

Análise de Ativos Financeiros

Movimento Browniano Geométrico

José Vítor Barreto Porfirio 190089971

19 maio 2025

Introdução

O movimento browniano geométrico é um dos modelo clássico e amplamente utilizado na modelagem de ativos financeiros, popularizado com o modelo de precificação de opções de Black-Scholes (Black e Scholes (1973)), no qual os preços dos ativos são descritos por um processo estocástico a tempo contínuo. Um fator importante a se notar, é que o movimento browniano geométrico assume que os retornos logarítmicos dos ativos são normalmente distribuídos e independentes no tempo, mas para este estudo encontrou-se problemas nessa suposição para o ativo financeiro escolhido e seguiu-se com a modelagem para entender que tipo de problemas podem surgir sob essas condições adversas.

Metodologia

Ativo financeiro escolhido

O ativo financeiro escolhido foram as ações dadas pelo *ticker* **PETR4**, ações ordiárias da empresa Petrobras, uma empresa de economia mista. Essa é uma empresa com grande participação no principal índice acionário do Brasil, o Ibovespa, com cerca de 4,34% de participação na data 18/05/2025.

Obtenção dos dados

Os dados foram obtidos a partir do Yahoo Finance por meio do pacote `quantmod` para todas as datas disponíveis no ano de 2024 para o período de ajuste do modelo, sendo que o ano de 2025 foi utilizado para avaliar as predições do modelo.

```
pacman::p_load("ggplot2", "quantmod", "glue")

start_date <- as.Date("2024-01-01")
end_date <- as.Date("2024-12-31")

ticker_name <- "PETR4.SA"

getSymbols(ticker_name, from = start_date, to = end_date)
```

```
[1] "PETR4.SA"
```

```
ticker <- get(ticker_name) # Ticker data

start_val_date <- end_date + 1
end_val_date <- Sys.Date()
ticker_val <- getSymbols(
  ticker_name,
  from = start_val_date, to = end_val_date,
  auto.assign = FALSE
)
```

Resultados

Análise Exploratória

A figura 1 mostra a evolução do ativo financeiro ao longo do ano de 2024 juntamente com o volume de transações. A evolução parece oscilar dentro de uma faixa para o ano de 2024, enquanto da figura 2 tem-se que ano de 2025 mostra mais variações com padrão de queda no valor nominal das cotas de PETR4, logo, sabe-se que o desafio do modelo será prever uma situação visualmente diferente daquela que será ajustado.

```
options(repr.plot.width = 14, repr.plot.height = 8)
chartSeries(ticker, theme = chartTheme("black"), type = "line")
```

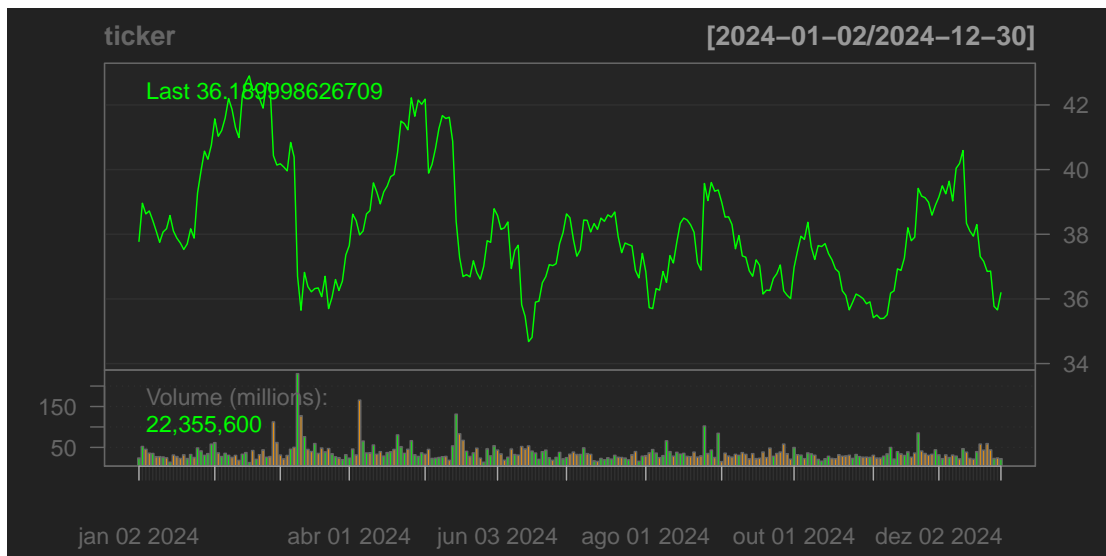


Figura 1: Evolução do valor de fechamento nominal de PETR4 ao longo de 2024.

```
chartSeries(ticker_val, theme = chartTheme("black"), type = "line")
```



Figura 2: Evolução do valor de fechamento nominal de PETR4 ao longo de 2025.

