right)z^{2n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}z^{2n+1}\qquad（|z|<1）$$

（3）

$$\exp\frac{1}{2}\left(z-\frac{a^2}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{2^n n!}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^{2k}}{2^n k!(n-k)!}z^{n-2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^k a^{2k}}{2^n k!(n-k)!}z^{n-2k}$$

令 $n-2k=m$，则上式 $=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{-1}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m+\sum_{m=-1}^{-\infty}\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}\left(\frac{z}{a}\right)^m$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(a)\left(\frac{z}{a}\right)^m \qquad (0<|z|<\infty)$$

其中 $J_m(a)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}, m=0,1,2,\cdots\\ \sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+m}, m=-1,-2,\cdots\end{cases}$。

（4）$e^z\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-k)!}z^{n-3k-1}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-k)!}z^{n-3k-1}$$

令 $n-3k-1=m$，则上式 $=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-(2k+1)}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-(2k+1)}^{-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m$$

$$=\sum_{m=-1}^{-\infty}\sum_{k=\left[-\frac{n}{2}\right]}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+m+1)!}z^m \quad (0<|z|<\infty)$$

115。将下列函数在 $z=0$ 点展开（其中的多值函数均取主值分枝）：

（1）$\sqrt{1+z^2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$；（2）$\sqrt{1-z^2}\sin^{-1}z$；（3）$(1+z)^{-n}\ln(1+z)$；（4）$\exp\left(\tan^{-1}z\right)$。

（1）令 $f(z)=\sqrt{1+z^2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$，可得微分方程 $f'(z)-\frac{z}{1+z^2}f(z)=1$。

可看出方程在$|z|<1$上有解析解，可设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，由于在$|z|<1$上可逐项求导，所以

$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+1}=1+z^2$，即

$$a_1+(2a_2-a_0)z+3a_3z^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}+(n-2)a_{n-1}\right]z^n=1+z^2$$

比较系数可得$a_1=1$，$2a_2-a_0=0$，$3a_3=1$，$a_k=-\dfrac{k-3}{k}a_{k-2}$（$k\geq 4$）。

又有$a_0=f(0)=0$，所以$a_2=0$，$a_3=1/3$，

$$a_{2k}=-\frac{2k-3}{2k}a_{2(k-1)}=(-1)^2\frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k)(2k-2)}a_{2(k-2)}=\cdots=(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}a_2=0,$$

（$k=2,3,4,\cdots$）

$$a_{2k+1}=-\frac{2k-2}{2k+1}a_{2(k-1)+1}=(-1)^2\frac{(2k-2)(2k-4)}{(2k+1)(2k-1)}a_{2(k-2)+1}=\cdots=(-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!}$$

（$k=2,3,4,\cdots$）。

所以$\sqrt{1+z^2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=z+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!}z^{2k+1}$　　（$|z|<1$）

（2）可得微分方程 $f'(z)+\dfrac{z}{1-z^2}f(z)=1$，在$|z|<1$上设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，则

$a_1+(2a_2+a_0)z+3a_3z^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)a_{n+2}-(n-1)a_n\right]z^{n+1}=1-z^2$。所以

$a_0=f(0)=0$，$a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=-1/3$，$a_{2k}=\dfrac{2k-3}{2k}a_{2k-2}=\cdots=\dfrac{(2k-3)!!}{(2k)!!}a_0=0$

（$k=2,3,4,\cdots$），$a_{2k+1}=\dfrac{2k-2}{2k+1}a_{2(k-1)+1}=\cdots=-\dfrac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!}$（$k=2,3,4,\cdots$）。

所以$\sqrt{1-z^2}\sin^{-1}z=z-\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2k-2)!!}{(2k+1)!!}z^{2n+1}$　　（$|z|<1$）

（3）令 $f(z)=(1+z)^{-n}\ln(1+z)$，则 $f^{(k)}(z)=\sum_{l=0}^{k}\dfrac{k!}{l!(k-l)!}\left[(1+z)^{-n}\right]^{(l)}\left[\ln(1+z)\right]^{(k-l)}$，

$\left[\left(1+z\right)^{-n}\right]^{(l)}=\dfrac{\left(-1\right)^{l}\left(n+l-1\right)!}{\left(n-1\right)!\left(1+z\right)^{n+l}}$，$\left[\ln\left(1+z\right)\right]^{(m)}=\left(\dfrac{1}{1+z}\right)^{(m-1)}=\dfrac{\left(-1\right)^{m-1}\left(m-1\right)!}{\left(1+z\right)^{m}}$（$m\geq 1$），

代入 $f^{(k)}\left(z\right)$ 的表达式得 $f^{(k)}\left(0\right)=\dfrac{\left(-1\right)^{k-1}k!}{\left(n-1\right)!}\sum_{l=0}^{k-1}\dfrac{\left(n+l-1\right)!}{l!\left(k-l\right)}$。

所以 $f\left(z\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}z^{k}=\dfrac{1}{\left(n-1\right)!}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k-1}\sum_{l=0}^{k-1}\dfrac{\left(n+l-1\right)!}{l!\left(k-l\right)}z^{k}$ （$|z|<1$）

（4）可得微分方程 $f'\left(z\right)-\dfrac{1}{1+z^{2}}f\left(z\right)=0$。在 $|z|<1$ 上设 $f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{n}$，则

$a_{1}-a_{0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(n+1\right)a_{n+1}-a_{n}+\left(n-1\right)a_{n-1}\right]z^{n}=0$。

$a_{0}=f\left(0\right)=1$，$a_{1}=a_{0}=1$，$a_{n}=\dfrac{1}{n}a_{n-1}-\dfrac{n-2}{n}a_{n-2}$，$n=2,3,4,\cdots$

若令 $a_{n}=\dfrac{b_{n}}{n!}$，则有 $b_{0}=1$，$b_{1}=1$，$b_{n}=b_{n-1}-\left(n-1\right)\left(n-2\right)b_{n-2},n=2,3,4,\cdots$。

116．证明：如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_{k}\left(z\right)$ 在区域 G 的边界 C 上一致收敛，$u_{k}\left(z\right)$（$k=1,2,\cdots$）在 $\bar{G}$ 中解析，则此级数在 $\bar{G}$ 中一致收敛。

证：因为级数在 C 上一致收敛，故对任意 $\varepsilon>0$，n 充分大时对任意整数 p 及任意 $z\in C$ 有 $\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\varepsilon$。由最大模原理，该不等式对于任意 $z\in\bar{G}$ 都成立，即此级数在 $\bar{G}$ 中一致收敛。

117．利用 Abel 第二定理证明：如果 $\sum_{k=0}^{\infty}u_{k}$，$\sum_{k=0}^{\infty}v_{k}$ 与 $\sum_{k=0}^{\infty}w_{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}u_{l}v_{k-l}$ 分别收敛于 A,B 和 C，则 $C=AB$。

证：令 $U\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k}x^{k}$，$V\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}v_{k}x^{k}$，$W\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}w_{k}x^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}u_{l}v_{k-l}x^{k}$。

由于 $U\left(x\right)$，$V\left(x\right)$ 在 $x=1$ 点收敛，所以 $U\left(x\right)$，$V\left(x\right)$ 在区间 $|x|<1$ 上绝对收敛（阿贝尔第一定理），因此可用 Cauchy 乘积计算 $U\left(x\right)\cdot V\left(x\right)$，即

$$U(x)\cdot V(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}u_l x^l\cdot v_{k-l}x^{k-l}=\sum_{k=0}^{\infty}w_k x^k=W(x)$$

由于$U(x)$，$V(x)$和$W(x)$都在$x=1$点收敛，所以他们都在$x=1$点左连续（阿贝尔第二定理），即$\lim\limits_{x\to1-0}U(x)\cdot V(x)=U(1)\cdot V(1)=\lim\limits_{x\to1-0}W(x)=W(1)$，也就是$C=AB$。

118．定义$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1},\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}$，（$|z|<\infty$）

试利用级数乘法证明$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$。

证：右边$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a^{2k+1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}b^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}a^{2k}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}b^{2k+1}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a^{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!}b^{2n-2k}+\frac{(-1)^k}{(2k)!}a^{2k}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}b^{2n-2k+1}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2k+1)!(2n+1-2k-1)!}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1}+\frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2k)!(2n+1-2k)!}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\left(\frac{a}{b}\right)^{k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+b)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin(a+b)=\text{左边}$$

119．计算积分$\oint_\gamma\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz$，其中$\gamma$是单位圆内任一不经过原点的简单闭合曲线。

$$\oint_\gamma\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz=\oint_\gamma\frac{dz}{z^2}+\oint_\gamma\frac{dz}{z}+\oint_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)dz$$

由于在单位圆内，$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$，这是解析函数，故有$\oint_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)dz=0$。

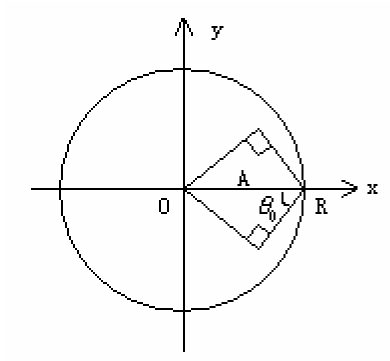
若γ包围原点，则$\oint_\gamma\frac{dz}{z}=2\pi i$，$\oint_\gamma\frac{dz}{z^2}=0$，所以$\oint_\gamma\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz=2\pi i$；

若γ不包围原点，则$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z}=0$，$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^2}=0$，所以$\oint_{\gamma}\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz=0$。

附：

Abel 第一定理：若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$在$z_0\neq 0$处收敛，则它在圆$|z|<|z_0|$内绝对收敛，并且在任意闭圆$|z|<k|z_0|$（$0<k<1$）内一致收敛。

Abel 第二定理：若**复幂级数**$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半径为$R$，且在$z=R$处收敛，则（1）该级数级数在以$z=R$为顶点，以[0，$R$]为角平分线，开度为$2\theta_0$（$<\pi$）的四边形角域 A（下图所示）上一致收敛；（2）$\lim\limits_{z\in A,z\to R}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n$。



若**实幂级数**$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为$R$，并且它在$x=R$处收敛，则该级数在闭区间[0，$R$]上一致收敛，且在$x=R$处左连续。

120．判断下列函数奇点的性质，如果是极点，确定其阶数：（1）$\dfrac{1}{z^2+a^2}$；（2）$\dfrac{\cos az}{z^2}$；

（3）$\dfrac{\cos az-\cos bz}{z^2}$；（4）$\dfrac{\sin z}{z^2}-\dfrac{1}{z}$；（5）$\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$；（6）$\sin\dfrac{1}{z}$；（7）$\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$；

（8）$\displaystyle\int_0^z \frac{e^{\sqrt{\zeta}}-e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}}d\zeta$。

（1）$\pm ai$ 是一阶极点。$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{t^2}{1+a^2t^2}$，0 不是 $f\left(1/t\right)$的奇点，故∞不是 $f\left(z\right)$的奇点。

（2）0 是二阶极点；$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=t^2\left[1-\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{a}{t}\right)^2+\dfrac{1}{4!}\left(\dfrac{a}{t}\right)^4-+\cdots\right]=t^2-\dfrac{a^2}{2!}+\dfrac{a^4}{4!}t^{-2}-+\cdots$

0 是 $f\left(1/t\right)$的本性奇点，所以∞是 $f\left(z\right)$的本性奇点。

（3）$f\left(z\right)=z^{-2}\left[\left(1-\dfrac{1}{2!}a^2z^2+\dfrac{1}{4!}a^4z^4-+\cdots\right)-\left(1-\dfrac{1}{2!}b^2z^2+\dfrac{1}{4!}b^4z^4-+\cdots\right)\right]$

$$=-\frac{1}{2!}\left(a^2-b^2\right)+\frac{1}{4!}\left(a^4-b^4\right)z^2-+\cdots$$

所以 0 是 $f\left(z\right)$的可去奇点。$f\left(1/t\right)=-\dfrac{1}{2!}\left(a^2-b^2\right)+\dfrac{1}{4!}\left(a^4-b^4\right)t^{-2}-+\cdots$，$\infty$是 $f\left(z\right)$的本性奇点。

（4）$f\left(z\right)=z^{-2}\left(z-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5-+\cdots\right)-z^{-1}=-\dfrac{1}{3!}z+\dfrac{1}{5!}z^3-+\cdots$，0 是可去奇点。

$f\left(\dfrac{1}{t}\right)=-\dfrac{1}{3!}t^{-1}+\dfrac{1}{5!}t^{-3}-+\cdots$，$\infty$是 $f\left(z\right)$的本性奇点。

（5）$\displaystyle\lim_{z\to0}f\left(z\right)=\lim_{z\to0}\frac{z-e^z+1}{z\left(e^z-1\right)}=\lim_{z\to0}\frac{z+1-\left(1+z+z^2/2+\cdots\right)}{z^2}=-\frac{1}{2}$，所以 0 是可去奇点。

$$\lim_{z\to2n\pi i}\left(z-2n\pi i\right)f\left(z\right)=\lim_{z\to2n\pi i}\frac{\left(z-2n\pi i\right)\left(z-e^z+1\right)}{z\left(e^z-1\right)}=\lim_{z\to2n\pi i}\frac{z-e^z+1+\left(z-2n\pi i\right)\left(1-e^z\right)}{e^z-1+ze^z}=1$$

所以$2n\pi i$（$n=\pm1,\pm2,\cdots$）是一阶奇点。由于$2n\pi i\to\infty$，所以在∞点的任一邻域内有无穷个奇点，即∞是非孤立奇点。

（6）$f\left(z\right)=z^{-1}-\dfrac{1}{3!}z^{-3}+\dfrac{1}{5!}z^{-5}-+\cdots$，所以 0 是本性奇点。

$f\left(1/t\right)=t-\dfrac{1}{3!}t^3+\dfrac{1}{5!}t^5-+\cdots$，所以$\infty$点是可去奇点。

（7）$\displaystyle\lim_{z\to0}f\left(z\right)=1$，所以 0 是可去奇点。

$$\lim_{z\to n^2\pi^2}\left(z-n^2\pi^2\right)f\left(z\right)=\lim_{z\to n^2\pi^2}\frac{\left(z-n^2\pi^2\right)\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}=\lim_{z\to n^2\pi^2}\frac{\sqrt{z}+\dfrac{\left(z-n^2\pi^2\right)}{2\sqrt{z}}}{\dfrac{\cos\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}}=\left(-1\right)^n 2n^2\pi^2$$

所以 $n^2\pi^2$（$n=1,2,3,\cdots$）是一阶极点。由于 $n^2\pi^2\to\infty$，所以 ∞ 点的任意邻域包含无穷个奇点，即 ∞ 点为非孤立奇点。

（8）$f\left(z\right)=\int_0^z\frac{e^{\sqrt{\zeta}}-e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}}d\zeta=\int_0^z\zeta^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^{n/2}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\zeta^{n/2}}{n!}\right)d\zeta$

$$=2\int_0^z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^k}{\left(2k+1\right)!}d\zeta=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^{k+1}}{\left(k+1\right)\left(2k+1\right)!}$$

$f\left(1/t\right)=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{-\left(k+1\right)}}{\left(k+1\right)\left(2k+1\right)!}$，即 ∞ 点为本性奇点。

$f\left(z\right)=2\int_0^z\left(e^{\sqrt{\zeta}}-e^{-\sqrt{\zeta}}\right)d\sqrt{\zeta}=2\left(e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}-2\right)$，即除 ∞ 点外无其他奇点。

121．求下列函数在指定点 z_0 的留数：（1）$\frac{e^{z^2}}{z-1}$，$z_0=1$；（2）$\frac{e^{z^2}}{\left(z-1\right)^2}$，$z_0=1$；

（3）$\left(\frac{z}{1-\cos z}\right)^2$，$z_0=0$；（4）$\frac{z^2}{z^4-1}$，$z_0=i$；（5）$\frac{1}{z^2\sin z}$，$z_0=0$；（6）$\frac{1+e^z}{z^4}$，$z_0=0$；

（7）$\frac{e^z}{\left(z^2-1\right)^2}$，$z_0=1$；（8）$\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{z}}$，$z_0=-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$，$n=0,1,2,\cdots$。

（1）$\operatorname{res}f\left(1\right)=\lim_{z\to1}\left(z-1\right)f\left(z\right)=e$。

（2）$\operatorname{res}f\left(1\right)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left[\left(z-1\right)^2f\left(z\right)\right]=2e$。

（3）$1-\cos z=1-\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+-\cdots\right)=\frac{1}{2}z^2\left(1-\frac{1}{12}z^2+\frac{1}{360}z^4-+\cdots\right)$,

$$\left(\frac{z}{1-\cos z}\right)^2=4z^{-2}\left(1-\frac{1}{12}z^2+\frac{1}{360}z^4-+\cdots\right)^{-2}=4z^{-2}\left[1+2\left(\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{360}z^4+-\cdots\right)+O\left(z^4\right)\right]$$

$$=4z^{-2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{45}z^2+\cdots$$

所以 $\operatorname{res}f\left(0\right)=0$。

（4）$f(z)=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)}$，$i$ 是一阶极点。$\operatorname{res} f(i)=\lim\limits_{z\to i}(z-i)f(z)=-\dfrac{1}{4}i$。

（5）显然 0 是三阶极点。$\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d^2}{dz^2}z^3 f(z)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z\left(1+\cos^2 z\right)-\sin 2z}{\sin^3 z}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{3\sin^2 z-2z\sin z\cos z}{3\sin^2 z\cos z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\cos z}-\frac{2z}{3\sin z}\right)=\frac{1}{6}$$

（6）$\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{3!}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d^3}{dz^3}z^4 f(z)=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{z\to 0}e^z=\dfrac{1}{6}$。

（7）$\operatorname{res} f(1)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{d}{dz}(z-1)^2 f(z)=0$。

（8）$\operatorname{res} f\left[-\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2\right]=\lim\limits_{z\to-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2}\left[z+\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2\right]f(z)$

$$=\lim_{z\to-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2}\frac{2\left[z+\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2\right]}{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}=\lim_{z\to-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2}\frac{4\sqrt{z}}{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}=(-1)^n(2n+1)\pi$$

122．求下列函数在奇点处的留数：（1）$\dfrac{1}{z^3-z^5}$；（2）$\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^{m+1}}$；（3）$\dfrac{z}{1-\cos z}$；

（4）$\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{sh}\sqrt{z}}$；（5）$e^{\frac{1}{1-z}}$；（6）$\cos\sqrt{\dfrac{1}{z}}$；（7）$\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$；

（8）$\dfrac{1}{z}\left[1+\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(z+1)^n}\right]$。

（1）$f(z)=\dfrac{1}{z^3(z+1)(z-1)}$，0 是三阶极点，$\pm 1$ 是一阶极点。$f(1/t)=\dfrac{t^5}{t^2-1}$，$\infty$ 点是可去奇点。$\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d^2}{dz^2}z^3 f(z)=1$，$\operatorname{res} f(1)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)=\dfrac{1}{2}$，

$\operatorname{res} f(-1)=\lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z)=\dfrac{1}{2}$。

（2）$\pm i$ 是 $m+1$ 阶极点，∞ 点是可去奇点。

$$\operatorname{res} f(i)=\frac{1}{m!}\lim_{z\to i}\frac{d^m}{dz^m}\frac{1}{(z+i)^{m+1}}=\frac{1}{m!}\lim_{z\to i}\frac{(-1)^m(m+1)(m+2)\cdots(2m)}{(z+i)^{2m+1}}$$

$$=\frac{1}{(m!)^2}\frac{(-1)^m(2m)!}{(2i)^{2m+1}}=-i\frac{(2m)!}{(m!)^2 2^{2m+1}}$$

$$\operatorname{res} f(-i)=i\frac{(2m)!}{(m!)^2 2^{2m+1}}$$

（3）可看出 0 是一阶极点，$2n\pi$ （$n=\pm1,\pm2,\cdots$）是二阶极点，∞ 点是非孤立奇点。

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{2\sin^2\frac{z}{2}}=2\text{。}$$

$$1-\cos z=1-\cos(z-2n\pi)=\frac{1}{2}(z-2n\pi)^2\left[1-\frac{1}{12}(z-2n\pi)^2+\frac{1}{360}(z-2n\pi)^4-+\cdots\right]$$

$$\frac{z}{1-\cos z}=(z-2n\pi)\left[1-\cos(z-2n\pi)\right]^{-1}+2n\pi\left[1-\cos(z-2n\pi)\right]^{-1}$$

$$=2(z-2n\pi)^{-1}\left[1+\frac{1}{12}(z-2n\pi)^2+O(z-2n\pi)^4\right]$$

$$+4n\pi(z-2n\pi)^{-2}\left[1+\frac{1}{12}(z-2n\pi)^2+O(z-2n\pi)^4\right]$$

$$=4n\pi(z-2n\pi)^{-2}+2(z-2n\pi)^{-1}+\frac{n\pi}{3}+\frac{1}{6}(z-2n\pi)+\cdots$$

即 $\operatorname{res} f(2n\pi)=2$。

（4） $f(z)=\dfrac{2\sqrt{z}}{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}$，奇点是 $-k^2\pi^2$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$），∞ 点是非孤立奇点。

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2}{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}=1$，所以 0 是可去奇点，$\operatorname{res} f(0)=0$。$k\neq 0$ 时，

$$\operatorname{res} f(-k^2\pi^2)=\lim_{z\to -k^2\pi^2}\frac{2(z+k^2\pi^2)\sqrt{z}}{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}=\lim_{z\to -k^2\pi^2}\frac{4z+2(z+k^2\pi^2)}{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}=(-1)^{k+1}2k^2\pi^2\text{。}$$

（5） $f(z)=1+\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^2+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^3+\cdots=1-(z-1)^{-1}+\dfrac{1}{2}(z-1)^{-2}-\dfrac{1}{3!}(z-1)^{-3}+-\cdots$

即 $\operatorname{res} f(1)=-1$。由于 $f(z)$ 只有两个孤立奇点 $1,\infty$，所以 $\operatorname{res} f(\infty)=-\operatorname{res} f(1)=1$。

（6） $f(z)=1-\frac{1}{2!}\left(\sqrt{\frac{1}{z}}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\sqrt{\frac{1}{z}}\right)^4-+\cdots=1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{24}z^{-2}-+\cdots$

即 $\operatorname{res} f(0)=-\frac{1}{2}$。$\operatorname{res} f(\infty)=-\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2}$。

（7）若规定 $\ln z\big|_{z=1}=0$ ，则 1 是二阶极点。此时

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z)=\lim_{z\to1}\frac{z\ln z-z+1}{z(\ln z)^2}=\lim_{z\to1}\frac{1}{\ln z+2}=\frac{1}{2}\text{。}$$

若规定 $\ln z\big|_{z=1}=2k\pi i$（$k=\pm1,\pm2,\cdots$），则 1 是一阶极点。此时

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{1}{\ln z}=\frac{1}{2k\pi i}\text{。}$$

（8） $\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to0}zf(z)=n+1$。

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} f(-1)&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z+1)^n f(z)\right]\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\frac{1}{z}\left[(z+1)^n+(z+1)^{n-1}+\cdots+(z+1)+1\right]\right\}\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{1}{z}\left(z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+n+1\right)\right]\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^{n-1}+a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_1+\frac{n+1}{z}\right)\\
&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\left[(n-1)!+0+\cdots+0+(n+1)\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}\right]\\
&=-n
\end{aligned}$$

$\operatorname{res} f(\infty)=-\operatorname{res} f(0)-\operatorname{res} f(-1)=-1$。

123．指出下列函数在 ∞ 点的性质，并求其留数：（1） $\frac{1}{z}$；（2） $\frac{\cos z}{z}$；（3） $\frac{z}{\cos z}$；

（4） $\frac{z^2+1}{e^z}$；（5） $e^{-\frac{1}{z^2}}$；（6） $\sqrt{(z-1)(z-2)}$。

（1） $f(1/t)=t$，所以 ∞ 是可去奇点。∞ 点的留数等于 $-f(1/t)$ 在 $t=0$ 点邻域内幂级数展开中 t 的系数，即 $\operatorname{res} f(\infty)=-1$。

（2） $f\left(1/t\right)=t\cos\frac{1}{t}=t\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{t^4}-+\cdots\right)=t-\frac{1}{2}t^{-1}+\frac{1}{24}t^{-3}-+\cdots$，

即∞是本性奇点，$\operatorname{res} f\left(\infty\right)=-1$。

（3）易知$z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$是奇点，由于$\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\to\infty$，所以$\infty$是非孤立奇点。

（4） $f\left(1/t\right)=\left(\frac{1}{t^2}+1\right)e^{-t^{-1}}=t^{-2}\left(1-t^{-1}+\frac{1}{2}t^{-2}-+\cdots\right)+\left(1-t^{-1}+\frac{1}{2}t^{-2}-+\cdots\right)$

$$=1-t^{-1}+\frac{3}{2}t^{-2}+\cdots$$

即∞是本性奇点，$\operatorname{res} f\left(\infty\right)=0$。

（5） $f\left(1/t\right)=e^{-t^2}$，$\infty$点为可去奇点，$\operatorname{res} f\left(\infty\right)=0$。

（6） $f\left(1/t\right)=\frac{\sqrt{\left(1-t\right)\left(1-2t\right)}}{t}$，0 为 $f\left(1/t\right)$的一阶极点，故∞点为 $f\left(z\right)$的一阶极点。

1 和 1/2 是 $f\left(1/t\right)$的分枝点。规定$\arg\left(1-t\right)_{t=0}=2n\pi,\arg\left(1/2-t\right)_{t=0}=2m\pi$，则

$$\left(\sqrt{1-t}\right)^{(k)}_{t=0}=\left(-1\right)^k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\left.\frac{\sqrt{1-t}}{\left(1-t\right)^k}\right|_{t=0}=\left(-1\right)^n\left(-1\right)^k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)$$

$$\left(\sqrt{1-2t}\right)^{(k)}_{t=0}=\left(-2\right)^k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)\left.\frac{\sqrt{1-2t}}{\left(1-2t\right)^k}\right|_{t=0}=\left(-1\right)^m\left(-2\right)^k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)$$

$$f\left(1/t\right)=\left(-1\right)^{n+m}t^{-1}\left(1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{16}t^3+\cdots\right)\left(1-t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3+\cdots\right)$$

$$=\left(-1\right)^{n+m}\left(t^{-1}-\frac{3}{2}-\frac{1}{8}t-\frac{7}{16}t^2+\cdots\right)$$

即$\operatorname{res} f\left(\infty\right)=\left(-1\right)^{n+m}\frac{1}{8}$。

124. 设 $f\left(z\right)$在$z=\infty$的邻域内展开为 $f\left(z\right)=C_0+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^2}+\cdots$，试求 $f^2\left(z\right)$在$z=\infty$处的留数。

$$f\left(z\right)=C_0\left(1+\frac{C_1}{C_0}z^{-1}+\frac{C_2}{C_0}z^{-2}+\cdots\right)$$

$$f^2(z)=C_0^2\left[1+\left(\frac{C_1}{C_0}z^{-1}+\frac{C_2}{C_0}z^{-2}+\cdots\right)\right]^2=C_0^2\left[1+2\left(\frac{C_1}{C_0}z^{-1}+\frac{C_2}{C_0}z^{-2}+\cdots\right)+O\left(z^{-2}\right)\right]$$

$$=C_0^2+2C_0C_1z^{-1}+O\left(z^{-2}\right)$$

$f(z)$在∞点的留数等于$-f(z)$在$z=\infty$点邻域内幂级数展开中z^{-1}的系数，即$-2C_0C_1$。

125．证明：若除有限个奇点外，$f(z)$在扩充z平面上解析，则函数$f(z)$的留数和为 0。

证：设z_k（$k=1,2,\cdots n$）是$f(z)$的有限奇点，C_k是包围z_k的逆时针闭曲线（不包围其它奇点），C为顺时针包围所有有限奇点的闭曲线。

$$\operatorname{res} f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_k} f(z)dz=-\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k)$$

所以$\operatorname{res} f(\infty)+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k)=0$。

126． $f(z)$为偶函数，$z=0$是他的孤立奇点，证明$\operatorname{res} f(0)=0$。

因为$f(z)$为偶函数，所以$f(z)$在$z=0$附近的幂级数展开式中无奇数项，当然也没有z^{-1}项，因此$\operatorname{res} f(0)=0$。

127．$f(z)$和$g(z)$分别以$z=0$为其m阶和n阶零点，问下列函数在$z=0$处的性质如何？

（1） $f(z)+g(z)$；（2） $f(z)\cdot g(z)$；（3） $\dfrac{f(z)}{g(z)}$；（4） $f\left[g(z)\right]$。

设$f(z)=z^m\varphi(z)$，$g(z)=z^n\Psi(z)$。其中$\varphi(z)$和$\Psi(z)$都在$z=0$的某邻域内解析，且$\varphi(0)\neq 0$，$\Psi(0)\neq 0$。

（1）设$m<n$，则$f(z)+g(z)=z^m\left[\varphi(z)+z^{n-m}\Psi(z)\right]$，由于$\varphi(z)+z^{n-m}\Psi(z)$是不以$z=0$为零点，在$z=0$的某邻域内的解析函数，所以$z=0$是$f(z)+g(z)$的$m$阶零点。

当$m\neq n$时，$z=0$是$f(z)+g(z)$的$\min\{m,n\}$阶零点。

若$m=n$，则$f(z)+g(z)=z^m\left[\varphi(z)+\Psi(z)\right]$，$z=0$有可能是$\varphi(z)+\Psi(z)$的零点，所以$z=0$是$f(z)+g(z)$的$k$阶零点（$k\geq m=n$）。

（2）$f(z)\cdot g(z)=z^{m+n}\varphi(z)\cdot\Psi(z)$，所以$z=0$是$f(z)\cdot g(z)$的$m+n$阶零点。

（3）若$m>n$，则$\dfrac{f(z)}{g(z)}=z^{m-n}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$，由于 0 不是$\Psi(z)$的零点，所以$\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$在$z=0$的某邻域内解析，即$z=0$是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的$m-n$阶零点。

若$m<n$，则$\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{1}{z^{n-m}}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$，即$z=0$是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的$n-m$阶极点。

若$m=n$，则$\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$，$z=0$是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的可去奇点。

（4）$f\left[g(z)\right]=z^{mn}\Psi^m(z)\varphi\left[z^n\Psi(z)\right]$，$z=0$不是$\Psi^m(z)\varphi\left[z^n\Psi(z)\right]$的零点，且他在$z=0$的某邻域内解析，所以$z=0$是$f\left[g(z)\right]$的$mn$阶零点。

128．$f(z)$和$g(z)$分别以$z=0$为其m阶和n阶极点，问下列函数在$z=0$处的性质如何？

（1）$f(z)+g(z)$；（2）$f(z)\cdot g(z)$；（3）$\dfrac{f(z)}{g(z)}$；（4）$f\left[\dfrac{1}{g(z)}\right]$。

设$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z^m}$，$g(z)=\dfrac{\Psi(z)}{z^n}$。其中$\varphi(z)$和$\Psi(z)$都在$z=0$的某邻域内解析，且$\varphi(0)\neq 0$，$\Psi(0)\neq 0$。

（1）若$m<n$，则$f(z)+g(z)=\dfrac{z^{n-m}\varphi(z)+\Psi(z)}{z^n}$，$z^{n-m}\varphi(z)+\Psi(z)$是不以$z=0$为零点，在$z=0$的某邻域内的解析函数，所以$z=0$是$f(z)+g(z)$的$n$阶极点。

若$m\neq n$，$z=0$是$f(z)+g(z)$的$\max\{m,n\}$阶极点。

若$m=n$，$f(z)+g(z)=\dfrac{\varphi(z)+\Psi(z)}{z^n}$，$z=0$有可能是$\varphi(z)+\Psi(z)$的零点，所以$z=0$

是 $f(z)+g(z)$ 的 k 阶极点（$k\le m=n$）。

（2） $f(z)\cdot g(z)=\dfrac{\varphi(z)\Psi(z)}{z^{m+n}}$， $z=0$ 是 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点。

（3）若 $m<n$， $\dfrac{f(z)}{g(z)}=z^{n-m}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$， $z=0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶零点；

若 $m>n$， $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{1}{z^{m-n}}\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$， $z=0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点；

若 $m=n$， $\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$， $z=0$ 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点。

（4） $f\left[\dfrac{1}{g(z)}\right]=\dfrac{1}{z^{mn}}\varphi\left[\dfrac{z^n}{\Psi(z)}\right]\Psi^m(z)$， $z=0$ 是 $f\left[\dfrac{1}{g(z)}\right]$ 的 mn 阶极点。

129．讨论 $F(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{d}{dz}\ln f(z)$ 在 $z=a$ 点的性质，若 a 点是 $f(z)$ 的：（1） m 阶零点；（2） m 阶极点。如果 $z=a$ 是 $F(z)$ 的孤立奇点的话，则求出函数 $F(z)$ 在该点的留数。

（1）设 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 的某邻域内解析，且 $\varphi(a)\ne 0$。

$F(z)=\dfrac{d}{dz}\left[m\ln(z-a)+\ln\varphi(z)\right]=\dfrac{1}{z-a}\left[m+(z-a)\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]$。

由于 $z=a$ 不是 $\varphi(z)$ 的零点，所以 $m+(z-a)\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ 在 $z=a$ 的某邻域内解析，且 $z=a$ 不是它的零点，所以 $z=a$ 是 $F(z)$ 的一阶极点， $\operatorname{res}F(a)=\lim\limits_{z\to a}(z-a)F(z)=m$。

（2）设 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，则 $F(z)=\dfrac{1}{z-a}\left[-m+(z-a)\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]$， $z=a$ 是 $F(z)$ 的一阶极点， $\operatorname{res}F(a)=\lim\limits_{z\to a}(z-a)F(z)=-m$。

130．设 $\varphi(z)$ 在 $z=a$ 点解析，且 $\varphi(a)\ne 0$。若（1） a 是 $f(z)$ 的 n 阶零点，（2） a 是 $f(z)$

的n阶极点，试求函数$F(z)=\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在$z=a$点的留数。

（1）由上题结论，$z=a$是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一阶极点，留数为n。因为$\varphi(z)$在$z=a$点解析，且$\varphi(a)\neq 0$，所以$z=a$是$F(z)$的一阶极点，

$$\operatorname{res}F(a)=\lim_{z\to a}(z-a)\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\lim_{z\to a}\varphi(z)\cdot\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f'(z)}{f(z)}=n\varphi(a)\text{。}$$

（2）$\operatorname{res}F(a)=-n\varphi(a)$。

131．设C是区域G内的任意一条简单闭曲线，a为C包围区域内一点。若函数$f(z)$在G内解析，且$f(a)=0$，$f'(a)\neq 0$，此外，$f(z)$在$\bar{G}$中无其它零点。试证：$a=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{zf'(z)}{f(z)}dz$。

证：可知a为$f(z)$的一阶零点。若$a\neq 0$，由上题结论，$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$在$z=a$点留数为a，因为$f(z)$在$\bar{G}$中无其它零点，则$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$无其他奇点，所以$\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{zf'(z)}{f(z)}dz=a$，

若$a=0$，则$z=a=0$是$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$的可去奇点，即$\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$在C包围区域内解析，故有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=0=a\text{。}$$

132．若$z=0$是$f(z)$的n阶零点，试求下列函数在$z=0$处的留数：（1）$\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$；

（2）$\dfrac{f''(z)}{f(z)}$。

设$f(z)=z^n\varphi(z)$，其中$\varphi(z)$在$z=0$的某邻域内解析，且$\varphi(0)\neq 0$。

（1）$F(z)=\dfrac{f''(z)}{f'(z)}=\dfrac{n(n-1)z^{n-2}\varphi(z)+2nz^{n-1}\varphi'(z)+z^n\varphi''(z)}{nz^{n-1}\varphi(z)+z^n\varphi'(z)}$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{n(n-1)\varphi(z)+2nz\varphi'(z)+z^2\varphi''(z)}{n\varphi(z)+z\varphi'(z)}$$

可判断 $z=0$ 是其一阶极点，有 $\operatorname{res}F(0)=\lim\limits_{z\to 0}zF(z)=n-1$。

（2）$F(z)=\dfrac{f''(z)}{f(z)}=\dfrac{n(n-1)z^{n-2}\varphi(z)+2nz^{n-1}\varphi'(z)+z^n\varphi''(z)}{z^n\varphi(z)}$

$$=\frac{1}{z^2}\frac{n(n-1)\varphi(z)+2nz\varphi'(z)+z^2\varphi''(z)}{\varphi(z)}$$

$z=0$ 是其二阶极点。$\operatorname{res}F(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d}{dz}\left[z^2F(z)\right]=2n\dfrac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}$。

可设 $\varphi(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$，则 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n+1}+a_2z^{n+2}+\cdots$

$\varphi(0)=a_0=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，$\varphi'(0)=a_1=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$，$\operatorname{res}F(0)=\dfrac{2n}{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}$。

133．求下列各种条件下函数 $F(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在奇点 z_0 处的留数：

（1）z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，是 $g(z)$ 的 $m+1$ 阶零点；

（2）z_0 是 $g(z)$ 的二阶零点，但 $f(z_0)\neq 0$；

（3）z_0 是 $f(z)$ 的一阶零点，是 $g(z)$ 的三阶零点；

（4）z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，是 $g(z)$ 的一阶零点；

（1）设 $f(z)=a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$，其中 $a_0=\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!},a_1=\dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!},\cdots$

$g(z)=b_0(z-z_0)^{m+1}+b_1(z-z_0)^{m+2}+\cdots$，其中 $b_0=\dfrac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!},b_1=\dfrac{g^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!},\cdots$

$$\operatorname{res}F(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)F(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots}{b_0(z-z_0)^m+b_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots}{b_0+b_1(z-z_0)+\cdots}=\frac{a_0}{b_0}=(m+1)\frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)}。$$

（2）设 $g(z)=(z-z_0)^2\Psi(z)$，则 $\Psi(z_0)=\frac{1}{2}g''(z_0)$， $\Psi'(z_0)=\frac{1}{6}g'''(z_0)$。

$$\operatorname{res}F(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2F(z)\right]=\frac{f'(z_0)}{\Psi(z_0)}-\frac{f(z_0)\Psi'(z_0)}{\Psi^2(z_0)}=2\frac{f'(z_0)}{g''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{f(z_0)g'''(z_0)}{\left[g''(z_0)\right]^2}。$$

（3）设 $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$，则 $\varphi(z_0)=f'(z_0)$， $\varphi'(z_0)=\frac{1}{2}f''(z_0)$。

$g(z)=(z-z_0)^3\Psi(z)$，则 $\Psi(z_0)=\frac{1}{6}g'''(z_0)$， $\Psi'(z_0)=\frac{1}{24}g^{(4)}(z_0)$。

$$\operatorname{res}F(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2F(z)\right]=\frac{\varphi'(z_0)}{\Psi(z_0)}-\frac{\varphi(z_0)\Psi'(z_0)}{\Psi^2(z_0)}=3\frac{f''(z_0)}{g'''(z_0)}-\frac{3}{2}\frac{f'(z_0)g^{(4)}(z_0)}{\left[g'''(z_0)\right]^2}。$$

（4）设 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$，则 $\varphi(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$， $\varphi'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)f(z)\right]$。

$g(z)=(z-z_0)\Psi(z)$，则 $\Psi(z_0)=g'(z_0)$， $\Psi'(z_0)=\frac{1}{2}g''(z_0)$。

$$\operatorname{res}F(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2F(z)\right]=\frac{\varphi'(z_0)}{\Psi(z_0)}-\frac{\varphi(z_0)\Psi'(z_0)}{\Psi^2(z_0)}=\frac{\varphi'(z_0)}{g'(z_0)}-\frac{1}{2}\frac{\varphi(z_0)g''(z_0)}{\left[g'(z_0)\right]^2}。$$

134．若函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中解析， $g(z)$ 在 G 内有有限个一阶零点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，而 $g(0)\neq 0$，试计算积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{zg(z)}dz$，其中 C 是 G 的边界，且 $z=0$ 在 G 内。

令 $F(z)=\frac{f(z)}{zg(z)}$，则 $\operatorname{res}F(0)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(0)}{g(0)}$，

$$\operatorname{res}F(a_k)=\lim_{z\to 0}\frac{(z-a_k)f(z)}{zg(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z\,\frac{g(z)-g(a_k)}{(z-a_k)}}=\frac{f(a_k)}{a_kg'(a_k)}，（k=1,2,\cdots n）$$

所以 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{zg(z)}dz=\frac{f(0)}{g(0)}+\frac{f(a_1)}{a_1g'(a_1)}+\frac{f(a_2)}{a_2g'(a_2)}+\cdots+\frac{f(a_n)}{a_ng'(a_n)}$。

135．计算下列积分值：

（1）$\oint_C \frac{dz}{1+z^4}$，C 为 $|z-1|=2$ 或 $|z-1|=1$；

（2）$\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$，$C$ 为：(i) $|z|=\frac{1}{2}$，(ii) $|z-1|=1$，(iii) $|z|=3$；

（3）$\oint_{|z|=R} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz$，$n<R^3<n+1$，$n$ 为正整数；

（4）$\oint_{|z|=n} \tan\pi z dz$，$n$ 为正整数；

（5）$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3\left(z^{10}-2\right)}dz$；（6）$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}dz$；（7）$\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}}dz$；

（8）$\oint_{|z|=R} \frac{e^z}{\operatorname{sh} mz}dz$，$\frac{n}{m}\pi<R<\frac{n+1}{m}\pi$，$m,n$ 均为正整数。

（1）被积函数有四个一阶极点：$e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$，$e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$。

$$\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\left(z-e^{i\pi/4}\right)f(z)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i),$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{-i\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{-i\pi/4}}\left(z-e^{-i\pi/4}\right)f(z)=\frac{1}{4\sqrt{2}}(-1+i),$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{i3\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{i3\pi/4}}\left(z-e^{i3\pi/4}\right)f(z)=\frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i),$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{-i3\pi/4}\right)=\lim_{z\to e^{-i3\pi/4}}\left(z-e^{-i3\pi/4}\right)f(z)=\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)。$$

若 C 为 $|z-1|=2$，则 C 包围四个极点，

原积分 $=2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/4}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{-i\pi/4}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i3\pi/4}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{-i3\pi/4}\right)\right]=0$。

若 C 为 $|z-1|=1$，则 C 包围两个极点 $e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$，

原积分 $=2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/4}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{-i\pi/4}\right)\right]=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$。

（2）$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\operatorname{res} f(-1)=\lim_{z\to1}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$。

(i) C 不包围两个极点 ±1，所以原积分=0。

(ii) C 包围 1，原积分 $=2\pi i\cdot\text{res } f(1)=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}i$。

(iii) C 包围 ± 1，原积分 $=2\pi i\left[\text{res } f(1)+\text{res } f(-1)\right]=\sqrt{2}\pi i$。

（3）被积函数具有一阶极点 0，$\pm\sqrt[3]{k}$，$\sqrt[3]{k}e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$，$\sqrt[3]{k}e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$。（$k=1,2,\cdots$）

$$\text{res } f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{e^{2\pi i z^3}-1}=\frac{1}{2\pi i},$$

$$\text{res } f\left(\pm\sqrt[3]{k}\right)=\lim_{z\to\pm\sqrt[3]{k}}\frac{\left(z\mp\sqrt[3]{k}\right)z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}=\lim_{z\to\pm\sqrt[3]{k}}\frac{z^2+2z\left(z\mp\sqrt[3]{k}\right)}{6\pi i z^2 e^{2\pi i z^3}}=\frac{1}{6\pi i},$$

$$\text{res } f\left(\sqrt[3]{k}e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{1}{6\pi i},\quad \text{res } f\left(\sqrt[3]{k}e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\right)=\frac{1}{6\pi i}。$$

$|z|=R$（$\sqrt[3]{n}<R<\sqrt[3]{n+1}$）包围 0，$\pm\sqrt[3]{k}$，$\sqrt[3]{k}e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$，$\sqrt[3]{k}e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$。（$k=1,2,\cdots,n-1,n$）

共 $6n+1$ 个奇点。原积分 $=2\pi i\left(6n\cdot\dfrac{1}{6\pi i}+\dfrac{1}{2\pi i}\right)=2n+1$。

（4）被积函数有一阶极点 $k+\dfrac{1}{2}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。

$$\text{res } f\left(k+\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to k+\frac{1}{2}}\frac{\left(z-k-\frac{1}{2}\right)\sin\pi z}{\cos\pi z}=\lim_{z\to k+\frac{1}{2}}\frac{\sin\pi z+\pi\left(z-k-\frac{1}{2}\right)\cos\pi}{-\pi\sin\pi z}=-\frac{1}{\pi}。$$

$|z|=n$ 包围 $k+\dfrac{1}{2}$（$k=-n,-(n-1),\cdots,0,1,\cdots,n-1$）共 $2n$ 个奇点。

原积分 $=2\pi i\left[2n\cdot\left(-\dfrac{1}{\pi}\right)\right]=-4ni$。

（5）被积函数 $f(z)$ 有三阶极点 0，一阶极点 $\pm\sqrt[10]{2}$，$\sqrt[10]{2}e^{\pm i\frac{k\pi}{5}}$，（$k=1,2,3,4$）

$f(1/t)=\dfrac{t^{13}}{1-2t^{10}}$，可看出 ∞ 点为解析点，即 ∞ 点留数为 0，所以所有有限奇点留数之和为 0，而 $|z|=2$ 包围所有有限奇点，所以原积分=0。

（6）$\text{res } f(0)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{z\to0}\dfrac{d^2}{dz^2}e^z=\dfrac{1}{2}$，原积分 $=2\pi i\cdot\dfrac{1}{2}=\pi i$。

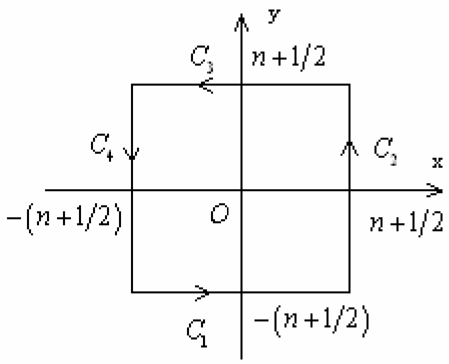
（7）$f(z)=1+z^{-2}+\dfrac{1}{2}z^{-4}+\cdots$，所以 $\text{res } f(0)=0$，原积分=0。

（8）被积函数有一阶极点 $i\dfrac{k}{m}\pi$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。

$$\operatorname{res} f\left(i\frac{k}{m}\pi\right)=\lim_{z\to ik\pi/m}\frac{(z-ik\pi/m)e^z}{\operatorname{sh} mz}=\frac{(-1)^k}{m}e^{i\frac{k}{m}\pi}\text{。}$$

$$\text{原积分}=2\pi i\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{res} f\left(i\frac{k}{m}\pi\right)=\frac{2\pi i}{m}\sum_{k=-n}^{n}\left(-e^{i\frac{\pi}{m}}\right)^k=(-1)^n\frac{2\pi i}{m}\frac{\cos\frac{2n+1}{2m}\pi}{\cos\frac{\pi}{2m}}\text{。}$$

136．计算积分 $\displaystyle\oint_{C_n}\frac{\cot\pi z}{z^2}dz$，其中 C_n 是以 $\left(\pm\dfrac{2n+1}{2},\pm\dfrac{2n+1}{2}\right)$ 为顶点的正方形。令 $n\to\infty$，就得到级数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$ 之和。若把被积函数换成 $\dfrac{\csc\pi z}{z^2}$，又能得到什么结果？



被积函数 $f(z)=\dfrac{\cot\pi z}{z^2}$ 三阶极点 0 和一阶极点 k（$k=\pm1,\pm2,\cdots$）。

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}(z\cot\pi z)=\pi\lim_{z\to0}\frac{\pi z\cos\pi z-\sin\pi z}{\sin^3\pi z}=-\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{res} f(k)=\lim_{z\to0}\frac{(z-k)\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}=\frac{1}{\pi k^2}\text{。}$$

$$\text{所以}\oint_{C_n}\frac{\cot\pi z}{z^2}dz=2\pi i\left[\operatorname{res} f(0)+\sum_{\substack{k=-n\\k\neq0}}^{n}\operatorname{res} f(k)\right]=2\pi i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)\text{。}$$

在 C_1 上有 $|\cot\pi z|=\left|\dfrac{\cos\pi[x-i(n+1/2)]}{\sin\pi[x-i(n+1/2)]}\right|\le\dfrac{\operatorname{ch}\pi(n+1/2)}{\operatorname{sh}\pi(n+1/2)}=\coth\pi(n+1/2)$，（参考习题 02 的第 43 题）易证 $\coth x$ 为单调减函数，所以有 $|\cot\pi z|\le\coth\dfrac{3\pi}{2}$。（$n\ge1$）

上式在C_3上同样成立。

在C_2上有$\left|\cot\pi z\right| = \left|\dfrac{\cos\pi\left[\left(n+1/2\right)+iy\right]}{\sin\pi\left[\left(n+1/2\right)+iy\right]}\right|$

$$\le \frac{\operatorname{ch}\pi y}{\sqrt{\sin^2\pi\left(n+1/2\right)\operatorname{ch}^2\pi y+\cos^2\pi\left(n+1/2\right)\operatorname{sh}^2\pi y}} \le \frac{\operatorname{ch}\pi y}{\left|\sin\pi\left(n+1/2\right)\operatorname{ch}\pi y\right|} = 1$$

上式在C_4上同样成立。所以在C_n上有$\left|\cot\pi z\right| \le M = \max\left\{\coth\dfrac{3\pi}{2},1\right\}$。

在C_n上有$\left|z\right| \ge n+\dfrac{1}{2}$，由此得$\left|\oint_{C_n}\dfrac{\cot\pi z}{z^2}dz\right| \le \oint_{C_n}\dfrac{\left|\cot\pi z\right|}{\left|z\right|^2}\left|dz\right| \le M\cdot\dfrac{1}{\left(n+1/2\right)^2}\cdot 4\left(2n+1\right)$。

所以当$n\to\infty$时有$\oint_{C_n}\dfrac{\cot\pi z}{z^2}dz \to 0$。由此可得$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$。

若令$f\left(z\right) = \dfrac{\csc\pi z}{z^2}$，则有$\operatorname{res} f\left(0\right) = \dfrac{\pi}{6}$，$\operatorname{res} f\left(k\right) = \dfrac{\left(-1\right)^k}{\pi k^2}$。

$\oint_{C_n}\dfrac{\csc\pi z}{z^2}dz = 2\pi i\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\left(-1\right)^k}{k^2}\right)$。

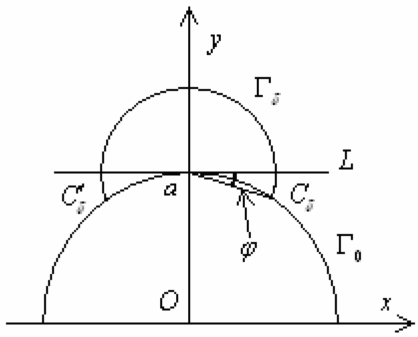
同样可得当$n\to\infty$时，$\oint_{C_n}\dfrac{\csc\pi z}{z^2}dz \to 0$，所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{k+1}}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$。

137．如果 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 中有奇点，通过变换 $z=e^{i\theta}$， $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 变为 $f(z)=R\left(\dfrac{z^2-1}{2iz},\dfrac{z^2+1}{2z}\right)$，则 $f(z)$ 在单位圆周 $|z|=1$ 上有奇点。设这些奇点 β_k（$k=1,2,\cdots m$）均为一阶奇点，证明：

$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=2\pi\sum_{|z|<1}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}+\pi\sum_{k=1}^{m}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}\text{。}$$

其中 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 表示 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数。

证：



如上图，Γ_0 是以原点为圆心，a 为半径的上半圆，Γ_δ 是以 $(0,a)$ 为圆心，δ 为半径的圆被 Γ_0 截断的圆外部分。L 是 Γ_0 过点 $(0,a)$ 的切线，C_δ 和 C'_δ 是 Γ_δ 夹在 Γ_0 和 L 之间的部分，Γ_δ 的上半圆部分 $\Gamma'_\delta=\Gamma_\delta-C_\delta-C'_\delta$。

参考第 86 题（习题 04）的证明，设 $(z-a)f(z)$ 在 Γ_δ 上一致趋于 k，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 δ' 满足 $0<\delta'<\varepsilon$，使得当 $\delta<\delta'<\varepsilon$ 时有

$$\left|\int_{C_\delta}f(z)dz\right|=\left|\int_{C_\delta}f(z)dz-ik\varphi+ik\varphi\right|\le\left|\int_{C_\delta}f(z)dz-ik\varphi\right|+k\varphi<(\varepsilon+k)\varphi\text{。}$$

由上图可解出 $\varphi=\arctan\dfrac{\delta}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2}}$，则 $\varphi\le\dfrac{\delta}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta}{2a}\right)^2}}<\dfrac{\delta'}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta'}{2a}\right)^2}}$（这是关于 δ 的单调增函数）。只要上面的 δ' 足够小就有

$$\varphi<\frac{\delta'}{2a\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta'}{2a}\right)^2}}<\frac{\delta'}{2a}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta'}{2a}\right)^2\right]<\frac{\delta'}{2a}\left(1+\frac{1}{8a^2}\right)<\frac{1}{2a}\left(1+\frac{1}{8a^2}\right)\varepsilon\text{，}$$

所以$\left|\int_{C_\delta} f(z)dz\right| < \varepsilon\varphi + k\varphi < \frac{1}{2a}\left(1+\frac{1}{8a^2}\right)\left(k\varepsilon+\varepsilon^2\right)$，这就证明了$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = 0$。

所以$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{\Gamma_\delta} f(z)dz = \lim\limits_{\delta\to 0}\left[\int_{\Gamma'_\delta} f(z)dz + \int_{C_\delta} f(z)dz + \int_{C'_\delta} f(z)dz\right]$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_{\Gamma'_\delta} f(z)dz = k\pi i = \pi i \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]。$$

在单位圆上挖去奇点β_k，代之以以β_k为圆心，δ为半径，被单位圆截断的圆弧C_k（$k=1,2,\cdots m$），用C_0表示单位圆剩下的部分。这样构成一个包围单位圆内奇点和β_k（$k=1,2,\cdots m$）的围线$C=C_0+C_1+C_2+\cdots+C_m$。则

$$\oint_C \frac{f(z)}{iz}dz = 2\pi\sum_{|z|<1}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} + 2\pi\sum_{k=1}^{m}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}$$

又有$\lim\limits_{\delta\to 0}\oint_C \frac{f(z)}{iz}dz = \lim\limits_{\delta\to 0}\oint_{C_0}\frac{f(z)}{iz}dz + \lim\limits_{\delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{m}\oint_{C_k}\frac{f(z)}{iz}dz$

$$= \int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta + \pi i\sum_{k=1}^{m}\lim_{z\to\beta_k}\frac{(z-\beta_k)f(z)}{iz}$$

$$= \int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta + \pi\sum_{k=1}^{m}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}$$

所以有$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta = 2\pi\sum\limits_{|z|<1}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} + \pi\sum\limits_{k=1}^{m}\text{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}$。

138．计算下列积分：（1）$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}$，$0<p<1$；（2）$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$；

（3）$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$，$a>b>0$；（4）$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x dx$；（5）$\int_0^{2\pi}\exp\left(e^{i\theta}\right)d\theta$；

（6）$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$；（7）$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\sin^2\theta\right)^2}$；（8）$\int_0^{\pi}\cot(x-\alpha)dx$，$\text{Im}\,\alpha\neq 0$。

（1）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-2p\dfrac{z^2+1}{2z}+p^2}=-\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{(z-p)\left(z-\dfrac{1}{p}\right)}$，则 $\operatorname{res} f(p)=\dfrac{1}{1-p^2}$。

原积分 $=2\pi\operatorname{res} f(p)=\dfrac{2\pi}{1-p^2}$。

（2）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{2+\dfrac{z^2+1}{2z}}=\dfrac{2}{\left(z+2-\sqrt{3}\right)\left(z+2+\sqrt{3}\right)}$，则 $\operatorname{res} f\left(-2+\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

原积分 $=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$。

（3）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{\left(a+b\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}=\dfrac{4}{b^2}\dfrac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$，其中 $z_1=-\dfrac{a}{b}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}$，

$z_2=-\dfrac{a}{b}+\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}$。$-\dfrac{a}{b}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}<-\dfrac{a}{b}<-1$，所以 $|z_1|>1$，在单位圆外，

$|z_2|=\left|-\dfrac{a}{b}+\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}\right|=1\Bigg/\left|-\dfrac{a}{b}-\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}\right|<1$，在单位圆内。

$\operatorname{res} f(z_2)=\lim\limits_{z\to z_2}\dfrac{d}{dz}\left[(z-z_2)^2 f(z)\right]=\dfrac{a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}$，

所以原积分 $=\dfrac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}$。

（4）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}=\dfrac{1}{2^{2n}}\dfrac{\left(1+z^2\right)^{2n}}{z^{2n+1}}=\dfrac{1}{2^{2n}z^{2n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2n}\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!}z^{2k}$，

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}z^{2k}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left[1+a_1z+\cdots+\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^{2n}+\cdots+z^{4n}\right]_{z=0}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\left[0+0+\cdots+\frac{(2n)!}{(n!)^2}(2n)!+b_{2n+1}z+\cdots+b_{4n}z^{2n}\right]_{z=0}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

所以原积分$=2\pi\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=2\pi\dfrac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots2\cdot1}{2^{2n}n^2(n-1)^2(n-2)^2\cdots2^2\cdot1^2}$

$$=2\pi\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots2\cdot1}{(2n)^2(2n-2)^2(2n-4)^2\cdots2^2}=2\pi\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots2}$$

$$=2\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\text{。}$$

（5）令 $f(z)=\dfrac{1}{z}e^z$，则$\operatorname{res}f(0)=1$，原积分$=2\pi$。

（6）原积分$=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{2d\theta}{3-\cos2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{3-\cos\varphi}$。

令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{3-\dfrac{z^2+1}{2z}}=-\dfrac{2}{(z-3-2\sqrt{2})(z-3+2\sqrt{2})}$，则$\operatorname{res}f(3-2\sqrt{2})=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$。

原积分$=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$。

（7）原积分$=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{4d\theta}{(3-\cos2\theta)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{2d\varphi}{(3-\cos\varphi)^2}$。

令 $f(z)=\dfrac{1}{z}\dfrac{2}{\left(3-\dfrac{z^2+1}{2z}\right)^2}=\dfrac{8z}{(z-3-2\sqrt{2})^2(z-3+2\sqrt{2})^2}$，则

$\operatorname{res}f(3-2\sqrt{2})=\displaystyle\lim_{z\to3-2\sqrt{2}}\frac{d}{dz}\frac{8z}{(z-3-2\sqrt{2})^2}=\frac{3}{8\sqrt{2}}$，原积分$=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\pi$。

（8）令$\alpha=a+ib$，原积分$=i\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{e^{i(x-a-ib)}+e^{-i(x-a-ib)}}{e^{i(x-a-ib)}-e^{-i(x-a-ib)}}dx=i\int_0^{\pi}\frac{e^{i2(x-a-ib)}+1}{e^{i2(x-a-ib)}-1}dx$

$=\dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{-2a}^{2\pi-2a}\frac{e^{2b}e^{i\theta}+1}{e^{2b}e^{i\theta}-1}d\theta$（作代换$2(x-a)=\theta$），因为被积函数以$2\pi$为周期，所以

原积分$=\dfrac{i}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{2b}e^{i\theta}+1}{e^{2b}e^{i\theta}-1}d\theta=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{e^{2b}z+1}{z(e^{2b}z-1)}dz$。

记 $f(z)=\dfrac{z+e^{-2b}}{2z(z-e^{-2b})}$，则$\operatorname{res}f(0)=-\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{res}f(e^{-2b})=1$。

若$b>0$，原积分$=2\pi i\cdot\left[\operatorname{res} f\left(0\right)+\operatorname{res} f\left(e^{-2b}\right)\right]=\pi i$，

若$b<0$，原积分$=2\pi i\cdot\operatorname{res} f\left(0\right)=-\pi i$。

139．计算下列积分：（1）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$；（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$，$a>0,b>0$；

（3）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx$，$m,n$均为正整数，且$n>m$；（4）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$，$n$为正整数；

（5）$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$，$a>0$；　　（6）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+4}$；

（7）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x\cos\theta+1\right)}$，$\theta$为实数，且$\sin\theta\neq 0$；

（8）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2}}$。

（1）令$f\left(z\right)=\frac{z^2}{1+z^4}=\frac{z^2}{\left(z-e^{i\pi/4}\right)\left(z-e^{-i\pi/4}\right)\left(z-e^{i3\pi/4}\right)\left(z-e^{-i3\pi/4}\right)}$。

$\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/4}\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1-i\right)$，$\operatorname{res} f\left(e^{i3\pi/4}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+i\right)$。

所以$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/4}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i3\pi/4}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\pi$。

被积函数是偶函数，所以$\int_{0}^{\infty}f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}2\int_{0}^{b}f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\int_{-b}^{0}f\left(x\right)dx+\int_{0}^{b}f\left(x\right)dx\right]$
$=\frac{1}{2}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx$，即$\int_{0}^{\infty}f\left(x\right)dx$收敛，同样的，$\int_{-\infty}^{0}f\left(x\right)dx$也收敛，所以$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx$收敛，且等于$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$。后面类似的讨论省略。

（2）令$f\left(z\right)=\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)}=\frac{1}{\left(z+ai\right)\left(z-ai\right)\left(z+bi\right)\left(z-bi\right)}$，则

$\operatorname{res} f\left(ai\right)=\frac{i}{2a\left(a^2-b^2\right)}$，$\operatorname{res} f\left(bi\right)=-\frac{i}{2b\left(a^2-b^2\right)}$。

原积分$=\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}=2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(ai\right)+\operatorname{res} f\left(bi\right)\right]=\frac{\pi}{ab\left(a+b\right)}$。

（3）令 $f\left(z\right)=\frac{z^{2m}}{z^{2n}+1}$，它在上半平面的奇点是$e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}$（$k=0,1,2,\cdots n-1$）。

$$\operatorname{res} f\left[e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}\right]=\lim_{z\to e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}}\frac{z^{2m}}{\left(z^{2n}+1\right)'}=\lim_{z\to e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}}\frac{z^{2m-2n+1}}{2n}$$

$$=\frac{1}{2n}e^{ik\left(2m-2n+1\right)\frac{\pi}{n}}e^{i\left(2m-2n+1\right)\frac{\pi}{2n}}$$

原积分$=\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}dx$

$$=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{res} f\left[e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n}}\right]=\frac{\pi i}{n}e^{i\left(2m-2n+1\right)\frac{\pi}{2n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\left(2m-2n+1\right)\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{\pi i}{n}e^{i\left(2m-2n+1\right)\frac{\pi}{2n}}\frac{e^{i\left(2m-2n+1\right)\pi}-1}{e^{i\left(2m-2n+1\right)\frac{\pi}{n}}-1}=-\frac{\pi i}{n}\frac{2}{2i\sin\frac{\left(2m-2n+1\right)\pi}{2n}}$$

$$=\frac{\pi}{n\sin\frac{\left(2m+1\right)\pi}{2n}}。$$

（4）令 $f\left(z\right)=\frac{1}{\left(1+z^2\right)^{n+1}}=\frac{1}{\left(z+i\right)^{n+1}\left(z-i\right)^{n+1}}$，则

$$\operatorname{res} f\left(i\right)=\frac{1}{n!}\left[\frac{1}{\left(z+i\right)^{n+1}}\right]_{z=i}^{\left(n\right)}=\frac{1}{n!}\frac{\left(-1\right)^n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\cdots\left(2n\right)}{\left(2i\right)^{2n+1}}=\frac{1}{2i}\frac{\left(2n\right)!}{2^{2n}\left(n!\right)^2}=\frac{1}{2i}\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}$$

所以原积分$=\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}=2\pi i\operatorname{res} f\left(i\right)=\frac{\left(2n-1\right)!!}{\left(2n\right)!!}\pi$。

（5）令 $f\left(z\right)=\frac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2}=\frac{z^2}{\left(z+ai\right)^2\left(z-ai\right)^2}$，则$\operatorname{res} f\left(ai\right)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{\left(z+ai\right)^2}=\frac{1}{4ai}$。

同第（1）小题的讨论，有原积分$=\frac{1}{2}\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\operatorname{res} f\left(ai\right)=\frac{\pi}{4a}$。（后面类似讨论省略）

（6）$\dfrac{1}{x^2-2x+4}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$，所以$\int_0^{\infty}\dfrac{dx}{x^2-2x+4}$收敛，$\int_{-\infty}^{0}\dfrac{dx}{x^2-2x+4}$也收敛，所以$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2-2x+4}$收敛，可直接计算其主值。（（7）可同样讨论）。

令$f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+4}=\dfrac{1}{\left(z-1-i\sqrt{3}\right)\left(z-1+i\sqrt{3}\right)}$，$\operatorname{res} f\left(1+i\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}i}$，

原积分$=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$。

（7）令$f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-2z\cos\theta+1\right)}=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)\left(z-e^{i\theta}\right)\left(z-e^{-i\theta}\right)}$，

$\operatorname{res} f(i)=-\dfrac{1}{4\cos\theta}$，$\operatorname{res} f\left(e^{i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i\sin\theta\left(1+e^{-2i\theta}\right)}=\dfrac{1}{4\cos\theta}-\dfrac{i}{4\sin\theta}$，

$\operatorname{res} f\left(e^{-i\theta}\right)=-\dfrac{e^{-2i\theta}}{2i\sin\theta\left(1+e^{-2i\theta}\right)}=\dfrac{1}{4\cos\theta}+\dfrac{i}{4\sin\theta}$。

若$\sin\theta>0$，则$e^{i\theta}$在上半平面，原积分$=2\pi i\left[\operatorname{res} f(i)+\operatorname{res} f\left(e^{i\theta}\right)\right]=\dfrac{\pi}{2\sin\theta}$，

若$\sin\theta<0$，则$e^{-i\theta}$在上半平面，原积分$=2\pi i\left[\operatorname{res} f(i)+\operatorname{res} f\left(e^{-i\theta}\right)\right]=-\dfrac{\pi}{2\sin\theta}$，

所以原积分$=\dfrac{\pi}{2|\sin\theta|}$。

（8）令$f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}$，则$z=i$为二阶极点，$z=(2k+1)i$（$k=1,2,\cdots$）为一阶极点。$\operatorname{res} f(i)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d}{dz}\dfrac{z-i}{(z+i)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{2i\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}-\dfrac{\pi}{2}\left(z^2+1\right)\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}}{(z+i)^2\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{2}}$

$$=\lim_{z\to i}\frac{\pi i\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}-\pi z\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\left(z^2+1\right)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{2(z+i)\operatorname{ch}^2\dfrac{\pi z}{2}+\pi(z+i)^2\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{-\pi\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2(z+i)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{2(z+i)\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{z-i}+\pi(z+i)^2\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{2}\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2}}{z-i}}$$

$$= \left. \frac{-\pi \operatorname{sh}\frac{\pi z}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (z+i)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2}}{\pi(z+i)\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2} + \frac{\pi^2}{2}(z+i)^2 \operatorname{sh}^2\frac{\pi z}{2}} \right|_{z=i} = \frac{1}{2\pi i} \text{。}$$

$$\operatorname{res} f\left[(2k+1)i\right] = \lim_{z\to(2k+1)i} \frac{2}{\pi(z^2+1)\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i}\frac{1}{k(k+1)} \text{。}(k=1,2,\cdots)$$

取这样的积分路径：实轴上$-R_n$到R_n，以原点为圆心，R_n为半径的上半圆C_n，这里$R_n = 2n$。该闭合路径包围奇点$(2k+1)i$（$k=0,1,\cdots n-1$），且路径上没有奇点。有

$$\int_{-2n}^{2n} f(x)dx + \int_{C_n} f(z)dz = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \text{。} \qquad (*)$$

在C_n上有$z_n = 2n(\cos\theta + i\sin\theta)$，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{n\pi(\cos\theta+i\sin\theta)} + e^{-n\pi(\cos\theta+i\sin\theta)}\right]$（$0\le\theta\le\pi$），

当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\cos\theta>0$，$e^{n\pi(\cos\theta+i\sin\theta)}\to\infty, e^{-n\pi(\cos\theta+i\sin\theta)}\to 0$，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}\to\infty$，

当$\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$时，$\cos\theta<0$，$e^{n\pi(\cos\theta+i\sin\theta)}\to 0, e^{-n\pi(\cos\theta+i\sin\theta)}\to\infty$，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}\to\infty$，

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2} = \cos n\pi$，$\left|\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}\right| = 1$。

综上，$0\le\theta\le\pi$时存在N，当$n>N$时有$\left|\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}\right|\ge 1$。在$C_n$上

$$\left| z_n \cdot \frac{1}{(1+z_n^2)\operatorname{ch}\frac{\pi z_n}{2}} \right| \le \frac{z_n}{1+z_n^2}\text{（}n>N\text{），所以}\lim_{n\to\infty} z_n f(z_n) = 0\text{，由此得}\lim_{n\to\infty}\int_{C_n} f(z)dz = 0\text{。}$$

令（*）式$n\to\infty$可得

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{。}$$

易知$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$，（$|x|<1$）由于右边级数在$x=1$收敛，根据 Abel 第二定理，

该级数在$x=1$点左连续，对上式两边取$x\to 1-0$可得$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$。

所以$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{ch}\dfrac{\pi x}{2}}=2\ln 2$。

由于$\mathrm{ch}\dfrac{\pi x}{2}\geq 1$，所以$\left|\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)\mathrm{ch}\dfrac{\pi x}{2}}\right|\leq\dfrac{1}{1+x^2}$，因为$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$收敛，所以原积分收敛，且等于其主值。

140．计算下面积分：（1）$\int_0^{\infty}\dfrac{\cos x}{1+x^4}dx$；（2）$\int_0^{\infty}\dfrac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx$，$a>0,m>0$；（3）$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-2x+2}dx$；（4）$\int_0^{\infty}\dfrac{x^3\sin mx}{x^4+4a^4}dx$，$a>0,m>0$；（5）$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos mx}{\left(x+b\right)^2+a^2}dx$，$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin mx}{\left(x+b\right)^2+a^2}dx$，$a>0,m>0$；（6）$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{a\cos x+x\sin x}{x^2+a^2}dx$，$a>0$；

（7）$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin^2 ax}{\left(x^2+b^2\right)\left(x^2+c^2\right)}dx$，$a>0,b>0,c>0$；（8）$\int_0^{\infty}\dfrac{\cos x}{\mathrm{ch}\, x}dx$。

（1）令$f\left(z\right)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^4}=\dfrac{e^{iz}}{\left(z-e^{i\pi/4}\right)\left(z-e^{-i\pi/4}\right)\left(z-e^{i3\pi/4}\right)\left(z-e^{-i3\pi/4}\right)}$。

$\mathrm{res}\, f\left(e^{i\pi/4}\right)=\dfrac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}e^{i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}$，$\mathrm{res}\, f\left(e^{i3\pi/4}\right)=\dfrac{e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}e^{-i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)}$。

$$原积分=\frac{1}{2}\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}dx$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi i\left[\mathrm{res}\, f\left(e^{i\pi/4}\right)+\mathrm{res}\, f\left(e^{i3\pi/4}\right)\right]\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\right)。$$

（2）令$f\left(z\right)=\dfrac{ze^{imz}}{z^2+a^2}=\dfrac{ze^{imz}}{\left(z+ai\right)\left(z-ai\right)}$，则$\mathrm{res}\, f\left(ai\right)=\dfrac{1}{2}e^{-ma}$。

$$原积分=\frac{1}{2}\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi i\,\mathrm{res}\, f\left(ai\right)\right]=\frac{\pi}{2}e^{-ma}。$$

（3）令$f\left(z\right)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+2}=\dfrac{ze^{iz}}{\left(z-1-i\right)\left(z-1+i\right)}$，则$\mathrm{res}\, f\left(1+i\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}ei}e^{i\left(1+\frac{\pi}{4}\right)}$。

$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+2}dx=\mathrm{Im}\left[2\pi i\cdot\mathrm{res}\, f\left(1+i\right)\right]=\frac{\sqrt{2}\pi}{e}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)。$$

由于$\dfrac{x}{x^2-2x+2}$单调趋于 0，$\left|\int_0^b \sin x dx\right| = |1-\cos b| \le 2$，所以原积分收敛（狄里克莱判敛法），等于其主值。

（4） $f(z)=\dfrac{z^3e^{imz}}{z^4+4a^4}=\dfrac{z^3e^{imz}}{\left(z-\sqrt{2}ae^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}ae^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}ae^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}ae^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)}$。

则$\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i\pi/4}\right)=\dfrac{1}{4}e^{-ma}e^{ima}$， $\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i3\pi/4}\right)=\dfrac{1}{4}e^{-ma}e^{-ima}$。

$$\text{原积分}=\frac{1}{2}\text{v.p.}\int_0^{\infty}\frac{x^3\sin mx}{x^4+4a^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i\pi/4}\right)+\operatorname{res} f\left(\sqrt{2}ae^{i3\pi/4}\right)\right]\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-ma}\cos ma\text{。}$$

（5）令 $f(z)=\dfrac{e^{imz}}{(z+b)^2+a^2}=\dfrac{e^{imz}}{(z+b+ai)(z+b-ai)}$，$\operatorname{res} f(-b+ai)=\dfrac{e^{-ma}}{2ai}e^{-imb}$。

所以$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos mx}{(x+b)^2+a^2}dx=\operatorname{Re}\left[2\pi i\operatorname{res} f(-b+ai)\right]=\dfrac{\pi}{a}e^{-ma}\cos mb$，

$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin mx}{(x+b)^2+a^2}dx=\operatorname{Im}\left[2\pi i\operatorname{res} f(-b+ai)\right]=-\dfrac{\pi}{a}e^{-ma}\sin mb$。

由于$\left|\dfrac{\cos x}{(x+b)^2+a^2}\right|\le\dfrac{1}{(x+b)^2+a^2}$，$\left|\dfrac{\sin x}{(x+b)^2+a^2}\right|\le\dfrac{1}{(x+b)^2+a^2}$所以原积分收敛，等于其主值。

（6）令上小题第一个积分中$b=0,m=1$可得$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+a^2}dx=\dfrac{\pi}{a}e^{-a}$，

令第（2）小题中$m=1$可得$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\pi e^{-a}$。

所以原积分$=2\pi e^{-a}$。

（7）原积分$=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx-\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos 2ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx$。

令 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}=\dfrac{1}{(z+bi)(z-bi)(z+ci)(z-ci)}$，

$\operatorname{res} f(bi)=-\dfrac{1}{2b(b^2-c^2)i}$， $\operatorname{res} f(ci)=\dfrac{1}{2c(b^2-c^2)i}$。

则$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx=2\pi i\left[\operatorname{res} f(bi)+\operatorname{res} f(ci)\right]=\dfrac{\pi}{bc(b+c)}$。

令 $f(z)=\dfrac{e^{2iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}=\dfrac{e^{2iaz}}{(z+bi)(z-bi)(z+ci)(z-ci)}$,

$\operatorname{res} f(bi)=-\dfrac{e^{-2ab}}{2b(b^2-c^2)i}$， $\operatorname{res} f(ci)=\dfrac{e^{-2ac}}{2c(b^2-c^2)i}$。则

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx=\operatorname{Re}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f(bi)+\operatorname{res} f(ci)\right]\right\}=\frac{\pi}{b^2-c^2}\left(\frac{e^{-2ac}}{c}-\frac{e^{-2ab}}{b}\right)$$

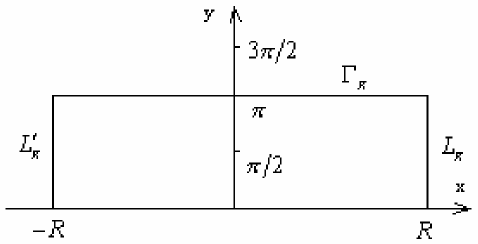
由于$\left|\dfrac{\sin^2 ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\right|\le\dfrac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}$，所以原积分收敛且

原积分$=\dfrac{\pi\left(b-c+ce^{-2ab}-be^{-2ac}\right)}{2bc(b^2-c^2)}$。

（8）令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{\operatorname{ch} z}$，它有一阶极点$\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$ （$k=0,1,\cdots$）。

$\operatorname{res} f\left[\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i\right]=\lim\limits_{z\to\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i}\dfrac{e^{iz}}{\operatorname{sh} z}=\dfrac{(-1)^k}{i}e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$， $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2}i\right)=\dfrac{1}{i}e^{-\frac{\pi}{2}}$。

选取如下积分路径：



$$\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{L_R}f(z)dz+\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\int_{L'_R}f(z)dz=2\pi i\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}i\right)=2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}。\quad (*)$$

因为$\left|\operatorname{ch}(R+yi)\right|=\left|\operatorname{ch}R\cos y+i\operatorname{sh}R\sin y\right|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 R\cos^2 y+\operatorname{sh}^2 R\sin^2 y}$

$=\sqrt{\cos^2 y+\operatorname{sh}^2 R}\ge\operatorname{sh}R$，所以$\left|\int_{L_R}f(z)dz\right|=\left|\int_0^{\pi}\dfrac{e^{i(R+yi)}}{\operatorname{ch}(R+yi)}dy\right|\le\int_0^{\pi}\dfrac{e^{-y}}{\operatorname{sh}R}dy=\dfrac{2\left(1-e^{-\pi}\right)}{e^R-e^{-R}}$。

因此$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)dz=0$，同样有$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L'_R}f(z)dz=0$。

$\int_{\Gamma_R}f(z)dz=\int_R^{-R}\dfrac{e^{i(x+\pi i)}}{\operatorname{ch}(x+\pi i)}dx=-e^{-\pi}\int_R^{-R}\dfrac{e^{ix}}{\operatorname{ch}x}dx=e^{-\pi}\int_{-R}^{R}f(x)dx$， 代 入 （ * ） 式 并 令

$R \to \infty$ 得 $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\operatorname{ch} x} dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi}} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}$。所以原积分$=\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}$。

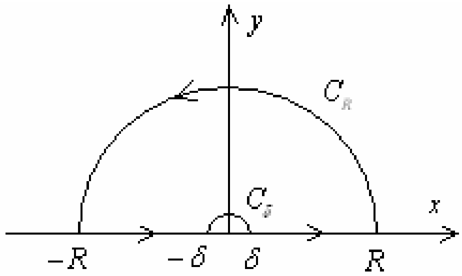
141．计算下列积分：（1）$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)} dx$，$a>0,m>0$；（2）$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$；

（3）$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2} dx$，$a>0,b>0$；（4）$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2} dx$，$a>0$；

（5）$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$；（6）$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^{x}} dx$，$0<p<1,0<q<1$；

（7）$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-5x-6} dx$；（8）$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\left(x^2+4\right)(x-1)} dx$。

（1）取下图积分路径：



令 $f(z)=\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}$，则 $\operatorname{res} f(ai)=-\frac{e^{-ma}}{2a^2}$，所以

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{imx}}{x\left(x^2+a^2\right)} dx+\int_{C_\delta} \frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)} dz+\int_{\delta}^{R} \frac{e^{imx}}{x\left(x^2+a^2\right)} dx+\int_{C_R} \frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)} dz$$

$$=2\pi i\cdot\operatorname{res} f(ai)=-\frac{\pi i e^{-ma}}{a^2}\text{。} \qquad (*)$$