Para evitar comportamentos de tendência da série, procedeu-se numa breve análise dos retornos diários dada pela figura 3, em que observa-se do gráfico de linhas da densidade que a distribuição normal não teve um ajuste tão bom próximo ao pico de máxima verossimilhança da densidade real dos dados e as caldas parecem bem ajustadas,

logo, isso indica que a teoria desenvolvida para retornos normalmente distribuídos talvez não seja adequada para essa análise e deveria-se recorrer a outra ferramenta como Teoria de Valores Extremais (Otiniano et al. (2021)).

```
daily_returns <- dailyReturn(Cl(ticker))
return_mu <- mean(daily_returns)
return_sd <- sd(daily_returns)

normal_fit_x <- seq(min(daily_returns), max(daily_returns), length.out = 100)
normal_fit_y <- dnorm(normal_fit_x, return_mu, return_sd)

par(mfrow = c(3, 1))
plot(daily_returns, main = glue("Daily Returns of {ticker_name}"))
hist(daily_returns, main = glue("Daily Returns of {ticker_name}"))
plot(density(daily_returns), type = "n") # invisible plot to separate lines
lines(density(daily_returns), col = "black", lwd = 2, )
lines(normal_fit_x, normal_fit_y, col = "red", lwd = 2)
```

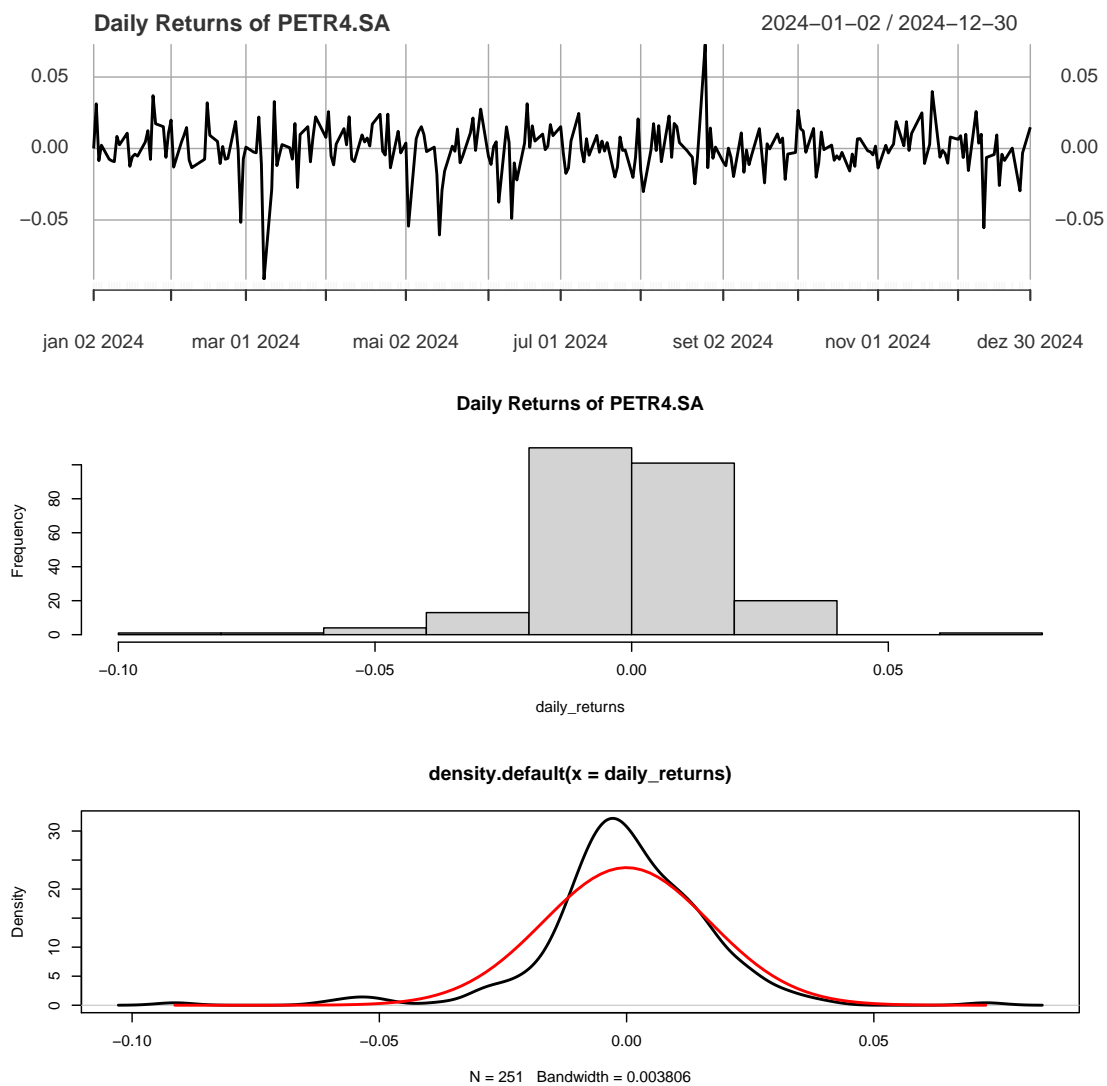


Figura 3: Gráficos dos retornos diários nominais de PETR4 em 2024.

```
par(mfrow = c(1, 1))
```

Monte Carlo

Seguiu-se com a implementação do Movimento Browniano Geométrico a partir da solução de sua equação diferencial ordinária, bem como dos estimadores de máxima verossimilhança para um processo estocástico $S(t)$ qualquer.

```

rgbm <- function(n, mu, sigma, s0 = 1, limit = 1) {
  # Uses SDE Solution
  t <- seq(0, limit, length.out = n)
  st <- s0 * exp((mu - sigma^2 / 2) * t + sigma * rnorm(n))
  return(st)
}

## Maximum Likelihood Estimators
estimators <- function(s, dt) {
  s <- as.numeric(s)
  x <- diff(log(s))
  sigma2_est <- (1 / dt) * var(x)
  mu_est <- (1 / dt) * mean(x) + (1 / 2) * sigma2_est^2
  return(c(mu_est, sigma2_est))
}

## Monte Carlo
n_train_obs <- dim(ticker)[1]
n_obs <- dim(ticker_val)[1]
num_simulations <- 100

### Model Params
par_est <- estimators(Cl(ticker), 1 / n_train_obs)
(mu_est <- par_est[1])

```

```
[1] -0.04053905
```

```
(sigma2_est <- par_est[2])
```

```
[1] 0.07252541
```

```

sigma_est <- sqrt(sigma2_est)