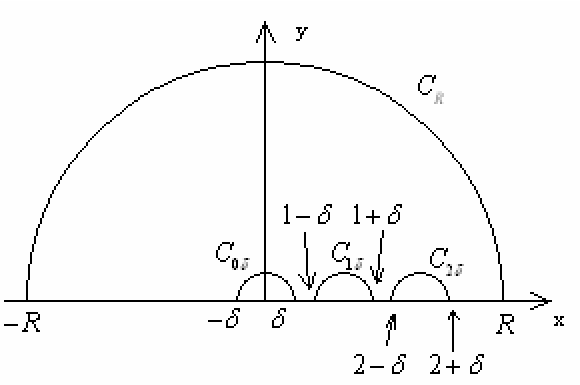
$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} \frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)} dz=-\pi i\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}=-\frac{\pi i}{a^2},$$

因为 $\lim_{z\to\infty}\frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)}=0$，所以 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{imz}}{z\left(z^2+a^2\right)} dz=0$，

令（*）式 $\delta\to 0,R\to\infty$ 得到 $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{mx}}{x\left(x^2+a^2\right)} dx=\frac{\pi i}{a^2}\left(1-e^{-ma}\right)$，

所以$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x\left(x^2+a^2\right)}dx=\frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-ma}\right)=\frac{\pi}{a^2}e^{-\frac{1}{2}ma}\operatorname{sh}\frac{ma}{2}$。

（2）取下图积分路径：



令$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$，则$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_{0\delta}}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{\pi}{2}i$，

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_{1\delta}}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to 1}\frac{1}{z(z-2)}=\pi i,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_{2\delta}}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to 2}\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{\pi}{2}i$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=\pi i\lim_{z\to\infty}\frac{1}{(z-1)(z-2)}=0。$$

$$\int_{-R}^{-\delta}f(x)dx+\int_{C_{0\delta}}f(z)dz+\int_{\delta}^{1-\delta}f(x)dx+\int_{C_{1\delta}}f(z)dz+\int_{1+\delta}^{2-\delta}f(x)dx+\int_{C_{2\delta}}f(z)dz$$

$$+\int_{2+\delta}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz=0$$

令上式$\delta\to 0,R\to\infty$得到$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x-1)(x-2)}=0$。

（3）令$f(z)=\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2}$，取与第（1）小题相同的积分路径，

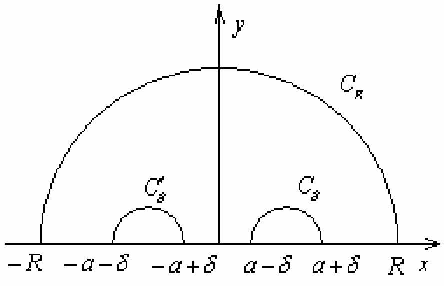
$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to 0}\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z}=\pi(a-b),$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z^2}dz-\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{ibz}}{z^2}dz=0,$$

对该路径的积分取 $\delta \to 0, R \to \infty$ 的极限可得 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$。

（4）原积分 $= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos 2a - \cos 2x}{x^2 - a^2} dx$。令 $f(z) = \frac{\cos 2a - e^{2iz}}{z^2 - a^2}$，

取如下积分路径：



$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = -\pi i \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \frac{\pi\left(\cos 2a - e^{2ia}\right)}{2ai},$$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C'_\delta} f(z) dz = -\pi i \lim_{z \to -a} (z+a) f(z) = -\frac{\pi\left(\cos 2a - e^{-2ia}\right)}{2ai}。$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0。$$

$$\int_{-R}^{-a-\delta} f(x) dx + \int_{C'_\delta} f(z) dz + \int_{-a+\delta}^{a-\delta} f(x) dx + \int_{C_\delta} f(z) dz + \int_{a+\delta}^{R} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

令 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得 $\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2a - e^{2ix}}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{a}(\sin 2a - i\cos 2a)$。

所以原积分 $= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left(\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2a - e^{2ix}}{x^2 - a^2} dx\right) = \frac{\pi}{4a}\sin 2a$。

（5）$\sin^3 x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$。

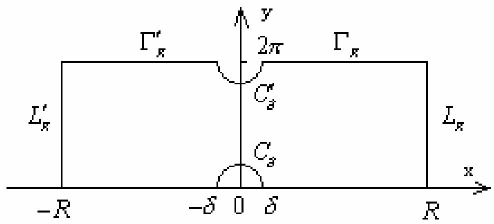
原积分 $= \int_0^{\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{4x^3} dx$。令 $f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz} - 2}{4z^3}$，取与第（1）小题相同的积分路径，有

$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = -\pi i \lim_{z \to 0} \frac{3e^{iz} - e^{3iz} - 2}{4z^2} = -\frac{3}{4}\pi i$，$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$。

令围线积分 $\delta \to 0, R \to \infty$ 得 $\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3e^{ix} - e^{3ix} - 2}{4x^3} dx = \frac{3}{4}\pi i$，

原积分$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3e^{ix}-e^{3ix}-2}{4x^3}dx\right)=\frac{3}{8}\pi$。

（6）令 $f(z)=\frac{e^{pz}}{1-e^z}$，$2k\pi i$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）是其一阶极点。取如下积分路径：



$$\int_{-R}^{-\delta}f(x)dx+\int_{C_\delta}f(z)dz+\int_{\delta}^{R}f(x)dx+\int_{L_R}f(z)dz+\int_{\Gamma_R}f(z)dz+\int_{C_\delta'}f(z)dz$$

$$+\int_{\Gamma_R'}f(z)dz+\int_{L_R'}f(z)dz=0\text{。}\qquad(*)$$

$$\int_{\Gamma_R}f(z)dz=\int_R^\delta\frac{e^{p(x+2\pi i)}}{1-e^{(x+2\pi i)}}dx=-e^{2p\pi i}\int_\delta^R f(x)dx\text{，}\quad\int_{\Gamma_R'}f(z)dz=-e^{2p\pi i}\int_{-R}^{-\delta}f(x)dx\text{，}$$

代入（*）式得

$$\left(1-e^{2p\pi i}\right)\left[\int_{-R}^{-\delta}f(x)dx+\int_\delta^R f(x)dx\right]+\int_{C_\delta}f(z)dz+\int_{L_R}f(z)dz+\int_{C_\delta'}f(z)dz$$

$$+\int_{L_R'}f(z)dz=0\text{。}\qquad(**)$$

$$\left|\int_{\Gamma_R}f(z)dz\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{p(R+iy)}}{1-e^{(R+iy)}}\right|dy=\int_0^{2\pi}\frac{e^{pR}}{\sqrt{\left(1-e^R\cos y\right)^2+e^{2R}\sin^2 y}}dy$$

$$=e^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-2e^R\cos y+e^{2R}}}dy\le e^{pR}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^R-1}dy=2\pi\frac{e^{-(1-p)R}}{1-e^{-R}}\text{，}$$

所以 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}f(z)dz=0$，同样的，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R'}f(z)dz=0$。

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to0}\frac{ze^{pz}}{1-e^z}=\pi i\text{，}$$

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta'}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to2\pi i}\frac{(z-2\pi i)e^{pz}}{1-e^z}=\pi ie^{2p\pi i}\text{，}$$

令（**）式 $\delta\to0,R\to\infty$ 可得 $\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}}{1-e^x}dx=\pi i\frac{e^{2p\pi i}+1}{e^{2p\pi i}-1}=\pi\cot(p\pi)$，

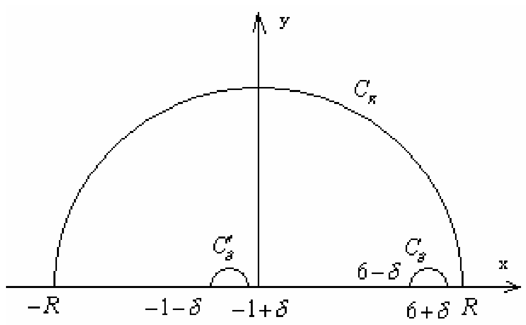
所以$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^{x}}dx=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}}{1-e^{x}}dx-\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{qx}}{1-e^{x}}dx=\pi\left[\cot(p\pi)-\cot(q\pi)\right]$。

当x充分大时，有$e^{x}-1\ge\frac{1}{2}e^{x}$（即$e^{x}\ge 2$）。不妨假设$p>q$，

$\left|\frac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^{x}}\right|\le 2\frac{e^{px}-e^{qx}}{e^{x}}=2\left[e^{-(1-p)x}-e^{-(1-q)x}\right]$。由于$\int_{0}^{\infty}\left[e^{-(1-p)x}-e^{-(1-q)x}\right]dx$收敛，所以

$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^{x}}dx$收敛，类似地，$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^{x}}dx$收敛，所以原积分收敛，等于其主值。

（7）令$f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^{2}-5z-6}=\frac{ze^{iz}}{(z-6)(z+1)}$。取如下积分路径：



$\left(\int_{-R}^{-1-\delta}+\int_{-1+\delta}^{6-\delta}+\int_{6+\delta}^{R}\right)f(x)dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C'_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)dz=0$。 （*）

因为$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{(z-6)(z+1)}=0$，所以$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$。

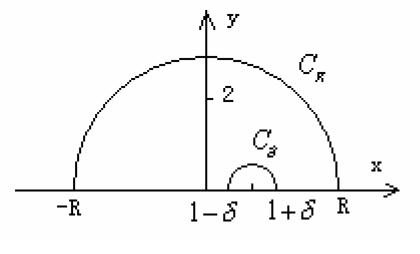
$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim\limits_{z\to6}\frac{ze^{iz}}{z+1}=\frac{6\pi}{7i}e^{6i}$，$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C'_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim\limits_{z\to-1}\frac{ze^{iz}}{z-6}=\frac{\pi}{7i}e^{-i}$。

令（*）式$\delta\to0,R\to\infty$得$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\frac{\pi i}{7}\left(6e^{6i}+e^{-i}\right)$，

原积分$=\text{Re}\left[\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\right]=\frac{\pi}{7}(\sin1-6\sin6)$。

（8）令$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^{2}+4)(z-1)}$，$\text{res}\,f(2i)=\lim\limits_{z\to2i}\frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-1)}=-\frac{e^{-2}}{20i}(1+2i)$。

取如下积分路径：



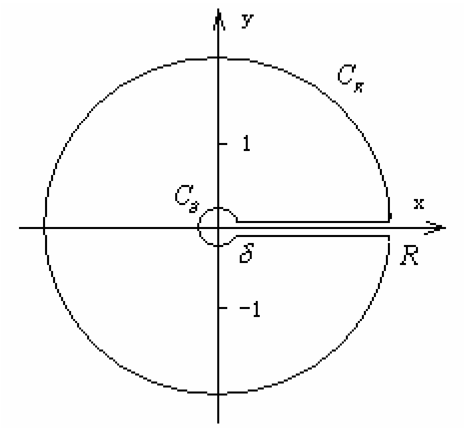
$$\left(\int_{-R}^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{R}\right)f(x)\,dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{res}\,f(2i)=-\frac{\pi e^{-2}}{10}(1+2i)\text{。}\qquad (*)$$

$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$，$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz=-\pi i\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}=-\dfrac{\pi i}{5}e^{i}$。

令（*）$\delta\to 0, R\to\infty$ 得原积分$=\mathrm{Im}\left[\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right]=\dfrac{\pi}{5}\left(\cos 1-e^{-2}\right)$。

142．计算下列积分：（1）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^s}{\left(1+x^2\right)^2}dx$，$-1<s<3$；（2）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx$，$-1<p<1$，$0<\lambda<\pi$；（3）$\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}dx$，$0<a<1$；（4）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx$，$a>0$。

（1）令 $f(z)=\dfrac{z^s}{\left(1+z^2\right)^2}$，取如下积分路径，规定 $0\le\arg\le 2\pi$，



则 $\mathrm{res}\,f(i)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d}{dz}\dfrac{z^s}{(z+i)^2}=-\dfrac{s-1}{4i}e^{i\frac{s\pi}{2}}$， $\mathrm{res}\,f(-i)=\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{d}{dz}\dfrac{z^s}{(z-i)^2}=\dfrac{s-1}{4i}e^{i\frac{3s\pi}{2}}$

（这里 $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$， $-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}$）。围道积分为：

$$\int_\delta^R\frac{x^s}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int_R^\delta\frac{x^se^{2is\pi}}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)\,dz$$

$$=2\pi i\left[\mathrm{res}\,f(i)+\mathrm{res}\,f(-i)\right]=i\pi(s-1)e^{is\pi}\sin\frac{s\pi}{2}\text{。}$$

即 $\left(1-e^{2is\pi}\right)\displaystyle\int_\delta^R\frac{x^s}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)f(z)\,dz=i\pi(s-1)e^{is\pi}\sin\frac{s\pi}{2}$。

令上式$\delta \to 0, R \to \infty$，由于$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \lim\limits_{z\to\infty} z \cdot \dfrac{z^s}{(1+z^2)^2} = 0$，

$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = -2\pi i \lim\limits_{z\to 0} z \cdot \dfrac{z^s}{(1+z^2)^2} = 0$，所以

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{(1+x^2)^2}dx = \frac{i\pi(s-1)e^{is\pi}\sin\frac{s\pi}{2}}{1-e^{2is\pi}} = \frac{\pi}{4}(1-s)\sec\frac{s\pi}{2}。$$

（2）令$f(z) = \dfrac{z^{-p}}{z^2+2z\cos\lambda+1} = \dfrac{z^{-p}}{(z+e^{i\lambda})(z+e^{-i\lambda})}$，取与上小题同样的积分路径，规定

$0 \le \arg \le 2\pi$，则$\operatorname{res} f\left[e^{i(\pi+\lambda)}\right] = \lim\limits_{z\to e^{i(\pi+\lambda)}} \dfrac{z^{-p}}{z+e^{-i\lambda}} = -\dfrac{e^{-ip(\pi+\lambda)}}{2i\sin\lambda}$，

$\operatorname{res} f\left[e^{i(\pi-\lambda)}\right] = \lim\limits_{z\to e^{i(\pi-\lambda)}} \dfrac{z^{-p}}{z+e^{i\lambda}} = \dfrac{e^{-ip(\pi-\lambda)}}{2i\sin\lambda}$。所以

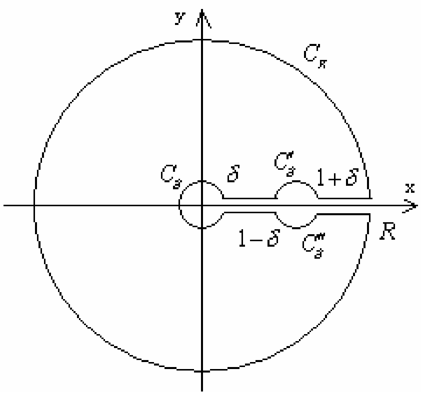
$$\left(1-e^{-2ip\pi}\right)\int_\delta^R \frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx + \left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right) f(z)\,dz = 2\pi i e^{-ip\pi}\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}。$$

令上式$\delta \to 0, R \to \infty$，由于$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \lim\limits_{z\to\infty} z \cdot \dfrac{z^{-p}}{z^2+2z\cos\lambda+1} = 0$，

$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = -2\pi i \lim\limits_{z\to 0} z \cdot \dfrac{z^{-p}}{z^2+2z\cos\lambda+1} = 0$，所以

$$\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx = 2\pi i e^{-ip\pi}\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda\left(1-e^{-2ip\pi}\right)} = \frac{\pi\sin p\lambda}{\sin p\pi\sin\lambda}。$$

（3）令$f(z) = \dfrac{z^{a-1}}{1-z}$，取如下积分路径，规定$0 \le \arg \le 2\pi$。



$$\left(1-e^{2ia\pi}\right)\left(\int_{\delta}^{1-\delta}+\int_{1+\delta}^{R}\right)f(x)\,dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}+\int_{C'_\delta}+\int_{C''_\delta}\right)f(z)\,dz=0,$$

令上式 $\delta\to 0, R\to\infty$，因为 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$，$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$，

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C'_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^{a-1}}{1-z}=\pi i,$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C''_\delta}f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to e^{2i\pi}}(z-1)\frac{z^{a-1}}{1-z}=\pi i e^{2ia\pi},$$

所以原积分 $=\pi i\dfrac{e^{2ia\pi}+1}{e^{2ia\pi}-1}=\pi\cot(a\pi)$。

（4）令 $f(z)=\dfrac{(\ln z)^2}{\sqrt{z}\left(z^2+a^2\right)^2}$，取与第（1）小题相同的积分路径，规定 $0\le\arg\le 2\pi$，

则 $\operatorname{res} f(ai)=\lim\limits_{z\to ai}\dfrac{d}{dz}\dfrac{(\ln z)^2}{\sqrt{z}(z+ai)^2}=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi/2}}\dfrac{4(z+ai)\ln z-(5z+ai)(\ln z)^2}{2z^{3/2}(z+ai)^3}$

$$=\frac{4\ln a-3(\ln a)^2+\frac{3}{4}\pi^2-2\pi+3\pi\ln a+i\left[4\ln a-3(\ln a)^2+\frac{3}{4}\pi^2+2\pi-3\pi\ln a\right]}{8\sqrt{2}a^{7/2}},$$

$\operatorname{res} f(-ai)=\lim\limits_{z\to -ai}\dfrac{d}{dz}\dfrac{(\ln z)^2}{\sqrt{z}(z-ai)^2}=\lim\limits_{z\to ae^{i3\pi/2}}\dfrac{4(z-ai)\ln z-(5z-ai)(\ln z)^2}{2z^{3/2}(z-ai)^3}$

$$=\frac{-4\ln a+3(\ln a)^2-\frac{27}{4}\pi^2-6\pi+9\pi\ln a+i\left[4\ln a-3(\ln a)^2+\frac{27}{4}\pi^2-6\pi+9\pi\ln a\right]}{8\sqrt{2}a^{7/2}}。$$

围道积分为：

$$\int_{\delta}^{R}\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx+\int_{R}^{\delta}\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{-\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)\,dz=2\pi i\left[\operatorname{res} f(ai)+\operatorname{res} f(-ai)\right]$$

令 $\delta\to 0, R\to\infty$，由于 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$，$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$，所以

$$\int_0^{\infty}\frac{2(\ln x)^2-4\pi^2}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx+4\pi i\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(x^2+a^2\right)^2}dx=2\pi i\left[\operatorname{res} f(ai)+\operatorname{res} f(-ai)\right],$$

因此原积分 $=\dfrac{1}{4\pi}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f(ai)+\operatorname{res} f(-ai)\right]\right\}=\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\operatorname{res} f(ai)+\operatorname{res} f(-ai)\right]$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a^{7/2}}\left(\frac{3}{2}\ln a-1-\frac{3\pi}{4}\right)。$$

143．设$P(z)$及$Q(z)$分别为m阶及n阶多项式，并且$m\le n-2$，且$Q(z)$无非负实根。考虑函数$\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z$的积分，证明$\int_0^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=-\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$，$0\le\arg z\le 2\pi$。

证：令$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z$，取与上题第（1）小题相同的积分路径，规定$0\le\arg z\le 2\pi$，

有$\int_{\delta}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}\ln x dx+\int_{R}^{\delta}\frac{P(x)}{Q(x)}(\ln x+2\pi i)dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=2\pi i\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$，

即$\int_{\delta}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=-\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$。　　　　（*）

由于 0 不是$Q(z)$的零点，则$\lim\limits_{z\to 0}z\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z=\frac{P(0)}{Q(0)}\lim\limits_{z\to 0}z\ln z=0$，所以

$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$。因为$m\le n-2$，所以$\lim\limits_{z\to\infty}z\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\ln z}{z^{n-m-1}}=0$，则

$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$。令（*）式$\delta\to 0,R\to\infty$即得$\int_0^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=-\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$。

144．利用上题结果计算下列积分：（1）$\int_0^{\infty}\frac{x}{\left(1+x+x^2\right)^2}dx$；（2）$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+a^3}dx$；

（3）$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x+a)\left(x^2+b^2\right)}dx$，$a>0$，$b>0$；（4）$\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx$。

（1）令$f(z)=\frac{z\ln z}{\left(1+z+z^2\right)^2}$，$\operatorname{res}f\left(e^{i2\pi/3}\right)=\lim\limits_{z\to e^{i2\pi/3}}\frac{d}{dz}\frac{z\ln z}{\left(z-e^{i4\pi/3}\right)^2}=-\frac{1}{3}-\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi$，

$\operatorname{res}f\left(e^{i4\pi/3}\right)=\lim\limits_{z\to e^{i4\pi/3}}\frac{d}{dz}\frac{z\ln z}{\left(z-e^{i2\pi/3}\right)^2}=\frac{4}{9\sqrt{3}}\pi-\frac{1}{3}$。

原积分$=-\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)-\operatorname{res} f\left(e^{i4\pi/3}\right)=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi\right)$。

（2）令 $f(z)=\dfrac{\ln z}{z^3+a^3}$，

$$\operatorname{res} f\left(ae^{i\pi/3}\right)=\lim_{z\to ae^{i\pi/3}}\frac{\ln z}{(z+a)\left(z-ae^{i5\pi/3}\right)}=\frac{\sqrt{3}\pi-3\ln a-i\left(\pi+3\sqrt{3}\ln a\right)}{18a^2},$$

$$\operatorname{res} f(-a)=\lim_{z\to ae^{i\pi}}\frac{\ln z}{z^2-az+a^2}=\frac{\ln a+\pi i}{3a^2},$$

$$\operatorname{res} f\left(ae^{i5\pi/3}\right)=\lim_{z\to ae^{i5\pi/3}}\frac{\ln z}{(z+a)\left(z-ae^{i2\pi/3}\right)}=\frac{-5\sqrt{3}\pi-3\ln a+i\left(3\sqrt{3}\ln a-5\pi\right)}{18a^2}。$$

原积分$=-\operatorname{res} f\left(ae^{i\pi/3}\right)-\operatorname{res} f(-a)-\operatorname{res} f\left(ae^{i5\pi/3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9a^2}$。

（3）令 $f(z)=\dfrac{\ln z}{(z+a)\left(z^2+b^2\right)}$，则 $\operatorname{res} f(-a)=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi}}\dfrac{\ln z}{z^2+b^2}=\dfrac{\ln a+\pi i}{a^2+b^2}$，

$$\operatorname{res} f(bi)=\lim_{z\to be^{i\pi/2}}\frac{\ln z}{(z+a)(z+bi)}=\frac{a\pi-2b\ln b-i\left(2a\ln b+b\pi\right)}{4b\left(a^2+b^2\right)},$$

$$\operatorname{res} f(-bi)=\lim_{z\to be^{i3\pi/2}}\frac{\ln z}{(z+a)(z-bi)}=\frac{-3a\pi-2b\ln b+i\left(2a\ln b-3b\pi\right)}{4b\left(a^2+b^2\right)}。$$

原积分$=-\operatorname{res} f(-a)-\operatorname{res} f(-bi)-\operatorname{res} f(bi)=\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\ln\dfrac{b}{a}+\dfrac{a\pi}{2b}\right)$。

（4）$f(z)=\dfrac{\ln z}{\left(z^2+a^2\right)\left(z^2+b^2\right)}$，则 $\operatorname{res} f(ai)=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi/2}}\dfrac{\ln z}{(z+ai)\left(z^2+b^2\right)}=\dfrac{-\pi+2i\ln a}{4a\left(a^2-b^2\right)}$，

$$\operatorname{res} f(-ai)=\lim_{z\to ae^{i3\pi/2}}\frac{\ln z}{(z-ai)\left(z^2+b^2\right)}=\frac{3\pi-2i\ln a}{4a\left(a^2-b^2\right)},$$

$$\operatorname{res} f(bi)=\lim_{z\to be^{i\pi/2}}\frac{\ln z}{\left(z^2+a^2\right)(z+bi)}=\frac{\pi-2i\ln b}{4b\left(a^2-b^2\right)},$$

$$\operatorname{res} f(-bi)=\lim_{z\to be^{i3\pi/2}}\frac{\ln z}{\left(z^2+a^2\right)(z-bi)}=\frac{-3\pi+2i\ln b}{4b\left(a^2-b^2\right)}。$$

原积分$=-\operatorname{res} f(ai)-\operatorname{res} f(-ai)-\operatorname{res} f(bi)-\operatorname{res} f(-bi)=\dfrac{\pi}{2ab(a+b)}$。

145．用类似于 143 题的方法证明$\int_0^{\infty} f(x)\ln x dx=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{f(z)(\ln z)^2\right\}$，

$\int_0^{\infty} f(x) dx=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{f(z)(\ln z)^2\right\}$，$0\le\arg z\le 2\pi$。其中 $f(x)$ 满足和第 143 题中 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 同样的要求。

证：令 $F(z)=f(z)(\ln z)^2$，取与 143 题相同的积分路径，规定 $0\le\arg z<2\pi$，同样有 $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} F(z)dz=0$，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)dz=0$。围线积分为

$$\int_\delta^R f(x)(\ln x)^2 dx+\int_R^\delta f(x)(\ln x+2\pi i)^2 dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)F(z)dz=2\pi i\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\{F(z)\},$$

即 $4\pi^2\int_\delta^R f(x)dx-4\pi i\int_\delta^R f(x)\ln x dx+\left(\int_{C_\delta}+\int_{C_R}\right)F(z)dz=2\pi i\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\{F(z)\}$。

令上式 $\delta\to 0, R\to\infty$ 得 $\pi\int_0^{\infty} f(x)dx-i\int_0^{\infty} f(x)\ln x dx=\frac{1}{2}i\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{f(z)(\ln z)^2\right\}$，

比较两边实部和虚部即得证。

146．利用上题结论计算下列积分：（1）$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$，$a>0$；（2）$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}dx$，$b>a>0$；（3）$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^2}dx$，$a>0$；（4）$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}dx$，$a,b$ 均为正数。

（1）令 $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{z^2+a^2}$，则 $\operatorname{res} f(ai)=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi/2}}\frac{(\ln z)^2}{z+ai}=\frac{\pi\ln a}{2a}+i\frac{\pi^2-4\ln^2 a}{8a}$，

$\operatorname{res} f(-ai)=\lim\limits_{z\to ae^{i3\pi/2}}\frac{(\ln z)^2}{z-ai}=-\frac{3\pi\ln a}{2a}+i\frac{4\ln^2 a-9\pi^2}{8a}$。

原积分$=-\frac{1}{2}\left\{\operatorname{Re}\left[\operatorname{res} f(ai)\right]+\operatorname{Re}\left[\operatorname{res} f(-ai)\right]\right\}=\frac{\pi\ln a}{2a}$。

（2）令 $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{(z+a)(z+b)}$，则 $f(-a)=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi}}\frac{(\ln z)^2}{z+b}=\frac{\ln^2 a-\pi^2}{b-a}+i\frac{2\pi\ln a}{b-a}$，

$f(-b)=\lim\limits_{z\to be^{i\pi}}\frac{(\ln z)^2}{z+a}=\frac{\pi^2-\ln^2 b}{b-a}-i\frac{2\pi\ln b}{b-a}$。

原积分$=-\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Re}\left[\mathrm{res}\ f\left(-a\right)\right]+\mathrm{Re}\left[\mathrm{res}\ f\left(-b\right)\right]\right\}=\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{2\left(b-a\right)}=\dfrac{\ln ab\ln\dfrac{b}{a}}{2\left(b-a\right)}$。

（3）令 $f\left(z\right)=\dfrac{\left(\ln z\right)^2}{\left(z+a\right)^2}$，则 $\mathrm{res}\ f\left(-a\right)=\lim\limits_{z\to ae^{i\pi}}\dfrac{d}{dz}\left(\ln z\right)^2=-\dfrac{2\ln a}{a}-i\dfrac{2\pi}{a}$。

原积分$=-\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{res}\ f\left(-a\right)\right]=\dfrac{\ln a}{a}$。

（4）令 $f\left(z\right)=\dfrac{\left(\ln z\right)^2}{\left(z+a\right)^2+b^2}$，则 $\mathrm{res}\ f\left(-a+bi\right)=\lim\limits_{z\to\sqrt{a^2+b^2}e^{i\left(\pi-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}}\dfrac{\left(\ln z\right)^2}{z+a+bi}$

$$=\frac{1}{2b}\left(\pi-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\ln\left(a^2+b^2\right)+i\frac{1}{2b}\left[\left(\pi-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)^2-\frac{1}{4}\ln^2\left(a^2+b^2\right)\right],$$

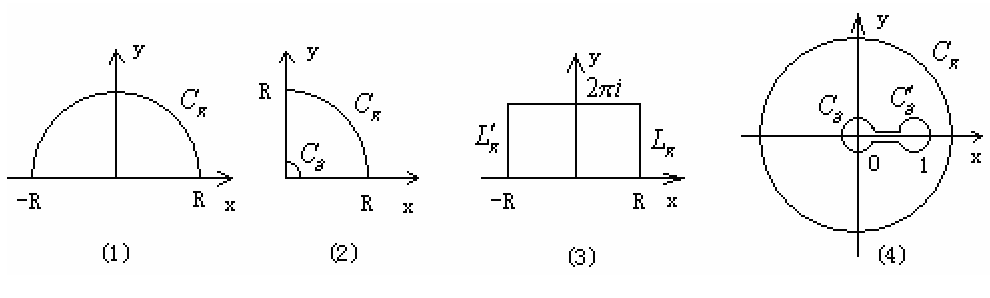
$$\mathrm{res}\ f\left(-a-bi\right)=\lim_{z\to\sqrt{a^2+b^2}e^{i\left(\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)}}\frac{\left(\ln z\right)^2}{z+a-bi}$$

$$=-\frac{1}{2b}\left(\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\ln\left(a^2+b^2\right)+i\frac{1}{2b}\left[\frac{1}{4}\ln^2\left(a^2+b^2\right)-\left(\pi+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)^2\right]。$$

原积分$=-\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{Re}\left[\mathrm{res}\ f\left(-a+bi\right)\right]+\mathrm{Re}\left[\mathrm{res}\ f\left(-a-bi\right)\right]\right\}=\dfrac{1}{2b}\tan^{-1}\dfrac{b}{a}\ln\left(a^2+b^2\right)$。

147．按照指定的积分围道，考虑适当的复变积分，计算下列定积分：

（1）$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\left(1+x^2\right)\cos ax}{1+x^2+x^4}dx$，$\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\sin ax}{1+x^2+x^4}dx$，$a>0$；（2）$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x-e^x}{x}dx$；（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$，$0<a<1$；（4）$\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x\left(1-x\right)^3}}{\left(1+x\right)^3}dx$。



（1）　令 $f\left(z\right)=\dfrac{\left(1+z^2\right)e^{iaz}}{1+z^2+z^4}=$，则

$$\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)=\lim_{z\to e^{i\pi/3}}\frac{\left(1+z^2\right)e^{iaz}}{\left(z-e^{-i\pi/3}\right)\left(z^2+z+1\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(-\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)=\lim_{z\to e^{i2\pi/3}}\frac{\left(1+z^2\right)e^{iaz}}{\left(z^2-z+1\right)\left(z-e^{-i2\pi/3}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2}\right),$$

对围道积分取 $R\to\infty$ 得

$$\int_0^\infty\frac{\left(1+x^2\right)\cos ax}{1+x^2+x^4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right]\right\}$$

$$=-\pi\operatorname{Im}\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\cos\frac{a}{2}\text{。}$$

令 $f(z)=\dfrac{ze^{iaz}}{1+z^2+z^4}$，则

$$\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)=\lim_{z\to e^{i\pi/3}}\frac{ze^{iaz}}{\left(z-e^{-i\pi/3}\right)\left(z^2+z+1\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sin\frac{a}{2}-i\cos\frac{a}{2}\right),$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)=\lim_{z\to e^{i2\pi/3}}\frac{ze^{iaz}}{\left(z^2-z+1\right)\left(z-e^{-i2\pi/3}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\sin\frac{a}{2}+i\cos\frac{a}{2}\right)$$

对围道积分取 $R\to\infty$ 得

$$\int_0^\infty\frac{x\sin ax}{1+x^2+x^4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left\{2\pi i\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right]\right\}$$

$$=\pi\operatorname{Re}\left[\operatorname{res} f\left(e^{i\pi/3}\right)+\operatorname{res} f\left(e^{i2\pi/3}\right)\right]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sin\frac{a}{2}\text{。}$$

（2） 令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$，则 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$（由 Jordan 引理的证明过程可看出对于上半平面张角小于 π 的弧该定理仍成立），$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-\dfrac{\pi i}{2}\lim\limits_{z\to 0}e^{iz}=-\dfrac{\pi i}{2}$，围道积分为：

$\displaystyle\int_\delta^R\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_R^\delta\frac{e^{-y}}{y}dy+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=0$，令 $\delta\to 0,R\to\infty$ 得 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx=\frac{\pi i}{2}$，

两边取实部即可得 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x-e^{x}}{x}dx=0$。

（3） 令 $f(z)=\dfrac{e^{az}}{1+e^z}$，则 $\operatorname{res} f(\pi i)=\lim\limits_{z\to\pi i}\dfrac{e^{az}}{\left(1+e^z\right)'}=-e^{ia\pi}$。类似于 141 题第（6）小题作法可证 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)dz=0$ 和 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L_R'}f(z)dz=0$（也可证 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ 收敛）。

围道积分为$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx+e^{2ia\pi}\int_{R}^{-R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx+\left(\int_{L_R}+\int_{L_R'}\right)f(z)\,dz=-2\pi ie^{ia\pi}$。

令$R\to\infty$可得$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=\frac{-2\pi ie^{ia\pi}}{1-e^{2ia\pi}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$。

（4）令$f(z)=\frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}$，规定割线上岸$\arg z=0,\arg(1-z)=0$，则割线上岸的积分

为$\int_{\delta}^{1-\delta}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx$，割线下岸积分为$\int_{1-\delta}^{\delta}\frac{\sqrt[4]{x\left[(1-x)e^{-2i\pi}\right]^3}}{(1+x)^3}dx=-i\int_{\delta}^{1-\delta}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx$。

由于$\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}=0$与幅角无关，所以$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$。

$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=-2\pi i\lim\limits_{z\to 0}\frac{z\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}=0$（与幅角无关），

$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta'}f(z)dz=-2\pi i\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z-1)\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3}=0$（与幅角无关），

$$\operatorname{res} f(-1)=\frac{1}{2}\lim_{\substack{z\to e^{i\pi}\\1-z\to 2}}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^{1/4}(1-z)^{3/4}\right]$$

$$=-\frac{3}{32}\lim_{\substack{z\to e^{i\pi}\\1-z\to 2}}\left[z^{-7/4}(1-z)^{3/4}+2z^{-3/4}(1-z)^{-1/4}+z^{1/4}(1-z)^{-5/4}\right]=-\frac{3}{64}2^{-1/4}e^{i\pi/4}\text{。}$$

围道积分为

$$(1-i)\int_{\delta}^{1-\delta}\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}+\int_{C_\delta'}\right)f(z)\,dz=2\pi i\operatorname{res} f(-1)=-i\frac{3}{64}2^{3/4}\pi e^{i\pi/4},$$

令$\delta\to 0,R\to\infty$得$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}dx=-i\frac{3}{64}2^{3/4}\pi\frac{e^{i\pi/4}}{1-i}=\frac{3}{64}2^{1/4}\pi$。

148．按照指定的被积函数，选择适当的积分围道，计算下列积分：

（1）$\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{a-ib\cos\varphi}d\varphi$，$a>0,b>0$，被积函数为$\frac{z^n}{bz^2+2iaz+b}$；

（2）$\int_0^{\infty}\frac{x^b}{1+x^2}\cos\left(ax-\frac{1}{2}bx\right)dx$，$a\geq 0,-1<b<1$，被积函数为$\frac{e^{iaz}z^b}{1+z^2}$；

（3）$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x\left[(\ln x)^2+\pi^2\right]}$，被积函数为$\frac{1}{z\ln z}$；

（4）$\int_0^{\infty}\frac{x\tan^{-1}x}{\left(1+2x^2\right)^2}dx$，被积函数为$\frac{z\ln(1-iz)}{\left(1+2z^2\right)^2}$；

（5）$\int_0^{\infty}\frac{\cos(\ln x)}{1+x^2}dx$，被积函数为$\frac{z^i}{z^2-1}$；

（6）$\int_0^{\pi/2}\frac{r\sin 2\theta}{1-2r\cos 2\theta+r^2}\theta d\theta$，被积函数为$\frac{2zr}{z^2(1+r)^2+(1-r)^2}\frac{\ln(1-iz)}{1+z^2}$。

（1）$\int_{|z|=1}\frac{z^n}{bz^2+2iaz+b}dz=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}}{be^{2i\varphi}+2iae^{i\varphi}+b}e^{i\varphi}d\varphi=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{be^{i\varphi}+2ia+be^{-i\varphi}}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi}+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{e^{in\varphi}d\varphi}{a-ib\cos\varphi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{e^{-in\theta}d\theta}{a-ib\cos\theta}$$（作代换$\theta=2\pi-\varphi$）

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{a-ib\cos\varphi}d\varphi$$

记$f(z)=\frac{z^n}{bz^2+2iaz+b}=\frac{z^n}{b(z-z_1)(z-z_2)}$，其中$z_1=\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}-\frac{a}{b}\right)i$，

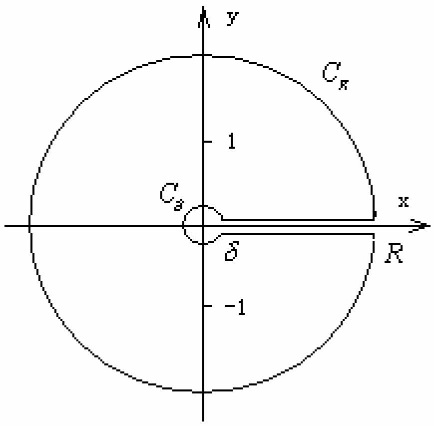
$z_2=-\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}+\frac{a}{b}\right)i$，显然$z_1$在单位圆内，$z_2$在单位圆外。

$$\operatorname{res} f(z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{z^n}{b(z-z_2)}=\frac{i^n\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}-\frac{a}{b}\right)^n}{2bi\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1}}=\frac{1}{2i\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{i}{b}\right)^n\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^n,$$

原积分$=2\pi i\operatorname{res} f(z_1)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{i}{b}\right)^n\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^n$。

（2）令$f(z)=\frac{e^{iaz}z^b}{1+z^2}$，规定$0\le\arg z\le 2\pi$，则$\operatorname{res} f(i)=\lim_{z\to e^{i\pi/2}}\frac{e^{iaz}z^b}{z+i}=\frac{e^{-a}}{2i}e^{i\frac{b}{2}\pi}$，

$\operatorname{res} f(-i)=\lim_{z\to e^{i3\pi/2}}\frac{e^{iaz}z^b}{z-i}=-\frac{e^a}{2i}e^{i\frac{3b}{2}\pi}$。取如下积分路径：



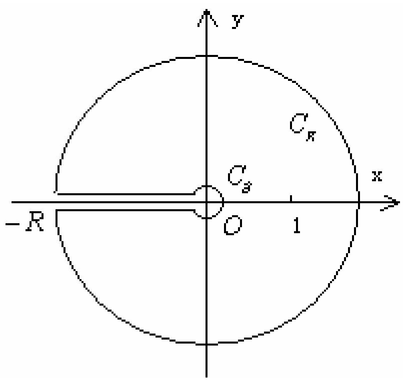
易得$\int_0^\infty \frac{x^b e^{iax}}{1+x^2}dx = \frac{2\pi i}{\left(1-e^{2ib\pi}\right)}\left[\operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f(-i)\right] = -i\pi \frac{\operatorname{sh}\left(a+i\frac{b}{2}\pi\right)}{\sin b\pi}$

$$= \pi\left(\frac{\operatorname{ch} a}{2\cos\frac{b\pi}{2}} - i\frac{\operatorname{sh} a}{2\sin\frac{b\pi}{2}}\right)。$$

所以$\int_0^\infty \frac{x^b \cos ax}{1+x^2}dx = \pi\frac{\operatorname{ch} a}{2\cos\frac{b\pi}{2}}$， $\int_0^\infty \frac{x^b \sin ax}{1+x^2}dx = -\pi\frac{\operatorname{sh} a}{2\sin\frac{b\pi}{2}}$。

原积分$= \cos\frac{b\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^b \cos ax}{1+x^2}dx + \sin\frac{b\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^b \sin ax}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a\right) = \frac{\pi}{2}e^{-a}$。

（3）令 $f(z) = \frac{1}{z\ln z}$，规定$-\pi \le \arg z \le \pi$， $\operatorname{res} f(1) = \lim_{z\to e^{i0}} \frac{1}{z(\ln z)'} = 1$。积分路径如下：



$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to\infty} zf(z) = 2\pi i \lim_{z\to\infty}\frac{1}{\ln z} = 0$，

$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz = -2\pi i \lim_{z\to 0} zf(z) = -2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln z} = 0$，

割线上岸有 $z=re^{i\pi}$ ，积分为 $\int_R^\delta \frac{1}{re^{i\pi}(\ln r+\pi i)}d\left(re^{i\pi}\right)=-\int_\delta^R \frac{1}{x(\ln x+\pi i)}dx$ ，同样可得割线下岸积分为 $\int_\delta^R \frac{1}{x(\ln x-\pi i)}dx$ 。围道积分为：

$$\int_\delta^R \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x-\pi i}-\frac{1}{\ln x+\pi i}\right)dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=2\pi i \text{。}$$

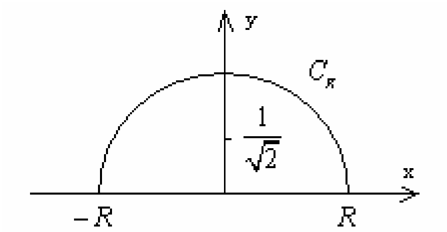
令 $\delta\to 0, R\to\infty$ 得 $2\pi i\int_0^\infty \frac{dx}{x\left[(\ln x)^2+\pi^2\right]}=2\pi i$ ，即 $\int_0^\infty \frac{dx}{x\left[(\ln x)^2+\pi^2\right]}=1$ 。

（4）令 $f(z)=\frac{z\ln(1-iz)}{4\left(z^2+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{z\ln(1-iz)}{4\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2}$ 。

$$\operatorname{res} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}i}\frac{d}{dz}\frac{z\ln(1-iz)}{4\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2}=\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{2}}i}\frac{\left[\ln(1-iz)-\frac{iz}{1-iz}\right]\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)-2z\ln(1-iz)}{4\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^3}$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)\text{。}$$

$-i$ 和 ∞ 是 $f(z)$ 的枝点，可沿虚轴从 $-i$ 向下延伸到 ∞ 作为割线，取如下积分路径（在单值分枝内）：



$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=\pi i\lim_{z\to\infty}\frac{z^2\ln(1-iz)}{\left(1+2z^2\right)^2}=0$ 。围道积分为：

$$\int_{-R}^0 \frac{x\ln(1-ix)}{\left(1+2x^2\right)^2}dx+\int_0^R \frac{x\ln(1-ix)}{\left(1+2x^2\right)^2}dx+\int_{C_R} f(z)dz=2\pi i\operatorname{res} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-i\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)\text{。}$$

由于 $\int_{-R}^0 \frac{x\ln(1-ix)}{\left(1+2x^2\right)^2}dx=\int_R^0 \frac{y\ln(1+iy)}{\left(1+2y^2\right)^2}dy=-\int_0^R \frac{x\ln(1+ix)}{\left(1+2x^2\right)^2}dx$,

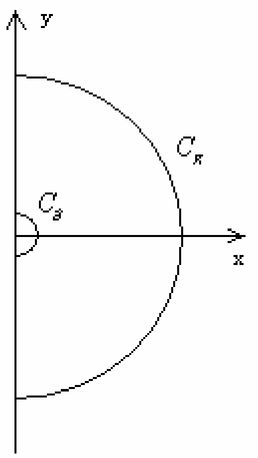
所以$\int_{-R}^{0}\frac{x\ln(1-ix)}{(1+2x^2)^2}dx+\int_0^R\frac{x\ln(1-ix)}{(1+2x^2)^2}dx=\int_0^R\frac{x\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)}{(1+2x^2)^2}dx=-2i\int_0^R\frac{x\tan^{-1}x}{(1+2x^2)^2}dx$。

令围道积分$R\to\infty$得$-2i\int_0^{\infty}\frac{x\tan^{-1}x}{(1+2x^2)^2}dx=-i\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)$，

即$\int_0^{\infty}\frac{x\tan^{-1}x}{(1+2x^2)^2}dx=\frac{\pi}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$。

（5）令 $f(z)=\frac{z^i}{z^2-1}=\frac{e^{i\ln z}}{z^2-1}$，0 和 ∞ 是其枝点，以负实轴作为割线，规定

$-\pi<\arg z\le\pi$，则$\operatorname{res}f(1)=\lim\limits_{z\to e^{i0}}\frac{e^{i\ln z}}{z+1}=\frac{1}{2}$。可取如下积分路径：



正虚轴上有$z=re^{i\pi/2}$，积分为$\int_R^{\delta}\frac{e^{i\left(\ln r+\frac{\pi}{2}i\right)}}{-r^2-1}d\left(re^{i\pi/2}\right)=ie^{-\pi/2}\int_{\delta}^{R}\frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx$，

负虚轴上$z=re^{-i\pi/2}$积分为$ie^{\pi/2}\int_{\delta}^{R}\frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx$。围道积分为

$$2i\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\int_{\delta}^{R}\frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=2\pi i\operatorname{res}f(1)=\pi i。$$

由于 $zf(z)=\frac{e^{(1+i)\ln z}}{z^2-1}=\frac{e^{(1+i)(\ln|z|+i\arg z)}}{z^2-1}=\frac{e^{(\ln|z|-\arg z)}}{z^2-1}e^{i(\ln|z|+\arg z)}$，$|z|\to0$ 时 $\ln|z|\to-\infty$，

$e^{(\ln|z|-\arg z)}\to0$（与$\arg z$无关），所以$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$。

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^{1+i}}{z^2-1}=\lim_{z\to\infty}\frac{(1+i)z^i}{2z}=\frac{1+i}{2}\lim_{z\to\infty}z^{-1+i}=\frac{1+i}{2}\lim_{z\to\infty}e^{(-1+i)(\ln|z|+i\arg z)}$$

$$=\frac{1+i}{2}\lim_{z\to\infty} e^{\left(-\ln|z|-\arg z\right)} e^{i\left(\ln|z|-\arg z\right)}=0$$ （与 $\arg z$ 无关），

所以 $\lim\limits_{R\to 0}\int_{C_R} f(z)dz=0$。令围道积分 $\delta\to 0, R\to\infty$ 得 $\int_0^\infty \frac{e^{i\ln x}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}$。

（6）见附录。

149. 变换 $t=\frac{bx+a}{x+1}$，即 $x=\frac{t-a}{b-t}$，试利用此类变换证明 $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1} g(t)dt=\int_0^\infty x^{m-1} f(x)dx$，其中 $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2} g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$。假定有关的积分均存在。

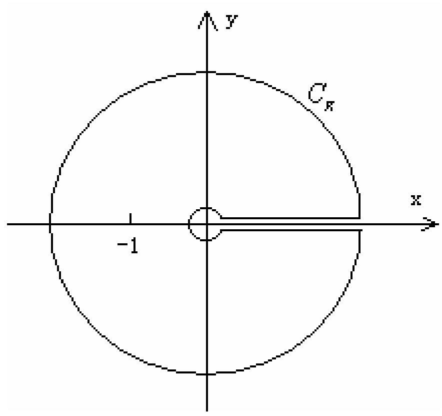
证：令 $x=\frac{1+t}{1-t}$，则 $t=\frac{x-1}{x+1}$， $dt=\frac{2}{(x+1)^2}dx$。所以

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1} g(t)dt=\int_0^\infty x^{m-1} g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{2}{(x+1)^2}dx=\int_0^\infty x^{m-1} f(x)dx。$$

150. 利用上题结果，计算下列积分：（1）$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1}dt$， $0<m<2$；

（2）$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1}\frac{dt}{t^2+1}$， $0<m<2$。

（1）原积分 $=2\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(x+1)^2}dx$。令 $f(z)=\frac{z^{m-1}}{(z+1)^2}$，选取如下积分路径：



可得原积分 $=\frac{2(1-m)\pi}{\sin m\pi}$。

（2）原积分$=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2\sin\frac{m\pi}{2}}$（取与上小题相同的积分路径）。

151．证明：$\int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{m-1} h(t)\,dt=\int_0^\infty x^{m-1} f(x)dx$，其中 $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x+1}\right)^{2m} h\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$。

并由此计算积分$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}dt$。

令$x=\frac{1+t}{1-t}$，则$t=\frac{x-1}{x+1}$，

$\int_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{m-1} h(t)\,dt=\int_0^\infty \left[\frac{4x}{(x+1)^2}\right]^{m-1} h\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{2}{(x+1)^2}dx=\int_0^\infty x^{m-1} f(x)dx$。

$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}dt=2\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(x+1)\left(x^2+1\right)}dx=\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$（取与上小题相同的积分路径）。

152．（1）证明：$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)g(t)\,dt=\int_0^\infty f(x)\ln x dx$，其中 $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$。

（2）计算积分$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{dt}{1-ct}$，$|c|<1$。

（1）令$x=\frac{1+t}{1-t}$，则$t=\frac{x-1}{x+1}$，

$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)g(t)\,dt=\int_0^\infty \ln x g\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{2}{(x+1)^2}dx=\int_0^\infty f(x)\ln x dx$。

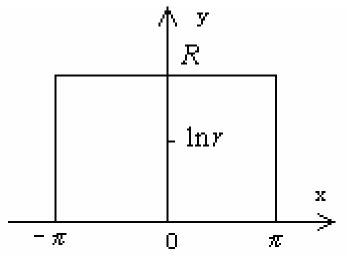
（2）$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{dt}{1-ct}=\frac{2}{1-c}\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)\left(x+\frac{1+c}{1-c}\right)}dx$。令 $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{(z+1)\left(z+\frac{1+c}{1-c}\right)}$，取

与上小题相同的积分路径可得原积分$=\frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+c}{1-c}\right)^2$。

附录：

148.（6）用原题给的被积函数没做出来：（

取被积函数为 $f\left(z\right)=\dfrac{z}{r-e^{-iz}}$ ，积分路径如下图：



$r>1$

$r>1$时，$i\ln r$ 是 $f\left(z\right)$ 的一阶极点， $\operatorname{res} f\left(i\ln r\right)=\lim\limits_{z\to i\ln r}\dfrac{z}{\left(r-e^{-iz}\right)'}=\dfrac{\ln r}{r}$ 。

如上图，底边积分$=\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{x}{r-e^{-ix}}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x}{r-e^{-ix}}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{x}{r-e^{ix}}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x}{r-e^{-ix}}dx$

$$=-2i\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx\text{。}$$

顶边积分$=\displaystyle\int_{\pi}^{-\pi}\frac{x+iR}{r-e^{-i(x+iR)}}dx=\int_{\pi}^{-\pi}\frac{x}{r-e^{R}e^{-ix}}dx+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{iR}{r-e^{R}e^{-ix}}dx$ 。

由于$\displaystyle\left|\int_{\pi}^{-\pi}\frac{x}{r-e^{R}e^{-ix}}dx\right|\le\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|x|}{\sqrt{r^2-2re^{R}\cos\theta+e^{2R}}}dx\le\frac{2}{e^{R}-r}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi^2}{e^{R}-r}$，

$\displaystyle\left|\int_{\pi}^{-\pi}\frac{iR}{r-e^{R}e^{-ix}}dx\right|\le\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R}{e^{R}-r}dx=\frac{2\pi R}{e^{R}-r}$，所以顶边积分$\to 0$（$R\to\infty$）。

左边积分+右边积分$=\displaystyle i\int_{R}^{0}\frac{-\pi+iy}{r-e^{-i(-\pi+iy)}}dy+i\int_{0}^{R}\frac{\pi+iy}{r-e^{-i(\pi+iy)}}dy=2\pi i\int_0^{R}\frac{1}{r+e^{y}}dy$

$$=2\pi i\int_0^{R}\frac{e^{-y}}{1+re^{-y}}dy=-\frac{2\pi i}{r}\ln\left|1+re^{-y}\right|_0^{R}=\frac{2\pi i}{r}\left[\ln\left(1+r\right)-\ln\left(1+re^{-R}\right)\right]\text{。}$$

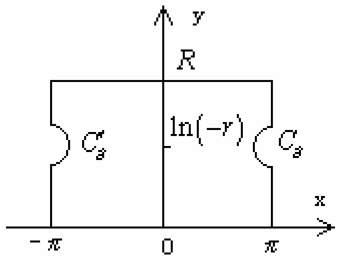
当$R\to\infty$时，该积分$\to\dfrac{2\pi i}{r}\ln\left(1+r\right)$。

所以$R\to\infty$时围道积分$=\displaystyle -2i\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx+\frac{2\pi i}{r}\ln\left(1+r\right)$

$$=2\pi i\operatorname{res} f\left(i\ln r\right)=2\pi i\frac{\ln r}{r}\text{，}$$

所以$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{\pi}{r}\ln\left(1+\frac{1}{r}\right)$，即

$$\int_0^{\pi/2}\frac{r\sin 2\theta}{1-2r\cos 2\theta+r^2}\theta d\theta=\frac{r}{4}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{\pi}{4}\ln\left(1+\frac{1}{r}\right)\text{。}$$



$r<-1$

$r<-1$时，$\pm\pi+i\ln(-r)$是$f(z)$的一阶极点，如上图，

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta} f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to\pi+i\ln(-r)}\left[z-\pi-i\ln(-r)\right]f(z)=-\pi i\frac{\ln(-r)}{r}-\frac{\pi^2}{r},$$

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C'_\delta} f(z)dz=-\pi i\lim_{z\to-\pi+i\ln(-r)}\left[z+\pi-i\ln(-r)\right]f(z)=-\pi i\frac{\ln(-r)}{r}+\frac{\pi^2}{r}。$$

左边积分+右边积分

$$=-\frac{2\pi i}{r}\ln\left|1+re^{-y}\right|_0^R=\frac{2\pi i}{r}\left[\ln(-1-r)-\ln\left|1+re^{-R}\right|\right]\to\frac{2\pi i}{r}\ln(-1-r)\text{（}R\to\infty\text{）。}$$

围道积分$=-2i\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx+\frac{2\pi i}{r}\ln(-1-r)-2\pi i\frac{\ln(-r)}{r}=0$，即

$$\int_0^{\pi/2}\frac{r\sin2\theta}{1-2r\cos2\theta+r^2}\theta d\theta=\frac{r}{4}\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{\pi}{4}\ln\left(1+\frac{1}{r}\right)。$$

$-1<r<1$时，极点位于下半平面，所以围道积分为

$-2i\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1-2r\cos x+r^2}dx+\frac{2\pi i}{r}\ln(1+r)=0$，即$\int_0^{\pi/2}\frac{r\sin2\theta}{1-2r\cos2\theta+r^2}\theta d\theta=\frac{\pi}{4}(1+r)$。

153．若函数 $f\left(z\right)$ 在右半平面 $\operatorname{Re} z>0$ 内解析，且满足 $f\left(z+1\right)=zf\left(z\right)$， $f\left(1\right)\neq 0$，证明 $f\left(z\right)$ 能够解析延拓到全平面， $z=0,-1,-2,\cdots$ 除外。

令 $f_1\left(z\right)=\dfrac{1}{z}f\left(z+1\right)$，他在 $\operatorname{Re} z>-1$ 内解析（除 $z=0$ 外），由于在 $\operatorname{Re} z>0$ 内有 $f_1\left(z\right)=f\left(z\right)$，所以 $f_1\left(z\right)$ 就是 $f\left(z\right)$ 在 $\operatorname{Re} z>-1$ 内的解析延拓。同样的，令 $f_2\left(z\right)=\dfrac{1}{z\left(z+1\right)}f\left(z+2\right)$，它在 $\operatorname{Re} z>-2$ 内解析（除 $z=0,-1$ 外），由于在 $\operatorname{Re} z>-1$ 内有 $f_2\left(z\right)=\dfrac{1}{z}f\left(z+1\right)=f_1\left(z\right)$，即它是 $f_1\left(z\right)$ 在 $\operatorname{Re} z>-2$ 内的解析延拓。同样的，可得到 $f\left(z\right)$ 在全平面上的解析延拓（$z=0,-1,-2,\cdots$ 除外）。

154．证明 $f_1\left(z\right)=1+az+a^2z^2+\cdots$ 与 $f_2\left(z\right)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{\left(1-a\right)z}{\left(1-z\right)^2}+\dfrac{\left(1-a\right)^2z^2}{\left(1-z\right)^3}-+\cdots$ 互为解析延拓。

当 $\left|az\right|<1$，即 $\left|z\right|<\dfrac{1}{\left|a\right|}$ 时， $f_1\left(z\right)=\dfrac{1}{1-az}$。

当 $\left|\dfrac{\left(1-a\right)z}{1-z}\right|<1$ 时， $f_2\left(z\right)=\dfrac{1}{1-z}\dfrac{1}{1+\dfrac{\left(1-a\right)z}{1-z}}=\dfrac{1}{1-az}$。

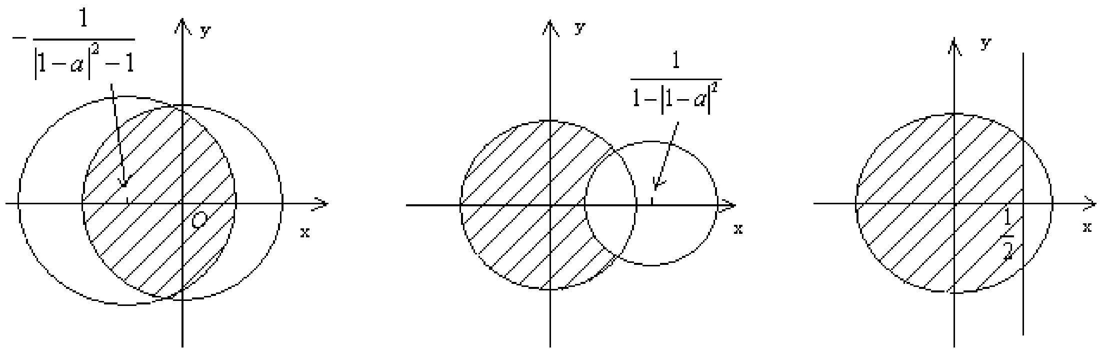
将 $\left|\dfrac{\left(1-a\right)z}{1-z}\right|<1$ 化成 $\left(\left|1-a\right|^2-1\right)z\overline{z}+z+\overline{z}-1<0$，这是圆内（外）方程（见习题 02 第 47 题），圆心为 $c=-\dfrac{1}{\left|1-a\right|^2-1}$，半径为 $R=\dfrac{\left|1-a\right|}{\left|\left|1-a\right|^2-1\right|}$。

若 $\left|1-a\right|>1$，这是圆内方程，圆心在负实轴，且 $R>\left|c\right|$；若 $\left|1-a\right|<1$，这是圆外方程，圆心在正实轴，且 $R<\left|c\right|$。

当 $\left|1-a\right|=1$， $\left(\left|1-a\right|^2-1\right)z\overline{z}+z+\overline{z}-1<0$ 化为 $x<\dfrac{1}{2}$。

这三种情况 $\left(\left|1-a\right|^2-1\right)z\overline{z}+z+\overline{z}-1<0$ 都与 $\left|z\right|<\dfrac{1}{\left|a\right|}$ 有交集，如下图所示。

在交集上有 $f_1\left(z\right)=f_2\left(z\right)$，所以两者互为解析延拓。



155．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z^{n}}\right)$在区域$|z|<1$与$|z|>1$内分别代表两个解析函数，但不互为解析延拓。

$$S_N(z)=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z^{n}}\right)=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-z^2}-\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{1-z^3}-+\cdots-\frac{1}{1-z^N}+\frac{1}{1-z^{N+1}}$$

$$=\frac{1}{1-z^{N+1}}-\frac{1}{1-z}\text{。}$$

$|z|<1$时，$S(z)=\lim_{N\to\infty}S_N(z)=1-\frac{1}{1-z}=-\frac{z}{1-z}$，$|z|>1$时，$S(z)=-\frac{1}{1-z}$。显然两者不互为解析延拓。

156．已知：$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}=z+z^2+z^4+z^8+\cdots$，$|z|<1$。（1）证明：$z=1$是$f(z)$的奇点；（2）证明：$f(z)=z+f\left(z^2\right)$，因此$z^2=1$的根也都是$f(z)$的奇点；（3）类似的证明：$z^{2^k}=1$的$2^k$个根也是$f(z)$的奇点，$k$为任意正整数；（4）由此证明：不可能将$f(z)$解析延拓到单位圆外。

（1）$f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}1\to\infty$，即$z=1$是$f(z)$的奇点。

（2）$f\left(z^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{2^n}=f(z)-z$。

（3）$f(z)=z+f\left(z^2\right)=z+z^2+f\left(z^4\right)$

$$=\cdots=z+z^2+z^4\cdots+z^{2^{k-1}}+f\left(z^{2^k}\right)$$

（4）对于任意包含单位圆上一段弧的区域，总存在N，使得$z^{2^N}=1$的某个根落入该区域，所以不可能将$f(z)$解析延拓到单位圆外。

157．求下列各积分的一致收敛区域：（1）$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\sqrt{1-t}}dt$；（2）$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$；（3）$\int_0^\infty e^{-zt^2}dt$；

（4）$\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}dt$。

（1）$\operatorname{Re} z \ge \delta > 0$时，在$t\in(0,1)$上有$\left|\frac{t^{z-1}}{\sqrt{1-t}}\right| \le \frac{1}{t^{1-\delta}(1-t)^{1/2}}$，由于$1-\delta<1$，$\frac{1}{2}<1$，所以$\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\delta}(1-t)^{1/2}}$收敛，所以$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\sqrt{1-t}}dt$在$\operatorname{Re} z \ge \delta$上一致收敛。

（2）原积分$=\int_0^1 \frac{\sin t}{t^z}dt+\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$。

当$\operatorname{Re} z \le 2-\delta$（$\delta>0$）时，在$t\in(0,1)$上有$\left|\frac{\sin t}{t^z}\right| \le \frac{t}{t^{2-\delta}}=\frac{1}{t^{1-\delta}}$。由于$\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\delta}}dt$收敛，所以$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^z}dt$在$\operatorname{Re} z \le 2-\delta$上一致收敛。

当$\operatorname{Re} z \ge \delta > 0$时，$\left|\frac{1}{t^z}\right| \le \frac{1}{t^\delta}$一致单调趋于零，$\left|\int_1^b \sin t dt\right| = |\cos 1-\cos b| \le 2$，由狄里克莱判别法可知$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$一致收敛。所以原积分在$\delta \le \operatorname{Re} z \le 2-\delta$上一致收敛。

（3）$\operatorname{Re} z \ge \delta > 0$时，$\left|e^{-zt^2}\right| \le e^{-\delta t^2}$，由于$\int_0^\infty e^{-\delta t^2}dt$收敛，所以原积分一致收敛。

（4）$\operatorname{Re} z \ge \delta > 0$时，$\left|e^{-zt}\right| \le e^{-\delta t}$，所以$\int_0^\infty e^{-zt}dt$一致收敛，又由于$\frac{1}{1+t}$单调有界，由Abel判别法可知原积分一致收敛。

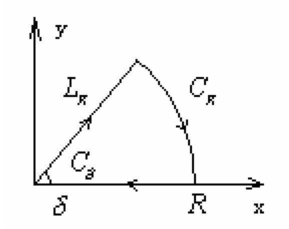
158．证明：（1）$\Gamma(z)=\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx$，$\operatorname{Re} z>0$；

（2）$\Gamma(z)=\int_L t^{z-1}e^{-t}dt$，$\operatorname{Re} z>0$，$L$是自原点发出的射线，$0<|t|<\infty$，$|\arg t|<\frac{\pi}{2}$；

（3）$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$，$z\ne 0,-1,-2,\cdots$。

（1）作代换 $\ln\frac{1}{x}=t$，即 $x=e^{-t}$，则 $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx=-\int_\infty^0 t^{z-1}e^{-t}dt=\Gamma(z)$。

（2）令 $f(t)=t^{z-1}e^{-t}$，在如下的围道上积分：



$\left(\int_L+\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(t)dt-\int_\delta^R f(x)dx=0$。

由于 $\lim\limits_{t\to0}tf(t)=\lim\limits_{t\to0}t^z e^{-t}=0$（$\operatorname{Re}z>0$），所以 $\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(t)dt=0$，

由于 $\lim\limits_{t\to\infty}tf(t)=\lim\limits_{t\to\infty}t^z e^{-t}=0$，所以 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(t)dt=0$。

令围道积分 $\delta\to0,R\to\infty$ 既可得 $\int_L e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}dx=\Gamma(z)$。

（3）$\Gamma(z)=\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt=\int_0^1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}dt+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$

可求得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!}$ 的收敛半径为 ∞，所以上式中积分与求和可交换顺序，即

$\Gamma(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$。$\operatorname{Re}z>0$ 时有 $\int_0^1 t^{n+z-1}dt=\frac{1}{n+z}$，即

$\Gamma(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$。

任取一有界单连通闭区域 $\overline{G}$（排除 $z=0,-1,-2,\cdots$），有

$\left|\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}\right|=\frac{1}{n!}\frac{1}{\sqrt{(n+x)^2+y^2}}\le\frac{1}{n!|y|}$。由于 $\overline{G}$ 有界且不含原点，必存在 M，使在 $\overline{G}$ 上有 $\frac{1}{|y|}\le M$。由于 $\sum\frac{M}{n!}$ 收敛，所以 $\sum\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛，所以在 G 上解析。由 $\overline{G}$ 的任意性可知该级数在全平面（排除 $z=0,-1,-2,\cdots$）上解析。上式可作为 $\Gamma(z)$ 在全平面上的解析延拓。

159．将下列连乘积用Γ函数表示出来：（1）$(2n)!!$；　（2）$(2n-1)!!$；

（3）$(1+\rho)(2+\rho)\cdots(n+\rho)$；（4）$\left[n(n+1)-\rho(\rho+1)\right]\left[(n-1)n-\rho(\rho+1)\right]\cdots\left[0-\rho(\rho+1)\right]$。

（1）$(2n)!!=(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2=2^n n(n-1)(n-2)\cdots 1=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$。

（2）$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 1=\dfrac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 2\cdot 1}{(2n)!!}$

$$=\frac{(2n)!}{(2n)!!}=\frac{\Gamma(2n+1)}{2^n\Gamma(n+1)}。$$

（3）$\Gamma(\rho+n+1)=(\rho+n)\Gamma(\rho+n)=(\rho+n)(\rho+n-1)\Gamma(\rho+n-1)=\cdots$

$$=(\rho+n)(\rho+n-1)\cdots(\rho+1)\Gamma(\rho+1)$$

所以$(1+\rho)(2+\rho)\cdots(n+\rho)=\dfrac{\Gamma(\rho+n+1)}{\Gamma(\rho+1)}$。

（4）$n(n+1)-\rho(\rho+1)=-\left[\rho^2+\rho-n(n+1)\right]=(\rho+n+1)(n-\rho)$，

原式$=(\rho+n+1)(\rho+n)\cdots(\rho+1)\cdot(n-\rho)(n-1-\rho)\cdots(-\rho)=\dfrac{\Gamma(\rho+n+2)}{\Gamma(\rho+1)}\dfrac{\Gamma(n+1-\rho)}{\Gamma(-\rho)}$。

160．设$\psi(z)=\dfrac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$，证明：（1）$\psi(z+1)=\dfrac{1}{z}+\psi(z)$；

（2）$\psi(z+n)-\psi(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z+1}+\cdots+\dfrac{1}{z+n-1}$；（3）$\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\cot(\pi z)$；

（4）$2\psi(2z)-\psi(z)-\psi\left(z+\dfrac{1}{2}\right)=2\ln 2$。

（1）对$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$两边取对数，再微商即可证。

（2）由$\Gamma(z+n)=(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$可证。

（3）由$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$可得。

（4）由$\Gamma(2z)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right)$可得。

161．证明：$\psi(z)$仍以 0 及负整数为其一阶极点，并求其留数。

由上题第（2）小题结论，$\psi(z)=\psi(z+n+1)-\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}-\cdots-\frac{1}{z+n}$。$\psi(z+n+1)$在 $z=-n$ 的足够小邻域内是解析的（因为$\psi(z+n+1)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+n+1)$，而$\Gamma(z+n+1)$是解析的），所以 $z=-n$（$n=0,1,2,\cdots$）为其一阶极点。

$$\operatorname{res}\psi(-n)=\lim_{z\to -n}(z+n)\psi(z)$$

$$=\lim_{z\to -n}\left[(z+n)\psi(z+n+1)-\frac{(z+n)}{z}-\frac{(z+n)}{z+1}-\cdots-\frac{(z+n)}{z+n-1}-1\right]=-1$$

162．定义 $J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$，试导出$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$，$n=0,1,2,\cdots$ 的级数表达式。

由于 $z=-n$（$n=0,1,2,\cdots$）是$\Gamma(z)$的极点，所以有$\frac{1}{\Gamma(-n)}=0$。由此可导出 $J_n(z)$ 的一个性质：$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z)$。

$$J_{-n}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}=(-1)^n J_n(z)。$$

当$\nu\neq n$时，$J_\nu(z)$是多值函数，0 和∞是其枝点，可把负实轴作为割线，规定$|\arg z|<\pi$。用$u_k(z,\nu)$表示$J_\nu(z)$级数表达式的通项，当$|z|\le M,|\nu|\le L$（M,L是任意正数），k充分大时，$\left|\frac{u_{k+1}(z,\nu)}{u_k(z,\nu)}\right|=\frac{1}{(k+1)|k+\nu+1|}\left|\frac{z}{2}\right|^2\le\frac{1}{(k+1)(k+1-L)}\left(\frac{M}{2}\right)^2\to 0$，所以该级数在给定范围内对于$z$和$\nu$是一致收敛的，可对$z$和$\nu$逐项微分；$J_\nu(z)$是$\nu$的整函数，在$z$的单值分枝内是$z$的解析函数。

由于$z=-n$是$\Gamma(z)$和$\psi(z)$的一阶极点，且$\operatorname{res}\Gamma(-n)=\frac{(-1)^n}{n!}$，$\operatorname{res}\psi(-n)=-1$，

所以可设$\Gamma(z)=\dfrac{1}{z+n}\left[\dfrac{(-1)^n}{n!}+a_1(z+n)+a_2(z+n)^2+\cdots\right]$，

$\psi(z)=\dfrac{1}{z+n}\left[-1+b_1(z+n)+b_2(z+n)^2+\cdots\right]$，由此得$\dfrac{\psi(-n)}{\Gamma(-n)}=(-1)^{n+1}n!$。

$$\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma'(k+\nu+1)}{k!\Gamma^2(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}+\ln\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(k+\nu+1)}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}+J_\nu(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\left.\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(k+n+1)}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}+J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(k-\nu+1)}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}-J_{-\nu}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\left.\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right|_{\nu=n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(k-n+1)}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-J_{-n}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\psi(k-n+1)}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(k-n+1)}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}-(-1)^nJ_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\psi(k+1)}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}-J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)\right]$$

当$n=0$时，上式右边没有第一项求和。
利用洛比达法则，

$$Y_n(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{\dfrac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\cos\nu\pi-\pi J_\nu(z)\sin\nu\pi-\dfrac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

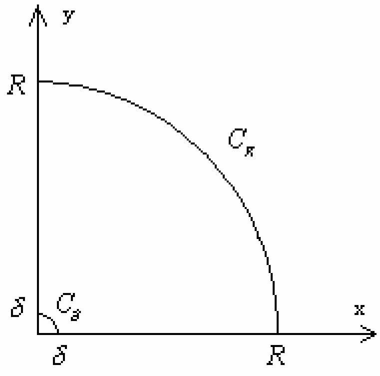
$$=\frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left[\psi(k+n+1)+\psi(k+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

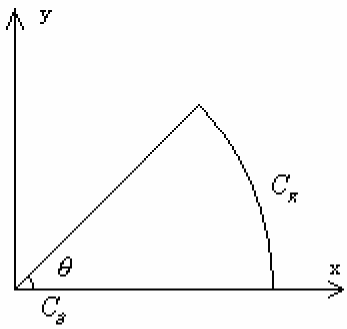
163．计算下列积分：（1）$\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x dx$，$0<\alpha<2$，$\int_0^\infty x^{-\alpha}\cos x dx$，$0<\alpha<1$；

（2）$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)dx$，$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)dx$，$\alpha>0,|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$。

（1）令 $f(z)=z^{-\alpha}e^{-z}$，规定$-\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}$，在下面左图路径上积分：



(1)



(2)

$$\int_{\delta}^{R} r^{-\alpha}e^{-r}dr+\int_{R}^{\delta}\left(re^{i\pi/2}\right)^{-\alpha}e^{-ir}d\left(re^{i\pi/2}\right)+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=0$$

当$0<\alpha<1$时，$0<1-\alpha<1$，$\lim\limits_{z\to0}zf(z)=\lim\limits_{z\to0}z^{1-\alpha}e^{-z}=0$，所以$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$。

又因为$\operatorname{Re}z>0$，所以$\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=\lim\limits_{z\to\infty}z^{1-\alpha}e^{-z}=0$，因此$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$。

令围道积分$\delta\to0,R\to\infty$得$\int_0^{\infty}x^{-\alpha}e^{-ix}dx=-ie^{i\frac{\alpha\pi}{2}}\int_0^{\infty}x^{-\alpha}e^{-x}dx=-ie^{i\frac{\alpha\pi}{2}}\Gamma(1-\alpha)$。

取实部和虚部既可得$0<\alpha<1$时有$\int_0^{\infty}x^{-\alpha}\sin xdx=\Gamma(1-\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$，

$\int_0^{\infty}x^{-\alpha}\cos xdx=\Gamma(1-\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}$。

157 题第（2）小题已证明$\int_0^{\infty}x^{-\alpha}\sin xdx$在区间$\alpha\in[\delta,2-\delta]$（$\forall\delta>0$）上是一致收敛的，所以它在$\alpha\in(\delta,2-\delta)$上是$\alpha$的解析函数，由$\delta$的任意性，它是$(0,2)$上的解析函数。由解析延拓原理，$0<\alpha<2$时有$\int_0^{\infty}x^{-\alpha}\sin xdx=\Gamma(1-\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$。

（2）取 $f(z)=z^{\alpha-1}e^{-z}$ 在上面右图路径上的积分，

$$\int_{\delta}^{R} r^{\alpha-1}e^{-r}dr+\int_{R}^{\delta}\left(re^{i\theta}\right)^{\alpha-1}e^{-r(\cos\theta+i\sin\theta)}d\left(re^{i\theta}\right)+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\delta}\right)f(z)dz=0$$

由于$\alpha>0$，$\lim\limits_{z\to0}zf(z)=\lim\limits_{z\to0}z^{\alpha}e^{-z}=0$，所以$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(z)dz=0$。

因为$\operatorname{Re}z>0$（$|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$），所以$\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=\lim\limits_{z\to\infty}z^{\alpha}e^{-z}=0$，因此$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$。

令围道积分$\delta\to0,R\to\infty$得$\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}e^{-ix\sin\theta}dx=e^{-i\alpha\theta}\Gamma(\alpha)$

取实部和虚部得$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\cos\left(x\sin\theta\right)dx=\Gamma\left(\alpha\right)\cos\alpha\theta$，

$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x\cos\theta}\sin\left(x\sin\theta\right)dx=\Gamma\left(\alpha\right)\sin\alpha\theta$。

164．试用下面的方法导出$\Gamma\left(z\right)$的渐近公式：（1）通过变量代换将$\Gamma\left(z+1\right)$的积分表达式改写成$\Gamma\left(z+1\right)=z^z e^{-z}\int_{-z}^\infty \exp\left[z\ln\left(1+\frac{s}{z}\right)-s\right]ds$；（2）将上述积分中被积函数的指数作展开而只保留最主要的一项，并将积分下限近似地换成$-\infty$，这样就得到$\Gamma\left(z+1\right)$在z大时的渐近公式：$\Gamma\left(z+1\right)\sim\sqrt{2\pi z}z^z e^{-z}$。

令$t=s+z$，则$\Gamma\left(z+1\right)=\int_0^\infty t^z e^{-t}dt=\int_0^\infty \exp\left(z\ln t-t\right)dt=\int_{-z}^\infty \exp\left(z\ln\left(s+z\right)-s-z\right)ds$

$$=e^{z\ln z-z}\int_{-z}^\infty \exp\left[z\ln\left(s+z\right)-z\ln z-s\right]ds=z^z e^{-z}\int_{-z}^\infty \exp\left[z\ln\left(1+\frac{s}{z}\right)-s\right]ds。$$

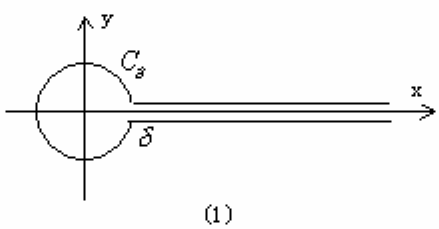
$\ln\left(1+\frac{s}{z}\right)=\frac{s}{z}-\frac{s^2}{2z^2}+\frac{s^3}{3z^3}-+\cdots$，$z\ln\left(1+\frac{s}{z}\right)-s=-\frac{s^2}{2z}+\frac{s^3}{3z^2}-+\cdots$。

保留第一项$-\frac{s^2}{2z}$，并取积分下限为$-\infty$，得到$\Gamma\left(z+1\right)\approx z^z e^{-z}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2z}}ds=\sqrt{2\pi z}z^z e^{-z}$。

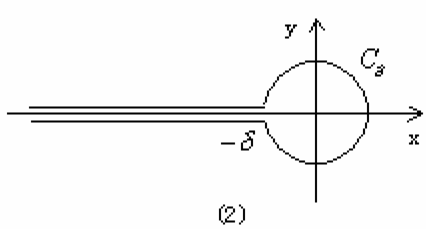
165．证明$\Gamma\left(z\right)$的下列积分表示（对一切z都成立）：

（1）$\Gamma\left(z\right)=\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta$，$C$如下面左图所示，规定割线上岸$\arg\zeta=0$；

（2）$\frac{1}{\Gamma\left(z\right)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\zeta^{-z}e^{\zeta}d\zeta$，$C'$如下面右图所示，规定割线下岸$\arg\zeta=-\pi$。



(1)



(2)

（1） 记$f\left(\zeta\right)=e^{-\zeta}\zeta^{z-1}$，围线积分为：

$\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta=\int_R^{\delta}e^{-x}x^{z-1}dx+e^{2i\pi z}\int_{\delta}^{R}e^{-x}x^{z-1}dx+\int_{C_\delta}f(\zeta)d\zeta$。

设 $\operatorname{Re}z>0$，则 $\lim\limits_{\zeta\to0}\zeta f(\zeta)=\lim\limits_{\zeta\to0}e^{-\zeta}\zeta^{z}=0$，所以 $\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}f(\zeta)d\zeta=0$。

令围道积分 $\delta\to0$ 得 $\Gamma(z)=\dfrac{1}{e^{2i\pi z}-1}\int_C\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta$。继续可得

$\Gamma(z)=\dfrac{e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\int_C\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta=\dfrac{e^{-i\pi z}}{2i\sin\pi z}\int_C\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta$。由 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ 可得

$\dfrac{1}{\Gamma(1-z)}=\dfrac{e^{-i\pi z}}{2\pi i}\int_C\zeta^{z-1}e^{-\zeta}d\zeta$，即 $\dfrac{1}{\Gamma(z)}=-\dfrac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_C\zeta^{-z}e^{-\zeta}d\zeta$。作代换 $\zeta=te^{i\pi}$，则

$\dfrac{1}{\Gamma(z)}=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C'}t^{-z}e^{t}dt$。

166．从公式 $\Gamma(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$ 出发，证明：

（1）$\Gamma(z)=\dfrac{1}{z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{z}\right]$；（2）$\Gamma(z)=\dfrac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}\right]$，

其中 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\ln n+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)$。

（1）作代换 $t=nx$，则 $\int_0^n\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=n^z\int_0^1(1-x)^n x^{z-1}dx=n^z\mathrm{B}(n+1,z)$

$$=n^z\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)}=n^z\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)(z+n)}$$

$$=n^z\frac{1}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n-1}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)}=n^z\frac{1}{z\left(1+\frac{z}{n}\right)}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}$$

$$=\left(\frac{2}{1}\right)^z\left(\frac{3}{2}\right)^z\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^z\frac{1}{z\left(1+\frac{z}{n}\right)}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{z\left(1+\frac{z}{n}\right)}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}\right]$$

令 $n\to\infty$ 即得 $\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right]$。

（2） $n^z=e^{z\ln n}=\exp\left(z\ln n-z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\exp\left(z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\exp\left[z\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right]\prod_{k=1}^{n}e^{\frac{z}{k}}$ ，

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=n^z\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}=\frac{1}{z}\exp\left[z\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right]\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{\frac{z}{k}}\right]$$

令 $n\to\infty$ 即得 $\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}}\right]$。

167．利用上题结果，证明：（1） $\Gamma(1)=1$；（2） $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$；

（3） $\psi(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right)$；（4） $\Gamma'(1)=-\gamma$ ；

（5） $\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-(\gamma+2\ln 2)\sqrt{\pi}$ 。

（1）令上题第（1）小题中 $z=1$ 即可得。

（2） $\Gamma(z+1)=\frac{1}{z+1}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z+1}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z+1}$

$$=\frac{1}{z+1}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1+z}{k}\right)^{-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}=\frac{1}{z+1}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1+z}{k+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}$$

$$=\frac{1}{z+1}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}=\frac{1}{z+1}\lim_{n\to\infty}(1+z)\left(1+\frac{z}{n+1}\right)^{-1}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z}=z\Gamma(z)\text{。}$$

（3） $\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{\frac{z}{k}}\right]$，

$$\ln\Gamma(z)=-\ln z-\gamma z+\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{\frac{z}{k}}\right]=-\ln z-\gamma z+\lim_{n\to\infty}\left[-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{z}{k}\right)+z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]$$

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}\right)\text{。}$$

（4）$\psi(1)=-\gamma-1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=-\gamma-1+\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\gamma$，

$\Gamma'(1)=\psi(1)\Gamma(1)=-\gamma$。

（5）$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1/2}\right)=-\gamma-2\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}\right)\right]$

$$=-\gamma-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=-\gamma-2\ln 2,$$

$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=\psi\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-(\gamma+2\ln 2)\sqrt{\pi}$。

168．试证B函数的下列性质：（1）$\mathrm{B}(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$；

（2）$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1)$；（3）$p\mathrm{B}(p,q+1)=q\mathrm{B}(p+1,q)$；

（4）$\mathrm{B}(p,q)\mathrm{B}(p+q,r)=\mathrm{B}(q,r)\mathrm{B}(q+r,p)$；

（5）$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$，$\mathrm{Re}\,p>0$，$\mathrm{Re}\,q>0$。

（1）$\mathrm{B}(p,q+1)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+1)}=\frac{q}{p+q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$。由$\mathrm{B}(p,q)$关于$p,q$的对称性有$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$，由此可得出（2）（3）小题结论。

（4）左边$=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\frac{\Gamma(p+q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$，

右边$=\frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}\frac{\Gamma(q+r)\Gamma(p)}{\Gamma(p+q+r)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$。

（5）作变量代换$x=\frac{t}{1+t}$，则

$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{q-1}dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{p-1}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{q-1}\frac{dt}{(1+t)^2}=\int_0^{\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$。

169．计算下列积分：（1）$\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q dx$，$\mathrm{Re}\,p>-1$，$\mathrm{Re}\,q>-1$，$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$；

（2）$\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha\theta d\theta$，$\int_0^{\pi/2}\cot^\alpha\theta d\theta$，$|\alpha|<1$。

（1）作代换$1+x=2u$，即$(1-x)=2(1-u)$，则

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q dx=2^{p+q+1}\int_0^1(1-u)^p u^q du=2^{p+q+1}\mathrm{B}(p+1,q+1)。$$

作代换$x^2=u$，则$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=2\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1(1-u)^n u^{-1/2}du=\mathrm{B}\left(n+1,\frac{1}{2}\right)$。

（2）作代换$\tan^2\theta=x$，则

$$\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}{(1+x)}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{x^{\frac{1+\alpha}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{1-\alpha}{2}+\frac{1+\alpha}{2}}}dx$$

由上题第（5）小题，上式$=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(1-\frac{1-\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}$

$=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$。

作代换$\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$可得$\int_0^{\pi/2}\tan^\alpha\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\cot^\alpha\varphi d\varphi$。

170．计算积分$\iiint_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz$，其中积分区域$V$为：

（1）平面$x=0$，$y=0$，$z=0$以及$x+y+z=1$包围的区域；

（2）平面$x=0$，$y=0$，$z=0$以及曲面$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r=1$包围的区域。

（1）原积分$=\int_0^1 x^{\alpha-1}dx\int_0^{1-x}y^{\beta-1}dy\int_0^{1-x-y}z^{\gamma-1}dz=\int_0^1 x^{\alpha-1}dx\int_0^{1-x}\frac{1}{\gamma}(1-x-y)^\gamma y^{\beta-1}dy$

$$=\frac{1}{\gamma}\int_0^1(1-x)^{\beta+\gamma}x^{\alpha-1}dx\int_0^1(1-u)^\gamma u^{\beta-1}du\ （作代换\frac{y}{1-x}=u）$$

$$=\frac{1}{\gamma}\mathrm{B}(\beta+\gamma+1,\alpha)\mathrm{B}(\gamma+1,\beta)=\frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\gamma+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}。$$

（2）作代换$\begin{cases} x=a\left(R\sin\theta\cos\varphi\right)^{\frac{2}{p}} \\ y=b\left(R\sin\theta\sin\varphi\right)^{\frac{2}{q}} \\ z=c\left(R\cos\theta\right)^{\frac{2}{r}} \end{cases}$，则 $J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} \frac{2a}{p}R^{\frac{2}{p}-1}\sin^{\frac{2}{p}}\theta\cos^{\frac{2}{p}}\varphi & \frac{2a}{p}R^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}-1}\theta\cos\theta\cos^{\frac{2}{p}}\varphi & -\frac{2a}{p}R^{\frac{2}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin\varphi \\ \frac{2b}{q}R^{\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}}\theta\sin^{\frac{2}{q}}\varphi & \frac{2b}{q}R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos\theta\sin^{\frac{2}{q}}\varphi & \frac{2b}{q}R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos\varphi \\ \frac{2c}{r}R^{\frac{2}{r}-1}\cos^{\frac{2}{r}}\theta & -\frac{2c}{r}R^{\frac{2}{r}}\cos^{\frac{2}{r}-1}\theta\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{8abc}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\sin^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{r}-1}\theta\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{8abc}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\sin^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{r}-1}\theta\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi$$

原积分

$$=\iiint_V a^{\alpha-1}\left(R\sin\theta\cos\varphi\right)^{\frac{2}{p}(\alpha-1)}b^{\beta-1}\left(R\sin\theta\sin\varphi\right)^{\frac{2}{q}(\beta-1)}c^{\gamma-1}\left(R\cos\theta\right)^{\frac{2}{r}(\gamma-1)}|J|\,dRd\theta d\varphi$$

$$=\frac{8a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2\beta}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2\alpha}{p}-1}\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2\alpha}{p}+\frac{2\beta}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2\gamma}{r}-1}\theta d\theta\int_0^1 R^{\frac{2\alpha}{p}+\frac{2\beta}{q}+\frac{2\gamma}{r}-1}dR$$

$$=\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{1}{\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p},\frac{\beta}{q}\right)\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q},\frac{\gamma}{r}\right)=\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}\right)}$$

$$=\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)}。$$

171．若$\alpha>0$，$0<r<1$，证明：$\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^\alpha\left(1+re^{-i\theta}\right)^\alpha d\theta=\sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}^2 r^{2k}$，

$\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^\alpha\left(1-re^{-i\theta}\right)^\alpha d\theta=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2 r^{2k}$，因此根据 Abel 第二定理，有

$$\sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}^2=\frac{2^\alpha}{\pi}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^\alpha d\theta=\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)},$$

$$\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2=\frac{2^\alpha}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^\pi\sin^\alpha\theta d\theta=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha/2+1)}\cos\frac{\alpha\pi}{2},$$

其中$\dbinom{\alpha}{k}=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}$是普遍的二项式系数。

证：$\left(1+re^{i\theta}\right)^\alpha=\sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}r^ke^{ik\theta}$，$\left(1+re^{-i\theta}\right)^\alpha=\sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}r^ke^{-ik\theta}$。

$\left(1+re^{i\theta}\right)^\alpha\left(1+re^{-i\theta}\right)^\alpha=\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^k\binom{\alpha}{n}\binom{\alpha}{k-n}r^ke^{i(2n-k)\theta}$。在收敛域内可逐项积分：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^\alpha\left(1+re^{-i\theta}\right)^\alpha d\theta=\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^k\binom{\alpha}{n}\binom{\alpha}{k-n}r^k\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(2n-k)\theta}d\theta。$$

由于$\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(2n-k)\theta}d\theta=\begin{cases}1,2n=k\\0,2n\neq k\end{cases}$，所以上式右边$k$只取偶数，令$k=2m$，则$n$只取$m$，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^\alpha\left(1+re^{-i\theta}\right)^\alpha d\theta=\sum_{m=0}^\infty\binom{\alpha}{m}^2 r^{2m}。$$

同样可得$\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+re^{i\theta}\right)^\alpha\left(1-re^{-i\theta}\right)^\alpha d\theta=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2 r^{2k}$。

$$\lim_{k\to\infty}k\left[\binom{\alpha}{k}^2\Big/\binom{\alpha}{k+1}^2-1\right]=\lim_{k\to\infty}k\left[\left(\frac{k+1}{k-\alpha}\right)^2-1\right]=\lim_{k\to\infty}\frac{2(1+\alpha)k^2+\left(1-\alpha^2\right)k}{(k-\alpha)^2}=2(1+\alpha)>1,$$

由极限形式的 Raabe 判别法可知$\sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}^2$和$\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2$收敛。由 Abel 第二定理得

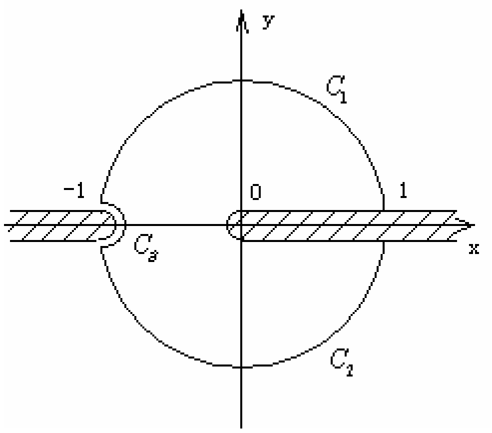
$$\sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}^2=\frac{2^\alpha}{\pi}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^\alpha d\theta=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\int_0^\pi\cos^{2\alpha}\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\int_0^\pi 2\cos^{2\alpha}\varphi d\varphi=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\mathrm{B}\left(\alpha+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2^{2\alpha}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^{2}\left(\alpha+1\right)}=\frac{\Gamma\left(2\alpha+1\right)}{\Gamma^{2}\left(\alpha+1\right)}。$$

$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}^{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(1+e^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1-e^{-i\theta}\right)^{\alpha}d\theta$，可以看到，被积函数是多值的，为确定其单值分枝，应将其表示为复变积分进行讨论。令 $e^{i\theta}=z$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(1+e^{i\theta}\right)^{\alpha}\left(1-e^{-i\theta}\right)^{\alpha}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{(z+1)^{\alpha}(z-1)^{\alpha}}{z^{\alpha+1}}dz,$$

可看出，$\pm1,0,\infty$ 是被积函数的枝点，上式中 C 是向右绕开-1，在 1 点被截断了的单位圆，规定 $z=1$ 处的割线上岸 $\arg z=0$，$\arg(z+1)=0$，$\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}$（如下图）。



由于 $\lim\limits_{z\to-1}(z+1)\frac{(z+1)^{\alpha}(z-1)^{\alpha}}{z^{\alpha+1}}=0$，所以 $\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}\frac{(z+1)^{\alpha}(z-1)^{\alpha}}{z^{\alpha+1}}dz=0$，即可以不考虑这段积分。$z$ 在 C_1 上变化时，$z-1=\cos\theta-1+i\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$，

$z+1=1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(z+1)^{\alpha}(z-1)^{\alpha}}{z^{\alpha+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\pi}\frac{\left(2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^{\alpha}\left[2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}\right]^{\alpha}}{e^{i\theta(\alpha+1)}}d\left(e^{i\theta}\right)$$

$$=\frac{2^{\alpha}e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin^{\alpha}\theta d\theta。$$

当 z 在 C_2 上变化时， $z-1=\cos\theta-1+i\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$，

注意到 $\arg(z+1)$ 在 C_δ 上由 $\pi/2$ 减小到 $-\pi/2$，在 C_2 上由 $-\pi/2$ 增加到 0，所以

$z+1=1+\cos\theta+i\sin\theta=-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right)}$，因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{(z+1)^\alpha(z-1)^\alpha}{z^{\alpha+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\pi^{2\pi}\frac{\left[-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\pi\right)}\right]^\alpha\left[2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}\right]^\alpha}{e^{i\theta(\alpha+1)}}d\left(e^{i\theta}\right)$$

$$=\frac{2^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}(-\sin\theta)^\alpha d\theta=\frac{2^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2\pi}\int_0^\pi\sin^\alpha\varphi d\varphi\quad(\theta-\pi=\varphi)。$$

所以 $\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\binom{\alpha}{k}^2=\frac{2^\alpha}{2\pi}\left(e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}+e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}}\right)\int_0^\pi\sin^\alpha\theta d\theta=\frac{2^\alpha}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^\pi\sin^\alpha\theta d\theta$

$$=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^\pi\sin^\alpha\frac{\theta}{2}\cos^\alpha\frac{\theta}{2}d\theta=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\pi/2}2\sin^\alpha\varphi\cos^\alpha\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)=\frac{2^{2\alpha}}{\pi}\frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)-1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\right]^2}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}=\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}。$$

不得不说一句，这道题。。。。。。。。。。。。。。。。。太变态了!!!!!!!!!!!!!!!!

172．证明：（1） $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\lim_{b\to0}\left[\Gamma(b)-\mathrm{B}(a,b)\right]$；（2） $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\gamma=\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt$，其中 $\gamma=-\Gamma'(1)$（见第 166 及 167 题）。

（1）由于 $z=0$ 是 $\Gamma(z)$ 的一阶极点，留数为 1，所以有 $\lim_{b\to0}b\Gamma(b)=1$。

$$\lim_{b\to0}\left[\Gamma(b)-\mathrm{B}(a,b)\right]=\lim_{b\to0}\frac{\Gamma(b)\left[\Gamma(a+b)-\Gamma(a)\right]}{\Gamma(a+b)}$$

$$=\lim_{b\to0}\left[\frac{1}{\Gamma(a+b)}\cdot b\Gamma(b)\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}\right]=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\text{。}$$

（2） $$\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt=\lim_{b\to0}\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{(1-t)^{1-b}}dt=\lim_{b\to0}\left[\int_0^1(1-t)^{b-1}dt-\int_0^1t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt\right]$$

$$=\lim_{b\to0}\left[\mathrm{B}(1,b)-\mathrm{B}(a,b)\right],$$

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}-\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt=\lim_{b\to0}\left\{\left[\Gamma(b)-\mathrm{B}(a,b)\right]-\left[\mathrm{B}(1,b)-\mathrm{B}(a,b)\right]\right\}$$

$$=\lim_{b\to0}\left[\Gamma(b)-\mathrm{B}(1,b)\right]=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=-\gamma\text{。}$$

173．证明 Laplace 变换的下列性质（假定有关函数的 Laplace 变换均存在，其象函数用相应的大写字母表示）：（1）$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\xrightarrow{LT} c_1F_1(t)+c_2F_2(t)$；

（2）$\int_0^\infty f(t,\tau)d\tau \xrightarrow{LT} \int_0^\infty F(p,\tau)d\tau$；（3）$f(t-\tau)\xrightarrow{LT} e^{-p\tau}F(p)$；

（4）$e^{p_0 t}f(t)\xrightarrow{LT} F(p-p_0)$；（5）$f(at)\xrightarrow{LT}\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$，$a>0$；

（6）$\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau \xrightarrow{LT} \frac{1}{p}\int_0^p F(q)dq$。

（1）$\int_0^\infty \left[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\right]e^{-pt}dt = c_1\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}dt + c_2\int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}dt = c_1F_1(t)+c_2F_2(t)$。

（2）$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t,\tau)d\tau\right]e^{-pt}dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t,\tau)e^{-pt}dt\right]d\tau = \int_0^\infty F(p,\tau)d\tau$（假设可交换积分次序）。

（3）$\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = e^{-p\tau}\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx = e^{-p\tau}F(p)$（这里 $f(t-\tau)=f(t-\tau)\eta(t-\tau)$）。

（4）$\int_0^\infty \left[e^{p_0 t}f(t)\right]e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-p_0)t}dt = F(p-p_0)$。

（5）$\int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-\frac{p}{a}x}dx = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$。

（6）
$$\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right]e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau\right]\frac{d}{dt}\left(e^{-pt}\right)dt$$
$$=\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau - \frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt = \frac{1}{p}\left[\int_0^\infty F(q)dq - \int_p^\infty F(q)dq\right]$$
$$=\frac{1}{p}\int_0^p F(q)dq$$。

174. 若 $f(t)$ 为周期函数，周期为 a，即 $f(t+a)=f(t)$，$t\ge 0$。设 $f(t)$ 的拉式变换 $F(p)$ 存在，证明：$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a f(t)e^{-pt}dt$。

$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^\infty e^{-nap}\int_0^a f(x)e^{-px}dx$，

当$\operatorname{Re} p>0$时，$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nap}=\frac{1}{1-e^{-ap}}$，$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}}\int_0^a f(t)e^{-pt}dt$。

175．求下列函数的象函数：（1）t^n，$n=0,1,2,\cdots$；（2）t^α，$\operatorname{Re}\alpha>-1$；（3）$e^{-\lambda t}\sin\omega t$；（4）$\frac{1-\cos\omega t}{t^2}$；（5）$\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau$；（6）$f(t)=\begin{cases} e^t, 0<t<1 \\ 0, t>1 \end{cases}$；（7）$|\sin\omega t|$；（8）$t-a\left[\frac{t}{a}\right]$，$a>0$。

（1）由$1\xrightarrow{LT}\frac{1}{p}$和$(-t)^n f(t)\xrightarrow{LT}F^{(n)}(p)$可得$t^n\xrightarrow{LT}\frac{n!}{p^{n+1}}$。

（2）令$pt=z$，则$\int_0^\infty t^\alpha e^{-pt}dt=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_L z^\alpha e^{-z}dz$，其中$L$是从原点出发，辐角为$|\arg p|$的射线，若$|\arg p|<\frac{\pi}{2}$，则$\int_L z^\alpha e^{-z}dz=\Gamma(\alpha+1)$，$t^\alpha\xrightarrow{LT}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$。

（3）$e^{-\lambda t}\sin\omega t=\frac{1}{2i}\left[e^{-(\lambda-i\omega)t}-e^{-(\lambda+i\omega)t}\right]\xrightarrow{LT}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p+\lambda-i\omega}-\frac{1}{p+\lambda+i\omega}\right)=\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$。

（4）$1-\cos\omega t\xrightarrow{LT}\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega^2}$，

$$\frac{1-\cos\omega t}{t}\xrightarrow{LT}\int_p^\infty\left(\frac{1}{q}-\frac{q}{q^2+\omega^2}\right)dq=\ln\frac{q}{\sqrt{q^2+\omega^2}}\Bigg|_p^\infty=-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+\omega^2}},$$

$$\frac{1-\cos\omega t}{t^2}\xrightarrow{LT}=-\int_p^\infty\ln\frac{q}{\sqrt{q^2+\omega^2}}dq=-q\ln\frac{q}{\sqrt{q^2+\omega^2}}\Bigg|_p^\infty+\int_p^\infty\frac{\omega^2}{q^2+\omega^2}dq$$

$$=\frac{p}{2}\ln\frac{p^2}{p^2+\omega^2}+\omega\arctan\frac{\omega}{p}。$$

（5）由$\cos t\xrightarrow{LT}\frac{p}{p^2+1}$及上题第（6）小题结论，$\int_t^\infty\frac{\cos\tau}{\tau}d\tau\xrightarrow{LT}\frac{1}{p}\int_0^p\frac{q}{q^2+1}dq$

$=\frac{1}{2p}\ln\left(p^2+1\right)$。

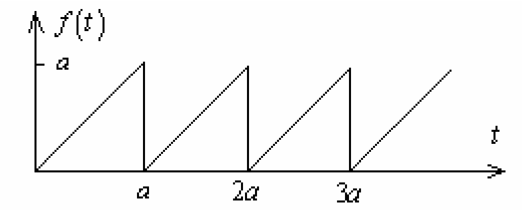
（6）$\int_0^{\infty} f\left(t\right)e^{-pt}dt=\int_0^1 e^{(1-p)t}dt=\dfrac{e^{1-p}-1}{1-p}$。

（7）$\int_0^{\infty}\left|\sin\omega t\right|e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{2n\frac{\pi}{\omega}}^{(2n+1)\frac{\pi}{\omega}}\left(\sin\omega t\right)e^{-pt}dt-\int_{(2n+1)\frac{\pi}{\omega}}^{(2n+2)\frac{\pi}{\omega}}\left(\sin\omega t\right)e^{-pt}dt\right]$

$$=\int_0^{\pi/\omega}\left(\sin\omega x\right)e^{-px}dx\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-2n\frac{\pi p}{\omega}}+e^{-(2n+1)\frac{\pi p}{\omega}}\right]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{\left(1+e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right)^2}{1-e^{-\frac{2\pi p}{\omega}}}$$（设 $\operatorname{Re}p>0$）

$$=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{2\operatorname{ch}^2\frac{\pi p}{2\omega}}{\operatorname{sh}\frac{\pi p}{\omega}}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{2\operatorname{ch}^2\frac{\pi p}{2\omega}}{2\operatorname{sh}\frac{\pi p}{2\omega}\operatorname{ch}\frac{\pi p}{2\omega}}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\coth\frac{\pi p}{2\omega}。$$

（8）设 $\operatorname{Re}p>0$，



$$\int_0^{\infty} f\left(t\right)e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{na}^{(n+1)a}\left(t-na\right)e^{-pt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{na}^{(n+1)a}\left(t-na\right)e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^a xe^{-px}dx\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nap}=\left[-\frac{1}{p}ae^{-ap}+\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-ap}\right)\right]\frac{1}{1-e^{-ap}}=\frac{1}{p^2}-\frac{a}{p}\frac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}。$$

176. 求下列函数的原函数：（1）$\dfrac{a^3}{p\left(p+a\right)^3}$；（2）$\dfrac{\omega}{p\left(p^2+\omega^2\right)}$；（3）$\dfrac{4p-1}{\left(p^2+p\right)\left(4p^2-1\right)}$；

（4）$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$；（5）$\dfrac{e^{-p\tau}}{p^2}$，$\tau>0$；（6）$\dfrac{1}{p}\dfrac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}$，$a>0$。

（1）$\dfrac{a^3}{p\left(p+a\right)^3}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{a^2}{\left(p+a\right)^3}-\dfrac{a}{\left(p+a\right)^2}-\dfrac{1}{p+a}$，由于 $1\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p}$，

$\dfrac{1}{2}t^2e^{-at}\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{\left(p+a\right)^3}$，$te^{-at}\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{\left(p+a\right)^2}$，$e^{-at}\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p+a}$，所以原函数

为$1-\left(1+at+\dfrac{a^2}{2}t^2\right)e^{-at}$，$t>0$。

（2）$\dfrac{\omega}{p\left(p^2+\omega^2\right)}=\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)$，由于$1\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p}$，$\cos\omega t\xrightarrow{LT}\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$。所以原函数为$\dfrac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)$。

（3）$\dfrac{4p-1}{\left(p^2+p\right)\left(4p^2-1\right)}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p-1/2}-3\dfrac{1}{p+1/2}$，所以原函数为$1+\dfrac{5}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{t/2}-3e^{-t/2}$。

（4）$\dfrac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}=-\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)$，由于$\cos\omega t\xrightarrow{LT}\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$，

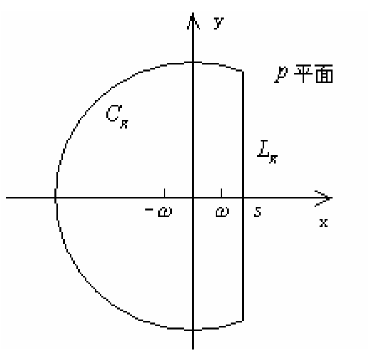
$(-t)f(t)\xrightarrow{LT}\dfrac{d}{dp}F(p)$，所以原函数为$t\cos\omega t$。

（5）由于$t\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p^2}$，$f(t-\tau)\xrightarrow{LT}F(p)e^{-p\tau}$，所以原函数为$t-\tau$，$t>\tau$。

（6）$\dfrac{1}{p}\dfrac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nap}}{p}$（设$\operatorname{Re}p>0$），由于$\eta(t-na)\xrightarrow{LT}\dfrac{e^{-nap}}{p}$，所以原函数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta(t-na)=\left[\dfrac{t}{a}\right]$。

177．用普遍反演公式求下列函数的原函数：（1）$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$；（2）$\dfrac{e^{-p\tau}}{p^4+4\omega^4}$；（3）$\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$，$\alpha>0$；（4）$\dfrac{1}{p}\dfrac{\operatorname{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\operatorname{ch}l\sqrt{p}}$，$0<x<l$。

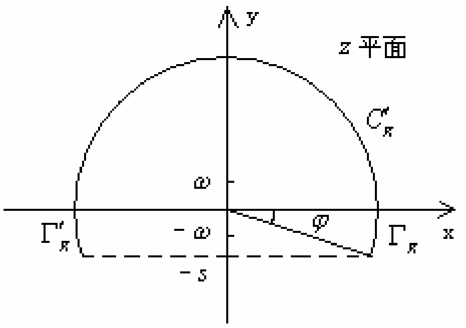
（1）取如下积分路径：



记 $F(p)=\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$，则 $\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\pm\omega}=\lim\limits_{p\to\pm\omega}\dfrac{p}{p\pm\omega}e^{pt}=\dfrac{1}{2}e^{\pm\omega t}$。围道积分为

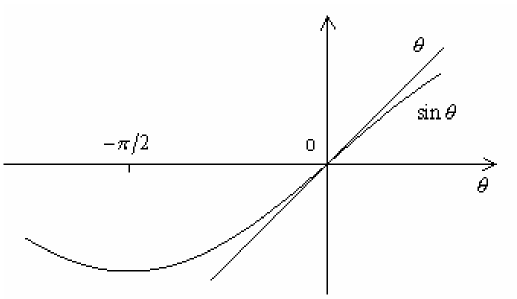
$\dfrac{1}{2\pi i}\left(\int_{L_R}+\int_{C_R}\right)F(p)e^{pt}dp=\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\omega}+\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\omega}=\operatorname{ch}\omega t$。(*)

令 $p=iz$，则 $\int_{C_R}F(p)e^{pt}dp=\int_{C_R'+\Gamma_R+\Gamma_R'}\dfrac{z}{z^2+\omega^2}e^{itz}dz$，其中 $C_R'+\Gamma_R+\Gamma_R'$ 如下图：



可解得 $\varphi=\arctan\dfrac{s}{\sqrt{R^2-s^2}}$。设 $z\to\infty$ 时 $h(z)$ 一致（与辐角无关）趋于 0（显然这里的 $\dfrac{z}{z^2+\omega^2}$ 满足此条件），则对任意的 $\varepsilon>0$，当 $|z|$ 充分大时有 $|h(z)|<\varepsilon$，

$\int_{\Gamma_R}h(z)e^{itz}dz=iR\int_{-\varphi}^{0}h\left(Re^{i\theta}\right)e^{-tR\sin\theta}e^{itR\cos\theta}e^{i\theta}d\theta$，$\left|\int_{\Gamma_R}h(z)e^{itz}dz\right|\le\varepsilon R\int_{-\varphi}^{0}e^{-tR\sin\theta}d\theta$。当 $\theta\le0$ 时有 $\sin\theta\ge\theta$（如下图），$t>0$ 时，



$\left|\int_{\Gamma_R}h(z)e^{itz}dz\right|\le\varepsilon R\int_{-\varphi}^{0}e^{-tR\theta}d\theta=\dfrac{\varepsilon}{t}\left(e^{tR\varphi}-1\right)\le\varepsilon R\varphi\le\varepsilon R\dfrac{s}{\sqrt{R^2-s^2}}$，由于 $\dfrac{R}{\sqrt{R^2-s^2}}\to1$，

所以 R 充分大时有 $\dfrac{R}{\sqrt{R^2-s^2}}<1+\varepsilon$，所以 $\left|\int_{\Gamma_R}h(z)e^{itz}dz\right|<s\varepsilon(1+\varepsilon)$，即

$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}h(z)e^{itz}dz=0$，同样可得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R'}h(z)e^{itz}dz=0$。

由 Jordan 引理可得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R'}h(z)e^{itz}dz=0$，所以令（*）式 $R\to\infty$ 可得

$\dfrac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\dfrac{p}{p^2-\omega^2}e^{pt}dp=\operatorname{ch}\omega t$，即 $\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$ 的原函数为 $\operatorname{ch}\omega t$（$t>0$）。

（2）记 $F(p)=\dfrac{1}{p^4+4\omega^4}$，则

$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}=\lim_{p\to-\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p-\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}\right)\left(p^2-2\omega^2 i\right)}=\frac{e^{-\omega t}e^{i\omega t}}{16\omega^3 i}(1+i),$$

$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}=\lim_{p\to\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p+\sqrt{2}\omega e^{-i\pi/4}\right)\left(p^2-2\omega^2 i\right)}=\frac{e^{\omega t}e^{-i\omega t}}{16\omega^3 i}(-1-i),$$

$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}=\lim_{p\to-\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+2\omega^2 i\right)\left(p-\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}\right)}=\frac{e^{-\omega t}e^{-i\omega t}}{16\omega^3 i}(-1+i),$$

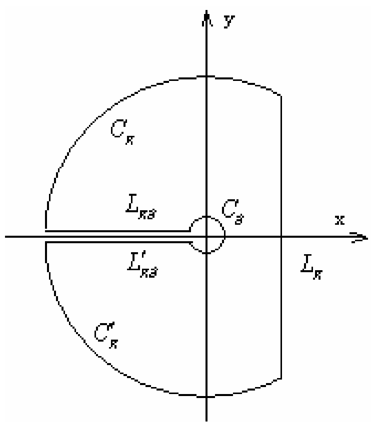
$$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}=\lim_{p\to\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}}\frac{e^{pt}}{\left(p^2+2\omega^2 i\right)\left(p+\sqrt{2}\omega e^{i\pi/4}\right)}=\frac{e^{\omega t}e^{i\omega t}}{16\omega^3 i}(1-i)。$$

积分路径同上小题（取 $s>\omega$），可得

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\frac{1}{p^4+4\omega^4}e^{pt}dp=\frac{1}{4\omega^3}\left(\sin\omega t\operatorname{ch}\omega t-\cos\omega t\operatorname{sh}\omega t\right)$，所以 $\dfrac{e^{-p\tau}}{p^4+4\omega^4}$ 的原函数为

$\dfrac{1}{4\omega^3}\left[\sin\omega(t-\tau)\operatorname{ch}\omega(t-\tau)-\cos\omega(t-\tau)\operatorname{sh}\omega(t-\tau)\right]$，$t>\tau$。

（3）记 $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$，取如下积分路径（规定 $-\pi\le\arg p\le\pi$）：



在 C_R 上 $0<\arg p\le\pi$， $0<\arg\sqrt{p}\le\pi/2$，所以 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}F(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}=0$，

在 C'_R 上 $-\pi\le\arg p<0$， $-\pi/2\le\arg\sqrt{p}<0$，所以 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}F(p)=0$，所以

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R}+\int_{C'_R}\right)F(p)e^{pt}dp=0$。又有 $\displaystyle\lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta}F(p)e^{pt}dp=-\lim_{p\to0}pF(p)e^{pt}=-1$。

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to0}}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{L_{R\delta}}+\int_{L'_{R\delta}}\right)F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{r}\sin\alpha\sqrt{r}\,e^{-rt}dr=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{x}\sin\alpha x\,e^{-x^2t}dx。$$

记 $g(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{x}\sin\alpha x e^{-x^2 t}dx$，有 $g'(\alpha)=\int_0^\infty \cos\alpha x e^{-x^2 t}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$，

由于 $g(0)=0$，所以 $g(\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^\alpha e^{-\frac{u^2}{4t}}du$。令围道积分 $\delta\to 0, R\to\infty$ 得

$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp-1+\frac{2}{\pi}g(\alpha)=0$。即原函数为

$1-\frac{2}{\pi}g(\alpha)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}e^{-x^2}dx=1-\mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)=\mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$。

（4）记 $F(p)=\frac{1}{p}\frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\,l\sqrt{p}}$，它是单值函数（参考习题 03 第 53 题）。

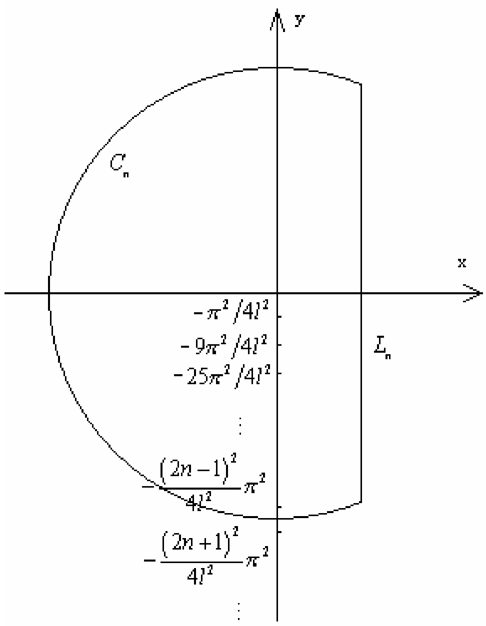
$p=0$ 以及 $p=-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2$（$k=0,1,2\cdots$）是它的一阶极点。

$\mathrm{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=0}=\lim_{p\to 0}\frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\,l\sqrt{p}}e^{pt}=1$，

$$\mathrm{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2}=\lim_{p\to-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2}\frac{2\,\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{l\sqrt{p}\,\mathrm{sh}\,l\sqrt{p}}e^{pt}$$

$$=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x e^{-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2 t}。$$

取如下积分路径（$s>0$），其中大圆半径为 $n^2\pi^2/l^2$。



当$0<\arg p<\pi$时，$0<\arg\sqrt{p}<\pi/2$，$\mathrm{Re}\sqrt{p}>0$，

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\,l\sqrt{p}}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\frac{e^{(l-x)\sqrt{p}}+e^{-(l-x)\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}}+e^{-l\sqrt{p}}}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\frac{e^{(l-x)\sqrt{p}}}{e^{l\sqrt{p}}}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}e^{-x\sqrt{p}}=0\text{。}$$

当$\pi<\arg p<2\pi$时，$\pi/2<\arg\sqrt{p}<\pi$，$\mathrm{Re}\sqrt{p}<0$，

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\,l\sqrt{p}}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\frac{e^{-(l-x)\sqrt{p}}}{e^{-l\sqrt{p}}}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}e^{x\sqrt{p}}=0\text{。}$$

当$p=-n^2\pi^2/l^2$，即为圆C_n上辐角为π的点时，有

$$\left|\frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\,l\sqrt{p}}\right|=\left|\frac{\cos\frac{l-x}{l}n\pi}{\cos n\pi}\right|=\left|\cos\frac{l-x}{l}n\pi\right|\le 1\text{，所以}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\mathrm{ch}\,l\sqrt{p}}=0\text{。}$$

综上，当圆C_n上点p无论辐角为何值，只要模趋于∞，就有$F(p)\to 0$，即

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{C_n}F(p)e^{pt}dp=0$。所以

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\mathrm{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=0}+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2}$$

$$=1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2k+1}\sin\frac{2k+1}{2l}\pi x e^{-\frac{(2k+1)^2}{4l^2}\pi^2 t}\right]$$

178．设$f(t)\xrightarrow{LT}F(p)$，$f_1(t)\xrightarrow{LT}F_1(p)$，$f_2(t)\xrightarrow{LT}F_2(p)$，试用 Laplace 反演公式证明：（1）$f(t-\tau)\xrightarrow{LT}F(p)e^{-p\tau}$；

（2）$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\xrightarrow{LT}F_1(p)F_2(p)$。

（1）$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left[F(p)e^{-p\tau}\right]e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{p(t-\tau)}dp=f(t-\tau)$。

（2）假设可交换积分次序，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left[F_1(p)F_2(p)\right]e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left[\int_0^{\infty}f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right]F_2(p)e^{pt}dp$$

$$=\int_0^{\infty}f_1(\tau)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F_2(p)e^{p(t-\tau)}dp\right]d\tau=\int_0^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\text{。}$$

179．利用 Laplace 变换计算下列积分：（1）$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt$；（2）$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx$；

（3）$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx$；（4）$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x\left(x^2+1\right)}dx$。

（1）由于 $\sin xt \xrightarrow{LT} \frac{x}{p^2+x^2}$，$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp$，所以

$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt=\int_0^\infty \frac{x}{p^2+x^2}dp=\begin{cases}\pi/2, x>0\\ -\pi/2, x<0\end{cases}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$。

（2）记 $f(t,x)=\frac{\sin xt}{\sqrt{x}}$，则其对 t 的拉式变换为 $F(p,x)=\frac{\sqrt{x}}{p^2+x^2}$。

由 173 题第（2）小题结论，$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx \xrightarrow{LT} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{p^2+x^2}dx$，注意到 $f(t,x)$ 拉式换式的收敛域为 $\operatorname{Re} p>0$，即 $-\frac{\pi}{2}<\arg p<\frac{\pi}{2}$，多值函数 $\frac{\sqrt{z}}{p^2+z^2}$ 在 $0\le \arg z\le 2\pi$ 的单值分枝内的奇点为 $pe^{i\pi/2}$ 和 $pe^{i3\pi/2}$。用多值函数的积分法可求得右边的积分 $=\frac{\pi}{\sqrt{2p}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(-1/2+1)}{p^{-1/2+1}}$，

即 $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx \xrightarrow{LT} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(-1/2+1)}{p^{-1/2+1}}$。由 175 题第（2）题结论，$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2t}}$。

上面是针对 $t>0$ 的情况，当 $t<0$ 时，$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx=-\int_0^\infty \frac{\sin x(-t)}{\sqrt{x}}dx=-\sqrt{\frac{\pi}{2(-t)}}$。综上，

$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2|t|}}\operatorname{sgn} t$。

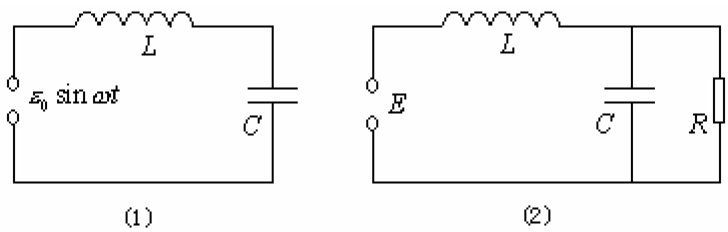
（3）$t>0$ 时，$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx \xrightarrow{LT} p\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+p^2\right)}dx$。因为 $\frac{\cos xt}{x^2+a^2}$ 的拉式换式收敛域为 $\operatorname{Re} p>0$，所以 pi 位于上半平面，$-pi$ 位于下半平面，可求得上式右边积分 $=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{p+a}$。所以 $\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-at}$。

当 $t<0$ 时，原积分 $=\int_0^\infty \frac{\cos x(-t)}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{at}$。综上，$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{2a}e^{-a|t|}$。

（4）$t>0$ 时，原积分 $\xrightarrow{LT}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+p^2\right)}dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)$，原积分 $=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-t}\right)$。

所以原积分 $=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-|t|}\right)\operatorname{sgn}t$。

180．利用 Laplace 变换求解下列微分方程（组）或积分方程：（1）已知 $i(0)=0$，$q(0)=0$，求 $i(t)$；（2）已知 $i(0)=0$，$q(0)=0$，求 $i(t)$。



（3）$\begin{cases}x''-x+y+z=0\\ x+y''-y+z=0\\ x+y+z''-z=0\end{cases}$，$x(0)=1$，$y(0)=z(0)=0$，$x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$；

（4）$y(t)=a\sin t-2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$；

（5）$y(t)=a\sin bt+c\int_0^t y(\tau)\sin b(t-\tau)d\tau$，$b>c>0$；

（6）$f(t)+2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau=9e^{2t}$。

（1）$\varepsilon=u_L+u_C$，代入 $u_C=\frac{q}{C}$，$u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{d^2q}{dt^2}$ 得 $\frac{d^2}{dt^2}q+\omega_0^2q=\frac{1}{L}\varepsilon$（记 $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$），

两边取拉式变换得 $p^2Q+\omega_0^2Q=\frac{\varepsilon_0}{L}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$，所以 $Q=\frac{\varepsilon_0\omega}{L}\frac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p^2+\omega_0^2\right)}$。

当 $\omega\neq\omega_0$ 时，$Q=\frac{\varepsilon_0\omega}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^2+\omega_0^2}\right)$，所以

$$q(t)=\frac{\varepsilon_0\omega}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)。$$

当 $\omega=\omega_0$ 时，$Q=\frac{\varepsilon_0}{L}\frac{\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}=-\frac{\varepsilon_0}{2L}\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)$，

所以 $q(t)=\frac{\varepsilon_0}{2L}\int_0^t\tau\sin\omega\tau\,d\tau$。

$$i(t)=\frac{d}{dt}q(t)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0\omega}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right),\omega_0\neq\omega\\ \dfrac{\varepsilon_0}{2L}t\sin\omega t,\omega_0=\omega\end{cases}$$ 。

（2）$C\frac{du_C}{dt}=i-i_R=i-\frac{u_C}{R}$，两边取拉式变换得（$u_C(0)=\frac{q_C(0)}{C}=0$）$U_C=\frac{R}{RCp+1}I$。

$E=u_L+u_C=L\frac{di}{dt}+u_C$，两边取拉式变换，代入上式得 $I=\frac{E}{L}\frac{p+\frac{1}{RC}}{p\left(p^2+\frac{1}{RC}p+\frac{1}{LC}\right)}$

$=\frac{E}{L}\frac{p+2\beta}{p\left(p^2+2\beta p+\gamma^2\right)}$，其中 $\beta=\frac{1}{2RC}$，$\gamma=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。根据上式分母中一元二次式 $p^2+2\beta p+\gamma^2$ 的判别式 $\Delta=4\left(\beta^2-\gamma^2\right)$ 的不同情况分别讨论：

（i）当 $\Delta>0$，即 $L>4CR^2$ 时，$I=\frac{E}{L}\frac{p+2\beta}{p(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)}$，其中 $\alpha_1=\beta-\sqrt{\beta^2-\gamma^2}$，$\alpha_2=\beta+\sqrt{\beta^2-\gamma^2}$。$I$ 可分解为 $I=\frac{E}{L}\left[\frac{2\beta}{\alpha_1\alpha_2}\frac{1}{p}+\frac{\alpha_1-2\beta}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)}\frac{1}{p+\alpha_1}+\frac{\alpha_2-2\beta}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)}\frac{1}{p+\alpha_2}\right]$。

注意到 $\alpha_1\alpha_2=\gamma^2=\frac{1}{LC}$，上式中 $\frac{1}{p}$ 的系数 $\frac{2\beta}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{L}{R}$，$\frac{1}{p+\alpha_1}$ 的系数

$\frac{\alpha_1-2\beta}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_1)}=\frac{1-\frac{1}{RC\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1}=-\frac{1-\frac{L}{R}\frac{1}{LC\alpha_1}}{\alpha_1-\alpha_2}=-\frac{1-\frac{L}{R}\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}$，$\frac{1}{p+\alpha_2}$ 的系数 $\frac{\alpha_2-2\beta}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)}=\frac{1-\frac{L}{R}\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}$，

即 $I=\frac{E}{R}\left(1-\frac{A}{p+\alpha_1}+\frac{B}{p+\alpha_2}\right)$，其中 $A=\frac{R/L-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}$，$B=\frac{R/L-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}$，所以

$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-Ae^{-\alpha_1 t}+Be^{-\alpha_2 t}\right)$。

（ii）当 $\Delta=0$，即 $L=4CR^2$ 时，$I=\frac{E}{L}\frac{p+2\beta}{p(p+\beta)^2}=\frac{E}{R}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\beta}-\frac{\beta}{2}\frac{1}{(p+\beta)^2}\right]$，

$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\beta t}-\frac{\beta}{2}te^{-\beta t}\right)$。

（iii）当 $\Delta<0$，即 $L<4CR^2$ 时，$I=\dfrac{E}{L}\dfrac{p+2\beta}{p\left(p+\beta-i\omega_0\right)\left(p+\beta+i\omega_0\right)}$，

其中 $\omega_0=\sqrt{\gamma^2-\beta^2}$，上式继续化为

$$I=\frac{E}{L}\left[\frac{L}{R}\frac{1}{p}+\left(-\frac{L}{2R}+\frac{\gamma^2-2\beta^2}{2i\omega_0\gamma^2}\right)\frac{1}{p+\beta-i\omega_0}+\left(-\frac{L}{2R}-\frac{\gamma^2-2\beta^2}{2i\omega_0\gamma^2}\right)\frac{1}{p+\beta+i\omega_0}\right]$$

$$=\frac{E}{R}\left\{\frac{1}{p}+\left[-\frac{1}{2}+\left(\frac{R}{L}-\beta\right)\frac{1}{2i\omega_0}\right]\frac{1}{p+\beta-i\omega_0}+\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{R}{L}-\beta\right)\frac{1}{2i\omega_0}\right]\frac{1}{p+\beta+i\omega_0}\right\}$$

$$=\frac{E}{R}\left[\frac{1}{p}-\frac{p+\beta}{\left(p+\beta\right)^2+\omega_0^2}-\left(\beta-\frac{R}{L}\right)\frac{1}{\omega_0}\frac{\omega_0}{\left(p+\beta\right)^2+\omega_0^2}\right]。$$

所以 $i\left(t\right)=\dfrac{E}{R}\left\{1-e^{-\beta t}\left[\cos\omega_0 t+\left(\beta-\dfrac{R}{L}\right)\dfrac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}\right]\right\}$。

（3）取拉式变换得 $\begin{cases}\left(p^2-1\right)X+Y+Z=p\\ X+\left(p^2-1\right)Y+Z=0\\ X+Y+\left(p^2-1\right)Z=0\end{cases}$，解得 $X=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p}{p^2+1}+\dfrac{2p}{p^2-2}\right)$，

$Y=Z=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p}{p^2+1}-\dfrac{p}{p^2-2}\right)$。所以 $x\left(t\right)=\dfrac{1}{3}\left(\cos t+2\operatorname{ch}\sqrt{2}t\right)$，

$y\left(t\right)=z\left(t\right)=\dfrac{1}{3}\left(\cos t-\operatorname{ch}\sqrt{2}t\right)$。

（4）两边取拉式变换得 $Y=\dfrac{a}{p^2+1}-2\dfrac{p}{p^2+1}Y$，所以 $Y=\dfrac{a}{\left(p+1\right)^2}$，即 $y\left(t\right)=ate^{-t}$。

（5）$Y=\dfrac{ab}{p^2+b^2-bc}$，$y\left(t\right)=a\sqrt{\dfrac{b}{b-c}}\sin\sqrt{b\left(b-c\right)}t$。

（6）$F=\dfrac{5}{p-2}+\dfrac{4}{p+1}-\dfrac{6}{\left(p+1\right)^2}$，$f\left(t\right)=5e^{2t}+4e^{-t}-6te^{-t}$。

181．求解变系数常微方程初值问题：$\begin{cases}x''+tx'+x=0\\ x\left(0\right)=1,x'\left(0\right)=0\end{cases}$。

$x'\xrightarrow{LT}pX-1$，$tx'\xrightarrow{LT}-\dfrac{d}{dp}\left(pX-1\right)=-X-p\dfrac{dX}{dp}$，$x''\xrightarrow{LT}p^2X-p$，原方程

两边取拉式变换得$-\frac{dX}{dp}+pX-1=0$，再反演得$x'+tx=0$，解之得$x(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$。

182. 设有放射性蜕变过程$A\to B\to C\to\cdots$，若其中三种同位素的分子数$N_1(t)$，$N_2(t)$，$N_3(t)$遵从方程及初始条件$\begin{cases}\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1N_1,N_1(0)=N\\ \frac{dN_2}{dt}=\lambda_1N_1-\lambda_2N_2,N_2(0)=0\\ \frac{dN_3}{dt}=\lambda_2N_2-\lambda_3N_3,N_3(0)=0\end{cases}$，其中$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$为不相等的常数，试求出$N_1(t)$，$N_2(t)$，$N_3(t)$。

用上面加波浪线的字母表示相应的拉式变换$\begin{cases}p\tilde N_1-N=-\lambda_1\tilde N_1\\ p\tilde N_2=\lambda_1\tilde N_1-\lambda_2\tilde N_2\\ p\tilde N_3=\lambda_2\tilde N_2-\lambda_3\tilde N_3\end{cases}$，

解得$\tilde N_1=\frac{N}{p+\lambda_1}$，$\tilde N_2=\frac{\lambda_1N}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{p+\lambda_1}-\frac{1}{p+\lambda_2}\right)$，

$$\tilde N_3=\lambda_1\lambda_2N\left[\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}\frac{1}{p+\lambda_1}+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}\frac{1}{p+\lambda_2}+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\frac{1}{p+\lambda_3}\right]$$

所以$N_1(t)=Ne^{-\lambda_1t}$，$N_2(t)=\frac{\lambda_1N}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1t}-e^{-\lambda_2t}\right)$，

$$N_3(t)=\lambda_1\lambda_2N\left[\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}e^{-\lambda_1t}+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}e^{-\lambda_2t}+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}e^{-\lambda_3t}\right]。$$

183. 定义零阶 Bessel 函数$J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(t\cos\theta)d\theta$。（1）求$J_0(t)$的像函数；

（2）利用卷积定理证明：$\int_0^tJ_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau=\sin t$。

（1）当$\operatorname{Re}p\ge\delta>0$时（$\delta$是任意小的正数），$\left|\int_0^\infty\cos(t\cos\theta)e^{-pt}dt\right|\le\int_0^\infty e^{-\delta t}dt$，即左边积分一致收敛，因此可交换积分次序：

$$J_0(t)\xrightarrow{LT}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\pi\cos(t\cos\theta)d\theta\right]e^{-pt}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\int_0^\infty\cos(t\cos\theta)e^{-pt}dt\right]d\theta。$$

$$\int_0^\infty \cos(t\cos\theta)e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{it\cos\theta}e^{-pt}dt+\int_0^\infty e^{-it\cos\theta}e^{-pt}dt\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\cos\theta}+\frac{1}{p+i\cos\theta}\right),$$

$$J_0(t)\xrightarrow{LT}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi\frac{1}{p-i\cos\theta}d\theta+\int_0^\pi\frac{1}{p+i\cos\theta}d\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi\frac{1}{p-i\cos\theta}d\theta+\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{p-i\cos\varphi}d\varphi\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{p-i\cos\theta}d\theta\text{。}$$

利用$e^{i\theta}=z$将上面积分化成复变积分计算可得$J_0(t)\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$。

（2）$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\dfrac{1}{p^2+1}$，反演得

$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau=\sin t$。

184．试证明$f(t)=2te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)$的拉氏变换存在。

证：令$\operatorname{Re}p\ge\delta>0$时（$\delta$是任意小的正数），则$\left|f(t)e^{-pt}\right|\le 2te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)e^{-\delta t}$。

作代换$e^{t^2}=x$，即$t=\sqrt{\ln x}$，则$\int_0^\infty 2te^{t^2}\sin\left(e^{t^2}\right)e^{-\delta t}dt=\int_1^\infty\sin xe^{-\delta\sqrt{\ln x}}dx$，

由于$e^{-\delta\sqrt{\ln x}}$单调趋于 0，$\int_1^b\sin xdx$有界，所以$\int_1^\infty\sin xe^{-\delta\sqrt{\ln x}}dx$收敛，因此$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$收敛，即$f(t)$的拉氏变换存在。

185．设$f(x)$的 Fourier 变换和 Fourier 反变换为：$F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx$，

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$。证明：

（1）$f(x-x_0)\xrightarrow{FT}e^{-i\omega x_0}F(\omega)$，$F(\omega-\omega_0)\xrightarrow{FT^{-1}}e^{i\omega_0x}f(x)$；

（2）$f'(x)\xrightarrow{FT}i\omega F(\omega)$，$F'(\omega)\xrightarrow{FT^{-1}}-ixf(x)$；

（3）$\int_{-\infty}^x f(t)dt\xrightarrow{FT}\dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$；（4）$f_1(x)*f_2(x)\xrightarrow{FT}F_1(\omega)F_2(\omega)$，

$F_1(\omega)*F_2(\omega)\xrightarrow{FT^{-1}} f_1(x)f_2(x)$，其中 $f_1(x)*f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt$。

（1）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)e^{-i\omega x}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega x_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=e^{-\omega x_0}F(\omega)$，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\omega_0)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega_0 x}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du=e^{i\omega_0 x}f(x);$$

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\omega\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$

一般有 $f(\pm\infty)=0$，上式右边$=i\omega F(\omega)$，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F'(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(x)e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}-ix\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=-ixf(x)。$$

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right]e^{-i\omega x}dx=-\dfrac{1}{i\omega}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right]\dfrac{d}{dx}e^{-i\omega x}dx$

$$=-\frac{1}{i\omega}\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right]e^{-i\omega x}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

若 $F(0)=0$，即 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=0$，则上式$=\dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$。

（4）假设可交换积分次序，$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt\right]e^{-i\omega x}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t)e^{-i\omega x}dx\right]dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)F_2(\omega)e^{-\omega t}dt$$

$$=F_1(\omega)F_2(\omega),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du\right]e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\omega-u)e^{i\omega x}d\omega\right]du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)e^{i\omega u}f_2(x)du=f_1(x)f_2(x)。$$

186．证明 δ 函数的下列性质：（1）$\delta(x)=\delta(-x)$；（2）$x\delta(x)=0$；

（3） $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$；（4） $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$；

（5） $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]$；

（6） $\delta(x-a)\delta(x-b)=\delta(a-b)\delta(x-a)$。

（1） $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0)$， $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(-t)\delta(t)dt=\varphi(0)$，

所以 $\delta(x)=\delta(-x)$。

（2） $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)x\delta(x)dx=x\varphi(x)\big|_{x=0}=0$，所以 $x\delta(x)=0$。

（3） $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\delta(x)dx=\varphi(0)f(0)$， $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(0)\delta(x)dx=\varphi(0)f(0)$，

所以 $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$。

（4） $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(ax)dx=\dfrac{1}{|a|}\varphi(0)$， $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\dfrac{1}{|a|}\delta(x)dx=\dfrac{1}{|a|}\varphi(0)$，

所以 $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$。

（5）不妨设 $a>0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x^2-a^2)dx=\int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon}\varphi(x)\delta(x^2-a^2)dx+\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}\varphi(x)\delta(x^2-a^2)dx$$

$$=\int_{-2a\varepsilon+\varepsilon^2}^{2a\varepsilon+\varepsilon^2}\frac{\varphi\left(-\sqrt{u+a^2}\right)}{2\sqrt{u+a^2}}\delta(u)du+\int_{-2a\varepsilon+\varepsilon^2}^{2a\varepsilon+\varepsilon^2}\frac{\varphi\left(\sqrt{u+a^2}\right)}{2\sqrt{u+a^2}}\delta(u)du$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\varphi(-a)+\varphi(a)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\frac{1}{2a}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]dx\text{。}$$

（6） $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-a)\delta(x-b)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(a)\delta(a-b)\delta(x-a)dx$

$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(a-b)\delta(x-a)dx$，即 $\delta(x-a)\delta(x-b)=\delta(a-b)\delta(x-a)$。

187．若定义 δ 函数为 $\delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x)$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\phi_n(t)dt=\begin{cases}0, x<0\\1, x>0\end{cases}$。验证

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+(nx)^2}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{\pi x}$ 都是 δ 函数。

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+(nt)^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{nx}\frac{1}{1+u^2}du=\frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}nx+\frac{\pi}{2}\right),$$

$x<0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+(nx)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}nx+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

$x>0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\pi}\dfrac{1}{1+(nx)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}nx+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$。

当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{\sin nt}{\pi t}dt=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{nx}\dfrac{\sin u}{\pi u}du=0$，

当 $x>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{\sin nt}{\pi t}dt=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{nx}\dfrac{\sin u}{\pi u}du=\dfrac{1}{\pi}\cdot\pi=1$。

188．设 $B_n(\omega)=\dfrac{2\omega_0}{\pi\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\sin\left(2n\pi\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$，$n$ 是正整数，验证

$\lim\limits_{n\to\infty}B_n(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)$。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)B_n(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\omega-\omega_0}-\frac{1}{\omega+\omega_0}\right)\sin\left(2n\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right)d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\frac{1}{\pi(\omega-\omega_0)}\sin\left(2n\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right)d\omega-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)\frac{1}{\pi(\omega+\omega_0)}\sin\left(2n\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right)d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\omega_0+\frac{\omega_0}{2\pi}x\right)\frac{\sin nx}{\pi x}dx-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(-\omega_0+\frac{\omega_0}{2\pi}x\right)\frac{\sin nx}{\pi x}dx\text{。}$$

（分别令 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}(\omega-\omega_0)=x$ 和 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}(\omega+\omega_0)=x$）上题已证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{\pi x}=\delta(x)$，所以令上式 $n\to\infty$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)B_n(\omega)d\omega=\varphi(\omega_0)-\varphi(-\omega_0)$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)$。

189．定义三维 δ 函数为 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$，求证：

（1）它在球坐标下的表达式为 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$；

（2）$\nabla^2\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$。

（1）$\iiint \varphi(\boldsymbol{r})\frac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)dV$

$$=\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi\int_0^{\pi}\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\sin\theta d\theta\int_0^{\infty}\varphi(r,\theta,\varphi)\delta(r-r_0)dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi\int_0^{\pi}\varphi(r_0,\theta,\varphi)\delta(\theta-\theta_0)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\varphi(r_0,\theta_0,\varphi)\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi=\varphi(r_0,\theta_0,\varphi_0)\text{。}$$

（2）不妨设$\boldsymbol{r}_0=0$。考虑积分$\iiint_V\nabla^2\frac{1}{r}dV$，可验证，当$r\neq 0$时，$\nabla^2\frac{1}{r}=0$，所以对于不包含原点的$V$，有$\iiint_V\nabla^2\frac{1}{r}dV=0$。若$V$包含原点，考虑以下极限式：

$$\lim_{a\to 0}\iiint_V\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}dV=-3\lim_{a\to 0}\iiint_V\frac{a^2}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=-12\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}\frac{a^2}{\left(r^2+a^2\right)^{5/2}}r^2dr=-12\lim_{a\to 0}\int_0^{\pi/2}\frac{a^4\tan^2\theta}{a^5\left(1+\tan^2\theta\right)^{5/2}}a\sec^2\theta d\theta$$

$$=-12\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=-4\pi\text{。}$$

190．求解下列微分方程：（1）$y''=-\delta(x-x_0)$，$y(0)=0$，$y'(1)=0$；

（2）$y''+y=-\delta(x-x_0)$，$y(0)=0$，$y(\pi/2)=0$。

（1）直接积分得$y'=-\eta(x-x_0)+A$，由$y'(1)=0$定出$A=1$，即$y'=1-\eta(x-x_0)$，再积分得$y=x-(x-x_0)\eta(x-x_0)+B$，由$y(0)=0$定出$B=0$，所以

$$y=x-(x-x_0)\eta(x-x_0)=\begin{cases}x,0\le x<x_0\\ x_0,x_0<x\le 1\end{cases}\text{。}$$

（2）$x<x_0$时，$y=A\sin x+B\cos x$，由$y(0)=0$得$y=A\sin x$。

$x>x_0$时，$y=C\sin x+D\cos x$。由$y(\pi/2)=0$得$y=D\cos x$。

由$y(x_0^-)=y(x_0^+)$，$y'(x_0^+)-y'(x_0^-)=-1$可得$y=\begin{cases}\cos x_0\sin x,0\le x<x_0\\ \sin x_0\cos x,x_0<x\le\pi/2\end{cases}$。

191．求方程 $y''-x^2y=0$ 在 $x=0$ 邻域内的两个级数解。

$x=0$ 为方程常点，设 $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ ，代入方程得

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_{n-2}\right]x^n=0,$$

所以 $a_2=0$，$a_3=0$，$(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_{n-2}=0$（$n\geq 2$）。

$$a_{4n}=\frac{1}{4n(4n-1)}a_{4(n-1)}=\frac{1}{4n(4n-1)}\frac{1}{\left[4(n-1)\right]\left[4(n-1)-1\right]}a_{4(n-2)}=\cdots$$

$$=\frac{1}{4n(4n-1)}\frac{1}{\left[4(n-1)\right]\left[4(n-1)-1\right]}\cdots\frac{1}{4\times(4-1)}a_0$$

$$=\frac{1}{4^n n(n-1)\cdots\times 1}\frac{1}{4^n\left(n-\frac{1}{4}\right)\left[(n-1)-\frac{1}{4}\right]\cdots\left(1-\frac{1}{4}\right)}a_0$$

$$=\frac{\Gamma(3/4)}{n!\Gamma(n+3/4)}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}a_0, \qquad (n\geq 1)$$

$$a_{4n+1}=\frac{1}{(4n+1)(4n)}a_{4(n-1)+1}=\frac{1}{(4n+1)(4n)}\frac{1}{\left[4(n-1)+1\right]\left[4(n-1)\right]}a_{4(n-2)+1}=\cdots$$

$$=\frac{\Gamma(5/4)}{n!\Gamma(n+5/4)}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}a_1, \qquad (n\geq 1)$$

由于 $a_2=0$，$a_3=0$，由递推关系可得 $a_{4n+2}=a_{4n+3}=0$（$n\geq 1$）。

所以两个级数解为 $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3/4)}{n!\Gamma(n+3/4)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n}$，$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(5/4)}{n!\Gamma(n+5/4)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1}$ 。

192．在 $x=0$ 邻域内求解方程 $y''-xy=0$ 。

设 $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ ，代入方程得 $2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_{n-1}\right]x^n=0$，所以 $a_2=0$，

$$a_{3n}=\frac{1}{3n(3n-1)}\frac{1}{\left[3(n-1)\right]\left[3(n-1)-1\right]}\cdots\frac{1}{3\times(3-1)}a_0=\frac{\Gamma(2/3)}{n!\Gamma(n+2/3)}\frac{a_0}{3^{2n}},$$

$$a_{3n+1}=\frac{1}{(3n+1)(3n)}\frac{1}{\left[3(n-1)+1\right]\left[3(n-1)\right]}\cdots\frac{1}{(3+1)\times 3}a_1=\frac{\Gamma(4/3)}{n!\Gamma(n+4/3)}\frac{a_1}{3^{2n}},$$

$a_{3n+2}=0$，（上面 $n\geq 1$）所以两个级数解为

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2/3)}{n!\Gamma(n+2/3)}\frac{x^{3n}}{3^{2n}},\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(4/3)}{n!\Gamma(n+4/3)}\frac{x^{3n+1}}{3^{2n}}。$$

193．求厄密方程 $u''-2xu'+2\lambda u=0$ 在 $x=0$ 的解，并讨论当 λ 取何值时有一解截断为多项式。

设 $u=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$，代入方程得 $\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2}+2(\lambda-n)a_n\right]x^n=0$。

$$a_{2n}=\frac{2\left[2(n-1)-\lambda\right]}{2n(2n-1)}a_{2(n-1)}=\frac{2\left[2(n-1)-\lambda\right]}{2n(2n-1)}\frac{2\left[2(n-2)-\lambda\right]}{(2n-2)(2n-3)}\cdots\frac{2(-\lambda)}{2\times 1}a_0$$

$$=\frac{2^{2n}\Gamma(n-\lambda/2)}{(2n)!\Gamma(-\lambda/2)}a_0,\quad (n\geq 1)$$

$$a_{2n+1}=\frac{2^{2n}\Gamma\left(n+\frac{1-\lambda}{2}\right)}{(2n+1)!\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}a_1\quad(n\geq 1),$$

所以两个解为：$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}=\frac{\Gamma(n-\lambda/2)}{(2n)!\Gamma(-\lambda/2)}(2x)^{2n}$，$u_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1-\lambda}{2}\right)}{(2n+1)!\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}(2x)^{2n+1}$。

当 $\lambda=2m$（$m=0,1,2,\cdots$）时，$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}=\frac{\Gamma(n-m)}{(2n)!\Gamma(-m)}(2x)^{2n}$，当 $n>m$ 时，$\Gamma(n-m)$ 是有限值，$\frac{1}{\Gamma(-m)}=0$，所以 $u_1=\sum_{n=0}^{m}=\frac{\Gamma(n-m)}{(2n)!\Gamma(-m)}(2x)^{2n}$。$n\leq m$ 时，

$$\frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(-m)}=(n-1-m)(n-2-m)\cdots(-m)=(-1)^n m(m-1)\cdots(m-n+1)=(-1)^n\frac{m!}{(m-n)!},$$

即 $u_1=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n m!}{(2n)!(m-n)!}(2x)^{2n}$。

同样可得，当$\lambda=2m+1$时，$u_2=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n m!}{(2n+1)!(m-n)!}(2x)^{2n+1}$。

194．求超几何方程$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)z\right]\frac{du}{dz}-\alpha\beta u=0$在$z=0$附近的两个独立解，其中$\alpha,\beta,\gamma$为已知常数，且$\gamma$不是整数。

$z=0$是方程的正则奇点，设$u=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$，代入方程得：

$$\left[\rho(\rho-1)+\gamma\rho\right]a_0z^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\rho+1)(k+\rho+\gamma)a_{k+1}-(k+\rho+\alpha)(k+\rho+\beta)a_k\right]z^k=0$$

所以$\rho(\rho-1)+\gamma\rho=0$，解得$\rho=0$或$\rho=1-\gamma$。

$$a_k=\frac{(k-1+\rho+\alpha)(k-1+\rho+\beta)}{(k+\rho)(k-1+\rho+\gamma)}a_{k-1}=\cdots$$

$$=\frac{(k-1+\rho+\alpha)(k-1+\rho+\beta)}{(k+\rho)(k-1+\rho+\gamma)}\frac{(k-2+\rho+\alpha)(k-2+\rho+\beta)}{(k-1+\rho)(k-2+\rho+\gamma)}\cdots\frac{(\rho+\alpha)(\rho+\beta)}{(1+\rho)(\rho+\gamma)}a_0$$

$$=\frac{(k-1+\rho+\alpha)(k-2+\rho+\alpha)\cdots(\rho+\alpha)}{(k+\rho)(k-1+\rho)\cdots(1+\rho)}\frac{(k-1+\rho+\beta)(k-2+\rho+\beta)\cdots(\rho+\beta)}{(k-1+\rho+\gamma)(k-2+\rho+\gamma)\cdots(\rho+\gamma)}a_0$$

$$=\frac{\Gamma(k+\rho+\alpha)}{\Gamma(\rho+\alpha)}\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(k+\rho+1)}\frac{\Gamma(k+\rho+\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)}\frac{\Gamma(\rho+\gamma)}{\Gamma(k+\rho+\gamma)}a_0$$

取$\rho=0$得第一个解$u_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(k+\gamma)}z^k=F(\alpha,\beta,\gamma,z)$，

取$\rho=1-\gamma$得第二个解$u_2=z^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\frac{\Gamma(k+1+\beta-\gamma)}{\Gamma(1+\beta-\gamma)}\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(k+2-\gamma)}z^k$

$=z^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,z)$。

195．求方程$xy''-xy'+y=0$在$x=0$邻域的两个独立解。

$x=0$是方程的正则奇点，设$y=x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$，代入方程得：

$$\rho(\rho-1)a_0x^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1+\rho)(k+\rho)a_{k+1}-(k-1+\rho)a_k\right]x^k=0$$

所以 $\rho=0$ 或 $\rho=1$，$(k+\rho)(k-1+\rho)a_k-(k-2+\rho)a_{k-1}=0$（$k\ge1$）。

$\rho=0$ 时，$0\cdot a_1+a_0=0$，$2a_2-0\cdot a_1=0$，$a_3=\dfrac{1}{6}a_2=0$，$a_4=a_5=\cdots=0$ 即只有 a_1 不为 0，所以一个解为 $y_1=x$。当 $\rho=1$ 时，$a_1=a_2=\cdots=0$，解仍为 x。

设另一解为 $y=gx\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，代入方程得

$$g+a_0+(2a_2-g)x+\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+1)ka_{k+1}-(k-1)a_k\right]x^k=0$$

所以 $g=-a_0$，$a_2=\dfrac{1}{2}g=-\dfrac{1}{2}a_0$，

$$a_k=\frac{k-2}{k(k-1)}a_{k-1}=\frac{k-2}{k(k-1)}\frac{k-3}{(k-1)(k-2)}\frac{k-4}{(k-2)(k-3)}\cdots\frac{2}{4\times3}\times\frac{1}{3\times2}a_2$$

$$=\frac{1}{k(k-1)}\frac{1}{(k-1)}\frac{1}{(k-2)}\cdots\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}a_2=\frac{2}{(k-1)k!}a_2=-\frac{1}{(k-1)k!}a_0\text{（}k\ge3\text{）。}$$

$gx\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=-a_0x\ln x+a_0+a_1x-a_0\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{(k-1)k!}x^k$，其中 a_1 项对应解 y_1，省略之得到另一解 $y_2=x\ln x-1+\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{(k-1)k!}x^k$。

196．求方程 $\dfrac{d^2u}{dz^2}+\dfrac{2}{z}\dfrac{du}{dz}+m^2u=0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解。

设 $u=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$，代入方程得：

$$\rho(\rho+1)a_0z^{-1}+(\rho+1)(\rho+2)a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1+\rho)(k+2+\rho)a_{k+1}+m^2a_{k-1}\right]z^k=0,$$

$\rho=0,-1,-2$，$a_k=\dfrac{-m^2}{(k+1+\rho)(k+\rho)}a_{k-2}$。

取 $\rho=0$， $a_{2k}=\frac{-m^2}{(2k+1)(2k)}\frac{-m^2}{(2k-1)(2k-2)}\cdots\frac{-m^2}{3\times 2}a_0=\frac{(-1)^k m^{2k}}{(2k+1)!}a_0$，

可得一个解 $u_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(mz)^{2k}=\frac{1}{mz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(mz)^{2k+1}=\frac{\sin mz}{mz}$。

取 $\rho=-2$，则 $a_{2k+1}=\frac{-m^2}{(2k)(2k-1)}\frac{-m^2}{(2k-2)(2k-3)}\cdots\frac{-m^2}{2\times 1}a_1=\frac{(-1)^k m^{2k}}{(2k)!}a_1$，

可得另一解 $u_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(mz)^{2k-1}=\frac{\cos mz}{mz}$。

197．求零阶 Bessel 方程 $\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+u=0$ 在 $z=0$ 邻域内的两个独立解。

设 $u=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ 可得 $\rho^2 a_0 z^{-1}+(\rho-1)^2 a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1+\rho)^2 a_{k+1}+a_{k-1}\right]z^k=0$。

可得 $\rho=0$ 或 1， $a_k=-\frac{1}{(k+\rho)^2}a_{k-2}$。

取 $\rho=0$， $a_{2k}=\frac{-1}{(2k)^2}a_{2(k-1)}=\frac{-1}{(2k)^2}\frac{-1}{\left[2(k-1)\right]^2}\cdots\frac{-1}{2^2}a_0=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}a_0$，

可得一个解为： $u_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=J_0(z)$。

设另一解为 $u=gJ_0(z)\ln z+\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ ，代入方程得：

$$g\left[zJ_0''(z)+J_0'(z)+zJ_0(z)\right]\ln z+2gJ_0'(z)+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 a_{k+1}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}z^k=0$$

由于 $J_0(z)$ 是方程的解，即 $zJ_0''(z)+J_0'(z)+zJ_0(z)=0$，代入 $J_0(z)$ 表达式，并把 z 的偶次幂项和奇次幂项分开写成：

$$a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k+1)^2 a_{2k+1}-a_{2k-1}\right]z^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k)^2 a_{2k}+a_{2k-2}+4g\frac{(-1)^k k}{(k!)^2 2^{2k}}\right]z^{2k-1}=0。$$

所以 $a_1=0$，由 z 的偶次幂项系数的递推公式可得 $a_{2k+1}=0$。

z 的奇次幂项系数的递推公式为：$a_{2k}=-\dfrac{a_{2k-2}}{(2k)^2}-g\dfrac{(-1)^k}{k(k!)^2 2^{2k}}$

$$=-\frac{1}{(2k)^2}\left[-\frac{a_{2k-4}}{(2k-2)^2}-g\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)\left[(k-1)!\right]^2 2^{2k-2}}\right]-g\frac{(-1)^k}{k(k!)^2 2^{2k}}$$

$$=\frac{a_{2k-4}}{2^4 k^2(k-1)^2}-g\frac{(-1)^k}{(k-1)(k!)^2 2^{2k}}-g\frac{(-1)^k}{k(k!)^2 2^{2k}}$$

$$=\frac{(-1)^2 a_{2k-4}}{2^4 k^2(k-1)^2}-g\frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right)$$

$$=\cdots=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}a_0-g\frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+1\right)。$$

所以另一解为 $u_2=J_0(z)\ln z+\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k-1}+\cdots+1\right)\left(\dfrac{z}{2}\right)^{2k}$（$a_0$ 项对应解 u_1，故省略之）。

198．求 Legendre 方程 $(1-z^2)\dfrac{d^2u}{dz^2}-2z\dfrac{du}{dz}+\mu(\mu+1)u=0$ 在 $z=1$ 的有界解。

设 $u=(z-1)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$，代入方程得：

$$2\rho^2 a_0(z-1)^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[2(k+1+\rho)^2 a_{k+1}+(k+1+\rho+\mu)(k+\rho-\mu)a_k\right](z-1)^k=0。$$

所以 $\rho=0$，

$$a_k=\frac{(k+\mu)(\mu+1-k)}{2k^2}a_{k-1}=\frac{(k+\mu)(\mu+1-k)}{2k^2}\frac{(k-1+\mu)(\mu+2-k)}{2(k-1)^2}\cdots\frac{(1+\mu)\mu}{2}a_0$$

$$=\frac{(k+\mu)(k-1+\mu)\cdots(1+\mu)\cdot(\mu+1-k)(\mu+2-k)\cdots\mu}{2^k k^2(k-1)^2\cdots 1}a_0=\frac{\Gamma(k+1+\mu)}{2^k(k!)^2\Gamma(-k+1+\mu)}a_0$$

所以一个解为 $u_1=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(k+1+\mu)}{(k!)^2\Gamma(-k+1+\mu)}\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^k$。

可求出该级数收敛半径为 2，即收敛域为 $|z-1|<2$，即在收敛域内它是有界解。当 $\mu=n$（整

数）时，若 $k\ge n+1$ 则有 $\dfrac{1}{\Gamma(-k+1+n)}=0$，而 $\Gamma(k+1+\mu)$ 为有限值，所以 u_1 截断为多

项式：$u_1=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\Gamma(k+1+n)}{(k!)^2\Gamma(-k+1+n)}\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^k$。

199．求合流超几何方程 $z\dfrac{d^2u}{dz^2}+(b-z)\dfrac{du}{dz}-au=0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解，已知其中的 a,b 为常数，且 $a>0$，$1-b\ne$ 整数。

设 $u=z^\rho\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$，代入方程得

$$\rho(\rho+b-1)c_0z^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1+\rho)(k+\rho+b)c_{k+1}-(k+\rho+a)c_k\right]z^k=0。$$

$\rho=0$ 或 $1-b$，$c_k=\dfrac{k-1+\rho+a}{(k+\rho)(k-1+\rho+b)}c_{k-1}$。

取 $\rho=0$，则 $c_k=\dfrac{k-1+a}{k(k-1+b)}c_{k-1}=\dfrac{1}{k!}\dfrac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}\dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}c_0$，

所以一个解为 $u_1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}\dfrac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}\dfrac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}z^k=F(a,b,z)$。

取 $\rho=1-b$，则 $c_k=\dfrac{1}{k!}\dfrac{\Gamma(k+1+a-b)}{\Gamma(1+a-b)}\dfrac{\Gamma(2-b)}{\Gamma(k+2-b)}c_0$，所以另一解为

$$u_1=z^{1-b}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+1+a-b)}{\Gamma(1+a-b)}\frac{\Gamma(2-b)}{\Gamma(k+2-b)}z^k=z^{1-b}F(1+a-b,2-b,z)。$$

200．求方程 $\dfrac{d^2u}{dz^2}+\dfrac{1}{z}\dfrac{du}{dz}-m^2u=0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解。

设 $u=z^\rho\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$，代入方程得

$$\rho^2a_0z^{-1}+(1-\rho)^2a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1+\rho)^2a_{k+1}-m^2a_{k-1}\right]z^k=0。$$

所以 $\rho=0$ 或1，$a_k=\dfrac{m^2}{(k+\rho)^2}a_{k-2}$。

取 $\rho=0$，则 $a_{2k}=\dfrac{m^2}{(2k)^2}a_{2k-2}=\dfrac{1}{(k!)^2}\left(\dfrac{m}{2}\right)^{2k}a_0$，所以一个解为

$$u_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{mz}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{imz}{2}\right)^{2k}=J_0(imz)\text{。}$$

设另一解为 $u=gu_1\ln z+\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$，代入方程得（参考197题）

$$a_1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k+1)^2a_{2k+1}-m^2a_{2k-1}\right]z^{2k}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(2k)^2a_{2k}-m^2a_{2k-2}+4g\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\frac{k}{(k!)^2}\right]z^{2k-1}=0\text{。}$$