last_known_value <- xts::last(Cl(ticker))[[1]]

```

Para os parâmetros do modelo, μ e σ , obteve-se os estimadores

$$\hat{\mu} = -0.0405391; \quad \hat{\sigma} = 0.0725254$$

O coeficiente de *drift* obtido para a série apontara uma tendência de queda ao longo do tempo, o que parece promissor, pois é conhecido que o comportamento do ativo para o ano de 2025 foi com queda do seu valor nominal.

Com os parâmetros estimados do modelo à disposição, pode-se seguir para realizar simulações do processo com a utilização da técnica de Monte Carlo para obter as estimativas pontuais e os limites do intervalo de confiança empírico apresentado na figura 4.

```
simulations <- matrix(NA, nrow = n_obs, ncol = num_simulations)
for (i in 1:num_simulations) {
  sim_i <- rgbm(n_obs, mu_est, sigma_est, s0 = last_known_value)
  simulations[, i] <- sim_i
}

### Mean path with intervals by quantiles
means <- rowMeans(simulations)
lower_quantile <- apply(simulations, 1, quantile, probs = 0.05)
upper_quantile <- apply(simulations, 1, quantile, probs = 0.95)

means_xts <- xts::xts(means, order.by = index(ticker_val))
lower_xts <- xts::xts(lower_quantile, order.by = index(ticker_val))
upper_xts <- xts::xts(upper_quantile, order.by = index(ticker_val))
blank_xts <- xts::xts(
  1:(n_train_obs + n_obs),
  order.by = c(index(ticker), index(ticker_val))
)
```

Da figura 4 observa-se o comportamento esperado pelo parâmetro de *drift* negativo obtido anteriormente, de forma que a simulação média dos dados parece se aproximar dos valores reais, de forma que o intervalo de confiança empírico cobriu a maior parte dos do preço real observado, mesmo no período de queda mais acentuada.

```
### Plot true path vs simulated path
plots_title <- glue("Simulation path for {ticker_name}")
plots_ylim <- c(
  min(means, Cl(ticker_val), Cl(ticker), lower_quantile, upper_quantile),
  max(means, Cl(ticker_val), Cl(ticker), lower_quantile, upper_quantile)
)
plots_xlim <- c(index(ticker)[1], xts::last(index(ticker_val)))

plot(blank_xts, ylim = plots_ylim, type = "n", main = plots_title)

lines(Cl(ticker))

lines(means_xts, col = "red", lwd = 2)
```

```
lines(Cl(ticker_val), col = "royalblue", lwd = 2)
```

```
lines(lower_xts, col = "#ff5959")
```

```
lines(upper_xts, col = "#ff5959")
```

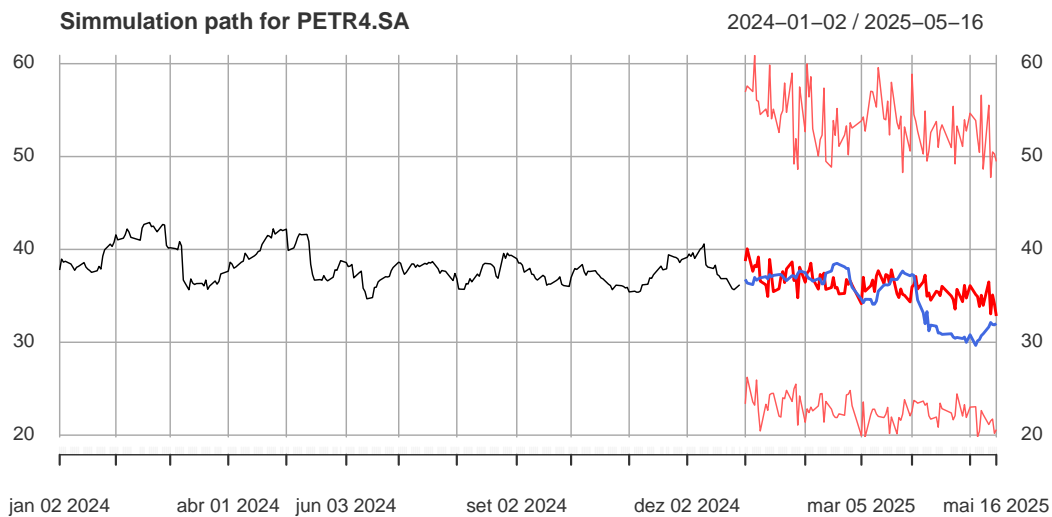


Figura 4: Gráfico de linhas da simulação de Monte Carlo para preço de fechamento de PETR4 em 2025 contra seu preço real.

Análise do modelo

Após o ajuste do modelo, iniciou-se uma busca por padrões de autocorrelação da série não capturados pelo modelo, sempre sobre as séries diferenciadas. A figura 5 aponta para autocorrelações contidas dentro das bandas de confiança, exceto para 1 dia de *lag*, indicando que há algum padrão de autocorrelação não detectado pelo modelo.

```
par(mfrow = c(2, 1))
acf(
  dailyReturn(Cl(ticker_val)),
  main = "Autocorrelação dos Preços",
  lag.max = 500
)
acf(
  dailyReturn(means_xts),
```



```

    main = "Autocorrelação do modelo ajustado",
    lag.max = 500
)