所以 $a_{2k+1}=0$，$a_{2k}=\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{m}{2}\right)^2a_{2k-2}-\dfrac{g}{k(k!)^2}\left(\dfrac{m}{2}\right)^{2k}$

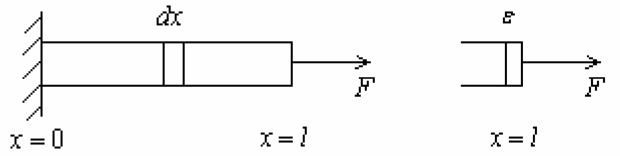
$$=\frac{1}{k^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2\left[\frac{1}{(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2a_{2k-4}-\frac{g}{(k-1)\left[(k-1)!\right]^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k-2}\right]-\frac{g}{k(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{k^2(k-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^4a_{2k-4}-\frac{g}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right)$$

$$=\cdots=\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}a_0-\frac{g}{(k!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+1\right)\text{。}$$

所以另一解为 $u_2=J_0(imz)\ln z-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(k!)^2}\left(\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k-1}+\cdots+1\right)\left(\dfrac{mz}{2}\right)^{2k}$。

201．一长为l，横截面积为S的均匀弹性杆，已知一端（$x=0$）固定，另一端在杆轴方向上受拉力F而平衡。在$t=0$时撤去外力F。试推导杆的纵振动所满足的方程，边界条件和初始条件。



假设在垂直杆长方向的任一截面上各点的振动情况相同$u\left(x,t\right)$表示杆上x处在t时刻相对于平衡位置的位移。取杆上长为dx的一小段，用$P\left(x,t\right)$表示应力，由牛顿第二定律，

$\left[P\left(x+dx,t\right)-P\left(x,t\right)\right]S=dm\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，代入$dm=\rho S dx$得$\dfrac{\partial P}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。由 Hooke 定律$P=E\dfrac{\partial u}{\partial x}$可得$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，其中$a=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$。

取右端长为ε的一小段，由牛顿第二定律有$F\left(t\right)-ES\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}=\rho\varepsilon S\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l-\alpha\varepsilon}$

（$0<\alpha<1$），令$\varepsilon\to 0$有$F\left(t\right)-ES\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$。（a）

当$t>0$时$F\left(t\right)=0$，所以$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$。由于左端点固定，故有$u|_{x=0}=0$。

令（a）式中$t=0$有$F-ES\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=l\\t=0}}=0$。因为平衡时应力处处相等，所以该式对于任意$x\in\left[0,l\right]$都成立，即$F-ES\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=0$，对$x$积分可得$u|_{t=0}=\dfrac{F}{ES}x$（注意到$u|_{x=0}=0$）。初始时处于平衡状态，各处速度为 0，即$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$。

综上该定解问题为$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\ u|_{x=0}=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=\dfrac{F}{ES}x,\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}$。

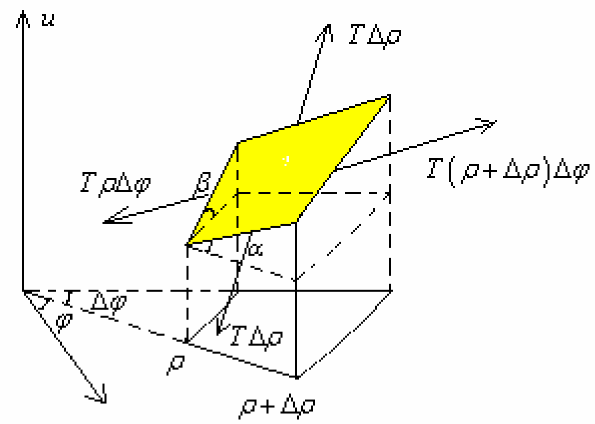
202．一均匀弹性杆，原处于静止状态。其一端（$x=0$）固定。从$t=0$时刻起，在另一端（$x=l$）单位面积上施加外力P，力的方向与杆轴平行。试列出杆的纵振动方程，边界条件和初始条件。

将上题（a）式写成$P(t)S-ES\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$，则$t>0$时$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\dfrac{P}{E}$。

$t=0$时令$P(t)=0$则有$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=l\\t=0}}=0$，同上题讨论可得$\left.u\right|_{t=0}=0$，其他条件与上题同。

该定解问题为$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\ \left.u\right|_{x=0}=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\dfrac{P}{E}\\ \left.u\right|_{t=0}=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}$。

203．一均匀，各向同性的弹性圆膜，四周固定。试列出膜的横振动方程及边界条件。



设ρ_m为面密度，任何方向单位长度张力是T。

沿ρ方向合张力为$T(\rho+\Delta\rho)\Delta\varphi\sin\alpha\big|_{\rho+\Delta\rho}-T\rho\Delta\varphi\sin\alpha\big|_{\rho}$，

φ方向合张力为$T\Delta\rho\sin\beta\big|_{\varphi+\Delta\varphi}-T\Delta\rho\sin\beta\big|_{\varphi}$。

在小振动近似下有$\sin\alpha\approx\tan\alpha\approx\dfrac{\Delta u}{\Delta\rho}$，$\sin\beta\approx\tan\beta\approx\dfrac{\Delta u}{\rho\Delta\varphi}$，再由牛顿第二定律得

$$T(\rho+\Delta\rho)\Delta\varphi\left.\frac{\Delta u}{\Delta\rho}\right|_{\rho+\Delta\rho}-T\rho\Delta\varphi\left.\frac{\Delta u}{\Delta\rho}\right|_{\rho}+T\Delta\rho\left.\frac{\Delta u}{\rho\Delta\varphi}\right|_{\varphi+\Delta\varphi}-T\Delta\rho\left.\frac{\Delta u}{\rho\Delta\varphi}\right|_{\varphi}$$

$$= \rho_m \rho \Delta\rho \Delta\varphi \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\substack{\rho+\varepsilon_1\Delta\rho \\ \varphi+\varepsilon_2\Delta\varphi}} \quad （0<\varepsilon_1<1，\ 0<\varepsilon_2<1），$$

即 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{(\rho+\Delta\rho)\left.\dfrac{\Delta u}{\Delta\rho}\right|_{\rho+\Delta\rho}-\rho\left.\dfrac{\Delta u}{\Delta\rho}\right|_{\rho}}{\Delta\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\left.\dfrac{\Delta u}{\Delta\varphi}\right|_{\varphi+\Delta\varphi}-\left.\dfrac{\Delta u}{\Delta\varphi}\right|_{\varphi}}{\Delta\varphi}-\dfrac{\rho_m}{T}\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\substack{\rho+\varepsilon_1\Delta\rho \\ \varphi+\varepsilon_2\Delta\varphi}}=0$

令 $\Delta\rho\to 0,\Delta\varphi\to 0$ 得 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，其中 $a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho_m}}$。

该定解问题为 $\begin{cases}\nabla^2 u-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \\ \left.u\right|_{\rho=R}=0\end{cases}$ （极坐标系中 $\nabla^2=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$）。

204．一长为 l 的均匀金属细杆（可近似看作一维的），通有恒定电流。设杆的一端（$x=0$）温度恒为 0，另一端（$x=l$）恒为 u_0，初始时温度分布为 $\dfrac{u_0}{l}x$。试写出杆中温度场所满足的方程，边界条件与初始条件。

由于热功率为 I^2R，所以单位时间单位体积产生热量 $\dfrac{I^2R}{lS}$。所以热传导方程为

$\rho c\dfrac{\partial u}{\partial t}-k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{I^2R}{lS}$，其中 ρ 为体密度，c 为比热。若用 λ 表示线密度，则有 $\rho=\dfrac{\lambda}{S}$，

所以方程为 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{kS}{\lambda c}\nabla^2 u=\dfrac{I^2R}{\lambda cl}$。

该定解问题为 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{kS}{\lambda c}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{I^2R}{\lambda cl} \\ \left.u\right|_{x=0}=0,\left.u\right|_{x=l}=u_0,\left.u\right|_{t=0}=\dfrac{u_0}{l}x\end{cases}$。

205．在铀块中，除了中子的扩散运动外，还进行着中子的吸收和增殖过程。设在单位时间内单位体积中，吸收和增殖的中子数均正比于该时刻该处的中子浓度 $u(\boldsymbol{r},t)$，因而净增中子数可表为 $\alpha u(\boldsymbol{r},t)$，$\alpha$ 为比例常数。试导出 $u(\boldsymbol{r},t)$ 所满足的方程。

用 $\boldsymbol{q}$ 表示单位时间流过某单位面积的中子数，有 $\boldsymbol{q}=-D\nabla u$。取一个六面体

$\left[x, x+\Delta x\right]\times\left[y, y+\Delta y\right]\times\left[z, z+\Delta z\right]$，$\Delta t$ 时间内沿 x 方向流入该六面体的中子数为

$$\left(q_x\big|_x - q_x\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y\Delta z\Delta t = D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x\right)\Delta y\Delta z\Delta t = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t,$$

同样可得沿 y，z 方向流入该六面体的中子数分别为 $D\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$ 和 $D\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$。

六面体内中子数一共增加 $\Delta u\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$，增加数应等于流入中子数加上净增中子数，即

$$\Delta u\Delta x\Delta y\Delta z = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t + \alpha u\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\text{。}$$

两边同除 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$，令 $\Delta t\to 0$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + \alpha u$。

206．设有一均匀杆，长为 l，一端固定，另一端受外力 $F = A\sin\omega t$ 作用，其方向与杆一致，A 为常数，列出边界条件。

同 202 题，$\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \dfrac{F}{ES} = \dfrac{A}{ES}\sin\omega t$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0$。

207．有一长为 l 的均匀细杆，现通过其两端，在单位时间内，经单位面积分别供给热量 Q_1 与 Q_2。试写出边界条件。

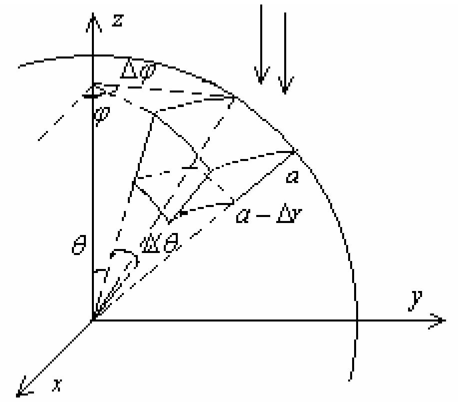
取左端长为 ε 的一小段，由能量守恒，$Q_1 - q(x,t)\big|_{x=\varepsilon} = \rho c\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=\alpha\varepsilon}$（$0<\alpha<1$）。

代入 $q = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 得 $Q_1 + k\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\varepsilon} = \rho c\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=\alpha\varepsilon}$。令 $\varepsilon\to 0$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\dfrac{Q_1}{k}$。

同样可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \dfrac{Q_2}{k}$。

208．有一半径为 a，表面涂黑的导体球，暴晒于日光下，在垂直于光线的单位面积上，单位时间内吸收热量 M。设周围媒质温度为 0，球面按牛顿冷却定律散热。试在适当的坐标系中写出边界条件。

牛顿冷却定律：单位时间流过表面单位面积的热量与表面两边的温度差成正比（比例系数设为 H）。



取上图的一小块体积元，Δt 时间内外表面（$r=a$）吸收热量为 $M\left(\Delta S_r\big|_{r=a}\cos\theta\right)\Delta t$，

外表面散失热量为 $H\,u\big|_{r=a}\,\Delta S_r\big|_{r=a}\,\Delta t$。

$r=a-\Delta r$ 面流入热量为 $q_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta t=-k\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta t$，

从 θ 面流入热量 $q_\theta\big|_\theta\,\Delta S_\theta\big|_\theta\,\Delta t=-\dfrac{k}{a}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_\theta\,\Delta S_\theta\big|_\theta\,\Delta t$，

从 $\theta+\Delta\theta$ 面流入热量 $-q_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta t=\dfrac{k}{a}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta t$，

从 φ 面流入热量 $q_\varphi\big|_\varphi\,\Delta S_\varphi\big|_\varphi\,\Delta t=-\dfrac{k}{a\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_\varphi\,\Delta S_\varphi\big|_\varphi\,\Delta t$，

从 $\varphi+\Delta\varphi$ 面流入热量 $-q_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta t=\dfrac{k}{a\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta t$。

以上各式中 $\Delta S_r\big|_{r=a}=a^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi$，$\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}=\left(a-\Delta r\right)^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi$，

$\Delta S_\theta\big|_\theta=a\sin\theta\Delta r\Delta\varphi$，$\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}=a\sin\left(\theta+\Delta\theta\right)\Delta r\Delta\varphi$，$\Delta S_\varphi\big|_\varphi=\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}=a\Delta r\Delta\theta$。

该体积元内增加热量为 $\rho c\Delta V\Delta u=\rho ca^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\Delta u$，由能量守恒可得

$$
\begin{aligned}
&M\left(\Delta S_r\big|_{r=a}\cos\theta\right)\Delta t-H\,u\big|_{r=a}\,\Delta S_r\big|_{r=a}\,\Delta t-k\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta S_r\big|_{r=a-\Delta r}\,\Delta t\\
&\qquad-\frac{k}{a}\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_\theta\,\Delta S_\theta\big|_\theta\,\Delta t+\frac{k}{a}\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta S_\theta\big|_{\theta+\Delta\theta}\,\Delta t-\frac{k}{a\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_\varphi\,\Delta S_\varphi\big|_\varphi\,\Delta t\\
&\qquad+\frac{k}{a\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta S_\varphi\big|_{\varphi+\Delta\varphi}\,\Delta t=\rho ca^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\Delta u
\end{aligned}
$$

化简得

$$Ma^2\sin^2\theta\cos\theta - H\,u\big|_{r=a}\,a^2\sin^2\theta - k\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a-\Delta r}(a-\Delta r)^2\sin^2\theta$$

$$+k\sin\theta\Delta r\,\frac{1}{\Delta\theta}\left[\sin(\theta+\Delta\theta)\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta+\Delta\theta}-\sin\theta\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta}\right]+k\Delta r\,\frac{1}{\Delta\varphi}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi+\Delta\varphi}-\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi}\right)$$

$$=\rho c a^2\sin^2\theta\Delta r\,\frac{\Delta u}{\Delta t}\text{。}$$

令 $\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi,\Delta t\to 0$，因为 $\frac{1}{\Delta\theta}\left[\sin(\theta+\Delta\theta)\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta+\Delta\theta}-\sin\theta\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta}\right]\to\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$，

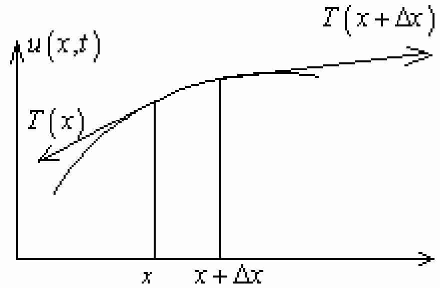
$\frac{1}{\Delta\varphi}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi+\Delta\varphi}-\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi}\right)\to\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$，$\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{\partial u}{\partial t}$ 都是有限值，所以有

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{H}{k}u\right)\right|_{r=a}=\frac{M}{k}\cos\theta\text{。}$$

上面的讨论适用于 $0\le\theta\le\pi/2$ 的情况，即有光线照射到的范围，对于 $\pi/2<\theta\le\pi$，只需

令上式 $M=0$ 即可，即 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{H}{k}u\right)\right|_{r=a}=\begin{cases}\frac{M}{k}\cos\theta, 0\le\theta\le\pi/2\\ 0,\pi/2<\theta\le\pi\end{cases}$

209．一完全柔软的均匀细线，重力可忽略。一端（$x=0$）固定在匀速转动的轴上，角速度为 ω，另一端（$x=l$）自由。由于惯性离心力的作用，此细线的平衡位置为水平线。试推导细线相对于其平衡位置作横振动的振动方程。



取长为 Δx 的一小段，水平方向（纵向）由牛顿第二定律及向心加速度公式可得

$T(x)-T(x+\Delta x)=\rho\Delta x\omega^2 x$，两边同除 Δx 并令 $\Delta x\to 0$ 得 $T'(x)=-\rho\omega^2 x$。

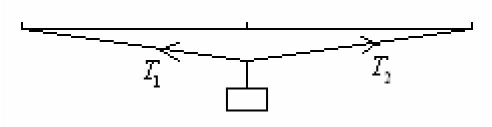
将上式积分，并由 $T(l)=0$ 可得 $T(x)=\frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2-x^2\right)$。

垂直方向（横向）可列出牛顿方程 $T(x+\Delta x)\sin\theta\big|_{x+\Delta x}-T(x)\sin\theta\big|_{x}=\rho\Delta x\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x+\alpha\Delta x}$。

由小振动近似，$\sin\theta\approx\tan\theta\approx\frac{\partial u}{\partial x}$，代入上式，两边同除$\Delta x$并令$\Delta x\to 0$可得

$\frac{\partial}{\partial x}\left[T\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，代入$T\left(x\right)$表达式即可得$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2-x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{2}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$。

210．一长为l的水平均匀弹性弦（两端固定），中点处悬一重物，质量为M。试列出弦的横振动方程，边界条件以及连接条件。设悬线的质量及弹性形变均可忽略。



显然有$u\left(x,t\right)\Big|_{x=\frac{l}{2}-0}=u\left(x,t\right)\Big|_{x=\frac{l}{2}+0}$。

由于重物没有水平方向的运动，所以$T_1\cos\theta_1=T_2\cos\theta_2$。由于$\theta_1\approx 0,\theta_2\approx 0$，所以$T_1=T_2$（记为$T$）。垂直方向有$T_1\sin\theta_1+T_2\sin\theta_2-Mg=M\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=\frac{l}{2}}$，由于$\sin\theta_1\approx-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{l}{2}-0}$，

$\sin\theta_2\approx\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{l}{2}+0}$，所以$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{l}{2}+0}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{l}{2}-0}=\frac{M}{T}\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=\frac{l}{2}}+g\right)$。

该定解问题为$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=0\\ u\left(x,t\right)\Big|_{x=\frac{l}{2}-0}=u\left(x,t\right)\Big|_{x=\frac{l}{2}+0}\\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{l}{2}+0}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{l}{2}-0}=\frac{M}{T}\left(\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=\frac{l}{2}}+g\right)\end{cases}$。

211．将下列方程分离变量：（1）$a_1(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_1(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b_2(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

（2）$\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$；（3）$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$；

（4）$\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\dfrac{1}{\sin\alpha(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$。

（1）设$u(x,y)=X(x)Y(y)$，代入方程得：

$$a_1(x)X''(x)Y(y)+b_1(y)X(x)Y''(y)+a_2(x)X'(x)Y(y)+b_2(y)X(x)Y'(y)=0。$$

两边同除$X(x)Y(y)$得$\dfrac{a_1(x)X''(x)+a_2(x)X'(x)}{X(x)}=-\dfrac{b_1(y)Y''(y)+b_2(y)Y'(y)}{Y(y)}$。

令两边等于λ，则$\begin{cases}a_1(x)X''(x)+a_2(x)X'(x)-\lambda X(x)=0\\ b_1(y)Y''(y)+b_2(y)Y'(y)+\lambda Y(y)=0\end{cases}$。

（2）设$u(\rho,\varphi)=\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi)$，代入方程得：$\dfrac{\Phi(\varphi)}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left[\rho\dfrac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+\dfrac{\mathrm{P}(\rho)}{\rho^2}\dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=0$。

两边同乘$\dfrac{\rho^2}{\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi)}$得$\dfrac{\rho}{\mathrm{P}(\rho)}\dfrac{d}{d\rho}\left[\rho\dfrac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]=-\dfrac{1}{\Phi(\varphi)}\dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}$，

令两边等于λ，则$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left[\rho\dfrac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]-\dfrac{\lambda}{\rho^2}\mathrm{P}(\rho)=0\\ \dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi)=0\end{cases}$。

（3）设$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，代入方程得

$\dfrac{\Theta(\theta)}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dR(r)}{dr}\right]+\dfrac{R(r)}{r^2\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]=0$。两边同乘$\dfrac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$得

$\dfrac{1}{R(r)}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dR(r)}{dr}\right]=-\dfrac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]$。令两边等于$\lambda$得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left[r^2\dfrac{dR(r)}{dr}\right]-\dfrac{\lambda}{r^2}R(r)=0\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+\lambda\Theta(\theta)=0\end{cases}。$$

（4）令 $u(\alpha,\beta,\varphi)=v(\alpha,\beta,\varphi)\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}=\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}v$，$\dfrac{\partial u}{\partial\beta}=\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta}+\dfrac{\operatorname{sh}\beta}{2\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}v$，

代入方程得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{3/2}}v\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\sin\alpha\operatorname{sh}\beta}{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{3/2}}v\right]$$
$$+\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$$

展开得

$$\frac{2\cos\alpha\operatorname{ch}\beta-\cos^2\alpha-1}{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}$$
$$+\frac{4\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ch}\beta-\sin\alpha\cos^2\alpha-3\sin\alpha}{4(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{5/2}}v+\frac{\sin^2\alpha}{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\alpha}$$
$$-\frac{\sin\alpha\operatorname{sh}\beta}{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}$$
$$+\frac{3\sin\alpha-\sin\alpha\operatorname{ch}^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ch}\beta}{4(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{5/2}}v+\frac{\sin\alpha\operatorname{sh}\beta}{2(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^{3/2}}\frac{\partial v}{\partial\beta}$$
$$+\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$$

化简得 $\sin^2\alpha\dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\sin\alpha\cos\alpha\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}+\sin^2\alpha\dfrac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha v=0$。

设 $v(\alpha,\beta,\varphi)=\mathrm{A}(\alpha)\mathrm{B}(\beta)\Phi(\varphi)$，代入上式，两边同除 $\mathrm{A}(\alpha)\mathrm{B}(\beta)\Phi(\varphi)$ 得

$$\frac{\sin\alpha}{\mathrm{A}(\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\frac{d\mathrm{A}(\alpha)}{d\alpha}\right]-\frac{1}{4}\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{B}(\beta)}\frac{d\mathrm{B}(\beta)}{d\beta}=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}。$$

令上式两边等于 μ，则

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\alpha\mathrm{A}(\alpha)}\dfrac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\dfrac{d\mathrm{A}(\alpha)}{d\alpha}\right]-\dfrac{\mu}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\mathrm{B}(\beta)}\dfrac{d\mathrm{B}(\beta)}{d\beta}\\ \dfrac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}+\mu\Phi(\varphi)=0\end{cases}。$$

令上面第一式两边等于 $-\lambda$，则

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\dfrac{d\mathrm{A}(\alpha)}{d\alpha}\right]+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{\sin^2\alpha}\right)\mathrm{A}(\alpha)=0\\ \dfrac{d\mathrm{B}(\beta)}{d\beta}+\left(\lambda+\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{B}(\beta)=0\\ \dfrac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi}+\mu\Phi(\varphi)=0\end{cases}$$ 。

212．求解下列各本征值问题，证明各题中本征函数的正交性，并算出归一因子。

（1）$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=0,X(l)=0\end{cases}$；（2）$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=0,X'(l)=0\end{cases}$；（3）$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=0,X'(l)=0\end{cases}$；

（4）$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(a)=0,X(b)=0\end{cases}$；（5）$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=0\\ \alpha X(l)+\beta X'(l)=0\end{cases}$；（6）$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ \alpha_1X(0)+\beta_1X'(0)=0\\ \alpha_2X(l)+\beta_2X'(l)=0\end{cases}$。

（1）方程两边同乘 X ，并对 x 积分得

$$\lambda\int_0^l X^2(x)=-\int_0^l X''(x)X(x)dx=-X'(x)X(x)\Big|_0^l+\int_0^l X'^2(x)dx=\int_0^l X'^2(x)dx$$ 。

当 $X(x)\neq0$ 时，$\lambda=\dfrac{\int_0^l X'^2(x)dx}{\int_0^l X^2(x)dx}\geq0$ 。当 $\lambda=0$ 时，即 $X''=0$ ，则解为 $X(x)=ax+b$ ，

代入边界条件得 $X(x)=0$ ，所以只有 $\lambda>0$ 。

$\lambda>0$ 时解为 $X(x)=a\sin\sqrt{\lambda}x+b\cos\sqrt{\lambda}x$ ，由边界条件可得 $b=0$， $\lambda=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$。

所以对应本征值 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$ 的本征函数为 $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ （$n=1,2,\cdots$）。

设两对本征值和本征函数为 (λ_1,X_1)，(λ_2,X_2)，（$\lambda_1\neq\lambda_2$）即

$\begin{cases}X_1''+\lambda_1X_1=0\\ X_1(0)=0,X_1(l)=0\end{cases}$，$\begin{cases}X_2''+\lambda_2X_2=0\\ X_2(0)=0,X_2(l)=0\end{cases}$。

令第一个方程两边同乘 X_2 减去第二个方程两边同乘 X_1，并对 x 积分得

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^l X_1(x)X_2(x)dx=\int_0^l X_1(x)X_2''(x)-X_1''(x)X_2(x)dx$$

$$=X_1(x)X_2'(x)\Big|_0^l+X_1'(x)X_2(x)\Big|_0^l=0$$ 。

由于 $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$，所以 $\int_0^l X_1(x)X_2(x)dx=0$，即不同本征值的本征函数正交。

$\int_0^l X_n^2(x)dx=\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{l}{2}$，所以归一化因子为 $\sqrt{\frac{2}{l}}$。

（2）$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2$（$n=0,1,2,\cdots$），$X_n(x)=\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$，归一因子 $\sqrt{\frac{2}{l}}$。

（3）此时本征值 λ 可取 0。$\lambda>0$ 时可求出 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$（$n=1,2,\cdots$），$X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x$

（$n=1,2,\cdots$）。$\lambda=0$ 时可求出 $X_0(x)=1$，因此本征值为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$（$n=0,1,2,\cdots$），

本征函数 $X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x$（$n=0,1,2,\cdots$）。

$\int_0^l X_n^2(x)dx=\begin{cases} l,n=0 \\ \frac{l}{2},n>0 \end{cases}$，所以归一因子为 $\sqrt{\frac{2}{l(1+\delta_{n,0})}}$。

（4）解为 $X(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$，代入边界条件得

$C_1\sin\sqrt{\lambda}a+C_2\cos\sqrt{\lambda}a=0$，$C_1\sin\sqrt{\lambda}b+C_2\cos\sqrt{\lambda}b=0$，

写成矩阵形式为 $\begin{pmatrix} \sin\sqrt{\lambda}a & \cos\sqrt{\lambda}a \\ \sin\sqrt{\lambda}b & \cos\sqrt{\lambda}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=0$，

要使 $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ 有非零解，应有 $\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}a & \cos\sqrt{\lambda}a \\ \sin\sqrt{\lambda}b & \cos\sqrt{\lambda}b \end{vmatrix}=\sin\sqrt{\lambda}(a-b)=0$，

即本征值为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$（$n=1,2,\cdots$），将 $C_2=-\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}a}{\cos\sqrt{\lambda_n}a}C_1$ 代入 $X(x)$ 表达式可得本

征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}$。归一化因子 $\sqrt{\frac{2}{b-a}}$。

（5）解为 $X(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$，代入边界条件得 $C_2=0$，

$\tan\sqrt{\lambda}l+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\lambda}=0$，本征值 λ_n 是左边方程的第 n（$=1,2,\cdots$）个正根，对应的本征函数

为 $X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$。

设本征值 λ_1 对应本征函数 X_1，本征值 λ_2（$\neq\lambda_1$）对应本征函数 X_2，则

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^l X_1(x)X_2(x)dx &= \int_0^l \left[X_1(x)X_2''(x)-X_1''(x)X_2(x)\right]dx \\
&= X_1(x)X_2'(x)\Big|_0^l - X_1'(x)X_2(x)\Big|_0^l = X_1(l)X_2'(l)-X_1'(l)X_2(l) \\
&= -\frac{\alpha}{\beta}X_1(l)X_2(l)+\frac{\alpha}{\beta}X_1(l)X_2(l)=0,
\end{aligned}
$$

即不同本征值的本征函数是正交的。

$$\int_0^l X_n^2(x)dx=\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\int_0^l \cos 2\sqrt{\lambda_n}x dx=\frac{l}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin 2\sqrt{\lambda_n}l=\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_n}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}l},$$

代入 $\tan\sqrt{\lambda_n}l=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\lambda_n}$，则上式 $=\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2\lambda_n}$，所以归一化因子为 $\sqrt{\frac{1}{\frac{l}{2}+\frac{\alpha\beta}{2\left(\alpha^2+\beta^2\lambda_n\right)}}}$。

（6）解为 $X(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$，代入边界条件得

$$\begin{cases}\alpha_1 C_2+\beta_1 C_1\sqrt{\lambda}=0\\ \alpha_2 C_1\sin\sqrt{\lambda}l+\alpha_2 C_2\cos\sqrt{\lambda}l+\beta_2 C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l-\beta_2 C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l=0\end{cases}。$$

由第一式得 $C_2=-C_1\sqrt{\lambda}\frac{\beta_1}{\alpha_1}$，代入第二式得

$(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\lambda)\tan\sqrt{\lambda}l+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\sqrt{\lambda}=0$。本征值 λ_n 为该方程的第 n 个正根。

将 $C_2=-C_1\sqrt{\lambda_n}\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ 代入 $X(x)$ 表达式为 $\sin\sqrt{\lambda_n}x-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x$，

本征函数可表示为 $X_n(x)=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x-\delta_n\right)$，其中 $\tan\delta_n=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\sqrt{\lambda_n}$。

$$\int_0^l X_n^2(x)dx=\frac{l}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\left[\sin 2\left(\sqrt{\lambda_n}l-\delta_n\right)+\sin 2\delta_n\right]。$$

由 $\tan\sqrt{\lambda_n}l=-\sqrt{\lambda_n}\frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\lambda}$ 可得：

$$\sin 2\sqrt{\lambda_n}l=\frac{2\tan\sqrt{\lambda_n}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}l}=-2\sqrt{\lambda_n}\frac{\alpha_1^2\alpha_2\beta_2-\alpha_1\alpha_2^2\beta_1+\alpha_1\beta_1\beta_2^2\lambda_n-\alpha_2\beta_1^2\beta_2\lambda_n}{\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n\right)\left(\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n\right)},$$

$$\cos 2\sqrt{\lambda_n}l=\frac{1-\tan^2\sqrt{\lambda_n}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}l}=\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2-\alpha_1^2\beta_2^2\lambda_n-\alpha_2^2\beta_1^2\lambda_n+4\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\lambda_n+\beta_1^2\beta_2^2\lambda_n^2}{\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n\right)\left(\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n\right)},$$

$$\sin 2\delta_n = \frac{2\tan\delta_n}{1+\tan^2\delta_n} = 2\sqrt{\lambda_n}\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n}，\quad \cos 2\delta_n = \frac{1-\tan^2\delta_n}{1+\tan^2\delta_n} = \frac{\alpha_1^2-\beta_1^2\lambda_n}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n},$$

$$\sin 2\left(\sqrt{\lambda_n}l-\delta_n\right) = \sin 2\sqrt{\lambda_n}l\cos 2\delta_n - \cos 2\sqrt{\lambda_n}l\sin 2\delta_n = -2\sqrt{\lambda_n}\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n}。$$

所以$\int_0^l X_n^2(x)dx = \frac{l}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n}-\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n}\right)$,

所以归一因子为$\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{l}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2\lambda_n}-\dfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2+\beta_1^2\lambda_n}\right)}}$。

213. 如果我们采用最小二乘法用$\sum_{n=1}^{N}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x$去逼近函数$f(x)$，$f(x)\approx\sum_{n=1}^{N}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，即要求均方误差$\varepsilon=\int_0^l\left[f(x)-\sum_{n=1}^{N}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right]^2dx$取极小，试确定展开系数$a_n$。

令ε对$a_1,a_2,\cdots a_N$的偏导为零：

$\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_k}=-2\int_0^l\left[f(x)-\sum_{n=1}^{N}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\sin\frac{k\pi}{l}xdx=0$（$k=1,2,\cdots N$），即

$\sum_{n=1}^{N}a_n\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{k\pi}{l}xdx=\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$。由$\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}$的正交性可得

$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$。

214. 解第201题。$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=0\\ u\big|_{x=0}=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0\\ u\big|_{t=0}=\dfrac{F}{ES}x,\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}$

设$u(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程得$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$。

本征值问题为$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$。212 题第（2）小题已解出该本征值问题：

$\lambda_n=\left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2$， $X_n(x)=\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x$。

解出$T_n(t)=A_n\sin\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t+B_n\cos\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t$，

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t+B_n\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x。$$

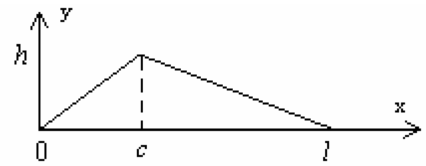
由$u\big|_{t=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x=\dfrac{F}{ES}x$可定出

$$B_n=\frac{2F}{lES}\int_0^l x\sin\frac{2n+1}{l}\pi x dx=\frac{8Fl}{ES\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}。$$

由$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{2n+1}{2l}a\pi\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x=0$可定出$A_n=0$。

所以$u(x,t)=\dfrac{8Fl}{ES\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x$。

215．一长为l，两端固定的均匀弦，初始时，弦被拉开，待达到平衡后突然放手。试求解此问题。



方程与上题同，边界条件为$u\big|_{x=0}=0$， $u\big|_{x=l}=0$。

初始条件为：$u\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, 0\le x\le c\\ \dfrac{h(l-x)}{l-c}, c\le x\le l\end{cases}$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$。

本征函数为$X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$（$n=1,2,\cdots$），解出$T_n(t)=A_n\sin\dfrac{n\pi}{l}at+B_n\cos\dfrac{n\pi}{l}at$，

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{n\pi}{l}at+B_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x。$$

由初始条件定出 $B_n=\dfrac{2hl^2}{c\left(l-c\right)\pi^2}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c$， $A_n=0$，

所以 $u\left(x,t\right)=\dfrac{2hl^2}{c\left(l-c\right)\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\cos\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

216．两端固定的均匀弦，在硬质平锤的打击下以如下初速度分布振动：

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}0,0\le x<c-\delta\\ v_0,c-\delta<x<c+\delta\\ 0,c+\delta<x\le l\end{cases}$。若初位移为 0，求解弦的横振动。

仍有 $u=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\dfrac{n\pi}{l}at+B_n\cos\dfrac{n\pi}{l}at\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

$\left.u\right|_{t=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x=0$，所以 $B_n=0$，

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{n\pi}{l}a\sin\dfrac{n\pi}{l}x$，所以

$A_n=\dfrac{2}{n\pi a}\int_0^l\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{4lv_0}{n^2\pi^2a}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta$。

所以 $u\left(x,t\right)=\dfrac{4lv_0}{\pi^2a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta\sin\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

217．两端固定的均匀弦，其 $x=c$ 点受到尖锤的打击而获得冲量 I。若初位移为 0，求解弦的自由横振动。

假设冲量 I 均匀分布于 $c-\delta<x<c+\delta$ 上，由动量定理，$2\rho\delta v_0=I$（ρ 是线密度），

所以 $v_0=\dfrac{I}{2\rho\delta}$，代入上题结果，

$u_\delta\left(x,t\right)=\dfrac{2lI}{\pi^2a\rho\delta}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta\sin\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

$\left|\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{l}c\sin\dfrac{n\pi}{l}\delta\sin\dfrac{n\pi}{l}at\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，所以上面的级数是一致收敛的，令 $\delta\to0$，

则求极限与求和可交换顺序，即

$$\lim_{\delta\to 0} u_\delta(x,t) = \frac{2lI}{\pi^2 a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\left(\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\frac{n\pi}{l}\delta}{\delta}\right)\sin\frac{n\pi}{l}at\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\frac{2I}{\pi a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}c\sin\frac{n\pi}{l}at\sin\frac{n\pi}{l}x\text{。}$$

218．一长为 $2l$ 的均匀杆，两端受力作用而分别压缩了 εl 。在 $t=0$ 时撤去外力，试解杆的纵振动。

以杆的中点为坐标原点，由于两端自由，所以边界条件为 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-l}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$。

由于杆均匀，故初始时刻位移是线性形式，即 $u|_{t=0}=-\varepsilon x$；初始时静止，所以 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$。

同 212 题第（4）小题作法可得本征函数 $X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{2l}(x+l)$。

$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi}{2l}at+B_n\sin\frac{n\pi}{2l}at$，

$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{2l}at+B_n\sin\frac{n\pi}{2l}at\right)\cos\frac{n\pi}{2l}(x+l)$。

由 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ 可得 $B_n=0$，由 $u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{2l}(x+l)=-\varepsilon x$ 可得

$A_n=\frac{-\varepsilon}{l}\int_{-l}^{l}x\cos\frac{n\pi}{2l}(x+l)dx=\frac{4l\varepsilon}{\pi^2n^2}\left[1-(-1)^n\right]$，所以 $A_{2k}=0$，$A_{2k+1}=\frac{8l\varepsilon}{\pi^2(2k+1)^2}$，

所以 $u(x,t)=\frac{8l\varepsilon}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}at\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}(x+l)$

$$=\frac{8l\varepsilon}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}at\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\text{。}$$

219．设长为 l 的细杆，$x=0$ 端绝热，另一端与外界按牛顿冷却定律交换热量，外界温度为 0。杆身的散热可忽略不计。初始时杆的温度为 u_0。求杆中温度的分布与变化。

取右端长为 ε 的一小段，由牛顿冷却定律，Δt 时间内流出该段热量为 $H\,u|_{x=l}\,S\Delta t$（S 为杆

的横截面积），从内侧流入热量为 $qS\Delta t=-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}S\Delta t$，该段内吸收热量为 $\rho c\varepsilon\Delta u$，由能量守恒可得 $-H\left.u\right|_{x=l}S\Delta t-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}S\Delta t=\rho c\varepsilon\Delta u$，即 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l-\varepsilon}+\frac{H}{k}\left.u\right|_{x=l}=-\varepsilon\frac{\rho c}{kS}\frac{\Delta u}{\Delta t}$，

令 $\Delta t\to 0,\varepsilon\to 0$，由于 $\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{\partial u}{\partial t}$ 为有限值，所以 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}+h\left.u\right|_{x=l}=0$（$h=\frac{H}{k}$）。

对于左端，可认为 $H=0$，所以有 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$。

即该定解问题为 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\left(\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)_{x=l}=0\\ \left.u\right|_{t=0}=u_0\end{cases}$

令 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 可得 $X''(x)+\lambda X(x)=0$，$T'(x)+\kappa\lambda T(t)=0$。

本征值问题为 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X'(0)=0,X'(l)+hX(l)=0\end{cases}$。

解得本征值 λ_n 是方程 $\sqrt{\lambda}\tan\sqrt{\lambda}l=h$ 的第 n 个正根，本征函数为 $X_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}x$。

设本征值 λ_1 对应本征函数 X_1，本征值 λ_2 对应本征函数 X_2，可得

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^l X_1(x)X_2(x)dx&=\int_0^l\left[X_1(x)X_2''(x)-X_1''(x)X_2(x)\right]dx\\ &=X_1(x)X_2'(x)\Big|_0^l-X_1'(x)X_2(x)\Big|_0^l=X_1(l)X_2'(l)-X_1'(l)X_2(l)\\ &=-hX_1(l)X_2(l)+hX_1(l)X_2(l)=0\text{。}\end{aligned}$$

即证明了本征函数的正交性。

解得 $T_n(t)=A_n e^{-\kappa\lambda_n t}$，则 $u=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\sqrt{\lambda_n}xe^{-\kappa\lambda_n t}$。

由初始条件 $u_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\sqrt{\lambda_n}x$ 及本征函数的正交性有 $A_n=u_0\frac{\int_0^l\cos\sqrt{\lambda_n}xdx}{\int_0^l\cos^2\sqrt{\lambda_n}xdx}$。

$$\int_0^l \cos\sqrt{\lambda_n}x dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}l = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_n}l}{\sqrt{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}l}} = (-1)^{n-1}\frac{h}{\sqrt{\lambda_n\left(\lambda_n+h^2\right)}},$$

$$\int_0^l \cos^2\sqrt{\lambda_n}x dx = \frac{l}{2}+\frac{1}{2}\int_0^l \cos 2\sqrt{\lambda_n}x dx = \frac{l}{2}+\frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin 2\sqrt{\lambda_n}l$$

$$= \frac{l}{2}+\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_n}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}l} = \frac{1}{2}\left(l+\frac{h}{\lambda_n+h^2}\right)。$$

所以 $A_n = (-1)^{n-1} 2hu_0 \frac{1}{\sqrt{\lambda_n\left(\lambda_n+h^2\right)}}\frac{1}{\left(l+\frac{h}{\lambda_n+h^2}\right)}$,

$$u(x,t) = 2hu_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n\left(\lambda_n+h^2\right)}}\frac{1}{\left(l+\frac{h}{\lambda_n+h^2}\right)}\cos\sqrt{\lambda_n}x e^{-\kappa\lambda_n t}。$$

220．求解细杆的导热问题，杆长为l，两端（$x=0$ 及 $x=l$）均保持为 0 度，初始温度分布 $u\big|_{t=0} = b\,x(l-x)/l^2$。

可得本征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$，解出 $T_n(t)=A_n e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$， $u=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x e^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$。

代入初始条件，$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{b}{l^2}x(l-x)$，所以 $A_n=\frac{2b}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$

$=\frac{4b}{\pi^3 n^3}\left[1-(-1)^n\right]$，则 $A_{2k}=0$， $A_{2k+1}=\frac{8b}{\pi^3(2k+1)^3}$,

所以 $u(x,t)=\frac{8b}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x e^{-\kappa\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}t}$。

221．求解：$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ u\big|_{x=0}=u_0, u\big|_{x=a}=u_0 y \\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0 \end{cases}$

设$u(x,y)=X(x)Y(y)$，则$\dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda$。可得到本征值问题$\begin{cases}Y''(y)+\lambda Y(y)=0\\ Y'(0)=0,Y'(b)=0\end{cases}$。

$\lambda\int_0^b Y^2(y)dy=-\int_0^b Y''(y)Y(y)dy=-Y'(y)Y(y)\Big|_0^b+\int_0^b Y'^2(y)dy=\int_0^b Y'^2(y)dy$，当

$Y(y)\neq 0$时有$\lambda=\dfrac{\int_0^b Y'^2(y)dy}{\int_0^b Y^2(y)dy}\geq 0$。

可得本征函数$Y_n(y)=\cos\dfrac{n\pi}{b}y$（$n=0,1,2\cdots$）。

解得$X_n(x)=Cx+A_0+A_n\operatorname{ch}\dfrac{n\pi}{b}x+B_n\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{b}x$（$n=1,2\cdots$），其中$Cx+A_0$对应本征值

$\lambda_0=0$。则$u(x,y)=A_0+Cx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{ch}\dfrac{n\pi}{b}x+B_n\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{b}x\right)\cos\dfrac{n\pi}{b}y$，

由$u\big|_{x=0}=u_0$可得$u_0=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\dfrac{n\pi}{b}y$，所以$A_0=u_0$，$A_n=0$（$n=1,2,\cdots$）。

由$u\big|_{x=a}=u_0y$可得$u_0y=u_0+Ca+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{b}a\cos\dfrac{n\pi}{b}y$，

$B_n=\dfrac{2u_0}{b\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{b}a}\int_0^b(y-1)\cos\dfrac{n\pi}{b}ydy=\dfrac{2bu_0}{n^2\pi^2}\dfrac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{b}a}\left[(-1)^n-1\right]$，

$B_{2k}=0$，$B_{2k+1}=-\dfrac{4bu_0}{\pi^2}\dfrac{1}{(2k+1)^2\operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)\pi}{b}a}$。

$C=\dfrac{u_0}{ab}\int_0^b(y-1)dy=\dfrac{b-2}{2a}u_0$，所以

$$u(x,y)=u_0+\frac{b-2}{2a}u_0x-\frac{4bu_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{b}a}\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{b}x\cos\frac{(2k+1)\pi}{b}y$$

222．在带状区域$0\leq x\leq a$，$0\leq y<\infty$中求解$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=a}=0\\ u\big|_{y=0}=A\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\lim\limits_{y\to\infty}u=0\end{cases}$。

可求得本征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x$（$n=1,2,\cdots$）。

由 $\lim\limits_{y\to\infty}u=0$ 得 $Y_n(y)=C_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$，则 $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{a}xe^{-\frac{n\pi}{a}y}$。

由 $u\big|_{y=0}=A\left(1-\frac{x}{a}\right)$ 得 $C_n=\frac{2A}{a}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}xdx=\frac{2A}{n\pi}$。

所以 $u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{a}xe^{-\frac{n\pi}{a}y}=\frac{2A}{\pi}\frac{1}{2i}\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{a}(-y+ix)}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{a}(-y-ix)}\right]$

$$=\frac{2A}{\pi}\frac{1}{2i}\left\{-\ln\left[1-e^{\frac{\pi}{a}(-y+ix)}\right]+\ln\left[1-e^{\frac{\pi}{a}(-y-ix)}\right]\right\}\qquad\left(\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\ |z|<1\right)$$

$$=\frac{2A}{\pi}\frac{1}{2i}\ln\frac{1-e^{\frac{\pi}{a}(-y-ix)}}{1-e^{\frac{\pi}{a}(-y+ix)}}=\frac{2A}{\pi}\frac{1}{2i}\ln\frac{1-e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\frac{\pi}{a}x+ie^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\frac{\pi}{a}x}{1-e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\frac{\pi}{a}x-ie^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\frac{\pi}{a}x}$$

$$=\frac{2A}{\pi}\frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\dfrac{e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\frac{\pi}{a}x}{1-e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\frac{\pi}{a}x}}{1-i\dfrac{e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\frac{\pi}{a}x}{1-e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\frac{\pi}{a}x}}=\frac{2A}{\pi}\arctan\frac{e^{-\frac{\pi}{a}y}\sin\frac{\pi}{a}x}{1-e^{-\frac{\pi}{a}y}\cos\frac{\pi}{a}x}\text{。}$$

223．当层状铀块的厚度超过一定值（称为临界厚度）时，中子浓度将随时间增加而增加，以致引起铀块爆炸。这就是原子弹爆炸的基本过程。试估计层状铀块的临界厚度。假定中子浓度满足齐次的第一类边界条件。方程见 205 题。

方程（一维）：$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u$，边界条件：$u\big|_{x=0}=0$，$u\big|_{x=l}=0$。

分离变量可得本征值 $\lambda_n=D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-\alpha$（$n=1,2,\cdots$），所以 $T_n=A_n e^{-\lambda_n t}=A_n e^{\left[\alpha-D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]t}$。

当 $\alpha-D\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2>0$ 时，此函数递增。由此可得临界厚度 $l_c=\pi\sqrt{\frac{D}{\alpha}}$。

224．求解两端固定弦的阻尼振动问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2h\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$。

分离变量得 $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ T''(t)+2hT'(t)+a^2\lambda T(t)=0\end{cases}$。本征值为 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$，本征函数为 $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$（$n=1,2,\cdots$）。

$T_n(t)=e^{-ht}\left(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\right)$，其中 $\omega_n=\sqrt{\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}$（设 $h<\dfrac{\pi a}{l}$）。

则 $u(x,t)=e^{-ht}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

由 $u\big|_{t=0}=\varphi(x)$ 可得 $A_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx$，

$\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(B_n\omega_n-hA_n\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x=\psi(x)$，所以 $B_n=\dfrac{h}{\omega_n}A_n+\dfrac{2}{l\omega_n}\int_0^l\psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx$。

225．一个均匀的，各向同性的弹性方形膜，$0\le x\le l$，$0\le y\le l$，四周夹紧。初始形状为 $Axy(l-x)(l-y)$，初速度为 0，求解膜的横振动。

定解问题为 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=0\\ u\big|_{y=0}=0,u\big|_{y=l}=0\\ u\big|_{t=0}=Axy(l-x)(l-y),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。设 $u(x,y,t)=X(x)w(y,t)$，则

$\dfrac{X''}{X}=\dfrac{1}{w}\left(\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-\lambda$。即 $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ \left(\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\lambda w=0\end{cases}$。

设 $w(x,y)=Y(y)T(t)$，则 $\dfrac{Y''}{Y}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''}{T}+\lambda=-\mu$，

所以$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ Y''+\mu Y=0 \\ T''+a^2(\lambda+\mu)T=0 \end{cases}$。

可得$\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$，$X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$（$n=1,2,\cdots$）。

$\mu_m=\left(\dfrac{m\pi}{l}\right)^2$，$Y_m(y)=\sin\dfrac{m\pi}{l}y$（$m=1,2,\cdots$）。

$T_{mn}(t)=A_{mn}\sin\omega_{mn}t+B_{mn}\cos\omega_{mn}t$，其中$\omega_{mn}=\sqrt{n^2+m^2}\dfrac{\pi a}{l}$。

$u(x,y,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(A_{mn}\sin\omega_{mn}t+B_{mn}\cos\omega_{mn}t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\sin\dfrac{m\pi}{l}y$。

由$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$可得$A_{mn}=0$。

由$u\big|_{t=0}=Axy(l-x)(l-y)$得

$$B_{mn}=\frac{4A}{l^2}\int_0^l y(l-y)\sin\frac{m\pi}{l}xdy\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{16Al^4}{\pi^6m^2n^2}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right],$$

$B_{2j,2i}=0$，$B_{2j+1,2i}=0$，$B_{2j,2i+1}=0$，$B_{2j+1,2i+1}=\dfrac{64Al^4}{\pi^6(2i+1)^2(2j+1)^2}$。

所以

$$u(x,y,t)=\frac{64Al^4}{\pi^6}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2(2j+1)^2}\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}x\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}y\cos\omega_{2j+1,2i+1}t。$$

226．一个均匀的，各向同性的弹性方形膜，$0\le x\le l$，$0\le y\le l$，四周夹紧。若初始时在中心附近受到敲击，使得$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0,\dfrac{l}{2}-\delta<x<\dfrac{l}{2}+\delta,\dfrac{l}{2}-\delta<y<\dfrac{l}{2}+\delta \\ 0,\text{others} \end{cases}$，而初位移为 0。求解膜的横振动。

同上题有$u(x,y,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(A_{mn}\sin\omega_{mn}t+B_{mn}\cos\omega_{mn}t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\sin\dfrac{m\pi}{l}y$，

其中$\omega_{mn}=\sqrt{n^2+m^2}\dfrac{\pi a}{l}$。

由$u\big|_{t=0}=0$有$B_{mn}=0$。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\omega_{mn}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{m\pi}{l}y=\begin{cases}v_0,\frac{l}{2}-\delta<x<\frac{l}{2}+\delta,\frac{l}{2}-\delta<y<\frac{l}{2}+\delta\\ 0,\text{others}\end{cases}。$$

所以$A_{mn}=\dfrac{4v_0}{l^2\omega_{mn}}\displaystyle\int_{l/2-\delta}^{l/2+\delta}\sin\frac{n\pi}{l}xdx\int_{l/2-\delta}^{l/2+\delta}\sin\frac{m\pi}{l}xdx$

$$=\frac{16v_0}{mn\pi^2\omega_{mn}}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{m\pi\delta}{l}。$$

$A_{2j,2i}=A_{2j+1,2i}=A_{2j,2i+1}=0$，

$$A_{2j+1,2i+1}=\frac{(-1)^{i+j}16v_0}{(2i+1)(2j+1)\pi^2\omega_{2j+1,2i+1}}\sin\frac{(2i+1)\pi\delta}{l}\sin\frac{(2j+1)\pi\delta}{l}。$$

所以$u(x,y,t)=\dfrac{16v_0}{\pi^2}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1)\omega_{2j+1,2i+1}}\sin\frac{(2i+1)\pi\delta}{l}\sin\frac{(2j+1)\pi\delta}{l}$

$$\cdot\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}x\sin\frac{(2j+1)\pi}{l}y\sin\omega_{2j+1,2i+1}t$$

227．均匀，各向同性的弹性方膜，$0\le x\le l$，$0\le y\le l$，四周夹紧。若初始时在中心附近受到敲击，使中心点得到冲量I，而初位移为 0，试求解膜的横振动。

同 217 题，$v_0=\dfrac{I}{4\rho\delta^2}$，其中$\rho$为面密度。

$$u(x,y,t)=\frac{4I}{\pi^2\rho}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1)\omega_{2j+1,2i+1}}\lim_{\delta\to0}\frac{\sin\frac{(2i+1)\pi\delta}{l}}{\delta}\lim_{\delta\to0}\frac{\sin\frac{(2j+1)\pi\delta}{l}}{\delta}$$

$$\cdot\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}x\sin\frac{(2j+1)\pi}{l}y\sin\omega_{2j+1,2i+1}t$$

$$=\frac{4I}{\rho l^2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{\omega_{2j+1,2i+1}}\sin\frac{(2i+1)\pi}{l}x\sin\frac{(2j+1)\pi}{l}y\sin\omega_{2j+1,2i+1}t。$$

228．一长为l的均匀园杆作微小扭转振动。在振动过程中，杆的各横截面仍保持为平面而

绕杆轴扭转，轴向上不发生位移。杆的一端固定，另一端连接在圆盘上，则偏转角θ所满足的方程和边界条件为$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0\\ \theta\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\Big|_{x=l}=-c^2\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=l}\end{cases}$，$a$和$c$均为实常数。

（1）求相应的本征值λ_n及本征函数$X_n(x)$；（2）计算积分$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx$；

（3）计算积分$\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx$。

（1）设$\theta(x,t)=X(x)T(t)$，则$\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$，

$\theta\big|_{x=0}=X(0)T(t)=0$，所以$X(0)=0$。

$\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\Big|_{x=l}=X(l)T''(t)=-c^2\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=l}=-c^2X'(l)T(t)$，所以

$X'(l)=-\dfrac{1}{c^2}X(l)\dfrac{T''(t)}{T(t)}=\dfrac{a^2}{c^2}\lambda X(l)$。

即本征值问题为$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=0,X'(l)=\dfrac{a^2}{c^2}\lambda X(l)\end{cases}$。

$$\lambda\int_0^l X^2(x)dx=-\int_0^l X''(x)X(x)dx=-X'(x)X(x)\Big|_0^l+\int_0^l X'^2(x)dx$$

$$=-X'(l)X(l)+\int_0^l X'^2(x)dx=-\frac{a^2}{c^2}\lambda X^2(l)+\int_0^l X'^2(x)dx,$$

所以$\lambda=\dfrac{\int_0^l X'^2(x)dx}{\int_0^l X^2(x)dx+\dfrac{a^2}{c^2}X^2(l)}\geq 0$（$X(x)$非恒零），若$X'(x)=0$，即$X(x)=C$（常数），由$X(0)=0$知$X(x)=0$，所以一定有$\lambda>0$。

解得本征值λ_n为方程$\sqrt{\lambda}\tan\sqrt{\lambda}l=\dfrac{c^2}{a^2}$的第$n$个正根，本征函数$X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$。

（2）设λ_n，λ_m分别对应$X_n(x)$，$X_m(x)$（$n\neq m$），即

$\lambda_n X_n(x)=-X_n''(x)$，$\lambda_m X_m(x)=-X_m''(x)$。

第一式两边同乘$X_m(x)$减去第二式两边同乘$X_n(x)$，再两边积分得

$$\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=\int_0^l\left[X_n(x)X_m''(x)-X_n''(x)X_m(x)\right]dx$$

$$=X_n(l)X_m'(l)-X_n'(l)X_m(l)=\frac{a^2}{c^2}\left(\lambda_m-\lambda_n\right)X_n(l)X_m(l),$$

由于$\lambda_n\neq\lambda_m$，所以$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=-\frac{a^2}{c^2}X_n(l)X_m(l)=-\frac{a^2}{c^2}\sin\sqrt{\lambda_n}l\sin\sqrt{\lambda_m}l$

当$n=m$时，$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=\int_0^l\sin^2\sqrt{\lambda_n}xdx=\frac{l}{2}-\frac{1}{2}\int_0^l\cos 2\sqrt{\lambda_n}xdx$

$$=\frac{l}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin 2\sqrt{\lambda_n}l=\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\frac{\tan\sqrt{\lambda_n}l}{1+\tan^2\sqrt{\lambda_n}l}=\frac{l}{2}-\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\frac{a}{c}\right)^4\lambda_n+1\right]}。$$

（3）$\lambda_n\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=-\int_0^l X_n''(x)X_m(x)dx$

$$=-X_n'(l)X_m(l)+\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx,$$

所以$\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx=X_n'(l)X_m(l)+\lambda_n\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx$

$$=\lambda_n\left[\frac{a^2}{c^2}X_n(l)X_m(l)+\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx\right]。$$

$n\neq m$时由于$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=-\frac{a^2}{c^2}X_n(l)X_m(l)$，所以$\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx=0$。

$n=m$时，$\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)dx=\lambda_n\int_0^l\cos^2\sqrt{\lambda_n}xdx=\lambda_n\left[\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\int_0^l\cos 2\sqrt{\lambda_n}xdx\right]$

$$=\lambda_n\left\{\frac{l}{2}+\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\frac{a}{c}\right)^4\lambda_n+1\right]}\right\}。$$

229．求解枢轴的扭转振动问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l} = -c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

由上题，$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin a\sqrt{\lambda_n} t + B_n \cos a\sqrt{\lambda_n} t \right) \sin\sqrt{\lambda_n} x$。

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin a\sqrt{\lambda_n} t + B_n \cos a\sqrt{\lambda_n} t \right) X_n'(x)$（假设可逐项微分）。

初始条件写为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{t=0} = \varphi'(x), \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\bigg|_{t=0} = \psi'(x)$。

根据 $\left\{ X_n'(x) \right\}$ 的正交性，可由初始条件定出系数 A_n, B_n。

$$B_n = \frac{1}{\lambda_n N_n} \int_0^l \varphi'(x) X_n'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} N_n} \int_0^l \varphi'(x) \cos\sqrt{\lambda_n} x dx,$$

$$A_n = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\lambda_n N_n} \int_0^l \psi'(x) X_n'(x) dx = \frac{1}{a\lambda_n N_n} \int_0^l \psi'(x) \cos\sqrt{\lambda_n} x dx。$$

其中 $N_n = \dfrac{l}{2} + \dfrac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^4 \lambda_n + 1\right]}$。

230．求解下列定解问题：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

分离变量得 $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\dfrac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\lambda$。

本征值问题$\begin{cases} X^{(4)}(x)-\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0, X(l)=0, X''(0)=0, X''(l)=0 \end{cases}$。

$$\lambda\int_0^l X^2(x)dx=\int_0^l X^{(4)}(x)X(x)dx=X'''(x)X(x)\Big|_0^l-\int_0^l X^{(3)}(x)X'(x)dx$$

$$=-X''(x)X'(x)\Big|_0^l+\int_0^l X''^2(x)dx=\int_0^l X''^2(x)dx,$$

所以$\lambda=\dfrac{\int_0^l X''^2(x)dx}{\int_0^l X^2(x)dx}>0$。

X 的通解为 $X(x)=C_1\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}x+C_2\operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda}x+C_3\sin\sqrt[4]{\lambda}x+C_4\cos\sqrt[4]{\lambda}x$，

由 $X(0)=0, X''(0)=0$ 可得 $C_2=C_4=0$，再由 $X(l)=0, X''(l)=0$ 可得

$\begin{cases} C_1\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l+C_3\sin\sqrt[4]{\lambda}l=0 \\ C_1\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l-C_3\sin\sqrt[4]{\lambda}l=0 \end{cases}$，两式相加得 $C_1\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l=0$，因为 $\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l\neq 0$（$\lambda>0$），所以 $C_1=0$。两式相减得 $C_3\sin\sqrt[4]{\lambda}l=0$，可得本征值 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4$（$n=1,2,\cdots$），

本征函数 $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

所以 $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 at+B_n\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 at\right]\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

由初始条件可得 $A_n=\dfrac{2l}{n^2\pi^2 a}\int_0^l\psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx$，$B_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx$。

231．在矩形区域 $0<x<a$，$-\dfrac{b}{2}<y<\dfrac{b}{2}$ 上求解：（1）$\nabla^2 u=-2$，（2）$\nabla^2 u=-x^2y$，而 u 在边界上数值为 0。

（1）可设方程的一个特解为 $v(x)$，则 $v''(x)=-2$，使之满足齐次边界条件可解得

$v=x(a-x)$，令 $u=v+w$，则$\begin{cases} \nabla^2 w=0 \\ w\big|_{x=0}=0, w\big|_{x=a}=0 \\ w\big|_{y=-b/2}=-x(a-x), w\big|_{y=b/2}=-x(a-x) \end{cases}$。

可得 $w=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y+B_n\operatorname{ch}\dfrac{n\pi}{a}y\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x$，

由 y 的边界条件可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=-x(a-x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{sh}\frac{n\pi b}{2a}+B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=-x(a-x)。$$

两式相减可得 $A_n=0$，两式相加可得

$$B_n=\frac{2}{a\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\int_0^a x(x-a)\sin\frac{n\pi}{a}xdx=\frac{4a^2}{n^3\pi^3\operatorname{ch}\frac{n\pi b}{2a}}\left[(-1)^n-1\right],$$

$$B_{2k}=0,\quad B_{2k+1}=-\frac{8a^2}{(2k+1)^3\pi^3\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}。$$

所以 $w(x,t)=-\dfrac{8a^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{a}y\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x$,

$$\begin{aligned}u(x,t)&=x(a-x)+w(x,t)\\&=x(a-x)-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{a}y\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x。\end{aligned}$$

（2）将非齐次项 $-x^2y$ 按 x 的本征函数展开，即 $-x^2y=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}g_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x$,

可得 $g_n(y)=-\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a x^2y\sin\frac{n\pi}{a}xdx=\frac{2a^2}{n\pi}\left\{(-1)^n+\frac{2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\right\}y$,

设 $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x$，代入方程得

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x+\sum_{n=1}^{\infty}Y_n''(y)\sin\frac{n\pi}{a}x=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

所以 $\begin{cases}Y_n''(y)-\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2Y_n(y)=g_n(y)\\ Y_n\left(-\dfrac{b}{2}\right)=0,Y_n\left(\dfrac{b}{2}\right)=0\end{cases}$。

解得$Y_n(y)=\dfrac{2a^4}{n^3\pi^3}\left\{(-1)^n+\dfrac{2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\right\}\left(\dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}}-y\right)$。

所以$u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_n(y)\sin\dfrac{n\pi}{a}x=\dfrac{2a^4}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\left(\dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}}-y\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x$

$$+\frac{4a^4}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[1-(-1)^n\right]\left(\frac{b}{2}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}}-y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x。$$

后一项n只取奇数，则

$$u(x,y)=\frac{2a^4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\left(\frac{b}{2}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{2a}}-y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$+\frac{8a^4}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\left[\frac{b}{2}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{2a}}-y\right]\sin\frac{(2n+1)\pi}{a}x。$$

232．求解：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=bx(l-x)\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=0\\ u\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

设方程一个特解为$v(x)$，则$v''=-\dfrac{b}{a^2}x(l-x)$，使之满足齐次边界条件，解之得$v=\dfrac{b}{12a^2}x\left(x^3-2lx^2+l^3\right)$。设$u=v+w$，则$w$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\ w\big|_{x=0}=0,w\big|_{x=l}=0\\ w\big|_{t=0}=-\dfrac{b}{12a^2}x\left(x^3-2lx^2+l^3\right),\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}。$$

$w(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\dfrac{n\pi}{l}at+B_n\cos\dfrac{n\pi}{l}at\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$，

$A_n=0$，$B_n=-\dfrac{b}{6a^2l}\int_0^l x\left(x^3-2lx^2+l^3\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{4l^4b}{n^5\pi^5a^2}\left[\left(-1\right)^n-1\right]$，

所以$u\left(x,t\right)=\dfrac{b}{12a^2}x\left(x^3-2lx^2+l^3\right)$

$$-\frac{8l^4b}{\pi^5a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^5}\cos\frac{\left(2k+1\right)\pi}{l}at\sin\frac{\left(2k+1\right)\pi}{l}x\text{。}$$

233．解第 202 题。$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\dfrac{P}{E}\\ u\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$

设$v=\dfrac{P}{E}x$，令$u=v+w$，则$\begin{cases}\dfrac{\partial^2w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2w}{\partial x^2}=0\\ w\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=l}=0\\ w\big|_{t=0}=-\dfrac{P}{E}x,\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

可得$w\left(x,t\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t+B_n\cos\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x$。

由$\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$可得$A_n=0$。

由$w\big|_{t=0}=-\dfrac{P}{E}x$可得$B_n=-\dfrac{2P}{El}\int_0^l x\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi xdx=-\dfrac{8Pl\left(-1\right)^2}{\left(2n+1\right)^2\pi^2E}$。

所以$u\left(x,t\right)=\dfrac{P}{E}x-\dfrac{8Pl}{\pi^2E}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)^2}\cos\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x$。

234．一细长杆，$x=0$端固定，$x=l$端受周期力$A\sin\omega t$作用。求解此杆的纵振动，设初位移及初速度均为 0。

见 206 题，该定解问题为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \dfrac{A}{ES}\sin\omega t \\ u\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \end{cases}$$ 。

设 $v(x,t) = f(x)\sin\omega t$ 满足方程和边界条件，则 $\begin{cases} f''(x) + \dfrac{\omega^2}{a^2} f(x) = 0 \\ f(0) = 0, f'(l) = \dfrac{A}{ES} \end{cases}$，解之得

$v(x,t) = \dfrac{Aa}{ES\omega} \dfrac{\sin\dfrac{\omega}{a}x}{\cos\dfrac{\omega}{a}l} \sin\omega t$ 。

令 $u = v + w$，则 w 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ w\big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0 \\ w\big|_{t=0} = 0, \dfrac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\dfrac{Aa}{ES\cos\dfrac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}x \end{cases}$ 。

可得 $w = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_n \sin\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t + B_n \cos\dfrac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x$，

$B_n = 0$，

$$A_n = -\frac{4A}{\pi ES(2n+1)\cos\dfrac{\omega}{a}l}\int_0^l \sin\frac{\omega}{a}x\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x dx$$

$$= \frac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos\dfrac{\omega}{a}l}\int_0^l\left[\cos\left(\frac{\omega}{a}+\frac{2n+1}{2l}\pi\right)x - \cos\left(\frac{\omega}{a}-\frac{2n+1}{2l}\pi\right)x\right]dx$$

$$= \frac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos\dfrac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^n}{\dfrac{\omega}{a}+\dfrac{2n+1}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l - \int_0^l \cos\left(\frac{\omega}{a}-\frac{2n+1}{2l}\pi\right)x dx\right]$$ 。

若不存在正整数 m，使得 $\dfrac{\omega}{a} = \dfrac{2m+1}{2l}\pi$，则

$$A_n=\frac{2A}{\pi ES(2n+1)\cos\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^n}{\frac{\omega}{a}+\frac{2n+1}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l+\frac{(-1)^n}{\frac{\omega}{a}-\frac{2n+1}{2l}\pi}\cos\frac{\omega}{a}l\right]$$

$$=\frac{4A\omega}{\pi ESa(2n+1)}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}。$$

所以$u(x,t)=\frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t$

$$+\frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x。$$

若存在正整数m，使得$\frac{\omega}{a}=\frac{2m+1}{2l}\pi$，则当$n\neq m$时，仍有

$$A_n=\frac{4A\omega}{\pi ESa(2n+1)}\frac{(-1)^n}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2},$$

当$n=m$时，$A_m=\frac{Aa}{ESl\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^m a}{2\omega}\cos\frac{\omega}{a}l-l\right]$,

所以$u(x,t)=\frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t+A_m\sin\omega t\sin\frac{\omega}{a}x+\sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}A_n\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$

$$=\frac{Aa}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t+\frac{Aa}{ESl\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\left[\frac{(-1)^m a}{2\omega}\cos\frac{\omega}{a}l-l\right]\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t$$

$$+\frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

$$=\frac{(-1)^m Aa^2}{2ESl\omega^2}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t$$

$$+\frac{4A\omega}{\pi ESa}\sum_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\text{。}$$

235．求下列定解问题之解：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x=0}=\cos\dfrac{\pi}{l}at,\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0\\ u\big|_{t=0}=\cos\dfrac{\pi}{l}x,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi}{2l}x\end{cases}$。

设$v(x,t)=f(x)\cos\frac{\pi}{l}at$满足方程和边界条件，解得$v(x,t)=\cos\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi}{l}at$。

令$u=v+w$，则$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\ w\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=l}=0\\ w\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi}{2l}x\end{cases}$。

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{2n+1}{2l}a\pi t+B_n\cos\frac{2n+1}{2l}a\pi t\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x,$$

$B_n=0$，$A_n=\frac{4}{(2n+1)a\pi}\int_0^l\sin\frac{1}{2l}\pi x\sin\frac{2n+1}{2l}\pi xdx$。

$A_0=\frac{2l}{a\pi}$，$A_n=0$（$n=1,2,\cdots$）。

所以$u(x,t)=\cos\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi}{l}at+\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{\pi}{2l}at\sin\frac{\pi}{2l}x$。

236．求解下列定解问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x=0}=Ae^{-\alpha^2\kappa t},u\big|_{x=l}=Be^{-\beta^2\kappa t}\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases}$

设$v(x,t)=Af(x)e^{-\alpha^2\kappa t}+Bg(x)e^{-\beta^2\kappa t}$满足方程和边界条件，解得

$$v(x,t)=A\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2\kappa t}+B\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2\kappa t}\text{。}$$

令 $u=v+w$，则 $\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\ w\big|_{x=0}=0, w\big|_{x=l}=0\\ w\big|_{t=0}=-A\dfrac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}-B\dfrac{\sin\beta x}{\sin\beta l}\end{cases}$。

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}xe^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t},$$

$$C_n=-\frac{2A}{l\sin\alpha l}\int_0^l\sin\alpha(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx-\frac{2B}{l\sin\beta l}\int_0^l\sin\beta x\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=-\frac{2A}{l}\int_0^l\cos\alpha x\sin\frac{n\pi}{l}xdx+\frac{2A}{l}\cot\alpha l\int_0^l\sin\alpha x\sin\frac{n\pi}{l}xdx-\frac{2B}{l\sin\beta l}\int_0^l\sin\beta x\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$=-\frac{2An\pi}{(n\pi)^2-(\alpha l)^2}\left[1-(-1)^n\cos\alpha l\right]-\frac{2An\pi(-1)^n}{(n\pi)^2-(\alpha l)^2}\cos\alpha l+\frac{2(-1)^n n\pi B}{(n\pi)^2-(\beta l)^2}$$

$$=-\frac{2An\pi}{(n\pi)^2-(\alpha l)^2}+\frac{2(-1)^n n\pi B}{(n\pi)^2-(\beta l)^2}\text{。}$$

上面假设不存在正整数 n,m，使 $n\pi=\alpha l$， $m\pi=\beta l$。

$$u(x,t)=A\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2\kappa t}+B\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2\kappa t}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\left[\frac{A}{(n\pi)^2-(\alpha l)^2}-\frac{(-1)^n B}{(n\pi)^2-(\beta l)^2}\right]\sin\frac{n\pi}{l}xe^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\text{。}$$

237．求解矩形区域内的第一类边值问题：$\begin{cases}\nabla^2 u=0\\ u\big|_{x=0}=\varphi_1(y), u\big|_{x=a}=\varphi_2(y)\\ u\big|_{y=0}=\psi_1(x), u\big|_{y=b}=\psi_2(x)\end{cases}$。

设 $u=v+w$，其中 v,w 分别满足

$$\begin{cases}\nabla^2 v=0\\ v\big|_{x=0}=0, v\big|_{x=a}=0\\ v\big|_{y=0}=\psi_1(x), v\big|_{y=b}=\psi_2(x)\end{cases},\quad \begin{cases}\nabla^2 w=0\\ w\big|_{x=0}=\varphi_1(y), w\big|_{x=a}=\varphi_2(y)\\ w\big|_{y=0}=0, w\big|_{y=b}=0\end{cases}。$$

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y+B_n\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

$$B_n=\frac{2}{a}\int_0^a\psi_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}xdx,$$

$$A_n=-B_n\coth\frac{n\pi b}{a}+\frac{2}{a\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a\psi_2(x)\sin\frac{n\pi}{a}xdx。$$

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}x+D_n\operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

$$D_n=\frac{2}{b}\int_0^b\varphi_1(y)\sin\frac{n\pi}{b}ydy,$$

$$C_n=-D_n\coth\frac{n\pi a}{b}+\frac{2}{b\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}\int_0^b\varphi_2(y)\sin\frac{n\pi}{a}ydy。$$

238．求矩形区域 $0\le x\le a$， $0\le y\le b$ 内满足边界条件 $\begin{cases}u\big|_{x=0}=Ay(b-y), u\big|_{x=a}=0\\ u\big|_{y=0}=B\sin\frac{\pi}{a}x, u\big|_{y=b}=0\end{cases}$ 的调和函数。

由上题结论，$B_n=\frac{2B}{a}\int_0^a\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}xdx$， $B_1=B$， $B_n=0$（$n=1,2,\cdots$）。

$A_n=-B_n\coth\frac{n\pi b}{a}$， $A_1=-B\coth\frac{\pi b}{a}$， $A_n=0$（$n=1,2,\cdots$）。

$D_n=\frac{2A}{b}\int_0^b y(b-y)\sin\frac{n\pi}{b}ydy=\frac{4Ab^2}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right]$， $D_{2k}=0$， $D_{2k+1}=\frac{8Ab^2}{(2k+1)^3\pi^3}$。

$C_n=-D_n\coth\frac{n\pi a}{b}$， $C_{2k}=0$， $C_{2k+1}=-\frac{8Ab^2}{(2k+1)^3\pi^3}\coth\frac{(2k+1)\pi a}{b}$

所以 $u(x,t)=B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x$

$$+\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3\operatorname{sh}(2k+1)\pi a/b}\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{b}(a-x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{b}y。$$

239．求解 204 题 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=u_0\\ u\big|_{t=0}=\dfrac{u_0}{l}x\end{cases}$

可得一个特解 $v(x)=-\dfrac{f}{2\kappa}x^2+\left(\dfrac{u_0}{l}+\dfrac{fl}{2\kappa}\right)x$。令 $u=v+w$，则 $\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\\ w\big|_{x=0}=0,w\big|_{x=l}=0\\ w\big|_{t=0}=\dfrac{f}{2\kappa}\left(x^2-lx\right)\end{cases}$ 。

$w=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi}{l}xe^{-\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$， $A_n=\dfrac{f}{\kappa l}\int_0^l\left(x^2-lx\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{2fl^2}{\kappa n^3\pi^3}\left[(-1)^n-1\right]$，

$A_{2k}=0$， $A_{2k+1}=-\dfrac{4fl^2}{\kappa(2k+1)^3\pi^3}$。

所以 $u(x,t)=-\dfrac{f}{2\kappa}x^2+\left(\dfrac{u_0}{l}+\dfrac{fl}{2\kappa}\right)x-\dfrac{4fl^2}{\kappa\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^3}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{l}xe^{-\kappa\left(\frac{2k+1}{l}\pi\right)^2 t}$ 。

240．竖直悬挂的一弹性杆，上端（$x=0$）固定，下端（$x=l$）挂有重物。杆的单位质量上受外力 $f(x)$ 作用（沿杆方向，重力包括在内）。试讨论杆的纵振动，设初始条件为

$u\big|_{t=0}=\varphi(x)$， $\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)$。提示： $x=l$ 端的边界条件为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-c^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+g$ 。

该定解问题为 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x)\\ u\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-c^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+g\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$

令 $u=\dfrac{g}{c^2}x+v$，则 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f(x)\\ v\big|_{x=0}=0,\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-c^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l}\\ v\big|_{t=0}=\varphi(x)-\dfrac{g}{c^2}x,\dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$ 。

参考 228，229 题，$v=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$，其中 $X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$，

λ_n 为方程 $\sqrt{\lambda}\tan\sqrt{\lambda}l=\dfrac{c^2}{a^2}$ 的第 n 个正根。

令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nX_n(x)$，由 $\{X_n'(x)\}$ 的正交性可得

$$f_n=\frac{1}{\lambda_nN_n}\int_0^l f'(x)X_n'(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}N_n}\int_0^l f'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}xdx,$$

其中 $N_n=\dfrac{l}{2}+\dfrac{\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^4\lambda_n+1\right]}$。

将 $v=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$ 和 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nX_n(x)$ 代入方程得 $T_n''(t)+a^2\lambda_nT_n(t)=f_n$。　（*）

由初始条件，$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=\varphi(x)-\dfrac{g}{c^2}x$，则

$$T_n(0)=\frac{1}{\lambda_nN_n}\int_0^l\left[\varphi'(x)-\frac{g}{c^2}\right]X'(x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}N_n}\int_0^l\varphi'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}xdx-\frac{g}{\sqrt{\lambda_n}N_nc^2}\int_0^l\cos\sqrt{\lambda_n}xdx=\varphi_n-\frac{g}{\lambda_nN_nc^2}\sin\sqrt{\lambda_n}l。$$

$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=\psi(x)$，则

$$T_n'(0)=\frac{1}{\lambda_nN_n}\int_0^l\psi'(x)X'(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}N_n}\int_0^l\psi'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}xdx=\psi_n。$$

解方程（*）得

$$T_n(t)=\frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t+\left(\varphi_n-\frac{g}{\lambda_nN_nc^2}\sin\sqrt{\lambda_n}l-\frac{f_n}{a^2\lambda_n}\right)\cos a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{f_n}{a^2\lambda_n}。$$

所以 $u(x,t)=\dfrac{g}{c^2}x+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\sqrt{\lambda_n}x$。

241．求解 210 题，设初位移及初速度分别为$\varphi(x),\psi(x)$。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,x\neq\dfrac{l}{2}\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=0,u\big|_{x=l/2-0}=u\big|_{x=l/2+0},\dfrac{T}{M}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}\right)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}+g\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$ 。

令$u(x,t)=\dfrac{Mg}{2T}\left(\left|x-\dfrac{l}{2}\right|-\dfrac{l}{2}\right)+v(x,t)$，则$v(x,t)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,x\neq\dfrac{l}{2}\\ v\big|_{x=0}=0,v\big|_{x=l}=0,v\big|_{x=l/2-0}=v\big|_{x=l/2+0},\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}+c^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}=c^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}\\ v\big|_{t=0}=\varphi(x)-\dfrac{Mg}{2T}\left(\left|x-\dfrac{l}{2}\right|-\dfrac{l}{2}\right),\dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$ 。

其中$c^2=\dfrac{2T}{M}$。令$v=v_1+v_2$，v_1,v_2分别满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=0,x\neq\dfrac{l}{2}\\ v_1\big|_{x=0}=0,v_1\big|_{x=l}=0,v_1\big|_{x=l/2-0}=0,v_1\big|_{x=l/2+0}=0\\ 2\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}=c^2\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0}-\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}\right)\end{cases}$$ ，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}=0,x\neq\dfrac{l}{2}\\ v_2\big|_{x=0}=0,v_2\big|_{x=l}=0,\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}+c^2\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}=0,c^2\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0}-\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}=0\\ v_2\big|_{x=l/2-0}=v_2\big|_{x=l/2+0}\end{cases}$$ 。

可看出v_1在$[0,l/2)$和$(l/2,0]$上的本征函数都是$\sin\dfrac{2n\pi}{l}x$，由条件

$2\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=l/2}=c^2\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2+0}-\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\bigg|_{x=l/2-0}\right)$可知在$[0,l]\backslash\{l/2\}$上有