```

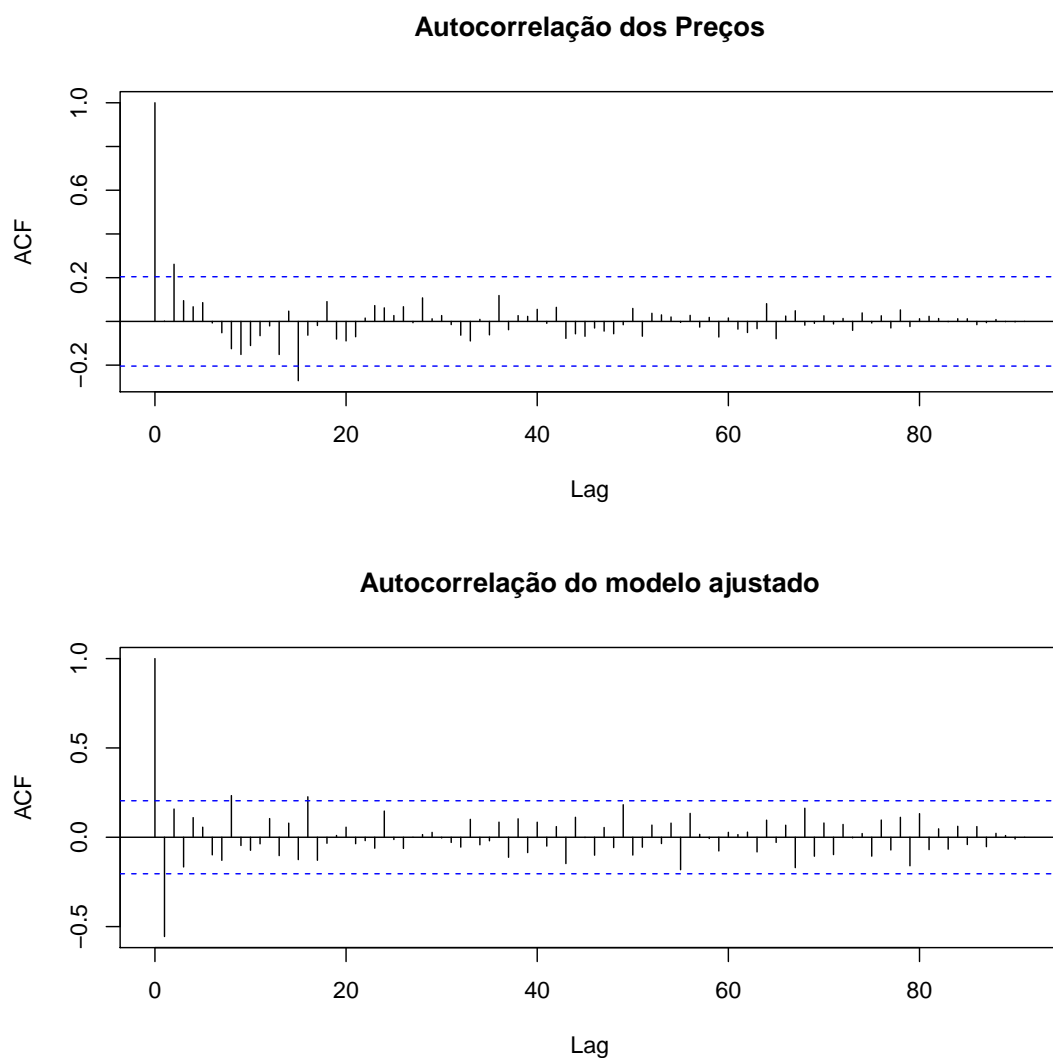


Figura 5: Correlograma dos retornos diários para o preço de fechamento de PETR4 em 2025 e do modelo ajustado.

```

par(mfrow = c(1, 1))

```

Como observou-se que os retornos não possuem comportamento tão bem adequado à distribuição normal, é esperado que os resíduos também não sejam normalmente

distribuídos.

Da figura 6 tem-se que os resíduos não parecem se ajustar à distribuição normal, isso pode ser notado a partir do histograma, do qqplot e do histograma que mostra a mediana muito deslocada do ponto médio entre o primeiro e o terceiro quartil. O gráfico de linhas mostra que a grande o período da grande queda de preço teve um ajuste muito mais distante em magnitude que para o restante da série.

```
residuals <- Cl(ticker_val) - means_xts
names(residuals) <- c("Residuals")
residuals$abline <- 0

par(mfrow = c(2, 2))

boxplot(
  residuals[, "Residuals"],
  ylab = "Residuals",
  main = "Boxplot of Residuals"
)

hist(
  residuals[, "Residuals"],
  breaks = 20,
  main = "Histogram of Residuals",
  xlab = "Residuals"
)

plot.zoo(
  residuals[, "Residuals"],
  type = "l",
  xlab = "Date", ylab = "Residuals",
  main = "Fitted Model Residuals"
)
lines(zoo(residuals[, "abline"]), col = "red", lwd = 2)

ecostats::qqenvelope(
  as.numeric(residuals[, "Residuals"]),
  ylab = "Randomized Quantile Residuals",
  main = "QQPlot Residuals"
)
qqline(residuals[, "Residuals"], col = 2)
```