$v_1=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{2n\pi}{l}at+B_n\cos\frac{2n\pi}{l}at\right)\sin\frac{2n\pi}{l}x$。

同 228，229 题可得 v_2 在 $[0,l]\backslash\{l/2\}$ 上的本征函数为 $X_n(x)=\begin{cases}\sin\sqrt{\lambda_n}x,0\le x<l/2\\ \sin\sqrt{\lambda_n}(l-x),l/2<x\le l\end{cases}$，

其中本征值 λ_n 为方程 $\sqrt{\lambda}\tan\frac{\sqrt{\lambda}l}{2}=\frac{c^2}{a^2}$ 的正根。

由条件 $v_2\big|_{x=l/2-0}=v_2\big|_{x=l/2+0}$ 可得 $v_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\sqrt{\lambda_n}at+D_n\cos\sqrt{\lambda_n}at\right)X_n(x)$

（$x\in[0,l]\backslash\{l/2\}$）。

即 $v=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{2n\pi}{l}at+B_n\cos\frac{2n\pi}{l}at\right)\sin\frac{2n\pi}{l}x$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\sqrt{\lambda_n}at+D_n\cos\sqrt{\lambda_n}at\right)X_n(x)。$$

将初始条件写成 $\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{t=0}=\begin{cases}\varphi'(x)+\frac{Mg}{2T},0\le x<\frac{l}{2}\\ \varphi'(x)-\frac{Mg}{2T},\frac{l}{2}<x\le l\end{cases}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi'(x)$，

$$\int_0^l X_n'(x)\cos\frac{2m\pi}{l}xdx=\sqrt{\lambda_n}\int_0^{l/2}\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\frac{2m\pi}{l}xdx-\sqrt{\lambda_n}\int_{l/2}^{l}\cos\sqrt{\lambda_n}(l-x)\cos\frac{2m\pi}{l}xdx$$
$$=\sqrt{\lambda_n}\int_0^{l/2}\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\frac{2m\pi}{l}xdx-\sqrt{\lambda_n}\int_0^{l/2}\cos\sqrt{\lambda_n}y\cos\frac{2m\pi}{l}ydy=0,$$

即 $\left\{\cos\frac{2n\pi}{l}x\right\}$ 与 $\{X_n'(x)\}$ 在 $[0,l]$ 上正交。

$$\int_0^l X_n'^2(x)dx=\int_0^{l/2}X_n'^2(x)dx+\int_{l/2}^{l}X_n'^2(x)dx=2\int_0^{l/2}X_n'^2(x)dx$$

$$=\lambda_n\left[\frac{l}{2}+\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\left(\frac{a}{c}\right)^4\lambda_n+1}\right]=\lambda_n\left(\frac{l}{2}+\frac{2a^2MT}{M^2a^4\lambda_n+4T^2}\right)=\lambda_nN_n。$$

由此可定出系数：$A_n=\frac{1}{2n^2\pi^2a}\int_0^l\psi'(x)\cos\frac{2n\pi}{l}xdx$，

$B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^l\varphi'(x)\cos\frac{2n\pi}{l}xdx$，$C_n=\frac{1}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}N_na}\int_0^l\psi'(x)X_n'(x)dx$，

$$D_n = \frac{1}{\lambda_n N_n}\left[\int_0^l \varphi'(x) X_n'(x)\,dx + \frac{Mg}{T}\sin\frac{\sqrt{\lambda_n}\,l}{2}\right]。$$

242．考虑有界弦的阻尼振动，如果一端固定，另一端在外力作用下做周期运动，经过足够长时间后，初始条件的影响则因阻尼的作用而衰减殆尽，因而问题归结为求解无初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = A\cos\omega t\end{cases}$$ 的周期解，试求之。

采用复数解。设 $u(x,t) = f(x)e^{i\omega t}$，原定解问题化为 $\begin{cases} f''(x) + \left[\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2 - i\dfrac{\omega h}{a^2}\right] f(x) = 0 \\ f(0) = 0, f(l) = A\end{cases}$。

记 $\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2 - i\dfrac{\omega h}{a^2}} = \alpha - i\beta$，可解得 $u(x,t) = A\dfrac{\sin(\alpha - i\beta)x}{\sin(\alpha - i\beta)l}e^{i\omega t}$。

取实部得

$$u(x,t) = \frac{A}{\sin^2\alpha l + \mathrm{sh}^2\beta l}\Big[\left(\sin\alpha x\sin\alpha l\,\mathrm{ch}\,\beta x\,\mathrm{ch}\,\beta l + \cos\alpha x\cos\alpha l\,\mathrm{sh}\,\beta x\,\mathrm{sh}\,\beta l\right)\cos\omega t$$

$$-\left(\sin\alpha x\cos\alpha l\,\mathrm{ch}\,\beta x\,\mathrm{sh}\,\beta l - \cos\alpha x\sin\alpha l\,\mathrm{sh}\,\beta x\,\mathrm{ch}\,\beta l\right)\sin\omega t\Big]。$$

243．热传导问题也存在无初值问题。典型的例子是地表温度的日变化或年变化向地层内传播形成的温度波。把地球设想为均匀半无界空间，试求无初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\\ u\big|_{x=0} = A\cos\omega t, \left|u\big|_{x\to\infty}\right| < \infty\end{cases}$$ 的周期解。

设 $u = f(x)e^{i\omega t}$，则 $\begin{cases} f''(x) - \dfrac{i\omega}{\kappa} f(x) = 0 \\ f(0) = A, \left|f(\infty)\right| < \infty\end{cases}$。解得 $u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}(1+i)x}e^{i\omega t}$。

取实部得 $u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}x}\cos\left(\sqrt{\dfrac{\omega}{2\kappa}}x - \omega t\right)$。

244．写出下列正交曲线坐标系中的 Laplace 算子：

（1）椭圆柱坐标系$\left(\xi,\eta,z\right)$：$x=a\xi\eta$，$y=a\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}$，$z=z$；

（2）抛物线柱坐标系$\left(\lambda,\mu,z\right)$：$x=\dfrac{1}{2}\left(\lambda-\mu\right)$，$y=\sqrt{\lambda\mu}$，$z=z$；

（3）锥面坐标系$\left(r,\lambda,\mu\right)$：$x=\dfrac{r}{a}\sqrt{\left(a^2-\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)}$，$y=\dfrac{r}{b}\sqrt{\left(b^2+\lambda\right)\left(b^2-\mu\right)}$，

$z=\dfrac{r\sqrt{\lambda\mu}}{ab}$，其中$a^2+b^2=1$；

（4）椭球坐标系$\left(\lambda,\mu,\nu\right)$：$x^2=\dfrac{\left(a^2+\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)\left(a^2+\nu\right)}{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)}$，

$y^2=\dfrac{\left(b^2+\lambda\right)\left(b^2+\mu\right)\left(b^2+\nu\right)}{\left(b^2-c^2\right)\left(b^2-a^2\right)}$，$z^2=\dfrac{\left(c^2+\lambda\right)\left(c^2+\mu\right)\left(c^2+\nu\right)}{\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)}$。

（1）$dx=a\eta d\xi+a\xi d\eta$，$dy=a\dfrac{1-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\xi d\xi-a\dfrac{\xi^2-1}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\eta d\eta$，

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=a^2\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}d\xi^2+a^2\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}d\eta^2+dz^2。$$

即度规矩阵$G=\begin{pmatrix} a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1} & 0 & 0 \\ 0 & a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\sqrt{|G|}=a^2\dfrac{\xi^2-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}$。

$$d=\frac{\partial}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial}{\partial z}dz，$$

$$\begin{aligned}{}^*d&=\frac{1}{a^2}\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}\sqrt{|G|}\frac{\partial}{\partial\xi}d\eta\wedge dz+\frac{1}{a^2}\frac{1-\eta^2}{\xi^2-\eta^2}\sqrt{|G|}\frac{\partial}{\partial\eta}dz\wedge d\xi+\sqrt{|G|}\frac{\partial}{\partial z}d\xi\wedge d\eta\\&=\frac{\xi^2-1}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\frac{\partial}{\partial\xi}d\eta\wedge dz+\frac{1-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\frac{\partial}{\partial\eta}dz\wedge d\xi+\sqrt{|G|}\frac{\partial}{\partial z}d\xi\wedge d\eta，\end{aligned}$$

$$d^*d=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\frac{\xi^2-1}{1-\eta^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)d\xi\wedge d\eta\wedge dz+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)d\eta\wedge dz\wedge d\xi$$

$$+a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}}\frac{\partial}{\partial z}\right)dz\wedge d\xi\wedge d\eta$$

$$=\left[\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\sqrt{|G|}d\xi\wedge d\eta\wedge dz$$

$$\nabla^2={}^*d^*d=\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

（2）$dx=\frac{1}{2}d\lambda-\frac{1}{2}d\mu$， $dy=\frac{\mu}{2\sqrt{\lambda\mu}}d\lambda+\frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda\mu}}d\mu$，

$$ds^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)d\lambda^2+\frac{1}{4}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)d\mu^2+dz^2,$$

$$G=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}，\quad\sqrt{|G|}=\frac{\lambda+\mu}{4\sqrt{\lambda\mu}}。$$

$$d=\frac{\partial}{\partial\lambda}d\lambda+\frac{\partial}{\partial\mu}d\mu+\frac{\partial}{\partial z}dz,$$

$${}^*d=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\frac{\partial}{\partial\lambda}d\mu\wedge dz+\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\mu}dz\wedge d\lambda+\frac{\lambda+\mu}{4\sqrt{\lambda\mu}}\frac{\partial}{\partial z}d\lambda\wedge d\mu,$$

$$d^*d=\left[\frac{4\sqrt{\lambda}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)+\frac{4\sqrt{\mu}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{\lambda+\mu}{4\sqrt{\lambda\mu}}d\lambda d\mu\wedge dz,$$

$$\nabla^2=\frac{4\sqrt{\lambda}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)+\frac{4\sqrt{\mu}}{\lambda+\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

（3）$dx=\frac{1}{a}\sqrt{\left(a^2-\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)}dr-\frac{r}{2a}\sqrt{\frac{a^2+\mu}{a^2-\lambda}}d\lambda+\frac{r}{2a}\sqrt{\frac{a^2-\lambda}{a^2+\mu}}d\mu$，

$$dy=\frac{1}{b}\sqrt{\left(b^2+\lambda\right)\left(b^2-\mu\right)}dr+\frac{r}{2b}\sqrt{\frac{b^2-\mu}{b^2+\lambda}}d\lambda-\frac{r}{2b}\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{b^2-\mu}}d\lambda,$$

$$dz=\frac{\sqrt{\lambda\mu}}{ab}dr+\frac{r}{2ab}\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}d\lambda+\frac{r}{2ab}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}d\mu。$$

$$ds^2 = dr^2 + \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}d\lambda^2 + \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}d\mu^2,$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)} \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{|G|} = \frac{r^2(\lambda+\mu)}{4\sqrt{\lambda\mu(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)(a^2+\mu)(b^2-\mu)}}。$$

$$\begin{aligned} {}^*d &= \sqrt{|G|}\frac{\partial}{\partial r}d\lambda\wedge d\mu + \sqrt{\frac{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}}\frac{\partial}{\partial\lambda}d\mu\wedge dr \\ &\quad + \sqrt{\frac{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}}\frac{\partial}{\partial\mu}dr\wedge d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^*d &= \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\right\}\sqrt{|G|}dr\wedge d\lambda\wedge d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\lambda(a^2-\lambda)(b^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) \\ &\quad + \frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\mu(a^2+\mu)(b^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)。 \end{aligned}$$

（4）$dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}d\lambda + \frac{1}{a^2+\mu}d\mu + \frac{1}{a^2+\nu}d\nu\right),$

$$dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}\left(\frac{1}{b^2+\lambda}d\lambda + \frac{1}{b^2+\mu}d\mu + \frac{1}{b^2+\nu}d\nu\right),$$

$$dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\left(\frac{1}{c^2+\lambda}d\lambda + \frac{1}{c^2+\mu}d\mu + \frac{1}{c^2+\nu}d\nu\right)。$$

$$ds^2 = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4\varphi(\lambda)}d\lambda^2 + \frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4\varphi(\mu)}d\mu^2 + \frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4\varphi(\nu)}d\nu^2,$$

其中$\varphi(x)=\left(a^2+x\right)\left(b^2+x\right)\left(c^2+x\right)$。

$$\nabla^2=\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\Bigg[(\mu-\nu)\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)$$

$$+(\lambda-\nu)\sqrt{\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)+(\lambda-\mu)\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Bigg]。$$

245．在上述各坐标系中将 Laplace 方程分离变量。

（1）令$u(\xi,\eta,z)=v(\xi,\eta)Z(z)$，代入$\nabla^2u=0$得

$$\frac{Z\sqrt{\xi^2-1}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)+\frac{Z\sqrt{1-\eta^2}}{a^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+vZ''=0,$$

两边同除vZ得

$$\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{a^2v\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)+\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a^2v\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)=-\frac{Z''}{Z}=\lambda$$

所以$\begin{cases}Z''+\lambda Z=0\\ \sqrt{\xi^2-1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\dfrac{\partial v}{\partial\xi}\right)+\sqrt{1-\eta^2}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\dfrac{\partial v}{\partial\eta}\right)=a^2\lambda v\left(\xi^2-\eta^2\right)\end{cases}$，

令$v(\xi,\eta)=\Xi(\xi)\mathrm{H}(\eta)$代入上面第二式得

$$\mathrm{H}\sqrt{\xi^2-1}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{d\Xi}{d\xi}\right)+\Xi\sqrt{1-\eta^2}\frac{d}{d\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta}\right)=a^2\lambda\Xi\mathrm{H}\left(\xi^2-1+1-\eta^2\right),$$

两边同除$\Xi\mathrm{H}$得

$$\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\Xi}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{d\Xi}{d\xi}\right)-a^2\lambda\left(\xi^2-1\right)=-\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\mathrm{H}}\frac{d}{d\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{d\mathrm{H}}{d\eta}\right)+a^2\lambda\left(1-\eta^2\right)=-\mu,$$

所以$\begin{cases}Z''+\lambda Z=0\\ \sqrt{\xi^2-1}\dfrac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\dfrac{d\Xi}{d\xi}\right)+\left[\mu-a^2\lambda\left(\xi^2-1\right)\right]\Xi=0\\ \sqrt{1-\eta^2}\dfrac{d}{d\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\dfrac{d\mathrm{H}}{d\eta}\right)-\left[\mu+a^2\lambda\left(1-\eta^2\right)\right]\mathrm{H}=0\end{cases}$。

（2）令$u(\lambda,\mu,z)=\Lambda(\lambda)\mathrm{M}(\mu)Z(z)$，代入$\nabla^2u=0$得

$$\frac{4\mathrm{MZ}\sqrt{\lambda}}{\lambda+\mu}\frac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\frac{4\Lambda\mathrm{Z}\sqrt{\mu}}{\lambda+\mu}\frac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)=-\Lambda\mathrm{MZ}'',$$

两边同除 $\Lambda\mathrm{MZ}$，令它等于 σ 得

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\Lambda}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\dfrac{\sqrt{\mu}}{\mathrm{M}}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)=\sigma\left(\dfrac{\lambda}{4}+\dfrac{\mu}{4}\right)\\ Z''+\sigma Z=0\end{cases}。$$

进一步得到 $$\begin{cases}\sqrt{\lambda}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\left(\tau-\dfrac{\sigma}{4}\lambda\right)\Lambda=0\\ \sqrt{\mu}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)-\left(\tau+\dfrac{\sigma}{4}\mu\right)\mathrm{M}=0\\ Z''+\sigma Z=0\end{cases}。$$

（3）$u(r,\lambda,\mu)=R(r)\Lambda(\lambda)\mathrm{M}(\mu)$，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Lambda}\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)\\ +\dfrac{1}{\mathrm{M}}\sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)=\sigma\left(\dfrac{\lambda}{4}+\dfrac{\mu}{4}\right)\\ \dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)+\sigma R=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda\left(a^2-\lambda\right)\left(b^2+\lambda\right)}\dfrac{d\Lambda}{d\lambda}\right)+\left(\tau-\dfrac{\sigma}{4}\lambda\right)\Lambda=0\\ \sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d}{d\mu}\left(\sqrt{\mu\left(a^2+\mu\right)\left(b^2-\mu\right)}\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right)-\left(\tau+\dfrac{\sigma}{4}\mu\right)\mathrm{M}=0\\ \dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)+\sigma R=0\end{cases}$$

（4）$u(\lambda,\mu,\nu)=\Lambda(\lambda)\mathrm{M}(\mu)\mathrm{N}(\nu)$，记 $L_\sigma(\Sigma)=\sqrt{\varphi(\sigma)}\dfrac{d}{d\sigma}\left(\sqrt{\varphi(\sigma)}\dfrac{d\Sigma}{d\sigma}\right)$，则

$$\frac{\mu}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)+\frac{\lambda}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})-\nu\left[\frac{1}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})+\frac{1}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)\right]=-\frac{1}{\mathrm{N}}L_\nu(\mathrm{N})$$

令 $\dfrac{\mu}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)+\dfrac{\lambda}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})=\tau$，　　　　（a）

$$\frac{1}{(\lambda-\mu)\mathrm{M}}L_\mu(\mathrm{M})+\frac{1}{(\lambda-\mu)\Lambda}L_\lambda(\Lambda)=\sigma，\qquad\text{（b）}$$

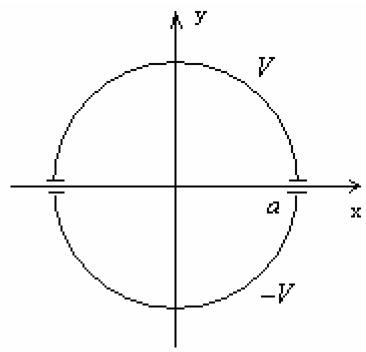
则$\tau-\sigma\nu=-\frac{1}{\mathrm{N}}L_\nu(\mathrm{N})$。

（a）$-\lambda\times$（b）得$-\frac{L_\lambda(\Lambda)}{\Lambda}=\tau-\sigma\lambda$，

（a）$-\mu\times$（b）得$\frac{L_\mu(\mathrm{M})}{\mathrm{M}}=\tau-\sigma\mu$。

即$\begin{cases}L_\lambda(\Lambda)+(\tau-\sigma\lambda)\Lambda=0\\ L_\mu(\mathrm{M})+(-\tau+\sigma\mu)\mathrm{M}=0\\ L_\nu(\mathrm{N})+(\tau-\sigma\nu)\mathrm{N}=0\end{cases}$。

246．一无穷长空心圆柱导体，分成两半，互相绝缘。一半电势为V，另一半为$-V$，求柱内电势分布。



在极坐标系下令$u(\rho,\varphi)=\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi)$对 Laplace 方程分离变量得

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)-\lambda\mathrm{P}=0\end{cases}。$$

本征值问题$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(-\pi)=\Phi(\pi),\Phi'(-\pi)=\Phi'(\pi)\end{cases}$，

可得$\lambda=n^2$（$n=0,1,2,\cdots$），本征函数 1，$\cos n\varphi$，$\sin n\varphi$（$n=1,2,\cdots$）。

做代换$\rho=e^t$，则有$\rho\frac{d}{d\rho}=\frac{d}{dt}$，则P的方程化为$\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}-\lambda\mathrm{P}=0$。

当$\lambda=0$时，解得$\mathrm{P}_0=A+Bt=A+B\ln\rho$，

当$\lambda > 0$时，解得$\mathrm{P}_n = C_n e^{nt} + D_n e^{-nt} = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}$。

所以$u(\rho,\varphi) = A + B\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\rho^n + F_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi$。

由于$u(0,\varphi)$为有限值，所以$B=0$，$D_n=0$，$F_n=0$，即

$u(\rho,\varphi) = A + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\rho^n\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} E_n\rho^n\sin n\varphi$。

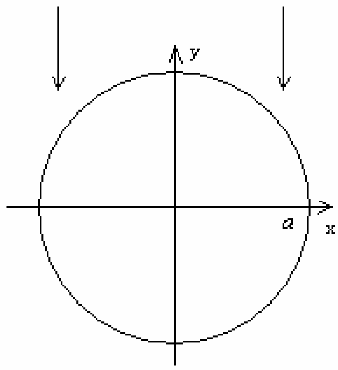
边界条件为$u(a,\varphi) = \begin{cases} -V, -\pi < \varphi < 0 \\ V, 0 < \varphi < \pi \end{cases}$。

将上面右边函数在$[-\pi,\pi]$上展开为 Fourier 级数，则$u(a,\varphi) = \dfrac{4V}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\varphi$。

由此可定出系数$A=0$，$C_n=0$，$E_{2k}=0$，$E_{2k+1} = \dfrac{4V}{\pi}\dfrac{1}{(2k+1)a^{2k+1}}$。

所以$u(\rho,\varphi) = \dfrac{4V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{2k+1}\sin(2k+1)\varphi$。

247．半径为a，表面熏黑的均匀长圆柱，平放在地上，受到阳光照射，其垂直于光线的单位面积上单位时间内吸收热量为M，同时，柱面按牛顿冷却定律向外散热，外界温度为 0。试求柱内温度分布。



类似于习题 11 第 208 题的讨论，可得该定解问题为$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + hu\right)_{\rho=a} = \begin{cases} 0, -\pi < \varphi < 0 \\ \dfrac{M}{k}\sin\varphi, 0 < \varphi < \pi \end{cases} \end{cases}$。

同上题可得$u(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\rho^n\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\rho^n\sin n\varphi$。

边界条件写成 Fourier 级数：$\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+hu\right)_{\rho=a}=\frac{M}{\pi k}+\frac{M}{2k}\sin\varphi-\frac{2M}{\pi k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2m\varphi$。

即 $A_0h+\sum_{n=1}^{\infty}A_na^n\left(\frac{n}{a}+h\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}B_na^n\left(\frac{n}{a}+h\right)\sin n\varphi$

$$=\frac{M}{\pi k}+\frac{M}{2k}\sin\varphi-\frac{2M}{\pi k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2m\varphi,$$

可 得 $A_0=\frac{M}{\pi hk}$ ， $A_{2m+1}=0$ （ $m=0,1,2,\cdots$ ）， $A_{2m}=-\frac{2M}{\pi k}\frac{1}{a^{2m}\left(\frac{2m}{a}+h\right)}\frac{1}{4m^2-1}$

（$m=1,2,\cdots$），$B_1=\frac{M}{2k}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+h\right)a}$， $B_n=0$（$n=2,3,\cdots$）。

所以 $u(\rho,\varphi)=\frac{M}{\pi hk}+\frac{M}{2k\left(\frac{1}{a}+h\right)}\frac{\rho}{a}\sin\varphi-\frac{2M}{\pi k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{2m}{a}+h\right)\left(4m^2-1\right)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m}\cos 2m\varphi$。

248．求环形区域 $a\le\rho\le b$ 内满足边界条件 $u\big|_{\rho=a}=f(\varphi)$， $u\big|_{\rho=b}=g(\varphi)$ 的调和函数。

$u(\rho,\varphi)=A+B\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\rho^n+F_n\rho^{-n}\right)\sin n\varphi$。

令 $f(\varphi)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_{sn}\sin n\varphi+f_{cn}\cos n\varphi$， $g(\varphi)=g_0+\sum_{n=1}^{\infty}g_{sn}\sin n\varphi+g_{cn}\cos n\varphi$，则

$A+B\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_na^n+D_na^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_na^n+F_na^{-n}\right)\sin n\varphi$

$$=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_{sn}\sin n\varphi+f_{cn}\cos n\varphi,$$

$A+B\ln b+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_nb^n+D_nb^{-n}\right)\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_nb^n+F_nb^{-n}\right)\sin n\varphi$

$$=g_0+\sum_{n=1}^{\infty}g_{sn}\sin n\varphi+g_{cn}\cos n\varphi。$$

比较系数得 $A=\dfrac{f_0\ln b-g_0\ln a}{\ln b-\ln a}$， $B=\dfrac{g_0-f_0}{\ln b-\ln a}$， $C_n=\dfrac{g_{cn}a^{-n}-f_{cn}b^{-n}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$，

$D_n=\dfrac{f_{cn}b^n-g_{cn}a^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$， $E_n=\dfrac{g_{sn}a^{-n}-f_{sn}b^{-n}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$， $F_n=\dfrac{f_{sn}b^n-g_{sn}a^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$。

所以
$$u(\rho,\varphi)=\frac{g_0\ln\dfrac{\rho}{a}+f_0\ln\dfrac{b}{\rho}}{\ln b-\ln a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}g_{cn}+\frac{\left(\dfrac{b}{\rho}\right)^n-\left(\dfrac{\rho}{b}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}f_{cn}\right]\cos n\varphi$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}g_{sn}+\frac{\left(\dfrac{b}{\rho}\right)^n-\left(\dfrac{\rho}{b}\right)^n}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^n-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}f_{sn}\right]\sin n\varphi\text{。}$$

249．求扇形区域 $0\le\rho\le a$， $0\le\varphi\le\alpha$ 内的稳定温度分布。设区域内无热源，在扇形的直边上温度为 0，而在弧形边界上温度为 $f(\varphi)$。

可得本征值问题 $\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(0)=0,\Phi(\alpha)=0\end{cases}$，本征值 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\right)^2$，本征函数 $\Phi_n(\varphi)=\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi$

（$n=1,2,\cdots$），$\mathrm{P}(\rho)=A_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n\rho^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$，所以 $u(\rho,\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi$。

$u(a,\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_na^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi=f(\varphi)$，则 $A_n=\dfrac{2}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}f(\varphi)\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi d\varphi$，

$u(\rho,\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n'\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi$，其中 $A_n'=\dfrac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\varphi)\sin\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi d\varphi$。

250．讨论上题中 $f(\varphi)=A$（常数）且 $\alpha=2\pi$ 的情况，证明沿正实轴：

（1）当 $\varphi\to0$ 及 $\varphi\to2\pi$ 时温度分布连续；

（2）当 $\varphi\to0$ 及 $\varphi\to2\pi$ 时温度梯度 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$ 不连续。

$A_n' = \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\frac{n}{2}\varphi d\varphi = \frac{2A}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]$，$A_{2k}'=0$，$A_{2k+1}'=\frac{4A}{\pi n}$，

$u(\rho,\varphi)=\frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2k+1}{2}}\sin\frac{2k+1}{2}\varphi$。

当 $\varphi\to 0$ 及 $\varphi\to 2\pi$ 时都有 $u(\rho,\varphi)\to 0$，即温度连续。

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{2A}{\pi\sqrt{a\rho}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^k\cos\frac{2k+1}{2}\varphi$，

$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\frac{1}{a-\rho}$，$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=2\pi}=-\frac{2A}{\pi}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\frac{1}{a-\rho}$，即温度梯度不连续。

251．在圆域 $0\le\rho\le a$ 上求解：（1）$\begin{cases}\nabla^2 u=-4\\ u|_{\rho=a}=0\end{cases}$；（2）$\begin{cases}\nabla^2 u=-4\rho\sin\varphi\\ u|_{\rho=a}=0\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}\nabla^2 u=-4\rho^2\sin 2\varphi\\ u|_{\rho=a}=0\end{cases}$。

（1）设特解只是 ρ 的函数，可解出一个特解 $-\rho^2$。令 $u=-\rho^2+v$，则 $\begin{cases}\nabla^2 v=0\\ v|_{\rho=a}=a^2\end{cases}$。

$v=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^n\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\rho^n\sin n\varphi$，由边界条件得 $v=a^2$，所以 $u=a^2-\rho^2$。

（2）设特解具有形式 $\rho^3 f(\varphi)$，代入方程得 $f''(\varphi)+9f(\varphi)=-4\sin\varphi$，设

$f(\varphi)=A\sin\varphi$，可得一个特解 $v=-\frac{1}{2}\rho^3\sin\varphi$。

令 $u=v+w$，则 $\begin{cases}\nabla^2 w=0\\ w|_{\rho=a}=\frac{1}{2}a^3\sin\varphi\end{cases}$，$w=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^n\cos n\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\rho^n\sin n\varphi$，

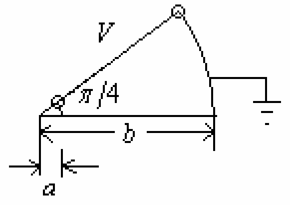
由边界条件得 $A_n=0$（$n=0,1,2,\cdots$），$B_1=\frac{1}{2}a^2$，$B_n=0$（$n=2,3,\cdots$），

即 $w=\frac{1}{2}a^2\rho\sin\varphi$，所以 $u=\frac{1}{2}\left(a^2-\rho^2\right)\rho\sin\varphi$。

（3）设特解具有形式 $\rho^4 f(\varphi)$，则 $f''(\rho)+16f(\rho)=-4\sin 2\varphi$，可得一个特解

$v=-\frac{1}{3}\rho^4\sin 2\varphi$，令 $u=v+w$，则 $\begin{cases}\nabla^2 w=0\\ w|_{\rho=a}=\frac{1}{3}a^4\sin 2\varphi\end{cases}$，可得 $u=\frac{1}{3}\left(a^2-\rho^2\right)\rho^2\sin 2\varphi$。

252．一个由理想导体做成的无穷长波导管，其截面均匀，如下图所示。管内为真空，假定一个平面（即图中一条直边）电势为V，其余面上电势为 0。试求波导管内电势分布。



定解问题为$\begin{cases}\nabla^2 u=0\\ u\big|_{\varphi=0}=0,u\big|_{\varphi=\pi/4}=V\\ u\big|_{\rho=b}=0,u\big|_{\rho=a}=0\end{cases}$。满足$\varphi$的边界条件的一个特解为$\dfrac{4V}{\pi}\varphi$，

设$u=\dfrac{4V}{\pi}\varphi+v$，则$\begin{cases}\nabla^2 v=0\\ v\big|_{\varphi=0}=0,v\big|_{\varphi=\pi/4}=0\\ v\big|_{\rho=b}=-\dfrac{4V}{\pi}\varphi,v\big|_{\rho=a}=-\dfrac{4V}{\pi}\varphi\end{cases}$，

$v=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{4n}+B_n\rho^{-4n}\right)\sin 4n\varphi$，由边界条件解得$A_n=\dfrac{2V}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{a^{-4n}-b^{-4n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{4n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{4n}}$，

$$B_n=\frac{2V}{\pi}\frac{(-1)^n}{n}\frac{b^{4n}-a^{4n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{4n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{4n}},$$

即$u=\dfrac{4V}{\pi}\varphi+\dfrac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{4n}-\left(\frac{a}{\rho}\right)^{4n}+\left(\frac{b}{\rho}\right)^{4n}-\left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{4n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{4n}}\sin 4n\varphi$。

253. 求解球内定解问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\kappa}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)=0\\ u\big|_{r=0}\text{有界},u\big|_{r=1}=Ae^{-(p\pi)^2\kappa t}\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases}$。提示：$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\equiv\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$。

先假定 p 不是整数，设特解具有形式$A\dfrac{f(r)}{r}e^{-(p\pi)^2\kappa t}$，则$\begin{cases}f''(r)+(p\pi)^2 f(r)=0\\ f(0)=0,\ f(1)=1\end{cases}$，可

得一个特解$v = A\dfrac{\sin p\pi r}{r\sin p\pi}e^{-(p\pi)^2\kappa t}$。令$u = v + w$，则$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\kappa}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(rw) = 0\\ w|_{r=0}\text{有界}, w|_{r=1} = 0\\ w|_{t=0} = -A\dfrac{\sin p\pi r}{r\sin p\pi}\end{cases}$。

分离变量可得本征值问题$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dr^2}(rR) + \dfrac{\lambda}{\kappa}(rR) = 0\\ rR|_{r=0} = 0, rR|_{r=1} = 0\end{cases}$，解得本征值$\lambda_n = \kappa(n\pi)^2$，本征函数

$R_n(r) = \dfrac{\sin n\pi r}{r}$（$n = 1, 2, \cdots$）。$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\dfrac{\sin n\pi r}{r}e^{-\kappa(n\pi)^2 t}$，由初始条件可得

$A_n = \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{(-1)^n n}{n^2 - p^2}$，所以$u = A\dfrac{\sin p\pi r}{r\sin p\pi}e^{-(p\pi)^2\kappa t} + \dfrac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2 - p^2}\dfrac{\sin n\pi r}{r}e^{-(n\pi)^2\kappa t}$。

若p是整数（$= m$），u写成

$$u = \frac{A}{r}\lim_{p\to m}\left[\frac{\sin p\pi r}{\sin p\pi}e^{-(p\pi)^2\kappa t} + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^m m\sin m\pi r}{m^2 - p^2}e^{-(m\pi)^2\kappa t}\right]$$

$$+\frac{2A}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2 - m^2}\frac{\sin n\pi r}{r}e^{-(n\pi)^2\kappa t}$$

上面的极限式

$$= \lim_{p\to m}\frac{\left[\pi\sin p\pi r(m+p)e^{-(p\pi)^2\kappa t} - 2(-1)^m m\sin m\pi r\dfrac{\sin p\pi}{p-m}e^{-(m\pi)^2\kappa t}\right]\Big/(p-m)}{\pi\dfrac{\sin p\pi}{p-m}(m+p)}$$

$$= \frac{\dfrac{d}{dp}\left[\pi\sin p\pi r(m+p)e^{-(p\pi)^2\kappa t}\right]_{p=m}}{\pi(m+p)\dfrac{d}{dp}\sin p\pi\Big|_{p=m}}$$

$$= (-1)^m\left(\frac{\sin m\pi r}{2m\pi} + r\cos m\pi r - 2m\pi\kappa t\sin m\pi r\right)e^{-(m\pi)^2\kappa t},$$

所以$u = (-1)^m A\left(\dfrac{\sin m\pi r}{2m\pi r} + \cos m\pi r - \dfrac{2m\pi\kappa t\sin m\pi r}{r}\right)e^{-(m\pi)^2\kappa t}$

$$+\frac{2A}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2 - m^2}\frac{\sin n\pi r}{r}e^{-(n\pi)^2\kappa t}。$$

254．将下列方程化为 S-L 型方程的标准形式：（1）$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+\left(x+\lambda\right)y=0$；

（2）$\frac{d^2y}{dx^2}+\cot x\frac{dy}{dx}+\lambda y=0$；（3）$x\left(1-x\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(a-bx\right)\frac{dy}{dx}-\lambda y=0$；

（4）$x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-x\right)\frac{dy}{dx}+\lambda y=0$。

（1）方程两边同乘x得：$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+x\left(x+\lambda\right)y=0$，写成：

$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right)+\left(\lambda x+x^2\right)y=0$。

（2）两边同乘$\sin x$得：$\sin x\frac{d^2y}{dx^2}+\cos x\frac{dy}{dx}+\lambda y\sin x=0$，写成：

$\frac{d}{dx}\left(\sin x\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y\sin x=0$。

（3）两边同乘$\frac{x^{a-1}}{\left(1-x\right)^{a-b+1}}$得：$\frac{x^a}{\left(1-x\right)^{a-b}}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x^{a-1}\left(a-bx\right)}{\left(1-x\right)^{a-b+1}}\frac{dy}{dx}-\lambda\frac{x^{a-1}}{\left(1-x\right)^{a-b+1}}y=0$，

写成：$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^a}{\left(1-x\right)^{a-b}}\frac{dy}{dx}\right]-\lambda\frac{x^{a-1}}{\left(1-x\right)^{a-b+1}}y=0$。

（4）两边同乘e^{-x}得：$xe^{-x}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-x\right)e^{-x}\frac{dy}{dx}+\lambda e^{-x}y=0$，写成：

$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda e^{-x}y=0$。

255．设有本征值问题$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[p\left(x\right)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho\left(x\right)-q\left(x\right)\right]y=0\\ y'\left(a\right)=0,y'\left(b\right)=0\end{cases}$，其中$p\left(x\right)$，$\rho\left(x\right)$，$q\left(x\right)$在$a\le x\le b$上均为连续实函数，且$p\left(x\right)\ge p_0>0$，$\rho\left(x\right)\ge\rho_0>0$。试证明本征函数的正交性。

设本征值λ_1对应本征函数y_1，本征值λ_2对应本征函数y_2（$\lambda_1\ne\lambda_2$），即

$\lambda_1\rho y_1=-\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dy_1}{dx}\right)+qy_1$，　　　　（a）

$\lambda_2\rho y_2=-\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dy_2}{dx}\right)+qy_2$。　　　　（b）

（a）$\times y_2-$（b）$\times y_1$ 得 $\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\rho y_1y_2=y_1\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dy_2}{dx}\right)-y_2\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dy_1}{dx}\right)$，

两边积分得 $\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\int_a^b\rho y_1y_2dx=py_1\dfrac{dy_2}{dx}\Big|_a^b-p\,y_2\dfrac{dy_1}{dx}\Big|_a^b=0$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $\int_a^b\rho y_1y_2dx=0$，即 y_1,y_2 正交。

256．假设 S-L 方程的本征值问题 $\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y=0\\ \left(ay'-by\right)_{x=0}=0,\left(cy'+dy\right)_{x=l}=0\end{cases}$ 中，

$p(x)\geq p_0>0$，$\rho(x)\geq\rho_0>0$，$q(x)\geq0$，a 与 b 及 c 与 d 均为不同时为 0 的非负常数，证明本征值 ≥0。

方程两边同乘 y 得 $\lambda\rho y^2=-y\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{dy}{dx}\right)+qy^2$，两边积分得

$$\lambda\int_0^l\rho y^2dx=p\left[y(0)y'(0)-y(l)y'(l)\right]+\int_0^l p\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx+\int_0^l qy^2dx$$

若 $a\neq0$，则 $y'(0)=\dfrac{b}{a}y(0)$，$y(0)y'(0)=\dfrac{b}{a}y^2(0)\geq0$，

若 $b\neq0$，则 $y(0)=\dfrac{a}{b}y'(0)$，$y(0)y'(0)=\dfrac{a}{b}y'^2(0)\geq0$；

若 $c\neq0$，则 $y'(l)=-\dfrac{d}{c}y(l)$，$-y(l)y'(l)=\dfrac{d}{c}y^2(l)\geq0$，

若 $d\neq0$，则 $y(l)=\dfrac{c}{d}y'(l)$，$-y(l)y'(l)=\dfrac{c}{d}y'^2(l)\geq0$；

所以 $\lambda\geq0$。

257．求解本征值问题：$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\dfrac{\lambda}{r^2}R=0\\ R(a)=0,R(b)=0\end{cases}$，其中 $b>a>0$。

令 $r=e^t$，则有 $r\dfrac{d}{dr}=\dfrac{d}{dt}$。方程可写为 $r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\lambda R=0$，即 $\dfrac{d^2R}{dt^2}+\lambda R=0$。

由上题结论可知 $\lambda\ge 0$，$\lambda=0$ 时，方程通解为 $R=A+Bt=A+B\ln r$，由边界条件可得 $R=0$，所以只有 $\lambda>0$。

通解为 $R=A\sin\sqrt{\lambda}t+B\cos\sqrt{\lambda}t=A\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln r\right)+B\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln r\right)$，由边界条件得

$$\begin{cases}A\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right)+B\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right)=0\\A\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right)+B\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right)=0\end{cases},$$

所以 $\begin{vmatrix}\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\ln a\right)\\ \sin\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right) & \cos\left(\sqrt{\lambda}\ln b\right)\end{vmatrix}=\sin\left[\sqrt{\lambda}\left(\ln b-\ln a\right)\right]=0$，

则本征值 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{\ln b-\ln a}\right)^2$，本征函数 $R_n(r)=\sin\left(\dfrac{\ln r-\ln a}{\ln b-\ln a}n\pi\right)$（$n=1,2,\cdots$）。

258．证明下列奇异的本征值问题是自伴的：（1）$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0\\y(\pm1)\text{有界}\end{cases}$；

（2）$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx}\right)+\lambda y=0\\y(0)\text{有界},y(1)=0\end{cases}$。

（1）记 $L=-\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{d}{dx}\right]$，则

$$y_1Ly_2-y_2Ly_1=y_2\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy_1}{dx}\right]-y_1\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy_2}{dx}\right]$$

$$=y_2\frac{d\left(1-x^2\right)}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\left(1-x^2\right)y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}-y_1\frac{d\left(1-x^2\right)}{dx}\frac{dy_2}{dx}-\left(1-x^2\right)y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}$$

$$=\left(1-x^2\right)\left(y_2\frac{d^2y_1}{dx^2}-y_1\frac{d^2y_2}{dx^2}\right)+\frac{d\left(1-x^2\right)}{dx}\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\right],$$

两边积分得$\int_{-1}^{1}\left(y_1Ly_2-y_2Ly_1\right)dx=\left(1-x^2\right)\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1}$，

由于$y\left(\pm 1\right)$有界，所以$\left(1-x^2\right)\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=\pm 1}=0$，$\int_{-1}^{1}y_1L\left(y_2\right)dx=\int_{-1}^{1}L\left(y_1\right)y_2dx$，

即L为自伴算符。

（2）记$L=-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)$，重复上小题过程有

$$\int_{-1}^{1}\left(y_1Ly_2-y_2Ly_1\right)dx=x\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=-x\left(y_2\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dy_2}{dx}\right)\Bigg|_{x=0},$$

由于$y\left(0\right)$有界，所以上式等于 0，即L为自伴算符。

259．设有本征值问题：$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[p\left(x\right)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho\left(x\right)-q\left(x\right)\right]y=0\\ y\left(b\right)=a_{11}y\left(a\right)+a_{12}y'\left(a\right),y'\left(b\right)=a_{21}y\left(a\right)+a_{22}y'\left(a\right)\end{cases}$，

其中$p\left(a\right)=p\left(b\right)$。证明：当$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=1$时，对应不同本征值的本征函数正交。

设本征值λ_1对应本征函数y_1，本征值λ_2对应本征函数y_2（$\lambda_1\neq\lambda_2$），255 题已得：

$$\begin{aligned}\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\int_a^b\rho y_1y_2dx&=\left(py_1y_2'-py_2y_1'\right)_a^b=p\left(a\right)\left(y_1y_2'-y_2y_1'\right)_a^b\\&=p\left(a\right)\left(\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}-1\right)\left[y_1\left(a\right)y_2'\left(a\right)-y_1'\left(a\right)y_2\left(a\right)\right]\end{aligned}$$

所以当$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=1$时，$y_1$和$y_2$正交。

260．两条质料不同，长各为l_1与l_2的均匀弦连接在一起，而两端（$x=0$及$x=l_1+l_2$）固定。试决定弦的横振动本征频率，并验证本征函数的正交性。

令u_1，u_2分别表示两段弦的横向位移，由弦的连续性可得连接条件$u_1\big|_{x=l_1}=u_2\big|_{x=l_1}$，

$\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=l_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=l_1}$。该问题为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a_1^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0,0<x<l_1\\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-a_2^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=0,l_1<x<l_1+l_2\\ u_1\big|_{x=0}=0,u_2\big|_{x=l_1+l_2}=0\\ u_1\big|_{x=l_1}=u_2\big|_{x=l_1},\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=l_1}=\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=l_1}\end{cases}$$

。令 $u_1=X_1(x)e^{i\omega t}$，$u_2=X_2(x)e^{i\omega t}$，代入方程及边界条件和连接条件得：

$$\begin{cases}X_1''(x)+\left(\dfrac{\omega}{a_1}\right)^2 X_1(x)=0,0<x<l_1\\ X_2''(x)+\left(\dfrac{\omega}{a_2}\right)^2 X_2(x)=0,l_1<x<l_1+l_2\\ X_1(0)=0,X_2(l_1+l_2)=0\\ X_1(l_1)=X_2(l_1),X_1'(l_1)=X_2'(l_1)\end{cases}$$

。

当 $\omega=0$ 时只有零解，故 $\omega>0$（$\omega<0$ 是同一解）。

由方程及 $X_1(0)=0,X_2(l_1+l_2)=0$ 可得 $X(x)=\begin{cases}X_1(x)=A\sin\dfrac{\omega}{a_1}x,0<x<l_1\\ X_2(x)=B\sin\dfrac{\omega}{a_2}(l_1+l_2-x),l_1<x<l_1+l_2\end{cases}$。

代入条件 $X_1(l_1)=X_2(l_1),X_1'(l_1)=X_2'(l_1)$ 得 $\begin{cases}A\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1-B\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0\\ A\dfrac{\omega}{a_1}\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1+B\dfrac{\omega}{a_2}\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0\end{cases}$，(*)

上式中，由于 A,B 都不为 0，所以 $\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1$ 与 $\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 同为零或同为非零，$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1$ 与 $\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 同为零或同为非零。

（1）$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1\neq0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2\neq0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1\neq0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2\neq0$。由（*），由于 A,B 都不为 0，所以 $\begin{vmatrix}\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 & -\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2\\ \dfrac{\omega}{a_1}\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 & \dfrac{\omega}{a_2}\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2\end{vmatrix}=0$，即 $a_1\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2+a_2\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1=0$，

两边同除 $\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 得 $a_1\tan\dfrac{\omega}{a_1}l_1+a_2\tan\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0$，本征频率 ω_n 即为该方程的第 n

个正根。由（*）第一式可取$A=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}l_1}$，$B=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}l_2}$，

即$X_n(x)=\begin{cases} X_{1n}(x)=\dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}x}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}l_1},0<x<l_1 \\ X_{2n}(x)=\dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}(l_1+l_2-x)}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}l_2},l_1<x<l_1+l_2 \end{cases}$。

（2）$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1=0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0$（此时$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1$和$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2$为$\pm1$），则存在互质整数$r,s$使

$\omega=\dfrac{r\pi a_1}{l_1}=\dfrac{s\pi a_2}{l_2}$（此时参数满足$\dfrac{l_1a_2}{l_2a_1}=\dfrac{r}{s}$），该频率为基频，本征频率为

$\omega_n=\dfrac{nr\pi a_1}{l_1}=\dfrac{ns\pi a_2}{l_2}$（$n=1,2,\cdots$）。代入（*）第二式得$\dfrac{A}{a_1}(-1)^{nr}=-\dfrac{B}{a_2}(-1)^{sn}$，可取

$A=(-1)^{nr}a_1$，$B=-(-1)^{sn}a_2$，

即$X_n(x)=\begin{cases} X_{1n}(x)=(-1)^{rn}a_1\sin\dfrac{nr\pi}{l_1}x,0<x<l_1 \\ X_{2n}(x)=-(-1)^{sn}a_2\sin\dfrac{ns\pi}{l_2}(l_1+l_2-x)=-a_2\sin\dfrac{ns\pi}{l_2}(l_1-x),l_1<x<l_1+l_2 \end{cases}$。

（3）$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1=0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0$（此时$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1$和$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2$为$\pm1$），则存在互质的$2r+1,2s+1$使$\dfrac{l_1a_2}{l_2a_1}=\dfrac{2r+1}{2s+1}$，本征频率$\omega_n=(2n+1)\dfrac{2r+1}{2l_1}a_1\pi=(2n+1)\dfrac{2s+1}{2l_2}a_2\pi$

（$n=0,1,2,\cdots$）。代入（*）第一式得$(-1)^{n+r}A=(-1)^{n+s}B$，可取$A=(-1)^r$，$B=(-1)^s$，

即$X_n(x)=\begin{cases} X_{1n}(x)=(-1)^r\sin\dfrac{(2r+1)(2n+1)}{2l_1}\pi x,0<x<l_1 \\ X_{2n}(x)=(-1)^s\sin\dfrac{(2s+1)(2n+1)}{2l_2}\pi(l_1+l_2-x) \\ =(-1)^n\cos\dfrac{(2s+1)(2n+1)}{2l_2}\pi(l_1-x),l_1<x<l_1+l_2 \end{cases}$。

设本征频率ω_n对应本征函数X_n，本征频率ω_m对应本征函数X_m（$\omega_n \neq \omega_m$），则

$$\frac{\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)}{a_1^2}\int_0^{l_1} X_{1n}X_{1m}dx=\left(X_{1n}X'_{1m}-X'_{1n}X_{1m}\right)_0^{l_1}=X_{1n}\left(l_1\right)X'_{1m}\left(l_1\right)-X'_{1n}\left(l_1\right)X_{1m}\left(l_1\right),$$

$$\frac{\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)}{a_2^2}\int_{l_1}^{l_1+l_2} X_{2n}X_{2m}dx=\left(X_{2n}X'_{2m}-X'_{2n}X_{2m}\right)_{l_1}^{l_1+l_2}$$

$$=-X_{2n}\left(l_1\right)X'_{2m}\left(l_1\right)+X'_{2n}\left(l_1\right)X_{2m}\left(l_1\right),$$

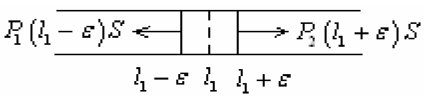
以上两式相加得$\left(\omega_n^2-\omega_m^2\right)\left(\int_0^{l_1}\frac{1}{a_1^2}X_{1n}X_{1m}dx+\int_{l_1}^{l_1+l_2}\frac{1}{a_2^2}X_{2n}X_{2m}dx\right)$

$$=X_{1n}\left(l_1\right)X'_{1m}\left(l_1\right)-X_{2n}\left(l_1\right)X'_{2m}\left(l_1\right)-X'_{1n}\left(l_1\right)X_{1m}\left(l_1\right)+X'_{2n}\left(l_1\right)X_{2m}\left(l_1\right)=0。$$

记$\rho\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_1^2},0<x<l_1\\ \dfrac{1}{a_2^2},l_1<x<l_1+l_2\end{cases}$，上式即为$\int_0^{l_1+l_2}\rho X_n X_m dx=0$。

261．杆AC由两部分组成：$AB=l_1$，$BC=l_2$，他们分别都是均匀的。设A端固定，C端自由，求杆的纵振动本征频率。

令u_1，u_2分别表示两段杆的纵向位移。在连接处取一小段（如图），



$P_2\left(l_1+\varepsilon\right)S-P_1\left(l_1-\varepsilon\right)S=2\rho S\varepsilon\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=\xi}$，其中$\xi\in\left(l_1-\varepsilon,l_1+\varepsilon\right)$。代入$P=E\dfrac{\partial u}{\partial x}$，并令

$\varepsilon\to 0$得$E_1\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l_1}=E_2\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l_1}$。另外显然有$u_1|_{x=l_1}=u_2|_{x=l_1}$。

该问题为$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a_1^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0,0<x<l_1\\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-a_2^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=0,l_1<x<l\\ u_1|_{x=0}=0,\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l}=0\\ u_1|_{x=l_1}=u_2|_{x=l_1},E_1\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l_1}=E_2\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l_1}\end{cases}$ 其中$l=l_1+l_2$。

同上题，令 $u_1 = X_1(x)e^{i\omega t}$，$u_2 = X_2(x)e^{i\omega t}$，可得

$$\begin{cases} X_1''(x)+\left(\dfrac{\omega}{a_1}\right)^2 X_1(x)=0, 0<x<l_1 \\ X_2''(x)+\left(\dfrac{\omega}{a_2}\right)^2 X_2(x)=0, l_1<x<l \\ X_1(0)=0, X_2'(l)=0 \\ X_1(l_1)=X_2(l_1), E_1X_1'(l_1)=E_2X_2'(l_1) \end{cases}$$

，可得 $X(x)=\begin{cases} X_1(x)=A\sin\dfrac{\omega}{a_1}x, 0<x<l_1 \\ X_2(x)=B\cos\dfrac{\omega}{a_2}(l-x), l_1<x<l \end{cases}$。

由连接条件得 $\begin{cases} A\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = B\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \\ A\dfrac{E_1}{a_1}\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = B\dfrac{E_2}{a_2}\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \end{cases}$。　　　　（*）

（1）$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 \neq 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 \neq 0$。本征频率 ω_n 是方程

$\dfrac{E_1}{a_1}\cot\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = \dfrac{E_2}{a_2}\tan\dfrac{\omega}{a_2}l_2$ 的第 n 个正根，

$$X_n(x)=\begin{cases} X_{1n}(x)=\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}x\Big/\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}l_1, 0<x<l_1 \\ X_{2n}(x)=\cos\dfrac{\omega_n}{a_2}(l-x)\Big/\cos\dfrac{\omega_n}{a_2}l_2, l_1<x<l \end{cases}。$$

（2）$\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0$。$\dfrac{l_1a_2}{l_2a_1}=\dfrac{2r}{2s+1}$（$2r$ 与 $2s+1$ 互质），

本征频率 $\omega_n=(2n+1)\dfrac{ra_1\pi}{l_1}=(2n+1)\dfrac{(2s+1)a_2\pi}{2l_2}$（$n=0,1,2,\cdots$）。

$$X_n(x)=\begin{cases} X_{1n}(x)=\dfrac{(-1)^r a_1}{E_1}\sin\dfrac{(2n+1)r}{l_1}\pi x, 0<x<l_1 \\ X_{2n}(x)=\dfrac{(-1)^{n+s}a_2}{E_2}\cos\dfrac{(2n+1)(2s+1)}{2l_2}\pi(l-x) \\ =-\dfrac{a_2}{E_2}\sin\dfrac{(2n+1)(2s+1)}{2l_2}\pi(l_1-x), l_1<x<l \end{cases}$$

（3）$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2 = 0$，$\cos\dfrac{\omega}{a_1}l_1 = 0$。$\dfrac{l_1a_2}{l_2a_1}=\dfrac{2s+1}{2r}$（$2r$ 与 $2s+1$ 互质）。

$$\omega_n=\left(2n+1\right)\frac{ra_2\pi}{l_2}=\left(2n+1\right)\frac{\left(2s+1\right)a_1\pi}{2l_1}$$（$n=0,1,2,\cdots$）。

$$X_n\left(x\right)=\begin{cases}X_{1n}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n+s}\sin\dfrac{\left(2n+1\right)\left(2s+1\right)}{2l_1}\pi x,0<x<l_1\\ X_{2n}\left(x\right)=\left(-1\right)^r\cos\dfrac{\left(2n+1\right)r}{l_2}\pi\left(l-x\right)\\ =\cos\dfrac{\left(2n+1\right)r}{l_2}\pi\left(l_1-x\right),l_1<x<l\end{cases}$$。

262．三维空间的本征值问题。设本征值问题为$\begin{cases}\nabla^2u+\lambda u=0,\left(x,y,z\right)\in V\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_\Sigma=0\end{cases}$，其中$\Sigma$是$V$的边界面。若对应本征值$\lambda_n$的本征函数为$u_n$，试证明：$\iiint\limits_V u_m^*u_n dV=0$，$m\neq n$，即对应不同本征值的本征函数正交。

由 Gauss 公式可得：

$$\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma\left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS=\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma\left(u_n\nabla u_m^*-u_m^*\nabla u_n\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_V\nabla\cdot\left(u_n\nabla u_m^*-u_m^*\nabla u_n\right)dV$$

$$=\iiint\limits_V\left(\nabla u_n\cdot\nabla u_m^*+u_n\nabla^2u_m^*-\nabla u_m^*\cdot\nabla u_n-u_m^*\nabla^2u_n\right)dV=\iiint\limits_V\left(u_n\nabla^2u_m^*-u_m^*\nabla^2u_n\right)dV$$。

所以$\left(\lambda_n-\lambda_m^*\right)\iiint\limits_V u_m^*u_n dV=\iiint\limits_V\left(u_n\nabla^2u_m^*-u_m^*\nabla^2u_n\right)dV=\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma\left(u_n\dfrac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\dfrac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS$。

若$\alpha\neq0$，则$u\big|_\Sigma=-\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma$，

$$\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma\left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS=\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma\left(-\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u_n}{\partial n}\frac{\partial u_m^*}{\partial n}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial u_m^*}{\partial n}\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS=0,$$

若$\beta\neq0$，则$\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma=-\dfrac{\alpha}{\beta}u\big|_\Sigma$，

$$\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma\left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS=\oint\!\!\!\!\oint_\Sigma\left(-\frac{\alpha}{\beta}u_nu_m^*+\frac{\alpha}{\beta}u_nu_m^*\right)dS=0$$。

即对应不同本征值的本征函数正交。

263．若上题中的方程改为$\nabla\cdot\left[p(x,y,z)\nabla u\right]+\lambda\rho(x,y,z)u=0$，试证明：对应不同本征值的本征函数以权重$\rho(x,y,z)$正交。

$$\oiint_{\Sigma} p\left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS=\oiint_{\Sigma}\left(u_n p\nabla u_m^*-u_m^* p\nabla u_n\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V \nabla\cdot\left(u_n p\nabla u_m^*-u_m^* p\nabla u_n\right)dV$$
$$=\iiint_V\left[\nabla u_n\cdot p\nabla u_m^*+u_n\nabla\cdot\left(p\nabla u_m^*\right)-\nabla u_m^*\cdot p\nabla u_n-u_m^*\nabla\cdot\left(p\nabla u_n\right)\right]dV$$
$$=\iiint_V\left[u_n\nabla\cdot\left(p\nabla u_m^*\right)-u_m^*\nabla\cdot\left(p\nabla u_n\right)\right]dV\text{。}$$

$$\left(\lambda_n-\lambda_m^*\right)\iiint_V u_m^* u_n dV=\iiint_V\left[u_n\nabla\cdot\left(p\nabla u_m^*\right)-u_m^*\nabla\cdot\left(p\nabla u_n\right)\right]dV=\oiint_{\Sigma} p\left(u_n\frac{\partial u_m^*}{\partial n}-u_m^*\frac{\partial u_n}{\partial n}\right)dS$$

同上题可得上式$=0$。

264．设本征值问题$\begin{cases}\nabla^2\Phi+\lambda\Phi=0\\ \Phi\big|_{\Sigma}=0\end{cases}$的解（本征函数）为$\{\Phi_k\}$，对应本征值$\{\lambda_k\}$，$k=1,2,\cdots$。试证明：当$\lambda=0$不是本征值时，Poisson 方程的第一类边值问题$\begin{cases}\nabla^2 u=-f\\ u\big|_{\Sigma}=0\end{cases}$的解为$u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\lambda_k}\Phi_k$，$A_k$是$f$按$\{\Phi_k\}$展开的系数。

将u按$\{\Phi_k\}$展开，即$u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k\Phi_k$，代入方程得$-\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k\lambda_k\Phi_k=-\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\Phi_k$，比较系数得

$u_k=\frac{A_k}{\lambda_k}$，即$u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\lambda_k}\Phi_k$。

267．证明：如果将上题中Φ与u的边界条件改为齐次第二类或第三类边界条件时，结论仍然成立。

可看出，由于是齐次条件，所以$\{\Phi_k\}$的叠加仍满足u的边界条件，上面的运算仍成立。

266. 在与 264 题相同的条件下，证明：$\begin{cases}\nabla^2 u+\Lambda u=-f\\ u\big|_{\Sigma}=0\end{cases}$，$\Lambda\neq\lambda_k$的解为$u=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{\lambda_k-\Lambda}\Phi_k$。

将$u=\sum_{k=1}^{\infty}u_k\Phi_k$代入方程得$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k\Phi_k+\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda u_k\Phi_k=-\sum_{k=1}^{\infty}A_k\Phi_k$，所以$u_k=\dfrac{A_k}{\lambda_k-\Lambda}$，即

$u=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{A_k}{\lambda_k-\Lambda}\Phi_k$。

267．用 264 题方法求解矩形区域$0\le x\le a$，$0\le y\le b$内 Poisson 方程的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x,y)\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=a}=0\\ u\big|_{y=0}=0,u\big|_{y=b}=0\end{cases}。$$

先解本征值问题$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda u=0\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=a}=0\\ u\big|_{y=0}=0,u\big|_{y=b}=0\end{cases}$。分离变量得$\begin{cases}X''+\mu X=0\\ X(0)=0,X(a)=0\\ Y''+(\lambda-\mu)Y=0\\ Y(0)=0,Y(b)=0\end{cases}$，

解得$\mu=\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$，$X(x)=\sin\dfrac{n\pi}{a}x$（$n=1,2,\cdots$），

$\lambda-\mu=\left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$，$Y(y)=\sin\dfrac{m\pi}{b}y$（$m=1,2,\cdots$）。

即本征值$\lambda_{m,n}=\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$，

本征函数为$\Phi_{m,n}(x,y)=X_n(x)Y_m(y)=\sin\dfrac{n\pi}{a}x\sin\dfrac{m\pi}{b}y$（$n,m=1,2,\cdots$）。

令$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,n}\Phi_{m,n}(x,y)$，则$A_{m,n}=\dfrac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\dfrac{n\pi}{a}x\sin\dfrac{m\pi}{b}ydxdy$。

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}}{\lambda_{m,n}}\Phi_{m,n}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}}{\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y。$$

268．用 264 题方法求解 231 题：（1）$\begin{cases}\nabla^2 u=-2\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=a}=0\\ u|_{y=-b/2}=0,u|_{y=b/2}=0\end{cases}$；（2）$\begin{cases}\nabla^2 u=-x^2 y\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=a}=0\\ u|_{y=-b/2}=0,u|_{y=b/2}=0\end{cases}$。

本征值问题$\begin{cases}\nabla^2 u+\lambda u=0\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=a}=0\\ u|_{y=-b/2}=0,u|_{y=b/2}=0\end{cases}$的解为：本征值 $\lambda_{m,n}=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$，本征函数

$\Phi_{m,n}=\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)$。

$$A_{m,n}=-\frac{8}{ab}\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)dxdy=-\frac{8}{\pi^2 mn}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right],$$

$A_{2i+1,2j+1}=-\frac{32}{\pi^2(2i+1)(2j+1)}$，其余的 $A_{m,n}=0$。

所以$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}}{\lambda_{m,n}}\Phi_{m,n}(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A_{2i+1,2j+1}}{\lambda_{2i+1,2j+1}}\Phi_{2i+1,2j+1}(x,y)$

$$=-\frac{32}{\pi^4}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2j+1)\pi}{a}x\sin\frac{(2i+1)\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)}{(2i+1)(2j+1)\left[\frac{(2j+1)^2}{a^2}+\frac{(2i+1)^2}{b^2}\right]}。$$

（2）$A_{m,n}=-\frac{4}{ab}\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^a x^2 y\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)dxdy$

$$=(-1)^{m+n}\frac{2a^2 b}{\pi mn}\left[1+(-1)^m\right]\left\{-1+\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[1-(-1)^n\right]\right\}。$$

$$u(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}}{\lambda_{m,n}}\Phi_{m,n}(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}\left(y+\frac{b}{2}\right)。$$

269．设有本征值问题$\begin{cases}\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right]+\frac{d}{dx}\left[q(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)-r(x)\right]y=0\\ y|_{x=a}=0,\ p(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{x=a}=0,\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=b}=0,\ \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right]_{x=b}=0\end{cases}$，

试证明：对应不同本征值的本征函数正交。

$$\left(\lambda_1-\lambda_2^*\right)\int_a^b \rho y_1 y_2^* dx=\int_a^b y_1 \frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)dx-\int_a^b y_2^* \frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)dx$$

$$+\int_a^b y_1 \frac{d}{dx}\left(q\frac{dy_2^*}{dx}\right)dx-\int_a^b y_2^* \frac{d}{dx}\left(q\frac{dy_1}{dx}\right)dx$$

$$=y_1\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)_a^b-y_2^*\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_a^b+y_1 q\frac{dy_2^*}{dx}\bigg|_a^b-y_2^* q\frac{dy_1}{dx}{}_a^b$$

$$-\int_a^b \frac{dy_1}{dx}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)dx+\int_a^b \frac{dy_2^*}{dx}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)dx$$

$$=y_1\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)_a^b-y_2^*\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_a^b+y_1 q\frac{dy_2^*}{dx}\bigg|_a^b-y_2^* q\frac{dy_1}{dx}{}_a^b$$

$$-\frac{dy_1}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)_a^b+\frac{dy_2^*}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_a^b=0\text{。}$$

270．设有 4 阶常微分方程 $\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\frac{d}{dx}\left[q(x)\frac{dy}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)-r(x)\right]y=0$，

$p(x)$，$q(x)$，$\rho(x)$，$r(x)$ 均为已知，λ 为待定系数。若 $y(x)$ 在端点 $x=a$ 及 $x=b$ 均满足下列边界条件：$y=0$，$\frac{dy}{dx}=0$ 或 $y=0$，$p\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 或 $\frac{dy}{dx}=0$，$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$，

试证明：对应于不同本征值的本征函数在区间 $[a,b]$ 上以权重 $\rho(x)$ 正交。

同上题，$\left(\lambda_1-\lambda_2^*\right)\int_a^b \rho y_1 y_2^* dx=y_1\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)_a^b-y_2^*\frac{d}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_a^b+y_1 q\frac{dy_2^*}{dx}\bigg|_a^b-y_2^* q\frac{dy_1}{dx}{}_a^b$

$$-\frac{dy_1}{dx}\left(p\frac{d^2 y_2^*}{dx^2}\right)_a^b+\frac{dy_2^*}{dx}\left(p\frac{d^2 y_1}{dx^2}\right)_a^b,$$

可看出，只要满足题目所给任一组条件，上式就等于 0。

271．设有本征值问题 $\begin{cases}X^{(4)}+\lambda X=0\\ X(0)=0,X(l)=0\\ X''(0)=0,X''(l)=0\end{cases}$，证明：本征值 $\lambda_n=-\frac{\int_0^l\left|X_n''\right|^2dx}{\int_0^l\left|X_n\right|^2dx}<0$。

见习题 12 第 230 题。

272．试根据 Legendre 方程在 $x=1$ 的有界解（见习题 10 第 198 题）求解本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right]+\mu\left(\mu+1\right)y=0\\ y\left(\pm1\right)\text{有界}\end{cases}。$$

第 198 题已求得 $x=1$ 的有界解为 $y\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{\left(k!\right)^2}\dfrac{\Gamma\left(\mu+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu-k+1\right)}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^k$，则

$y\left(-1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k}{\left(k!\right)^2}\dfrac{\Gamma\left(\mu+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu-k+1\right)}$，记该级数通项为 u_k，若 μ 不是整数，当 k 充分大时，

$$\frac{u_k}{u_{k+1}}=-\frac{\left[\left(k+1\right)!\right]^2}{\left(k!\right)^2}\frac{\Gamma\left(\mu+k+1\right)}{\Gamma\left(\mu-k+1\right)}\frac{\Gamma\left(\mu-k\right)}{\Gamma\left(\mu+k+2\right)}=\frac{\left(k+1\right)^2}{\left(\mu+k+1\right)\left(k-\mu\right)}=1+\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

所以该级数发散。

若 $\mu=n$（$n=0,1,2,\cdots$），当 $k\geq n+1$ 时有 $\dfrac{1}{\Gamma\left(n-k+1\right)}=0$，所以 $y\left(x\right)$ 截断为多项式：

$y_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{\left(k!\right)^2}\dfrac{\left(n+k\right)!}{\left(n-k\right)!}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^k$，这就是该本征值问题的解。

273．证明：（1）$P_{2k}\left(0\right)=\left(-1\right)^k\dfrac{\left(2k\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2}=\left(-1\right)^{k+1}\dfrac{2}{\mathrm{B}\left(k+1,-1/2\right)}$，$P_{2k+1}\left(0\right)=0$；

（2）$P_{2k}'\left(0\right)=0$，$P_{2k+1}'\left(0\right)=\left(-1\right)^k\dfrac{\left(2k+1\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2}=\left(-1\right)^k\dfrac{2}{\mathrm{B}\left(k+1,1/2\right)}$；

（3）$P_k'\left(1\right)=\dfrac{1}{2}k\left(k+1\right)$，$P_k'\left(-1\right)=\dfrac{\left(-1\right)^{k-1}}{2}k\left(k+1\right)$，$P_k''\left(1\right)=\dfrac{1}{8}\left(k-1\right)k\left(k+1\right)\left(k+2\right)$。

（1）$P_n\left(x\right)=\sum_{r=0}^{[n/2]}\dfrac{\left(-1\right)^r\left(2n-2r\right)!}{2^n r!\left(n-r\right)!\left(n-2r\right)!}x^{n-2r}$，所以

$$P_{2k}\left(x\right)=\sum_{r=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^r\left(4k-2r\right)!}{2^{2k}r!\left(2k-r\right)!\left(2k-2r\right)!}x^{2k-2r},\quad P_{2k+1}\left(x\right)=\sum_{r=0}^{k}\frac{\left(-1\right)^r\left(4k+2-2r\right)!}{2^{2k+1}r!\left(2k+1-r\right)!\left(2k+1-2r\right)!}x^{2k+1-2r},$$

显然有 $P_{2k+1}\left(0\right)=0$，取 $P_{2k}\left(x\right)$ 的常数项即为 $P_{2k}\left(0\right)$，即

$$P_{2k}\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^k\left(2k\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^2}=\frac{\left(-1\right)^k}{2^{2k}}\frac{\Gamma\left(2k+1\right)}{\Gamma^2\left(k+1\right)}=\frac{\left(-1\right)^k}{2^{2k}}\frac{\dfrac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(k+1/2\right)\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma^2\left(k+1\right)}$$

$$=-(-1)^k\frac{2\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)(-2\sqrt{\pi})}=(-1)^{k+1}\frac{2\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-1/2)}=(-1)^{k+1}\frac{2}{\mathrm{B}(k+1,-1/2)}\text{。}$$

（2）$P_n'(x)=\sum\limits_{r=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^r(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r-1)!}x^{n-2r-1}$，则

$$P_{2k}'(x)=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{(-1)^r(4k-2r)!}{2^{2k}r!(2k-r)!(2k-2r-1)!}x^{2k-2r-1},\ P_{2k+1}'(x)=\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^r(4k+2-2r)!}{2^{2k+1}r!(2k+1-r)!(2k-2r)!}x^{2k-2r},$$

所以 $P_{2k}'(0)=0$，$P_{2k+1}'(0)=\frac{(-1)^k(2k+2)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}=\frac{(-1)^k(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\frac{\Gamma(2k+2)}{\Gamma^2(k+1)}$

$$=\frac{(-1)^k}{2^{2k}}\frac{2^{2k+1}\Gamma(k+1)\Gamma(k+3/2)}{\Gamma^2(k+1)\Gamma(1/2)}=(-1)^k\frac{2\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)}=(-1)^k\frac{2}{\mathrm{B}(k+1,1/2)}\text{。}$$

（3）由 $P_k(x)=\sum\limits_{n=0}^{k}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(k+n)!}{(k-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ 得 $P_k'(x)=\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{n}{2(n!)^2}\frac{(k+n)!}{(k-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}$。

所以 $P_k'(1)=\frac{(k+1)!}{2(k-1)!}=\frac{1}{2}k(k+1)$。

由 Legendre 多项式的微分表示可得 $P_k'(x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k$，所以

$P_k'(-x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^{k+1}}{d(-x)^{k+1}}(x^2-1)^k=(-1)^{k+1}P_k'(x)$，所以 $P_k'(-1)=\frac{(-1)^{k-1}}{2}k(k+1)$。

又有 $P_k''(x)=\sum\limits_{n=2}^{k}\frac{n(n-1)}{2^2(n!)^2}\frac{(k+n)!}{(k-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-2}$，

所以 $P_k''(1)=\frac{(k+2)!}{8(k-2)!}=\frac{1}{8}(k+2)(k+1)k(k-1)$。

274．证明：$\int_x^1 P_k(t)P_l(t)dt=\frac{(1-x^2)\left[P_k'(x)P_l(x)-P_l'(x)P_k(x)\right]}{k(k+1)-l(l+1)}$，$k\neq l$。

$$\frac{d}{dt}\frac{(1-t^2)\left[P_k'(t)P_l(t)-P_l'(t)P_k(t)\right]}{k(k+1)-l(l+1)}=\frac{1}{k(k+1)-l(l+1)}\left\{-2t\left[P_k'(t)P_l(t)-P_l'(t)P_k(t)\right]\right.$$

$$\left.+(1-t^2)\left[P_k''(t)P_l(t)-P_l''(t)P_k(t)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)-l(l+1)}\left\{P_l(t)\frac{d}{dx}\left[\left(1-t^2\right)P_k'(t)\right]\right.$$

$$\left.-P_k(t)\frac{d}{dx}\left[\left(1-t^2\right)P_l'(t)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{k(k+1)-l(l+1)}\left[-P_l(t)k(k+1)P_k(t)+P_k(t)l(l+1)P_l(t)\right]$$

$$=-P_l(t)P_k(t)\text{。}$$

两边积分即得证。

275．计算积分$\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)dx$，并由此导出$\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$。

$$\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)dx=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}x^k\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l dx=\frac{1}{2^l l!}x^k\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{dx^k}{dx}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l dx$$

其中$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l=\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left[(x+1)^l(x-1)^l\right]=\sum_{k=0}^{l-1}\frac{(l-1)!}{k!(l-1-k)!}\left[(x+1)^l\right]^{(l-1-k)}\left[(x-1)^l\right]^{(k)}$，

可看出上式中$(x+1)$和$(x-1)$的最低次幂都是 1，所以$\frac{1}{2^l l!}x^k\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l\Big|_{-1}^{1}=0$，即

$$\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)dx=-\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{dx^k}{dx}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l dx=(-1)^2\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{d^2x^k}{dx^2}\frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}}\left(x^2-1\right)^l dx$$

$$=\cdots=(-1)^l\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^l\frac{d^lx^k}{dx^l}dx=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l\frac{d^lx^k}{dx^l}dx\text{。}$$

若$k<l$，则$\frac{d^lx^k}{dx^l}=0$，所以$\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)dx=0$。

$k\ge l$时，若$k+l$是奇数，那么$x^kP_l(x)$是奇函数，一定有$\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)dx=0$，所以可令

$k=l+2n$（$n=0,1,\cdots$），此时$\int_{-1}^{1}x^{l+2n}P_l(x)dx=\frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_0^1 2\left(1-x^2\right)^l x^{2n}dx$，

作代换$x^2=t$，则$\int_{-1}^{1}x^{l+2n}P_l(x)dx=\frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_0^1(1-t)^l t^{n-1/2}dt=\frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\mathrm{B}\left(l+1,n+\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{2^l l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\frac{\Gamma(l+1)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(l+n+3/2)}=\frac{(l+2n)!}{2^l(2n)!}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(l+n+3/2)}\qquad(*)$$

$$=\frac{(l+2n)!}{2^l(2n)!}\frac{(n-1+1/2)(n-2+1/2)\cdots(1/2)\Gamma(1/2)}{(l+n+1/2)(l+n-1+1/2)\cdots(1/2)\Gamma(1/2)}=\frac{2(l+2n)!(2n-1)!!}{(2n)!(2l+2n+1)!!}$$

$$=\frac{2(l+2n)!(2l+2n)(2l+2n-2)\cdots\cdot 2}{(2n)(2n-2)\cdots\cdot 2\cdot(2l+2n+1)!}=\frac{2(l+2n)!2^{l+n}(l+n)!}{2^n n!(2l+2n+1)!}=\frac{2^{l+1}(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!}。$$

综上有 $\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{2^{l+1}(l+2n)!(l+n)!}{n!(2l+2n+1)!}, & k=l+2n\\ 0, \text{others}\end{cases}$ 其中 $n=0,1,\cdots$。

取 $n=0$ 可得 $\int_{-1}^{1}x^lP_l(x)\,dx=\dfrac{2^{l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}$。

若 $k<l$，必有 $\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)\,dx=0$。

设 $P_l(x)=c_lx^l+c_{l-2}x^{l-2}+\cdots$，则由 $P_l(x)=\sum\limits_{r=0}^{[l/2]}\dfrac{(-1)^r(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$ 可知 $c_l=\dfrac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$，

则 $\int_{-1}^{1}P_l^2(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(c_lx^l+c_{l-2}x^{l-2}+\cdots\right)P_l(x)\,dx=c_l\int_{-1}^{1}x^lP_l(x)\,dx=\dfrac{2}{2l+1}$。

即 $\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)\,dx=\dfrac{2}{2l+1}\delta_{kl}$。

276．利用 Rodrigues 公式证明：$\int_{-1}^{1}(1+x)^kP_l(x)\,dx=\dfrac{2^{k+1}(k!)^2}{(k-l)!(k+l+1)!}$，$k\ge l$。

若 $k<l$ 又如何？

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^kP_l(x)\,dx=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}(1+x)^k\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l dx$$

$$=\frac{1}{2^l l!}(1+x)^k\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{d(1+x)^k}{dx}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l dx$$

$$=-\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\frac{d(1+x)^k}{dx}\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l dx=\cdots=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l\frac{d^l(1+x)^k}{dx^l}dx \qquad (*)$$

$$=\frac{k!}{2^l l!(k-l)!}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l(1+x)^{k-l}dx=\frac{k!}{2^l l!(k-l)!}\int_{-1}^{1}(1-x)^l(1+x)^k dx$$

作代换 $1+x=2t$，则上式 $=\dfrac{2^{k+1}k!}{l!(k-l)!}\int_0^1(1-t)^lt^kdt=\dfrac{2^{k+1}k!}{l!(k-l)!}\mathrm{B}(l+1,k+1)$

$$=\frac{2^{k+1}k!}{l!(k-l)!}\frac{\Gamma(l+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(l+k+2)}=\frac{2^{k+1}(k!)^2}{(k-l)!(l+k+1)!}。$$

$k<l$ 时由（*）式可知积分=0。

277．试由 Rodrigues 公式出发，将 Legendre 多项式表示成围道积分，从而导出 Legendre 多项式的积分表示：$P_l(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l d\varphi$。

$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l=\frac{1}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\left(z^2-1\right)^l}{(z-x)^{l+1}}dz$，这里用了解析函数的高阶微商公式，

其中 C 为任意包围 x 的围道，这里取为以 x 为圆心，$\sqrt{x^2-1}$ 为半径的圆，即 $z-x=\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}$，

$$\text{则}\ P_l(x)=\frac{1}{2^l}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}+1\right)^l\left(x+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}-1\right)^l}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{l+1}e^{i(l+1)\varphi}}\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2-1}e^{i\varphi}\right)\left[(x-1)e^{-i\varphi}+\sqrt{x^2-1}\right]}{2\left(\sqrt{x^2-1}\right)}\right\}^l d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^l d\varphi$$

作代换 $\varphi=\pi-\theta$ 即可得 $P_l(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(x-\sqrt{x^2-1}\cos\theta\right)^l d\theta$。

278．证明：$P_l(x)$ 的零点均为实数，且全都在区间 $(-1,1)$ 内。

±1 是 $\left(x^2-1\right)^l$ 的零点，根据 Rolle 定理，$(-1,1)$ 内有 $\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^l$ 的一个零点（记为 ξ_1）。

又因为 ±1 也是 $\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点，所以 $(-1,\xi_1)$ 和 $(\xi_1,1)$ 上有 $\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点，而 ±1 又是 $\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点…..由此下去 $(-1,1)$ 内有 $\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$ 的 l 个零点，而 ±1 不是 $\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l$ 的零点。$P_l(x)$ 是 l 次多项式，只能有 l 个零点。

279．设 (x,y,z) 是空间一点坐标，θ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 z 轴夹角，$r=|\boldsymbol{r}|$，证明：

$P_l\left(\cos\theta\right)=\dfrac{\left(-1\right)^l r^{l+1}}{l!}\dfrac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\dfrac{1}{r}\right)$。

用数学归纳法。$l=0$时显然成立，设l成立，即$\dfrac{\partial^l}{\partial z^l}\left(\dfrac{1}{r}\right)=\dfrac{\left(-1\right)^l l!}{r^{l+1}}P_l\left(\cos\theta\right)$。