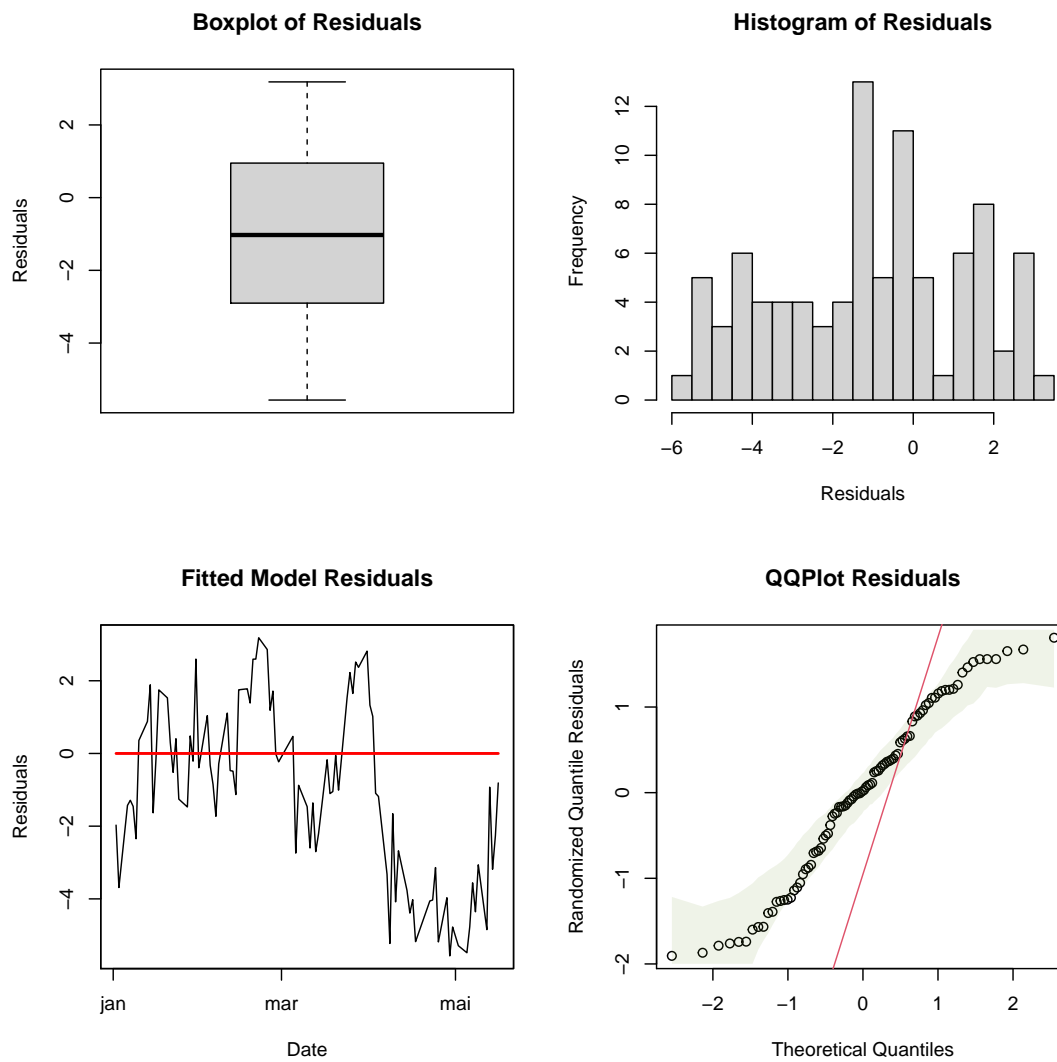


Figura 6: Gráficos da análise de resíduos em 2025 para o modelo ajustado.

```
par(mfrow = c(1, 1))
```

Modelos Diários

Devido à presença da autocorrelação de 1 dia apontada pela figura 5, tentou-se uma segunda abordagem reajustando o modelo todos os dias com o novo valor obtido e aplicando o método de Monte Carlo.

A figura 7 mostra um ajuste bem melhor para as previsões pontuais em comparação com a figura 4, isto é, o processo estocástico simulado parece acompanhar bem mais de perto a série real, embora ainda seja possível notar pontos em que o ajuste foge disto muito do valor real.

```
full_series <- rbind(Cl(ticker), Cl(ticker_val))
means_dbd <- numeric(n_obs)
lower_quantile_dbd <- numeric(n_obs)
upper_quantile_dbd <- numeric(n_obs)
for (i in 0:(n_obs - 1)) {
  last_value <- full_series[n_train_obs + i, ]
  partial_series <- full_series[1:(n_train_obs + i), ]
  partial_parameters <- estimators(partial_series, 1 / nrow(partial_series))
  partial_mu <- partial_parameters[1]
  partial_sigma2 <- partial_parameters[2]
  partial_sigma <- sqrt(partial_sigma2)
  next_day_sim <- purrr::map_vec(
    1:num_simulations,
    ~ rgbm(1, partial_mu, partial_sigma, last_value)
  )

  means_dbd[i + 1] <- mean(next_day_sim)
  lower_quantile_dbd[i + 1] <- quantile(next_day_sim, probs = c(0.05))
  upper_quantile_dbd[i + 1] <- quantile(next_day_sim, probs = c(0.95))
}

means_dbd_xts <- xts::xts(means_dbd, order.by = index(ticker_val))
lower_dbd_xts <- xts::xts(lower_quantile_dbd, order.by = index(ticker_val))
upper_dbd_xts <- xts::xts(upper_quantile_dbd, order.by = index(ticker_val))

### Plot true path vs simulated path
plots_title <- glue("Simulation path for {ticker_name}")
plots_ylim <- c(
  min(means_dbd, Cl(full_series), lower_quantile_dbd, upper_quantile_dbd),
  max(means_dbd, Cl(full_series), lower_quantile_dbd, upper_quantile_dbd)
)
plots_xlim <- c(index(ticker)[1], xts::last(index(ticker_val)))

plot(blank_xts, ylim = plots_ylim, type = "n", main = plots_title)

lines(Cl(ticker))
```

```

lines(means_dbd_xts, col = "red", lwd = 2)

lines(Cl(ticker_val), col = "royalblue", lwd = 2)

lines(lower_dbd_xts, col = "#ff5959")

lines(upper_dbd_xts, col = "#ff5959")