由直角坐标与球坐标关系可得

$\dfrac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\sin^2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\left(\cos\theta\right)}=x\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1-x^2}{r}\dfrac{\partial}{\partial x}$，其中$x=\cos\theta$。

所以 $\dfrac{\partial^{l+1}}{\partial z^{l+1}}\left(\dfrac{1}{r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{\left(-1\right)^l l!}{r^{l+1}}P_l\left(\cos\theta\right)\right]=\left(x\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1-x^2}{r}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left[\dfrac{\left(-1\right)^l l!}{r^{l+1}}P_l\left(x\right)\right]$

$$=\frac{\left(-1\right)^l l!}{r^{l+2}}\left[-\left(l+1\right)xP_l\left(x\right)+\left(1-x^2\right)P_l'\left(x\right)\right]。$$

所以$\dfrac{\left(-1\right)^{l+1}r^{l+2}}{\left(l+1\right)!}\dfrac{\partial^{l+1}}{\partial z^{l+1}}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{1}{l+1}\left[-\left(l+1\right)xP_l\left(x\right)+\left(1-x^2\right)P_l'\left(x\right)\right]=P_{l+1}\left(x\right)$。

280．从 Lengendre 多项式的生成函数出发证明：（1） $P_l\left(-x\right)=\left(-1\right)^l P_l\left(x\right)$；

（2）$P_l\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2l}P_k\left(-\dfrac{1}{2}\right)P_{2l-k}\left(\dfrac{1}{2}\right)$；（3）$P_l\left(\cos2\theta\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2l}\left(-1\right)^k P_k\left(\cos\theta\right)P_{2l-k}\left(\cos\theta\right)$；

（4） $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_k\left(x\right)P_l\left(x\right)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$。

（1） $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(x\right)t^l=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2\left(-x\right)\left(-t\right)+\left(-t\right)^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(-1\right)^l P_l\left(-x\right)t^l$，

所以$P_l\left(-x\right)=\left(-1\right)^l P_l\left(x\right)$。

（2）令（3）中$\theta=\pi/3$即得。

（3） $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos2\theta\right)t^l=\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos2\theta+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2t\left(2\cos^2\theta-1\right)+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+t\right)^2-4t\cos^2\theta}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+2\sqrt{t}\cos\theta+t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\sqrt{t}\cos\theta+t}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k\left(\cos\theta\right)\left(-\sqrt{t}\right)^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos\theta\right)\left(\sqrt{t}\right)^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\left(-1\right)^k P_k\left(\cos\theta\right)P_{l-k}\left(\cos\theta\right)t^{l/2}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2l}\left(-1\right)^k P_k\left(\cos\theta\right)P_{2l-k}\left(\cos\theta\right)t^l。$$

所以 $P_l(\cos 2\theta)=\sum_{k=0}^{2l}(-1)^k P_k(\cos\theta)P_{2l-k}(\cos\theta)$。

（4）$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l\cdot\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)t^k=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)P_l(x)t^k\right]t^l$。

两边积分得 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-2xt+t^2}dx=\frac{1}{t}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]=\frac{1}{t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}t^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}t^k\right]$

$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}t^{2l}=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dxt^k\right]t^l$。

所以 $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dxt^k=\frac{2}{2l+1}t^l$，即 $\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$。

281．证明：$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{2^{2l}}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\cos(l-2k)\theta$。

$$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)t^l=\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-t\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}}\frac{1}{\sqrt{1-te^{-i\theta}}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(-te^{i\theta}\right)^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(-te^{-i\theta}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n)!(2k)!}{2^{2(n+k)}(n!)^2(k!)^2}t^{n+k}e^{i(n-k)\theta}$$ 。

令上式右边 $n+k=l$，则

$$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}e^{i(l-2k)\theta}t^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\cos(l-2k)\theta t^l+i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\sin(l-2k)\theta t^l$$ 。

对于上式右边第二项，当 l 为偶数（$=2m$）时，

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\sin(l-2k)\theta=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(4m-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(2m-k)!\right]^2}\sin(2m-2k)\theta$$

$$+\sum_{k=m+1}^{2m}\frac{(4m-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(2m-k)!\right]^2}\sin(2m-2k)\theta$$

令上面右边第二式 $n=2m-k$ 可得 $\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\sin(l-2k)\theta=0$，

当l为奇数时同样有$\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\sin(l-2k)\theta=0$。

所以$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{2^{2l}(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\cos(l-2k)\theta t^l$，比较系数即得

$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{2^{2l}}\sum_{k=0}^{l}\frac{(2l-2k)!(2k)!}{(k!)^2\left[(l-k)!\right]^2}\cos(l-2k)\theta$。

282．如果$|x|$足够小，且$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}x^k$，证明：$f(x)$可按 Lengendre 多项式展开：

$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_lP_l(x)$，其中$c_l=(2l+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3/2)a_{l+2n}}{2^{l+2n}n!\Gamma(l+n+3/2)}$。

由 Lengendre 展开系数公式，$c_l=\frac{2l+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}\int_{-1}^{1}x^kP_l(x)dx$。由 275 题可知，只有$k=l+2n$时，该式右边的积分才不为 0，即$c_l=\frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1}x^{l+2n}P_l(x)dx$。

由 275 题（*）式，$\int_{-1}^{1}x^{l+2n}P_l(x)dx=\frac{(l+2n)!}{2^l(2n)!}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(l+n+3/2)}$

$$=\frac{(l+2n)!}{2^l(2n)!\Gamma(l+n+3/2)}\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{(l+2n)!}{2^{l+n-1}(2n)!\Gamma(l+n+3/2)}(2n-1)(2n-3)\cdots3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{(l+2n)!\Gamma(3/2)}{2^{l+2n-1}n!\Gamma(l+n+3/2)}。$$

所以$c_l=\frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{l+2n}}{(l+2n)!}\frac{(l+2n)!\Gamma(3/2)}{2^{l+2n-1}n!\Gamma(l+n+3/2)}=(2l+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3/2)a_{l+2n}}{2^{l+2n}n!\Gamma(l+n+3/2)}$。

283．计算下列积分：（1）$\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l(x)dx$；（2）$\int_{-1}^{1}\frac{P_l(x)}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}dx$。

（1）$P_k'(x)$是$k-1$次多项式，所以当$k\le l$时$\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l(x)dx=0$。$k>l$时，

$$\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l(x)dx=P_k(x)P_l(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l'(x)dx=P_k(x)P_l(x)\Big|_{-1}^{1}=1-(-1)^{k+l}。$$

所以当$k=l+2n+1$（$n=0,1,2,\cdots$）时，积分值为 2，其余都为 0。

（2）$t=0$时，原积分$=\int_{-1}^{1}P_l\left(x\right)dx=\int_{-1}^{1}P_0\left(x\right)P_l\left(x\right)dx=2\delta_{l0}$。

$t\neq0$时，原积分$=\dfrac{1}{t}\int_{-1}^{1}P_l\left(x\right)d\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\dfrac{1}{t}\dfrac{P_l\left(x\right)}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\Bigg|_{-1}^{1}-\dfrac{1}{t}\int_{-1}^{1}\dfrac{P_l'\left(x\right)}{\sqrt{1-2xt+t^2}}dx$

$$=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1-t\right)^2}}-\frac{\left(-1\right)^l}{\sqrt{\left(1+t\right)^2}}\right]-\frac{1}{t}\int_{-1}^{1}\frac{P_l'\left(x\right)}{\sqrt{1-2xt+t^2}}dx\text{。}$$

当$\left|t\right|<1$时，$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k\left(x\right)t^k$，所以

原积分$=\dfrac{1}{t}\left[\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{\left(-1\right)^l}{1+t}\right]-\dfrac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}P_l'\left(x\right)P_k\left(x\right)dx\right]t^k=\dfrac{1}{t}\left[\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{\left(-1\right)^l}{1+t}\right]-\dfrac{2}{t}\sum_{n=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}t^{l-2n-1}$。

这里用到了上小题结论。对上式分别代入l为奇数和偶数可得原积分$=\dfrac{2t^l}{1-t^2}$。

当$\left|t\right|>1$时，$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\dfrac{1}{\left|t\right|\sqrt{1-2x\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}=\dfrac{1}{\left|t\right|}\sum_{k=0}^{\infty}P_k\left(x\right)t^{-k}$，

$t>1$时，原积分$=\dfrac{1}{t}\left[\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{\left(-1\right)^l}{t+1}\right]-\dfrac{1}{t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}P_l'\left(x\right)P_k\left(x\right)dx\right]t^{-k}$

$$=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{\left(-1\right)^l}{t+1}\right]-\frac{2}{t^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}t^{2n-l+1}=\frac{2}{t^{l+1}\left(t^2-1\right)}\text{。}$$

$t<-1$时，原积分$=\dfrac{1}{t}\left[\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{\left(-1\right)^l}{1+t}\right]+\dfrac{1}{t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{1}P_l'\left(x\right)P_k\left(x\right)dx\right]t^{-k}$

$$=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{1-t}+\frac{\left(-1\right)^l}{1+t}\right]+\frac{2}{t^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}t^{2n-l+1}=\frac{2}{t^{l+1}\left(1-t^2\right)}\text{。}$$

284．证明：对于足够小的$\left|t\right|$，下式成立：$\dfrac{1-t^2}{\left(1-2xt+t^2\right)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(2l+1\right)P_l\left(x\right)t^l$。

$$\frac{1-t^2}{\left(1-2xt+t^2\right)^{3/2}}=\left(\frac{1}{t}-t\right)\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\left(\frac{1}{t}-t\right)\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^{l-1}-\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^{l+1}=1+\sum_{l=1}^{\infty}P_{l+1}'(x)t^l-\sum_{l=1}^{\infty}P_{l-1}'(x)t^l$$

$$=1+\sum_{l=1}^{\infty}\left[P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)\right]t^l=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)t^l \text{ 。}$$

285．利用$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\dfrac{1}{1-xt}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2\left(x^2-1\right)/\left(1-xt\right)^2}}$证明：

$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}\dfrac{l!}{2^{2k}(k!)^2(l-2k)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k}$ 。

$$\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\frac{1}{1-xt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{t^2\left(x^2-1\right)}{(1-xt)^2}}}=\frac{1}{1-xt}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left[\frac{-t^2\left(x^2-1\right)}{(1-xt)^2}\right]^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}t^{2k}\left(x^2-1\right)^k(1-xt)^{-2k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!t^{2k}\left(x^2-1\right)^k}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2k-1}{n}(-xt)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{2^{2k}(k!)^2n!}\left(x^2-1\right)^k x^n t^{2k+n} \text{ 。}$$

令$2k+n=l$，则上式$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[l/2]}\dfrac{l!}{2^{2k}(k!)^2(l-2k)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k}t^l$ ，

所以$P_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}\dfrac{l!}{2^{2k}(k!)^2(l-2k)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k}$ 。

286．利用上题结果证明：$e^{xt}J_0\left(t\sqrt{1-x^2}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{P_l(x)}{l!}t^l$ ，其中$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$ 。

$\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{P_l(x)}{l!}t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[l/2]}\dfrac{1}{2^{2k}(k!)^2(l-2k)!}\left(x^2-1\right)^k x^{l-2k}t^l$，令$2k+n=l$，则

上式$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}\left(k!\right)^2 n!}\left(x^2-1\right)^k x^n t^{2k+n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(xt\right)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k}{\left(k!\right)^2}\left(\frac{t\sqrt{1-x^2}}{2}\right)^{2k}$

$=e^{xt}J_0\left(t\sqrt{1-x^2}\right)$。

287．在上题中分别令 $x=\cos\alpha$， $t=r\sin\beta$ 及 $x=\cos\beta$， $t=r\sin\alpha$，从而推出：

$$P_l\left(\cos\alpha\right)=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^l\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}\left[\frac{\sin\left(\beta-\alpha\right)}{\sin\alpha}\right]^{l-k}P_k\left(\cos\beta\right)\text{。}$$

上题中分别令 $x=\cos\alpha$， $t=r\sin\beta$ 及 $x=\cos\beta$， $t=r\sin\alpha$ 可得：

$$e^{r\cos\alpha\sin\beta}J_0\left(r\sin\alpha\sin\beta\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l\left(\cos\alpha\right)\sin^l\beta}{l!}r^l\text{，}$$

$$e^{r\sin\alpha\cos\beta}J_0\left(r\sin\alpha\sin\beta\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l\left(\cos\beta\right)\sin^l\alpha}{l!}r^l\text{。}$$

由以上两式消去 $J_0\left(r\sin\alpha\sin\beta\right)$ 可得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l\left(\cos\alpha\right)\sin^l\beta}{l!}r^l=e^{r\sin\left(\beta-\alpha\right)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l\left(\cos\beta\right)\sin^l\alpha}{l!}r^l$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^k\left(\beta-\alpha\right)}{k!}r^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l\left(\cos\beta\right)\sin^l\alpha}{l!}r^l=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{P_k\left(\cos\beta\right)\sin^k\alpha}{k!}r^k\,\frac{\sin^{l-k}\left(\beta-\alpha\right)}{\left(l-k\right)!}r^{l-k}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!(l-k)!}\sin^k\alpha\sin^{l-k}\left(\beta-\alpha\right)P_k\left(\cos\beta\right)r^l\text{。}$$

两边比较系数得 $\frac{P_l\left(\cos\alpha\right)\sin^l\beta}{l!}=\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!(l-k)!}\sin^k\alpha\sin^{l-k}\left(\beta-\alpha\right)P_k\left(\cos\beta\right)$，

即 $P_l\left(\cos\alpha\right)=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^l\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}\left[\frac{\sin\left(\beta-\alpha\right)}{\sin\alpha}\right]^{l-k}P_k\left(\cos\beta\right)$。

288．计算下列积分：（1） $\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)P_k'\left(x\right)P_l'\left(x\right)dx$；（2） $\int_{-1}^{1}P_k'\left(x\right)P_l'\left(x\right)dx$。

（1）原积分$=\left(1-x^2\right)P_k\left(x\right)P_l'\left(x\right)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_k\left(x\right)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_l'\left(x\right)\right]dx$

$$=l(l+1)\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(k)dx=\frac{2l(l+1)}{2l+1}\delta_{kl}\text{。}$$

（2）不妨设$k\geq l$，则原积分

$$=P_k(x)P_l'(x)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l''(x)dx=\frac{1}{2}l(l+1)\left[1-(-1)^{l+k+1}\right]\text{。}$$

当$k+l$为偶数时，积分值为$l(l+1)$，$k+l$为奇数时，积分值为 0。

289．计算下列积分：（1）$\int_{0}^{1}P_k(x)P_l(x)dx$；（2）$\int_{-1}^{1}xP_k(x)P_{k+1}(x)dx$；

（3）$\int_{-1}^{1}x^2P_k(x)P_{k+2}(x)dx$；（4）$\int_{-1}^{1}\left[xP_k(x)\right]^2dx$。

（1）当$k+l$为偶数时，$\int_{0}^{1}P_k(x)P_l(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx=\frac{1}{2l+1}\delta_{kl}$。 （**）

当$k+l$为奇数时，设$k=2n$，$l=2m+1$，令 274 题中$x=0$得

$$\int_{0}^{1}P_k(t)P_l(t)dt=\frac{P_{2n}'(0)P_{2m+1}(0)-P_{2m+1}'(0)P_{2n}(0)}{2n(2n+1)-(2m+1)(2m+2)}$$

$$=\frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)}\frac{(2n)!(2m+1)!}{2^{2(m+n)}(m!)^2(n!)^2}\text{。} \quad (*)$$

（2）由递推关系，$xP_k(x)=\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x)+\frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)$，

原积分$=\frac{k+1}{2k+1}\int_{-1}^{1}P_{k+1}^2(x)dx+\frac{k}{2k+1}\int_{-1}^{1}P_{k-1}(x)P_{k+1}(x)dx=\frac{2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$。

（3）$xP_{k+2}(x)=\frac{k+3}{2k+5}P_{k+3}(x)+\frac{k+2}{2k+5}P_{k+1}(x)$，原积分

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x)+\frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)\right]\left[\frac{k+3}{2k+5}P_{k+3}(x)+\frac{k+2}{2k+5}P_{k+1}(x)\right]dx$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+5)}\int_{-1}^{1}P_{k+1}^2(x)dx=\frac{2(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}\text{。}$$

（4）原积分

$$=\int_{-1}^{1}\left[\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x)+\frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)\right]^2dx=\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^2\int_{-1}^{1}P_{k+1}^2(x)dx+\left(\frac{k}{2k+1}\right)^2\int_{-1}^{1}P_{k-1}^2(x)dx$$

$$=\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^2\frac{2}{2k+3}+\left(\frac{k}{2k+1}\right)^2\frac{2}{2k-1}=\frac{2(2k^2+2k-1)}{(2k+3)(2k+1)(2k-1)}\text{。}$$

290．将下列函数按 Legendre 多项式展开：（1） $f(x)=x^2$；（2） $f(x)=|x|$；

（3） $f(x)=\begin{cases}0,-1\le x<0\\ x,0\le x\le 1\end{cases}$；（4） $f(x)=\sqrt{1-2xt+t^2}$ 。

（1） $f(x)=a_2P_2(x)+a_0P_0(x)$， $a_2=\dfrac{5}{2}\int_{-1}^{1}x^2P_2(x)dx=\dfrac{2}{3}$， $a_0=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=\dfrac{1}{3}$，

即 $f(x)=\dfrac{2}{3}P_2(x)+\dfrac{1}{3}P_0(x)$ 。

（2） $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}P_{2k}(x)$ 。

$$a_{2k}=\frac{4k+1}{2}\int_{-1}^{1}|x|P_{2k}(x)dx=(4k+1)\int_{0}^{1}xP_{2k}(x)dx=(4k+1)\int_{0}^{1}P_1(x)P_{2k}(x)dx,$$

由上题（*）式得 $a_{2k}=\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)(2k-1)}$ 。

即 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2k+1}(k!)^2(k+1)(2k-1)}P_{2k}(x)$ 。

（3） $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}|x|=\dfrac{1}{2}P_1(x)+\dfrac{1}{2}|x|=\dfrac{1}{2}P_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}(2k)!(4k+1)}{2^{2(k+1)}(k!)^2(k+1)(2k-1)}P_{2k}(x)$ 。

（4）记 $F(x,u)=\sqrt{1-2xu+u^2}$ ，则

$$\frac{\partial F(x,u)}{\partial u}=\frac{u-x}{\sqrt{1-2xu+u^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)u^{l+1}-\sum_{l=0}^{\infty}xP_l(x)u^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)u^{l+1}-P_1(x)-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(x)u^l-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{2l+1}P_{l-1}(x)u^l$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)u^{l+1}-P_1(x)-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{l}{2l-1}P_l(x)u^{l-1}-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{2l+3}P_l(x)u^{l+1}$$

$$=\frac{2}{3}uP_0(x)+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{l+2}{2l+3}u^{l+1}-\frac{l}{2l-1}u^{l-1}\right)P_l(x)。$$

两边对 u 从 0 积到 t 得

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}t^2+1\right)P_0(x)+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{t^{l+2}}{2l+3}-\frac{t^l}{2l-1}\right)P_l(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{t^{l+2}}{2l+3}-\frac{t^l}{2l-1}\right)P_l(x)。$$

291．定义 $Q_l(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_l(t)}{x-t}dt$，（1）证明 $Q_l(x)$ 是 Legendre 方程的解；

（2）求出 $Q_0(x)$，$Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 的表达式。

（1）$\frac{dQ_l(x)}{dx}=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_l(t)}{(x-t)^2}dt$，

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dQ_l(x)}{dx}\right]=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_l(t)\frac{d}{dx}\frac{1-x^2}{(x-t)^2}dt=-\int_{-1}^{1}P_l(t)\frac{xt-1}{(x-t)^3}dt\text{。}$$

$$l(l+1)Q_l(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{l(l+1)P_l(t)}{x-t}dt=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-t}\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)P_l'(t)\right]dt$$

$$=-\frac{1}{x-t}(1-t^2)P_l'(x)\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}P_l'(t)\frac{1-t^2}{(x-t)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}P_l(t)\frac{1-t^2}{(x-t)^2}\Bigg|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}P_l(t)\frac{xt-1}{(x-t)^3}dt=\int_{-1}^{1}P_l(t)\frac{xt-1}{(x-t)^3}dt\text{。}$$

所以 $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dQ_l(x)}{dx}\right]+l(l+1)Q_l(x)=0$。

（2）若 $x\in(-1,1)$，则 $\int_{-1}^{1}\frac{P_l(t)}{x-t}dt$ 是瑕积分，这时取其主值。

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-t}dt=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln|x-t|\Big|_{-1}^{x-\varepsilon}+\ln|x-t|\Big|_{x+\varepsilon}^{1}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\text{。}$$

$$Q_1(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t}{x-t}dt=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{x-t}\right)dt=-1+xQ_0(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-1\text{。}$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_2(t)}{x-t}dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{tP_1(t)}{x-t}dt-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_0(t)}{x-t}dt$$

$$=\frac{3x}{2}Q_1(x)-\frac{1}{2}Q_0(x)=\frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x\text{。}$$

$x>1$ 或 $x<-1$ 时也可得上面结果。

292. 求解下列本征值问题：（1）$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0\\ y(0)=0,y(1)\text{有界}\end{cases}$；（2）$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0\\ y'(0)=0,y(1)\text{有界}\end{cases}$。

令 $\lambda=\nu(\nu+1)$，求出方程在 $x=0$ 的两个独立级数解：

$$y_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1+\nu)(2n-3+\nu)\cdots(1+\nu)}{(2n)!}\left[2(n-1)-\nu\right]\left[2(n-2)-\nu\right]\cdots(-\nu)x^{2n},$$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+\nu)(2n-2+\nu)\cdots(2+\nu)}{(2n+1)!}\left[2(n-1)+1-\nu\right]\left[2(n-2)+1-\nu\right]\cdots(1-\nu)x^{2n+1}。$$

$y_0(x)$为偶函数，$y_1(x)$为奇函数。一般地，$y_0(x)$和$y_1(x)$在$x=\pm1$是发散的。

（1）为使$y(0)=0$，只能取$y_1(x)$。当$\nu=2l+1$（$l=0,1,\cdots$）时，因子

$$\left[2(n-1)+1-\nu\right]\left[2(n-2)+1-\nu\right]\cdots(1-\nu)=\left[2(n-1)-2l\right]\left[2(n-2)-2l\right]\cdots(-2l)$$

当$n>l$时为 0，即$y_1(x)$截断为多项式：

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{(2l+2n+1)(2l+2n-1)\cdots(2l+3)}{(2n+1)!}(-1)^n(2l)(2l-2)\cdots\left[2l-2(n-1)\right]x^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{l}\frac{(2l+2n+2)!}{2^{n+1}(2n+1)!(l+n+1)(l+n)\cdots(l+1)(2l+1)!}\frac{(-1)^n2^nl!}{(l-n)!}x^{2n+1}$$

$$=(-1)^l\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}\sum_{n=0}^{l}\frac{(-1)^{l+n}(2l+2n+2)!}{2^{2l+1}(l-n)!(l+n+1)!(2n+1)!}x^{2n+1},$$

令$n=l-k$，则

$$y_1(x)=(-1)^l\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k(4l-2k+2)!}{2^{2l+1}k!(2l-k+1)!(2l-2k+1)!}x^{2l+1-2k}=(-1)^l\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l+1)!}P_{2l+1}(x)$$

所以本征值$\lambda_l=(2l+1)(2l+2)$，本征函数$y_l(x)=P_{2l+1}(x)$（$l=0,1,\cdots$）。

（2）为使$y'(0)=0$，只能取$y_0(x)$。当$\nu=2l$（$l=0,1,\cdots$）时，$y_0(x)$截断为多项式：

$$y_0(x)=(-1)^l\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!}\sum_{n=0}^{l}\frac{(-1)^{l+n}(2l+2n)!}{2^{2l}(l-n)!(l+n)!(2n)!}x^{2n}$$

$$=(-1)^l\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^k(4l-2k)!}{2^{2l}k!(2l-k)!(2l-2k)!}x^{2l-2k}=(-1)^l\frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!}P_{2l}(x)。$$

所以本征值$\lambda_l=2l(2l+1)$，本征函数$y_l(x)=P_{2l}(x)$（$l=0,1,\cdots$）。

293．求解球内定解问题：$\begin{cases}\nabla^2 u=0, r<a \\ u\big|_{r=a}=\begin{cases}u_0, 0\le\theta\le\alpha \\ 0, \alpha<\theta\le\pi\end{cases}\end{cases}$。

将 $r=a$ 的边界条件展开成 Legendre 级数：$u\big|_{r=a}=\begin{cases}u_0, 0\le\theta\le\alpha \\ 0, \alpha<\theta\le\pi\end{cases}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l P_l(\cos\theta)$，则

$c_0=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}u_0\sin\theta d\theta=\frac{u_0}{2}(1-\cos\alpha)$。

$l>0$ 时，$c_l=\frac{2l+1}{2}u_0\int_0^{\alpha}P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2l+1}{2}u_0\int_{\cos\alpha}^{1}P_l(x)dx$

$=\frac{1}{2}u_0\left[\int_{\cos\alpha}^{1}P'_{l+1}(x)dx-\int_{\cos\alpha}^{1}P'_{l-1}(x)dx\right]=\frac{1}{2}u_0\left[P_{l-1}(\cos\alpha)-P_{l+1}(\cos\alpha)\right]$。

可看出问题与 φ 无关。分离变量可得本征函数 $\Theta_l(\theta)=P_l(\cos\theta)$（$l=0,1,\cdots$）。

$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta)$，由于 $u(0,\theta)$ 有界，所以 $B_l=0$，即

$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$。所以 $u(a,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l P_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l P_l(\cos\theta)$，

比较系数得 $A_0=c_0=\frac{u_0}{2}(1-\cos\alpha)$，$A_l=\frac{c_l}{a^l}=\frac{u_0}{2a^l}\left[P_{l-1}(\cos\alpha)-P_{l+1}(\cos\alpha)\right]$，所以

$u(r,\theta)=\frac{u_0}{2}(1-\cos\alpha)+\frac{u_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left[P_{l-1}(\cos\alpha)-P_{l+1}(\cos\alpha)\right]\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta)$。

294. 求解习题 11 第 208 题，假定温度已达稳定。$\begin{cases}\nabla^2 u=0, r<a \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{H}{k}u\right)\Big|_{r=a}=\begin{cases}\frac{M}{k}\cos\theta, 0\le\theta\le\pi/2 \\ 0, \pi/2<\theta\le\pi\end{cases}\end{cases}$

令 $\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{H}{k}u\right)\Big|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l P_l(\cos\theta)$，则

$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{M}{k}\cos\theta P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2l+1}{2}\frac{M}{k}\int_0^1 P_1(x)P_l(x)dx$。

由 289 题（**）式，$c_1=\frac{M}{2k}$，由 289 题（*）式，

$c_{2n}=\frac{4n+1}{2}\frac{M}{k}\int_0^1 P_1(x)P_{2n}(x)dx=\frac{M}{2k}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(2n-1)(n+1)(n!)^2}$。（$n=0,1,\cdots$）

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{H}{k}u\right)\bigg|_{r=a}=\frac{H}{k}A_0+\sum_{l=1}^{\infty}A_l\left(la^{l-1}+\frac{H}{k}a^l\right)P_l(\cos\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}c_lP_l(\cos\theta),$$

对比系数得 $A_1=\dfrac{M}{2}\dfrac{1}{Ha+k}$,

$$A_{2n}=\frac{kc_{2n}}{H+\dfrac{2nk}{a}}\frac{1}{a^{2n}}=\frac{M}{2}\frac{1}{H+\dfrac{2nk}{a}}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(2n-1)(n+1)(n!)^2}\frac{1}{a^{2n}}\quad(n=0,1,\cdots)。$$

$$u(r,\theta)=\frac{M}{2\left(H+\dfrac{k}{a}\right)}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)+\frac{M}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{H+\dfrac{2nk}{a}}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(2n-1)(n+1)(n!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta)。$$

295．求解下列定解问题：$\begin{cases}\nabla^2u=0,a<r<b\\ u|_{r=a}=u_0,u|_{r=b}=u_0\cos^2\theta\end{cases}$。

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta),$$

$$u|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_la^l+\frac{B_l}{a^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)=u_0P_0(\cos\theta),$$

$$u|_{r=b}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lb^l+\frac{B_l}{b^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)=u_0\cos^2\theta=\frac{1}{3}u_0P_0(\cos\theta)+\frac{2}{3}u_0P_2(\cos\theta)。$$

比较系数得 $A_0=\dfrac{b-3a}{3(b-a)}u_0$，$B_0=\dfrac{2ab}{3(b-a)}u_0$，$A_2=\dfrac{2b^3}{3(b^5-a^5)}u_0$，$B_2=\dfrac{2a^5b^3}{3(a^5-b^5)}u_0$，

其他 $A_l=0$，$B_l=0$。所以

$$u(r,\theta)=\frac{b-3a}{3(b-a)}u_0+\frac{2b}{3(b-a)}\frac{a}{r}u_0+\frac{2b^3a^2u_0}{3(b^5-a^5)}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]P_2(\cos\theta)。$$

296．解习题 11 第 209 题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\omega^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(l^2-x^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]=0\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}\text{有界}\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$。

分离变量得$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[\left(l^2-x^2\right)\dfrac{dX(x)}{dx}\right]+\lambda X(x)=0\\ T''(t)+\dfrac{\omega^2}{2}\lambda T(t)=0\end{cases}$。可得本征值问题$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[\left(l^2-x^2\right)\dfrac{dX}{dx}\right]+\lambda X=0\\ X(0)=0,X(l)\text{有界}\end{cases}$，

令$u=\dfrac{x}{l}$，用y表示X，则$\begin{cases}\dfrac{d}{du}\left[\left(1-u^2\right)\dfrac{dy}{du}\right]+\lambda y=0\\ y(0)=0,y(1)\text{有界}\end{cases}$。

第 292 题第（1）小题已得出$\lambda_k=(2k+1)(2k+2)$，$y_k(u)=P_{2k+1}(u)$（$k=0,1,\cdots$），

所以$X_k(x)=P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)$。

可解出$T_k(t)=A_k\sin\omega_k t+B_k\cos\omega_k t$，其中$\omega_k=\sqrt{(k+1)(2k+1)}\omega$。

所以$u(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(A_k\sin\omega_k t+B_k\cos\omega_k t\right)P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)$。

由 289 题（**）式可得$\int_0^1 P_{2k+1}(x)P_{2n+1}(x)dx=\dfrac{1}{4k+3}\delta_{kn}$，

所以有$\int_0^l P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)P_{2n+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)dx=\dfrac{l}{4k+3}\delta_{kn}$。

由初始条件以及上式的正交性可定出$A_k=\dfrac{4k+3}{l\omega_k}\int_0^l\psi(x)P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)dx$，

$B_k=\dfrac{4k+3}{l}\int_0^l\varphi(x)P_{2k+1}\left(\dfrac{x}{l}\right)dx$。

297．设有一半径为a的导体半球，球面温度为1°C，底面温度为0°C，求半球内的稳定温度分布。$\begin{cases}\nabla^2 u=0,r<a\\ u\big|_{\theta=\pi/2}=0,u\big|_{r=a}=1\end{cases}$

分离变量可得本征值问题$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\Theta=0\\ \Theta(0)\text{有界},\Theta(\pi/2)=0\end{cases}$，则

本征值$\lambda_l=(2l+1)(2l+2)$，本征函数$\Theta_l(\theta)=P_{2l+1}(\cos\theta)$（$l=0,1,\cdots$）。

所以$u(r,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}A_l r^{2l+1}P_{2l+1}(\cos\theta)$。

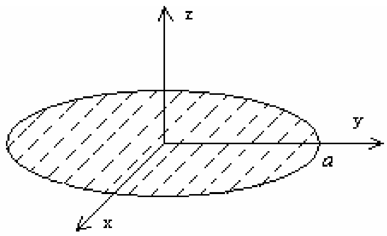
由 289 题（**）式可得$\int_0^{\pi/2}P_{2k+1}(\cos\theta)P_{2l+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\dfrac{1}{4l+3}\delta_{kl}$。

由 289 题（*）式可得$\int_0^{\pi/2}P_0(\cos\theta)P_{2l+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\dfrac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l+1}(l+1)(l!)^2}$。

由初始条件定出$A_l=\dfrac{(-1)^l(2l)!(4l+3)}{2^{2l+1}(l+1)(l!)^2}\dfrac{1}{a^{2l+1}}$，所以

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!(4l+3)}{2^{2l+1}(l+1)(l!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}P_{2l+1}(\cos\theta)。$$

298．一个均匀圆盘，总质量M，半径a，求空间引力势。



$$\begin{cases}\nabla^2u=\dfrac{4GM}{a^2}\dfrac{1}{r}\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\eta(a-r)\\ u\big|_{\theta=0}\text{有界},u\big|_{\theta=\pi}\text{有界}\\ u\big|_{r=0}\text{有界},u\big|_{r\to\infty}=0\end{cases}。$$

将$\delta(\theta-\pi/2)$展开成 Legendre 级数：$\delta(\theta-\pi/2)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}c_lP_l(\cos\theta)$，则

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2l+1}{2}P_l(0),$$

即$\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta)$。

用u_1表示$r<a$的u，u_2表示$r>a$的u，则

$$\begin{cases}\nabla^2 u_1 = \dfrac{4GM}{a^2}\dfrac{1}{r}\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ u_1\big|_{\theta=0}\text{有界}, u_1\big|_{\theta=\pi}\text{有界}, u_1\big|_{r=0}\text{有界}\end{cases}, \quad \begin{cases}\nabla^2 u_2 = 0 \\ u_2\big|_{\theta=0}\text{有界}, u_2\big|_{\theta=\pi}\text{有界}, u_2\big|_{r\to\infty}=0\end{cases},$$

连接条件$u_1\big|_{r=a-0}=u_2\big|_{r=a+0}$，$\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a-0}=\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a+0}$。

u_2解为$u_2(r,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\dfrac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$。

将u_1展开为$u_1(r,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}R_l(r)P_l(\cos\theta)$，代入$u_1$方程得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l\right]P_l(\cos\theta)=\frac{4GM}{a^2 r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta),$$

即$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR_l}{dr}\right)-\dfrac{l(l+1)}{r^2}R_l=\dfrac{4GM}{a^2 r}\dfrac{2l+1}{2}P_l(0)$。

可解得$R_l(r)=A_l r^l-\dfrac{2GM}{a^2}\dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)}P_l(0)r$，这里已去掉了无界项$\dfrac{1}{r^{l+1}}$。

所以$u_1(r,\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l-\dfrac{2GM}{a^2}\dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)}P_l(0)r\right]P_l(\cos\theta)$。

由连接条件可得$A_l a^l-\dfrac{2GM}{a}\dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)}P_l(0)=\dfrac{B_l}{a^{l+1}}$，

$lA_l a^{l-1}-\dfrac{2GM}{a^2}\dfrac{2l+1}{(l+2)(l-1)}P_l(0)=-\dfrac{(l+1)B_l}{a^{l+2}}$（$l=0,1,\cdots$）。

解得$A_l=\dfrac{2GM}{a(l-1)}P_l(0)\dfrac{1}{a^l}$，$B_l=-\dfrac{2GM}{a(l+2)}P_l(0)a^{l+1}$。

再由$P_{2k}(0)=(-1)^k\dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$，$P_{2k+1}(0)=0$可得

$$u_1(r,\theta)=\frac{2GM}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2k-1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}-\frac{4k+1}{(2k+2)(2k-1)}\frac{r}{a}\right]\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}P_{2k}(\cos\theta),$$

$$u_2(r,\theta)=-\frac{GM}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k+1)(k!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\cos\theta)\text{。}$$

299．有一半径为 b 的接地导体球壳，球壳内放一圆环，环半径为 a，环心与球心重合，环上均匀带电，总电荷为 Q。求球内电势。

以球心为圆点，垂直于环面的轴为 z 轴。$\begin{cases}\nabla^2 u=-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ u|_{\theta=0}\text{ 有界},u|_{\theta=\pi}\text{ 有界}\\ u|_{r=0}\text{ 有界},u|_{r=b}=0\end{cases}$。

用 u_1 表示 $r<a$ 的 u，u_2 表示 $a<r<b$ 的 u，则

$\begin{cases}\nabla^2 u_1=0\\ u_1|_{\theta=0}\text{ 有界},u_1|_{\theta=\pi}\text{ 有界},u_1|_{r=0}\text{ 有界}\end{cases}$，$\begin{cases}\nabla^2 u_2=0\\ u_2|_{\theta=0}\text{ 有界},u_2|_{\theta=\pi}\text{ 有界},u_2|_{r=b}=0\end{cases}$，

u 在 $r=a$ 处是关于 r 连续的，即 $u_1|_{r=a-0}=u_2|_{r=a+0}$，否则原方程右边会出现 $\delta'(r-a)$ 项。

原方程写为：$\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=-\dfrac{r^2 Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\delta(r-a)\delta\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

两边对 r 在 $[a-\varepsilon,a+\varepsilon]$ 上积分，取极限得

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a+0}-\left.\frac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a-0}=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta)\text{。}$$

综上，连接条件为 $\begin{cases}u_1|_{r=a-0}=u_2|_{r=a+0}\\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=a+0}-\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial r}\right|_{r=a-0}=-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(0)P_l(\cos\theta)\end{cases}$。

可得 $u_1(r,\theta)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$，$u_2(r,\theta)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(B_l r^l+\frac{C_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$。

由边界条件 $u_2|_{r=b}=0$ 得 $C_l=-B_l b^{2l+1}$，即 $u_2(r,\theta)=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(r^l-\frac{b^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)B_l P_l(\cos\theta)$。

由连接条件得 $A_l a^l=\left(a^l-\dfrac{b^{2l+1}}{a^{l+1}}\right)B_l$，$\left[la^{l-1}+\dfrac{(l+1)b^{2l+1}}{a^{l+2}}\right]B_l-lA_l a^{l-1}=-\dfrac{Q(2l+1)}{4\pi\varepsilon_0 a^2}P_l(0)$。

解得 $A_l=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a^{l+1}}-\dfrac{a^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(0)$，$B_l=-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{a^l}{b^{2l+1}}P_l(0)$。

所以 $u_1(r,\theta)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\left[\left(\dfrac{r}{a}\right)^l-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{l+1}\left(\dfrac{r}{b}\right)^l\right]P_l(0)P_l(\cos\theta)$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+1}\left(\frac{r}{b}\right)^{2k}\right]P_{2k}(\cos\theta)。$$

$$u_2(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^l-\left(\frac{a}{b}\right)^l\left(\frac{r}{b}\right)^{l+1}\right]P_l(0)P_l(\cos\theta)$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{2k}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2k}\left(\frac{r}{b}\right)^{2k+1}\right]P_{2k}(\cos\theta)。$$

300. 将下列函数按球谐函数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ 展开：（1）$\sin^2\theta\cos^2\varphi$；（2）$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$。

（1）$\sin^2\theta\cos^2\varphi=\dfrac{1}{2}(1-x^2)(1+\cos2\varphi)=\dfrac{1}{2}(1-x^2)+\dfrac{1}{4}(1-x^2)\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)$

$$=\frac{1}{3}P_0^0(x)-\frac{1}{3}P_2^0(x)+\frac{1}{12}P_2^2(x)\left(e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}}{3}Y_0^0(\theta,\varphi)-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}Y_2^0(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{2\pi}{15}}Y_2^2(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{2\pi}{15}}Y_2^{-2}(\theta,\varphi)。$$

（2）$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi=\dfrac{1}{2}(1+3x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)$

$$=-\frac{1}{2}P_1^1(x)\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)-\frac{1}{2}P_2^1(x)\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)$$

$$=-\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_1^1(\theta,\varphi)-\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_1^{-1}(\theta,\varphi)-\sqrt{\frac{6\pi}{5}}Y_2^1(\theta,\varphi)-\sqrt{\frac{6\pi}{5}}Y_2^{-1}(\theta,\varphi)。$$

301. 在半径为 a 的（1）球内区域，（2）球外区域，求解：$\begin{cases}\nabla^2u=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$。

（1）$u(r,\theta,\varphi)=A_{0,0}+\sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{l}A_{l,m}r^lY_l^m(\theta,\varphi)$，这里去掉了无界项 $\dfrac{1}{r^{l+1}}$。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}lA_{l,m}a^{l-1}Y_l^m(\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi),$$

求得 $A_{l,m}=\dfrac{1}{la^{l-1}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_l^{m*}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$（$l=1,2,\cdots$）。

由于所给边界条件只是导数值，所以 $A_{0,0}$ 不定，即零电位点可任意选取。

（2）$u(r,\theta,\varphi)=A_{0,0}+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\dfrac{B_{l,m}}{r^{l+1}}Y_l^m(\theta,\varphi)$，这里去掉了有界项 r^l（$l=1,2,\cdots$）。

$$B_{l,m}=-\frac{a^{l+2}}{l+1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_l^{m*}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi。$$

302．一半径为 a 的均匀导体球，表面温度为（1）$u|_{r=a}=P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$，

（2）$u|_{r=a}=P_1(\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$，求出球内的稳定温度分布。

（1）$u=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^lP_l^m(\cos\theta)\left(A_{l,m}\cos m\varphi+B_{l,m}\sin m\varphi\right)$。

由边界条件可看出 $u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{r}{a}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi=-\dfrac{r}{a}\sin\theta\cos\varphi$。

（2）$u|_{r=a}=-\dfrac{1}{3}P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$，

可看出 $u(r,\theta,\varphi)=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi=\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi$。

303．求解球内问题：$\begin{cases}\nabla^2u=A+Br^2\sin2\theta\cos\varphi\\ u|_{r=a}=0\end{cases}$。

令 $u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}P_l^m(\cos\theta)\left[R_{l,m}(r)\sin m\varphi+S_{l,m}(r)\cos m\varphi\right]$，代入方程得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{l,m}}{dr}\right)-l(l+1)R_{l,m}\right]P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dS_{l,m}}{dr}\right)-l(l+1)S_{l,m}\right]P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$=A+Br^2\sin 2\theta\cos\varphi=AP_0^0\left(\cos\theta\right)-\frac{2}{3}Br^2P_2^1\left(\cos\theta\right)\cos\varphi\text{。}$$

所以 $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{l,m}}{dr}\right)-l\left(l+1\right)R_{l,m}=0$，$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dS_{0,0}}{dr}\right)=Ar^2$，$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dS_{2,1}}{dr}\right)-6S_{2,1}=-\frac{2}{3}Br^4$，

其他 $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dS_{l,m}}{dr}\right)-l\left(l+1\right)S_{l,m}=0$。

由边界条件 $R_{l,m}\left(a\right)=0$，$S_{l,m}\left(a\right)=0$ 以及自然条件 $R_{l,m}\left(0\right)$，$S_{l,m}\left(0\right)$ 有界，解以上各常微分方程可得

$R_{l,m}\left(r\right)=0$，$S_{0,0}\left(r\right)=\frac{A}{6}\left(r^2-a^2\right)$，$S_{2,1}\left(r\right)=\frac{1}{21}Br^2\left(a^2-r^2\right)$，其他 $S_{l,m}\left(r\right)=0$。

所以 $u\left(r,\theta,\varphi\right)=\frac{A}{6}\left(r^2-a^2\right)+\frac{B}{21}r^2\left(a^2-r^2\right)P_2^1\left(\cos\theta\right)\cos\varphi$

$$=\frac{A}{6}\left(r^2-a^2\right)+\frac{B}{14}r^2\left(r^2-a^2\right)\sin 2\theta\cos\varphi\text{。}$$

附录：

关于 $P_l^m\left(x\right)$ 的定义，这里采用 $P_l^m\left(x\right)=\left(-1\right)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l\left(x\right)}{dx^m}$，

原习题集答案采用 $P_l^m\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_l\left(x\right)}{dx^m}$。

304．计算 Wronski 行列式$W\left(J_\nu,J_{-\nu}\right)$及$W\left(J_\nu,Y_\nu\right)$，其中$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$。

由 Bessel 方程，$\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_\nu\left(x\right)}{dx}\right]+x\left(1-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu\left(x\right)=0$，

$\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_{-\nu}\left(x\right)}{dx}\right]+x\left(1-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right)J_{-\nu}\left(x\right)=0$。

第一式两边乘$J_{-\nu}\left(x\right)$减去第二式两边乘$J_\nu\left(x\right)$得

$J_{-\nu}\left(x\right)\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_\nu\left(x\right)}{dx}\right]-J_\nu\left(x\right)\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dJ_{-\nu}\left(x\right)}{dx}\right]=0$。

继续化为$J_{-\nu}\left(x\right)J_\nu'\left(x\right)-J_\nu\left(x\right)J_{-\nu}'\left(x\right)+x\left[J_{-\nu}\left(x\right)J_\nu''\left(x\right)-J_\nu\left(x\right)J_{-\nu}''\left(x\right)\right]=0$，

即$\dfrac{d}{dx}\left\{x\left[J_{-\nu}\left(x\right)J_\nu'\left(x\right)-J_\nu\left(x\right)J_{-\nu}'\left(x\right)\right]\right\}=0$，

所以$x\left[J_{-\nu}\left(x\right)J_\nu'\left(x\right)-J_\nu\left(x\right)J_{-\nu}'\left(x\right)\right]=C$（常数）。

由$J_\nu\left(x\right)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k}{k!\Gamma\left(\nu+k+1\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$，$J_{-\nu}\left(x\right)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^k}{k!\Gamma\left(-\nu+k+1\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$，

$J_\nu'\left(x\right)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(2k+\nu\right)\left(-1\right)^k}{2^{2k}k!\Gamma\left(\nu+k+1\right)}x^{2k-1}$，$J_{-\nu}'\left(x\right)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(2k-\nu\right)\left(-1\right)^k}{2^{2k}k!\Gamma\left(-\nu+k+1\right)}x^{2k-1}$

可确定常数C。

$$C=\frac{1}{\Gamma\left(-\nu+1\right)}\frac{\nu}{\Gamma\left(\nu+1\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(\nu+1\right)}\frac{-\nu}{\Gamma\left(-\nu+1\right)}=\frac{2\nu}{\Gamma\left(\nu+1\right)\Gamma\left(-\nu+1\right)}=\frac{2}{\Gamma\left(\nu\right)\Gamma\left(1-\nu\right)}=\frac{2\sin\pi\nu}{\pi},$$

所以$W\left(J_\nu,J_{-\nu}\right)=J_\nu\left(x\right)J_{-\nu}'\left(x\right)-J_{-\nu}\left(x\right)J_\nu'\left(x\right)=-\dfrac{C}{x}=-\dfrac{2\sin\pi\nu}{\pi x}$，

$$W\left(J_\nu,Y_\nu\right)=\begin{vmatrix} J_\nu & Y_\nu \\ J_\nu' & Y_\nu' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} J_\nu & \cot\pi\nu J_\nu-\dfrac{1}{\sin\pi\nu}J_{-\nu} \\ J_\nu' & \cot\pi\nu J_\nu'-\dfrac{1}{\sin\pi\nu}J_{-\nu}' \end{vmatrix}=\cot\pi\nu\begin{vmatrix} J_\nu & J_\nu \\ J_\nu' & J_\nu' \end{vmatrix}-\frac{1}{\sin\pi\nu}\begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J_\nu' & J_{-\nu}' \end{vmatrix}=\frac{2}{\pi x}。$$

305．利用上题结果计算下列积分：（1）$\displaystyle\int\frac{dx}{xJ_\nu^2\left(x\right)}$；（2）$\displaystyle\int\frac{dx}{xY_\nu^2\left(x\right)}$；（3）$\displaystyle\int\frac{dx}{xJ_\nu\left(x\right)Y_\nu\left(x\right)}$；

（4）$\displaystyle\int\frac{dx}{x\left[J_\nu^2\left(x\right)+Y_\nu^2\left(x\right)\right]}$。

（1）将 $J_\nu(x)J'_{-\nu}(x)-J_{-\nu}(x)J'_\nu(x)=-\dfrac{2\sin\pi\nu}{\pi x}$ 两边同乘 $-\dfrac{\pi}{2\sin\pi\nu}\dfrac{1}{J_\nu^2(x)}$ 得

$$\frac{1}{xJ_\nu^2(x)}=-\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{J_\nu(x)J'_{-\nu}(x)-J_{-\nu}(x)J'_\nu(x)}{J_\nu^2(x)}=-\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{d}{dx}\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)},$$

所以 $$\int\frac{dx}{xJ_\nu^2(x)}=-\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\int d\,\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)}=-\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)}+C$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\cot\pi\nu-\frac{1}{\sin\pi\nu}\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)}\right]+C'=\frac{\pi}{2}\frac{\cos\pi\nu J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu J_\nu(x)}+C'$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)}+C'。$$

（2）由 $W(J_\nu,Y_\nu)=J_\nu(x)Y'_\nu(x)-J'_\nu(x)Y_\nu(x)=\dfrac{2}{\pi x}$ 可得 $\dfrac{1}{xY_\nu^2(x)}=-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{d}{dx}\dfrac{J_\nu(x)}{Y_\nu(x)}$，

所以 $$\int\frac{dx}{xY_\nu^2(x)}=-\frac{\pi}{2}\frac{J_\nu(x)}{Y_\nu(x)}+C。$$

（3）将 $J_\nu Y'_\nu-J'_\nu Y_\nu=\dfrac{2}{\pi x}$ 两边同乘 $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{J_\nu Y_\nu}$ 得 $\dfrac{1}{xJ_\nu(x)Y_\nu(x)}=\dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{Y'_\nu(x)}{Y_\nu(x)}-\dfrac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)}\right]$，

所以 $$\int\frac{dx}{xJ_\nu(x)Y_\nu(x)}=\frac{\pi}{2}\int\left[\frac{Y'_\nu(x)}{Y_\nu(x)}-\frac{J'_\nu(x)}{J_\nu(x)}\right]dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)}+C。$$

（4）将 $J_\nu Y'_\nu-J'_\nu Y_\nu=\dfrac{2}{\pi x}$ 两边同乘 $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{J_\nu^2+Y_\nu^2}$ 得

$$\frac{1}{x\left[J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)\right]}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\left[Y_\nu(x)/J_\nu(x)\right]^2}\frac{d}{dx}\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)},$$ 所以

$$\int\frac{dx}{x\left[J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)\right]}=\frac{\pi}{2}\arctan\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)}+C。$$

306．有很多方程经过适当的自变量或因变量变换可化为 Bessel 方程而得到他的解。例如，方程 $u''+\dfrac{1-2\alpha}{z}u'+\left[\left(\beta\gamma z^{\gamma-1}\right)^2+\dfrac{\alpha^2-\gamma^2\nu^2}{z^2}\right]u=0$ 的通解为 $c_1z^\alpha J_\nu\left(\beta z^\gamma\right)+c_2z^\alpha Y_\nu\left(\beta z^\gamma\right)$。试验证此结果。

令 $x=\beta z^\gamma$，$u=z^\alpha y$，则

$$\frac{du}{dz}=\alpha z^{\alpha-1}y+z^{\alpha}\frac{dy}{dz}=\alpha z^{\alpha-1}y+\beta\gamma z^{\alpha+\gamma-1}\frac{dy}{dx}=\alpha z^{\alpha-1}y+\gamma xz^{\alpha-1}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\alpha\left(\alpha-1\right)z^{\alpha-2}y+\alpha z^{\alpha-1}\frac{dy}{dz}+\beta\gamma\left(\alpha+\gamma-1\right)z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx}+\beta\gamma z^{\alpha+\gamma-1}\frac{d}{dz}\frac{dy}{dx}$$

$$=\alpha\left(\alpha-1\right)z^{\alpha-2}y+\alpha\beta\gamma z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx}+\beta\gamma\left(\alpha+\gamma-1\right)z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx}+\beta^2\gamma^2z^{\alpha+2\gamma-2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$=\alpha\left(\alpha-1\right)z^{\alpha-2}y+\beta\gamma\left(2\alpha+\gamma-1\right)z^{\alpha+\gamma-2}\frac{dy}{dx}+\beta^2\gamma^2z^{\alpha+2\gamma-2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$=\alpha\left(\alpha-1\right)z^{\alpha-2}y+\gamma\left(2\alpha+\gamma-1\right)xz^{\alpha-2}\frac{dy}{dx}+\gamma^2x^2z^{\alpha-2}\frac{d^2y}{dx^2}。$$

代入方程，化简得 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$，

这是 ν 阶 Bessel 方程，通解为 $y=c_1J_\nu\left(x\right)+c_2Y_\nu\left(x\right)$，

所以 $u=z^\alpha y=c_1z^\alpha J_\nu\left(x\right)+c_2z^\alpha Y_\nu\left(x\right)=c_1z^\alpha J_\nu\left(\beta z^\gamma\right)+c_2z^\alpha Y_\nu\left(\beta z^\gamma\right)$。

307. 利用上题结果，解下列常微分方程：（1）$u''+az^bu=0$；（2）$z^2u''-2zu'+4\left(z^4-1\right)u=0$；（3） $zu''-3u'+zu=0$；（4） $zu''-u'+4z^3u=0$；（5） $z^2u''+zu'-\left(z^2+1/4\right)u=0$；（6） $zu''-u'-zu=0$；（7） $u''-z^2u=0$；（8）一单摆在其平衡位置附近作微小振动，若摆长以等速率 b 增长，而初始时摆长为 a，则其动力学方程为 $\left(a+bt\right)\ddot{\theta}+2b\dot{\theta}+g\theta=0$。设 $t=0$ 时单摆静止于 $\theta\left(0\right)=\theta_0$ 处，试求 $\theta\left(t\right)$。

（1）可看出，令上题中 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{2\sqrt{a}}{b+2}$，$\gamma=\dfrac{b}{2}+1$，$\nu=\dfrac{1}{b+2}$ 即可得该方程，因此

$$u=c_1\sqrt{z}J_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}z^{\frac{b}{2}+1}\right)+c_2\sqrt{z}Y_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}z^{\frac{b}{2}+1}\right)。$$

（2）$\alpha=\dfrac{3}{2}$，$\beta=1$，$\gamma=2$，$\nu=\dfrac{5}{4}$，$u=c_1z^{3/2}J_{5/4}\left(z^2\right)+c_2z^{3/2}Y_{5/4}\left(z^2\right)$。

（3）$\alpha=2$，$\beta=1$，$\gamma=1$，$\nu=2$，$u=c_1z^2J_2\left(z\right)+c_2z^2Y_2\left(z\right)$。

（4）$\alpha=1$，$\beta=1$，$\gamma=2$，$\nu=1/2$，$u=c_1zJ_{1/2}\left(z^2\right)+c_2zY_{1/2}\left(z^2\right)$。

（5）$\alpha=0$，$\beta=i$，$\gamma=1$，$\nu=1/2$，$u=c_1J_{1/2}(iz)+c_2Y_{1/2}(iz)=c_1'I_{1/2}(z)+c_2'K_{1/2}(z)$。

（6）$\alpha=1$，$\beta=i$，$\gamma=1$，$\nu=1$，$u=c_1zI_1(z)+c_2zK_1(z)$。

（7）$\alpha=1/2$，$\beta=i/2$，$\gamma=2$，$\nu=1/2$，$u=c_1\sqrt{z}I_{1/2}\left(\frac{1}{2}z^2\right)+c_2\sqrt{z}K_{1/2}\left(\frac{1}{2}z^2\right)$。

（8）令 $a+bt=x$，则方程化为 $x\frac{d^2\theta}{dx^2}+2\frac{d\theta}{dx}+\frac{g}{b^2}\theta=0$，令上题 $\alpha=-\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{2}{b}\sqrt{g}$，$\gamma=1/2$，$\nu=1$ 即为该方程，所以

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gx}\right)+c_2Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gx}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{a+bt}}\left[c_1J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a+bt)}\right)+c_2Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a+bt)}\right)\right]。$$

代入初始条件 $\theta(0)=\theta_0$，$\dot{\theta}(0)=0$ 可得

$$c_1=\frac{b\theta_0}{2\sqrt{g}}\frac{Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-\frac{2}{b}\sqrt{ga}Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)}{J_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)}$$，根据 304 题求出的 Wronski 行列式可知 $J_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)=-\frac{b}{\pi\sqrt{ga}}$，所以

$$c_1=\frac{\pi\sqrt{a}}{2}\theta_0\left[-Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)+\frac{2}{b}\sqrt{ga}Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)\right]$$，还可得

$$c_2=\frac{\pi\sqrt{a}}{2}\theta_0\left[J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-\frac{2}{b}\sqrt{ga}J_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)\right]。$$

308．证明：（1）$\cos x=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nJ_{2n}(x)$，$\sin x=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nJ_{2n+1}(x)$。

（2）$J_0^2(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2(x)=1$；（3）$x=2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)J_{2n+1}(x)$；（4）$x^2=2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^2J_{2n}(x)$。

（1）令 $\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$ 中 $t=e^{i\theta}$，则有 $e^{ix\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)e^{in\theta}$，（a）

这是 $e^{ix\sin\theta}$ 的 Fourior 级数表示。比较两边实部和虚部有

$$\cos\left(x\sin\theta\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\left(x\right)\cos n\theta=J_0\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n\left(x\right)\cos n\theta+\sum_{n=-1}^{-\infty}J_n\left(x\right)\cos n\theta$$

$$=J_0\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n\left(x\right)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}\left(x\right)\cos n\theta=J_0\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n\left(x\right)\left[1+\left(-1\right)^n\right]\cos n\theta$$

$$=J_0\left(x\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}\left(x\right)\cos 2n\theta\text{。}\qquad\text{（b）}$$

令 $\theta=\pi/2$ 既可得 $\cos x=J_0\left(x\right)+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n J_{2n}\left(x\right)$。

$$\sin\left(x\sin\theta\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n\left(x\right)\sin n\theta=\sum_{n=1}^{\infty}J_n\left(x\right)\sin n\theta+\sum_{n=-1}^{-\infty}J_n\left(x\right)\sin n\theta$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}J_n\left(x\right)\sin n\theta-\sum_{n=1}^{\infty}J_{-n}\left(x\right)\sin n\theta=\sum_{n=1}^{\infty}J_n\left(x\right)\left[1-\left(-1\right)^n\right]\sin n\theta$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}\left(x\right)\sin\left(2n+1\right)\theta\text{。}\qquad\text{（c）}$$

令 $\theta=\pi/2$ 既可得 $\sin x=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n J_{2n+1}\left(x\right)$。

（2）由复 Fourior 级数的 Parseval 等式，对于（a）式有

$$J_0^2\left(x\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{ix\sin\theta}\right|^2 d\theta=1\text{。}$$

（3）将（a）式两边对 θ 求导得 $ix\cos\theta e^{ix\sin\theta}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}inJ_n\left(x\right)e^{in\theta}$，（d）

令 $\theta=0$ 得 $x=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nJ_n\left(x\right)+\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}nJ_n\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nJ_n\left(x\right)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}nJ_{-n}\left(x\right)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\left[1-\left(-1\right)^n\right]J_n\left(x\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)J_{2n+1}\left(x\right)\text{。}$$

（4）将（d）式两边对 θ 求导得 $-x\sin\theta e^{ix\sin\theta}+ix^2\cos^2\theta e^{ix\sin\theta}=i\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}n^2J_n\left(x\right)e^{in\theta}$，

令 $\theta=0$ 得 $x^2=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}n^2J_n\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left[1+\left(-1\right)^n\right]J_n\left(x\right)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n\right)^2 J_{2n}\left(x\right)$。

309．将函数$\cos\left(x\sin\theta\right)$和$\sin\left(x\sin\theta\right)$展为 Fourior 级数。（见上题（b）（c）式）

310．将函数$\cos\left(z\cos\varphi\right)$展开为 z 的幂级数，逐项积分，证明：

$$J_\nu\left(z\right)=\frac{\left(z/2\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_0^\pi\cos\left(z\cos\varphi\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\left(z/2\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_{-1}^1\cos\left(z\xi\right)\left(1-\xi^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi\text{。}$$

其中$\operatorname{Re}\nu>-\dfrac{1}{2}$。这个结果可以用来把“李萨如图形”展开成 Fourior 级数。作为一个例子，试将$y=\sqrt{\pi^2-x^2}$在$\left[-\pi,\pi\right]$上展成 Fourior 级数。

$$\cos\left(z\cos\varphi\right)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n\right)!}\left(z\cos\varphi\right)^{2n}\text{，}$$

$$\int_0^\pi\cos\left(z\cos\varphi\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n\right)!}z^{2n}\int_0^\pi\cos^{2n}\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n\right)!}z^{2n}\int_0^{\pi/2}2\cos^{2n}\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n\right)!}z^{2n}\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n\right)!}z^{2n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^\infty\frac{\left(-1\right)^n}{n!\Gamma\left(n+\nu+1\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}{\left(z/2\right)^\nu}J_\nu\left(z\right)\text{，}$$

即$J_\nu\left(z\right)=\dfrac{\left(z/2\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\displaystyle\int_0^\pi\cos\left(z\cos\varphi\right)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$，再令$\cos\varphi=\xi$即可得

$$J_\nu\left(z\right)=\frac{\left(z/2\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+1/2\right)}\int_{-1}^1\cos\left(z\xi\right)\left(1-\xi^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi\text{。}$$

$\sqrt{\pi^2-x^2}$是偶函数，可令$\sqrt{\pi^2-x^2}=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n\cos nx$，则$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^\pi\sqrt{\pi^2-x^2}\cos nxdx$，

作代换$x=\pi\xi$，则$a_n=\pi\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-\xi^2}\cos\left(n\pi\xi\right)d\xi=\pi\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(3/2\right)J_1\left(n\pi\right)}{n\pi/2}=\frac{\pi J_1\left(n\pi\right)}{n}$，

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}dx=\frac{\pi^2}{2}$，所以$\sqrt{\pi^2-x^2}=\frac{\pi^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi J_1(n\pi)}{n}\cos nx$。

311．证明：$\int xJ_\nu^2(x)dx=\frac{1}{2}x^2\left[J_\nu^2(x)+J_{\nu+1}^2(x)\right]-\nu xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)+C$，其中$\operatorname{Re}\nu\geq 0$，$C$为积分常数。如果把式中的 Bessel 函数换成其他的柱函数，公式还成立吗？

Bessel 方程$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu'(x)\right]+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(x)=0$两边同乘$x^2J_\nu'(x)$得

$xJ_\nu'(x)\frac{d}{dx}\left[xJ_\nu'(x)\right]+\left(x^2-\nu^2\right)J_\nu(x)J_\nu'(x)=0$，两边积分得

$$\frac{1}{2}x^2J_\nu'^2(x)+\int x^2J_\nu(x)J_\nu'(x)dx-\frac{1}{2}\nu^2J_\nu^2(x)+C=0。\qquad (*)$$

其中$\int x^2J_\nu(x)J_\nu'(x)dx=x^2J_\nu^2(x)-\int J_\nu(x)\frac{d}{dx}\left[x^2J_\nu(x)\right]dx$

$$=x^2J_\nu^2(x)-2\int xJ_\nu^2(x)dx-\int x^2J_\nu(x)J_\nu'(x)dx,$$

所以$\int x^2J_\nu(x)J_\nu'(x)dx=\frac{1}{2}x^2J_\nu^2(x)-\int xJ_\nu^2(x)dx$，该式代入（*）式得

$$\int xJ_\nu^2(x)dx=\frac{1}{2}x^2J_\nu'^2(x)+\frac{1}{2}x^2J_\nu^2(x)-\frac{1}{2}\nu^2J_\nu^2(x)+C\qquad (**)$$

将递推公式$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$展开为$-\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x)+x^{-\nu}J_\nu'(x)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$，两边同乘$x^{\nu+1}$可得$xJ_\nu'(x)=\nu J_\nu(x)-xJ_{\nu+1}(x)$，该式代入（**）式即得

$$\int xJ_\nu^2(x)dx=\frac{1}{2}x^2\left[J_\nu^2(x)+J_{\nu+1}^2(x)\right]-\nu xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)+C。$$

上面计算只用到了 Bessel 方程和柱函数的递推公式，所以对其他柱函数也适用。

312．设μ_i是$J_n(x)$的正零点，试证：$\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)xdx=-\frac{\mu_i J_n(\alpha)J_n'(\mu_i)}{\mu_i^2-\alpha^2}$。然后，令$\alpha\to\mu_i$，由此计算出积分$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x)xdx$。

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\mu_i x)}{dx}\right]+\left(\mu_i^2x-\frac{n^2}{x}\right)J_n(\mu_i x)=0,\quad \frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\right]+\left(\alpha^2x-\frac{n^2}{x}\right)J_n(\alpha x)=0。$$

第一式两边乘$J_n(\alpha x)$减去第二式两边乘$J_n(\mu_i x)$，积分得

$$\left(\mu_i^2-\alpha^2\right)\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)xdx=\int_0^1\left\{J_n(\mu_i x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\right]-J_n(\alpha x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_n(\mu_i x)}{dx}\right]\right\}dx$$

$$= xJ_n(\mu_i x)\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx}\Big|_0^1 - xJ_n(\alpha x)\frac{dJ_n(\mu_i x)}{dx}\Big|_0^1$$

$$= \alpha x J_n(\mu_i x) J_n'(\alpha x)\Big|_0^1 - \mu_i x J_n(\alpha x) J_n'(\mu_i x)\Big|_0^1$$

$$= -\mu_i J_n(\alpha) J_n'(\mu_i)\text{。}$$

所以$\int_0^1 J_n(\mu_i x) J_n(\alpha x) x dx = -\dfrac{\mu_i J_n(\alpha) J_n'(\mu_i)}{\mu_i^2 - \alpha^2}$（$\alpha \neq \mu_i$）。

$$\lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{\mu_i J_n(\alpha) J_n'(\mu_i)}{\alpha^2-\mu_i^2} = \lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{\mu_i J_n'(\alpha) J_n'(\mu_i)}{2\alpha} = \frac{1}{2}\left[J_n'(\mu_i)\right]^2,$$

即$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x) x dx = \dfrac{1}{2} J_n'^2(\mu_i)$。（*）

若令$x = \dfrac{\rho}{a}$，则有$\int_0^a J_n^2\left(\dfrac{\mu_i}{a}\rho\right)\rho d\rho = \dfrac{a^2}{2} J_n'^2(\mu_i)$。

313．设μ_i是$J_n'(x)$的正零点，重复上题步骤，计算积分$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x) x dx$。

$$\left(\mu_i^2 - \alpha^2\right)\int_0^1 J_n(\mu_i x) J_n(\alpha x) x dx = \alpha x J_n(\mu_i x) J_n'(\alpha x)\Big|_0^1 - \mu_i x J_n(\alpha x) J_n'(\mu_i x)\Big|_0^1$$

$$= \alpha J_n(\mu_i) J_n'(\alpha),$$

$$\int_0^1 J_n(\mu_i x) J_n(\alpha x) x dx = \frac{\alpha J_n'(\alpha) J_n(\mu_i)}{\mu_i^2 - \alpha^2},$$

$$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x) x dx = \lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{\alpha J_n'(\alpha) J_n(\mu_i)}{\mu_i^2-\alpha^2} = -\lim_{\alpha\to\mu_i}\frac{J_n'(\alpha) J_n(\mu_i) + \alpha J_n''(\alpha) J_n(\mu_i)}{2\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2} J_n''(\mu_i) J_n(\mu_i),$$

取 Bessel 方程$J_n''(x) + \dfrac{1}{x} J'(x) + \left(1 - \dfrac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0$中$x = \mu_i$可得

$J_n''(\mu_i) = -\left(1 - \dfrac{n^2}{\mu_i^2}\right) J_n(\mu_i)$，所以$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x) x dx = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\mu_i^2}\right) J_n^2(\mu_i)$。

若令$x = \dfrac{\rho}{a}$，则有$\int_0^a J_n^2\left(\dfrac{\mu_i}{a}\rho\right)\rho d\rho = \dfrac{a^2}{2}\left(1 - \dfrac{n^2}{\mu_i^2}\right) J_n^2(\mu_i)$。

314．若$\mathrm{Re}\,\nu>-1$，证明：$\frac{1}{2}\int_0^x J_\nu(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}J_{\nu+2n+1}(x)$。

由递推公式$2J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)$可得

$$2\sum_{n=0}^{N}J_{\nu+2n+1}'(x)=2J_{\nu+1}'(x)+2J_{\nu+3}'(x)+\cdots+2J_{\nu+2N+1}'(x)$$

$$=J_\nu(x)-J_{\nu+2}(x)+J_{\nu+2}(x)-J_{\nu+4}(x)-+\cdots+J_{\nu+2N}(x)-J_{\nu+2N+2}(x)$$

$$=J_\nu(x)-J_{\nu+2N+2}(x)。$$

写出$J_{\nu+2N+2}(x)$的级数表达式$J_{\nu+2N+2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+2N+3+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu+2N+2}$，由

$\Gamma(z)$当$z\to\infty$时的渐进公式可知$\lim_{N\to\infty}J_{\nu+2N+2}(x)=0$，即$\frac{1}{2}J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}J_{\nu+2n+1}'(x)$。

两边积分，由于$\mathrm{Re}\,\nu>-1$，故有$J_{\nu+2n+1}(0)=0$，所以$\frac{1}{2}\int_0^x J_\nu(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}J_{\nu+2n+1}(x)$。

315．计算下列积分：（1）$\int_0^x t^{-n}J_{n+1}(t)\,dt$；（2）$\int_0^a x^3J_0(x)\,dx$；（3）$\int_0^\infty e^{-ax}J_0\left(\sqrt{bx}\right)dx$，$a>0$，$b\geq0$；（4）$\int_0^t J_0\left(\sqrt{x(t-x)}\right)dx$。

（1）$\int_0^x t^{-n}J_{n+1}(t)\,dt=-\int_0^x\frac{d}{dt}\left[t^{-n}J_n(t)\right]dt=-x^{-n}J_n(x)+\left.\frac{J_n(t)}{t^n}\right|_{t=0}$。

由$J_n(x)$当$x\to0$时的渐进公式$J_n(x)\sim\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$可知$\left.\frac{J_n(t)}{t^n}\right|_{t=0}=\frac{1}{2^n n!}$，所以

$\int_0^x t^{-n}J_{n+1}(t)\,dt=-x^{-n}J_n(x)+\frac{1}{2^n n!}$。

（2）$\int_0^a x^3J_0(x)\,dx=\int_0^a x^2 xJ_0(x)\,dx=\int_0^a x^2\frac{d}{dx}\left[xJ_1(x)\right]dx=x^3J_1(x)\Big|_0^a-2\int_0^a x^2J_1(x)\,dx$

$$=a^3J_1(a)-2x^2J_2(x)\Big|_0^a=a^3J_1(a)-2a^2J_2(a)。$$

（3）$\int_0^\infty e^{-ax}J_0\left(\sqrt{bx}\right)dx=\int_0^\infty e^{-ax}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{\sqrt{bx}}{2}\right)^{2n}dx=\int_0^\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{bx}{4}\right)^n e^{-ax}dx$。

在 x 的任一有界区域 $0\le x\le M$ 有 $\left|\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{bx}{4}\right)^n e^{-ax}\right|\le\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{bM}{4}\right)^n$，

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{bM}{4}\right)^n$ 显然收敛，所以有限积分可与求和交换次序：

$$\int_0^M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{bx}{4}\right)^n e^{-ax}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{b}{4}\right)^n\int_0^M x^n e^{-ax}dx\,,\tag{*}$$

因为 $\left|\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{b}{4}\right)^n\int_0^M x^n e^{-ax}dx\right|\le\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{b}{4}\right)^n\int_0^M x^n e^{-ax}dx\le\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{b}{4}\right)^n\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx$，右边积分是一个由 a 决定，与 M 无关的 Γ 函数值（有限），所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{b}{4}\right)^n\int_0^M x^n e^{-ax}dx$ 对于 M 是一致收敛的。（*）式两边令 $M\to\infty$，则求极限与求和可交换顺序，即

$$\int_0^\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{bx}{4}\right)^n e^{-ax}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{b}{4}\right)^n\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{b}{4a}\right)^n\int_0^\infty t^n e^{-t}dt=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{b}{4a}\right)^n\Gamma(n+1)$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{b}{4a}\right)^n=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{4a}}\,。$$

下面关于求和与积分交换顺序合法性讨论省略。

（4）$\int_0^t J_0\left(\sqrt{x(t-x)}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}\int_0^t x^n(t-x)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}t^{2n+1}\int_0^1 u^n(1-u)^n du$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}\mathrm{B}(n+1,n+1)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}=2\sin\frac{t}{2}\,。$$

316．证明：$\int_0^t\left[\sqrt{x(t-x)}\right]^n J_n\left[\sqrt{x(t-x)}\right]dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}t^{n+\frac{1}{2}}J_{n+1/2}\left(\frac{t}{2}\right)$。

$$\int_0^t\left[\sqrt{x(t-x)}\right]^n J_n\left[\sqrt{x(t-x)}\right]dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)2^{2k+n}}\int_0^t x^{k+n}(t-x)^{k+n}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+2n+1}}{k!(n+k)!2^{2k+n}}\mathrm{B}(k+n+1,k+n+1)=\sqrt{2}t^{n+\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!(2k+2n+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}t^{n+\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!(2k+2n+1)(2k+2n)(2k+2n-1)\cdots3\times2\times1}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}t^{n+\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+k)!}{k!2^{2k+2n+1}(n+k)!\left(k+n+\frac{1}{2}\right)\left(k+n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}t^{n+\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{t}{4}\right)^{2k+n+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}t^{n+\frac{1}{2}}J_{n+1/2}\left(\frac{t}{2}\right)。$$

317．证明：$\int_0^1(1-x)^{c-1}x^{\frac{n}{2}}J_n\left(\alpha\sqrt{x}\right)dx=\left(\frac{2}{\alpha}\right)^c\Gamma(c)J_{n+c}(\alpha)$。

$$\int_0^1(1-x)^{c-1}x^{\frac{n}{2}}J_n\left(\alpha\sqrt{x}\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+n}\int_0^1x^{k+n}(1-x)^{c-1}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+n}\mathrm{B}(k+n+1,c)=\Gamma(c)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+c+k+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=\left(\frac{2}{\alpha}\right)^c\Gamma(c)J_{n+c}(\alpha)。$$

318．设$\nu>-1$，$a>0$，$b>0$，证明：

（1）$\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(bx)x^{\nu+1}dx=\frac{2a(2b)^\nu\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\left(a^2+b^2\right)^{\nu+3/2}}$；

（2）$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)x^{\nu+1}dx=\frac{b^\nu}{\left(2a^2\right)^{\nu+1}}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$。

（1）$\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(bx)x^{\nu+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2n+\nu}\int_0^\infty x^{2n+2\nu+1}e^{-ax}dx$

$$=\frac{1}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^{2n}\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\Gamma(2n+2\nu+2)$$

$$=\frac{1}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1+2\nu)(2n+2\nu)(2n-1+2\nu)\cdots(2\nu)\Gamma(2\nu)}{n!2^{2n}\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu)}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1+2\nu)(2n-1+2\nu)\cdots(1+2\nu)(2n+2\nu)(2n-2+2\nu)\cdots(2\nu)}{n!2^{2n}\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu)}{a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^{2n}\Gamma(n+\nu+1)}\frac{2^{n+1}\Gamma(n+\nu+3/2)}{\Gamma(\nu+1/2)}\frac{2^{n+1}\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$=\frac{2^2\Gamma(2\nu)}{a^{2\nu+2}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(n+\nu+3/2)}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$=\frac{2(2b)^{\nu}}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1+\nu+3/2)(n-2+\nu+3/2)\cdots(\nu+3/2)\Gamma(\nu+3/2)}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$=\frac{2(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\nu-3/2)(-\nu-3/2-1)\cdots(-\nu-3/2-n+1)}{n!}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

$$=\frac{2(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\nu-\frac{3}{2}}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}=\frac{2a(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}a^{2\nu+3}}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-\nu-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2a(2b)^{\nu}\Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}\left(a^2+b^2\right)^{\nu+3/2}}\text{。}$$

（2）$\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}J_{\nu}(bx)x^{\nu+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2n+\nu}\int_0^{\infty}x^{2n+2\nu+1}e^{-a^2x^2}dx$

$$\overset{a^2x^2=t}{=}\frac{1}{2a^{2\nu+2}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^n\int_0^{\infty}t^{n+\nu}e^{-t}dt$$

$$=\frac{b^{\nu}}{2^{\nu+1}a^{2\nu+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^n=\frac{b^{\nu}}{\left(2a^2\right)^{\nu+1}}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\text{。}$$

319．证明：（1）$\int_0^{\infty}\frac{\sin p}{p}J_0(rp)dp=\begin{cases}\pi/2,0\le r\le 1\\ \sin^{-1}\frac{1}{r},r>1\end{cases}$；

（2）$\int_0^{\infty}\sin pJ_0(rp)dp=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}},0<r<1\\ \infty,r=1\\ 0,r>1\end{cases}$；（3）$\int_0^{\infty}J_0(rp)J_1(ap)dp=\begin{cases}\frac{1}{a},r<a\\ \frac{1}{2a},r=a\\ 0,r>a\end{cases}$。

（1）$\int_0^\infty \frac{\sin p}{p} J_0(rp)dp = \int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(rp\sin\theta)d\theta dp = \int_0^\pi d\theta \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\cos(rp\sin\theta)dp$

$$= \int_0^\pi d\theta \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p}{p}\left(e^{irp\sin\theta}+e^{-irp\sin\theta}\right)dp = \int_0^\pi d\theta \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin p}{p}e^{irp\sin\theta}dp 。$$

上面的无穷积分正是$\frac{\sin p}{p}$的 Fourier 反演，易知$\operatorname{rect}(x)\xrightarrow{FT}\frac{2}{p}\sin\frac{p}{2}$，其中

$\operatorname{rect}(x)=\begin{cases}1,|x|<\frac{1}{2}\\ 0,\text{others}\end{cases}$，所以上面积分$=\frac{1}{2}\int_0^\pi \operatorname{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right)d\theta$。

当$0<r<1$时，$\left|\frac{r}{2}\sin\theta\right|<\frac{1}{2}$，$\operatorname{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right)=1$，所以原积分$=\frac{\pi}{2}$，

当$r>1$时，$0<\theta<\sin^{-1}\frac{1}{r},\pi-\sin^{-1}\frac{1}{r}<\theta<\pi$时，$\operatorname{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right)=1$，其余$\operatorname{rect}\left(\frac{r}{2}\sin\theta\right)=0$，

所以原积分$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\sin^{-1}\frac{1}{r}}d\theta+\int_{\pi-\sin^{-1}\frac{1}{r}}^{\pi}d\theta\right)=\sin^{-1}\frac{1}{r}$。

关于上面交换积分次序的合法性讨论书上有。

（2）书上已求出$\int_0^\infty J_0(rt)e^{-pt}dt=\frac{1}{\sqrt{p^2+r^2}}$（$\operatorname{Re}p>0$），右边函数以$\pm ir$为枝点，以连接两枝点的虚轴线段为割线，规定割线右岸$\arg(p-ir)=-\frac{\pi}{2},\arg(p+ir)=\frac{\pi}{2}$，则令

$p\to i$得$\int_0^\infty J_0(rt)e^{-it}dt=\begin{cases}-i\frac{1}{\sqrt{1-r^2}},0<r<1\\ \infty,r=1\\ \frac{1}{\sqrt{r^2-1}},r>1\end{cases}$，取虚部即可。