```

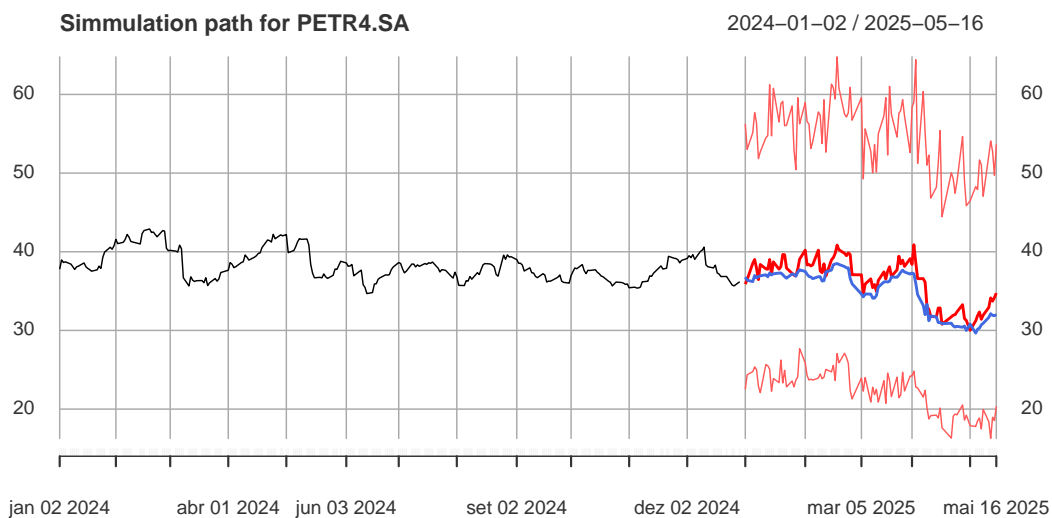


Figura 7: Gráfico de linhas da simulação de Monte Carlo com modelos ajustados diariamente para preço de fechamento de PETR4 em 2025 contra seu preço real.

Análise dos modelos diários

Sobre os resíduos do modelo, notou-se que eles não estavam oscilando em torno do zero, mas oscilando próximo a um valor negativo nas vizinhanças de -1.5, portanto, aplicou-se uma correção de locação subtraindo sua média.

Da figura 8 tem-se que o boxplot mostra uma boa simetria entre o posicionamento da mediana e dos demais quartis, reforçada pelo gráfico de linhas. O histograma e o qqplot estão com ajuste melhor em relação ao mostrado na figura ??, porém continuam não adequados para uma variável aleatória normalmente distribuída, indicando que algum problema persiste no ajuste.

```

residuals_dbd <- Cl(ticker_val) - means_dbd_xts
residuals_dbd <- residuals_dbd - mean(residuals_dbd)
names(residuals_dbd) <- c("Residuals")
residuals_dbd$abline <- 0

par(mfrow = c(2, 2))

boxplot(
  residuals_dbd[, "Residuals"],
  ylab = "Residuals",
  main = "Boxplot of Residuals"
)

hist(
  residuals_dbd[, "Residuals"],
  breaks = 20,
  main = "Histogram of Residuals",
  xlab = "Residuals"
)

plot.zoo(
  residuals_dbd[, "Residuals"],
  type = "l",
  xlab = "Date", ylab = "Residuals",
  main = "Fitted Model Residuals"
)
lines(zoo(residuals_dbd[, "abline"]), col = "red", lwd = 2)

ecostats::qqenvelope(
  as.numeric(residuals_dbd[, "Residuals"]),
  ylab = "Randomized Quantile Residuals",
  main = "QQPlot Residuals"
)
qqline(residuals_dbd[, "Residuals"], col = 2)

```

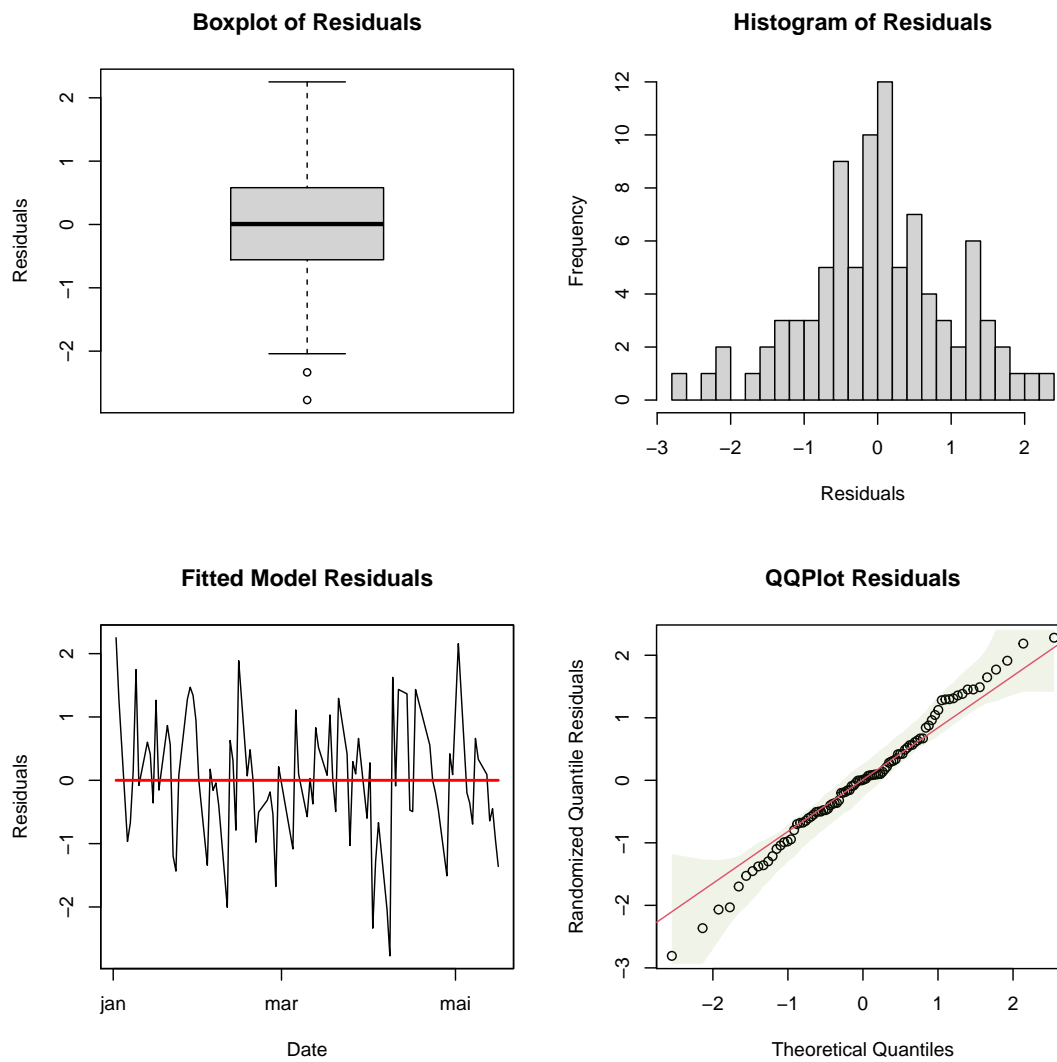


Figura 8: Gráficos da análise de resíduos em 2025 para o modelo ajustado.

```
par(mfrow = c(1, 1))
```

Conclusão

Em conclusão, viu-se que o ajuste do primeiro modelo considerando apenas o período de 2024 para predição dos valores de fechamento em 2025 não conseguiu aderir tão bem aos valores observados em termos das estimativas pontuais, apenas para as bandas de confiança. Por outro lado, o ajuste de um novo modelo a cada dia simulou

razoavelmente próximo os valores observados em termos das estimativas pontuais, por tanto se sobressaindo como o melhor dos dois modelos.

Em aspectos gerais do problema, ambos os modelos não foram capazes de apresentar resíduos normalmente distribuídos, bem como o próprio retorno diário também pareceu ter problemas de normalidade. Sob essa ótica, tem-se que nenhum dos modelos estudados parece adequado para o problema, pela suposição de normalidade do movimento browniano, mesmo que o modelo atualizado diariamente tenha um ajuste visivelmente razoável.

Suspeita-se que essa inconsistência poderia ser corrigida utilizando outra distribuição de probabilidade para modelar o problema, tal como proposto pela Teoria de Valores Extremais (Otiniano et al. (2021)).

Referências

- Black, Fischer, e Myron Scholes. 1973. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *Journal of Political Economy*.
- Otiniano, Cira E. G., Bianca Sousa, Roberto Vila, e Marcelo Bourguignon. 2021. «A Bimodal Model for Extremes Data». <https://arxiv.org/abs/2109.12738>.