（3）$\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty J_1(ap)dp\int_0^\pi\cos(rp\sin\theta)d\theta$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\int_0^\infty J_1(ap)\cos(rp\sin\theta)dp=-\frac{1}{a\pi}\int_0^\pi d\theta\int_0^\infty\cos(rp\sin\theta)dJ_0(ap) 。$$

其中$\int_0^\infty\cos(rp\sin\theta)dJ_0(ap)=J_0(ap)\cos(rp\sin\theta)\Big|_{p=0}^{p\to\infty}+r\sin\theta\int_0^\infty\sin(rp\sin\theta)J_0(ap)dp$

$$=-1+\int_0^\infty\sin xJ_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)dx,$$

所以$\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp=\frac{1}{a\pi}\int_0^\pi\left[1-\int_0^\infty \sin xJ_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)\right]d\theta$。

由上小题结论，当$r<a$时，$\frac{a}{r\sin\theta}>1$，$\int_0^\infty \sin xJ_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)dx=0$，

所以$\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp=\frac{1}{a\pi}\int_0^\pi d\theta=\frac{1}{a}$。

当$r>a$时，$\int_0^\infty \sin xJ_0\left(\frac{a}{r\sin\theta}x\right)dx=\begin{cases}\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}},\sin\theta>\frac{a}{r}\\ \infty,\sin\theta=\frac{a}{r}\\ 0,\sin\theta<\frac{a}{r}\end{cases}$，记$\theta_0=\sin^{-1}\frac{a}{r}$，

则$\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp=\frac{1}{a\pi}\left[\int_0^{\theta_0}d\theta+\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\left(1-\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}\right)d\theta+\int_{\pi-\theta_0}^{\pi}d\theta\right]$

$$=\frac{2}{a\pi}\left[\theta_0+\int_{\theta_0}^{\pi/2}\left(1-\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}\right)d\theta\right]=\frac{2}{a\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}d\theta\right)。$$

其中$-\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta-a^2}}d\theta=\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2-r^2\cos^2\theta}}d\cos\theta$

$$\overset{x=\cos\theta}{=}\int_{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}^{0}\frac{r}{\sqrt{r^2-a^2-r^2x^2}}dx\overset{\frac{x}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}}=y}{=}\int_1^0\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\sin^{-1}y\Big|_1^0=-\frac{\pi}{2},$$

所以$\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp=0$。

当$r=a$时，$\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp=-\frac{1}{a}\int_0^\infty J_0(ap)dJ_0(ap)=\frac{1}{2a}J_0^2(ap)\Big|_{p\to\infty}^{p=0}=\frac{1}{2a}$。

320．根据 Neumann 函数$Y_\nu(z)$的定义$Y_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$，证明：

（1）$Y_{-\nu}(z)=\sin\nu\pi J_\nu(z)+\cos\nu\pi Y_\nu(z)$，$Y_\nu\left(ze^{im\pi}\right)=e^{-im\nu\pi}Y_\nu(z)+2i\sin m\nu\pi\cot\nu\pi J_\nu(z)$，

$Y_{-\nu}\left(ze^{im\pi}\right)=e^{-im\nu\pi}Y_{-\nu}(z)+2i\sin m\nu\pi\csc\nu\pi J_\nu(z)$；

（2）$Y_\nu(z)$的递推关系与$J_\nu(z)$相同，即$\frac{d}{dz}\left[z^\nu Y_\nu(z)\right]=z^\nu Y_{\nu-1}(z)$，

$\dfrac{d}{dz}\left[z^{-\nu}Y_\nu(z)\right]=-z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z)$。

（1）$\cos\nu\pi Y_\nu(z)=\dfrac{\cos^2\nu\pi J_\nu(z)-\cos\nu\pi J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}=\dfrac{J_\nu(z)-\sin^2\nu\pi J_\nu(z)-\cos\nu\pi J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$

$$=-\frac{\cos\nu\pi J_{-\nu}(z)-J_\nu(z)}{\sin\nu\pi}-\sin\nu\pi J_\nu(z)=Y_{-\nu}(z)-\sin\nu\pi J_\nu(z)\text{。}$$

由 $J_\nu(z)$ 级数表达式有 $J_\nu\left(ze^{im\pi}\right)=e^{im\nu\pi}J_\nu(z)$，所以

$Y_\nu\left(ze^{im\pi}\right)=\cot\nu\pi e^{im\nu\pi}J_\nu(z)-\csc\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)$，又有

$e^{-im\nu\pi}Y_\nu(z)=\cot\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_\nu(z)-\csc\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)$，两式相减得

$Y_\nu\left(ze^{im\pi}\right)-e^{-im\nu\pi}Y_\nu(z)=\cot\nu\pi\left(e^{im\nu\pi}-e^{-im\nu\pi}\right)J_\nu(z)=2i\sin m\nu\pi\cot\nu\pi J_\nu(z)$。

$Y_{-\nu}\left(ze^{im\pi}\right)=-\cot\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)+\csc\nu\pi e^{im\nu\pi}J_\nu(z)$，

$e^{-im\nu\pi}Y_{-\nu}(z)=-\cot\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z)+\csc\nu\pi e^{-im\nu\pi}J_\nu(z)$，两式相减得

$Y_{-\nu}\left(ze^{im\pi}\right)-e^{-im\nu\pi}Y_{-\nu}(z)=2i\sin m\nu\pi\csc\nu\pi J_\nu(z)$。

（2）$\dfrac{d}{dz}\left[z^\nu Y_\nu(z)\right]=\cot\nu\pi\dfrac{d}{dz}\left[z^\nu J_\nu(z)\right]-\csc\nu\pi\dfrac{d}{dz}\left[z^\nu J_{-\nu}(z)\right]$

$$=\cot\nu\pi z^\nu J_{\nu-1}(z)+\csc\nu\pi z^\nu J_{-\nu+1}(z)$$

$$=z^\nu\left[\cot(\nu-1)\pi J_{\nu-1}(z)-\csc(\nu-1)\pi J_{-\nu+1}(z)\right]=z^\nu Y_{\nu-1}(z)\text{。}$$

$\dfrac{d}{dz}\left[z^{-\nu}Y_\nu(z)\right]=\cot\nu\pi\dfrac{d}{dz}\left[z^{-\nu}J_\nu(z)\right]-\csc\nu\pi\dfrac{d}{dz}\left[z^{-\nu}J_{-\nu}(z)\right]$

$$=-\cot\nu\pi z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)-\csc\nu\pi z^{-\nu}J_{-\nu+1}(z)$$

$$=-z^{-\nu}\left[\cot(\nu+1)\pi J_{\nu+1}(z)-\csc(\nu+1)\pi J_{-\nu+1}(z)\right]=-z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z)\text{。}$$

321．设有一柱体半径为 a，高为 h。与外界绝热，初始温度为 $u_0\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right)$，求此柱体内温度分布与变化。又当时间足够长时该柱体温度应达到稳定，试求此稳定温度。

初始温度分布与φ, z无关，所以该问题与φ, z无关，$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0 \\ u\big|_{\rho=0}\text{有界},\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=0 \\ u\big|_{t=0}=u_0\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right) \end{cases}$。

分离变量得本征值问题$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)+\lambda^2\mathrm{P}=0 \\ \mathrm{P}(0)\text{有界，}\mathrm{P}'(a)=0 \end{cases}$及$T'+\lambda^2\kappa T=0$。

解本征值问题得$\lambda_0=0$，$\lambda_i=\dfrac{\mu_i'}{a}$（$\mu_i'$是$J_0'(x)$，即$J_1(x)$的第$i$个正零点，$i=1,2,\cdots$），

$\mathrm{P}_0(\rho)=A_0$，$\mathrm{P}_i(\rho)=J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)$，以及$T(t)=A_i\exp\left[-\kappa\left(\dfrac{\mu_i}{a}\right)^2t\right]$。

所以$u(\rho,t)=A_0+\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}A_iJ_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\exp\left[-\kappa\left(\dfrac{\mu_i}{a}\right)^2t\right]$，

$u\big|_{t=0}=A_0+\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}A_iJ_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)=u_0\left(1-\dfrac{\rho^2}{a^2}\right)$，由 313 题求出的归一化因子可定出

$$A_0=\frac{2u_0}{a^2}\int_0^a\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\rho d\rho=\frac{u_0}{2},$$

$$A_i=\frac{2u_0}{a^2J_0^2(\mu_i')}\int_0^a\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)\rho J_0\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho=\frac{2u_0}{a^2J_0^2(\mu_i')}\left[\int_0^a\rho J_0\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho-\frac{1}{a^2}\int_0^a\rho^3J_0\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho\right]$$

$$=\frac{2u_0}{a\mu_i'J_0^2(\mu_i')}\int_0^a\frac{d}{d\rho}\left[\rho J_1\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)\right]d\rho-\frac{2u_0}{a^3\mu_i'J_0^2(\mu_i')}\int_0^a\rho^2\frac{d}{d\rho}\left[\rho J_1\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)\right]d\rho$$

$$=\frac{2u_0}{a\mu_i'J_0^2(\mu_i')}\rho J_1\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)\Bigg|_0^a-\frac{2u_0}{a^3\mu_i'J_0^2(\mu_i')}\left\{\rho^3J_1\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)\Bigg|_0^a-2\int_0^a\rho^2J_1\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)d\rho\right\}$$

$$=\frac{4u_0}{a^2\mu'^2J_0^2(\mu_i')}\int_0^a\frac{d}{d\rho}\left[\rho^2J_2\left(\frac{\mu_i'}{a}\rho\right)\right]d\rho=\frac{4u_0J_2(\mu_i')}{\mu'^2J_0^2(\mu_i')},$$

递推公式$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x)$中令$\nu=1,x=\mu_i'$可得$J_2(\mu_i')=-J_0(\mu_i')$，所以

$A_i=-\dfrac{4u_0}{\mu'^2J_0(\mu_i')}$，即$u(\rho,t)=\dfrac{u_0}{2}-4u_0\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mu'^2J_0(\mu_i')}J_0\left(\dfrac{\mu_i'}{a}\rho\right)\exp\left[-\kappa\left(\dfrac{\mu_i}{a}\right)^2t\right]$，

$t\to\infty$ 时 $u\to\dfrac{u_0}{2}$。

322．半径为 R 的圆形膜，边缘固定，初始形状是旋转抛物面 $u\big|_{t=0}=H\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)$，初速恒为 0，求解膜的自由横振动：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0\\ u\big|_{\rho=0}\text{有界},u\big|_{\rho=R}=0\\ u\big|_{t=0}=H\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

$u(\rho,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\left[A_n\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t+B_n\cos\dfrac{a\mu_n}{R}t\right]$（$\mu_n$ 是 $J_0(x)$ 的正零点），由初始条件得 $A_n=0$，$B_n=\dfrac{2H}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\rho d\rho=\dfrac{4HJ_2(\mu_n)}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}$，由递推关系可得

$J_2(\mu_n)=\dfrac{2}{\mu_n}J_1(\mu_n)$，所以 $B_n=\dfrac{8H}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}$，

即 $u(\rho,t)=8H\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\cos\dfrac{a\mu_n}{R}t$。

323．求解下列定解问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\left[\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0\\ u\big|_{\rho=0}\text{有界},u\big|_{\rho=a}=0,u\big|_{t=0}=u_0\sin 2\varphi\end{cases}$。

$u(\rho,\varphi,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}J_m\left(\dfrac{\mu_n^{(m)}}{a}\rho\right)\left(A_{mn}\sin m\varphi+B_{mn}\cos m\varphi\right)\exp\left[-\left(\dfrac{\mu_n^{(m)}}{a}\right)^2\kappa t\right]$（$\mu_n^{(m)}$ 是 $J_m(x)$ 的正零点）。由于 $u\big|_{t=0}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}J_m\left(\dfrac{\mu_n^{(m)}}{a}\rho\right)\left(A_{mn}\sin m\varphi+B_{mn}\cos m\varphi\right)=u_0\sin 2\varphi$，

所以 $B_{mn}=0$，

$$A_{2n}=\frac{2u_0}{a^2J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\int_0^a J_2\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)\rho d\rho=\frac{2u_0}{a^2J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\int_0^a\rho^2\rho^{-1}J_2\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)d\rho$$

$$=-\frac{2u_0}{a\mu_n^{(2)}J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\int_0^a\rho^2\frac{d}{d\rho}\left[\rho^{-1}J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)\right]d\rho$$

$$=-\frac{2u_0}{\mu_n^{(2)}J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}J_1\left(\mu_n^{(2)}\right)+\frac{4u_0}{a\mu_n^{(2)}J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\int_0^a J_1\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)d\rho$$

$$=-\frac{2u_0}{\mu_n^{(2)}J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}J_1\left(\mu_n^{(2)}\right)+\frac{4u_0}{\left(\mu_n^{(2)}\right)^2J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\left[1-J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]$$

$$=\frac{2u_0}{\mu_n^{(2)}J_2'^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}\left[\frac{2}{\mu_n^{(2)}}-J_1\left(\mu_n^{(2)}\right)-\frac{2}{\mu_n^{(2)}}J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]。$$

递推公式 $J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$ 中令 $\nu=1$，$x=\mu_n^{(2)}$ 可得 $J_1\left(\mu_n^{(2)}\right)=\frac{\mu_n^{(2)}}{2}J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)$，

$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=x^\nu J_{\nu-1}(x)$ 展开成 $\nu J_\nu(x)+xJ_\nu'(x)=xJ_{\nu-1}(x)$，令 $\nu=2$，$x=\mu_n^{(2)}$ 可得

$J_2'\left(\mu_n^{(2)}\right)=J_1\left(\mu_n^{(2)}\right)=\frac{\mu_n^{(2)}}{2}J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)$，所以

$$A_{2n}=\frac{2u_0}{\mu_n^{(2)}\left[\frac{\mu_n^{(2)}}{2}J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]^2}\left[\frac{2}{\mu_n^{(2)}}-\frac{\mu_n^{(2)}}{2}J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)-\frac{2}{\mu_n^{(2)}}J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)\right]$$

$$=4u_0\frac{4-\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2+4\right]J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)}{\left(\mu_n^{(2)}\right)^4J_0^2\left(\mu_n^{(2)}\right)},$$

其余 $A_{mn}=0$。

即 $u(\rho,\varphi,t)=4u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4-\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2+4\right]J_0\left(\mu_n^{(2)}\right)}{\left(\mu_n^{(2)}\right)^4J_0^2\left(\mu_n^{(2)}\right)}J_2\left(\frac{\mu_n^{(2)}}{a}\rho\right)\sin 2\varphi\exp\left[-\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{a}\right)^2\kappa t\right]$。

324．一长为 π，半径为 1 的圆柱形导体，柱体侧面和其上下底的温度均保持为 0，初始时柱体内温度分布为 $f(\rho)\sin nz$，求柱体内温度变化与分布。

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right]=0\\ u\big|_{\rho=0}\text{有界},u\big|_{\rho=a}=0,u\big|_{z=0}=0,u\big|_{z=\pi}=0,u\big|_{t=0}=f(\rho)\sin nz\end{cases}$$

分离变量得本征值问题$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)+k^2\mathrm{P}=0\\ \mathrm{P}(0)\text{有界，}\mathrm{P}(a)=0\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{d^2Z}{dz^2}+m^2Z=0\\ Z(0)=0,\ Z(\pi)=0\end{cases}$以及

$\dfrac{dT}{dt}+\left(k^2+m^2\right)\kappa T=0$。

$u(\rho,z,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{im}J_0(\mu_i\rho)\sin mz\exp\left[-\left(\mu_i^2+m^2\right)\kappa t\right]$（$\mu_i$是$J_0(x)$的正零点）。

由初始条件可得$A_{in}=\dfrac{2}{J_1^2(\mu_i)}\int_0^1 f(\rho)J_0(\mu_i\rho)\rho d\rho$，其余$A_{im}=0$，即

$u(\rho,z,t)=\sum_{i=1}^{\infty}A_{in}J_0(\mu_i\rho)\sin nz\exp\left[-\left(\mu_i^2+n^2\right)\kappa t\right]$。

325．一空心圆柱，内半径为a，外半径为b，维持内外柱面温度为 0，又设柱体高为h，上下底绝热，初温为常数u_0，求柱体内温度变化与分布：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0\\ u\big|_{\rho=a}=0,u\big|_{\rho=b}=0,u\big|_{t=0}=u_0\end{cases}$。

分离变量得本征值问题$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)+k^2\mathrm{P}=0\\ \mathrm{P}(a)=0,\mathrm{P}(b)=0\end{cases}$以及$\dfrac{dT}{dt}+k^2\kappa T=0$。

$\mathrm{P}(\rho)$的通解为$\mathrm{P}(\rho)=AJ_0(k\rho)+BY_0(k\rho)$，由边界条件得$\begin{vmatrix}J_0(ka) & Y_0(ka)\\ J_0(kb) & Y_0(kb)\end{vmatrix}=0$，

用k_i表示方程$J_0(k_ia)Y_0(k_ib)-J_0(k_ib)Y_0(k_ia)=0$（所以$Y_0(k_ia)=\dfrac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}Y_0(k_ib)$，

$Y_0(k_ib)=\dfrac{J_0(k_ib)}{J_0(k_ia)}Y_0(k_ia)$）的正根，即为本征值，本征函数为

$\mathrm{P}_i(\rho)=Y_0(k_ia)J_0(k_i\rho)-J_0(k_ia)Y_0(k_i\rho)$，可算出：

$$\int_a^b\mathrm{P}_i(\rho)\rho d\rho=Y_0(k_ia)\int_a^b\rho J_0(k_i\rho)d\rho-J_0(k_ia)\int_a^b\rho Y_0(k_i\rho)d\rho$$

$$=\frac{Y_0(k_ia)}{k_i}\rho J_1(k_i\rho)\Big|_{\rho=a}^{\rho=b}-\frac{J_0(k_ia)}{k_i}\rho Y_1(k_i\rho)\Big|_{\rho=a}^{\rho=b}$$

$$=\frac{b}{k_i}\begin{vmatrix}J_0(k_ia) & J_0'(k_ib)\\ Y_0(k_ia) & Y_0'(k_ib)\end{vmatrix}-\frac{a}{k_i}\begin{vmatrix}J_0(k_ia) & J_0'(k_ia)\\ Y_0(k_ia) & Y_0'(k_ia)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{b}{k_i}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\begin{vmatrix}J_0(k_ib) & J_0'(k_ib)\\ Y_0(k_ib) & Y_0'(k_ib)\end{vmatrix}-\frac{a}{k_i}\begin{vmatrix}J_0(k_ia) & J_0'(k_ia)\\ Y_0(k_ia) & Y_0'(k_ia)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{b}{k_i}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\frac{2}{\pi k_ib}-\frac{a}{k_i}\frac{2}{\pi k_ia}=\frac{2}{\pi k_i^2}\left[\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}-1\right],$$

下面求$\int_a^b \mathrm{P}_i^2(\rho)\rho d\rho$：

令$\mathrm{P}(\rho)=Y_0(ka)J_0(k\rho)-J_0(ka)Y_0(k\rho)$（显然$\mathrm{P}(a)=0$），则

$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)+k^2\mathrm{P}=0$，又有$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{P}_i}{d\rho}\right)+k_i^2\mathrm{P}_i=0$，第一式两边乘$\rho\mathrm{P}_i(\rho)$减去第二式两边乘$\rho\mathrm{P}(\rho)$，两边积分得

$$\int_a^b \mathrm{P}\mathrm{P}_i\rho d\rho=\frac{\int_a^b\left[\mathrm{P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{P}_i}{d\rho}\right)-\mathrm{P}_i\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)\right]d\rho}{k^2-k_i^2}=\frac{\left(\rho\mathrm{P}\mathrm{P}_i'\right)_a^b-\left(\rho\mathrm{P}_i\mathrm{P}'\right)_a^b}{k^2-k_i^2}$$

$$=\frac{b\mathrm{P}(b)\mathrm{P}_i'(b)}{k^2-k_i^2}=\frac{bk_i\mathrm{P}(b)}{k^2-k_i^2}\left[Y_0(k_ia)J_0'(k_ib)-J_0(k_ia)Y_0'(k_ib)\right]$$

$$=-\frac{bk_i\mathrm{P}(b)}{k^2-k_i^2}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\begin{vmatrix}J_0(k_ib) & J_0'(k_ib)\\ Y_0(k_ib) & Y_0'(k_ib)\end{vmatrix}=-\frac{bk_i\mathrm{P}(b)}{k^2-k_i^2}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\frac{2}{\pi k_ib}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\frac{Y_0(ka)J_0(kb)-J_0(ka)Y_0(kb)}{k^2-k_i^2}。$$

所以$\int_a^b \mathrm{P}_i^2(\rho)\rho d\rho=\lim\limits_{k\to k_i}\int_a^b \mathrm{P}\mathrm{P}_i\rho d\rho=-\lim\limits_{k\to k_i}\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\frac{Y_0(ka)J_0(kb)-J_0(ka)Y_0(kb)}{k^2-k_i^2}$

$$=-\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\lim_{k\to k_i}\frac{a\begin{vmatrix}J_0(kb) & J_0'(ka)\\ Y_0(kb) & Y_0'(ka)\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}J_0(ka) & J_0'(kb)\\ Y_0(ka) & Y_0'(kb)\end{vmatrix}}{2k}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\frac{a\frac{J_0(k_ib)}{J_0(k_ia)}\begin{vmatrix}J_0(k_ia) & J_0'(k_ia)\\ Y_0(k_ia) & Y_0'(k_ia)\end{vmatrix}-b\frac{J_0(k_ia)}{J_0(k_ib)}\begin{vmatrix}J_0(k_ib) & J_0'(k_ib)\\ Y_0(k_ib) & Y_0'(k_ib)\end{vmatrix}}{2k_i}$$

$$=\frac{2}{\pi^2 k_i^2}\left\{\left[\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\right]^2-1\right\}。$$

$$u(\rho,t)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\mathrm{P}_i(\rho)\exp\left(-k_i^2\kappa t\right)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\left[\mathrm{Y}_0(k_i a)J_0(k_i\rho)-J_0(k_i a)\mathrm{Y}_0(k_i\rho)\right]\exp\left(-k_i^2\kappa t\right)。$$

由初始条件，$\sum_{i=1}^{\infty}A_i\mathrm{P}_i(\rho)=u_0$，所以

$$A_i=u_0\frac{\int_a^b \mathrm{P}_i(\rho)\rho d\rho}{\int_a^b \mathrm{P}_i^2(\rho)\rho d\rho}=u_0\frac{\frac{2}{\pi k_i^2}\left[\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}-1\right]}{\frac{2}{\pi^2 k_i^2}\left\{\left[\frac{J_0(k_i a)}{J_0(k_i b)}\right]^2-1\right\}}=\pi u_0\frac{J_0(k_i b)}{J_0(k_i a)+J_0(k_i b)}。$$

即 $u(\rho,t)=\pi u_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(k_i b)}{J_0(k_i a)+J_0(k_i b)}\left[\mathrm{Y}_0(k_i a)J_0(k_i\rho)-J_0(k_i a)\mathrm{Y}_0(k_i\rho)\right]\exp\left(-k_i^2\kappa t\right)$。

326．半径为 R 的圆形膜，边缘固定，在单位质量上受周期力（1）$f(\rho,t)=A\sin\omega t$，（2）$f(\rho,t)=A\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)\sin\omega t$ 的作用，求解膜的强迫振动，设初位移和初速度均为 0。

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=f(\rho,t)\\ u\big|_{\rho=0}=\text{有界},u\big|_{\rho=R}=0,u\big|_{t=0}=0,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\end{cases}。$$

（1）将 $u(\rho,t)$ 和 $f(\rho,t)$ 按本征函数 $J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)$（$\mu_n$ 是 $J_0(x)$ 的正零点）展开：

$$u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right),\quad f(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right),$$

$$f_n(t)=\frac{2A\sin\omega t}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)\rho d\rho=\frac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)}\sin\omega t。$$

代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2T_n(t)J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)}\sin\omega t J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right),$$

所以$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t)=\dfrac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)}\sin\omega t \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$，

若不存在 m 使得 $\omega=\dfrac{a\mu_m}{R}$，

可解得 $T_n(t)=\dfrac{2A}{\mu_n J_1(\mu_n)\left[\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2-\omega^2\right]}\left(\sin\omega t-\dfrac{\omega R}{a\mu_n}\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t\right)$。

若存在 m 使得 $\omega=\dfrac{a\mu_m}{R}$，当 $n\neq m$ 时，$T_n(t)$ 解仍如上式，而

$T_m(t)=\dfrac{A}{\omega\mu_m J_1(\mu_m)}\left(\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t-t\cos\omega t\right)$。

第一种情况 $u(\rho,t)=2A\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)\left[\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2-\omega^2\right]}\left(\sin\omega t-\dfrac{\omega R}{a\mu_n}\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t\right)$。

第二种情况
$$u(\rho,t)=2A\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)\left[\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2-\omega^2\right]}\left(\sin\omega t-\frac{\omega R}{a\mu_n}\sin\frac{a\mu_n}{R}t\right)$$
$$+\frac{A}{\omega\mu_m J_1(\mu_m)}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-t\cos\omega t\right)J_0\left(\frac{\mu_m}{R}\rho\right)。$$

（2）$u(\rho,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)$， $f(\rho,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(t)J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)$，

$f_n(t)=\dfrac{2A\sin\omega t}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)J_0\left(\dfrac{\mu_n}{R}\rho\right)\rho d\rho=\dfrac{8A}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}\sin\omega t$。

代入方程得$\begin{cases} T_n''(t)+\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t)=\dfrac{8A}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\sin\omega t \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$

第一种情况，$T_n(t)=\dfrac{8A}{\left(\dfrac{a\mu_n}{R}\right)^2-\omega^2}\dfrac{1}{\mu_n^4J_1(\mu_n)}\left(\mu_n\sin\omega t-\dfrac{\omega R}{a}\sin\dfrac{a\mu_n}{R}t\right)$，

$$u(\rho,t)=8A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2-\omega^2}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n^4 J_1(\mu_n)}\left(\mu_n\sin\omega t-\frac{\omega R}{a}\sin\frac{a\mu_n}{R}t\right)。$$

第二种情况，$T_m(t)=\frac{4A}{\omega^2\mu_m^3 J_1(\mu_m)}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$，

$$u(\rho,t)=8A\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2-\omega^2}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n^4 J_1(\mu_n)}\left(\mu_n\sin\omega t-\frac{\omega R}{a}\sin\frac{a\mu_n}{R}t\right)$$

$$+\frac{4A}{\omega^2\mu_m^3 J_1(\mu_m)}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)J_0\left(\frac{\mu_m}{R}\rho\right)。$$

327．求长圆柱形铀块的临界半径（见习题 11 第 205 题和习题 12 第 223 题）。

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\alpha u\\ \quad u|_{\rho=0}\text{有界},u|_{\rho=a}=0\end{cases}。$$

分离变量可得 $u(\rho,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right)\exp\left\{-\left[D\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2-\alpha\right]t\right\}$（$\mu_n$ 是 $J_0(x)$ 的正零点）。可看出，只要 $a<\sqrt{\frac{D}{\alpha}}\mu_1$，上面级数第一项趋于无穷，$\sqrt{\frac{D}{\alpha}}\mu_1$ 即为临界厚度。

328．一完全柔软的均匀线，密度为 ρ，上端（$x=l$）固定在匀速转动的轴上，下端（$x=0$）自由，此线相对于平衡位置作横振动，横振动方程及定解条件为

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\omega^2 u=0\\ u|_{x=0}\text{有界},u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=\psi(x)\end{cases}，求 u(x,t)。$$

令 $u(x,t)=X(x)T(t)$ 分离变量得 $\begin{cases}xX''+X'+k^2X=0\\ T''+(gk^2-\omega^2)T=0\end{cases}$。

令 306 题中$\alpha=0,\beta=2k,\gamma=\dfrac{1}{2},\nu=0$可得$X(x)=AJ_0\left(2k\sqrt{x}\right)+BY_0\left(2k\sqrt{x}\right)$，由边界条件得到本征值$k_n=\dfrac{\mu_n}{2\sqrt{l}}$（$\mu_n$是$J_0(x)$的正零点），本征函数$X_n(x)=J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$。

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\right)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$，其中$\omega_n=\sqrt{\dfrac{g}{4l}\mu_n^2-\omega^2}$。

令 312 题（*）式$n=0$：$\int_0^1 J_0^2(\mu_i x)x\,dx=\dfrac{1}{2}J_1^2(\mu_i)$，作代换$x=\sqrt{\dfrac{t}{l}}$，则有

$\int_0^l J_0^2\left(\mu_i\sqrt{\dfrac{t}{l}}\right)dt=lJ_1^2(\mu_i)$。由初始条件可定出$A_n=\dfrac{1}{lJ_1^2(\mu_n)}\int_0^l\varphi(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx$，

$B_n=\dfrac{1}{l\omega_n J_1^2(\mu_n)}\int_0^l\psi(x)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx$。

329．一完全柔软的均匀线，上端（$x=l$）固定，下端（$x=0$）自由，线的密度$\rho=ax^m$（$m>-1$），则横振动方程及定解条件为$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-\dfrac{gx}{m+1}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-g\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ u\big|_{x=0}\text{有界},u\big|_{x=l}=0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=0}=\psi(x)\end{cases}$，求$u(x,t)$。

分离变量得$\begin{cases}xX''+(m+1)X'+k^2X=0\\ T''+\dfrac{g}{m+1}k^2T=0\end{cases}$，令 306 题中$\alpha=-\dfrac{m}{2},\beta=2k,\gamma=\dfrac{1}{2},\nu=m$可得

本征值$k_n=\dfrac{\mu_n}{2\sqrt{l}}$，本征函数$X_n(x)=x^{-\frac{m}{2}}J_m\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$（$\mu_n$是$J_m(x)$的正零点）。

$u(x,t)=x^{-\frac{m}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\right)J_m\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)$，其中$\omega_n=\dfrac{\mu_n}{2}\sqrt{\dfrac{g}{l(1+m)}}$。

由 312 题（*）式可得$\int_0^1 J_m^2\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)dx=lJ_m'^2(\mu_n)$，

由递推关系$\dfrac{d}{dx}\left[x^{-m}J_m(x)\right]=-x^{-m}J_{m+1}(x)$可得$J_m'(\mu_n)=-J_{m+1}(\mu_n)$，

所以$\int_0^1 J_m^2\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx=lJ_{m+1}^2\left(\mu_n\right)$。

由初始条件可得$A_n=\frac{1}{lJ_{m+1}^2\left(\mu_n\right)}\int_0^l x^{\frac{m}{2}}\varphi\left(x\right)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx$，

$B_n=\frac{1}{l\omega_n J_{m+1}^2\left(\mu_n\right)}\int_0^l x^{\frac{m}{2}}\psi\left(x\right)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx$。

330．证明（1）$H_{-\nu}^{(1)}\left(z\right)=e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}\left(z\right)$，$H_{-\nu}^{(2)}\left(z\right)=e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}\left(z\right)$；

（2）$H_\nu^{(1)}\left(ze^{im\pi}\right)=\frac{\sin\left(1-m\right)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}\left(z\right)-e^{-i\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}\left(z\right)$，

$H_\nu^{(2)}\left(ze^{im\pi}\right)=\frac{\sin\left(1+m\right)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}\left(z\right)+e^{i\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}\left(z\right)$。

（1）利用 320 题结论。

$H_{-\nu}^{(1)}\left(z\right)=J_{-\nu}\left(z\right)+iY_{-\nu}\left(z\right)=J_{-\nu}\left(z\right)+i\sin\nu\pi J_\nu\left(z\right)+i\cos\nu\pi Y_\nu\left(z\right)$，

$$
\begin{aligned}
e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}\left(z\right)&=e^{i\nu\pi}J_\nu\left(z\right)+ie^{i\nu\pi}Y_\nu\left(z\right)\\
&=\cos\nu\pi J_\nu\left(z\right)+i\sin\nu\pi J_\nu\left(z\right)+i\cos\nu\pi Y_\nu\left(z\right)-\sin\nu\pi Y_\nu\left(z\right),
\end{aligned}
$$

两式相减得$H_{-\nu}^{(1)}\left(z\right)-e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}\left(z\right)=J_{-\nu}\left(z\right)-\cos\nu\pi J_\nu\left(z\right)+\sin\nu\pi Y_\nu\left(z\right)=0$。

同样可得$H_{-\nu}^{(2)}\left(z\right)=e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}\left(z\right)$。

（2）
$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin\left(1-m\right)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}\left(z\right)-e^{-i\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}\left(z\right)\\
&=\left(\cos m\nu\pi-\cot\nu\pi\sin m\nu\pi\right)\left[J_\nu\left(z\right)+iY_\nu\left(z\right)\right]\\
&\qquad-\left(\cot\nu\pi\sin m\nu\pi-i\sin m\nu\pi\right)\left[J_\nu\left(z\right)-iY_\nu\left(z\right)\right]\\
&=e^{im\nu\pi}J_\nu\left(z\right)+i\left[e^{-im\nu\pi}Y_\nu\left(z\right)+2i\cot\nu\pi\sin m\nu\pi J_\nu\left(z\right)\right]\\
&=J_\nu\left(ze^{im\pi}\right)+iY_\nu\left(ze^{im\pi}\right)=H_\nu^{(1)}\left(ze^{im\pi}\right)。
\end{aligned}
$$

同样可得$H_\nu^{(2)}\left(ze^{im\pi}\right)=\frac{\sin\left(1+m\right)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(2)}\left(z\right)+e^{i\nu\pi}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu^{(1)}\left(z\right)$。

331．若n为一正整数，证明：$J_{n+1/2}(x)=i^{-n}\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{i\mu x}P_n(\mu)d\mu$，并推出

$i^n\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}J_{n+1/2}(x)x^{-\frac{1}{2}}dx=\begin{cases}2\pi P_n(t),|t|<1\\0,|t|>1\end{cases}$。

证：$\int_{-1}^{1}e^{i\mu x}P_n(\mu)d\mu=\int_{-1}^{1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\mu x)^k}{k!}P_n(\mu)d\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k x^k}{k!}\int_{-1}^{1}\mu^k P_n(\mu)d\mu$，

由习题 15 第 275 题结果，

$$上式=2^{n+1}i^n x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}(n+m)!}{m!(2n+2m+1)!}=2^{n+1}i^n x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n+2m+1}m!\Gamma\left(n+m+\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{x}}i^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+m+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2\pi}{x}}i^n J_{n+1/2}(x)。$$

$$i^n\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}J_{n+1/2}(x)x^{-\frac{1}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}dx\int_{-1}^{1}e^{i\mu x}P_n(\mu)d\mu$$

$$=\int_{-1}^{1}P_n(\mu)d\mu\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\mu-t)x}dx=2\pi\int_{-1}^{1}P_n(\mu)\delta(\mu-t)d\mu,$$

当$|t|<1$时，上式$=2\pi P_n(t)$，当$|t|>1$时上式$=0$。

332．一导体球，半径为a，初温为常温u_0，球面温度为 0，求球内温度变化和分布。

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0\\u|_{r=0}有界,u|_{r=a}=0,u|_{t=0}=u_0\end{cases}$$

分离变量得本征值问题$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2R=0\\R(0)有界,R(a)=0\end{cases}$及$T'+k^2\kappa T=0$。

R的方程是零阶球 Bessel 方程，通解为$R(r)=Aj_0(kr)+Bn_0(kr)$，由边界条件可得本征

值$k_n=\frac{\mu_n}{a}$（μ_n是$j_0(x)$的正零点，$n=1,2,\cdots$），本征函数$R_n(r)=j_0\left(\frac{\mu_n}{a}r\right)$。

由于$j_0(x)=\frac{\sin x}{x}$，所以$\mu_n=n\pi$，$k_n=\frac{n\pi}{a}$，$R_n(r)=\frac{a}{n\pi r}\sin\frac{n\pi}{a}r$。

所以$u\left(r,t\right)=\dfrac{a}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{a}r\exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2\kappa t\right]$,

由初始条件，$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{a}r=\dfrac{\pi u_0}{a}r$，所以$A_n=\dfrac{2n\pi u_0}{a^2}\int_0^a r\sin\dfrac{n\pi}{a}rdr=2u_0\left(-1\right)^{n+1}$，

即$u\left(r,t\right)=\dfrac{2u_0 a}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{n\pi}{a}r\exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2\kappa t\right]$。

333．确定球形铀块的临界半径（见习题 11 第 205 题和习题 12 第 223 题）。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=D\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\alpha u\\ \quad u\big|_{r=0}\text{有界},u\big|_{r=a}=0\end{cases}$$

分离变量可得$u\left(r,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n j_0\left(\dfrac{n\pi}{a}r\right)\exp\left\{-\left[D\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2-\alpha\right]t\right\}$，可得临界厚度为$\pi\sqrt{\dfrac{D}{\alpha}}$。

334．定义：$K_\nu\left(z\right)=\dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}\left(z\right)-I_\nu\left(z\right)\right]$，试证明：

$$K_\nu\left(z\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}ie^{i\nu\pi/2}H_\nu^{(1)}\left(ze^{i\pi/2}\right),-\pi<\arg z\le\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{\pi}{2}ie^{-i\nu\pi/2}H_\nu^{(2)}\left(ze^{-i\pi/2}\right),-\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi\end{cases}\text{。}$$

$-\pi<\arg z\le\dfrac{\pi}{2}$时，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg ze^{i\pi/2}\le\pi$，

$$\begin{aligned}e^{i\nu\pi/2}H_\nu^{(1)}\left(ze^{i\pi/2}\right)&=e^{i\nu\pi/2}\left[J_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right)+iY_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right)\right]\\&=e^{i\nu\pi/2}\left[J_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right)+i\cot\nu\pi J_\nu\left(ze^{i\pi/2}\right)-i\csc\nu\pi J_{-\nu}\left(ze^{i\pi/2}\right)\right]\\&=e^{i\nu\pi/2}\left[\left(1+i\cot\nu\pi\right)e^{i\nu\pi/2}I_\nu\left(z\right)-i\csc\nu\pi e^{-i\nu\pi/2}I_{-\nu}\left(z\right)\right]\\&=\left(1+i\cot\nu\pi\right)e^{i\nu\pi}I_\nu\left(z\right)-i\csc\nu\pi I_{-\nu}\left(z\right)\\&=i\csc\nu\pi\left[I_\nu\left(z\right)-I_{-\nu}\left(z\right)\right]=-\dfrac{2}{\pi}iK_\nu\left(z\right)\text{。}\end{aligned}$$

同样可得$-\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$时，$K_\nu\left(z\right)=-\dfrac{\pi}{2}ie^{-i\nu\pi/2}H_\nu^{(2)}\left(ze^{-i\pi/2}\right)$。

335．证明：（1）$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\sin bxI_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\cos bxI_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx=\frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}}$，其中 $a>0,b>0$；

（2）$\int_0^\infty J_0(ax)K_0(bx)xdx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $a>0,\mathrm{Re}\,b>0$。

（1）$I_0(x)=J_0(ix)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x\cos\theta}d\theta$（见附录），

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}a+ib\right)x}I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}a+ib\right)x}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{1}{2}ax\cos\theta}d\theta dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^\infty e^{-x\left[\frac{1}{2}a(1+\cos\theta)+ib\right]}dx=\frac{1}{a\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1+\cos\theta+i\frac{2b}{a}}$$

$$=\frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\cos\theta+1+i\frac{2b}{a}}\overset{x=\tan\frac{\theta}{2}}{=}\frac{4}{a\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}+1+i\frac{2b}{a}}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{2}{b\pi i}\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1-i\frac{a}{b}}, \qquad (*)$$

设 $-1+i\frac{a}{b}$ 的平方根为 $\xi+i\eta$，即 $(\xi+i\eta)^2=-1+i\frac{a}{b}$，则 $\xi^2-\eta^2=-1$，$2\xi\eta=\frac{a}{b}$，解得

$\xi_1+i\eta_1=\frac{a}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}}+i\frac{1}{\sqrt{2b}}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}$，另一根为 $-\xi_1-i\eta_1$，

$$(*)\text{式}=\frac{2}{b\pi i}\pi i\,\mathrm{res}\left[\frac{1}{(z-\xi_1-i\eta_1)(z+\xi_1+i\eta_1)}\right]_{z=\xi_1+i\eta_1}=\frac{1}{b}\frac{1}{\xi_1+i\eta_1}=\frac{1}{b}\frac{1}{\xi_1^2+\eta_1^2}(\xi_1-i\eta_1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}}-i\frac{1}{\sqrt{2b}}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}\right)。$$

取实部和虚部即可得欲证两式。

（2）由 337 题 $K_0(x)$ 的积分表示，

$$\int_0^\infty J_0(ax)K_0(bx)xdx=\int_0^\infty J_0(ax)xdx\int_0^\infty e^{-bx\,\mathrm{ch}\,t}dt=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-bx\,\mathrm{ch}\,t}J_0(ax)xdx,$$

由 318（1）题，$\int_0^\infty e^{-bx\mathrm{ch}t}J_0(ax)xdx=\frac{b\,\mathrm{ch}\,t}{\left(b^2\mathrm{ch}^2t+a^2\right)^{3/2}}$，

所以$\int_0^\infty J_0(ax)K_0(bx)xdx = b\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} t}{\left(b^2\operatorname{ch}^2 t + a^2\right)^{3/2}}dt = b\int_0^\infty \frac{d\operatorname{sh} t}{\left(a^2+b^2+b^2\operatorname{sh}^2 t\right)^{3/2}}$

$$= \frac{b}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{b^2}{a^2+b^2}x^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2+b^2}\int_0^\infty \frac{dy}{\left(1+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\overset{y=\tan\theta}{=} \frac{1}{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{1}{a^2+b^2}。$$

336．高为h，半径为a的圆柱体，上下底保持温度为 0，而柱面温度为$u_0\sin\frac{2\pi}{h}z$，求柱体内的稳定温度分布。$\begin{cases}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\\ u\big|_{z=0}=0, u\big|_{z=h}=0\\ u\big|_{\rho=0}=\text{有界}, u\big|_{\rho=a}=u_0\sin\frac{2\pi}{h}z\end{cases}$

分离变量得本征值问题$\begin{cases}Z''+k^2 Z=0\\ Z(0)=0, Z(h)=0\end{cases}$及$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{P}}{d\rho}\right)-k^2\mathrm{P}=0$。

解得本征值$k_n=\frac{n\pi}{h}$，本征函数$Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z$（$n=1,2,\cdots$），$\mathrm{P}_n(\rho)=I_0\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right)$。

$u(\rho,z)=\sum_{n=1}^\infty A_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right)\sin\frac{n\pi}{h}z$。$u\big|_{\rho=a}=\sum_{n=1}^\infty A_n I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)\sin\frac{n\pi}{h}z=u_0\sin\frac{2\pi}{h}z$，

所以$A_2=\frac{u_0}{I_0\left(\frac{2\pi a}{h}\right)}$，其余$A_n=0$，即$u(\rho,z)=\frac{u_0}{I_0\left(\frac{2\pi a}{h}\right)}I_0\left(\frac{2\pi}{h}\rho\right)\sin\frac{2\pi}{h}z$。

337．证明：$K_0(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch} t}dt$（$x>0$）满足零阶虚宗量 Bessel 方程，由此证明当$x$很大时，$K_0(x)$的渐近形式为$\frac{A}{\sqrt{x}}e^{-x}$，定出常数$A$。

$$xK_0''(x)+K_0'(x)-xK_0(x)=x\int_0^\infty\left(\operatorname{ch}^2 t-1\right)e^{-x\operatorname{ch} t}dt-\int_0^\infty \operatorname{ch} te^{-x\operatorname{ch} t}dt$$

$$=x\int_0^\infty \operatorname{sh}^2 te^{-x\operatorname{ch} t}dt-\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch} t}d\operatorname{sh} t=x\int_0^\infty \operatorname{sh}^2 te^{-x\operatorname{ch} t}dt-\operatorname{sh} te^{-x\operatorname{ch} t}\Big|_{t=0}^{t\to\infty}-x\int_0^\infty \operatorname{sh}^2 te^{-x\operatorname{ch} t}dt=0$$

即 $K_0(x)=\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}t}dt$ 满足零阶虚宗量 Bessel 方程。

作代换 $u=\operatorname{ch}t$，即 $t=\ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$，

则 $K_0(x)=\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}t}dt=\int_1^{\infty}\frac{e^{-xu}}{\sqrt{u^2-1}}du \overset{x(u-1)=y}{=} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}}{\sqrt{2y+\frac{y^2}{x}}}dy$，

令积分式中 $x\to\infty$ 有 $K_0(x)\to\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}}{\sqrt{2y}}dy \overset{y=t^2}{=} \sqrt{2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$。

338. 假定零阶虚宗量 Bessel 方程 $y''+\frac{1}{x}y'-y=0$ 的形式解为 $y\sim e^{\lambda x}x^{-\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-k}$，$a_0\neq 0$，

试求出此方程的两个形式解 $y_1\sim c_1\frac{e^x}{\sqrt{x}}\left[1+\frac{1^2}{1\cdot(8x)}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2!(8x)^2}+\cdots\right]$，

$y_2\sim c_2\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left[1-\frac{1^2}{1\cdot(8x)}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2!(8x)^2}-+\cdots\right]$。如果取 $c_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，$c_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，这正好就是 $I_0(x)$ 和 $K_0(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的渐进展开。

将 $y=e^{\lambda x}x^{-\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-k}$ 代入方程可得

$$\left(\lambda^2-1\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{-k}-\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(2k+2\rho-3)a_{k-1}x^{-k}+\sum_{k=2}^{\infty}(k+\rho-2)^2a_{k-2}x^{-k}=0\text{。}$$

由常数项为零可得 $\lambda^2-1=0$，由 x^{-1} 项系数为零可得 $\rho=\frac{1}{2}$，

取 $\lambda=1$ 可得递推关系

$$a_k=\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{2k}a_{k-1}=\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{2k}\frac{\left(k-1-\frac{1}{2}\right)^2}{2k-2}\cdots\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}a_0=\frac{(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots 1}{2^{3k}k!}a_0,$$

即 $y_1\sim a_0\frac{e^x}{\sqrt{x}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots 1}{2^{3k}k!}x^{-k}\right]$。

取 $\lambda=-1$ 可得 $a_k=-\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{2k}a_{k-1}=(-1)^k\frac{(2k-1)^2(2k-3)^2\cdots 1}{2^{3k}k!}a_0$

即 $y_1 \sim a_0 \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{(2k-1)^2 (2k-3)^2 \cdots 1}{2^{3k} k!} x^{-k} \right]$。

附录：

令 $\exp\left[\dfrac{x}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$ 中 $t = ie^{i\theta}$ 得 $e^{ix\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x) e^{in\theta}$，所以

$J_n(x) = \dfrac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\cos\theta - n\theta)} d\theta$，

将 x 换成 ix 得 $I_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x\cos\theta - in\theta} d\theta$。

书上已得 $J_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)} d\theta$，所以 $I_n(x) = \dfrac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x\sin\theta - in\theta} d\theta$。

339．圆内 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数 $\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = 0\end{cases}$ 是

$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln R + \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln R_1 - \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a}{r'}$。其中 $R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$，

$R_1 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角，$\boldsymbol{r}_1 = \left(\dfrac{a}{r'}\right)^2 \boldsymbol{r}'$，$a$ 是圆半径。试证明圆内定解问题 $\begin{cases}\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0 \\ u(\boldsymbol{r})\big|_{r=a} = f(\varphi)\end{cases}$ 的解可表为 $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{(a^2-r^2)f(\varphi')d\varphi'}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\varphi')}$。

$$\frac{\partial G}{\partial r'} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{r'-r\cos\theta}{R^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-\dfrac{a^4}{r'^3}+\dfrac{ra^2}{r'^2}\cos\theta}{R_1^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r'},$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r'}\right|_{r'=a} = -\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{a-r\cos\theta}{r^2+a^2-2ar\cos\theta} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{r^2-a^2}{r^2+a^2-2ar\cos\theta}。$$

将 $\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$ 两边乘 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 得 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0$，（a）

将 $\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 两边乘 $u(\boldsymbol{r})$ 得 $u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}u(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$。（b）

（a）－（b），两边在圆域内积分得 $\displaystyle\iint_S\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\right]dS = \frac{1}{\varepsilon_0}u(\boldsymbol{r}')$，

由 Green 公式得 $u(\boldsymbol{r}') = \varepsilon_0\displaystyle\int_C\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial r} - u(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial r}\right]dl$，其中 C 是圆周 $r=a$。

交换 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 有 $u(r,\varphi) = -\varepsilon_0\displaystyle\int_0^{2\pi}u(\boldsymbol{r}')\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial r'}\right|_{r'=a} a\,d\varphi' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\varphi')d\varphi'}{r^2+a^2-2ar\cos\theta}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\varphi')d\varphi'}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\varphi')}。$$

340．（1）用电像法求出球内 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases}\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = 0\end{cases};$$

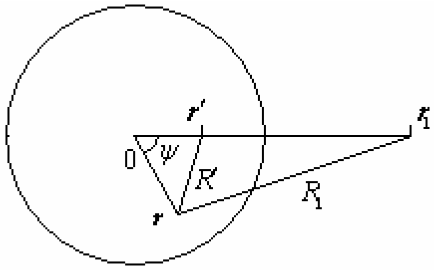
（2）求出边界面（球面 $r=a$ ）上各点的感应电荷密度 $\sigma(\theta,\varphi)$；

（3）证明像电荷和感应电荷在球内完全等效；

（4）证明球内 Laplace 方程第一边值问题 $\begin{cases}\nabla^2 u=0\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$ 的解是

$u(r,\theta,\varphi)=\dfrac{a}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\theta',\varphi')}{(r^2+a^2-2ar\cos\psi)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi'$，其中 ψ 是 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ 与 $\boldsymbol{r}'(r',\theta',\varphi')$ 的夹角，$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$。

（1）如下图，$\boldsymbol{r}'$ 处有电荷 $q'=1$，由对称性，像电荷应放置在 $\boldsymbol{r}'$ 的延长线 $\boldsymbol{r}_1$ 处，带电量 q_1，



则 $\boldsymbol{r}$ 处电势为 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q'}{R'}+\dfrac{q_1}{R_1}\right)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}+\dfrac{q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right)$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}}+\frac{q_1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\psi}}\right)。$$

$$G|_{r=a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+r'^2-2ar'\cos\psi}}+\frac{q_1}{\sqrt{a^2+r_1^2-2ar_1\cos\psi}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-2\frac{r'}{a}\cos\psi}}+\frac{q_1}{r_1\sqrt{1+\left(\frac{a}{r_1}\right)^2-2\frac{a}{r_1}\cos\psi}}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\psi)\left(\frac{r'}{a}\right)^l+\frac{q_1}{r_1}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\psi)\left(\frac{a}{r_1}\right)^l\right]=0,$$

所以有 $\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{r'}{a}\right)^l+\dfrac{q_1}{r_1}\left(\dfrac{a}{r_1}\right)^l=0$，即 $q_1=-\dfrac{r_1}{a}\left(\dfrac{r'r_1}{a^2}\right)^l$。可看出 $\left(\dfrac{r'r_1}{a^2}\right)^l$ 的值与 l 无关，那么只有

$\dfrac{r'r_1}{a^2}=1$，即 $r_1=\dfrac{a^2}{r'}$，$q_1=-\dfrac{a}{r'}$，所以

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\psi}}-\frac{a}{r'}\frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{a^4}{r'^2}-2\frac{a^2}{r'}r\cos\psi}}\right)。$$

其中$\cos\psi=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{rr'}$

$$=\frac{(r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+r\cos\theta\boldsymbol{k})\cdot(r'\sin\theta'\cos\varphi'\boldsymbol{i}+r'\sin\theta'\sin\varphi'\boldsymbol{j}+r'\cos\theta'\boldsymbol{k})}{rr'}$$

$$=\sin\theta\cos\varphi\sin\theta'\cos\varphi'+\sin\theta\sin\varphi\sin\theta'\sin\varphi'+\cos\theta\cos\theta'$$

$$=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')。$$

（2）由电场边界条件，$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left(\boldsymbol{D}\big|_{r=a^+}-\boldsymbol{D}\big|_{r=a^-}\right)=\sigma$。由于$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{r=a}=0$，可将边界球面看作接地的导体球，即$\boldsymbol{D}\big|_{r=a^+}=0$，又由于$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{D}=D_r=\varepsilon_0E_r=-\varepsilon_0\dfrac{\partial G}{\partial r}$，所以$\sigma=\varepsilon_0\dfrac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=a^-}$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-a+r'\cos\psi}{(a^2+r'^2-2ar'\cos\psi)^{3/2}}+\frac{a(ar'^2-a^2r'\cos\psi)}{(a^2r'^2+a^4-2a^3r'\cos\psi)^{3/2}}\right]=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1-\left(\frac{r'}{a}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-2\frac{r'}{a}\cos\psi\right]^{3/2}}。$$

取$\boldsymbol{r}'$方向为 z 方向，即$\theta'=0$，则$\cos\psi=\cos\theta$，所以

$$\sigma(\theta,\varphi)=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1-\left(\frac{r'}{a}\right)^2}{\left[1-2\frac{r'}{a}\cos\theta+\left(\frac{r'}{a}\right)^2\right]^{3/2}}=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1-\left(\frac{r'}{a}\right)^2}{\frac{r'}{a}}\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\left(\frac{r'}{a}\right)^l。$$

（3）感应电荷在球内产生的电场为（γ为球面上点(a,θ',φ')与球内点(r,θ,φ)的夹角，$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$。）：

$$G_\sigma(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma(\theta',\varphi')}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\gamma}}a^2\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$=\frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma(\theta',\varphi')}{\sqrt{1-2\frac{r}{a}\cos\gamma+\left(\frac{r}{a}\right)^2}}\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$=\frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma(\theta',\varphi')\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\gamma)\left(\frac{r}{a}\right)^l\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi a}\frac{1-\left(\frac{r'}{a}\right)^2}{\frac{r'}{a}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}P_l'\left(\cos\theta'\right)\left(\frac{r'}{a}\right)^l\cdot\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos\gamma\right)\left(\frac{r}{a}\right)^l\sin\theta'd\theta'd\varphi'$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi a}\frac{1-\left(\frac{r'}{a}\right)^2}{\frac{r'}{a}}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{a}\right)^k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_k'\left(\cos\theta'\right)P_l\left(\cos\gamma\right)\sin\theta'd\theta'd\varphi' 。$$

有 Legendre 多项式的加法公式：

$$P_l\left(\cos\gamma\right)=P_l\left(\cos\theta\right)P_l\left(\cos\theta'\right)+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m\left(\cos\theta\right)P_l^m\left(\cos\theta'\right)e^{im(\varphi-\varphi')} 。$$

（见王竹溪，郭敦仁《特殊函数概论》5.14 节）所以，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_k'\left(\cos\theta'\right)P_l\left(\cos\gamma\right)\sin\theta'd\theta'd\varphi'=2\pi P_l\left(\cos\theta\right)\int_0^{\pi}P_k'\left(\cos\theta'\right)P_l\left(\cos\theta'\right)\sin\theta'd\theta'$$

$$+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m\left(\cos\theta\right)\int_0^{\pi}P_k'\left(\cos\theta'\right)P_l^m\left(\cos\theta'\right)\sin\theta'd\theta'\int_0^{2\pi}e^{im(\varphi-\varphi')}d\varphi'$$

$$=2\pi P_l\left(\cos\theta\right)\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l(x)dx 。$$

由习题 15 第 283 题结论，$\int_{-1}^{1}P_k'(x)P_l(x)dx=\begin{cases}2, k=l+2n+1\\ 0,\text{others}\end{cases}$（$n=0,1,\cdots$），

即 $k=l+2n+1$ 时，$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_k'\left(\cos\theta'\right)P_l\left(\cos\gamma\right)\sin\theta'd\theta'd\varphi'=4\pi P_l\left(\cos\theta\right)$，其他情况该积分都为 0，所以

$$G_\sigma=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\left(\frac{r'}{a}\right)^2}{\frac{r'}{a}}\frac{1}{a}\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos\theta\right)\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^l\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{a}\right)^{2n+1}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{1+\frac{r^2r'^2}{a^4}-2\frac{rr'}{a^2}\cos\theta}}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r'}\frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{a^4}{r'^2}-2r\frac{a^2}{r'}\cos\theta}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r'}\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\right|}$$

即与像电荷产生电势相等。

（4）$\frac{\partial G\left(\mathbf{r}',\mathbf{r}\right)}{\partial r'}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r'-r\cos\psi}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos\psi\right)^{3/2}}-\frac{a\left(\frac{r}{r'}\right)^2-\left(\frac{a}{r'}\right)^3r\cos\psi}{\left(r^2+\frac{a^4}{r'^2}-2\frac{a^2}{r'}r\cos\psi\right)^{3/2}}\right]$，

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial r'}\right|_{r'=a}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{r^2-a^2}{\left(a^2+r^2-2ar\cos\psi\right)^{3/2}}\text{。}$$

由$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=0$和$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$可得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r})&=\varepsilon_0\iiint_V\left[G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r}')-u(\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\right]dV'\\&=\varepsilon_0\oiint_S\left[G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-u(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right]dS\\&=-\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta',\varphi')\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})}{\partial r'}\right|_{r'=a}a^2\sin\theta' d\theta' d\varphi'\\&=\frac{a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(a^2-r^2\right)f(\theta',\varphi')}{\left(r^2+a^2-2ar\cos\psi\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' d\varphi'\text{。}\end{aligned}$$

341．证明互易定理：若Φ是由V中体电荷密度ρ及面Σ（V的边界面）上面点荷密度σ产生的静电势，Φ'是由体电荷密度ρ'及面点荷密度σ'产生的静电势，则

$$\iiint_V\rho\Phi' dV+\oiint_\Sigma\sigma\Phi' dS=\iiint_V\rho'\Phi dV+\oiint_\Sigma\sigma'\Phi dS\text{。}$$

在V内有$\nabla^2\Phi=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$，$\nabla^2\Phi'=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho'$。第一式两边乘$\Phi'$减去第二式两边乘$\Phi$得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho'\Phi dV-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho\Phi' dV&=\iiint_V\left(\Phi'\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Phi'\right)dV\\&=\oiint_\Sigma\left(\Phi'\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\Phi'}{\partial n}\right)dS=-\oiint_\Sigma\left(\Phi' E_n-\Phi E_n'\right)dS,\end{aligned}$$

上面E_n表示电场法向分量，由电场边界条件$E_n=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$，$E_n'=-\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$（$V$外电场为 0）得

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho'\Phi dV-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho\Phi' dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\oiint_\Sigma\left(\sigma\Phi'-\sigma'\Phi\right)dS\text{，即}$$

$$\iiint_V\rho\Phi' dV+\oiint_\Sigma\sigma\Phi' dS=\iiint_V\rho'\Phi dV+\oiint_\Sigma\sigma'\Phi dS\text{。}$$

342．用 Fourier 变换法求三维无界空间 Helmholtz 方程的 Green 函数

$$\left(\nabla^2+k^2\right)G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)。$$

记 $\boldsymbol{k}'=k_x'\boldsymbol{i}+k_y'\boldsymbol{j}+k_z'\boldsymbol{k}$， $k'^2=k_x'^2+k_y'^2+k_z'^2$，三维 Fourier 变换和反变换为：

$$\tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right)=\iiint G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}\right)d\boldsymbol{r}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)\exp\left[-i\left(k_x'x+k_y'y+k_z'z\right)\right]dxdydz;$$

$$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\iiint\tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}\right)d\boldsymbol{k}'$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right)\exp\left[i\left(k_x'x+k_y'y+k_z'z\right)\right]dk_x'dk_y'dk_z'。$$

方程$\left(\nabla^2+k^2\right)G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)$两边对 $\boldsymbol{r}$ 作三维 Fourier 变换得

$\left(-k'^2+k^2\right)\tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\exp\left(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'\right)$，所以$\tilde{G}\left(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{r}'\right)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\exp\left(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'\right)}{k'^2-k^2}$，

取 Fourier 反变换得$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3\varepsilon_0}\iiint\frac{\exp\left[i\boldsymbol{k}'\cdot\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\right]}{k'^2-k^2}d\boldsymbol{k}'$

可看出$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)$只是$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$的函数，可令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，在 $\boldsymbol{k}'$ 空间中以 $\boldsymbol{R}$ 方向为 z 方向建立球坐标系$\left(k',\theta,\varphi\right)$计算这个积分：

$$G\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(ik'R\cos\theta\right)}{k'^2-k^2}k'^2\sin\theta dk'd\theta d\varphi$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{k'^2}{k'^2-k^2}dk'\int_0^{\pi}e^{ik'R\cos\theta}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2 iR\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{k'}{k'^2-k^2}\left(e^{ik'R}-e^{-ik'R}\right)dk'=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2 iR\varepsilon_0}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k'e^{ik'R}}{k'^2-k^2}dk'$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2 iR\varepsilon_0}\lim_{\eta\to0^+}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k'}{k'^2-\left(k+i\eta\right)^2}e^{ik'R}dk'。$$

用留数定理可算出

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k'}{k'^2-(k+i\eta)^2}e^{ik'R}dk'=2\pi i\,\text{res}\left[\frac{ze^{izR}}{z^2-(k+i\eta)^2}\right]_{z=k+i\eta}=\pi i e^{-R\eta}e^{ikR},$$

所以$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^{ikR}}{R}$。

343．一无穷长弦，$t=t'$时其$x=x'$处受到瞬时的打击，冲量为I。试求解弦的横振动，设初位移和初速度都为 0。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2G(x,t;x',t')}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2G(x,t;x',t')}{\partial x^2}=\dfrac{I}{\rho}\delta(x-x')\delta(t-t')\\ G(x,t;x',t')\big|_{x\to\pm\infty}\text{ 有界},G(x,t;x',t')\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0\end{cases},$$

方程两边对变量t作 Laplace 变换得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde G(x,p;x',t')}{\partial x^2}-\left(\dfrac{p}{a}\right)^2\tilde G(x,p;x',t')=-\dfrac{I}{\rho a^2}e^{-pt'}\delta(x-x')\\ G(x,p;x',t')\big|_{x\to\pm\infty}\text{ 有界}\end{cases}$$，可限定$\operatorname{Re}p>0$。

方程两边对x在区间$[x'-\varepsilon,x'+\varepsilon]$上积分，并令$\varepsilon\to0^+$得

$\dfrac{\partial\tilde G}{\partial x}\bigg|_{x=x'+0}-\dfrac{\partial\tilde G}{\partial x}\bigg|_{x=x'-0}=-\dfrac{I}{\rho a^2}e^{-pt'}$，另外还有连续条件$\tilde G\big|_{x=x'+0}=\tilde G\big|_{x=x'-0}$（若$\tilde G$在$x=x'$点不连续，方程右边必出现$\delta'(x-x')$项）。

在$x\neq x'$点，方程为齐次方程，因此，上面的问题即为带连接边界条件的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde G_1}{\partial x^2}-\left(\dfrac{p}{a}\right)^2\tilde G_1=0,x<x'\\ \tilde G_1\big|_{x\to-\infty}=0\end{cases},\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\tilde G_2}{\partial x^2}-\left(\dfrac{p}{a}\right)^2\tilde G_2=0,x>x'\\ \dfrac{\partial\tilde G_2}{\partial x}\bigg|_{x\to\infty}=0\end{cases},\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde G_2}{\partial x}\bigg|_{x=x'^+}-\dfrac{\partial\tilde G_1}{\partial x}\bigg|_{x=x'^-}=-\dfrac{I}{\rho a^2}e^{-pt'}\\ \tilde G_2\big|_{x=x'^+}=\tilde G_1\big|_{x=x'^-}\end{cases}。$$

可解出$\tilde G(x,p;x',t')=\begin{cases}Ae^{\frac{p}{a}x},x<x'\\ Be^{-\frac{p}{a}x},x>x'\end{cases}$。由连接边界条件定出$A=\dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'+\frac{x'}{a}\right)}}{p}$，

$B_2=\dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'-\frac{x'}{a}\right)}}{p}$，即$\tilde G(x,p;x',t')=\begin{cases}\dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'-\frac{x-x'}{a}\right)}}{p},x<x'\\ \dfrac{I}{2\rho a}\dfrac{e^{-p\left(t'+\frac{x-x'}{a}\right)}}{p},x>x'\end{cases}$。取反变换得

$$G\left(x,t;x',t'\right)=\begin{cases}\dfrac{I}{2\rho a}\eta\left(t-t'+\dfrac{x-x'}{a}\right),x<x'\\ \dfrac{I}{2\rho a}\eta\left(t-t'-\dfrac{x-x'}{a}\right),x>x'\end{cases}=\frac{I}{2\rho a}\eta\left(t-t'-\frac{\left|x-x'\right|}{a}\right)。$$

344．两端固定的弦，长为l，$t=t'$时用细锤敲击弦上$x=x'$点，使得该点获得冲量I。求解弦的横振动，设初位移和初速度都为 0。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}=\dfrac{I}{\rho}\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)\\ G\left(x,t;x',t'\right)\Big|_{x=0}=0,G\left(x,t;x',t'\right)\Big|_{x=l}=0\\ G\left(x,t;x',t'\right)\Big|_{t<t'}=0,\dfrac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t}\Bigg|_{t<t'}=0\end{cases}。$$

可将$G\left(x,t;x',t'\right)$用本征函数$\sin\dfrac{n\pi}{l}x$展开：$G\left(x,t;x',t'\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n\left(t\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$，

将$\delta\left(x-x'\right)$也按$\sin\dfrac{n\pi}{l}x$展开：$\delta\left(x-x'\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$，可求出

$c_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\delta\left(x-x'\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}xdx=\dfrac{2}{l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'$，即$\delta\left(x-x'\right)=\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x$。

代入方程得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}g_n\left(t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{2I}{\rho l}\delta\left(t-t'\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x'\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

再由初始条件可得$\begin{cases}g_n''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2g_n\left(t\right)=\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\delta\left(t-t'\right)\\ g_n\Big|_{t<t'}=0,g_n'\Big|_{t<t'}=0\end{cases}$。

对方程两边在$t=t'$附近积分可得$g_n'\left(t'^{+}\right)=g_n'\left(t'^{-}\right)+\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'=\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'$，再由

$g_n\left(t\right)$在$t=t'$的连续性可得$g_n\left(t'^{+}\right)=g_n\left(t'^{-}\right)=0$，上面问题即为

$\begin{cases}g_n''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2g_n\left(t\right)=0,t>t'\\ g_n\left(t'\right)=0,g_n'\left(t'\right)=\dfrac{2I}{\rho l}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\end{cases}$，解得$g_n\left(t\right)=\dfrac{2I}{n\pi a\rho}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi a}{l}\left(t-t'\right)$。

即$G\left(x,t;x',t'\right)=\dfrac{2I}{\pi a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x\sin\dfrac{n\pi a}{l}\left(t-t'\right)\eta\left(t-t'\right)$。

345．求解点热源在无穷长细杆上产生的温度分布与变化：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)\\ G\left(x,t;x',t'\right)\Big|_{t=0}=0\end{cases}。$$

对变量t作 Laplace 变换得$\dfrac{\partial^2\tilde{G}\left(x,p;x',t'\right)}{\partial x^2}-\dfrac{p}{\kappa}\tilde{G}\left(x,p;x',t'\right)=-\dfrac{e^{-pt'}}{\kappa}\delta\left(x-x'\right)$，可限定

$-\pi/2<\operatorname{Re}p<\pi/2$。由自然条件$\tilde{G}\left(x,t;x',t'\right)\Big|_{x\to\pm\infty}$有界解得$\tilde{G}=\begin{cases}Ae^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x},x<x'\\ Be^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x},x>x'\end{cases}$。

由连接条件$\tilde{G}\Big|_{x=x'^-}=\tilde{G}\Big|_{x=x'^+}$，$\dfrac{\partial\tilde{G}}{\partial x}\Bigg|_{x=x'^+}-\dfrac{\partial\tilde{G}}{\partial x}\Bigg|_{x=x'^-}=-\dfrac{e^{-pt'}}{\kappa}$可得$\tilde{G}=\dfrac{1}{2\sqrt{\kappa p}}e^{-pt'}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|}$。

反演得$G\left(x,t;x',t'\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\kappa\pi\left(t-t'\right)}}\exp\left[-\dfrac{\left(x-x'\right)^2}{4\kappa\left(t-t'\right)}\right]\eta\left(t-t'\right)$。

346．试证明一维热传导方程 Green 函数$G\left(x,t;x',t'\right)$的互易性：$G\left(x,t;x',t'\right)=G\left(x',-t';x,t\right)$，

其中$G\left(x,t;x',t'\right)$满足$\begin{cases}\dfrac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)\\ G\Big|_{x=0}=0,G\Big|_{x=l}=0,G\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

又可写成$\begin{cases}\dfrac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)\\ G\Big|_{x=0}=0,G\Big|_{x=l}=0,G\Big|_{t<t'}=0\end{cases}$。

对于$G\left(x,-t;x'',-t''\right)$有$\begin{cases}-\dfrac{\partial G\left(x,-t;x'',-t''\right)}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 G\left(x,-t;x'',-t''\right)}{\partial x^2}=\delta\left(x-x''\right)\delta\left(t-t''\right)\\ G\Big|_{x=0}=0,G\Big|_{x=l}=0,G\left(x,-t;x'',-t''\right)\Big|_{t>t''}=0\end{cases}$，

将$G\left(x,t;x',t'\right)$的方程两边乘$G\left(x,-t;x'',-t''\right)$减去$G\left(x,-t;x'',-t''\right)$的方程两边乘$G\left(x,t;x',t'\right)$

可得：$G\left(x',-t';x'',-t''\right)\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)-G\left(x'',t'';x',t'\right)\delta\left(x-x''\right)\delta\left(t-t''\right)$

$$=G\left(x,-t;x'',-t''\right)\frac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t}+G\left(x,t;x',t'\right)\frac{\partial G\left(x,-t;x'',-t''\right)}{\partial t}$$

$$+\kappa G\left(x,t;x',t'\right)\frac{\partial^2 G\left(x,-t;x'',t''\right)}{\partial x^2}-\kappa G\left(x,-t;x'',-t''\right)\frac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[G\left(x,-t;x'',-t''\right)G\left(x,t;x',t'\right)\right]$$

$$+\kappa\frac{\partial}{\partial x}\left[G\left(x,t;x',t'\right)\frac{\partial G\left(x,-t;x'',t''\right)}{\partial x}-G\left(x,-t;x'',-t''\right)\frac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x}\right]。$$

两边对 x 从 0 积到 l 得：

$$G\left(x',-t';x'',-t''\right)\delta\left(t-t'\right)-G\left(x'',t'';x',t'\right)\delta\left(t-t''\right)$$

$$=\int_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left[G\left(x,-t;x'',-t''\right)G\left(x,t;x',t'\right)\right]dx$$

$$+\kappa\left[G\left(x,t;x',t'\right)\frac{\partial G\left(x,-t;x'',t''\right)}{\partial x}-G\left(x,-t;x'',-t''\right)\frac{\partial G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=l}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\left[G\left(x,-t;x'',-t''\right)G\left(x,t;x',t'\right)\right]dx，$$

再对 t 从 0 积到 ∞，由于 $G\left(x,-t;x'',-t''\right)\Big|_{t>t''}=0$，所以

$$G\left(x',-t';x'',-t''\right)-G\left(x'',t'';x',t'\right)=\int_0^l\left[G\left(x,-t;x'',-t''\right)G\left(x,t;x',t'\right)\right]_{t=0}^{t\to\infty}dx=0，$$

即 $G\left(x',-t';x'',-t''\right)=G\left(x'',t'';x',t'\right)$，也就是 $G\left(x,t;x',t'\right)=G\left(x',-t';x,t\right)$。

347．用 Green 函数法解无界弦的横振动问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{t=0}=\varphi\left(x\right),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi\left(x\right)\end{cases}$。

令 343 题中 $\dfrac{I}{\rho}=1$，即 $\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G\left(x,t;x',t'\right)}{\partial x^2}=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)$，

将 x 与 x' 互换，t 与 t' 互换得 $\dfrac{\partial^2 G\left(x',t';x,t\right)}{\partial t'^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G\left(x',t';x,t\right)}{\partial x'^2}=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)$，

由 $G\left(x,t;x',t'\right)$ 的互易性得 $\dfrac{\partial^2 G\left(x,-t;x',-t'\right)}{\partial t'^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G\left(x,-t;x',-t'\right)}{\partial x'^2}=\delta\left(x-x'\right)\delta\left(t-t'\right)$，

将$-t$换成t，$-t'$换成t'得$\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial t'^2}-a^2\dfrac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x'^2}=\delta(x-x')\delta(t-t')$。（a）

又有$\dfrac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2}=0$。（b）

（a）× $u(x',t')$ －（b）× $G(x,t;x',t')$得：

$$u(x,t)\delta(x-x')\delta(t-t')=\frac{\partial}{\partial t'}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}-G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\right]$$

$$+a^2\frac{\partial}{\partial x'}\left[G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'}-u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'}\right]。$$

两边对x'在$(-\infty,\infty)$上积分得

$$u(x,t)\delta(t-t')=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t'}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}-G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\right]dx'$$

$$+a^2\left[G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'}-u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'}\right]_{x'\to-\infty}^{x'\to\infty},$$

第 343 题已求得$G=\dfrac{1}{2a}\eta\left(t-t'-\dfrac{|x-x'|}{a}\right)$，所以$G\big|_{x'\to\pm\infty}=\dfrac{1}{2a}\eta(-\infty)=0$，

$\dfrac{\partial G}{\partial x'}=\operatorname{sgn}(x-x')\dfrac{1}{2a^2}\delta\left(t-t'-\dfrac{|x-x'|}{a}\right)$，$\dfrac{\partial G}{\partial x'}\bigg|_{x'\to\pm\infty}=\pm\dfrac{1}{2a^2}\delta(-\infty)=0$，

所以$u(x,t)\delta(t-t')=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t'}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}-G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\right]dx'$。

两边对t'在$[0,\infty)$上积分得

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}-G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}^{t'\to\infty}dx'。$$

由于$G\big|_{t'\to\infty}=\dfrac{1}{2a}\eta(-\infty)=0$，$G\big|_{t'=0}=\dfrac{1}{2a}\eta\left(t-\dfrac{|x-x'|}{a}\right)$，$\dfrac{\partial G}{\partial t'}=-\dfrac{1}{2a}\delta\left(t-t'-\dfrac{|x-x'|}{a}\right)$，

$\dfrac{\partial G}{\partial t'}\bigg|_{t'\to\infty}=-\dfrac{1}{2a}\delta(-\infty)=0$，$\dfrac{\partial G}{\partial t'}\bigg|_{t'=0}=-\dfrac{1}{2a}\delta\left(t-\dfrac{|x-x'|}{a}\right)$，

所以$u(x,t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}-G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}dx'$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x')\delta\left(t-\frac{|x-x'|}{a}\right)+\eta\left(t-\frac{|x-x'|}{a}\right)\psi(x')\right]dx'$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\varphi(x')\delta(x'-x+at)dx'+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(x')dx'$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\varphi(x')\delta(x'-x-at)dx'+\frac{1}{2a}\int_{x}^{x+at}\psi(x')dx'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x')dx'\text{。}$$

348. 用 Green 函数法解 215 题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x=0}=0,u\big|_{x=l}=0,u\big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x,0\le x<c\\ \dfrac{h(l-x)}{l-c},c\le x<l\end{cases},\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

第 344 题已求得$G=\dfrac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x\sin\dfrac{n\pi a}{l}(t-t')\eta(t-t')$（令$\dfrac{I}{\rho}=1$）。

重复上题步骤可得$u(x,t)=\int_0^l\left(G\dfrac{\partial u}{\partial t'}-u\dfrac{\partial G}{\partial t'}\right)_{t'=0}dx'=-\int_0^l u(x',0)\dfrac{\partial G}{\partial t'}\Big|_{t'=0}dx'$。

$\dfrac{\partial G}{\partial t'}\Big|_{t'=0}=-\dfrac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{l}x'\sin\dfrac{n\pi}{l}x\cos\dfrac{n\pi a}{l}t$，所以

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t\int_0^l u(x',0)\sin\frac{n\pi}{l}x'dx'$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t\left[\frac{h}{c}\int_0^c x'\sin\frac{n\pi}{l}x'dx'+\frac{h}{l-c}\int_c^l(l-x')\sin\frac{n\pi}{l}x'dx'\right]$$

$$=\frac{2hl^2}{c(l-c)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\cos\frac{n\pi a}{l}t\text{。}$$

349. 用 Green 法解无界弦的热传导问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$。

第 345 题已求得$G\left(x,t;x',t'\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\kappa\pi\left(t-t'\right)}}\exp\left[-\dfrac{\left(x-x'\right)^2}{4\kappa\left(t-t'\right)}\right]\eta\left(t-t'\right)$

重复 247 题步骤可得$u\left(x,t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x'\right)G\big|_{t'=0}dx'=\dfrac{1}{2\sqrt{\kappa\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x'\right)\exp\left[-\dfrac{\left(x-x'\right)^2}{4\kappa t}\right]dx'$。

350．用 342 题方法求三维无界空间波动方程和热传导方程的 Green 函数。

波动方程：$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\right)G\left(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'\right)=\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\delta\left(t-t'\right)$。

对变量$\boldsymbol{r}$和t作 Fourier 变换得

$\left(-\omega^2+a^2k^2\right)\tilde{G}\left(\boldsymbol{k},\omega;\boldsymbol{r}',t'\right)=\exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-i\omega t'\right)$，

即$\tilde{G}\left(\boldsymbol{k},\omega;\boldsymbol{r}',t'\right)=\dfrac{\exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-i\omega t'\right)}{a^2k^2-\omega^2}$，

反演得$G\left(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'\right)=\dfrac{1}{\left(2\pi\right)^4a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\left(t-t'\right)}d\omega\iiint\dfrac{\exp\left[i\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\right]}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}d\boldsymbol{k}$，同 342 题，记

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，$\tau=t-t'$，以$\boldsymbol{R}$方向为 z 方向在$\boldsymbol{k}$空间建立球坐标系，有

$$G\left(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3a^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\omega\int_0^{\infty}\frac{k^2dk}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}\int_0^{\pi}e^{ikR\cos\theta}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3a^2iR}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\omega\int_0^{\infty}\frac{k\left(e^{ikR}-e^{ikR}\right)dk}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3a^2iR}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\omega\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ikR}dk}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi\right)^3a^2iR}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\omega\lim_{\eta\to0^+}\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ikR}dk}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{a}-i\eta\right)^2}\text{。}$$

由留数定理，$\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ikR}dk}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{a}-i\eta\right)^2}=2\pi i\,\mathrm{res}\left[\frac{ze^{iRz}}{z^2-\left(\dfrac{\omega}{a}-i\eta\right)^2}\right]_{z=-\frac{\omega}{a}+i\eta}=\pi ie^{-R\eta}e^{-i\frac{\omega}{a}R}$，

所以$G\left(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'\right)=\dfrac{1}{4\pi a^2R}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\left(\tau-\frac{R}{a}\right)}d\omega=\dfrac{1}{4\pi a^2R}\delta\left(\tau-\dfrac{R}{a}\right)$

$$=\frac{1}{4\pi a^2\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\delta\left(t-t'-\frac{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}{a}\right)。$$

热传导方程：$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\nabla^2\right)G\left(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'\right)=\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\delta\left(t-t'\right)$。

对变量 $\boldsymbol{r}$ 作 Fourier 变换，对变量 t 作 Laplace 变换得

$\left(p+\kappa k^2\right)\tilde{G}\left(\boldsymbol{k},p;\boldsymbol{r}',t'\right)=\exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-pt'\right)$，限定 $\left|\arg p\right|<\frac{\pi}{2}$。

即 $\tilde{G}\left(\boldsymbol{k},p;\boldsymbol{r}',t'\right)=\frac{1}{\kappa}\frac{\exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\exp\left(-pt'\right)}{k^2+\frac{p}{\kappa}}$，作 Fourier 反演得

$$\tilde{G}\left(\boldsymbol{r},p;\boldsymbol{r}',t'\right)=\frac{e^{-pt'}}{\kappa}\frac{1}{\left(2\pi\right)^3}\iiint\frac{\exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}\right)}{k^2+\frac{p}{\kappa}}d\boldsymbol{k}=\frac{e^{-pt'}}{4\pi^2 i\kappa R}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ikR}}{k^2+\frac{p}{\kappa}}dk。$$

由留数定理，由于 $\left|\arg p\right|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{3\pi}{4}<\arg i\sqrt{\frac{p}{\kappa}}<\frac{\pi}{4}$，$-\frac{3\pi}{4}<\arg\left(-i\sqrt{\frac{p}{\kappa}}\right)<-\frac{\pi}{4}$，即

$i\sqrt{\frac{p}{\kappa}}$ 位于上半平面，$-i\sqrt{\frac{p}{\kappa}}$ 位于下半平面，

所以 $\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ikR}}{k^2+\frac{p}{\kappa}}dk=2\pi i\,\mathrm{res}\left(\frac{ze^{izR}}{z^2+\frac{p}{\kappa}}\right)_{z=\sqrt{\frac{p}{\kappa}}i}=\pi ie^{-R\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}$，

因此 $\tilde{G}\left(\boldsymbol{r},p;\boldsymbol{r}',t'\right)=\frac{e^{-pt'}}{4\pi\kappa R}e^{-R\sqrt{\frac{p}{\kappa}}}$。

书中已求得 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-x^2}dx\xrightarrow{LT}\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$，

所以 $e^{-\alpha\sqrt{p}}\xrightarrow{LT^{-1}}\frac{d}{dt}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$，

再利用 Laplace 变换性质 $f\left(at\right)\xrightarrow{LT}\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ 可得

$$G\left(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t'\right)=\frac{1}{8\left[\pi\kappa\left(t-t'\right)\right]^{3/2}}e^{-\frac{R^2}{4\kappa\left(t-t'\right)}}\eta\left(t-t'\right)。$$

351．用 Laplace 变换求解半无界问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, x>0, t>0\\ u\big|_{x=0}=u_0, u\big|_{t=0}=0\end{cases}$。

对变量t作 Laplace 变换得$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(x,p)=0, x>0\\ U(x,p)\big|_{x=0}=\dfrac{u_0}{p}\end{cases}$，

解得$U(x,p)=\dfrac{u_0}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}$。由于$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\xrightarrow{LT}\dfrac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$，令$\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{\kappa}}$即可得

$u(x,t)=u_0\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$。

352．一高为d，底面积为S的圆柱体，侧面绝热，单位时间内通过下底供给热量H，而上底保持温度为 0。设柱体初温为 0，证明在t时刻单位时间内通过上底流出的热量为

$Q=H\left[1-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2d}\pi\right)^2\kappa t}\right]$，其中$\kappa$为扩散率。

以底面圆心为坐标原点，圆柱轴线为z轴建立柱坐标系，温度分布与ρ,φ无关，底面热流密度$\dfrac{H}{S}=-k\dfrac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}$，所以$\begin{cases}\dfrac{\partial u(z,t)}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=0\\ \dfrac{\partial u(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-\dfrac{H}{kS}, u(z,t)\big|_{z=d}=0, u(z,t)\big|_{t=0}=0\end{cases}$。

对变量t作 Laplace 变换得$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(z,p)}{\partial z^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(z,p)=0\\ \dfrac{\partial U(z,p)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-\dfrac{H}{kS}\dfrac{1}{p}, U(z,p)\big|_{z=d}=0\end{cases}$，

解得$U(z,p)=\dfrac{H}{kS}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}(d-z)}{\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}d}\dfrac{1}{p}\sqrt{\dfrac{\kappa}{p}}$没，则$-k\dfrac{\partial U(z,p)}{\partial z}\bigg|_{z=d}=\dfrac{H}{S}\dfrac{1}{p}\dfrac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}d}$。

令习题 09 第 177（4）题中$x=l=\dfrac{d}{\sqrt{\kappa}}$可求得上式反演

$-k\dfrac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=d}=\dfrac{H}{S}\left[1-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2d}\pi\right)^2\kappa t}\right]$，该式就是上底热流密度$\dfrac{Q}{S}$，即

$$Q=H\left[1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2d}\pi\right)^2\kappa t}\right]。$$

353．设有两条半无界杆，温度分别为 0 和u_0。在$t=0$时将两杆端点相接，求$t>0$时杆中温度分布：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{t=0}=u_0\eta(x)\end{cases}$。

对变量t作 Laplace 变换得$\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(x,p)=-\dfrac{u_0}{\kappa}\eta(x)$，　（*）

即$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(x,p)=0, x<0\\ U\big|_{x\to-\infty}\text{有界}\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(x,p)=-\dfrac{u_0}{\kappa}, x>0\\ U\big|_{x\to\infty}\text{有界}\end{cases}$，

解为$U(x,p)=\begin{cases}Ae^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, x<0\\ Be^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}+\dfrac{u_0}{p}, x>0\end{cases}$。

由方程（*）可看出$U(x,p)$和$\dfrac{\partial U(x,p)}{\partial x}$在$x=0$连续，否则方程右边会出现冲激或冲激偶。

由此可得$U(x,p)=\begin{cases}\dfrac{u_0}{2}\dfrac{1}{p}e^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, x<0\\ \dfrac{u_0}{p}-\dfrac{u_0}{2}\dfrac{1}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, x>0\end{cases}$。

反演得$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{u_0}{2}\operatorname{erfc}\left(-\dfrac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), x<0\\ u_0-\dfrac{u_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), x>0\end{cases}$。

354．用 Laplace 变换解习题 12 第 236 题：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x=0}=Ae^{-\alpha^2\kappa t}, u\big|_{x=l}=Be^{-\beta^2\kappa t}, u\big|_{t=0}=0\end{cases}$。

对变量t作 Laplace 变换得$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U(x,p)}{\partial x^2}-\dfrac{p}{\kappa}U(x,p)=0\\ U\big|_{x=0}=\dfrac{A}{p+\alpha^2\kappa},U\big|_{x=l}=\dfrac{B}{p+\beta^2\kappa}\end{cases}$。

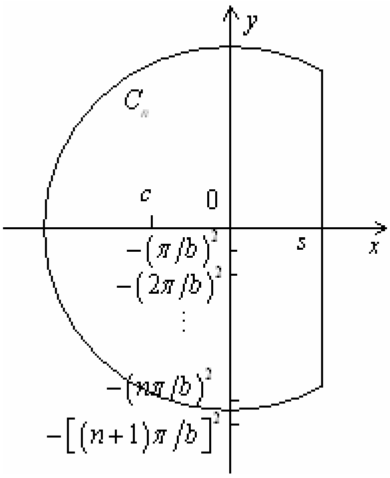
解得$U(x,p)=\dfrac{A}{p+\alpha^2\kappa}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}l}+\dfrac{B}{p+\beta^2\kappa}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}x}{\operatorname{sh}\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}l}$。 （*）

下面求$F(p)=\dfrac{1}{p-c}\dfrac{\operatorname{sh}a\sqrt{p}}{\operatorname{sh}b\sqrt{p}}$（$b>a>0$，$c\neq 0$）的反演：

$F(p)$的一阶极点：$p=c$，$p=-\left(\dfrac{k\pi}{b}\right)^2$，$k=1,2,\cdots$。

$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=c}=\dfrac{\operatorname{sh}a\sqrt{c}}{\operatorname{sh}b\sqrt{c}}e^{ct}$，$\operatorname{res}\left[F(p)e^{pt}\right]_{p=-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2}=\dfrac{(-1)^k2k\pi}{k^2\pi^2+cb^2}\sin\dfrac{k\pi a}{b}e^{-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2t}$。

取如下积分路径：其中C_n半径为$-\left(\dfrac{n+1/2}{b}\pi\right)^2$，该取法的讨论类似习题 09 第 177（4）题。



令$n\to\infty$可得$\dfrac{1}{p-c}\dfrac{\operatorname{sh}a\sqrt{p}}{\operatorname{sh}b\sqrt{p}}\xrightarrow{LT^{-1}}\dfrac{\operatorname{sh}a\sqrt{c}}{\operatorname{sh}b\sqrt{c}}e^{ct}+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k2k\pi}{k^2\pi^2+cb^2}\sin\dfrac{k\pi a}{b}\exp\left[-\left(\dfrac{k\pi}{b}\right)^2t\right]$。

所以（*）式的反演为$u(x,t)=A\dfrac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2\kappa t}+B\dfrac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2\kappa t}$

$+\sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\left[\dfrac{A}{\alpha^2l^2-n^2\pi^2}-\dfrac{(-1)^nB}{\beta^2l^2-n^2\pi^2}\right]\sin\dfrac{n\pi x}{l}\exp\left[-\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2\kappa t\right]$。

355．用 Fourier 变换法解无界弦的振动问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{t=0}=u_0\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right],\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

对变量 x 作 Fourier 变换得$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(k,t)}{\partial t^2}+k^2c^2U(k,t)=0\\ U\big|_{t=0}=u_0FT\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\right\},\dfrac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

解得$U(k,t)=u_0FT\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\right\}\cos kct=\dfrac{u_0}{2}FT\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\right\}\left(e^{ikct}+e^{-ikct}\right)$，

反演得$u(x,t)=\dfrac{u_0}{2}\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{x+ct}{a}\right)^2\right]+\exp\left[-\left(\dfrac{x-ct}{a}\right)^2\right]\right\}$。

356．用 Fourier 变换和 Laplace 变换解无界弦的横振动问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$。

对变量 x 作 Fourier 变换得$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}(k,t)}{\partial t^2}+k^2c^2\tilde{u}(k,t)=0\\ \tilde{u}\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(k),\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\Big|_{t=0}=\tilde{\psi}(k)\end{cases}$，再对变量 t 作 Laplace 变换得

$$U(k,p)=\frac{p\tilde{\varphi}(k)+\tilde{\psi}(k)}{p^2+k^2c^2}=\frac{1}{2}\frac{\tilde{\varphi}(k)-\dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}}{p+ikc}+\frac{1}{2}\frac{\tilde{\varphi}(k)+\dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}}{p-ikc},$$

作 Laplace 反演得$\tilde{u}(k,t)=\dfrac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(k)-\dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}\right]e^{-ikct}+\dfrac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(k)+\dfrac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}\right]e^{ikct}$

$$=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(k)\left(e^{-ikct}+e^{ikct}\right)+\frac{1}{2}\frac{\tilde{\psi}(k)}{ikc}\left(e^{ikct}-e^{-ikct}\right)。$$

再作 Fourier 反演得

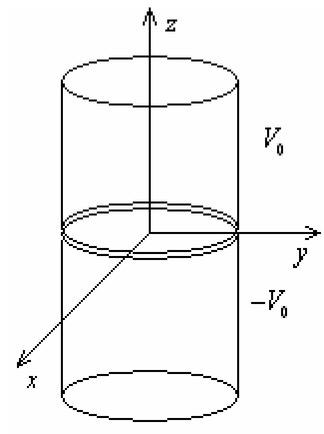
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x}\left[\psi(\xi+ct)-\psi(\xi-ct)\right]d\xi$$
$$=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi。$$

357．一半无界弦 $x\ge 0$，原处于平衡状态。设在 $t>0$ 时 $x=0$ 端作微小振动 $A\sin\omega t$。试求弦上各点运动：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x=0}=A\sin\omega t\eta(t),u\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

对变量 t 作 Laplace 变换得 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}-\left(\dfrac{p}{c}\right)^2 U(x,p)=0\\ U(x,p)\big|_{x=0}=\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2},U(x,p)\big|_{x\to\infty}\text{有界}\end{cases}$。

解得 $U(x,p)=\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}e^{-\frac{p}{c}x}$，反演得 $u(x,t)=A\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right)\eta\left(t-\dfrac{x}{c}\right)$。

358．电子光学中常遇到一种简单的静电透镜—等径双筒镜，它的两极是由两个无限接近的等径同轴长圆筒组成，其电势分别为 $-V_0$ 与 V_0（见下图）。求筒内静电势。



先令边界条件为 $u\big|_{\rho=a}=V_0e^{-k|z|}\operatorname{sgn} z$，该问题显然与 φ 无关，

即 $\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\dfrac{\partial u(\rho,z)}{\partial\rho}\right]+\dfrac{\partial^2 u(\rho,z)}{\partial z^2}=0\\ u\big|_{\rho=0}\text{有界},u\big|_{\rho=a}=V_0e^{-k|z|}\operatorname{sgn} z\end{cases}$。对变量 z 作 Fourier 变换得

$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\dfrac{\partial U(\rho,\omega)}{\partial\rho}\right]-\omega^2U(\rho,\omega)=0\\ U\big|_{\rho=0}\text{有界},U\big|_{\rho=a}=-2iV_0\dfrac{\omega}{k^2+\omega^2}\end{cases}$。这是零阶虚宗量 Bessel 方程，有界解为

$U(\rho,\omega)=AI_0(\omega\rho)$，由边界条件得 $U(\rho,\omega)=-2iV_0\dfrac{\omega}{k^2+\omega^2}\dfrac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}$。

反演得$u(\rho,z)=-\frac{V_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\frac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}ie^{i\omega z}d\omega$

$$=-\frac{V_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\frac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}(i\cos\omega z-\sin\omega z)d\omega\text{。}$$

上面的积分理解为主值，由于$\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\frac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}\cos\omega z$是$\omega$的奇函数，所以这部分积分为 0，

即$u(\rho,z)=\frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega}{k^2+\omega^2}\frac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}\sin\omega z d\omega$，

令$k\to 0$得$u(\rho,z)=\frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{I_0(\omega\rho)}{I_0(\omega a)}\frac{\sin\omega z}{\omega}d\omega$。

359．设有一半径为 1 的带电圆盘，圆盘上电势为V_0，求空间电势。

以圆盘圆心为原点，垂直于盘面的轴为z轴建立柱坐标系。该问题与φ无关，且显然关于$z=0$面是对称的，即u是z的偶函数，必有$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0$（$\rho>1$），可以只考虑半空间$z>0$。

$$\begin{cases}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u(\rho,z)}{\partial\rho}\right]+\frac{\partial^2 u(\rho,z)}{\partial z^2}=0\\ u|_{z=0,0<\rho<1}=V_0,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0,\rho>1}=0,u|_{z\to\infty}=0\\ u|_{\rho=0}\text{有界},u|_{\rho\to\infty}=0\end{cases}\text{。}$$

对变量ρ作 Hankel 变换：$U(k,z)=\int_0^{\infty}u(\rho,z)J_0(k\rho)\rho d\rho$，则

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial u(\rho,z)}{\partial\rho}\right]J_0(k\rho)\rho d\rho=\rho\frac{\partial u(\rho,z)}{\partial\rho}J_0(k\rho)\Big|_{\rho=0}^{\rho\to\infty}-\int_0^{\infty}\rho\frac{\partial u(\rho,z)}{\partial\rho}\frac{dJ_0(k\rho)}{d\rho}d\rho$$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{\partial u(\rho,z)}{\partial\rho}\rho\frac{dJ_0(k\rho)}{d\rho}d\rho=-u(\rho,z)\rho\frac{dJ_0(k\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=0}^{\rho\to\infty}+\int_0^{\infty}u(\rho,z)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_0(k\rho)}{d\rho}\right]d\rho$$

$$=-k^2\int_0^{\infty}u(\rho,z)J_0(k\rho)\rho d\rho=-k^2U(k,z)\text{。}$$

即原方程变换为$\frac{\partial^2 U(k,z)}{\partial z^2}-k^2U(k,z)=0$，由有界条件可得$U(k,z)=A(k)e^{-kz}$。

反演得$u(\rho,z)=\int_0^{\infty}A(k)e^{-kz}J_0(k\rho)kdk$，代入$z$的边界条件得到积分方程：

$\int_0^{\infty}A(k)J_0(k\rho)kdk=V_0$（$0<\rho<1$），

$\int_0^{\infty}A(k)J_0(k\rho)k^2dk=0$（$\rho>1$）。

由习题 16 第 319 题结果可知$A(k)=\dfrac{2V_0}{\pi}\dfrac{\sin k}{k^2}$，即

$u(\rho,z)=\dfrac{2V_0}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-kz}J_0(k\rho)\dfrac{\sin k}{k}dk$。

360．由柱面坐标(ρ,z)可以定义扁球面坐标(μ,ξ)：$z=\mu\xi$，$\rho=\sqrt{(1-\mu^2)(1+\xi^2)}$。

（1）证明：在此坐标系下，上题化为$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right]=0\\ u|_{\xi=0}=V_0,u|_{\xi\to\infty}\to 0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=0,u|_{\mu=1}\text{有界}\end{cases}$。

（2）求出$u(\mu,\xi)$。

（1）该坐标系下的 Laplace 算符为$\nabla^2=\dfrac{1}{\mu^2+\xi^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\right]+\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\dfrac{\partial}{\partial\xi}\right]\right\}$。

对于$z>0$半空间，(μ,ξ)取值范围：$0<\mu<1$，$\xi>0$。

$z=0,0<\rho<1$对应$\xi=0$，所以$u|_{z=0,0<\rho<1}=u|_{\xi=0}=V_0$。

由坐标关系可得$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{\xi\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2}\dfrac{\partial}{\partial\mu}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\xi}}{\xi^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2}+\mu^2}$，$z=0,\rho>1$对应$\mu=0$，

所以$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0,\rho>1}=\left.\dfrac{\xi\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2}\dfrac{\partial u}{\partial\mu}+\mu\dfrac{\partial u}{\partial\xi}}{\xi^2\dfrac{1-\mu^2}{1+\xi^2}+\mu^2}\right|_{\mu=0}=\left.\dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=0$。

$z\to\infty$和$\rho\to\infty$对应$\xi\to\infty$，所以$u|_{\rho\to\infty}=u|_{z\to\infty}=u|_{\xi\to\infty}\to 0$。

$\rho=0$对应$\mu=1$，所以$u|_{\rho=0}=u|_{\mu=1}$有界。

（2）令$u(\mu,\xi)=\mathrm{M}(\mu)\Xi(\xi)$，分离变量得$\begin{cases}\dfrac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\dfrac{d\mathrm{M}}{d\mu}\right]+\lambda\mathrm{M}=0\\ \dfrac{d}{d\xi}\left[\left(1+\xi^2\right)\dfrac{d\Xi}{d\xi}\right]-\lambda\Xi=0\end{cases}$。

可得本征值问题$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\dfrac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mu}\right]+\lambda\mathrm{M}=0\\ \mathrm{M}'(0)=0,\mathrm{M}(1)\text{有界}\end{cases}$，习题 15 第 292（2）题已得该问题的解为

$\lambda_l=2l(2l+1)$，$\mathrm{M}_l(\mu)=P_{2l}(\mu)$。

$\Xi(\xi)$方程为$\dfrac{d}{d\xi}\left[\left(1+\xi^2\right)\dfrac{d\Xi(\xi)}{d\xi}\right]-2l(2l+1)\Xi(\xi)=0$。 （*）

将ξ换成$i\xi$得$\dfrac{d}{d\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\dfrac{d\Xi(i\xi)}{d\xi}\right]+2l(2l+1)\Xi(i\xi)=0$，所以通解为

$\Xi_l(\xi)=A_lP_{2l}(i\xi)+B_lQ_{2l}(i\xi)$。由于$\Xi(\xi)\big|_{\xi\to\infty}=0$，而当$l\neq0$时$P_{2l}(\infty)$和$Q_{2l}(\infty)$都无界，所以只有$l=0$。此时解方程（*）可得$\Xi_0(\xi)=A\arctan\xi+B$，

所以$u(\mu,\xi)=\mathrm{M}_0(\mu)\Xi_0(\xi)=A\arctan\xi+B$，

由边界条件$u\big|_{\xi=0}=V_0,u\big|_{\xi\to\infty}\to0$得$A=-\dfrac{2}{\pi}V_0,B=V_0$，

所以$u(\mu,\xi)=V_0\left(1-\dfrac{2}{\pi}\arctan\xi\right)=\dfrac{2V_0}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\xi\right)=\dfrac{2V_0}{\pi}\operatorname{arccot}\xi$。

361．$\zeta = z^2$ 把 z 平面上的下列区域变为 ζ 平面上的什么区域？（1）上半平面；（2）上半圆 $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$；（3）圆 $|z|<1$；（4）双纽线内部 $|z|^2<\cos(2\arg z)$。

（1）$0<\arg z<\pi$，$0<\arg\zeta = 2\arg z<2\pi$，所以是沿正实轴割开的全平面。

（2）$0<\arg z<\pi$，$0<\arg\zeta = 2\arg z<2\pi$，$|\zeta| = |z|^2<1$，所以是沿正实轴割开的单位圆内部。

（3）$|\zeta| = |z|^2<1$，所以是单位圆内部。

（4）设 $z=\rho e^{i\varphi}, \zeta = re^{i\theta}$，则由 $\zeta = z^2$ 可得 $r=\rho^2, \theta = 2\varphi$。由于 $\rho^2<\cos 2\varphi$，所以 $r<\cos\theta$，即为圆内部 $\left|\zeta-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$。

362．若在分式线性变换 $\zeta = \lambda\dfrac{z-\mu}{z-\nu}$ 下，z_1, z_2, z_3 各点分别变为 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 各点，试证：$\dfrac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\zeta_2}\Big/\dfrac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2} = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}\Big/\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$。

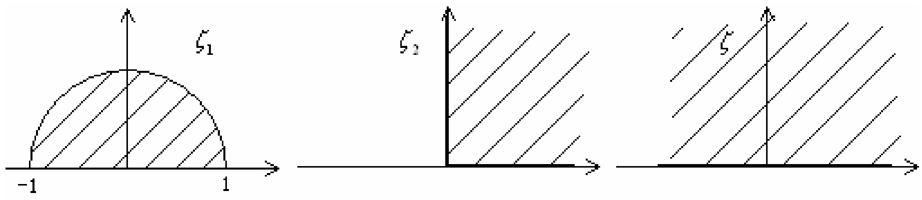
变换写成 $\zeta = \lambda+\dfrac{\lambda(\nu-\mu)}{z-\nu}$，记 $(z, z_1, z_2, z_3) = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}\Big/\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$，只需证明该值在平移，反演，旋转，伸缩下不变即可。平移，旋转，伸缩变换易证，而 $\left(\dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}, \dfrac{1}{z_3}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z_1}}{\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z_2}}\dfrac{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_1}}$

$= \dfrac{z_1z_2-zz_2}{z_1z_2-zz_1}\dfrac{z_1z_2-z_1z_3}{z_1z_2-z_3z_2} = \dfrac{z_1-z}{z_2-z}\dfrac{z_2-z_3}{z_1-z_3} = (z, z_1, z_2, z_3)$，即该值在反演变换下也不变，所以该值在分式线性变换不变。

363．求一变换，把上半平面变为单位圆，并把实轴上的点 $-1, 0, 1$ 分别变为单位圆上的 $1, i, -1$。

设 $\zeta = \lambda\dfrac{z-\mu}{z-\nu}$，将 (z, ζ) 分别代入 $(-1, 1)$，$(0, i)$，$(1, -1)$ 得到三个方程解出 $\zeta = -i\dfrac{z-i}{z+i}$。

364． z 平面上的单位圆$|z|<1$，沿正实轴割开，试把此区域变为ζ 平面上的上半平面。



变换$\zeta_1=\sqrt{z}$ 将单位圆内变换为上半单位圆内。

令$\zeta_2=-\dfrac{\zeta_1+1}{\zeta_1-1}$，可看出该变换将$-1$变换为 0，1 变换为$\infty$，所以$\zeta_1$平面实轴上从-1 到 1 的线段和上半圆弧都变换为ζ_2平面上经过原点和∞的直线，由于 0 变换为 1，所以-1 到 1 的线段变换为正实轴，线段与上半圆弧在-1 处的夹角为$\pi/2$，由保角性，上半圆弧变换为正虚轴，即变换为第一象限。

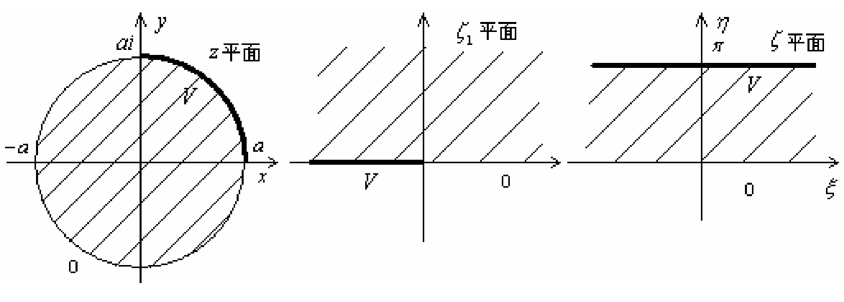
令$\zeta=\zeta_2^2$，则变换为上半平面，综上该变换为$\zeta=\left(\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$。

365．求一变换，把第一象限变为单位圆内。

先由变换$\zeta_1=z^2$将它变换为上半平面。令$\zeta=e^{i\zeta_1}=e^{-y}e^{ix}$，其中$\zeta_1=x+iy$，由于$y>0$，所以$|\zeta|=e^{-y}<1$，即变为单位圆内。综上$\zeta=\exp\left(iz^2\right)$。

366．一半径为a的无穷长导体柱面，第一象限的电势为V，第三象限电势$-V$，第二，四象限接地，求导体内电势。

将u分成两部分：$u=u_1+u_2$，其中u_1在第一象限为V，其余象限为 0，u_2在第三象限为$-V$，其余象限为 0。先求u_1：



$\zeta_1=\lambda\dfrac{z-a}{z-ai}$，使$z$平面上的$a$和$ai$分别对应$\zeta_1$平面上的 0 和$\infty$，即$z$平面上圆映射为$\zeta_1$

平面上通过原点的直线，该直线原点一侧对应 z 平面上第一象限圆弧，原点另一侧对应二，三，四象限的圆弧。由于 $z=-a$ 时 $\zeta_1=\dfrac{2\lambda}{1+i}$，令 $\lambda=1+i$ 可使 $-a$ 映射为 2，即二，三，四象限的圆弧映射为正实轴，那么第一象限的圆弧即映射为负实轴。

$\zeta=\ln\zeta_1$（$\zeta=\xi+i\eta$）将 ζ_1 平面正实轴映射为 $\eta=0$，负实轴映射为 $\eta=\pi$，ζ_1 平面的上半平面变为 ζ 平面上 $\eta=0$ 和 $\eta=\pi$ 之间的带状区域，综上 $\zeta=\ln\left[(1+i)\dfrac{z-a}{z-ai}\right]$。

ζ 平面上 u_1 显然与 ξ 无关，所以 $\dfrac{d^2\zeta}{d\eta^2}=0$，通解为 $u_1=A\eta+B$，由边界条件定出 $u_1=\dfrac{V}{\pi}\eta$。

由 $\zeta=\ln\left[(1+i)\dfrac{z-a}{z-ai}\right]$ 可知 $\eta=\arg\left[(1+i)\dfrac{z-a}{z-ai}\right]=\dfrac{\pi}{4}+\arg\left(\rho e^{i\varphi}-a\right)-\arg\left(\rho e^{i\varphi}-ai\right)$

$$=\frac{\pi}{4}+\tan^{-1}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi-a}-\tan^{-1}\frac{\rho\sin\varphi-a}{\rho\cos\varphi},$$

即 $u_1(\rho,\varphi)=\dfrac{V}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{4}+\tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi-a}-\tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi-a}{\rho\cos\varphi}\right)$。

显然 $u_2(\rho,\varphi)=-u_1(\rho,\varphi-\pi)=-\dfrac{V}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{4}+\tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi+a}-\tan^{-1}\dfrac{\rho\sin\varphi+a}{\rho\cos\varphi}\right)$

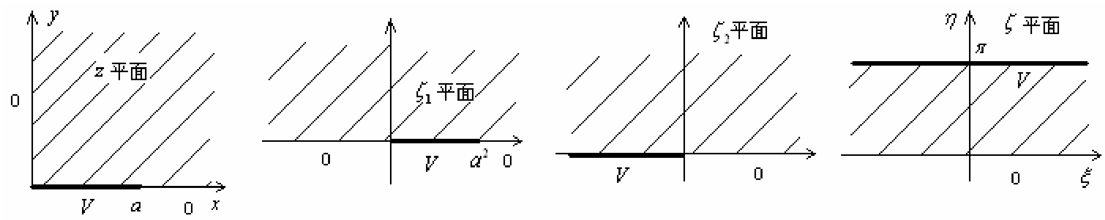
所以
$$u=u_1+u_2=\frac{V}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi-a}-\tan^{-1}\frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi+a}\right.$$
$$\left.+\tan^{-1}\frac{\rho\sin\varphi+a}{\rho\cos\varphi}-\tan^{-1}\frac{\rho\sin\varphi-a}{\rho\cos\varphi}\right)$$

$$=\frac{V}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi-a}-\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi+a}}{1+\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi-a}\dfrac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi+a}}+\tan^{-1}\frac{\dfrac{\rho\sin\varphi+a}{\rho\cos\varphi}-\dfrac{\rho\sin\varphi-a}{\rho\cos\varphi}}{1+\dfrac{\rho\sin\varphi+a}{\rho\cos\varphi}\dfrac{\rho\sin\varphi-a}{\rho\cos\varphi}}\right)$$

$$=\frac{V}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{2a\rho\sin\varphi}{\rho^2-a^2}+\tan^{-1}\frac{2a\rho\cos\varphi}{\rho^2-a^2}\right)。$$

367. 实轴上 $(0,a)$ 段电势为 V，实轴上 $x>a$ 段及正虚轴电势均为 0，求第一象限电势分布。

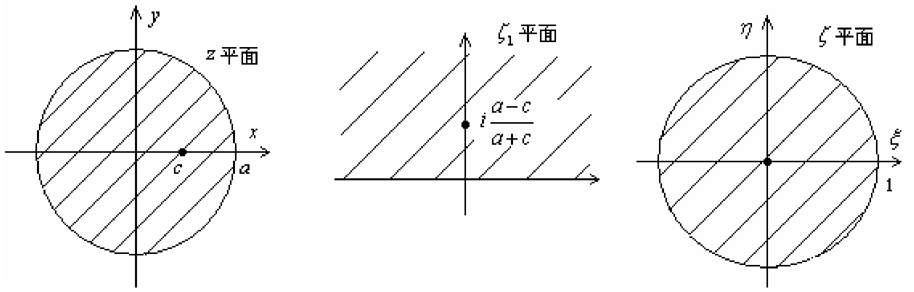
$\zeta_1=z^2$ 将第一象限变为上半平面，a 点变为 a^2。



$\zeta_2=\dfrac{\zeta_1-a^2}{\zeta_1}$将$a^2$变为 0，0 变为$\infty$，所以$\zeta_1$平面的实轴变为$\zeta_2$平面过原点的直线，$a^2+1$变为$\dfrac{1}{a^2+1}>0$，所以$\zeta_1$平面实轴上$a^2$右边部分和负实轴变为$\zeta_2$平面的正实轴，电势为$V$的部分变为负实轴。

$\zeta=\ln\zeta_2$将负实轴变为$\eta=\pi$，正实轴变为$\eta=0$，上半平面变为带状区域$\eta=0$和$\eta=\pi$之间。综上$\zeta=\ln\dfrac{z^2-a^2}{z^2}$，所以$u=\dfrac{V}{\pi}\eta=\dfrac{V}{\pi}\arg\dfrac{z^2-a^2}{z^2}$。

368．在接地的无穷长金属柱内，有一条平行于柱轴的均匀带电丝，线电荷密度为σ。设圆柱的半径为a，带电丝与柱轴距离为c。求柱内电势。



$\zeta_1=-i\dfrac{z-a}{z+a}$将圆内变为上半平面，$c$点变为$i\dfrac{a-c}{a+c}$，

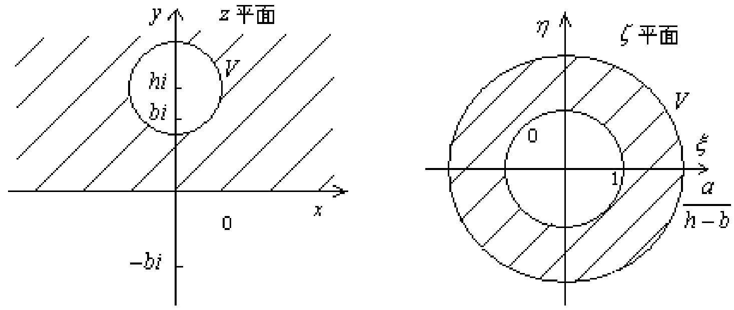
$\zeta=\dfrac{\zeta_1-i\dfrac{a-c}{a+c}}{\zeta_1+i\dfrac{a-c}{a+c}}$将上半平面变成单位圆内，$i\dfrac{a-c}{a+c}$变为原点。$\zeta=\dfrac{a(z-c)}{cz-a^2}$。

$u=\dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{|\zeta|}=\dfrac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\dfrac{cz-a^2}{a(z-c)}\right|$。

369．地面上平挂着一无穷长导体圆柱，圆柱的半径为a，柱轴距地面h（$h>a$）。设圆柱面的电势为V，求圆柱外电势。

设$\pm bi$（$b>0$）是圆柱的反演点对（当然也是地面的反演点对），则可求出$b=\sqrt{h^2-a^2}$。

$\zeta=\dfrac{z+bi}{z-bi}$将$-bi$变为 0，bi变为无穷大，由于反演点对的不变性，地面和圆柱都映射为以原点为圆心的圆。



由于$\left|\dfrac{x+bi}{x-bi}\right|=1$，所以地面映射成的圆半径为 1，又$\dfrac{(h+a)i+bi}{(h+a)i-bi}=\dfrac{a}{h-b}$，即$(h+a)i$映射为$\dfrac{a}{h-b}$，所以圆柱映射成的圆半径为$\dfrac{a}{h-b}$。$u=V\dfrac{\ln|\zeta|}{\ln\dfrac{a}{h-b}}=V\dfrac{\ln\left|\dfrac{z+bi}{z-bi}\right|}{\ln\dfrac{a}{h-b}}$。

370．证明：儒可夫斯基变换$z=\dfrac{a}{2}\left(\zeta+\dfrac{1}{\zeta}\right)$把$z$平面上以$z=\pm a$为焦点的共焦椭圆变为$\zeta$平面上的同心圆。

记$z=x+iy$，$\zeta=\rho e^{i\varphi}$，则$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\varphi\\ y=\dfrac{a}{2}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\sin\varphi\end{cases}$，对于$\zeta$平面上的圆$\rho=\rho_0$，对应

$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$，其中半长轴$A=\dfrac{a}{2}\left(\rho_0+\dfrac{1}{\rho_0}\right)$，半短轴$B=\dfrac{a}{2}\left(\rho_0-\dfrac{1}{\rho_0}\right)$，

焦距$C=\sqrt{A^2+B^2}=a$，即ζ平面上的同心圆映射为z平面上以$z=\pm a$为焦点的共焦椭圆，反之亦然。

371．讨论下列方程的类型，并将他们化为典则形式：

（1）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$；

（2）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0$；

（3）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0$；

（4）$\left(1+x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1+y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$；

（5）$\tan^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\tan x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$。

（1）$a=1,b=1,c=-3,d=2,e=6,f=g=0$，$b^2-ac=4>0$，所以是双曲型方程。

特征线方程为$\frac{dy}{dx}=3$和$\frac{dy}{dx}=-1$，特征线为$y-3x=C_1$和$y+x=C_2$，所以可令

$\xi=y-3x$，$\eta=y+x$，则变换后方程系数$A=C=0,B=-8,D=0,E=8,F=G=0$，

即原方程化为$-16\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+8\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$，即$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$。

令$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}=y-x,\beta=\frac{\eta-\xi}{2}=2x$，则$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$，$\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$，

所以，$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right)$，方程$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$化为

$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{\partial u}{\partial\beta}=0$。

（2）$a=1,b=2,c=5,d=1,e=2,f=g=0$，$b^2-ac=-1<0$，所以是椭圆型方程。

特征线方程$\frac{dy}{dx}=2\pm i$，特征线为$y-(2+i)x=C_1$和$y-(2-i)x=C_2$，令

$\xi=y-(2+i)x$，$\eta=y-(2-i)x$，则原方程化为$4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-i\frac{\partial u}{\partial\xi}+i\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$，

令$\rho=\frac{\xi+\eta}{2}=y-2x,\sigma=\frac{\eta-\xi}{2i}=x$，则方程化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+\frac{\partial u}{\partial\sigma}=0$。

（3）$a=1,b=0,c=y,d=0,e=\dfrac{1}{2},f=g=0$，$b^2-ac=-y$，

当 $y>0$ 时，方程是椭圆型，$y<0$ 时方程是双曲型。

$y<0$ 时，特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-y}$，特征线 $2\sqrt{-y}+x=C_1$ 和 $2\sqrt{-y}-x=C_2$，

令 $\xi=2\sqrt{-y}+x$，$\eta=2\sqrt{-y}-x$，则方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，

令 $\rho=\dfrac{\xi+\eta}{2}=2\sqrt{-y},\sigma=\dfrac{\xi-\eta}{2}=x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}=0$。

$y>0$ 时，特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=\pm i\sqrt{y}$，特征线 $2\sqrt{y}+ix=C_1$ 和 $2\sqrt{y}-ix=C_2$，

令 $\xi=2\sqrt{y}+ix$，$\eta=2\sqrt{y}-ix$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，

令 $\rho=\dfrac{\xi+\eta}{2}=2\sqrt{y},\sigma=\dfrac{\xi-\eta}{2i}=x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}=0$。

（4）$a=1+x^2,b=0,c=1+y^2,d=x,e=y,f=g=0$，$b^2-ac=-\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)<0$，

所以是椭圆型方程。特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=\pm i\sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}}$，特征线 $\operatorname{sh}^{-1}y-i\operatorname{sh}^{-1}x=C_1$ 和

$\operatorname{sh}^{-1}y+i\operatorname{sh}^{-1}x=C_2$，令 $\xi=\operatorname{sh}^{-1}y-i\operatorname{sh}^{-1}x$，$\eta=\operatorname{sh}^{-1}y+i\operatorname{sh}^{-1}x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$。

令 $\rho=\dfrac{\xi+\eta}{2}=\operatorname{sh}^{-1}y$，$\sigma=\dfrac{\eta-\xi}{2i}=\operatorname{sh}^{-1}x$，方程化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}=0$。

（5）$a=\tan^2 x,b=-y\tan x,c=y^2,d=0,e=y,f=g=0$，$b^2-ac=0$，所以方程是抛物型。特征线方程 $\dfrac{dy}{dx}=-y\cot x$，特征线 $y\sin x=C$。可令 $\xi=y\sin x,\eta=y\cos x$，变换后方程系数 $A=B=0,C=\dfrac{y^2}{\cos^2 x},D=-\dfrac{y\sin x}{\cos^2 x},E=\dfrac{y}{\cos x},F=G=0$，即方程化为

$\dfrac{y^2}{\cos^2 x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\dfrac{y\sin x}{\cos^2 x}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{y}{\cos x}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0$，即 $\left(\xi^2+\eta^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\xi\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\eta\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0$。

372．有些方程经过适当的因数变换后可以消去一阶偏导数项。

（1）证明：在因变数变换$u=\exp\left[-\left(ax+by\right)\right]v$下，方程$\nabla^2 u+2a\dfrac{\partial u}{\partial x}+2b\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$化为Helmholtz方程$\nabla^2 v-\left(a^2+b^2\right)v=0$，其中$a,b$为常数；

（2）寻求适当的变换，使方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2a\dfrac{\partial u}{\partial x}+2b\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$在变换后不再含有一阶偏导数项；

（3）设有方程$a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\dfrac{\partial u}{\partial x}+e\dfrac{\partial u}{\partial y}+fu=\dfrac{\partial u}{\partial t}$，其中$a,b,c,d,e,f$为常数。证明：只有在$b^2-ac\neq 0$时可作变换$u=\exp\left(\alpha x+\beta y+\gamma t\right)v$使$v\left(x,y,t\right)$满足方程$a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{\partial v}{\partial t}$。

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-ae^{-(ax+by)}v+e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-be^{-(ax+by)}v+e^{-(ax+by)}\dfrac{\partial v}{\partial y}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2e^{-(ax+by)}v-2ae^{-(ax+by)}\frac{\partial v}{\partial x}+e^{-(ax+by)}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2e^{-(ax+by)}v-2be^{-(ax+by)}\frac{\partial v}{\partial x}+e^{-(ax+by)}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}，$$代入原方程得

$$\left(a^2+b^2\right)e^{-(ax+by)}v-2\left(a+b\right)e^{-(ax+by)}\frac{\partial v}{\partial x}+e^{-(ax+by)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$-2\left(a^2+b^2\right)e^{-(ax+by)}v+2\left(a+b\right)e^{-(ax+by)}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

即$\nabla^2 v-\left(a^2+b^2\right)v=0$。

（2）令$u=v\exp\left(\alpha x+\beta y\right)$，则方程化为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\left(\alpha+a\right)\frac{\partial v}{\partial x}+2\left(b-\beta\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\alpha^2+2a\alpha-\beta^2+2b\beta\right)v=0,$$

只需令$\alpha=-a,\beta=b$，上面方程为$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(b^2-a^2\right)v=0$。

（3）将$u=\exp\left(\alpha x+\beta y+\gamma t\right)v$代入原方程得

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(2a\alpha+2b\beta+d\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(2b\alpha+2c\beta+e\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+\left(a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta-\gamma\right)v=\frac{\partial v}{\partial t}\text{。}$$

所以$2a\alpha+2b\beta+d=0$，$2b\alpha+2c\beta+e=0$，$a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta-\gamma=0$，

前两式写成矩阵式$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{d}{2} \\ -\dfrac{e}{2} \end{pmatrix}$，要使其有解，必须有$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=b^2-ac\neq 0$。

373．求下列各偏微分方程通解：（1）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；（2）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$；

（3）$\left(a^2-b^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，$a,b$为常数，$a\neq 0$；（4）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。

（1）取试探解$u=f\left(\alpha x+y\right)$，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha^2 f''\left(\alpha x+y\right)$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\alpha f''\left(\alpha x+y\right)$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''\left(\alpha x+y\right)$，代入方程得附加方程$\alpha^2-2\alpha-3=0$，解得$\alpha_1=-1$，$\alpha_2=3$，

所以通解为$u=f_1\left(x-y\right)+f_2\left(3x+y\right)$。

（2）附加方程$\alpha^2-\alpha=0$，解得$\alpha_1=0$，$\alpha_2=1$，通解$u=f_1\left(y\right)+f_2\left(x+y\right)$。

（3）附加方程$\left(a^2-b^2\right)\alpha^2+2b\alpha-1=0$，解得$\alpha_1=\frac{1}{a+b}$，$\alpha_2=-\frac{1}{a-b}$，通解

$u=f_1\left[x+\left(a+b\right)t\right]+f_2\left[x-\left(a-b\right)t\right]$。

（4）附加方程$\alpha^2-2\alpha+2=0$，$\alpha=1\pm i$，$u=f_1\left[\left(1+i\right)x+y\right]+f_2\left[\left(1-i\right)x+t\right]$。

374．求偏微分方程$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$的通解。

令$x=e^t,y=e^s$，即$t=\ln x,s=\ln y$，则$x\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}$，$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}$，

$y\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial s}$，$y^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}-\dfrac{\partial}{\partial s}$，$xy\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial t\partial s}$，原方程化为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$，

取试探解为$u=f\left(\alpha t+s\right)$，可得附加方程$\left(\alpha-1\right)^2=0$，可得重根$\alpha=1$，通解为

$u=f_1\left(t+s\right)+tf_2\left(t+s\right)=f_1\left(\ln xy\right)+\ln x f_2\left(\ln xy\right)$。

375. 证明方程$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\dfrac{x}{h}\right)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]-\dfrac{1}{a^2}\left(1-\dfrac{x}{h}\right)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$的通解为$u=\dfrac{f\left(x+at\right)+g\left(x-at\right)}{h-x}$，

由此写出此方程在初始条件$u\big|_{t=0}=\varphi\left(x\right),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi\left(x\right)$下的解。

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{f\left(x+at\right)+g\left(x-at\right)}{\left(h-x\right)^2}+\dfrac{f'\left(x+at\right)+g'\left(x-at\right)}{h-x}$，

$\left(h-x\right)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=f\left(x+at\right)+g\left(x-at\right)+\left(h-x\right)\left[f'\left(x+at\right)+g'\left(x-at\right)\right]$，

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(h-x\right)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]=\left(h-x\right)\left[f''\left(x+at\right)+g''\left(x-at\right)\right]$，

$\dfrac{1}{a^2}\left(h-x\right)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(h-x\right)\left[f''\left(x+at\right)+g''\left(x-at\right)\right]$，所以$u=\dfrac{f\left(x+at\right)+g\left(x-at\right)}{h-x}$是原方程的解，它有两个任意函数，所以是原二阶方程的通解。

将通解代入初始条件得，$f\left(x\right)+g\left(x\right)=\left(h-x\right)\varphi\left(x\right)$，（a）

$f'\left(x\right)-g'\left(x\right)=\dfrac{1}{a}\left(h-x\right)\psi\left(x\right)$。（b）

（b）式两边积分得$f\left(x\right)-g\left(x\right)=\dfrac{1}{a}\int_0^x\left(h-\xi\right)\psi\left(\xi\right)d\xi+C$，（c）

（a）+（c）得$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(h-x\right)\varphi\left(x\right)+\dfrac{1}{2a}\int_0^x\left(h-\xi\right)\psi\left(\xi\right)d\xi+\dfrac{C}{2}$，

所以$f\left(x+at\right)=\dfrac{1}{2}\left(h-x-at\right)\varphi\left(x+at\right)+\dfrac{1}{2a}\int_0^{x+at}\left(h-\xi\right)\psi\left(\xi\right)d\xi+\dfrac{C}{2}$。

（a）－（c）得$g\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(h-x\right)\varphi\left(x\right)-\dfrac{1}{2a}\int_0^x\left(h-\xi\right)\psi\left(\xi\right)d\xi-\dfrac{C}{2}$，

所以$g\left(x-at\right)=\dfrac{1}{2}\left(h-x+at\right)\varphi\left(x-at\right)-\dfrac{1}{2a}\int_0^{x-at}\left(h-\xi\right)\psi\left(\xi\right)d\xi-\dfrac{C}{2}$，

所以解为$u=\dfrac{1}{2}\left[\varphi\left(x+at\right)+\varphi\left(x-at\right)\right]+\dfrac{1}{2}\dfrac{at}{h-x}\left[\varphi\left(x-at\right)-\varphi\left(x+at\right)\right]$

$$+\frac{1}{2a(h-x)}\int_{x-at}^{x+at}(h-\xi)\psi(\xi)d\xi\text{。}$$

376．求解弦振动方程的 Goursat 问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\ u\big|_{x-at=0}=\varphi(x),u\big|_{x+at=0}=\psi(x)\\ \varphi(0)=\psi(0)\end{cases}$。

方程通解为 $u=f(x+at)+g(x-at)$，代入条件 $u\big|_{x-at=0}=\varphi(x),u\big|_{x+at=0}=\psi(x)$ 得

$f(2x)+g(0)=\varphi(x)$， $f(0)+g(2x)=\psi(x)$，

所以 $f(x+at)=\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right)-g(0)$， $g(x-at)=\psi\left(\dfrac{x-at}{2}\right)-f(0)$，

$u=\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\dfrac{x-at}{2}\right)-f(0)-g(0)$，由于 $u(0,0)=f(0)+g(0)=\varphi(0)$，

所以 $u=\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\dfrac{x-at}{2}\right)-\varphi(0)$。

377．在波动方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 中用 iy 代替 at 就能得到 Laplace 方程的“初值”问题

$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ u\big|_{y=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\psi(x)\end{cases}$。其形式解为 $u=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+iy)+\varphi(x-iy)\right]+\dfrac{1}{2i}\int_{x-iy}^{x+iy}\psi(\xi)d\xi$。

（1）令 $\varphi(x)=x,\psi(x)=e^{-x}$，可得 $u=x+e^{-x}\sin y$，验证这个表达式处处满足 Laplace 方程，也满足 $y=0$ 时的“初始”条件；

（2）如果 $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2},\psi(x)=0$，形式解为 $u=\dfrac{1+x^2-y^2}{\left(1+x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}$，证明：这个函数在点 $(0,\pm1)$ 不连续，因此，至少在这些点上不满足 Laplace 方程。这说明在一般情况下 Laplace 方程的“初值”问题无解。

（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1-e^{-x}\sin y$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-x}\sin y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{-x}\cos y$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{-x}\sin y$，所以

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$。$u\big|_{y=0}=u=x=\varphi(x)$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=e^{-x}\cos y\big|_{y=0}=e^{-x}=\psi(x)$。

（2）$\lim\limits_{x\to 0}u=\dfrac{1}{1-y^2},\lim\limits_{y\to\pm1}\lim\limits_{x\to 0}u=\lim\limits_{y\to\pm1}\dfrac{1}{1-y^2}\to\infty$。

378．如果$u(x,y,z)$满足 Laplace 方程，证明：$v=(ax+by+cz)u$ 满足$\nabla^4 v=0$，其中 a,b,c 为任意常数。

记 $f=ax+by+cz$，$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 则$\nabla f=\boldsymbol{a}$。

$\nabla v=\nabla(fu)=u\nabla f+f\nabla u=u\boldsymbol{a}+f\nabla u$，

$\nabla^2 v=\nabla\cdot(u\boldsymbol{a})+\nabla\cdot(f\nabla u)=\boldsymbol{a}\cdot\nabla u+u\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\nabla u+f\nabla^2 u=2\boldsymbol{a}\cdot\nabla u$，

$$\nabla\nabla^2 v=2\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\nabla u)=2\left[\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\nabla u)+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\nabla u+\nabla u\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla u\cdot\nabla)\boldsymbol{a}\right]=2(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\nabla u$$

$$=2\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)\nabla u，$$

$\nabla^4 v=2\nabla\cdot\left[\left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\nabla u\right]$，由于$a,b,c$为常数，可交换微分次序，因此

上式$=2\left(a\dfrac{\partial}{\partial x}+b\dfrac{\partial}{\partial y}+c\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\nabla^2 u=0$

379．如果$u(x,y,z)$是直角坐标系下 Laplace 方程的解，证明$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$也是解。

显然可交换微分次序，$\nabla^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 u=0$，同样的，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$也满足 Laplace 方程。

380．如果$u(\rho,\varphi,z)$是柱坐标下 Laplace 方程的解，证明$\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$也是解，但$\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$一般不

是解。

$\nabla^2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，显然 $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 可与 ∇^2 交换次序，而 $\dfrac{\partial}{\partial \rho}$ 不能与 ∇^2 交换次序，同上题可知 $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 也是解，但 $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ 一般不是解。

三维无界空间波动方程初值问题$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y,z)\end{cases}$的解（Poisson 公式）

为：$u(x,y,z,t)=\dfrac{1}{4\pi a}\left[\dfrac{\partial}{\partial t}\oiint\limits_{S_{at}^M}\dfrac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{at}dS+\oiint\limits_{S_{at}^M}\dfrac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{at}dS\right]$，其中 S_{at}^M 是以点

$M(x,y,z)$为球心，at 为半径的球面。

381．直接验证$u(x,y,z,t)=\dfrac{1}{4\pi a}\oiint\limits_{S_{at}^M}\dfrac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{at}dS$ 是三维波动方程初值问题

$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ u\big|_{t=0}=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y,z)\end{cases}$的解，其中 S_{at}^M 是以点$M(x,y,z)$为球心，at 为半径的球面。

u 的表达式写成：

$$u(x,y,z,t)=\frac{t}{4\pi}\iint\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)d\Omega$$

（$d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$）。显然$u(x,y,z,0)=0$，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint\psi(x+at\sin\theta\cos\varphi,y+at\sin\theta\sin\varphi,z+at\cos\theta)d\Omega$$
$$+\frac{at}{4\pi}\iint(\psi_\xi\sin\theta\cos\varphi+\psi_\eta\sin\theta\sin\varphi+\psi_\zeta\cos\theta)d\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{1}{4\pi}\iint\psi(x,y,z)\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{1}{4\pi}\psi(x,y,z)\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\psi(x,y,z),$$

即$u(x,y,z,t)$满足初始条件。

令$v(x,y,z,r)=\dfrac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^M}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\psi(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta)d\Omega,$$

则$\dfrac{\partial v}{\partial r}=\dfrac{1}{4\pi}\iint(\psi_\xi\sin\theta\cos\varphi+\psi_\eta\sin\theta\sin\varphi+\psi_\zeta\cos\theta)d\Omega$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\iint(\psi_\xi\sin\theta\cos\varphi+\psi_\eta\sin\theta\sin\varphi+\psi_\zeta\cos\theta)r^2d\Omega$$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^M}\left(\psi_\xi \sin\theta\cos\varphi+\psi_\eta \sin\theta\sin\varphi+\psi_\zeta \cos\theta\right)dS$$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r^M}\left(\psi_\xi \boldsymbol{i}+\psi_\eta \boldsymbol{j}+\psi_\zeta \boldsymbol{k}\right)\cdot \boldsymbol{n}dS=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{B_r^M}\left(\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}+\psi_{\zeta\zeta}\right)dV$$

$$=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^r r_1^2 dr_1\iint\left(\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}+\psi_{\zeta\zeta}\right)d\Omega,$$

所以$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{r^2}{4\pi}\iint\left(\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}+\psi_{\zeta\zeta}\right)d\Omega$，

而$\nabla^2 v=\frac{1}{4\pi}\iint\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi\left(x+r\sin\theta\cos\varphi,y+r\sin\theta\sin\varphi,z+r\cos\theta\right)d\Omega$

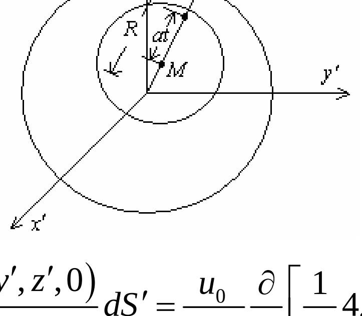
$$=\frac{1}{4\pi}\iint\left(\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}+\psi_{\zeta\zeta}\right)d\Omega,$$

所以$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)=r^2\nabla^2 v$，可写成$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv)=\nabla^2(rv)$，令$r=at$即可得$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 u$。

382．求解$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\ u\big|_{t=0}=\begin{cases}u_0,x^2+y^2+z^2<R^2\\0,x^2+y^2+z^2>R^2\end{cases},\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases}$。

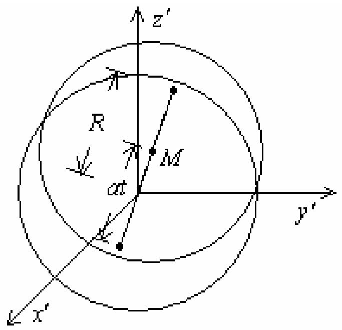
（1）先讨论$M(x,y,z)$位于球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$内，即$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R$。

（i）$0\le t<\frac{R-r}{a}$，即球面S_{at}^M完全位于球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$内，如下图：



$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\oiint_{S_{at}^M}\frac{u(x',y',z',0)}{at}dS'=\frac{u_0}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{at}4\pi(at)^2\right]=u_0。$$

（ii）$\frac{R-r}{a}<t<\frac{R+r}{a}$，即球面$S_{at}^M$与球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$有交集，如下图：

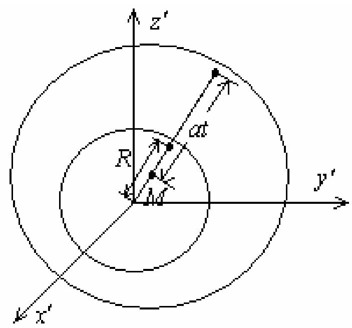


球面S_{at}^M在球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$内的部分是高为$h=\dfrac{R^2-(r-at)^2}{2r}$的球冠，面积为

$$S=2\pi ath=\pi at\frac{R^2-(r-at)^2}{r},$$

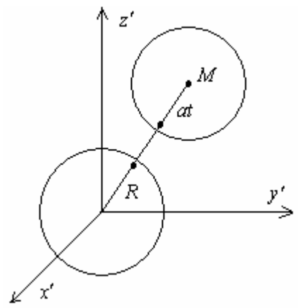
$$u(M,t)=\frac{u_0}{4\pi a}\frac{d}{dt}\left[\pi\frac{R^2-(r-at)^2}{r}\right]=\frac{u_0}{4\pi a}\frac{2\pi a(r-at)}{r}=u_0\frac{r-at}{2r}。$$

（iii）$t>\dfrac{R+r}{a}$，即球面S_{at}^M完全位于球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$外，如下图，显然$u(M,t)=0$。

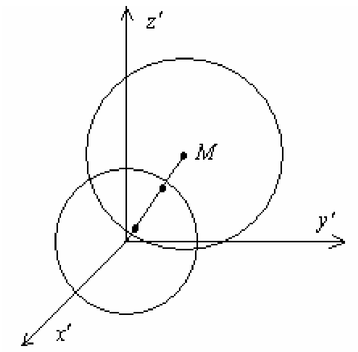


（2）$M(x,y,z)$位于球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$外，即$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>R$。

（i）$0\le t<\dfrac{r-R}{a}$，即球面S_{at}^M与球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$分离（如下图），显然$u(M,t)=0$。

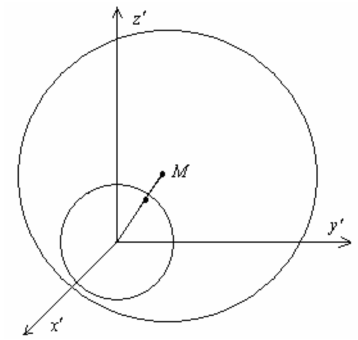


（ii）$\dfrac{r-R}{a}<t<\dfrac{r+R}{a}$，即球面$S_{at}^M$与球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$有交集，如下图：



同第一种情况，有$u\left(M,t\right)=u_0\dfrac{r-at}{2r}$。

（iii）$t>\dfrac{r+R}{a}$，即球面$x'^2+y'^2+z'^2=R^2$在球面S_{at}^{M}内，如下图，显然$u\left(M,t\right)=0$。



383.（1）$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u\\ u\big|_{t=0}=\varphi\left(x\right),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi\left(x\right)\end{cases}$；（2）$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u\\ u\big|_{t=0}=\varphi\left(r\right),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi\left(r\right)\end{cases}$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

（1）将坐标架置换一下，初始条件变为$u\big|_{t=0}=\varphi\left(z\right),\dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi\left(z\right)$（这样使下面计算方便）。

$$u\left(x,y,z,t\right)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\oiint_{S_{at}^{M}}\frac{\varphi\left(\zeta\right)}{at}dS+\oiint_{S_{at}^{M}}\frac{\psi\left(\zeta\right)}{at}dS\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\varphi\left(z+at\cos\theta\right)at\sin\theta d\theta\right]+\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\psi\left(z+at\cos\theta\right)at\sin\theta d\theta\right\}$$

$$\overset{z+at\cos\theta=\xi}{=}\frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{z-at}^{z+at}\varphi(\xi)d\xi+\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\varphi(z-at)+\varphi(z+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)d\xi\text{。}$$

（2）可看出，解在空间上只与 r 有关，所以方程可写成 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$，

令 $v=ru$，由于 $u\big|_{r=0}$ 有界，所以

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},r>0\\ v\big|_{r=0}=0,v\big|_{t=0}=r\varphi(r),\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=r\psi(r)\end{cases}$$

。通解为 $v=f(r+at)+g(r-at)$，可定出

$f(r)=\frac{1}{2}r\varphi(r)+\frac{1}{2a}\int_0^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi+\frac{C}{2}$，$g(r)=\frac{1}{2}r\varphi(r)-\frac{1}{2a}\int_0^{r-at}\xi\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2}$。

当 $r>at$ 时直接可得

$$v=\frac{1}{2}\left[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi,$$

$$u=\frac{1}{2r}\left[(r+at)\varphi(r+at)+(r-at)\varphi(r-at)\right]+\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)d\xi\text{。}$$

当 $r<at$ 时，由 $v\big|_{r=0}=0$ 可得 $f(at)+g(-at)=0$，所以

$$g(r-at)=-f(at-r)=-\frac{1}{2}(at-r)\varphi(at-r)-\frac{1}{2a}\int_0^{at-r}\xi\psi(\xi)d\xi-\frac{C}{2},$$

$$v=\frac{1}{2}\left[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)\right]+\frac{1}{2a}\int_{at-r}^{at+r}\xi\psi(\xi)d\xi\text{。}$$

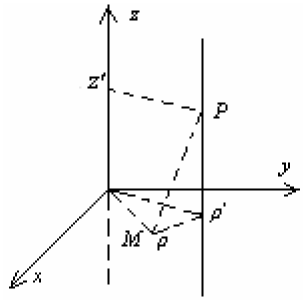
$$v=\frac{1}{2r}\left[(r+at)\varphi(r+at)-(at-r)\varphi(at-r)\right]+\frac{1}{2ar}\int_{at-r}^{at+r}\xi\psi(\xi)d\xi\text{。}$$

384．由三维无界空间波动方程初值问题的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$

（$\begin{cases}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\\ G\big|_{t<t'}=0,\frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0\end{cases}$）求出二维无界空间波动方程初值问题的 Green 函数（$\begin{cases}\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\delta(t-t')\\ G\big|_{t<t'}=0,\frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0\end{cases}$），

从而求出二维无界空间波动方程初值问题的 Poisson 公式。

$G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')$ 就是三维空间中平行于 z 轴的线源产生的场，如下图，



线源上点 P 到 xy 面上的场点 M 的距离为 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{z'^2+|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}$ ，

$$G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=\int_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')dz'=\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta\left[\sqrt{z'^2+|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}-a(t-t')\right]}{\sqrt{z'^2+|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}}dz',$$

当 $|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<a(t-t')$ 时，

$$\delta\left[\sqrt{z'^2+|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}-a(t-t')\right]=\frac{a(t-t')}{\sqrt{a^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}}\left\{\delta\left[z'-\sqrt{a^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}\right]\right.$$

$$\left.+\delta\left[z'+\sqrt{a^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}\right]\right\}，（见附录）$$

所以 $G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=\dfrac{1}{4\pi a\sqrt{a^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\delta\left[z'-\sqrt{a^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}\right]\right.$

$$\left.+\delta\left[z'+\sqrt{a^2(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}\right]\right\}dz'$$

$$=\frac{1}{2\pi a^2\sqrt{(t-t')^2-\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}。$$

当 $|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|>a(t-t')$ 时，$\delta\left[\sqrt{z'^2+|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}-a(t-t')\right]=0$ ，所以 $G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=0$ 。

综上，$G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a^2\sqrt{(t-t')^2-\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}},|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<a(t-t')\\ 0,|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|>a(t-t')\end{cases}$ 。

二维无界空间波动方程初值问题：$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho},t)}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{\rho},t)=0\\ u\big|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{\rho}),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{\rho})\end{cases}$。

将 u 和 G 方程写成 $\dfrac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}-a^2\nabla'^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')=0$，（a）

由 Green 函数的互易性有 $\dfrac{\partial^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}-a^2\nabla'^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')=\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')\delta(t-t')$。（b）

（b）× $u(\boldsymbol{\rho}',t')$ −（a）× $G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')$，对 $x'y'$ 全平面及 $t'\in[0,t+\varepsilon]$（$\varepsilon>0$）积分得

$$u(\boldsymbol{\rho},t)=\iint dx'dy'\int_0^{t+\varepsilon}\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'^2}\right]dt'$$

$$+a^2\int_0^{t+\varepsilon}dt'\iint\left[G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\nabla'^2 u(\boldsymbol{\rho}',t')-u(\boldsymbol{\rho}',t')\nabla'^2 G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\right]dx'dy'$$

$$=\iint dx'dy'\int_0^{t+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t'}\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]dt'$$

$$+a^2\int_0^{t+\varepsilon}dt'\oint\left[G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial n'}-u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial n'}\right]dl'$$

由于 $G\sim\dfrac{1}{r'}$，$\dfrac{\partial G}{\partial n'}\sim\dfrac{1}{r'^2}$，$u\sim\dfrac{1}{r'}$，$\dfrac{\partial u}{\partial n'}\sim\dfrac{1}{r'^2}$，$dl'\sim r'$，所以后一项积分趋于 0，所以

$$u(\boldsymbol{\rho},t)=\iint\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}^{t'=t+\varepsilon}dx'dy',$$

由于 $G\big|_{t<t'}=0,\dfrac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t<t'}=0$，所以 $\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\dfrac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\dfrac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=t+\varepsilon}=0$，

$$u(\boldsymbol{\rho},t)=-\iint\left[u(\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}-G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}',t')}{\partial t'}\right]_{t'=0}dx'dy'$$

$$=\frac{1}{2\pi a^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<a(t-t')}\frac{\varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\sqrt{t^2-\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}dx'dy'+\iint\limits_{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<a(t-t')}\frac{\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\sqrt{t^2-\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}dx'dy'\right]。$$

385. 稳定问题的平均值定理。设在空间区域 V 内部有 $\nabla^2 u=0$，证明：任意一点 $M(x,y,z)$

处的 u 值等于以该点为球心的任意球面上 u 的平均值。

记 $\overline{u}(M,r)=\dfrac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^M}u(\xi,\eta,\zeta)dS$，同 381 题可得

$\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right)=\dfrac{r^2}{4\pi}\iint(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta})d\Omega=0$，所以 $\overline{u}(M,r)=\dfrac{A(M)}{r}+B(M)$，

由 $\lim\limits_{r\to 0}\overline{u}(M,r)=u(M)$ 可定出 $A(M)=0,B(M)=u(M)$，即 $\overline{u}(M,r)=u(M)$。

386．用 Riemann 方法求解：$\begin{cases}x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\\ u\big|_{y=1}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1}=\psi(x)\end{cases}$。

关于 Riemann 方法见郭敦仁《数学物理方法》22.3 节，或 H.M.Lieberstein《Theory of Partial Differential Equation》Chapter 7。

设 $x>0$，$y>1$。特征线方程：$\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{y}{x}$，特征线 $xy=C_1$，$\dfrac{y}{x}=C_2$，令 $\xi=xy,\eta=\dfrac{y}{x}$（$\xi>0,\eta>0$），即 $x=\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}},y=\sqrt{\xi\eta}$，则方程化为 $\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0$，$y=1$ 变换为

$\xi\eta=1$，即 $u\big|_{y=1}=u\big|_{\xi\eta=1}=\varphi\left(\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}}\right)_{\eta=\frac{1}{\xi}}=\varphi(\xi)$，所以 $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\Big|_{\xi=\frac{1}{\eta}}=\dfrac{\partial u\big|_{\xi=\frac{1}{\eta}}}{\partial\eta}=\dfrac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\eta}=0$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1}=\left(x\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\xi\eta=1}=\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}}\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\Big|_{\xi\eta=1}=\xi\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\Big|_{\xi\eta=1}=\psi\left(\sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}}\right)_{\eta=\frac{1}{\xi}}=\psi(\xi)$，

该问题写成 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=0\\ u\big|_{\xi\eta=1}=\varphi(\xi),\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\Big|_{\xi\eta=1}=\dfrac{\psi(\xi)}{\xi}\end{cases}$。

Riemann 函数 $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ 满足 $\begin{cases}\dfrac{\partial^2R}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial R}{\partial\eta}=0\\ R(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=\exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi}\dfrac{1}{2\lambda}d\lambda\right)=\sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}}\\ R(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=1\end{cases}$，

R 的方程写成 $\dfrac{\partial R_\eta}{\partial \xi}+\dfrac{1}{2\xi}R_\eta=0$，可得 $R_\eta=A(\eta)\exp\left(-\int\dfrac{1}{2\xi}d\xi\right)=\dfrac{A(\eta)}{\sqrt{\xi}}$，

积分得 $R=\dfrac{B(\eta)}{\sqrt{\xi}}+C$，由于 $R(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0)=\dfrac{B(\eta)}{\sqrt{\xi_0}}+C=1$，所以 $B(\eta)=(1-C)\sqrt{\xi_0}$，

代入 $R(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=\dfrac{B(\eta_0)}{\sqrt{\xi}}+C=\sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}}$ 得 $C=0$，所以 $B(\eta)=\sqrt{\xi_0}$， $R=\sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}}$。

$$u(\xi_0,\eta_0)=u(A)R(A;\xi_0,\eta_0)+\int_{\overset{\frown}{AB}}\left[R\left(u_\xi+bu\right)d\xi+u\left(R_\eta-aR\right)d\eta\right]$$

$$=\varphi\left(\frac{1}{\eta_0}\right)\sqrt{\xi_0\eta_0}+\int_{\frac{1}{\eta_0}}^{\xi_0}\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}\left[\frac{\psi(\xi)}{\xi}-\frac{1}{2\xi}\varphi(\xi)\right]d\xi$$

将 (ξ_0,η_0) 代换回 (x_0,y_0)，再换成 (x,y) 即可得

$$u(x,y)=y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\sqrt{xy}\int_{\frac{x}{y}}^{xy}\xi^{-3/2}\left[\psi(\xi)-\frac{1}{2}\varphi(\xi)\right]d\xi。$$

若用公式
$$u(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}u(A)R(A)+\frac{1}{2}u(B)R(B)+\int_{\overset{\frown}{AB}}\left\{\left[\frac{1}{2}Ru_\xi+\left(bR-\frac{1}{2}R_\xi\right)u\right]d\xi\right.$$
$$\left.-\left[\frac{1}{2}Ru_\eta+\left(aR-\frac{1}{2}R_\eta\right)u\right]d\eta\right\}$$

则有 $u(x,y)=\dfrac{1}{2}y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{1}{2}\varphi(xy)+\dfrac{1}{2}\sqrt{xy}\int_{\frac{x}{y}}^{xy}\xi^{-3/2}\left[\psi(\xi)-\dfrac{1}{2}\varphi(\xi)\right]d\xi$。

387~390 略。

附录：

$\delta\left[f(x)\right]=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\left|f'(x_k)\right|}\delta(x-x_k)$，其中 x_k（$k=1,2,\cdots,n$）是 $f(x)$ 的全部零点。

391．试根据变分原理导出完全柔软的均匀弦的横振动方程。

取弦上足够短的一段dx，该段弦的动能为$\frac{1}{2}\rho dx\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$，势能为$\frac{1}{2}Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$，弦的

Hamilton 作用量$S=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}F\left(u_t,u_x\right)dxdt=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dxdt$。

该泛函的 Euler-Lagrange 方程为$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u_t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$。

392．设$y=y\left(x\right)$，$F\left(y,y'\right)$不显含x，证明：$\begin{cases}J\left[y\right]=\int_a^b F\left(y,y'\right)dx\\ y\left(a\right)=A,y\left(b\right)=B\end{cases}$取极值的必要条件

是$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C$（常数）。

$$\delta J\left[y\right]=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta ydx=0,$$

所以$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$。

由于$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right)=y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-y'\frac{\partial F}{\partial y}-y''\frac{\partial F}{\partial y'}=y'\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0$，

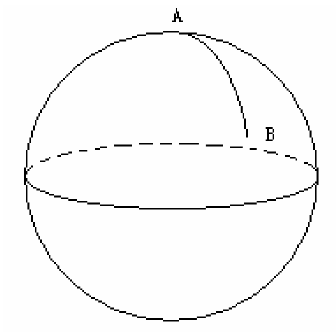
所以$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C$。

393．求泛函$\begin{cases}J\left[y\right]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx\\ y\left(0\right)=0,y\left(1\right)=1\end{cases}$的极值曲线。

Euler-Lagrange 方程为$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$，所以$\sqrt{1+y'^2}=Cy'$，可得$y'=C_1$，积分得

$y\left(x\right)=C_1x+C_2$，由边界条件得$y=x$。

394．如下图所示，写出单位球面上从 A 点到 B 点的“短程线”所满足的微分方程，并求出短程线。证明此短程线在过 A，B 两点的大圆上。基于对称性的考虑，不妨取 A 点坐标为 $(\theta_0,\varphi_0)=(0,0)$，B 点坐标为 (θ_1,φ_1)。（单位球面上弧元为 $ds=\sqrt{d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2}$ ）

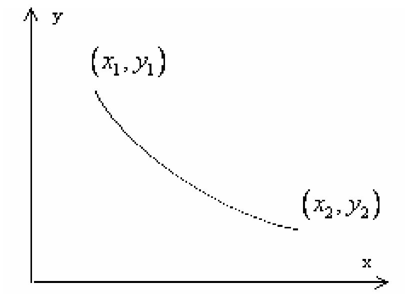


A， B 间弧长为 $s=\int_0^{\theta_1}\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}d\theta$ （$\varphi'=d\varphi/d\theta$），

Euler-Lagrange 方程为 $\frac{d}{d\theta}\frac{\sin^2\theta\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}}=0$，即 $\frac{\sin^2\theta\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}}=C$，代入 A 点坐标可得

$C=0$，所以 $\frac{d\varphi}{d\theta}=0$，即 $\varphi=C_1$，代入 B 点坐标得 $\varphi=\varphi_1$，这正是在大圆上。

395．一质点在重力作用下沿光滑曲线由点 (x_1,y_1) 运动至点 (x_2,y_2)（见下图）。试求“捷线”（即质点沿此曲线运动费时最少）所满足的微分方程。



$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}$，所以 $t=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\frac{ds}{\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}}=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{v_0^2+2g(y_1-y)}}dx$。

记 $F(y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{v_0^2+2g(y_1-y)}}$，由 392 题结论， $y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C$，即

$\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{1}{\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}}-\sqrt{1+y'^2}\frac{1}{\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}}=C$，还可写成

$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=-C\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}$。

396. 若 $\overline{y}(x)$ 使泛函 $\begin{cases} J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx \\ y(a)=A, y(b)=B \end{cases}$ 在限制条件 $J_1[y]=\int_a^b G(x,y,y')dx=C$ 下取极值，且相应的 Lagrange 乘子 $\lambda\neq 0$，试证明 $\overline{y}(x)$ 也使泛函 $\begin{cases} J_1[y]=\int_a^b G(x,y,y')dx \\ y(a)=A, y(b)=B \end{cases}$ 在限制条件 $J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx=D$ 下取极值。

第一个泛函极值问题引入 Lagrange 乘子 λ，则 $\overline{y}(x)$ 满足 $\int_a^b (F-\lambda G)dx$ 的 Euler-Lagrange 方程：$\frac{\partial F}{\partial y}-\lambda\frac{\partial G}{\partial y}-\overline{y}'\frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}+\lambda\overline{y}'\frac{\partial G}{\partial \overline{y}'}=0$，由于 $\lambda\neq 0$，方程两边乘 $\frac{1}{\lambda}$ 得

$\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial y}-\overline{y}'\frac{\partial G}{\partial \overline{y}'}+\frac{1}{\lambda}\overline{y}'\frac{\partial F}{\partial \overline{y}'}=0$，这正是 $\int_a^b\left(G-\frac{1}{\lambda}F\right)dx$ 的 Euler-Lagrange 方程，即 $\overline{y}(x)$ 是第二个泛函极值问题的解。

397. 过二已知点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 作一曲线，使此曲线绕 x 轴旋转所得曲面面积最小，求曲线作满足的微分方程。

旋转面面积为 $S=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}2\pi y ds=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+y'^2}dx$，由 392 题结论，Euler-Lagrange 方程为 $y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C$，即 $\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C$。

398. 试写出本征值问题 $\begin{cases} \nabla^2 u+\lambda u=0 \\ \left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Sigma=0 \end{cases}$ 所对应的泛函极值问题。设 $\beta\neq 0$。

由于 $\nabla\cdot(\delta u\nabla u)=\nabla\delta u\cdot\nabla u+\delta u\nabla^2 u$，所以 $\delta u\nabla^2 u=\nabla\cdot(\delta u\nabla u)-\nabla\delta u\cdot\nabla u$，

$$\iiint_V\left(\nabla^2 u+\lambda u\right)\delta u dV=\iiint_V\left[\nabla\cdot(\delta u\nabla u)-\nabla\delta u\cdot\nabla u+\lambda u\delta u\right]dV$$

$$=\oiint_\Sigma \delta u\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iiint_V\left(\delta\nabla u\cdot\nabla u-\lambda u\delta u\right)dV=-\oiint_\Sigma\frac{\alpha}{\beta}u\delta u dS-\frac{1}{2}\delta\iiint_V\left(\nabla u\cdot\nabla u-\lambda u^2\right)dV$$

$$=-\frac{1}{2}\delta\left[\oiint_{\Sigma}\frac{\alpha}{\beta}u^2dS+\iiint_V\left(\nabla u\cdot\nabla u-\lambda u^2\right)dV\right]=0$$

即对应泛函$\begin{cases}\oiint_{\Sigma}\dfrac{\alpha}{\beta}u^2dS+\iiint_V\nabla u\cdot\nabla udV\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_{\Sigma}=0\end{cases}$ 在条件 $\iiint_V u^2dV=C$ 下的极值。

399．设有一长为 1 的弦，由同种质料组成，线密度 $\rho(x)=1+x$（$0\le x\le 1$），则振动方程为 $(1+x)\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=T\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$，试用 Ritz 方法求出两端固定时的最低固有频率。

令 $u(x,t)=y(x)e^{i\omega t}$，代入方程得 $y''+\dfrac{\omega^2}{T}(1+x)y=0$。

对应泛函 $\int_0^1\left[y'^2-\dfrac{\omega^2}{T}(1+x)y^2\right]dx$ 的极值。取一组基函数展开 $y(x)$： $y=\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)$，

泛函化为 $\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n c_kc_l\int_0^1\left[\varphi_k'(x)\varphi_l'(x)-\dfrac{\omega^2}{T}(1+x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\right]dx=\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n c_kc_lf_{kl}$。

要使它取极值，只需使它对 c_k（$k=1,2,\cdots n$）的偏导数为 0，即

$\sum_{l=1,l\ne k}^n c_lf_{kl}+2c_kf_{kk}=0$，$k=1,2,\cdots n$，写成矩阵式$\begin{pmatrix}2f_{11}&f_{12}&\cdots&f_{1n}\\ f_{21}&2f_{22}&\cdots&f_{2n}\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ f_{n1}&f_{n2}&\cdots&2f_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=0$，

解之即可。

400．用 Ritz 方法求出$\begin{cases}y''+\lambda y=0\\ y(-1)=0,y(1)=0\end{cases}$的最低两个本征值的近似值，取试探函数为：

（1） $y=c_1\left(1-x^2\right)+c_2x\left(1-x^2\right)^2$；（2） $y=c_1\left(1-x^2\right)+c_2x^2\left(1-x^2\right)^2$。

该边值问题对应泛函 $\int_{-1}^1 y'^2dx$ 在约束条件 $\int_{-1}^1 y^2dx=C$ 下的极值问题。后面步骤略。